Alkuegyensúlyok és stabil halmazok

Bednay Dezső

Kivonat
A játékelmélet egy fontos kutatási területe a Nash-program, amely a kooperatív és nemkooperatív megoldáskoncepciók között próbál kapcsolatot teremteni. Dolgozatomban az egyik első kooperatív megoldást vizsgálom, a stabil halmazokat. Harsányi egy 1974-ben megjelent cikkében foglalkozott a témával, megfogalmazta a nehézségeket a stabil halmazok nemkooperatív játékokba ültetésével kapcsolatban, valamint megadta a játékok egy olyan részhalmazát, ahol ez probléma nem áll fenn. Ezen az osztályon a stabil halmazok előállnak úgy, mint egy nemkooperatív alkujáték egyensúlyi stratégiáinak fixpontjai. Ezt az alkujátékot változtatom meg, és megmutatom, hogy így már a hozzárendelési játékok (amelyek csak nagyon speciális esetben voltak a Harsányi-féle osztályban) stabil halmazai is előállnak egyensúlyként.

1. Bevezetés

Átváltható hasznosságú játékon, röviden TU-játékon egy (P,v) párt értünk, ahol P egy nemüres véges halmaz, a játékosok halmaza, v pedig egy $\mathscr{P}(P) \to \mathbb{R}$ függvény, amire $v(\emptyset) = 0$. Ez a függvény azt mutatja meg, hogy a játékosok adott részhalmaza (koalíciója) együttműködve mennyi pénzt (a szereplők között átváltható hasznosságot) képes elérni.

Az együttműködés eredményeként „megtermelt" pénzösszeget valahogyan szét kell osztani a játékosok között. Vizsgáljuk meg az ilyen kifizetések tulajdonságait:

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a (P,v) játékban az $x = (x_i)_{i\in P} \in \mathbb{R}^P$ kifizetés-vektor*

- *elérhető az S koalíció számára, ha $x(S) = \sum_{i\in S} x_i \leq v(S)$;*

Bednay Dezső
Budapesti Corvinus Egyetem, email: bednay@gmail.com

- *elfogadható az S koalíció számára, ha $x(S) \geq v(S)$;*
- *előnyösebb az S számára, mint az $y = (y_i)_{i \in P}$ kifizetés-vektor, ha $x_i > y_i$ minden $i \in S$-re;*
- *az S koalíción keresztül dominálja az y kifizetés-vektort, ha az S számára az x elérhető, és előnyösebb mint az y (jelölése: $x \operatorname{dom}_S y$);*
- *nem dominált az S koalíción keresztül, ha nincs az S számára elérhető olyan z kifizetés-vektor, amire $z \operatorname{dom}_S x$;*
- *dominálja az $y = (y_i)_{i \in P}$ kifizetés-vektort, ha létezik egy olyan S koalíció, amelyre $x \operatorname{dom}_S y$, (jelölése: $x \operatorname{dom} y$);*
- *nem dominált, ha egyetlen S koalíción keresztül sem dominált.*

Egy társulás létrejöttéhez elengedhetetlen, hogy a benne résztvevők meg tudjanak egyezni az együtt elérhető legnagyobb haszon mindegyikük számára elfogadható elosztásában. Sok játékban (például az általunk is vizsgált hozzárendelési játékban) a társadalomnak érdeke a nagykoalíció megalakulása, mert így összesen nagyobb hasznot képesek elérni, mint kisebb csoportokban. Ezért ezt a $v(P)$ összeget akarják egymás között szétosztani. A nagykoalíció számára elérhető kifizetés-konfigurációkon belül a koalíciók általi elfogadhatóság szempontjából a következő hierarchiát szokás felállítani.

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a (P, v) játékban az $x = (x_i)_{i \in P}$ kifizetés-vektor egy*

- *szétosztás, ha $x(P) = v(P)$, vagyis a P számára elfogadható és elérhető;*
- *félelosztás, ha $x(P) \leq v(P)$, és $x_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in P$-re, vagyis a nagykoalíció számára elérhető és minden egyszemélyes koalíció (vagyis játékos) számára elfogadható;*
- *elosztás, ha $x(P) = v(P)$, és $x_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in P$-re, azaz olyan szétosztás, amelyik minden egyszemélyes koalíció (minden játékos) számára elfogadható;*
- *mag-elosztás, ha $\sum_{i \in P} x_i = v(P)$, és $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ minden $S \subseteq N$-re, azaz olyan szétosztás, amelyik minden koalíció számára elfogadható.*

Jelölje $\mathscr{I}^*_{(P,v)}$ a szétosztások halmazát, $\mathscr{I}'_{(P,v)}$ a félelosztások halmazát, $\mathscr{I}_{(P,v)}$ az elosztások halmazát, és $\mathscr{C}_{(P,v)}$ a mag-elosztások halmazát, röviden a (P, v) játék magját.

Szétosztás minden játékban található. Félelosztás és elosztás viszont akkor és csak akkor van, ha $v(P) \geq \sum_{i \in P} v(\{i\})$, ami egy igen gyenge feltevés a szétosztható $v(P)$ nagyságára vonatkozóan. Mag-elosztások létezéséhez már egy ennél jóval szigorúbb feltételnek kell teljesülnie. Az általunk vizsgált hozzárendelési játékokban ez a feltétel mindig teljesül, a mag tehát sosem üres (Shapley és Shubik, 1972), a mag-elosztások pedig jellemezhetők úgy, mint azok az elosztások, amiket semmilyen más elosztás nem dominál.

Neumann és Morgenstern (1953) alapvetően olyan játékokat vizsgáltak, amelyekben nincsen mag-elosztás, ezért ők az elosztások egyenkénti nem domináltsága helyett egy ennél gyengébb stabilitásfogalmat vezettek be.

3. Definíció (Stabil halmaz). *Egy $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{I}_{(P,v)}$ halmaz stabil, ha teljesíti a következő két tulajdonságot:*

- *Belső stabilitás:* $\nexists\, x, y \in \mathscr{V} :\ x \text{ dom } y.$
- *Külső stabilitás:* $\forall\, y \in \mathscr{I}_{(P,v)} \setminus \mathscr{V}\ \ \exists\, x \in \mathscr{V} :\ x \text{ dom } y.$

A stabil halmaz elnevezést az indokolja, hogy ha ennek a halmaznak egy eleme ellen egy koalíció fellép és kikényszerít egy másik, ezt domináló elosztást, akkor van egy másik koalíció, amelyik elérheti, hogy visszatérjenek egy a stabil halmazbeli elosztáshoz (nem feltétlenül az eredetihez). Ezért a halmaztól való minden eltérés csak ideiglenes lehet, így nem is éri meg ettől eltérni.

Harsányi (1974) a stabil halmazoknak ezt az interpretációját kritizálta, mert csak annyi igaz, hogy a halmaz valamelyik pontjába kerülnek vissza, de lehet, hogy a halmaznak ez az utóbbi pontja az eredeti elosztástól eltérő koalíció minden tagja számára szigorúan jobb, csak számukra nem volt megvalósítható. Így közvetlenül nem tudtak volna eljutni oda, csak a másik koalíció segítségével. Ha ez a helyzet, akkor mégis van olyan koalíció, amelyik el fog térni a stabil halmaztól, tehát az „nem is olyan stabil”.

Ez a probléma abból adódik, hogy a dominancia relációban a játékosok rövidlátóak: csak az érdekli őket, hogy a következő lépésben szigorúan jobban járjanak. Ezzel szemben az előbb leírt példában a koalíciók már számoltak azzal, hogy ha eltérnek, akkor egy következő koalíció is el fog térni, ..., és több lépéssel később mi lesz a helyzet. Az ilyen, több lépésben történő dominanciát nevezte Harsányi közvetett dominanciának, mert itt a két kifizetésvektor nem közvetlenül, hanem más vektorokon keresztül vezető úton, közvetetten dominálja egymást.

4. Definíció (Közvetett dominancia). *Egy y vektor közvetetten dominálja az x vektort a koalíciók egy $S_1, S_2 \dots S_n$ sorozatán keresztül, ha létezik egy olyan $x = x^0, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n = y$ sorozat, amiben minden $i = 1, 2, \dots, n$-re $x^i \operatorname{dom}_{S_i} x^{i-1}$, továbbá minden $j \in S_i$-re $y_j > x_j^{i-1}$.*

Itt az S_1 koalíció nem csak a következő állapottal számol, hanem azzal is, hogy ha kikényszerítik az x^1 vektort, akkor utána az S_2 kikényszeríti az x^2-t, ..., végül eljutnak az y vektorhoz. Az S_i koalíció tagjainak akkor éri meg folytatni ezt a láncot, ha az y vektor előnyösebb számukra mint az x^{i-1}, amitől ők térnek el.

1. Példa. Nézzük az $A = [10, 6, 2]$ mátrixhoz tartozó hozzárendelési játékot. Jelölje M az eladót, és N_1, N_2, N_3 a három vevőt, kifizetésüket pedig rendre u, és v_1, v_2, v_3. Mivel szétosztható többletet csak egy $\{M, N_i\}$ típusú koalíció tud elérni, dominálás is csak rajtuk keresztül történhet, jelölje ezt röviden dom_i $(i = 1, 2, 3)$.

Ebben a hozzárendelési játékban az $(u; v_1, v_2, v_3) = (0; 10, 0, 0)$ elosztást közvetetten dominálja a $(2; 7, 0, 1)$ elosztás, mégpedig a koalíciók $\{M, N_3\}$, $\{M, N_1\}$ és az elosztások $(0; 10, 0, 0)$, $(1; 6, 2, 1)$, $(2; 7, 0, 1)$ sorozatán keresztül, mivel:

$$(2; 7, 0, 1) \operatorname{dom}_1 (1; 6, 2, 1) \operatorname{dom}_3 (0; 10, 0, 0),$$

és az $\{M, N_3\}$ koalíció mindkét tagja számára előnyösebb a végső $(2; 7, 0, 1)$ elosztás, mint a kiinduló $(0; 10, 0, 0)$ elosztás.

Közvetlen dominancia viszont nincs a két vektor között. Ilyen dominancia csak az eladó és a harmadik vevő alkotta koalíción keresztül lenne lehetséges, mivel a $(2;7,0,1)$ vektor csak nekik előnyösebb a másiknál, számukra viszont ez nem elérhető.

A későbbiekben érdekes lesz számunkra a következő, Harsányi (1974) által vizsgált játékosztály:

5. Definíció (Abszolút stabil játék). *Egy játékot abszolút stabil játéknak nevezünk, ha a játékban a közvetett dominanciából következik a közvetlen, azaz ha a játékban egy elosztás dominál egy másikat egy S koalícióval kezdődő sorozaton keresztül, akkor az S koalíción keresztül közvetlenül is dominálja.*

Könnyű belátni, hogy minden olyan játék abszolút stabil, amiben csak a nagykoalíció és a $(|P|-1)$-tagú koalíciók értéke pozitív, a többié pedig 0. Ilyen például minden legfeljebb 3-szereplős játék. Egy másik példa az abszolút stabil játékra a Gale és Shapley (1964) által definiált házaspárosítás-játék, mivel ezekben a játékokban minden párosítás elérhető a koalíciók számára.

2. Harsányi modellje

Egy (P,v) kooperatív játékhoz definiáljunk egy nemkooperatív alkujátékot a következőképpen: a játékosok halmaza legyen $P\cup\{0\}$, ahol a 0 játékos az alku vezetője. A játék az alábbi forgatókönyv szerint zajlik: van egy x^0 elosztás (vagy félelosztás), ami az alku aktuális állapotát mutatja. Először a 0 játékos kijelöl egy S koalíciót, ennek a tagjai – szimultán módon – javaslatot tehetnek egy új elosztásra (vagy félelosztásra). Két lehetőség van:

1. Ha a kijelölt S koalíció tagjai nem mind ugyanazt a vektort javasolták, vagy ha ugyan mind ugyanazt az x^1-et javasolták, de az x^1 nem dominálja az x^0 vektort az S koalíción keresztül, akkor a játék véget ér és a P-beli játékosok megkapják az x^0-beli kifizetésüket.
2. Ha mindannyian ugyanazt az x^1-et mondják és $x^1 \operatorname{dom}_S x^0$, akkor az alku aktuális állapota megváltozik x^1-re és a vezető kijelöl egy újabb koalíciót, ...

A kifizetések a következők: ha az alku véget ér, akkor a P-beli játékosok megkapják az utolsó x^i vektort, ha nem ér véget, akkor mindenki 0-t kap. A vezető kifizetése, ha t lépésben ér véget az alku, akkor $\sum_{j=0}^{t} 2^{-j}$, ha pedig nem ér véget, akkor $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2$ lesz. A vezető célja tehát, hogy minél tovább tartson az alkudozás.

Amennyiben egy koalíció egy adott állapotban nem akar dominálni, akkor feltehető, hogy ha megkérdezik őket, akkor az éppen aktuális állapotot fogják javasolni, nem pedig különböző elosztásokat, vagy egy olyan vektort, amelyik nem képes dominálni. Éppen ezért azokat az állapotokat, amelyekben megáll az alku, nevezhetjük a stratégiaprofil fixpontjának. Harsányi (1974) megmutatta, hogy a stabil halmazok előállnak, mint egyensúlyi stratégiák fixpontjai, hiszen az abszolút stabil játékok osztályán nem különbözik a közvetlen és a közvetett dominancia.

1. Tétel (Harsányi, 1974). *Az abszolút stabil játékokban a Harsányi-féle alkujáték részjáték tökéletes koalíciós Nash-egyensúlyi stratégiaprofiljainak fixpontjai egy stabil halmazt alkotnak. Fordítva, minden stabil halmazhoz található egy részjáték tökéletes koalíciós Nash-egyensúlyi stratégiaprofil, amelynek fixpontjai a halmazbeli kifizetések.*

A koalíciós Nash-egyensúly azt jelenti, hogy nem csak egy embernek van lehetősége megváltoztatni a stratégiáját, mint általában a Nash-egyensúlynál, hanem egyszerre többnek is. Például a Fogolydilemma játéknak nincs koalíciós Nash-egyensúlya, mert ott a két játékosnak megéri egyszerre eltérni a dezertál-dezertál stratégiától.

Erre a változtatásra az alkujáték szimultán része miatt van szükség, mivel ha koalíciós helyett csak rendes Nash-egyensúlyt követelnénk meg, akkor egyensúlyi lenne az a viselkedés, hogy egyetlen helyzetben sem akar senki sem dominálni. Ugyanis a kialakult állapoton egyénileg egyetlen játékos sem képes változtatni, hiába mondana mást, az alku nem folytatódna tovább, így nem érné meg neki eltérnie.

A későbbiekben ezt a tételt szeretnénk általánosabban, egy bővebb játékosztályon is belátni. A bizonyítás érdekében változtassunk egy kicsit az alkujátékon. A Harsányi-féle tétel az új alkujátékkal is érvényes lesz, de így nem csak az abszolút stabil játékokra, hanem a hozzárendelési játékokra is, amelyek pedig – amint azt a fenti példában is láttuk – nem abszolút stabilak.

3. Egy új alkujáték

A Harsányi (1974) által definiált játékhoz képest annyit változtatunk, hogy nincs vezető, hanem minden félelosztáshoz tartozik a koalícióknak egy sorrendje. Először a sorrendben első koalíció tagjait kérdezik meg. Ha meg tudnak állapodni egy új, az előzőt domináló vektorban, akkor áttérnek az új vektorra, ha nem, akkor megkérdezik a sorrendben következő koalíciót. Ha egyik koalíció tagjai sem képesek megegyezni, csak akkor történik meg a szétosztás.

Megtehettük volna azt is, hogy megtartjuk az alkuvezetőt, csak neki most már a koalíciók egy sorrendjét kell mondania, és van valamilyen preferenciája a megvalósuló elosztásokon, vagy az eredeti modellhez hasonlóan az a célja, hogy minél tovább tartson az alku.

A leírás egyszerűsítése miatt feltehetjük, hogy amikor megkérdezzük egy koalíció tagjait, akkor nem csak ezen koalíció tagjainak, hanem az összes játékosnak kell egy javaslatot tenni az új félelosztásra, de csak a kijelölt koalíciót vesszük figyelembe, teljesen mindegy, hogy a többiek mit mondanak.

Egy játékos stratégiája egy $\mathscr{I}' \times \{1, 2, \ldots, 2^{|P|}\} \to \mathscr{I}'$ függvény, ami azt mutatja meg, hogy mit mond először, másodszor, ..., $2^{|P|}$-edszer a játékos, ha az alku egy adott félelosztásnál tart. A Harsányi-féle játékhoz képest sokszor egyszerűbb, hogy nincs vezető, mivel innentől egyáltalán nem érdekes, mikor ér véget az alku, csak az, hogy véget ér-e, és ha igen, melyik állapotban. Amit a játékvezető elhagyásával megspóroltunk, azt a játékosok stratégiáinak bonyolultságával kell megfizetnünk, mivel ha egy koalíció nem dominál, akkor nem történik meg a kifizetés, hanem egy újabb koalíciót kérdeznek meg. Ezért lényeges, hogy az adott koalíció mikor következik, kik azok, akiknek utána még van lehetőségük alkudozni.

Ezen különbségek ellenére a két játék nagyon hasonlít egymásra. Ennek az a fő oka, hogy a vezető feladatát valójában csak szétosztottuk a játékosok között. Egyensúlyban nehezen elképzelhető, hogy az alku a Harsányi-féle játékban megáll, míg a másikban folytatódik, mert akkor a vezető nem optimálisan választott koalíciót.

1. Állítás. *Az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmaza zárt.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz van egy fixpontokból álló $\{x^i\}$ sorozat, aminek az x határértéke nem fixpont. Ekkor van egy koalíció, amelynek megéri eltérni az x vektortól, mert az alku végén mindegyikük szigorúan jobban fog járni, mégpedig legalább ε-nal, ahol $\varepsilon > 0$. Ebben az esetben viszont az x vektor $(\varepsilon/2)$-sugarú környezetében nem lehet fixpont, mert az előző koalíciónak ettől a fixponttól is megérné ugyanígy eltérni, ami ellentmondás. ❑

2. Állítás. *Az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmazára teljesül a belső stabilitás.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz és van két fixpont, x és y, valamint egy S koalíció, amin keresztül az y dominálja az x-et. Ebben az esetben az S koalíciónak megéri változtatnia a stratégiáján: ha az x helyzetben, amikor rájuk kerül a sor, mindenki y-t mond az x helyett, azzal mindannyian nyernek, mivel az y elosztás fixpont volta miatt az alku ott fog megállni, és ezzel mindannyian jobban járnak, mivel $y \operatorname{dom}_S x$. Ezért az eredeti stratégia nem lehetett egyensúlyi. ❑

3. Állítás. *Egy egyensúlyi stratégiához tartozó fixpontok halmaza része az elosztáshalmaznak.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, és van egy $x \in \mathscr{I}' \backslash \mathscr{I}$ fixpont. Növeljük meg x minden koordinátáját $(v(P) - x(P))/|P|$-vel, és jelöljük ezt a vektort y-nal. Nyilvánvaló, hogy $y \in \mathscr{I}$ és $y \operatorname{dom}_P x$. Ha x fixpont volt, akkor az y-nak is annak kell lennie, mivel, ha y-tól megéri eltérni egy koalíciónak, akkor x-től is megéri eltérnie. Viszont y dominálja x-et a nagykoalíción keresztül, ami a 2. Állítás miatt ellentmondás. ❑

Ezek az eredmények általánosan is igazak minden kooperatív játékból származtatott alkujátékban. Hozzárendelési játékok esetén (amikor a játékosok két csoportra bonthatóak és dominancia szempontjából csak a vegyespárosok számítanak, a nagykoalíció értéke pedig megegyezik a vegyespárosok által elérhető maximális összhaszonnal) ennél több is elmondható:

4. Állítás. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmaza háló.*

Bizonyítás: A gondolatmenet gyakorlatilag ugyanaz, mint a mag, valamint a stabil halmaz háló tulajdonságának bizonyításánál.

Legyen $(x^1;y^1)$ és $(x^2;y^2)$ két fixpont. Ekkor $(x^1 \vee x^2;y^1 \wedge y^2)$ és $(x^1 \wedge x^2;y^1 \vee y^2)$ közül legalább az egyik félelosztás. A szimmetria miatt választhatjuk az elsőt. Ha ez nem lenne fixpont, akkor van olyan (i,j) vegyespáros koalíció, amelynek megérné ettől eltérni és egy $(x^3;y^3)$ félelosztást mondani. A szimmetria miatt feltehető, hogy $y^1_j \leq y^2_j$. Ekkor viszont $(x^3;y^3)\,\mathrm{dom}_{ij}(x^1;y^1)$ miatt az (i,j) vegyespárosnak megéri eltérnie az $(x^1;y^1)$ esetben is, tehát az nem lehet fixpont.

Azt kaptuk tehát, hogy ha $(x^1 \vee x^2;y^1 \wedge y^2)$ egy félelosztás, akkor fixpont is. A 3. Állítás miatt ekkor $(x^1 \vee x^2;y^1 \wedge y^2)$ egy elosztás, ekkor viszont az $(x^1 \wedge x^2;y^1 \vee y^2)$ is elosztás, tehát fixpont is, azaz a fixpontok halmaza háló. ❑

5. Állítás. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmaza tartalmaz egy olyan pontot, amiben mindent az eladók kapnak, és egy olyan pontot, amiben mindent a vevők kapnak.*

Bizonyítás: A szimmetria miatt elég megmutatni, hogy van olyan pont, amiben mindent az eladók kapnak. Az 1. és 3. Állítás szerint a fixpontok halmaza egy zárt háló, így van olyan pontja, amelyben az eladók azt a maximális összeget kapják, amennyit egy fixpontban csak kaphatnak. Ha ebben a pontban nem mindent az eladók kapnak, akkor vegyük azt a pontot, amiben a vevők kifizetését az eladók között egyenlő arányban szétosztjuk. Ez nem lehet egy fixpont, mivel minden eladó többet kap, mint a maximális fixpontban. Ekkor viszont van olyan koalíció, amelyiknek megéri ettől eltérni, mert az alku végén egy ennél szigorúan jobb elosztáshoz jut. Ilyen viszont nem lehet, mert ennek az utolsó pontnak egy fixpontnak kell lennie, ebben viszont az eladók nem járhatnak jobban, mint az eredeti elosztásban, ami az eladók számára optimális volt. ❑

6. Állítás. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak a halmazában bármely két pont között van egy harmadik.*

Bizonyítás: Legyen $(x^1;y^1)$ és $(x^2;y^2)$ két fixpont. Megmutatjuk, hogy található a kettő között egy harmadik fixpont is. Feltehető, hogy $x^1 \leq x^2$ és $y^1 \geq y^2$, mivel ha nem így lenne, akkor az $(x^1 \wedge x^2; y^1 \vee y^2)$ pont jó lenne harmadik fixpontnak. Legyen $(x^3;y^3) = ((x^1;y^1)+(x^2;y^2))/2$. Ha az $(x^3;y^3)$ egy fixpont, akkor találtunk egy $(x^1;y^1)$ és $(x^2;y^2)$ közötti fixpontot. Ha nem fixpont, akkor van olyan (i,j) vegyespáros, akiknek megéri eltérni az $(x^3;y^3)$ elosztástól, mert így az alku végén egy $(x^4;y^4)$ fixponthoz jutnak, ami mindkettőjüknek előnyösebb, mint az $(x^3;y^3)$. Ha $x_i^1 \le x_i^3$ és $y_j^1 \le y_j^3$, akkor az $(x^1;y^1)$ elosztástól is megérné eltérni. Tehát $x_i^1 > x_i^3$-nek vagy $y_j^1 > y_j^3$-nek fenn kell állnia. A szimmetria miatt feltehető, hogy az első egyenlőtlenség teljesül. Ekkor $x_i^1 > x_i^3 = (x_i^1 + x_i^2)/2 > x_i^2$. Hasonlóan $x_i^2 > x_i^3$ és $y_j^2 > y_j^3$ közül is valamelyiknek teljesülnie kell. Az első egyenlőtlenség nem teljesülhet, így a másodiknak kell teljesülnie. Ekkor $y_j^2 > y_j^3 = (y_j^1 + y_j^2)/2 > y_j^1$. A 3. Állítás miatt $\mathrm{med}((x^1;y^1);(x^2;y^2);(x^4;y^4))$ egy fixpont, és $y_j^1 < y_j^3 < y_j^4$, valamint $x_i^2 < x_i^3 < x_i^4$ miatt különbözik az $(x^1;y^1)$-től és az $(x^2;y^2)$-től is. ❑

Mivel a fixpontok halmaza zárt és bármely két pontja közt van egy harmadik, így összefüggő is.

7. Állítás. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjainak halmaza tartalmazza a bármely két pontja közti félelosztások magját.*

Bizonyítás: Az $(x^1;y^1)$ és $(x^2;y^2)$ pontok közti félelosztások magja azon $(x;y)$ félelosztásokból áll, amelyeknél minden (i,j) vegyespárosra $x_i + y_j \ge a_{ij}$ vagy $x_i = x_i^1 \vee x_i^2$ vagy $y_j = y_j^1 \vee y_j^2$ teljesül. Ha egy ilyen félelosztás nem fixpont, akkor van olyan vegyespáros, amelyiknek megéri ettől eltérni, de akkor ennek a vegyespárosnak ugyanígy megéri eltérnie $(x^1;y^1)$-től vagy $(x^2;y^2)$-től is, tehát az nem lehet fixpont. ❑

2. Tétel. *Hozzárendelési játékban az egyensúlyi stratégiák fixpontjai egy stabil halmazt alkotnak.*

Bizonyítás: A bizonyításhoz felhasználjuk a stabil halmazok hozzárendelési játékokon vett karakterizációját (Bednay, 2011), miszerint
Egy hozzárendelési játékban az elosztáshalmaz egy részhalmaza pontosan akkor stabil halmaz, ha

1. *teljesíti a belső stabilitást;*
2. *tartalmaz egy olyan pontot, ahol mindent az eladók kapnak és egy olyat, ahol mindent a vevők kapnak;*
3. *összefüggő;*
4. *tartalmazza a bármely két pontja közti elosztások magját.*

Azt, hogy minden fixpont egy elosztás a 3. Állításban láttuk be. A belső stabilitás a 2. Állításból, az pedig, hogy tartalmazza a két szélsőséges elosztást az 5. Állításból adódik. Az összefüggőség az 1. és a 6. Állítás együttes következménye. Az utolsó feltételt pedig a 7. Állításban mutattuk meg. ❑

Ennek az állításnak a fordítottja is igaz.

3. Tétel. *Hozzárendelési játékban minden stabil halmazhoz található olyan egyensúlyi stratégiaprofil, aminek a fixpontjai a stabil halmaz elemei.*

Bizonyítás: Legyen $\mathscr{V}$ egy stabil halmaz az A mátrixhoz tartozó hozzárendelési játékban és legyen $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{V}$ egy, a $\mathscr{V}$ két sarkát (ahol mindent a vevők és ahol mindent az eladók kapnak) összekötő monoton görbe. Egy ilyen görbe biztosan létezik a stabil halmazok előző tételben leírt karakterizációja miatt. Vegyük azt a stratégiaprofilt, amiben az (i,j) koalíció a következőt teszi:

- Ha az alku a $\mathscr{V}$ valamelyik pontjában tart, akkor nem akarnak dominálni.
- Ha egy nem $\mathscr{V}$-beli $(x;y)$ pontban vagyunk és nincs az $\mathscr{X}$ görbének olyan pontja, amivel mindketten jobban járnak, akkor szintén nem akarnak dominálni.
- Ha az $\mathscr{X}$-nek van olyan pontja, amivel mindketten jobban járnak, és az dominálja is az aktuális pontot, akkor mindketten ezt mondják (ha több ilyen van akkor ezek közül egyet).
- Ha az $\mathscr{X}$-nek van olyan $(u;v)$ pontja, amivel mindketten jobban járnak, de ez nem dominálja az aktuális pontot, mert nem elérhető az (i,j) vegyespáros számára, akkor legyen $(x^1;y^1)$ az a pont az $(x;y)$-t és $(u;v)$-t összekötő szakaszon, amelyre $x_i^1+y_j^1=a_{ij}$. Legyen $(u^1;v^1)$ az $\mathscr{X}$ görbének egy olyan pontja, amelyre $x_i^1=u_i^1$, az $(u^2;v^2)$ pedig egy olyan, amire $y_j^2=v_j^2$. Ilyen pont van, mivel az $(u;v)\in\mathscr{X}$ pontnak a megfelelő koordinátái nagyobbak, mint $(x^1;y^1)$-éi, $\mathscr{X}$ végpontjaiban a megfelelő koordináták kisebbek, és $\mathscr{X}$ összefüggősége miatt minden, a kettő közötti értéket felveszi $\mathscr{X}$-nek valamelyik pontja. Legyen $(x^3;y^3)$ az $(x^1;y^1)$ és $(x^2;y^2)$ vektorok minimuma, azaz $(x^3;y^3)=(x^1\wedge x^2;y^1\wedge y^2)$. Ebben az esetben az (i,j) koalíció mindkét tagja ezt az $(x^3;y^3)$ vektort mondja be.

Ez egyensúlyi stratégia lesz, mivel ha mindenki ezt játssza, akkor biztos, hogy egy $\mathscr{V}$-beli pontba (általában egy $\mathscr{X}$-belibe, kivéve ha eredetileg $\mathscr{V}$-ből indult az alku) jutunk. A fent leírt stratégiától egyik koalíciónak sem érdemes eltérnie, mivel:

- Egy $\mathscr{V}$-beli pontból egy koalíciónak sem éri meg eltérnie, mivel ha eltérnek, akkor az alku végén biztos, hogy egy másik $\mathscr{V}$-beli vektorba jutnak el, ami $\mathscr{V}$ belső stabilitása miatt nem lehet mindkettőjüknek előnyösebb, mint az eredeti.
- Ha nem $\mathscr{V}$-beli pontból indulunk ki, akkor az eredeti stratégia végül egy $\mathscr{X}$-beli pontot fog eredményezni. Ezen egy koalíciónak sem érdemes változtatnia. Tegyük fel, hogy ez mégis megéri a játékosok egy csoportjának. Nézzük az utolsó párost, akik eltértek. Ők egy $\mathscr{V}\setminus\mathscr{X}$-beli pontot mondtak (ha nem ilyet, akkor onnan végül egy $\mathscr{X}$-belibe érne az alku, mivel ettől kezdve mindenki követi az eredeti stratégiáját).

Ez az elosztás viszont dominálja azt a $\mathscr{X}$-beli pontot, ahova eltérés nélkül jutottak volna, mivel megvalósítható és előnyösebb is az utolsó pár számára (különben nem érte volna meg változtatni a stratégián), ami ellentmond az $\mathscr{X}$ belső stabilitásának.

- Eddig azt láttuk be, hogy ha a fent leírt stratégiától egy koalíció eltér, az is egy $\mathscr{X}$-beli kifizetést fog eredményezni. Az $\mathscr{X}$ monotonitása miatt viszont nem érheti meg szigorúan a páros mindkét tagjának eltérni, hogy a mostani végeredmény helyett egy másik $\mathscr{X}$-beli pontba jussanak, ezért a stratégia egyensúlyi.

❑

Köszönetnyilvánítás:
A szerző köszöni Forgó Ferencnek, hogy figyelmébe ajánlotta Harsányi (1974) tanulmányát és az abban rejlő kutatási lehetőségeket. A szerző munkáját az OTKA K-72856 pályázat támogatta.

Hivatkozások

Bednay D. (2011). Stabil halmazok hozzárendelési játékokban. *Kézirat*, http://web.uni-corvinus.hu/matkg/konf_papers/konf_2011_bednay_dezso.pdf.

Gale, D., Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, 69:9–15.

Harsányi, J. (1974). An equilibrium-point interpretation of stable sets and a proposed alternative definition. *Management Science*, 20:1472–1495.

Neumann, J., Morgenstern, O. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior (Third edition)*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Shapley, L. S., Shubik, M. (1972). The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory*, 1:111–130.