INTENZITÁSALAPÚ MODELLEZÉS ÉS A MÉRTÉKCSERE[1]

MEDVEGYEV PÉTER – PLANK PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem – Morgan Stanley

A dolgozatban a hitelderivatívák intenzitásalapú modellezésének néhány kérdését vizsgáljuk meg. Megmutatjuk, hogy alkalmas mértékcserével nemcsak a duplán sztochasztikus folyamatok, hanem tetszőleges intenzitással rendelkező pontfolyamat esetén is kiszámolható az összetett kár- és csődfolyamat eloszlásának Laplace-transzformáltja.

Bevezetés

A hitelderivativák valószínűségszámítási eszközökkel történő matematikai leírására két alapvetően eltérő modellezési filozófia áll rendelkezésünkre. A strukturális modellek a csődöket közvetetten, pl. a vállalati kötvényekre vonatkozó CDS-ekből álló portfólió esetében a vállalatok értékének alakulásából próbálják visszakövetkeztetni, ám ekkor jelentős számú, s legtöbbször megkérdőjelezhető feltételezéssel kell élnünk. Ezzel szemben a redukált formájú modellek esetében közvetlenül a csődidők és a csődök során realizálódó károk modellezése a célunk, mely ekvivalens a csődök egy adott időpontbeli számát megadó számláló folyamat, illetve a veszteség nagyságát is figyelembe vevő összetett folyamat tanulmányozásával. Ilyenkor a kár vagy csődesemények okáról, egymásutánjáról lényegében semmilyen közgazdasági, strukturális feltétellel nem élünk. Mindössze azt követeljük meg, hogy az egyes káresemények bekövetkezésekor az esemény bekövetkezéséről tudomásunk legyen. Matematikai terminológiában ez azt jelenti, hogy az egyes káresemények bekövetkezési időpontjai úgynevezett megállási időket alkotnak.

Vegyük észre, hogy a helyzet nagyon hasonló ahhoz, amivel az operációs kockázat meghatározásakor szembesülünk. E terület alapmodellje szerint a hibák bekövetkezését Poisson-folyamattal, míg a kár nagyságát lognormális eloszlású valószínűségi változóval szokás modellezni, melyek együtt egy összetett Poisson-folyamatot határoznak meg. A hitelderivatívák esetéhez hasonlóan végső soron itt is az egyes időpontokban fennálló kumulatív kárnagyság (tehát az összetett Poisson-folyamat adott időpontbeli értékének) eloszlását szeretnénk megadni. A feladat megoldása azonban már ezen az egyszerű szinten is komoly kihívást jelent, hiszen a keresett eloszlást közvetlenül nem tudjuk kiszámolni. A közismert technika a Laplace-transzformált invertálására épül. Nem meglepő tehát, hogy a hitelderivatívák redukált formájú modellezése során is e transzformált meghatározása a célunk.

[1] Beérkezett: 2011. december 9. E-mail: `medvegyev@uni-corvinus.hu`.

Fontos különbség azonban az operációs kockázat modellezése és a pénzügyi matematika között, hogy az utóbbi esetén az a valószínűségszámításban alapvető szerepet játszó feltétel, miszerint a valószínűségi mérték ismert és előre rögzített nem használható. A pénzügyi matematika legfőbb matematikai trükkje az, hogy a piaci szereplők preferenciáit a kockázatmentes mértékbe olvasztja be. Ennek nagyon egyszerű oka van: a pénzügyi döntésekre általában a nagy számok törvénye nem használható. Bár fájóan sokan úgy képzelik, a pénzügyek nem szerencsejáték, ahol a tömegjelenségek viselkedési szabályai érvényesek, hanem kockázatkezelés, ahol a veszteségtől való félelem, a kockázat minimalizálása a cél. Eleve kérdéses, hogy az egyes pénzügyi szituációk tekinthetők-e ismétlődő eseményeknek, de ha annak is tekinthetők, az egyes kimenetektől való félelem automatikusan torzítja a kimenetek árát. Hiába lesz egy ismétlődő helyzetben két kimenet valószínűsége azonos, ha az egyiktől jobban félünk, mint a másiktól, akkor az árakban nem elsősorban a kimenetelek valószínűsége, hanem a félelmek relatív foka fog tükröződni. A pénzügyekben ugyanúgy, ahogyan a közgazdaságtan minden más területén az árakat lényegében a kereslet és a kínálat határozza meg, amelyek pedig alapvetően a piaci szereplők motívumaitól, vagyis azok hasznossági függvényeitől függenek. Az alapvető módszertani probléma az, hogy mivel a piaci szereplők gondolatait nem ismerjük, feltesszük, hogy az általuk bevitt torzítást az árakból tudjuk visszakövetkeztetni. Feltesszük tehát, hogy adott egy $\mathbf{Q}$ mérték, amely kódolt formában tartalmazza mind a valószínűségeket, mind a hasznossági függvények által a piaci mechanizmusokon keresztül gyakorolt torzító hatásokat. Az így kapott mértékről egyetlen dolgot tehetünk fel, nevezetesen, hogy a mérték ekvivalens az eredeti esetlegesen létező valószínűségi mértékkel. Ez alatt azt értjük, hogy a nulla valószínűségű események a két mérték alatt megegyeznek. Vagyis a két mérték alatt a lehetetlennek, következésképpen a biztosnak tekintett események azonosak. Feltesszük továbbá, hogy ezen mérték szerinti diszkontált várható értékként számoljuk ki az aktuális árakat. Ezt a modellfeltételt két dologra tudjuk felhasználni: egyrészt az ismert árakból következtetni tudunk az ismeretlen $\mathbf{Q}$ mértékre (ezt hívjuk kalibrálásnak), másrészt a kalibrált $\mathbf{Q}$ segítségével következtetni tudunk az esetleges ismeretlen árakra. Az árakat több okból nem ismerjük: vagy azért, mert még a termék nincs is a piacon és az esetleges alkalmas piaci árat akarjuk kitalálni, vagy, igen gyakran azért, mert a termék piaca nem elég likvid ahhoz, hogy az utoljára megfigyelt árak mögötti tényleges kereslet-kínálati viszonyokat mérvadónak tekintsük. A kalibráció, vagyis a $\mathbf{Q}$ mérték kiszámolásának további előnye, hogy a $\mathbf{Q}$ mérték információt nyújt a piaci szereplők kockázati preferenciájáról is, vagyis az egyes kockázati forrásoktól való félelem relatív szintjére. Például a CDS-ek esetén a CDS-ek árából következtetni lehet a csőd $\mathbf{Q}$ mérték alatti valószínűségére, amely nemcsak az esemény bekövetkezésének valószínűségét tükrözi, hanem a csőd következményeitől való félelem fokára is rávilágít.

Ezzel a megközelítéssel van azonban egy alapvető matematikai probléma: a különböző sztochasztikus tulajdonságok egy jelentős része nem invariáns az ekvivalens mértékcserére nézve. Mivel a valószínűségszámítási intuíció általában a „valódi" valószínűségre épül, kérdéses, hogy a kicserélt mérték esetén milyen sztochasztikus tulajdonságok maradnak érvényben. A pénzügyi modellezés során gyakran keveredik e tulajdonságok valós és a kockázatmentes mérték alatti vizsgálata, s a kettő közötti eltérés a modellkockázat legfőbb forrása. Miként megjegyeztük, az egyedüli alkalmazható megkötés, hogy a nulla valószínűségű események halmaza nem változik. Ennek igen egyszerű közgazdasági oka van: azoknak és csakis azoknak a véletlen kifizetéseknek lesz értelmes módon pozitív az ára, amikor pozitív valószínűséggel kapunk is valamit. Következésképp feltehetjük, hogy a mértékcsere ekvivalens. Ha nem is túl sok tulajdonság, de azért néhány nem változik az ekvivalens mértékcsere során. Ilyen az ekvivalencia osztályok fogalma, az arbitrázs fogalma, a szemimartingálok osztálya, illetve a kvadratikus variáció, továbbá a trajektóriák topológiai tulajdonságai (mint amilyen pl. a folytonosság vagy a differenciálhatóság).

Az alábbi tárgyalás kiindulópontja, hogy a számláló folyamatok egy bizonyos családja, nevezetesen az intenzitással rendelkező számláló folyamatok osztálya is invariáns az ekvivalens mértékcserére nézve, azaz a valós és kockázatmentes mérték közötti eltérés az intenzitás változásán keresztül modellezhető. Ez a tétel talán nem annyira ismert, mint az említett többi invariancia tulajdonság, így a bizonyítását a következőkben ismertetni fogjuk.

Az intenzitással rendelkező számláló folyamatok osztályának egyik igen hasznos részcsaládját alkotják az úgynevezett duplán sztochasztikus folyamatok. Ezek esetében ugyanis a Poisson-folyamatokra érvényes számos elegáns számolási szabály közvetlenül átvihető. Így például meghatározható az összetett folyamat eloszlása, vagyis amikor a véletlenszerűen bekövetkező károk modellezésekor nemcsak a károk számát, hanem azok nagyságát is figyelembe akarjuk venni. Az eljárás kiindulópontjául az az észrevétel szolgál, hogy az összetett eloszlás Laplace-transzformáltja az intenzitás alapján felírható. Felírunk egy modellt az intenzitás alakulására, ez alapján kiszámoljuk az összetett eloszlás Laplace-transzformáltját, majd a transzformált invertálásával meghatározzuk az összetett eloszlást. Ezen elv központi szerepet játszik az intenzitásalapú modellezés során, s rámutat miért is jelentenek e folyamatok hatékony vizsgálódási eszközt.

A duplán sztochasztikus folyamatok családja azonban túlságosan szűk: egyrészt e folyamatok nem invariánsak az ekvivalens mértékcserére nézve (ld. [7]), másrészt nem képesek reprodukálni a csődök klasztereződésének jelenségét, azaz a korábban bekövetkezett csődök száma nem növelheti a későbbi csődök bekövetkezésének esélyét. Általános esetben azonban az intenzitással rendelkező számláló folyamatok Laplace-transzformáltjának meghatározása közvetlenül nem egyszerű feladat. A megoldást az [5] dolgozat egy igen szép gondolata tartalmazza: egy további mértékcserével a Laplace-transzformált nem duplán sztochasztikus folyamat esetén is kiszámolható az intenzitás alapján. Az említett publikáció egy korábbi verziója azonban hibás volt, az aktuális változata viszont túl körülményes és igen nehezen követhető, így vélhetően akadályozza a technika széles körű elterjedését. Mivel véleményünk szerint egy igen fontos matematikai eszközről van szó, így az alábbiakban részletesen bemutatunk egy olyan, tőlünk származó egyszerű gondolatmenetet, amivel az [5] dolgozat eredményei könnyen – legalábbis a sztochasztikus analízisben járatos olvasó számára könnyen – megérthetőek. Az általunk bemutatott megközelítés segítséget adhat a konkrét alkalmazások hatékony kidolgozása során, ugyanakkor a módszer alapgondolatának megértéséhez nem szükséges, hogy az olvasó a sztochasztikus analízis sajátos nyelvezetének minden részletével tisztában legyen. Az egyes lépések matematikai tárgyalása mellett megpróbálunk a sztochasztikus analízisből átvett tételek egyszerű közgazdasági interpretációjára is rávilágítani.

1 A közgazdasági háttér rövid bemutatása

A dolgozatban tárgyalt matematikai probléma közgazdasági hátterének bemutatásához érdemes a jelzáloghitelekre épülő származtatott termékek árazásának kérdéséből kiindulni. A probléma fontossága nemcsak abból fakad, hogy történetileg éppen ezen derivatívák piacának összeomlása vezetett a jelenlegi pénzügyi válsághoz, hanem azért is, mert az alaptermék jelentősége a válságot követően is fennmarad, hiszen a jelzáloghitelek teszik ki a lakossági hitelállomány túlnyomó többségét. Vagyis a válság kapcsán felmerült problémák nem tüntették el ezt az alapterméket és az avval kapcsolatos kockázatokat, így a jelzáloghitelek viselkedésének megértése továbbra is a pénzügyi elmélet egyik fontos feladata marad.

De miből is fakad a jelzáloghitelek kockázatossága? Ennek több oka van: egyrészt a hitelt felvevő személy becsődölhet, így nem tudja fizetni a további részleteket. A csőd lehetőségén kívüli további probléma a törlesztőrészlet bizonytalansága, melynek nagysága lényegében a piaci szereplőktől független külső – nagyrészt makroökonómiai – tényezők alakulásától függ. Normál piaci-pénzügyi körülmények között a törlesztőrészlet az aktuális kamatláb függvénye, ám további (közvetett) hatásként megemlítendő, hogy magas kamatláb esetén általában alacsony a foglalkoztatás, tehát kisebb a kölcsönt felvevő jövedelme, így nő a csőd valószínűsége. Magyarországon a törlesztőrészletek gyakran idegen devizában vannak meghatározva, következésképpen a kamatlábak ingadozásán kívül még a devizaárfolyamok alakulása is egy bizonytalansági forrásul szolgál. Ezzel ellentétes folyamat az újrafinanszírozás lehetősége, melyre számos országban adódik lehetőség: amikor a gazdasági környezet javul és így a kamatlábak csökkennek az adósok egy esetlegesen kedvezőbb hitellel kiválthatják a korábbi hiteleiket, ám ez a hitelező szempontjából szintén veszteséget jelent. Következésképpen a jelzáloghitelekből származó pénzáram lényegében áttekinthetetlen módon függ a makroökonómiai feltételektől. Ezen bizonytalanságok együttese olyan nagy, hogy egyetlen piaci szereplő sem szívesen vállalja át őket, a kölcsönt nyújtó helyi bankok és pénzügyi intézmények tehát megpróbálnak ezektől a kockázatoktól megszabadulni. A dolog némiképpen emlékeztet a viszontbiztosítás problémájához. A helyi „kis” biztosítók az egyedi biztosítási kötvényeket egy „nagyobb” kosárba helyezik és abban bíznak, hogy az egyedi kockázatok ingadozása –

a nagy számok törvénye alapján – kiegyenlítődik és így a kockázatos pénzáramokat biztos pénzárammá lehet konvertálni. A jelzáloghitelek esetén az analóg trükk a jelzálogalapú kötvények kibocsátása: egy sor egyedi jelzálogkötvényből egy új „szuperkötvényt” hozunk létre, e ezen új kötvény birtokosának átadjuk a „szuperkötvény” alapjául szolgáló egyedi jelzálogokból származó bizonytalan pénzáramokat, természetesen egy fix vagy előre meghatározott rendben felmerülő díj ellenében. A kérdés már csak annyi, hogy mennyi ez a díj?

A probléma megoldására két út kínálkozik. Az egyik lehetőség az, hogy szakítunk a valószínűségszámítási nyelvezettel és a pénzügyi folyamatokat a hagyományos közgazdaságtani eszközökkel próbáljuk modellezni. Ilyenkor azonban szembekerülünk avval, hogy a mikroökonómiai szemléletű közgazdasági modellek jelentős része nagyon nehezen operacionalizálható, ugyanis az elméletben alapvető szerepet játszó hasznossági függvények nehezen figyelhetők meg. Gyakran elhangzik, hogy a pénzügyi elemzésben játékelméleti eszközöket kellene használni. Elvileg igen, de a pénzügyi gyakorlat mindennapjaiban e modellek használhatóságát még nem sikerült igazolni, főleg azért nem, mert a játékelmélet alapjául szolgáló fogalmak nem közvetlenül megfigyelhetők, fixen adatbázisokban nem írhatók le. Egy másik lehetőség a makrotényezők beépítése a modellekbe, de ilyenkor meg avval kell számolni, hogy a modellek adattartalma és időhorizontja egyszerűen alkalmatlan a piaci gyakorlat által támasztott pontosság kielégítésére. További – jobb alternatíva híján felmerülő – lehetőség, hogy megőrizzük a sztochasztikus nyelvezetet, annak ellenére, hogy pontosan látjuk az ebből eredő problémákat, de óvatosan és rendkívül körültekintően járunk el: csak olyan valószínűségi modelleket engedünk meg, amelyek invariánsak az ekvivalens mértékcserére.

Összetett veszteségfolyamatok közgazdasági problémái

Miként az előző pontban említettük, a különböző pénzügyi elemzések egyik alapvető kérdése, hogy miként modellezhetjük egy adott időszak alatt bekövetkező káresemények együttesének eloszlását, mely nyilvánvaló módon két komponenstől függ: milyen gyakran és mekkora kár következett be. A klasszikus biztosításmatematikában feltehetjük, hogy a két folyamat egymástól független, így e megközelítési mód során ezek egymástól különállóan modellezhetőek. E feltétel jelentős egyszerűsítést jelent a modell becslése szempontjából, hiszen hosszabb időszak alatt nagy számú adat figyelhető meg mind az egyes események között eltelt időszakokról, mind a bekövetkező károk nagyságáról. A valószínűségszámításban azonban általánosan nem a peremeloszlások modellezése, hanem az együttes eloszlások megadása jelenti a problémát. A feltételezett függetlenség miatt természetesen az együttes eloszlás teljességgel leírható a peremeloszlások segítségével, ám mint arra a bevezetőben is kitértünk, a jelzáloghitelek esetében a függetlenség feltételezése nem elfogadható, hiszen a pénzügyi csődesemények esetén az egyik alapvető észrevétel a folyamatok önerősítő volta. A bekövetkező csődök számának növekedése tovább növeli a csődök intenzitását, illetve nagyságát.

További problémát jelent, hogy a káresemények összetett eloszlásának modellezését két különböző célra lehet felhasználni: a tőketartalék meghatározására, illetve a csődeseményekhez kötött származtatott termékek előző pontban felvetett árazására. Az első esetben arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott valószínűség mellett mekkora veszteséget szenvedhetünk el, ilyenkor tehát a számítások során a valós veszteségadatokra támaszkodunk. A pénzügyi matematika említett alapmódszertana szerint azonban a származtatott termékek árazásakor hasonló, de semmiképpen sem azonos módon kell eljárni. Ekkor a modellben szereplő veszteségfolyamat viselkedésére nem a tényleges, hanem egy mesterséges – a kockázatokat és a piaci szereplők vélekedését egyaránt tükröző – valószínűségi mérték alatt, a piacon megfigyelhető árakból kiindulva próbálunk következtetni. Vagyis úgy kell meghatározni (kalibrálni) a folyamatot leíró paramétereket, hogy a kalibrált paraméterekkel az adott modellkereten belül a lehető legjobban tudjuk közelíteni a származtatott termékek aktuális, piacon megfigyelt árait.

Valamely jövőbeli kifizetés jelenbeli ára két tényezőtől függ: egyrészt a kifizetés időpontjától, másrészt annak bizonytalanságától. Az idővel kapcsolatos problémákat a diszkontálással oldjuk meg, az ehhez szükséges diszkonttényező pedig a piacon megfigyelhető kamatokra támaszkodva meghatározható. A diszkonttényező, illetve a kamatok azonban csak a biztos kifizetések időben való átcsoportosításáért járó kompenzáció mértékét írják le. Nem véletlenül használjuk a bizonytalanság kifejezést, ugyanis a hagyományos valószínűségszámítási értelemben nem feltétlenül tudjuk az egyes kimenetelek eloszlását. Általában nem tömegeseményekről van szó, hanem egyedi történésekről. A bizonytalanság modellezése úgy történik, hogy az egyes lehetséges kimenetelek mindegyikéhez egy-egy súlyt rendelünk. Ezeket a súlyokat szokás szubjektív valószínűségnek nevezni, a súlyok relatív nagysága pedig a veszteségektől való félelem mértékét tükrözik.

A minden pénzügyi tankönyvben megjelenő példa szerint a lottó játék várható nyeresége negatív, de a kockázati preferenciák miatt a lottó játék ára mégis pozitív. Ennek oka, hogy a kis valószínűségű nagy nyereség lehetőségét többre értékeljük, mint a nagy valószínűségű kis veszteséget. A preferenciák által indukált torzítás arányára az árból és az eladott szelvények számából következtethetünk. Ezek a félelmek azonban közvetlenül nem figyelhetők meg, csak a piaci árakon keresztül következtethetünk rájuk, vagyis az aktuális, a diszkontáláshoz használt kamatokat megadó hozamgörbe és a bizonytalan kifizetéssel rendelkező termékek árából visszaszámoljuk a félelmeket megadó súlyokat. A modellt tehát az árakhoz és nem a tényleges gyakorisági táblákhoz kalibráljuk. A modell további használatakor implicite feltételezzük, hogy a kalibráció során kapott súlyok – legalábbis egy rövid időhorizonton – stabilak és függetlenek a közvetlenül megfigyelt helyzettől, következésképpen az ismeretlen árú kifizetések esetén is alkalmazhatóak. Vegyük észre, hogy a kalibráció széleskörű használatára épül a vállalati pénzügyek azon számtalanszor használt szabálya is, miszerint valamely beruházás jövőbeli pénzáramát egy vele azonos bizonytalanságú pénzáram ismert diszkonttényezőjével kell diszkontálni.

Az így kapott módszertan nyilvánvaló előnye, hogy nagymértékben támaszkodhat a sztochasztikus folyamatok és a valószínűségszámítás kiterjedt irodalmára. Szintén fontos tulajdonság, hogy a kockázatkezelési gyakorlatban használt eszköztár (legalábbis részben) azonos matematikai alapokra épül, mint a kalibráció módszertana, így az alkalmazás során egyfajta kereszthatás léphet fel. Ám a megközelítés előnye egyúttal a hátrányává is válik: alapvetően a valószínűségszámítási intuícióra épül, ám miként jeleztük, mindössze felületes formai azonosságról van szó. A valószínűségről mindenkinek van egy többé-kevésbé megbízható intuíciója, ami viszont nem mondható el a bizonytalan körülmények közötti áralakulásról, illetve az egyensúlyi piaci folyamatokról.

Miként már jeleztük, matematikailag az egyik alapvető kérdés a következő: ekvivalens mértékcsere esetén miként változnak a különböző sztochasztikus tulajdonságok? Melyek azok a modellfeltételek, módszerek, amelyek invariánsak az ekvivalens mértékcserére? Tekintsük például a sztochasztikus folyamatok irodalmának egyik leggyakrabban használt modelljét, a Markov-láncokat. Ha megváltoztatjuk az alapul vett mértéket, nyilvánvalóan megváltozhatnak az átmenetvalószínűségek, de sajnos maga a Markov-tulajdonság is eltűnhet. Gondoljunk csak arra, hogy a következő csőd bekövetkezésének időpontja adott esetben független lehet a korábban bekövetkezett csődidőpontoktól, de a következő csőd elleni biztosítás ára függ a még rendelkezésre álló tartalékoktól, így azok folyamatos kimerülése esetén az újabb csőd elleni biztosítás ára nő, vagyis a folyamat nem Markov-jellegű, ugyanis az ár függ a korábban megtett úttól, nem csak a jelen helyzettől. Ez még akkor is igaz, ha a csődfolyamat ténylegesen Markov-lánc volt. Felvetheti valaki, hogy a tartalékokat is beépítve a modellbe a Markov-tulajdonság megőrizhető, de ez félrevezető, ugyanis a kitörő pánik egyszerűen a múltbeli események lefolyásától függ, amelynek csak egyik eleme a tartalék nagysága. Következésképpen az aktuális ár nemcsak a jelen helyzettől függ, hanem igen nagy mértékben a jelen helyzethez vezető úttól is. Hangsúlyozzuk, hogy ez akkor is igaz, ha az alapul vett tényleges folyamat statisztikailag kimutathatólag Markov-folyamat volt. De egy Markov-folyamat alakulásától való félelem miért is lenne Markov-folyamat?

Független és azonos eloszlású valószínűségi változók adott sorozata esetén a mértékcsere során nemcsak az eloszlás, illetve a hozzá kapcsolódó paraméterek (mint amelyiken a várható érték és szórás) változhatnak meg, hanem a függetlenség is eltűnhet, sőt a valószínűségi változók azonos eloszlására tett megkötés sem marad felétlenül érvényben. És ezen semmit sem segít az, hogy a mértékcsere ekvivalens. A sztochasztikus modellezés másik kedvence a Poisson-folyamat, ahol az egyes események közötti várakozási időt független és azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók adják. Mivel ekvivalens mértékcserére ezen tulajdonságok egyike sem invariáns, milyen tulajdonságú marad a folyamat a mértékcsere után? Az árazás szempontjából milyen eloszlást fognak követni az egyes események között eltelt időpontok? Például ahogyan nő a csődesemények száma, úgy nő a következő csődtől való félelem, amely a csőd elleni biztosítás árának növekedésében jelenik meg.

A hagyományos biztosításmatematikai szemléletben az ár a várható veszteségektől függ, így az árazás szempontjából úgy tűnik, mintha a folyamat intenzitása nőne, valójában pedig esetleg csökkenhet is, ugyanis adott számú csőd esetén – éppen a rendelkezésre álló erőforrások végessége miatt – a pánik akkor is kitörhet, ha a további veszteségek időbeli gyakorisága már elkezdett csökkeni. Még ha fel is tesszük, hogy a csődök száma továbbra is Poisson-folyamatot követ, hogyan határozzuk meg a folyamat intenzitását megadó λ paraméter alakulását, ha a ténylegesen megfigyelt folyamat paramétere nem használható? Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a statisztikailag megfigyelt csődintenzitás a várható veszteségek eloszlásának kiszámolására használható, de a veszteségért fizetendő ,,biztosítás árának" meghatározására nem, ugyanis ez az ár nem valószínűségi kérdés, hanem a kereslet és kínálat eredője, vagyis végeredményben a kockázati preferenciák függvénye.

2 Intenzitással rendelkező pontfolyamatok

A hitelderivatívák, illetve általában az összetett veszteségfolyamatok matematikai modellezésének legegyszerűbb, de mégis talán a leghatékonyabb technikáját az intenzitással rendelkező pontfolyamatok adják. E modellek legalapvetőbbike a Poisson-folyamat, a pontfolyamatokat pedig mint a Poisson-folyamat általánosításait kell elképzelnünk. A pontfolyamatok megadásához elegendő ismernünk az egyes események bekövetkezésének időpontját leíró (τ_n) megállási időkből álló sorozatot[2]. Értelemszerűen feltesszük, hogy $\tau_0 = 0$ és minden n-re $\tau_n < \tau_{n+1}$. A (τ_n) sorozat felírásával ekvivalens, ha ismerjük az $N(t) \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \chi(\tau_k \leq t)$ számláló folyamatot. Miként a nevéből is kiderül, az $N(t)$ a t időpontig bekövetkezett események számát adja meg. Az N számláló folyamat modellezése közvetlenül nehéz feladat, ezért további megkötéseket szokás tenni. A címben szereplő intenzitás szó arra utal, hogy valamiképpen mérhető, hogy az ugrások milyen ,,intenzitással" következnek be. A pontos matematikai definíció a következő:

1. Definíció. *Legyen N egy tetszőleges számláló folyamat, $\lambda_s \geq 0$ pedig egy progresszíven mérhető folyamat*[3]*. Azt mondjuk, hogy a λ az N folyamat intenzitása, ha az*

$$M(t) \overset{\circ}{=} N(t) - \int_0^t \lambda_s \, ds$$

[2]Emlékeztetünk, hogy megállási időn olyan véletlen időpontot értünk, amely mögötti esemény bekövetkezésekor tudjuk, hogy az esemény bekövetkezett. Vagyis például egy adott időszakban az ár minimumának időpontja nem megállási idő, ugyanis csak később derül ki, hogy mikor volt az ár minimális. Vagyis feltesszük, hogy a csőd időpontjában tudjuk, hogy a csőd bekövetkezett. Ez praktikusan azt jelenti, hogy a csődöt az első nemfizetéssel azonosítjuk.

[3]Ha az olvasó nem járatos a sztochasztikus analízis nyelvezetében, a progresszíven mérhető jelzőt figyelmen kívül hagyhatja. Elegendő, ha olyan folyamatra gondol, amely folytonos komponensek mellett ugrásokat is tartalmazhat, vagyis egy igen bő, szakadásokat is megengedő családról van szó.

úgynevezett kompenzált folyamat lokális martingál[4].

A Poisson-folyamat esetén a $\lambda_s \equiv \lambda$ konstans, az integrál pedig éppen a Poisson-folyamat várható értékét megadó λt alakra egyszerűsödik. Ilyenkor az M folyamatot szokás kompenzált Poisson-folyamatnak is nevezni. Mivel a Poisson-folyamat esetén az M független növekményű és nulla várható értékű, így ekkor az M nemcsak lokális martingál lesz, hanem valódi martingál is. Számos technikai probléma elkerülése céljából a sztochasztikus analízisben megszokott módon azonban célszerű megengednünk a definícióban, hogy általános esetben az M nem feltétlenül valódi martingál. Az intenzitást tartalmazó integrál speciális esete az általános kompenzátor fogalmának. A specialitás abból ered, hogy a kompenzátorról feltesszük, hogy deriválható. Megmutatható, hogy minden N pontfolyamathoz található egy olyan (N^p módon jelölt) előrejelezhető, monoton növekedő és jobbról folytonos[5] folyamat, hogy az $N - N^p$ kifejezés lokális martingál. Ha az N^p folytonos, akkor azt szokás mondani, hogy az N folytonosan kompenzálható. Az intenzitás létezésének feltétele azt jelenti, hogy a kompenzátor nemcsak folytonos, hanem abszolút folytonos is, és a kompenzátor deriváltja éppen az intenzitás. Folytonos esetben a kompenzátor interpretációja igen kézenfekvő. Az N egy olyan ugró folyamat, amely a véletlenszerűen megjelenő egységnyi veszteségek összegét adja meg. Az N^p egy olyan folyamatosan fizetett biztosítási díjként interpretálható, amely az átlagban eltekinthetőnek gondolható lokális martingál erejéig költség szempontból átlagban azonos az N-nel.

A lokális martingál feltételnek számos előnye van, többek között az, hogy a kompenzátor kiszámolására használható a következő egyszerűen alkalmazható kritérium.

2. Állítás. *Egy N^p előrejelezhető folyamat pontosan akkor lesz az N számláló*

[4] A lokális martingál fogalma mögött intuitíve egy olyan folyamat értendő, amely statisztikai értelemben elhanyagolható és lényegében a szokásos ,,hibatag” sztochasztikus analízisben használt absztrakciója. A későbbiek szempontjából nem lényeges, hogy az olvasó pontosan értse a lokális martingál kifinomult fogalmának részleteit. A lényeges észrevétel az, hogy a definíció szerint az N számláló folyamat két részre bontható: egy trend tagra és egy hibatagra. A definíció lényeges feltétele az, hogy a trend tag egy differenciálható trajektóriákkal rendelkező folyamat és a trend deriváltja éppen az intenzitás. A továbbiak megértése szempontjából a kulcs megjegyzés az, hogy az N hibatagra és trendre való felbontása változhat az ekvivalens mértékcserével. Az ekvivalens mértékcsere képes a trendet megváltoztatni a hibatag rovására, ugyanis egy valószínűségi változó várható értéke a valószínűségi mértéktől is függ és nem csak a változótól. A meglepő matematikai eredmény, amely az alábbi gondolatmenet kiindulópontja, hogy intenzitással rendelkező folyamat esetén az ekvivalens mértékcserével módosított új trend szintén deriválható lesz. Vagyis a deriválható trend létezése független az aktuális ekvivalens mértéktől, bár a trend nagysága nyilván változhat. Következésképpen a lehetséges mértékcserék az intenzitás segítségével modellezhetők.

[5] Az előrejelezhetőség ismét egy a sztochasztikus analízisben használt jól definiált fogalom, amely alatt az olvasó gondolhat a folytonosságra is, ugyanis minden folytonos folyamat előrejelezhető is. Emlékeztetünk, hogy az előrejelezhető folyamatok σ-algebrája éppen a folytonos, adaptált folyamatok generálják. Vagyis bár nem tudjuk mindig garantálni azt, hogy a kompenzátor folytonos legyen, legalább a mérhetőségi struktúra szintjén megpróbáljuk a folytonosságot ,,megtartani”. Ugyanakkor most is egy olyan technikai részletről van szó, amely az általános keret miatt szükséges, valójában éppen az a célunk, hogy megmutassuk, elég a deriválható folyamatokkal foglalkozni.

folyamat kompenzátora, ha tetszőleges C előrejelezhető folyamat esetén

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty C_s\,dN(s)\right)=\mathbf{E}\left(\int_0^\infty C_s\,dN^p(s)\right)\,.$$

Speciálisan egy $\lambda_s\geq 0$ progresszíven mérhető folyamat pontosan akkor lesz az N számláló folyamat intenzitása, ha tetszőleges C előrejelezhető folyamat esetén

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty C_s\,dN(s)\right)=\mathbf{E}\left(\int_0^\infty C_s\lambda_s\,ds\right)\,.$$

Mielőtt továbbmegyünk, érdemes a tétel közgazdasági interpretációjára röviden kitérnünk. A definícióban szereplő C folyamat igen absztrakt szinten portfóliósúlyoknak tekinthető. A C előrejelezhetősége pedig éppen azt jelenti, hogy a befektetés során használt súly nem függ a következő ugrás időpontjától, azaz nem kötünk biztosítást azt követően, hogy a káresemény már bekövetkezett. Mivel az N számláló folyamat diszkrét időpontokban egységnyi ugrásokat tartalmaz, így a várható értékben szereplő $\int_0^\infty C_s\,dN(s)$ integrál a

$$\int_0^\infty C_s\,dN(s)=\sum_{k=0}^\infty C(\tau_k)\,,$$

kifejezésre egyszerűsödik, vagyis a τ_k időpontokban bekövetkező károk esetén az éppen akkor aktuális portfólió nagysága kerül kifizetésre. A lényeges észrevétel, hogy a kifizetések véletlen, de diszkrét időpontokban jelentkeznek. A másik oldalon szereplő $\int_0^\infty C_s\,dN^p(s)$ integrál az N^p (jellemzően folytonos) folyamat által meghatározott díjfizetéseket tartalmazza. A két várható érték azonossága pontosan azt jelenti, hogy az üzlet két ága átlagban azonos eredményre vezet. Összefoglalva tehát tetszőleges N számláló folyamathoz tartozik egy olyan díjfolyamat, amely segítségével az N-ben diszkrét módon felmerülő kifizetések kisimíthatóak, vagyis a kockázatok, legalábbis átlag szintjén kompenzálhatóak egy folytonos díjfizetés által. A tétel természetesen igen absztrakt, bizonyítása pedig meghaladja a dolgozat kereteit, ám az érdeklődő Olvasó a legtöbb sztochasztikus analízissel foglalkozó könyvben megtalálhatja (ld. pl. [9]).

De mi történik a mértékcsere során? Mivel a számláló folyamatok definíciójában csak mérhetőségi feltételek játszanak szerepet, így N az új mérték alatt is számláló folyamat marad, tehát az a tény sem változik, hogy rendelkezik kompenzátorral, mely természetesen nem feltétlenül lesz azonos az eredetivel. De milyen családban keressük az új kompenzátort? Ugyan a későbbiekben erre nem lesz szükségünk, de érdemes megjegyezni, hogy egy N számláló folyamat N^p kompenzátora pontosan akkor folytonos, ha az ugrásokat megadó megállási idők nem előrejelezhetőek[6]. A megállási idők előrejelezhetősége nem függ a mértékcserétől, következésképpen a kompenzátor

[6]Egy σ megállási idő előrejelezhetősége definíció szerint azt jelenti, hogy megadható egy olyan (σ_k) megállási időkből álló sorozat, amely „figyelmeztet" a σ bekövetkezésére, vagyis a (σ_k) szigorúan monoton növekedőleg tart a σ-hoz, azaz $\sigma_k\nearrow\sigma$. Ha nem tudunk

folytonossága is invariáns a mértékcserére nézve. A tárgyalás kiindulópontja a következő tétel.

3. Tétel (Artzner–Delbaen). *Ha N egy intenzitással rendelkező számláló folyamat valamilyen $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték alatt, akkor az N intenzitással rendelkező számláló folyamat minden $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték alatt is.*

A tétel bizonyításának megismerése nem szükséges a dolgozat további gondolatmenetének megértéséhez, így az elhagyható. Mégis úgy gondoljuk, hogy részletes közlése segítheti a téma iránt mélyebben érdeklődő Olvasó munkáját, hiszen az állítás nem tartozik a sztochasztikus analízis általános elméletéhez, így kevésbé ismert. Ugyanakkor a tétel tartalmának megértése a későbbi gondolatmenet alapja: a számláló folyamat intenzitásának létezése univerzális, vagyis tetszőleges ekvivalens mérték esetén fennálló tulajdonság. A mértékcsere hatása tehát az intenzitások modellezésével megoldható.

Bizonyítás. Jelölje Z az ekvivalens mértékcserét megvalósító $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ Radon–Nikodym-deriváltat és legyen $Z_t \overset{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z \mid \mathcal{F}_t)$ a derivált folyamat. A $\mathbf{Q}$ alatti intenzitás meghatározását az előzőekben idézett állítás alapján fogjuk elvégezni. Tekintsük a következő számolást:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^\infty C_s\, dN(s)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_0^\infty C_s\, dN(s) Z\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\sum_k C(\tau_k) Z\right) =$$

$$= \sum_k \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C(\tau_k)Z) = \sum_k \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C(\tau_k)\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_k -}))\ ,$$

ahol $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ értelemszerűen a $\mathbf{Q}$ alatti várható értéket jelöli. Vegyük észre, hogy kihasználtuk, hogy mivel a C folyamat előrejelezhető, ezért a $C(\tau_k)$ mérhető az $\mathcal{F}_{\tau_k -}$ σ-algebrára nézve. A bizonyítás végén megmutatjuk, hogy létezik olyan K előrejelezhető folyamat, hogy minden k indexre $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_k -}) = K(\tau_k)$. Ezt kihasználva az előbbieket folytatva:

$$\sum_k \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C(\tau_k)\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_k -})) = \sum_k \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C(\tau_k)K(\tau_k)) =$$

$$= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_0^\infty C_s K_s\, dN(s)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_0^\infty C_s K_s \lambda_s\, ds\right) =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(C_s K_s \lambda_s)\, ds = \int_0^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(C_s K_s \frac{1}{Z_s} \lambda_s)\, ds =$$

$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^\infty C_s K_s \frac{1}{Z_s} \lambda_s\, ds\right)\ .$$

A számolás elejét és végét összevetve látható, hogy az N intenzitása a $\mathbf{Q}$ alatt éppen a $\lambda_s K_s / Z_s$ folyamat.

megadni egy ilyen sorozatot, akkor a σ bekövetkezésének időpontja semmilyen módszerrel nem látható előre. Az említett tétel szerint az N folyamatnak pontosan akkor van folytonos kompenzátora, ha az egyedi károk előrejelezhetetlenek, ahol az előrejelezhetetlenséget akár köznapi értelemben is használhatjuk.

A bizonyítás befejezéseként be kell látnunk a K folyamat létezését, melyre több lehetőségünk is adódik attól függően, hogy miképpen definiáljuk az $\mathcal{F}_{\tau-}$ σ-algebrákat. A legegyszerűbb megoldás talán a következő: tetszőleges τ megállási idő esetén jelölje $\mathcal{F}_{\tau-}$ azt a σ-algebrát, amelyet azok az $X(\tau)$ alakú változók generálnak, ahol az X folyamatok a folytonos és adaptált folyamatok osztályát futják be. Definíció szerint legyen tehát $\mathcal{F}_{\tau-}$ az a legszűkebb σ-algebra, amelyre nézve az $X(\tau)$ megállított változók mérhetőek minden folytonos és adaptált folyamat esetén. A monoton osztály tételből közvetlenül következik, hogy az $X(\tau)$ mérhető lesz minden olyan X folyamat esetén, amely mérhető a folytonos és adaptált folyamatok által generált σ-algebrára nézve, vagyis az $X(\tau)$ mérhető minden előrejelezhető folyamat esetén, ugyanis definíció szerint az előrejelezhető folyamatok éppen a folytonos és adaptált folyamatok által generált σ-algebrára nézve mérhető folyamatok halmaza. Ebből következően megadhatóak olyan K_n előrejelezhető folyamatok, amelyekre

$$K_n(\tau_n) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_n-}) \ .$$

Vezessük be a $K \overset{\circ}{=} \sum_n \chi((\tau_{n-1}, \tau_n])K_n$ folyamatot. Világos, hogy $K(\tau_n) = K_n(\tau_n)$ minden n index esetén. Az állítás bizonyításához elég megmutatni, hogy az $X_n \overset{\circ}{=} \chi((\tau_{n-1}, \tau_n])$ folyamatok mindegyike előrejelezhető. Vegyük észre, hogy

$$X_n = \chi([0, \tau_n]) - \chi([0, \tau_{n-1}]) \ ,$$

így elég belátni, hogy tetszőleges τ megállási idő esetén az $X \overset{\circ}{=} \chi([0, \tau])$ folyamat előrejelezhető. Legyen

$$Y_n(t, \omega) \overset{\circ}{=} \begin{cases} 1, & \text{ha } t \leq \tau(\omega) \\ 1 - n(t - \tau(\omega)), & \text{ha } \tau(\omega) < t < \tau(\omega) + 1/n \\ 0, & \text{ha } t \geq \tau(\omega) + 1/n \ . \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy Y_n folytonos és adaptált. Mivel $Y_n \to X$, ezért az X előrejelezhető. □

A következő kérdés az, hogy miként módosíthatjuk mértékcserével az intenzitást. Ehhez és a későbbiek megértéséhez azonban röviden emlékeztetnünk kell az úgynevezett Doléans-formulára és tulajdonságaira.

Idézzük fel, hogy a szemimartingál fogalma tekinthető a trend plusz hibatag felbontás általánosításának, tehát a szemimartingálokra a legegyszerűbb például éppen a számláló folyamatok szolgálnak. Természetes kérdésként merül fel, hogy miként érdemes definiálni az exponenciális függvényt e folyamatok esetében. Az exponenciális függvény legfontosabb tulajdonsága, hogy önmaga deriváltja, ám távolról sem nyilvánvaló, hogy egy sztochasztikus folyamat esetén miként értelmezzük a derivált fogalmát. A szemimartingálok speciális esetében viszont egyszerűen definiálhatjuk az integrált[7], így az exponenciális függvényt differenciál- helyett integrálegyenlettel adjuk meg:

[7] Érdemes emlékeztetni arra, hogy számos szerző éppen úgy definiálja a szemimartingálokat, mint azon folyamatok osztályát, amelyek esetén az integrál értelmezhető.

4. Definíció. *Ha X egy tetszőleges szemimartingál, akkor az*

$$E(t) = 1 + \int_0^t E(s-)\,dX(s)$$

sztochasztikus differenciálegyenlet megoldását $\mathcal{E}(X)$-szel fogjuk jelölni és az X-hez tartozó exponenciális szemimartingálnak fogjuk nevezni.

A szokásos differenciálásos jelölést használva a fenti Doléans-egyenletnek is nevezett kifejezés $dE = E_- dX$ alakban írható. Vegyük észre, hogy az exponenciális szemimartingál definíciója éppen arra épül, hogy az $y = \exp(ax)$ exponenciális függvény kielégíti a $dy = (ay)\,dx$ közönséges differenciálegyenletet. Az egyenlet megoldását a következő állítás tartalmazza.

5. Állítás (Doléans-formula). *Ha X egy tetszőleges szemimartingál, akkor a fenti Doléans-egyenlet rendelkezik egy $\mathcal{E}(X)$ módon jelölt egyértelmű megoldással, amelyre teljesülnek a következőek:*

1. *Ha az X véges változású, akkor az $\mathcal{E}(X)$ is véges változású.*
2. *Ha az X lokális martingál, akkor az $\mathcal{E}(X)$ is lokális martingál.*
3. *Az $\mathcal{E}(X)$ felírható a következő formulával:*

$$\mathcal{E}(X) = \exp\bigl(X - X(0) - \frac{1}{2}[X]^c\bigr) \prod (1 + \Delta X) \exp(-\Delta X)\ .$$

Érdemes ismét néhány kiegészítő megjegyzést tennünk, ugyanis a formula első ránézésre talán nehezen áttekinthető. A kifejezés tartalmának megértéséhez gondoljunk arra, hogy a közgazdaságtanban az exponenciális függvényt elsősorban a bankbetétek alakulásának leírására szokás használni. Az egyszerű interpretáció céljából tehát tegyük fel, hogy X a kamatlábak folyamata, $\mathcal{E}\,(X)$ pedig az indukált bankbetét alakulását adja meg. Az X folyamat felbontható egy folytonos rész és a ΔX módon jelölt ugrások összegére. Az exponenciális függvény az összegeket szorzatba viszi, ebből következően az additív ugrások hatása az exponenciális függvényben multiplikatív alakban jelentkezik. Az $\mathcal{E}(X)$ formula két részre bontható, melyek közül valószínűleg a második tag áttekintése egyszerűbb, ahol a $\prod$ szimbólum értelemszerűen azt jelenti, hogy az $(1 + \Delta X) \exp(-\Delta X)$ tagokat minden esetben az adott t időpontig össze kell szorozni. Az $\exp(-\Delta X)$ kifejezéseket azért szerepeltetjük az $1 + \Delta X$ tagokkal együtt, mert ezek nélkül esetlegesen a szorzat nem lenne konvergens. Ha azonban ettől eltekintünk, vagyis ha feltesszük, hogy a szorzat ezek nélkül is konvergens, továbbá az $\exp(-\Delta X)$ tagokat átvisszük az exponenciális függvénybe, akkor a kitevőben szereplő negatív jel miatt az ugrások levonhatjuk az X-ből és ilyenkor az $\exp(x)$ exponenciális függvényben a folyamat folytonos része szerepel, míg a produktumban pedig csak az $1 + \Delta X$ ugrások szorzata marad. Ez teljesen analóg avval, hogy ha adott az r_i kamatlábak egy sorozata, akkor a kamatos kamat szabálya szerint a betét adott időszakban való növekménye éppen $\prod_i (1 + r_i)$, vagyis diszkrét sorozat esetén az exponenciális függvényt a kamatos kamat szabályának megfelelően kell számolni.

Jóval fogósabb az első tag intuitív tartalmának megértése. Az előzőek alapján legyen tehát az X egy folytonos folyamat. Ebben az esetben az egyetemi tananyagban is szereplő Itô-kalkulus szabályai alkalmazandóak, ám attól még, hogy egy folyamat folytonos, nem biztos, hogy deriválható is. Ha az X folyamatot kis dX folyamatok összegeként képzeljük el, akkor egy ilyen növekményen a hagyományos $\exp(x)$ exponenciális függvény infinitezimálisan az $1 + dX$ hatást gyakorolja, feltéve, hogy a másodrendű $1/2(dX)^2$ tag már elég kicsi, mely akkor teljesül, ha X deriválható. Ha nem ez a helyzet, akkor az $\exp(x)$ exponenciális függvény hatása

$$1 + dX + \frac{1}{2}(dX)^2$$

lesz, feltéve, hogy már a harmadrendű tag elég kicsi. Az Itô-kalkulus érdemi észrevétele éppen az, hogy nincsen szükség a harmadrendű tagokra, elég a másodrendű korrekciót alkalmazni. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a hagyományos $\exp(x)$ exponenciális függvény a sztochasztikus $\mathcal{E}(X)$ transzformációhoz képest az $1/2(dX)^2$ taggal „túllő a célon”, ugyanis például a kamatláb hatása a bankbetétre továbbra is természetesen $1+dX$ szorzóként jelentkezik. Ha a hagyományos exponenciális függvénnyel akarjuk kifejezni a sztochasztikus exponenciális transzformációt, akkor ezt a tagot le kell vonni. Mivel az X folyamat a dX növekmények összege, így az exponenciális függvény ezek szorzata:

$$\mathcal{E}(X) = \exp\bigl(X - X(0) - \frac{1}{2}\sum(dX)^2\bigr) ,$$

ahol a $\sum(dX)^2$ tag a másodrendű megváltozások összege, amit kvadratikus variációnak szokás nevezni és $[X]$ módon szokás jelölni[8].

A Doléans-formula ismeretében térjünk vissza a mértékcsere kérdéséhez.

6. Tétel. *Legyen N egy intenzitással rendelkező számláló folyamat és jelölje (τ_k) az N ugrásainak időpontját, valamint legyen*

$$M(t) \overset{\circ}{=} N(t) - \int_0^t \lambda_s \, ds$$

a kompenzált számláló folyamat. Ha $\varphi \geq 0$ egy olyan előrejelezhető folyamat, amelyre $\int_0^t \lambda_s \varphi_s \, ds < \infty$, akkor a

$$Z(t) \overset{\circ}{=} \exp\Bigl(\int_0^t (1 - \varphi_s)\lambda_s \, ds\Bigr) \prod_{\tau_i \leq t} \varphi(\tau_i) ,$$

folyamat lokális martingál. Ha a Z egyenletesen integrálható martingál, akkor a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \overset{\circ}{=} Z(\infty)$ mértékcsere után az N intenzitása $\lambda\varphi$ lesz[9].

[8] Az eredeti képletben szereplő c felső index arra utal, hogy a folytonos részét kell venni az X kvadratikus variációjának.

[9] A tétel tekinthető a klasszikus Girszanov-tétel általánosításának. A probléma pontosan ugyanaz, mint a klasszikus esetben.

A bizonyítás ugyan a Doléans-formula közvetlen következménye és egyszerű számolással megkapható, ám ismételten nem szükséges a dolgozat további gondolatmenetének megértéséhez. Amit fontos látni az a következő: a tétel egy módszert tartalmaz arra nézve, hogy miként lehet egy adott intenzitáshoz megkeresni a hozzá tartozó mértéket. Ha egy N folyamat intenzitását ki akarjuk cserélni egy $\lambda\varphi$ folyamatra, akkor a φ folyamatnak két feltételt kell teljesítenie: egyrészt a $\lambda\varphi$ folyamatnak szintaktikusan helyesnek kell lennie, hiszen ha az $\int_0^t \lambda_s\varphi_s\, ds$ integrál nem véges, akkor definíció szerint a $\lambda\varphi$ nem lehet intenzitás. Ez a dolog kevésbé érdekes része. Ugyanakkor a tételben szereplő Z kifejezésnek bizonyos korlátozó feltételeknek is eleget kell tennie, azaz nem minden szintaktikusan megfelelő $\lambda\varphi$ folyamat lehet intenzitás. A tételben szereplő feltételt legegyszerűbben akkor tudjuk teljesíteni, ha a Z folyamat korlátos. Ha a φ kicsi (például kisebb mint egy), akkor a szorzat gyorsan konvergál és korlátos lesz, de ilyenkor az integrál alatt szereplő $1-\varphi$ tag nagy lesz, legalábbis pozitív, így az integrálról nem tudjuk, hogy korlátos lesz vagy sem. A tétel tehát a lehetséges példák konstruálásának nehézségeit mutatja be.

A formula megértéséhez legyen N egy Poisson-folyamat $\lambda_s \equiv \lambda$ konstans intenzitásparaméterrel. A Z nemnegatív lokális martingál, így szupermartingál, következésképpen ha nem veszti a várható értéket, akkor valódi martingál. Legyen φ egy tetszőleges nemnegatív konstanst, ekkor:

$$\mathbf{E}(Z_t) = \mathbf{E}\Big(\exp\Big(\int_0^t (1-\varphi_s)\lambda_s\, ds\Big)\prod_{\tau_i\le t}\varphi(\tau_i)\Big) =$$

$$= \mathbf{E}(\exp(\lambda t - t\varphi\lambda)\varphi^N) = \exp(\lambda t - t\varphi\lambda)\sum_{k=0}^{n}\varphi^k\frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t) =$$

$$= \exp(\lambda t - t\varphi\lambda)\exp(\varphi\lambda t)\exp(-\lambda t) = 1\ .$$

Alkalmas mértékcserével tehát a Poisson-folyamat intenzitása bármilyen pozitív értékre kicserélhető. Következésképpen a statisztikailag megfigyelt intenzitás nem ad használható információt a kockázatsemleges mérték alatt.

Bizonyítás. Vezessük be az

$$U(t) \mathrel{\stackrel{\circ}{=}} \int_0^t (\varphi_s - 1)\, dM(s) = \int_0^t (\varphi_s-1)\, dN(s) - \int_0^t (\varphi_s - 1)\lambda_s\, ds$$

folyamatot. Első lépésként vegyük észre, hogy Z éppen a

$$Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s-)\, dU(s)$$

Doléans-egyenlet megoldása. Valóban, mivel az U korlátos változású, ezért a Doléans-formulában szereplő kvadratikus variációs tag nulla. Az U ugrásai tehát megegyeznek az $\int_0^t (\varphi_s - 1)\, dN(s)$ ugrásaival, amelyek éppen a $\varphi(\tau_k)-1$ kifejezések. Könnyen látható, hogy a $\prod\exp(-\Delta U)$ szorzata éppen az

$$\exp\Big(-\int_0^t (\varphi_s - 1)\, dN(s)\Big)$$

kifejezés. Ezt beírva az imént tett megjegyzés már evidens. Mivel a φ előrejelezhető, ezért tetszőleges C előrejelezhető folyamat esetén

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s(\varphi_s - 1)\,dN\Big) = \mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s(\varphi_s - 1)\lambda_s\,ds\Big)\ ,$$

amiből következik, hogy az $\int_0^t(\varphi_s - 1)\,dN(s)$ folyamat kompenzátora éppen $\int_0^t(\varphi_s - 1)\lambda_s\,ds$ lesz. Következésképpen az U lokális martingál, így a Doléans-formula miatt a Z is lokális martingál.

Végezetül számoljuk ki az új kompenzátort. Miként az Artzner–Delbaen tétel bizonyításakor láttuk, az új mérték alatt a kompenzátor $\lambda K/Z$ lesz. Határozzuk meg a K folyamatot. Ha a Z egyenletesen integrálható, akkor minden n-re a megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_n -}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}_{\tau_n}) \mid \mathcal{F}_{\tau_n -}) = \mathbf{E}(Z(\tau_n) \mid \mathcal{F}_{\tau_n -}) = Z(\tau_n)\ ,$$

ahol kihasználtuk, hogy mivel a φ előrejelezhető, így minden $\tau_k \le \tau_n$ esetén a $\varphi(\tau_k)$ mérhető az $\mathcal{F}_{\tau_n -}$ σ-algebrára nézve. De mik lesznek a bizonyításban szereplő K_n függvények? Könnyen látható, hogy a

$$K_n(t) \stackrel{\circ}{=} \exp\Big(\int_0^t (1 - \varphi_s)\lambda_s\,ds\Big) \prod_{k=1}^{n-1} \varphi(\tau_k)\,\varphi(t)\,\chi(t > \tau_{n-1})$$

függvény adaptált és balról folytonos, így tehát előrejelezhető és ezért választható K_n függvénynek. A K konstrukciójából, illetve abból, hogy a $[\tau_{n-1}, \tau_n)$ szakaszokon a $\prod_{\tau_i \le t} \varphi(\tau_i)$ kifejezés konstans, látható, hogy $K/Z = \varphi$. □

3 Duplán sztochasztikus folyamatok

Az intenzitással rendelkező számláló folyamatok fontos alosztályát alkotják a duplán sztochasztikus folyamatok.

7. Definíció. *Legyen N egy számláló folyamat és legyen $(\mathcal{F}_t)$ a hozzá tartozó filtráció. Ha az $(\mathcal{F}_t)$ egy alkalmas $(\mathcal{G}_t)$ részfiltrációjára létezik egy $\lambda_s \ge 0$ progresszíven mérhető, a $(\mathcal{G}_t)$ filtrációra adaptált folyamat, hogy minden $s < t$ és $k = 0, 1, \ldots$ esetén*

$$\mathbf{P}(N_t - N_s = k \mid \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t) = \frac{\left(\int_s^t \lambda_u\,du\right)^k}{k!} \exp\Big(-\int_s^t \lambda_u\,du\Big)\ ,$$

akkor azt mondjuk, hogy az N folyamat duplán sztochasztikus.

A duplán sztochasztikus folyamatok osztálya értelemszerűen a Poisson-folyamatok osztályát általánosítja. Poisson-folyamat esetén az intenzitás konstans, duplán sztochasztikus folyamat esetén „majdnem” konstans. Természetesen a definícióból nem evidens, hogy a duplán sztochasztikus folyamatok valóban az intenzitással rendelkező folyamatok egy alosztályát alkotják.

A definiáló egyenletet k-val beszorozva, majd összegezve és a Poisson-eloszlás várható értékének képletét használva viszont azonnal látható, hogy

$$\mathbf{E}(N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_t) = \int_s^t \lambda_u \, du \,.$$

Mind a két oldalon az $\mathcal{F}_t$ szerint feltételes várható értéket véve és kihasználva, hogy a λ progresszíven mérhető volta miatt az integrál adaptált marad:

$$\mathbf{E}(N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\Big(\int_s^t \lambda_u \, du \mid \mathcal{F}_s\Big) = \int_s^t \lambda_u \, du \,,$$

amiből – az eredeti (τ_k) megállási időket lokalizációs sorozatként használva – világos, hogy az $N(t) - \int_0^t \lambda_u \, du$ lokális martingál.

A duplán sztochasztikus folyamatok nagy előnye, hogy ilyenkor az összetett folyamat eloszlásának Laplace-transzformáltja az intenzitás segítségével számolható. Legyen (ξ_k) az egyes veszteségek nagysága, melyekről tegyük fel, hogy azonos eloszlásúak, továbbá függetlenek egymástól és az ugrások időpontját megadó N folyamattól. Az alapvető kérdés a következő: mi lesz az $X(t) \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$ összetett folyamat eloszlása? Mivel az eloszlás közvetlenül nem számolható, így a szokásos eljárás, hogy az összetett folyamat Laplace-transzformáltját határozzuk meg. Jelölje H az ugrások közös eloszlásának Laplace-transzformáltját és legyen $\psi(u) = 1 - H(u)$. Ha az N duplán sztochasztikus, akkor a definícióból, illetve a teljes várható érték tételből következően:

$$\begin{aligned}
L_t(u) &= \mathbf{E}\big(\exp(-uX(t))\big) = \mathbf{E}\Big(\exp\big(-u\sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k\big)\Big) = \\
&= \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(\exp\big(-u\sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k\big) \mid N(t) = n\Big)\Big) = \\
&= \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(\exp\big(-u\sum_{k=1}^{n} \xi_k\big) \mid N(t) = n\Big)\Big) = \\
&= \mathbf{E}\big(H^{N(t)}(u)\big) = \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\big(H^{N(t)}(u) \mid \mathcal{G}_t\big)\Big) = \\
&= \mathbf{E}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} H^n(u) \frac{\big(\int_0^t \lambda_s \, ds\big)^n}{n!} \exp\big(-\int_0^t \lambda_s \, ds\big)\Big) \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \mathbf{E}\Big(\exp\big(-\psi(u)\int_0^t \lambda_s \, ds\big)\Big) \,.
\end{aligned}$$

A baj csak az, hogy az ekvivalens mértékcsere során a duplán sztochasztikus jelleg nem marad meg. Mit lehet mondani általában az intenzitásalapú modellekre?

4 Egy mértékcsere

A következőkben megvizsgáljuk, hogyan számolható ki az összetett

$$X\left(t\right) \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$$

folyamat kompenzátora tetszőleges intenzitásalapú modell esetén. Ismert, hogy az úgynevezett lokálisan integrálható folyamatoknak létezik kompenzátora, így ahhoz tehát, hogy beszélhessünk az összetett folyamat kompenzátoráról, az ugrások nagyságának véges várható értékkel kell rendelkeznie. A továbbiakban feltesszük, hogy a (ξ_k) ugrások nagysága azonos eloszlású, és az ugrás mindenkori nagysága független a folyamat múltjától. Ezt formálisan úgy definiáljuk, hogy minden k indexre a ξ_k ugrás független az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ σ-algebrától. Az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ szokásos interpretációja, hogy a τ_k véletlen időpont előtt bekövetkező események halmaza. Ugyanakkor, mivel az összetett folyamatnak adaptáltnak kell lenni, a $\xi_k = \Delta X(\tau_k)$ mérhető az $\mathcal{F}_{\tau_k}$-ra, így mielőtt továbbhaladhatnánk, be kell látnunk, hogy e feltétel nem mond ellent az előbbi követelményünknek.

Az összetett folyamatra az alapeset, amikor a filtráció éppen a folyamat által definiált kanonikus filtráció és a ξ_k ugrások egymástól és az N számláló folyamattól is függetlenek. Az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ σ-algebrának a korábban említettel egyik ekvivalens definíciója szerint az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ azon legszűkebb σ-algebra, amelyet az $\mathcal{F}_0$ és az olyan A halmazok generálnak, amelyek előállíthatóak $A = F \cap \{t < \tau_k\}$ módon, ahol $F \in \mathcal{F}_t$. Egy σ-algebrától való függetlenség igazolásához elég megmutatni a σ-algebrát generáló halmazoktól való függetlenséget. A kanonikus esetben az $X(0) = 0$ miatt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, amely nyilván független a ξ_k-tól. Ha $F \in \mathcal{F}_t$, akkor a generált σ-algebra definíciója alapján alkalmas $s_k \leq t$ sorozatra és $B \subseteq \mathbb{R}^\infty$ Borel-halmazra $F = (X(s_1), X(s_2), \ldots)^{-1}(B)$. Ebből következően az $A \cap \{t < \tau_k\}$ halmaz eleme a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}$ és az N által generált σ-algebrának, ami független a ξ_k-tól.

8. Lemma. *Ha a (ξ_k) ugrások közös eloszlásának van M várható értéke, akkor az $X \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$ összetett folyamatnak is van kompenzátora, amely éppen $X^p = M \cdot N^p$.*

A lemma interpretációja ismét igen kézenfekvő: a teljes kárfolyamatban figyelembe kell venni a káresemények gyakoriságát és nagyságát. Az összetett folyamat kompenzátora éppen a gyakorisági folyamat kompenzátora szorozva az átlagos kár nagyságával.

Bizonyítás. A várható érték létezése miatt az X szintén lokálisan integrálható, vagyis eleme az $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ térnek, így tehát létezik kompenzátora. A feltételezett függetlenség miatt a ξ_n ugrás független az $\mathcal{F}_{\tau_n-}$ σ-algebrától. Tetszőleges $C \geq 0$ előrejelezhető folyamat esetén, felhasználva, hogy a $C\left(\tau_k\right)$

mérhető az $\mathcal{F}_{\tau_k-}$ eseménytérre:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s\,dX_s\Big) &= \mathbf{E}\Big(\sum_{k=1}^\infty C(\tau_k)\xi_k\Big) = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}(C(\tau_k)\xi_k) = \\
&= \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(C(\tau_k)\xi_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k-})\big) = \\
&= \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\big(C(\tau_k)\mathbf{E}(\xi_k \mid \mathcal{F}_{\tau_k-})\big) = \\
&= \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}\big(C(\tau_k)\mathbf{E}(\xi_k)\big) = M\cdot\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s\,dN_s\Big) = \\
&= M\cdot\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty C_s\,dN_s^p\Big)\,,
\end{aligned}$$

amiből a lemma már evidens. □

9. Állítás. *Tegyük fel, hogy az N^p kompenzátor folytonos. Vezessük be a $\nu_i \overset{\circ}{=} 1-\exp(-u\xi_i)$, $V \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} \nu_k$, valamint $U \overset{\circ}{=} V^p - V$ jelöléseket. A*

$$Z \overset{\circ}{=} \exp(\psi(u)\cdot N^p - u\cdot X)$$

folyamat felírható $Z=\mathcal{E}(U)$ módon, következésképpen a Z egy lokális martingál. Ha valamely T időpontban $\mathbf{E}(\exp(N^p(T)))<\infty$, akkor a Z egyenletesen integrálható martingál a $[0,T]$ időintervallumon.

Bizonyítás. Emlékeztetünk, hogy definíció szerint a $Z=\mathcal{E}(U)$ egyenlőség azt jelenti, hogy a Z éppen az egyetlen megoldása a

$$Z = 1 + Z_- \bullet U$$

egyenletnek. A Doléans-formula szerint (felhasználva, hogy az N^p folytonos, továbbá az előző lemma miatt $V^p=\psi(u)\cdot N^p$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(U) &= \exp(U-U(0)-[U]^c)\prod(1+\Delta U)\exp(-\Delta U) = \\
&= \exp(V^p - V)\prod(1-\Delta V)\exp(\Delta V) = \\
&= \exp(V^p)\prod(1-\nu_i\Delta N) = \\
&= \exp(V^p)\prod(1-(1-\exp(-u\xi_i))\Delta N) = \\
&= \exp(V^p)\exp(-uX) = \exp(V^p - uX) = \\
&= \exp(\psi(u)N^p - uX) \overset{\circ}{=} Z\,.
\end{aligned}$$

Az U lokális martingál voltából következően a Z szintén lokális martingál. Mivel pedig $0\le\psi(u)\le 1$, ezért

$$0 \le \exp(\psi(u)N^p - uX) \le \exp(N^p) \le \exp(N^p(T))\,.$$

A majorált konvergencia tétel közvetlen alkalmazásából az állítás már következik. □

Tetszőleges u esetén a $Z(T)$ tekinthető a $[0, T]$ időszakaszra megszorított folyamatokra egy mértékcsere sűrűségfüggvényének. Jelöljük a továbbiakban ezt a mértéket $\mathbf{P}^u$-val, az alatta vett várható értéket pedig $\mathbf{E}^u$-val. A $Z(T)$ definíciója alapján könnyen látható, hogy

$$L_t(u) = \mathbf{E}(\exp(-uX(t))) = \mathbf{E}^u(\exp(-\psi(u)N^p(t))) = \\ = \mathbf{E}^u\Big(\exp\big(-\psi(u)\int_0^t \lambda_s \, ds\big)\Big) ,$$

azaz a mértékcsere segítségével (a duplán sztochasztikus folyamatok esetében látottakhoz hasonlóan) tetszőleges intenzitással rendelkező számláló folyamat Laplace-transzformáltját is ki tudjuk fejezni az intenzitás segítségével.

Az általános Girszanov-tétel miatt, ha az M egy lokális martingál, akkor az $M - Z^{-1} \bullet [Z, M]$ szintén lokális martingál az új mérték alatt. Mivel a Z korlátos változású, ezért ha az M folytonos, akkor a $[Z, M] = 0$. Ebből következően a mértékcsere nem érinti a folytonos lokális martingálokat, így például nem változik a Wiener-folyamatok osztálya sem.

10. Állítás. *Tegyük fel, hogy az N^p folytonos. Az N kompenzátora az új mérték alatt $H(u) \cdot N^p$ alakú, ahol N^p továbbra is az N kompenzátora az eredeti mérték alatt, a korábbiakhoz hasonlóan pedig $H(u)$ jelöli az ugrások eloszlásának Laplace-transzformáltját az eredeti mérték alatt. Legyen $g \geq 0$ egy Borel-mérhető függvény és legyen $Y \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} g(\xi_k)$. Tegyük fel, hogy a $(g(\xi_k))$ ugrásoknak van közös M várható értéke, így az Y-nak van kompenzátora az eredeti mérték alatt. Ha*

$$M(u) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(g(\xi_k)\exp(-u \cdot \xi_k)) ,$$

akkor az Y kompenzátora az új mérték alatt $Y^p = M(u) \cdot N^p$.

Bizonyítás. Meg kell mutatni, hogy a

$$K \overset{\circ}{=} (Y - M(u) \cdot N^p) \cdot Z$$

lokális martingál az eredeti mérték alatt. A parciális integrálás formulája alapján

$$K = (Y - M(u) \cdot N^p)_- \bullet Z + Z_- \bullet (Y - M(u) \cdot N^p) + [Z, Y - M(u) \cdot N^p] .$$

A Z definíciója alapján, felhasználva, hogy az N^p folytonos, Z pedig véges változású

$$[Z, Y - M(u) \cdot N^p] = [Z_- \bullet (V^p - V), Y] = -[Z_- \bullet V, Y] = -Z_- \bullet [V, Y] .$$

Az integrátor kompenzátora az eredeti mérték alatt

$$[V, Y]^p = \Big(\sum g(\xi_i)(1 - \exp(-u \cdot \xi_i))\Delta N\Big)^p = (M - M(u)) \cdot N^p .$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}K &= (Y - M(u)\cdot N^p)_- \bullet Z + Z_- \bullet (Y - M(u)\cdot N^p) - Z_- \bullet [V,Y] = \\ &= (Y - M(u)\cdot N^p)_- \bullet Z + Z_- \bullet (Y - M\cdot N^p) + \\ &\quad + Z_- \bullet ((M - M(u))\cdot N^p - [V,Y]) ,\end{aligned}$$

ami lokális martingál, ugyanis mind a három integrálban az integrátor lokális martingál az eredeti mérték alatt. Ha $g \equiv 1$, akkor a tétel második feléből következik az első. □

Ha $g = \chi_B$, akkor a kompenzátor

$$Y^p = \frac{\mathbf{E}(\chi(\xi \in B)\exp(-u\xi))}{\mathbf{E}(\exp(-u\xi))}\mathbf{E}(\exp(-u\xi))\cdot N^p$$

módon is írható. Ilyenkor pedig az

$$\frac{\mathbf{E}(\chi(\xi \in B)\exp(-u\xi))}{\mathbf{E}(\exp(-u\xi))}$$

kifejezés tekinthető egy valószínűségi mértéknek, a szorzat második tagja pedig éppen az N kompenzátora az új mérték alatt. A formula tehát formálisan emlékeztet a korábbi lemmában szereplő kifejezésre, ám nem tudjuk, hogy a mértékcsere után az összetett eloszlásra alkalmazható lesz-e a lemma gondolatmenete, ugyanis kérdéses, hogy az azonos eloszlásra és a függetlenségre tett feltételek érvényben maradnak-e. A következőkben a célunk éppen az, hogy megmutassuk e feltételek fennállását az új mérték alatt is, ehhez viszont az előbbiekben bizonyított állítás jelenti a kiindulópontot.

11. Állítás. *Tegyük fel, hogy az N^p folytonos. Ha ξ az ugrások közül az egyik, akkor*

$$\mathbf{P}^u(\xi \in B) \overset{\circ}{=} \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\chi(\xi \in B)\exp(-u\xi))}{H(u)} ,$$

vagyis az említett mérték éppen az ugrások eloszlása az új mérték esetén. Következésképpen az ugrások eloszlása a mértékcsere során egyformán változik.

Bizonyítás. Jelölje M a kifejezés jobb oldalát. Mivel a jobb oldalon álló kifejezés a $\mathbf{P}$ alatt számolandó, ezért az értéke minden n esetén azonos. Jelölje N^p az N kompenzátorát a $\mathbf{P}^u$ alatt. Legyen $C \overset{\circ}{=} \chi((\tau_{n-1}, \tau_n])$. Mivel a C előrejelezhető, így az Y új mérték alatti kompenzátorát megadó összefüggést használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^u(\xi_n \in B) &= \mathbf{E}^u(\chi_B(\xi_n)) = \mathbf{E}^u(Y(\tau_n) - Y(\tau_{n-1})) = \\ &= \mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty C_s\,dY\Big) = \mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty C_s\,dY^p\Big) = \\ &= M\cdot\mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty C_s\,dN^p\Big) = M\cdot\mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty C_s\,dN\Big) = M .\end{aligned}$$

□

12. Állítás. *Tegyük fel, hogy az N^p folytonos. Ekkor az új $\mathbf{P}^u$ mérték alatt is fennáll, hogy a ξ_k független az $\mathcal{F}_{\tau_{k-}}$ σ-algebrától.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő megmutatni, hogy ξ_k független a σ-algebrát generáló halmazrendszertől. Legyen tehát F egy ilyen halmaz. Ha $F = A \cap \{\tau_k > t\}$, $A \in \mathcal{F}_t$, továbbá

$$C = \chi((\tau_{k-1}, \tau_k] \cap (t, \tau_k]) \cdot \chi_A$$

akkor a C előrejelezhető, mivel adaptált és balról folytonos. Ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^u(F \cap \xi_k^{-1}(B)) &= \mathbf{E}^u(\chi_F \chi_B(\xi_k)) = \mathbf{E}^u(\int_0^\infty C_s\, dY) = \mathbf{E}^u(\int_0^\infty C_s\, dY^p) = \\
&= \mathbf{E}^u\Big(\int_0^\infty \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\chi_B(\xi)\exp(-u\xi))}{H(u)} C_s\, dN^p\Big) = \\
&= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\chi_B(\xi)\exp(-u\xi))}{H(u)} \mathbf{E}^u(\int_0^\infty C_s\, dN) = \\
&= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\chi_B(\xi)\exp(-u\xi))}{H(u)} \mathbf{E}^u(\chi_F \Delta N(\tau_k)) = \\
&= \mathbf{P}^u(\xi^{-1}(B)) \cdot \mathbf{P}^u(F)\,.
\end{aligned}$$

Ha $F \in \mathcal{F}_0$, akkor pedig az $C = \chi_F \chi(\tau_{k-1}, \tau_k]$ folyamatra alkalmazva kapjuk az állítást. □

5 Alkalmazási lehetőségek

A matematikai háttér áttekintése után röviden ismertetjük a számláló folyamatok felhasználási lehetőségét a hitelderivatívák modellezésében. Elsőként a legismertebb portfólió hitelderivatíva, a szintetikus CDO árazási alapelvét tekintjük át, majd rátérünk a Laplace-transzformált intenzitás által való kifejezésének jelentőségére.

Hitelderivatívák modellezése

A szintetikus CDO-k jellemzője, hogy az alapul szolgáló portfóliót n darab egységnyi névértékű, T lejáratú, illetve azonos (t_m) prémiumfizetési időpontokkal rendelező CDS alkotja. Egy adott CDO több különböző sávból (más néven tranche-ból) tevődik össze, melyeket az alsó és felső csatlakozási pontok határoznak meg (a továbbiakban ezeket rendre $\underline{K} \in [0, 1)$ és $\overline{K} \in (\underline{K}, 1]$ jelöli), s melyek megadják, hogy az adott tranche-ot választó befektető a portfóliót érő veszteség mekkora szeletét köteles téríteni. Egy adott tranche névértéke Kn, ahol $K \overset{\circ}{=} \overline{K} - \underline{K}$.

A védelem eladója a rendszeres S nagyságú spread-fizetések mellett a prémium egy részét a szerződéskötéskor előleg formjában is megkaphatja, ezt nevezzük *upfront fee*-nek, mely korábban elsősorban a legalsó (jellemzően 0 és 3% közé eső equity-nek nevezett) tranche-ot érintette. Az upfront fee-t

G-vel jelöljük, s a spread-hez hasonlóan a névértékre vetítve adjuk meg. A termék pénzáramlása a résztvevő felek szerint:

- A védelem eladója fedezi a portfólióban bekövetkező veszteségeket a bekövetkezés pillanatában, de csak abban az esetben, ha a kumulatív veszteség (melyet a korábbiakhoz hasonlóan jelöljön X) az alsó és felső csatlakozási pontok által meghatározott intervallumba esik. A védelem eladójának szemszögéből tehát az $U_t \overset{\circ}{=} (X_t - \underline{K}n)^+ - (X_t - \overline{K}n)^+$ veszteségfolyamat ugrásai a mérvadóak. E kifizetéseket nevezzük az adott tranche csődágának (*Default Leg, DL*).

- A védelem vevője a szerződéskötéskor kifizeti a GKn nagyságú upfront fee-t, majd a prémiumfizetések (t_m) időpontjaiban a tranche fennálló névértékre vonatkozó spread összegét: $SC_m(Kn - U_{t_m})$, ahol C_m a két prémiumfizetés között eltelt idő (a gyakorlatban erre negyedévente kerül sor, így $C_m \approx 1/4$). E kifizetéseket nevezzük az adott tranche prémium ágának (*Premium Leg, PL*).

Minél magasabb az alsó $\underline{K}$ csatlakozási pont, az eladó annál kisebb kockázatot vállal, s ebből következően annál kisebb prémiumra számíthat. Ennek oka, hogy elsőként az alsóbb tranche-ok fogják fel a veszteségeket, biztonsági hálót nyújtva a magasabb csatlakozási ponton beszálló eladónak. A legalsó, equity-nek nevezett $\underline{K} = 0$ csatlakozási pontú tranche a legkockázatosabb, hiszen minden felmerülő veszteséget téríteni köteles, amíg névértéke teljesen fel nem emésztődik. Épp e kockázatos voltából fakad, hogy a sztenderdizált kereskedése az upfront-ja alapján történik rögzített spread mellett, miközben a magasabb sávok esetében a spreadeket jegyezték rögzített $G = 0$ upfront mellett. A válság hatására az utóbbi években a kockázatosság megugrása miatt már a magasabb tranche-ok jegyzése is az upfront alapján történt.

A szerződéskötéskor a felek célja egy igazságos S spread meghatározása, amihez különböző időpontokban adott veszteségértékek (mint speciális termékek) igazságos árát kellene ismernünk. A szokásos gyakorlat a martingálmértékre épülő árazás technikájának felhasználása. Tehát a bevezető fejezetben ismertetett elv alapján feltesszük, hogy létezik egy ekvivalens $\mathbf{Q}$ mérték, hogy mind a csődág, mind a prémium ág t-beli értéke megkapható a kifizetések diszkontált értékének e mérték alatt vett várható értékeként:

$$
\begin{aligned}
DL_t(\underline{K}, \overline{K}) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big(\int_t^T B(t,s)\, dU_s \mid \mathcal{F}_t\Big) = \\
&= B(t,T)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_T \mid \mathcal{F}_t) - U_t + r\int_t^T B(t,s)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_s \mid \mathcal{F}_t)\, ds \\
PL_t(\underline{K}, \overline{K}, G, S) &= GKn + S \sum_{t_m \geq t} B(t,t_m) C_m (Kn - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_{t_m} \mid \mathcal{F}_t)) \,,
\end{aligned}
$$

ahol $B(t,s) \overset{\circ}{=} \exp(-r(s-t))$ a diszkontfaktor. Rögzített G upfront fee mellett a t időpontbeli igazságos $S \overset{\circ}{=} S_t(\underline{K}, \overline{K}, G, T)$ spread a $DL_t(\underline{K}, \overline{K}) = PL_t(\underline{K}, \overline{K}, G, S)$ egyenlet megoldásaként kapható.

Figyeljük meg, hogy az igazságos spread és upfront fee meghatározásakor valójában *call spread*-ek értékét kell megállapítanunk, ahol alaptermékül most nem egy részvény, hanem az X veszteségfolyamat szolgál:

$$B(t,s)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(U_s \mid \mathcal{F}_t) = B(t,s)(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((X_t - \underline{K}n)^+ \mid \mathcal{F}_t) - (\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((X_t - \overline{K}n)^+ \mid \mathcal{F}_t) \; .$$

Intenzitásalapú modellek

Látható tehát, hogy az összetett X folyamat eloszlását kell meghatároznunk a portfólió hitelderiatívák árazása kapcsán. Az előzőekben említettek alapján ennek szokásos gyakorlata a Laplace-transzformált kiszámításán alapul, s mint megmutattuk, tetszőleges számláló folyamat Laplace-transzformáltja megkapható a kompenzátor $\mathbf{P}^u$ mérték alatt vett Laplace-transzformáltjaként:

$$L_t(u) = \mathbf{E}(\exp(-uX(t))) = \mathbf{E}^u\Big(\exp\big(-\psi(u)\int_0^t \lambda_s \, ds\big)\Big) \; ,$$

mely formálisan megegyezik a zérókupon kötvények sztochasztikus kamatlábak melletti árát megadó képlettel. Éppen ez az összefüggés az, mely az intenzitásalapú modellezés erősségét adja: a hitelderivatívák árazásához alkalmazhatóvá tehetjük a kamatlábak irodalmának kiterjedt eredményeit.

A kamatlábmodellek a kidolgozott elméleti háttér mellett meglepően sok olyan tulajdonsággal rendelkeznek, melyek képesek reprodukálni a hitelderivatívákkal kapcsolatos empirikus megfigyeléseket, mint amilyen például a bekövetkezések gyakoriságának átlaghoz visszahúzó jellege, illetve a csődök klasztereződésének jelensége.

Legyen például X továbbra is az összetett számláló folyamat, melynek ugrásai most a csődök bekövetkezésekor realizáló veszteséget reprezentálják, az X ugrásait számláló folyamat Λ intenzitása pedig legyen egy λ folyamat egyszerű affin függvénye[10], azaz $\lambda_t = R_0 + R_1\Lambda_t$. Tegyük fel továbbá, hogy a λ dinamikáját a következő sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$d\lambda_t = \mu(\lambda_t)\,dt + \sigma(\lambda_t)\,dW_t + \delta\,dX_t \; ,$$

ahol rögtön látható az öngerjesztő jelleg, hiszen X korábbi realizációja befolyásolja az intenzitást, nevezetesen λ minden egyes csőd esetén ugrik. Számítási szempontból kedvező (ám a megszorítással együtt is viszonylag bő) modellosztályt kapunk, ha a μ és σ függvényekre affin struktúrát tételezünk fel, azaz $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x$, $\sigma^2(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x$, valamilyen konstans μ_0 és μ_1, illetve σ_0 és σ_1 együtthatók mellett. Ekkor ugyanis a jól ismert Vasicek- és CIR-modellek gondolatmenetéből kiindulva reménykedhetünk abban, hogy a Laplace-transzformált megadható valamilyen kezelhető alakban.

[10] A kiindulásul szolgáló (azaz esetünkben a kockázatsemleges) mérték alatt élünk a $\Lambda_t = \lambda_t$ feltételezéssel, azaz $R_0 = 0$ és $R_1 = 1$. A paraméter szerepeltetésének oka, hogy (mint a következőkben látni fogjuk) először az eredeti mérték alatt vizsgájuk a várható érték meghatározását, s csak ezután térünk át a $\mathbf{P}^u$ alatt vett kifejezés kiszámítására. Amint pedig a korábbiakban láthattuk, ekkor az intenzitás egy konstanssal skálázódik át, tehát az eredeti folyamat affin függvénye lesz. Így a mértékcsere hatása a paraméterek változásán keresztül válik követhetővé.

Az egyszerűség érdekében egy pillanatra tekintsünk el attól a ténytől, hogy a várható értéket a $\mathbf{P}^u$ mérték alatt kell meghatároznunk. Ebben az esetben a kamatlábak affin lejárati szerkezetére (*Affine Term Structure*) gondolva az a sejtésünk támadhat, hogy az előrejelezhető kompenzátor $\psi(u)$ helyen vett Laplace-transzformáltja (mely értelmezhető egy zérókupon kötvény áraként) megadható az

$$\mathbf{E}\Big(\exp(-\psi(u)\int_0^t \lambda_s\, ds)\Big) = \exp\big(\alpha(0) + \beta(0)\lambda_0\big)$$

alakban, ahol az α és β függvények analitikusan, vagy legalábbis könnyen kiszámolható formában adottak. Valóban, bizonyos technikai feltételek fennállása esetén a [4] dolgozat eredményei alapján a fenti várható érték előáll ilyen alakban, az α, β függvényeket pedig közönséges (általánosított Riccati-) differenciálegyenletek megoldásával kaphatjuk:

$$\begin{aligned}
\partial_t\beta(t) &= \psi(u) - \mu_1\beta(t) - \frac{1}{2}\sigma_1\beta^2(t) - R_1(H(1-\beta(t)))\\
\partial_t\alpha(t) &= \mu_1\beta(t) - \frac{1}{2}\sigma_0\beta^2(t) - R_0(H(1-\beta(t)))\\
\beta(t) &= 0, \qquad \alpha(t) = 0\,,
\end{aligned}$$

ahol $H(u)$ továbbra is az ugrások Laplace-transzformáltja a kiindulásul szolgáló mérték alatt.

Igen ám, de a számunkra a $\mathbf{P}^u$ mérték alatt vett várható érték meghatározása a cél. Itt válnak fontossá a korábbi fejezet mértékcserét vizsgáló tételei. Nevezetesen beláttuk, hogy a Wiener-folyamatok invariánsak a mértékcserére nézve, a számláló folyamat intenzitása a 10. állítás alapján (a konstans $H(u)$ szorzóval) módosul, míg a ugrások eloszlása a 11. állítás alapján változik meg. Ez alapján minden szükséges ismeret a rendelkezésünkre áll, hogy a $\mathbf{P}^u$ mérték alatt alkalmazzuk a várható érték meghatározására szolgáló állítást. Mindössze arra kell figyelnünk, hogy az eredeti $R_0 = 0$ és $R_1 = 1$ helyett az $R_0 = 0$ és $R_1 = H(u)$ paramétereket használjuk összhangban a számláló folyamat új intenzitásával, a fenti differenciálegyenletekben szereplő Laplace-transzformáltat pedig már az új $\mathbf{P}^u$ mérték alatt kell vennünk.

6 Összefoglalás

A dolgozatban röviden áttekintettük az intenzitásalapú modellezés matematikai pénzügyi problémáit. Miként hangsúlyoztuk, a biztosításmatematikával szemben a pénzügyi elméletben a káreseményekből származó összetett veszteségfolyamat eloszlásának meghatározásakor olyan módszereket szabad csak használni, amelyek robusztusak az alapul vett mértékcserére és a modell felírásakor csak igen korlátozottan támaszkodhatunk az alapul vett kárfolyamatok konkrétan megfigyelt statisztikai tulajdonságaira, ugyanis az árazáskor használt módszerek csak formálisan emlékeztetnek a klasszikus eljárásra. Az itt tárgyalt módszer lényege, hogy a pénzügyi elméletben jól kidolgozott kamatlábmodellekkel tetszőleges mérték alatt közvetlenül kiszámolhatjuk az összetett kárfolyamat Laplace-transzformáltját. A Laplace-transzformált invertálásával már a közismert (a biztosításmatematikában is használt) módon az összetett veszteségfolyamat kockázatsemleges mérték melletti eloszlása is kiszámolható. A módszer előnye, hogy robusztus és minimális matematikai előfeltételre épül, továbbá közvetlenül felhasználhatóvá teszi a kamatlábmodellek irodalmát, illetve az ezen a területen felhalmozott jelentős ismereteket. A módszer hátránya, hogy közvetlenül nem az eloszlást adja, hanem annak Laplace-transzformálját, és ezért a kalibrációt az eloszlás Laplace-transzformációján keresztül kell elvégezni, ami komoly numerikus terhet jelent.

Irodalom

1. Artzner, P. – Delbaen, F. (1995): Default Risk Insurance and Incomplete Markets. *Mathematical Finance* 5, pp. 187–195.
2. Carr, P. – Madan, D (1999): Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance* 3, pp. 61–73.
3. Cheng, P. – Scaillet, O. (2007): Linear-Quadratic Jump-Diffusion Modeling. *Mathematical Finance* 17, pp. 575–598.
4. Duffie, D. – Pan, J. – Singleton, K. (2000): Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions. Econometrica 68, pp. 1343–76.
5. Giesecke, K. – Zhu, S. (2010): Transform Analysis for Point Processes and Applications in Credit Risk. *Working paper.*
6. Jacod, J. – Shiryaev, A. N. (1987): *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer-Verlag, Berlin.
7. Kusuoka, S. (1999): A Remark on Default Risk Models. *Advances in Mathematical Economics* 1, pp. 69–82.
8. Markus, L. – Wu, L. (2002): Asset Pricing Under the Quadratic Class. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, pp. 271–295.
9. Medvegyev, P. (2007): *Stochastic Integration Theory.* Oxford University Press, Oxford.

INTENSITY-BASED MODELING AND THE CHANGE OF MEASURE

The paper addresses questions concerning the use of intensity based modeling in the pricing of credit derivatives. As the specification of the distribution of the loss-process is a non-trivial exercise, the well-know technique for this task utilizes the inversion of the Laplace-transform. A popular choice for the model is the class of doubly stochastic processes given that their Laplace-transforms can be determined easily. Unfortunately these processes lack several key features supported by the empirical observations, e.g. they cannot replicate the self-exciting nature of defaults. The aim of the paper is to show that by using an appropriate change of measure the Laplace-transform can be calculated not only for a doubly stochastic process, but for an arbitrary point process with intensity as well. To support the application of the technique, we investigate the effect of the change of measure on the stochastic nature of the underlying process.