Páros összehasonlításon alapuló pontozási eljárások monotonitása: önkonzisztencia és önkonzisztens monotonitás

Adalékok a pontozási eljárások axiomatikus tárgyalásához

Csató László*

Budapesti Corvinus Egyetem
Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

2013. december 20.

Kivonat

A cikk a páros összehasonlításokon alapuló pontozási eljárásokat tárgyalja axiomatikus megközelítésben. A szakirodalomban számos értékelő függvényt javasoltak erre a célra, néhány karakterizációs eredmény is ismert. Ennek ellenére a megfelelő módszer kiválasztása nem egy-szerű feladat, a különböző tulajdonságok bevezetése elsősorban ebben nyújthat segítséget. Itt az összehasonlított objektumok teljesítményén érvényesülő monotonitást tárgyaljuk az önkonzisztencia és önkonzisztens monotonitás axiómákból kiindulva. Bemutatásra kerülnek lehetséges gyengítéseik és kiterjesztéseik, illetve egy, az irreleváns összehasonlításoktól való függetlenséggel kapcsolatos lehetetlenségi tétel is. A tulajdonságok teljesülését három eljárásra, a klasszikus pontszám eljárásra, az ezt továbbfejlesztő általánosított sorösszegre és a legkisebb négyzetek módszerére vizsgáljuk meg, melyek mindegyike egy lineáris egyenletrendszer megoldásaként számítható. A kapott eredmények új szempontokkal gazdagítják a pontozási eljárás megválasztásának kérdését.

Kulcsszavak: preferenciák aggregálása, páros összehasonlítás, rangsorolás, karakterizáció, általánosított sorösszeg módszer, legkisebb négyzetek módszere

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C44, D71.

Abstract

The paper provides an axiomatic analysis of some scoring procedures based on paired comparisons. Several methods have been proposed for these generalized tournaments, some of them have been also characterized by a set of properties. The choice of an appropriate method is supported by a discussion of their theoretical properties. In the paper we focus on the connections of self-consistency and self-consistent-monotonicity, two axioms based on the comparisons of object?s performance. The contradiction of self-consistency and independence of irrel-evant matches is revealed, as well as some possible reductions and extensions of these properties. Their satisfiability is examined through three scoring procedures, the score, generalised row sum and least squares methods, each of them is calculated as a solution of a system of linear equations. Our results contribute to the problem of finding a proper paired comparison based scoring method.

Keywords: preference aggregation, paired comparison, ranking, characterization, generalised row sum method, least squares method

*e-mail: laszlo.csato@uni-corvinus.hu
A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/1-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt által nyújtott személyi támogatással valósult meg. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.
A kutatás szakmailag kapcsolódik az OTKA K-77420 pályázathoz.
A szerző köszönetét fejezi ki *Bozóki Sándor*nak, *Pintér Miklós*nak és *Pavel Yurievich Chebotarev*nek hasznos tanácsaikért.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

1. Bevezetés

A komplex, többszempontú döntések meghozatala során gyakran nincs lehetőség az alternatívák egyetlen objektív skálán történő értékelésére. Amennyiben mégis szükségessé válik ezek rangsorolása, az sok esetben páronkénti összehasonlításuk alapján végezhető el. Ilyen feladatokkal találkozhatunk a statisztikában a vásárlóerő-paritás számításakor (Éltető és Köves, 1964; Szulc, 1964), folyóiratok/tudományos kutatók/szakmai műhelyek sorrendjének felállításakor (Pinski és Narin, 1976; Palacios-Huerta és Volij, 2004; Slutzki és Volij, 2006; Kóczy és Strobel, 2010; Kóczy és Nichifor, 2013), weblapok rangsorolásakor (Brin és Page, 1998; Page et al., 1999), pszichológiai kísérletek kiértékelésekor (Mosteller, 1951; Gulliksen, 1956; Kaiser és Serlin, 1978), (választói) preferenciák aggregálásakor (Borda, 1781; Copeland, 1951; Young, 1974; Nitzan és Rubinstein, 1981; Jiang et al., 2011), vagy a sport különböző területein (Zermelo, 1929; Bradley és Terry, 1952).

Ezen esetek mindegyikében a rendelkezésre álló információk egy (vagy több) páros összehasonlítási mátrixba tömöríthetők. Az egyik legáltalánosabb modellt vizsgáljuk, mely lényegében az összes, reálisan elképzelhető jelenség leírására alkalmas. Ennek értelmében a páros összehasonlítások eredménye nem feltétlenül binárisan adott, tetszőleges preferenciaintenzitás megjelenítésére alkalmas (beleértve a döntetlenek lehetőségét), emellett két alternatíva tetszőleges alkalommal összevetésre kerülhet, az is előfordulhat, hogy az erre vonatkozó adat teljesen hiányzik. Ugyanakkor az alternatívák önmagukkal való összehasonlítását lényegtelennek tekintjük. Ez a modellkeret (Chebotarev és Shamis, 1999; González-Díaz et al., 2013) a szakirodalomban ismert páros összehasonlítás definíciók csaknem mindegyikét magában foglalja, talán az egyetlen kivétel a súlyozott irányított gráf esete, mely megengedi az egyes csúcsokhoz tartozó pozitív súlyú hurokéleket (Herings et al., 2005).

A páros összehasonlítások definiálása után a következő kihívást az alternatívák sorba rendezése, azaz rangsorolása jelenti. A rangsor egy, az objektumhalmazon értelmezett teljes, tranzitív és reflexív bináris reláció. Egyfajta információtömörítés válik szükségessé: az n objektum páronkénti, összesen $n(n-1)/2$ darab távolságát kellene megfelelően leírni a megoldásként kapott rangsorból adódó $n-1$ különbséggel. Ez $n = 2$ esetén biztosan megtehető, két alternatíva esetén a páros összehasonlítás kimenetele valóban minden információt megad a sorrendről. Amennyiben viszont az objektumok száma legalább három, már felmerülhet a Condorcet-paradoxonból ismerős intranzitivitás, amikor X_1 jobbnak bizonyul X_2-nél, X_2 X_3-nál, X_3 pedig X_1-nél. A klasszikus esetben nem is tudunk egyértelmű döntésre jutni, itt azonban a preferenciaintenzitások eltérése megoldást jelenthet.

A rangsor felállítására több megközelítés ismert, a tanulmányban a pontozási eljárásokkal foglalkozunk, Bouyssou (2004) számos érvet említ ezek alkalmazása mellett. Az első, közvetlenül adódó megoldási lehetőség a sorösszeg, a pontszámok kiszámítása (Borda, 1781; Copeland, 1951). A páros összehasonlításon alapuló rangsorolásban egyre népszerűbb a PageRank módszer (Brin és Page, 1998; Page et al., 1999) alkalmazása (Csendes és Antal, 2010; London és Csendes, 2013; Radicchi, 2011; Dingle et al., 2013). A játékelméleti irodalomban hasonló feladatként merül fel egy irányított gráf csúcsainak rangsorolása (Borm et al., 2002; van den Brink és Gilles, 2003; Herings et al., 2005; Slikker et al., 2012). Szintén elterjedt a maximum likelihood (Zermelo, 1929; Bradley és Terry, 1952; Conner és Grant, 2000, 2009) és a legkisebb négyzetek módszere (Horst, 1932; Mosteller, 1951; Morrissey, 1955; Gulliksen, 1956; Kaiser és Serlin, 1978). Egy további, elméleti szempontból vonzó eljárás az általánosított sorösszeg módszer (Chebotarev, 1989, 1994).

A megfelelő eljárás kiválasztásában a társadalmi választások elméletének (social choice theory) axiomatikus szemlélete is segítséget nyújthat (Altman és Tennenholtz, 2008):

- ◇ Leíró (descriptive) megközelítés: egy pontozási eljárást kiválasztva, olyan axiómák, tulajdonságok előírása, melyeket az adott módszer kielégít, miközben bármely másik legalább egyet megsért közülük. Ez lényegében a kooperatív játékelmélet elosztási koncepciói esetén követett stratégia: a 2012-ben közgazdasági Nobel-díjat nyert Lloyd S. Shapley nevéhez fűződő Shapley-értékre (Shapley, 1953) már több reprezentációs tétel született, nem is említve a különböző játékosztályokon megfigyelhető eltéréseket (van den Brink és Pintér, 2012).

- ◇ Normatív (normative) megközelítés: több, elméleti szempontból indokolható követelmény megfogalmazása, majd annak vizsgálata, mely pontozási eljárások teljesítik ezeket. Kemeny és Snell (1962) utóbbi tekintetében három lehetőséget említ: (I) az axiómák inkonzisztensek, egyetlen módszer sem teljesítheti ezek mindegyikét; (II) egyetlen eljárás elégíti ki mindegyik tulajdonságot; (III) több módszer is megfelel az előírt feltételeknek. Sőt, (II) aleseteként létezik egy negyedik opció, miszerint a megfogalmazott követelmények logikailag nem függetlenek, bár egyértelműen karakterizálnak egy eljárást, ehhez azonban elegendő lenne egy szűkebb részhalmazuk (Can és Storcken, 2013).

A páros összehasonlításon alapuló pontozási eljárásokkal kapcsolatban szintén ismert néhány reprezentációs tétel. A pontszám vagy sorösszeg módszert Rubinstein (1980) karakterizálta bajnokságokban (tournament), ahol minden összehasonlítás kimenetele ismert és az egyik alternatíva egyértelműen jobbnak bizonyult a másiknál, nincs döntetlen vagy eltérő preferenciaintenzitás. Az ennél általánosabb round-robin esetben legalább három különböző reprezentációs tétel létezik az eljárásra (Young, 1974; Hansson és Sahlquist, 1976; Nitzan és Rubinstein, 1981; Bouyssou, 1992), az itt tárgyalt általános modellben azonban már nem érvényesek. A PageRank eljárással kapcsolatos reprezentációs tételek ugyancsak megtalálhatók az irodalomban (Altman és Tennenholtz, 2005; Slutzki és Volij, 2006).

Több cikk foglalkozik a pontozási eljárások normatív alapú tárgyalásával (Slutzki és Volij, 2006; Altman és Tennenholtz, 2008). Chebotarev és Shamis (1998) tanulmánya kiváló áttekintést nyújt a rangsorolási eljárások karakterizációjáról, összesen több mint 40 módszert elemez. Chebotarev és Shamis (1999) az önkonzisztens monotonitás tulajdonság (Chebotarev és Shamis, 1997) szempontjából osztályozza a pontozási eljárásokat, González-Díaz et al. (2013) pedig néhány népszerű módszert hasonlít össze több mint tíz követelmény alapján.

Kiindulópontunk az önkonzisztencia (Chebotarev és Shamis, 1997), és az ehhez szorosan kapcsolódó önkonzisztens monotonitás axióma, ezek kiválasztásában több tényező játszott szerepet. Egyrészt, Chebotarev és Shamis (1999) a pontozási eljárások egy nagy halmazáról, a győzelem-vereség kombinálásán (win-loss combining) alapuló módszerekről belátta, hogy nem teljesíthetik az utóbbi tulajdonságot. Másrészt González-Díaz et al. (2013) éppen az önkonzisztens monotonitás megsértésével érvel a legkisebb négyzetek, és részben a fair bets módszer alkalmazása ellen. Harmadszor, a tulajdonságok hátterének alapos feltárása hozzájárulhat a módszerek mélyebb megértéséhez. Végül, de nem utolsósorban mindkettő intuitív módon is vonzó axióma, pusztán logikai alapon hasonló feltételek teljesülését várnánk el.

A különböző tulajdonságok teljesülését három pontozási eljárás, helyesebben kettő és egy parametrikus család esetén vizsgáljuk meg. A pontszám módszer, részben egyszerűsége okán, talán a legalaposabban elemzett pontozási eljárás, hiányzó és többszörös összehasonlítások mellett azonban alkalmazása problémás. Ennek oka, hogy ilyen esetekben is teljesíti az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség axiómáját, miközben éppen ezek hordoznak információt a velük összehasonlított többi alternatíva teljesítményéről. Ezt a tényt González-Díaz et al. (2013) formális alátámasztás nélkül, inkább intuitív alapon emeli ki; tanulmányunkban ezt az érvelést sikerült egy lehetetlenségi tétel formájában matematikai alapokra helyezni.

A pontszám módszert az új szempont, az ellenfelek erejének beépítésével lehet finomítani (David, 1987), éppen ez az általánosított sorösszeg eljárás (Chebotarev, 1989) kiindulópontja. Az eljárás tulajdonságait részletesen tárgyalta Chebotarev (1994), ezeket néhány további megfigyeléssel egészítjük ki. A legkisebb négyzetek módszerét egyszerűsége okán széles körben használják, nemritkán gyakorlati problémákra (Leeflang és van Praag, 1971; Csató, 2012a, 2013a). Elsősorban ez lehet az oka más tudományterületeken történő megjelenésének: a páros összehasonlítás mátrixokra alkalmazott $LLSM$ módszer (Crawford és Williams, 1980; De Graan, 1980; Crawford és Williams, 1985; Bozóki et al., 2010), (az ekvivalencia bizonyítását lásd Csató (2012b)), illetve a statisztikában használt EKS-eljárás (Éltető és Köves, 1964; Szulc, 1964) lényegében ugyanezt jelenti. Emellett közeli rokonságban van a játékelméleti pozíciós erő (Herings et al., 2005) fogalmával, és a számítás menete, a PageRank módszerhez hasonlóan, szemléletesen értelmezhető gráfokon (Csató, 2013b).

A vizsgált pontozási eljárások közül a pontszám módszerrel Young (1974), Nitzan és Rubinstein (1981), illetve Bouyssou (1992) foglalkozott karakterizációk keretében, míg González-Díaz et al. (2013) – a legkisebb négyzetek módszere és az általánosított sorösszeg (rögzített $\varepsilon = 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ paraméterre) mellett – átfogó axiomatikus tárgyalást adott róla. Chebotarev (1994) az általánosított sorösszeg kimerítő elemzését adta, egy korábbi cikkem pedig a legkisebb négyzetek módszerét vizsgálta néhány további tulajdonság szempontjából Csató (2012b).

A tanulmány fő hozzájárulása az önkonzisztencia és az ehhez szorosan kapcsolódó további tulajdonságok megfogalmazása, valamint a pontozási eljárások vizsgálata ezek tükrében. Utóbbiak közül az általánosított sorösszeg emelkedik ki, különösen bizonyos paramétermegkötések mellett; ez összhangban áll González-Díaz et al. (2013) megállapításaival. A részletes tárgyalás révén jobban megérthetjük a különböző módszerek viselkedését, az axiómák erejét és kölcsönös kapcsolatukat. Legfontosabbnak a 4.1.

tétel üzenetét tartjuk: nem lehet olyan pontozási eljárást találni, mely egyszerre felelne meg bizonyos lokális és globális követelményeknek. Altman és Tennenholtz (2008) egy ehhez hasonló állítást fogalmazott meg irányított gráfok esetén, itt azonban jóval általánosabb modellről van szó. Emellett a 4.3., az 5.1 és az 5.2. tételek mutatják az egyes axiómák közötti átváltási lehetőségeket.

A kapott ellentmondások ugyan negatív eredménynek tűnnek, azonban éppen ezekkel érvelhetünk a pontszám módszer kiterjedt használata ellen, matematikailag indokolva González-Díaz et al. (2013) zárómondatát. Ennek remélhetőleg gyakorlati jelentősége is lehet. Az egyes sportbajnokságok szervezői, megítélésünk szerint, túlzott mértékben ragaszkodnak a pontszám módszer alkalmazásához olyan bajnokságokban, ahol gyakori a hiányzó vagy a többszörös összehasonlítás. Ez számos esetben komoly problémát okoz, magára vonva mind a résztvevők, mind az érdeklődők kritikáját; a svájci rendszerű sakk (csapat)versenyek furcsaságait lásd Csató (2013a); González-Díaz (2010) munkáiban. Bizonyos monotonitási tulajdonságok megsértése szintén szorosan kapcsolódik a vizsgált tulajdonságokhoz: a közelmúlt egyik emlékezetes esete a 2012-es londoni olimpia tollaslabda versenyén történt meg (Badminton, 2012).

A cikk felépítése a következő. A 2. fejezetben definiáljuk a modellkeretet, a rangsorolási problémát és a pontozási eljárásokat, bemutatjuk a későbbiekben tárgyalt konkrét módszereket. A 3. részben olyan axiómákat vezetünk be, melyek nem kapcsolódnak a tárgyalás főáramába, viszont a későbbiekben szükség lesz rájuk. A 4. fejezetben az önkonzisztenciával foglalkozunk, belátunk egy lehetetlenségi tételt, majd végigvesszük a negatív eredmény elkerülésének potenciális irányait. Az 5. fejezet az önkonzisztens monotonitást elemzi, végiggondolva a meglehetősen erős implikációk gyengítését. A 6. fejezet az önkonzisztencia egy természetesnek tűnő erősítését fogalmazza meg. Végül a 7. fejezet a főbb eredményeket összegzi, és felvázol néhány kutatási irányt, továbbfejlesztési lehetőséget.

A tanulmányban meglehetősen sok fogalom, definíció és összefüggés jelenik meg, ezek befogadását, visszakeresését segíthetik a függelék táblázatai, melyekben minden állítás mellett megjelenik a tanulmányban megadott, vagy a korábbi irodalomból ismert bizonyítás, utóbbi hiányában ez saját eredménynek tekinthető.[1]

[1] E cikket magyarul írtam, a későbbiekben a főbb eredmények angol nyelvű publikálását is tervezem, ezért a bevezetett fogalmak mögött zárójelben mindig ott szerepel a már használt (hivatkozással) vagy az általam alkotott angol terminológia. Utóbbival kapcsolatban minden észrevételt szívesen fogadok.

2. A páros összehasonlításon alapuló rangsorolás

2.1. A rangsorolási probléma

Egy (N, A, M) *rangsorolási probléma* három komponensből áll: az $N = \{X_1, X_2, \dots X_n\}, n \in \mathbb{N}$ *objektumhalmaz*ból, az A *eredménymátrix*ból és az M *mérkőzésmátrix*ból. $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, nemnegatív mátrix, m_{ij} az X_i és X_j objektumok páros összehasonlításának súlyát, jelentőségét (például az összehasonlítások számát) tükrözi. $m_{ii} = 0$ minden $i = 1,2,\dots,n$-re, az objektumok önmagukkal vett összehasonlításaival nem foglalkozunk. Legyen $d_i = \sum_{X_j \in N} m_{ij}$ az X_i objektum összehasonlításainak száma és $\mathfrak{m} = \max_{X_i, X_j \in N} m_{ij}$ a két objektum közötti összehasonlítások számának maximuma. Az egyszerűség érdekében feltesszük, hogy az M mérkőzésmátrix elemei egész számok; a kapott eredmények mindegyike érvényes a folytonos esetben is, viszont helyenként sokkal bonyolultabb jelölések alkalmazása válna szükségessé.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ferdén szimmetrikus mátrix, azaz $a_{ij} = -a_{ji}$, ahol $-m_{ij} \le a_{ij} \le m_{ij}$. A főátló elemeinek itt sincs szerepe, $a_{ii} = 0$ minden $i = 1,2,\dots,n$-re. $(a_{ij} + m_{ij})/(2m_{ij})$ annak esélyeként értelmezhető, hogy X_i jobbnak bizonyul X_j-nél. Az így definiált rangsorolási problémák osztálya legyen $\mathcal{R}$.

A *multihalmaz* olyan halmaz, mely bizonyos elemeket többször is tartalmazhat.[2] Az X_i objektum *ellenfél multihalmaza* pontosan annyiszor, m_{ij}-szer tartalmaz minden más objektumot, ahányszor X_i-vel összehasonlításra kerültek: $O_i = \{X_j : \sharp X_j = m_{ij}\}$. Az O_i ellenfél multihalmaz elemeit az X_i objektum *ellenfel*einek nevezzük.

Egy $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma:

- *kiegyensúlyozott* (balanced), ha $d_i = d_j$ minden $X_i, X_j \in N$ objektumpárra. Az ilyen rangsorolási problémák osztálya legyen $\mathcal{R}^B (\subset \mathcal{R})$.
- *round-robin*, ha $m_{ij} = m_{k\ell}$ minden különböző objektumokból álló (X_i, X_j), $X_i \ne X_j$ és $(X_k, X_\ell), X_k \ne X_\ell$ párra. Az ilyen rangsorolási problémák osztálya legyen $\mathcal{R}^R \subset \mathcal{R}^B (\subset \mathcal{R})$.
- *súlyozatlan* (unweighted), ha $m_{ij} \in \{0,1\}$ minden $X_i, X_j \in N$ esetén. Az ilyen rangsorolási problémák osztálya legyen $\mathcal{R}^U (\subset \mathcal{R})$.

A round-robin rangsorolási problémák abban az értelemben teljesnek tekinthetők, hogy egyetlen páros összehasonlítás sem hiányzik. A kiegyensúlyozottság azt jelenti, hogy az ismert összehasonlítások egyenletesen helyezkednek el a rangsorolási problémában. Súlyozatlan esetben nem megengedettek a többszörös összehasonlítások, az A eredménymátrix szinte teljesen leírja a rangsorolási problémát, kivéve, hogy $a_{ij} = 0$ egyszerre felel meg a döntetlennek és a hiányzó összehasonlításnak.

Az M mérkőzésmátrix *blokk diagonális* (block diagonal), illetve *blokk antidiagonális* (block antidiagonal), ha létezik az objektumok halmazának olyan $N^1 \cup N^2 = N$, $N^1 \cap N^2 = \emptyset$, $|N_1| = n_1 \ge 1$ és $|N_2| = n_2 = n - n_1 \ge 1$ partíciója, amire:

$$M = \begin{pmatrix} M^1_{n_1 \times n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times n_1} & M^2_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix}, \text{ illetve } M = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_1 \times n_1} & M^1_{n_1 \times n_2} \\ M^2_{n_2 \times n_1} & \mathbf{0}_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix},$$

ahol az alsó indexek az (al)mátrixok dimenzióit jelölik (Brozos-Vázquez et al., 2008).

Az M mérkőzésmátrix egy $G := (V, E)$ irányítatlan multigráffal reprezentálható, ahol a V csúcshalmaz azonos az N objektumhalmazzal, az X_i és X_j közötti élek száma pedig m_{ij}, tehát az E élhalmaz az ismert páros összehasonlítások szerkezetét tükrözi. A G gráf X_i csúcsának fokszáma d_i, az objektum összehasonlításainak száma. G az (N, A, M) rangsorolási problémához tartozó *összehasonlítási multigráf*, azonban kizárólag M-től függ, a páros összehasonlítások eredménye nem befolyásolja. A G gráf $L = [\ell_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *Laplace mátrix*ának elemei $\ell_{ij} = -m_{ij}$, $i \ne j$ és $\ell_{ii} = d_i$ minden $i = 1,2,\dots,n$-re. A Laplace mátrix szimmetrikus és pozitív szemidefinit (Mohar, 1991, Theorem 2.1).

2.1. Lemma. *Egy $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémában az M mérkőzésmátrix akkor és csak akkor nem blokk diagonális, ha a G összehasonlítási multigráf összefüggő.*

Legyen $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ a csupa 1-esből álló vektor, azaz $e_i = 1$ minden $i = 1,2,\dots,n$-re.[3] Jelölje $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az egységmátrixot, melynek főátlójában 1-esek, azon kívül pedig 0-k vannak..

[2] Ezt fogalmat Chebotarev és Shamis (1998) vezette be az önkonzisztens monotonitás definiálása céljából; itt hasonló szerepet játszik.

[3] A továbbiakban $\mathbf{e}$ mindig oszlopvektort, míg $\mathbf{e}^\top$ sorvektort jelöl.

2.2. Pontozási eljárások

A *pontozási eljárás* egy $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény, $f_i(N, A, M)$ az X_i objektum értékelése. Az objektumok $\succeq$ *rangsora* az N halmazon értelmezett teljes, reflexív és tranzitív bináris reláció. Minden f pontozási eljárás generál egy rangsort az $X_i \succeq^f X_j \Leftrightarrow f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M)$ definíció alapján.

2.1. Definíció. ***Arányosság****: Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma. Az $f^1, f^2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pontozási eljárások arányosak, amennyiben létezik olyan $\kappa > 0$ pozitív konstans, hogy $f^1(N, A, M) = \kappa f^2(N, A, M)$. Jelölése $f^1 \approx f^2$.*

Arányos pontozási eljárások által generált rangsorok azonosak.

A következőkben néhány pontozási eljárást mutatunk be.

2.2. Definíció. ***Név módszer*** *(fixed-order method) (Slutzki és Volij, 2005): $\mathbf{fo} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ahol tetszőleges $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ esetén $fo_i(N, A, M) = i$ minden $X_i \in N$-re.*

A név módszer független az eredménymátrixtól, az értékelést az objektumok címkéje határozza meg.

2.3. Definíció. ***Egyenlő módszer*** *(flat method) (Slutzki és Volij, 2005): $\mathbf{fl} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ahol tetszőleges $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ esetén $fl_i(N, A, M) = 0$ minden $X_i \in N$-re.*

Az egyenlő módszer szintén független az A eredménymátrixtól, de minden objektumnak azonos értékelést ad. A név módszerrel együtt inkább technikai célokat szolgál, gyakorlati alkalmazásuk nem ajánlott. Bevezetésük a később tárgyalt tulajdonságok megértésében nyújthat segítséget.

2.4. Definíció. ***Pontszám módszer*** *(score method) (Borda, 1781; Copeland, 1951): $\mathbf{s} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ahol tetszőleges $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ esetén $\mathbf{s}(N, A, M) = A\mathbf{e}$, azaz $s_i = \sum_{X_j \in N} a_{ij}$ minden $X_i \in N$-re.*

A pontszám módszert számítása miatt sorösszeg (row sum) módszernek is nevezik.

Chebotarev (1989) néhány, a pontozási eljárásban szereplő függvénytől megkövetelt tulajdonság segítségével egy parametrikus eljáráscsaládot vezetett be, amit egy későbbi cikkben részletesen elemzett Chebotarev (1994).

2.5. Definíció. ***Általánosított sorösszeg módszer*** *(generalized row sum method, GRS) (Chebotarev, 1989): $\mathbf{x}(\varepsilon) : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ahol tetszőleges $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ esetén $(I + \varepsilon L)\mathbf{x}(\varepsilon)(N, A, M) = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)\mathbf{s}$, és $\varepsilon > 0$ egy paraméter.*

2.2. Lemma. *$\varepsilon = 0$ esetén az általánosított sorösszeg módszer azonos a pontszám módszerrel, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{s}$.*

2.1. Következmény. *A 2.2. lemma alapján a pontszám és az általánosított sorösszeg módszerrel kapcsolatos bizonyítások egyszerre kezelhetők $\varepsilon \geq 0$ megengedésével. Ezt a lehetőséget – külön említés nélkül – többször is használni fogjuk, például a 3.1. lemmában vagy a 3.1. tételben.*

2.1. Állítás. *A pontszám és az általánosított sorösszeg módszereknek minden $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma mellett létezik egyértelmű megoldása.*

Bizonyítás. Lásd Chebotarev (1994, Property 1). Az $I + \varepsilon L$ mátrix tetszőleges ε esetén invertálható, mert a L mátrix pozitív szemidefinit (Mohar, 1991, Theorem 2.1). □

2.3. A legkisebb négyzetek módszere

A rangsorolási feladat az X_i és X_j objektumok által mutatott teljesítmények h_{ij} különbségének definiálásával statisztikai problémaként értelmezhető; előbbit a végső értékelések $f_i(A, M) - f_j(A, M)$ eltérésével közelítjük. Ideális esetben egyértelműen létezik olyan $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ vektor, amire $h_{ij} - (r_i - r_j) = 0$. Mivel $n^2 - n$ egyenlet és n ismeretlen van, a tökéletes egyezőség nem biztosított, valamilyen becslés alkalmazása szükséges. Kézenfekvő a legkisebb négyzetek módszerének választása:

$$\min_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n} \sum_{X_i, X_j \in N} m_{ij}(h_{ij} - r_i + r_j)^2.$$

Ezt a megközelítést round-robin problémákra Horst (1932) és Mosteller (1951) javasolta, Morrissey (1955) és Gulliksen (1956) terjesztette ki az általános esetre, Kaiser és Serlin (1978) pedig az egyértelmű megoldhatóság kérdésével foglalkozott. A feladat úgy is tekinthető, hogy az összegzést nem az objektumok, hanem a mérkőzések (összehasonlítások) halmazán végezzük, ekkor a célfüggvényben nem szerepel súlyozás. h_{ij} pontos alakja a modell szabadságfoka, gyakori választás a $h_{ij} = a_{ij}/m_{ij}$ definíció (González-Díaz et al., 2013). A továbbiakban az így kapott specifikációt a *legkisebb négyzetek módszer*ének nevezzük.

Tekintsük a round-robin esetet. Ekkor az A eredménymátrix azonos a multiplikatív páros összehasonlítás mátrixszal (Saaty, 1980), amennyiben az utóbbi elemenkénti logaritmusait vesszük, így a legkisebb négyzetek módszere ekvivalens az $LLSM$ (logarithmic least squares) eljárással (Crawford és Williams, 1980; De Graan, 1980; Crawford és Williams, 1985). Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok (Harker, 1987) esetén ugyanez az ekvivalencia érvényes az $LLSM$ módszer Kwiesielewicz (1996) és Bozóki et al. (2010) által javasolt kiterjesztésével (Csató, 2012b).

Az optimalitás elsőrendű feltételei az $r_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots,n$ korlátozás nélküli változókkal egy n tagból álló lineáris egyenletrendszert adnak:

$$
\begin{pmatrix}
d_1 & -m_{12} & -m_{13} & \dots & -m_{1,n-1} & -m_{1,n} \\
-m_{21} & d_2 & -m_{23} & \dots & -m_{2,n-1} & -m_{2,n} \\
-m_{31} & -m_{32} & d_3 & \dots & -m_{3,n-1} & -m_{3,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-m_{n-1,1} & -m_{n-1,2} & -m_{n-1,3} & \dots & d_{n-1} & -m_{n-1,n} \\
-m_{n,1} & -m_{n,2} & -m_{n,3} & \dots & -m_{n,n-1} & d_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix},
$$

ahol $d_i = \sum_{X_j \in N} m_{ij}$ az X_i objektum összehasonlításainak száma, míg az (i,j), $i \neq j$ pozícióban szereplő elem $-m_{ij}$, az X_i és X_j közötti összehasonlítások számának ellentettje. A jobb oldalon $s_i = \sum_{X_j \in N} a_{ij}$ az X_i objektum pontszáma. A bal oldalon szereplő $n \times n$-es mátrix a rangsorolási problémához, az M mérkőzésmátrixhoz tartozó G összehasonlítási multigráf L Laplace mátrixa. A célfüggvény konvexitása miatt ez elegendő is a minimalitáshoz.

A fenti feladatnak végtelen sok megoldása van, mert a célfüggvény értéke minden $\mathbf{r}$ és $\mathbf{r} + \beta\mathbf{e}$, $\beta \in \mathbb{R}$ esetén azonos, de ez a rangsort nem befolyásolja. Az értékelések megszokott normalizálása $\mathbf{e}^\top \mathbf{r} = 0$.

2.6. Definíció. ***Legkisebb négyzetek módszere*** *(least squares method, LS):* $\mathbf{q}: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$*, ahol tetszőleges* $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ *esetén* $L\mathbf{q} = \mathbf{s}$ *és* $\mathbf{e}^\top \mathbf{q} = 0$*, azaz* $d_i q_i - \sum_{X_j \in N} m_{ij} q_j = s_i$ *minden* $X_i \in N$*-re.*

A Laplace mátrixnak nem létezik inverze, mert sorainak (és oszlopainak) összege nulla, ezért ismét felmerül a megoldás egyértelműségének problémája.

2.2. Állítás. *A legkisebb négyzetek módszerének* $\mathbf{q}$ *értékelővektora akkor és csak akkor egyértelmű, ha a* G *összehasonlítási multigráf összefüggő.*

Bizonyítás. A súlyozatlan esetet lásd Kaiser és Serlin (1978, 426. o.) és Bozóki et al. (2010, Theorem 4).

Általános esetben Bozóki et al. (2013) bizonyította, bár Chebotarev és Shamis (1999)[220. o.] is megemlíti ezt. □

A feltétel jelentése világos: ha található két olyan objektum, melyek sem közvetlenül, sem közvetve, azaz más objektumokon keresztül sem hasonlíthatók össze, akkor nem állítható fel egyértelmű rangsor. A következőkben, némi egyszerűsítéssel, az (N, A, M) rangsorolási problémát *összefüggő*nek nevezzük, ha a hozzá tartozó G összehasonlítási multigráf összefüggő.

Az egyértelműség egy kiegészítő feltétellel is biztosítható.

1. Feltevés. *Amennyiben az* $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ *rangsorolási probléma* G *gráfja nem összefüggő, bontsuk szét összefüggő komponenseire, majd azokra külön-külön határozzuk meg a megoldást, az értékelések összegét minden esetben nullának választva.*

A legkisebb négyzetek módszere szoros kapcsolatban áll az általánosított sorösszeg eljárással.

2.3. Állítás. *Az általánosított sorösszeg arányos a legkisebb négyzetek módszerével, ha* $\varepsilon \to \infty$*, mégpedig* $\lim_{\varepsilon \to \infty} \mathbf{x}(\varepsilon) = \mathfrak{m} n \mathbf{q}$.

Bizonyítás. Az arányosságot lásd Chebotarev és Shamis (1998, 326. o.). $\varepsilon \to \infty$ határátmenetben az általánosított sorösszeg $(I + \varepsilon L)\mathbf{x}(\varepsilon)(N, A, M) = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)\mathbf{s}$ egyenletrendszerének konstans együtthatójú tagjai elhanyagolhatóvá válnak, ezért $\lim_{\varepsilon \to \infty} L\mathbf{x}(\varepsilon) = \mathfrak{m} n \mathbf{s} = \mathfrak{m} n L \mathbf{q}$. □

Vagyis az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere tekinthető úgy, mint a pontszám egyfajta kiigazítása az összehasonlítási multigráf szerkezetének segítségével, annak Laplace-mátrixán keresztül, ahol az ε paraméter a korrekció mértékét tükrözi.

2.1. Megjegyzés. *A pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere egy lineáris egyenletrendszer megoldását igényli, ezért gyorsan és hatékonyan számítható (Jiang et al., 2011).*

3. A pontozási eljárások néhány tulajdonsága

Az axiomatikus tárgyalás normatív megközelítése szerint elméletileg vonzó követelményeket fogalmazunk meg, majd megvizsgáljuk, hogy az egyes pontozási eljárások megfelelnek-e ezeknek. Ezáltal láthatóvá válnak a köztük levő különbségek és hasonlóságok, bizonyos tulajdonságok előírásával pedig szűkíthető a szóba jöhető módszerek köre.

Az ebben a fejezetben tárgyalt axiómák elsősorban a későbbi elemzés előkészítésére szolgálnak.

3.1. Az eredménymátrix és a rangsorok kapcsolata

Az első feltétel egy technikai követelmény, mely több bizonyításban is szerepet játszik.

3.1. Definíció. ***Zérusösszegűség*** *(centering, CNT) (Chebotarev, 1994): Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma. Az $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás zérusösszegű, ha $\sum_{X_i \in N} f_i(N, A, M) = 0$.*

3.1. Lemma. *A pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere is teljesíti a CNT tulajdonságot.*

Bizonyítás. A pontszám módszerre az A eredménymátrix ferdén szimmetrikus voltából következik.
Az általánosított sorösszeg módszerre Chebotarev (1994, Property 2) látta be ezt a tulajdonságot.
A legkisebb négyzeteke módszerére a definícióból közvetlenül adódik $\mathbf{e}^\top \mathbf{q} = 0$ miatt. □

A következő két axióma változatlan M mérkőzésmátrix mellett az A eredménymátrixból vezet le bizonyos tulajdonságokat.

3.2. Definíció. ***Szimmetria*** *(symmetry, SYM) (González-Díaz et al., 2013): Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy olyan rangsorolási probléma, amire $A = 0$. Az $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás szimmetrikus, ha $f_i(N, A, M) = f_j(N, A, M)$ minden $X_i, X_j \in N$ objektumra.*

A szimmetria értelmében egy egymást kioltó eredményekkel jellemezhető bajnokságban nem lehet különbséget tenni az alternatívák teljesítménye között. Az azonban nem szükséges, hogy az objektumok mérkőzéseinek d_i száma egyenlő legyen. Az axiómát Young (1974), illetve Nitzan és Rubinstein (1981, Axiom 4) *törlés* (cancellation) néven említi, ott azonban a hiányos összehasonlítások nem megengedettek, ezért $d_i = d_j$ minden $X_i, X_j \in N$ objektumra.

3.3. Definíció. ***Megfordíthatóság*** *(inversion, INV) (Chebotarev és Shamis, 1998; González-Díaz et al., 2013): Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma. Az $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás megfordítható, ha $f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M) \Leftrightarrow f_i(N, -A, M) \leq f_j(N, -A, M)$ minden $X_i, X_j \in N$ objektumra.*

Megfordítható pontozási eljárás alkalmazása esetén az eredmények ellentétesre változása a rangsor ennek megfelelő módosulásához vezet, ami a győzelmek és vereségek azonos kezelését jelenti. Chebotarev (1994, Property 7) általánosított sorösszegre vonatkozó hasonló követelménye *transzponálhatóság* (transposability) elnevezéssel szerepel.

3.1. Következmény. *Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti az INV tulajdonságot, akkor a SYM-et is teljesíti.*

Bizonyítás. Lásd González-Díaz et al. (2013). $A = 0$ miatt $A = -A$, ezért $f_i(N, A, M) = f_j(N, A, M) \Leftrightarrow f_i(N, -A, M) = f_j(N, -A, M)$ minden $X_i, X_j \in N$ objektumra. □

3.2. Lemma. *A pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere is teljesíti az INV tulajdonságot. Sőt, az értékelések előjele éppen az ellenkezője lesz, miközben abszolútértékük változatlan.*

Bizonyítás. A pontszám módszerre $\mathbf{s}(N, -A, M) = -A\mathbf{e} = -\mathbf{s}(N, A, M)$.
Az általánosított sorösszeghez lásd Chebotarev (1994, Property 7). (N, A, M) esetén a megoldandó lineáris egyenletrendszer $(I + \varepsilon L)\mathbf{x}(\varepsilon) = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)\mathbf{s}$, míg $(N, -A, M)$ mellett $(I + \varepsilon L)\mathbf{x}(\varepsilon) = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)(-\mathbf{s})$.
A legkisebb négyzetek módszere (N, A, M) esetén $L\mathbf{q} = \mathbf{s}$ és $\mathbf{e}^\top \mathbf{q} = 0$, $(N, -A, M)$ mellett pedig $L\mathbf{q} = -\mathbf{s}$ és $\mathbf{e}^\top \mathbf{q} = 0$. □

3.3. Lemma. *A pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere is teljesíti a SYM tulajdonságot.*

3.2. Az irreleváns összehasonlítások problémája

Arrow híres lehetetlenségi tétele (Arrow, 1951) óta a társadalmi választások elméletének egyik központi kérdése az irreleváns alternatívák hatásának vizsgálata. Az alfejezetben néhány pontozási eljárásokra vonatkozó, ilyen jellegű tulajdonságot tekintünk át.

3.4. Definíció. ***Irreleváns mérkőzésektől való függetlenség*** *(independence of irrelevant matches, IIM) (González-Díaz et al., 2013): Legyen $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás, $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, ahol $f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M)$, $X_i, X_j, X_k, X_\ell \in N$ négy különböző objektum, valamint $(N, A', M) \in \mathcal{R}$ egy olyan rangsorolási probléma, ami azonos (N, A, M)-mel, de $a'_{k\ell} \neq a_{k\ell}$. Az f pontozási eljárás független az irreleváns mérkőzésektől, ha $f_i(N, A', M) \geq f_j(N, A', M)$.*

IIM esetén minden olyan összehasonlítást irreleváns, amely nem érinti a két vizsgált objektum egyikét sem. Ezt a tulajdonságot Rubinstein (1980, Axiom III), illetve Nitzan és Rubinstein (1981, Axiom 5) *függetlenség* (independence) néven említi. Altman és Tennenholtz (2008, Definition 8.4) egy némileg szigorúbb axiómát definiál Arrow-féle irreleváns alternatíváktól való függetlenségként (Arrow's independence of irrelevant alternatives), a későbbiekben azonban IIM túl erősnek fog bizonyulni, ezért ezzel az iránnyal nem foglalkozunk.[4]

3.1. Megjegyzés. *Az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség $n \geq 4$ esetén értelmezhető.*

3.4. Lemma. *A pontszám módszer teljesíti az IIM tulajdonságot.*

Bizonyítás. Lásd González-Díaz et al. (2013). Az $\mathbf{s} = A\mathbf{e}$ definíció alapján s_i és s_j is független $a_{k\ell}$-től. □

IIM a legkisebb négyzetek módszerére is gond nélkül értelmezhető, mert a megengedett változások nem befolyásolják a G összehasonlítási multigráfot. Erre és az általánosított sorösszeg eljárásra később fogunk visszatérni (lásd a 4.3. lemmát).

Az IIM axióma az irreleváns összehasonlítások halmazának szűkítésével gyengíthető. Ezt az indokolja, hogy a hiányos és többszörös összehasonlítások miatt az objektumok értékelésének első közelítését jelentő pontszámra jelentős hatással lehet az ellenfeleinek ereje (González-Díaz et al., 2013): például $d_i = 1$ esetén nyilván nem mindegy, vajon X_i az N halmazbeli legjobb vagy legrosszabb objektummal lett összehasonlítva. Ehhez szükség lesz egy, az M mérkőzésmátrix szerkezetével kapcsolatos fogalomra.

3.5. Definíció. ***Makrocsapat*** *(macrovertex) (Chebotarev, 1994): Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma. A $V \subseteq N$ objektumhalmaz makrocsapat, ha $m_{ik} = m_{jk}$ minden $X_i, X_j \in V$ és $X_k \in N \setminus V$ mellett.*

A makrocsapat objektumainak összehasonlításai két részre bonthatók. Egyrészt vannak a V halmazon belüli kapcsolatok, melyek száma és eredménye tetszőleges lehet, másrészt a többi alternatívával szembeni összehasonlítások, melyek száma a makrocsapat minden tagjára azonos.

3.5. Lemma. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma és $V \subseteq N$ az objektumok egy részhalmaza. Ekkor V makrocsapat (N, A, M)-ben.*

Bizonyítás. Mivel (N, A, M) round-robin rangsorolási probléma, $m_{ih} = m_{jh}$ tetszőleges $X_i, X_j \in V$-re és $X_h \in N$-re, azaz $X_h \in N \setminus V$-re is. □

Itt nem tárgyaljuk a Chebotarev (1994) által definiált *makrocsapat függetlenség* (macrovertex independence) axiómát.[5] Ugyanakkor megfogalmazható egy másik, makrocsapattal kapcsolatos tulajdonság, amely nagyon hasonlít az irreleváns mérkőzésektől való függetlenségre.

3.6. Definíció. ***Makrocsapat önállóság*** *(macrovertex autonomy, MVA): Legyen $V \subseteq N$ makrocsapat az $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ és az $(N, A', M') \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémákban, ahol $a_{ij} = a'_{ij}$ és $m_{ij} = m'_{ij}$ minden $\{X_i, X_j\} \cap V \neq \emptyset$ esetén. Az $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás makrocsapat önálló, ha $f_i(N, A, M) \geq$ $\geq f_j(N, A, M) \Leftrightarrow f_i(N, A', M') \geq f_j(N, A', M')$ minden $X_i, X_j \in V$-re.*

[4] Altman és Tennenholtz (2008) lehetővé teszi, hogy (N, A', M)-ben az X_i-t és X_j-t érintő összehasonlítások kimenetele módosuljon, amennyiben $a_{ih} - a'_{ih} = a_{jh} - a'_{jh}$ fennáll. Az általánosítás első lépéseként kézenfekvő lenne megengedni az X_k és X_ℓ közötti összehasonlítások számának változását is.

[5] Ez az oka a makrocsapat önállóság IIM-től eltérő megnevezésének.

3.2. Megjegyzés. *A makrocsapat önállóság $n < 4$ esetén is értelmezhető, de csak $n \geq 4$ mellett jelent megszorítást.*

MVA azt követeli meg, hogy a V makrocsapaton belüli relatív rangsor legyen független a halmazba nem tartozó objektumok közötti összehasonlítások számától és eredményétől. Ha csak az $N \setminus V$ halmazon belüli összehasonlítások eredménye módosulhatna, IIM egyértelmű gyengítését kapnánk, hiszen az $X_i, X_j, X_k, X_\ell \in N$ négyes nem állhatna tetszőleges különböző objektumokból. Ezek alapján könnyen megfogalmazhatnánk az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség olyan erősítését is, ami megengedné az X_k és X_ℓ objektumok közötti összehasonlítások számának változását; a tulajdonság neve *erős függetlenség az irreleváns mérkőzésektől* (strong independence of irrelevant matches, $SIIM$) lehetne. A pontszám módszer az utóbbit is teljesítené, ebből pedig már következik MVA. Hasonlóan, a makrocsapat önállóság gyengíthető annyira, hogy IIM-ből adódjon. Ennek ellenére mindkettőtől eltekintünk, mert a későbbi tárgyalásban nem lesz rájuk szükség.

3.6. Lemma. *Legyen $V \subseteq N$ makrocsapat az $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ és az $(N, A', M') \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémában, ahol $a_{ij} = a'_{ij}$ és $m_{ij} = m'_{ij}$ minden $\{X_i, X_j\} \cap V \neq \emptyset$ esetén. Tegyük fel, hogy $V \neq N$. Az $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma G összehasonlítási multigráfjának az objektumhalmaz V-re való szűkítésével kapott G^V részgráfja akkor és csak akkor összefüggő, ha az $(N, A', M') \in \mathcal{R}$-hez tartozó $G^{V'}$ részgráfja is az.*

Bizonyítás. A V halmazba tartozó csúcsok közötti élek száma nem változhat. □

A 3.6. lemma értelmében MVA a legkisebb négyzetek módszerére is értelmezhető, ha feltesszük a vizsgált rangsorolási problémához tartozó G összehasonlítási multigráf G^V részgráfjának összefüggőségét. Az (N, A, M) és (N, A', M') rangsorolási problémák összefüggősége nem ekvivalens, de az 1. feltevés elfogadásával MVA a legkisebb négyzetek módszerére is értelmezhető.

Egy makrocsapat önállóságot teljesítő pontozási eljárásban az $X_i, X_j \in N$ objektumok relatív rangsora szempontjából egy összehasonlítás akkor tekinthető irrelevánsnak, ha X_i és X_j pontosan ugyanannyiszor lett összehasonlítva bármely másik objektummal. Ezt támasztja alá a következő eredmény.

3.1. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma. Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti az MVA tulajdonságot, akkor az IIM-et is teljesíti.*

Bizonyítás. Legyen $X_i, X_j, X_k, X_\ell \in N$ négy különböző objektum, és $(N, A', M) \in \mathcal{R}^R$ az a round-robin rangsorolási probléma, amiben $a'_{k\ell} \neq a_{k\ell}$. A 3.5. lemma értelmében $V = \{X_i, X_j\}$ makrocsapat. Itt $a_{gh} = a'_{gh}$ és $m_{gh} = m'_{gh}$ minden $\{X_g, X_h\} \cap V \neq \emptyset$ esetén, mert $\{X_k, X_\ell\} \cap V = \emptyset$, ezért a makrocsapat önállóságból $f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M) \Leftrightarrow f_i(N, A', M) \geq f_j(N, A', M)$. Ez éppen az irreleváns mérkőzésektől való függetlenségben megkövetelt feltétel. □

A 3.1. állításban a fordított irány nem igaz, mert a makrocsapat önállóság lehetővé teszi, hogy $m_{k\ell}$ változzon, ami IIM-ben nem megengedett. A bizonyításban fontos szerepet játszik (N, A, M) round-robin volta: bármilyen ennél bővebb osztályon található olyan $X_i, X_j \in N$ objektumpár, ami nem alkot makrocsapatot, így MVA-ból nem lenne levezethető az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség.

3.1. Tétel. *A pontszám, az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere is teljesíti az MVA tulajdonságot.*

Bizonyítás. A pontszám módszerre a definícióból következik, mert $s_i(N, A, M) = s_i(N, A', M')$ minden $X_i \in V$-re, hiszen $a_{ih} = a'_{ih}$ minden $X_h \in N$ esetén.

Jelölje x_i és x'_i az általánosított sorösszeg módszer alkalmazásával kapott értékeléseket az (N, A, M) és (N, A', M') rangsorolási problémákban, valamint legyen $s_i = s_i(N, A, M)$ minden $X_i \in N$-re. Indirekt módon tegyük fel, hogy léteznek olyan $X_i, X_j \in V$ objektumok, melyekre $x_i \geq x_j$, de $x'_i < x'_j$, azaz $x'_i - x_i < x'_j - x_j$. Legyen $x'_k - x_k = \max_{X_i \in V}(x'_i - x_i)$ és $x'_\ell - x_\ell = \min_{X_i \in V}(x'_i - x_i)$, ekkor $x'_k - - x_k > x'_\ell - x_\ell$. Tekintsük az $X_k, X_\ell \in V$ objektumokra vonatkozó egyenletek különbségét mindkét rangsorolási problémában:

$$\left(1 + \varepsilon \sum_{X_h \notin V} m_{kh}\right)(x_k - x_\ell) + \varepsilon \left[\sum_{X_i \in V} m_{ki}(x_k - x_i) - \sum_{X_i \in V} m_{\ell i}(x_\ell - x_i)\right] = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)(s_k - s_\ell);$$

$$\left(1+\varepsilon\sum_{X_h\notin V} m_{kh}\right)(x'_k-x'_\ell)+\varepsilon\left[\sum_{X_i\in V} m_{ki}(x'_k-x'_i)-\sum_{X_i\in V} m_{\ell i}(x'_\ell-x'_i)\right]=(1+\varepsilon\mathfrak{m}n)\left(s'_k-s'_\ell\right),$$

ugyanis a mindkettőben szereplő $\sum_{x_h\notin V} m_{kh}x_h$ és $\sum_{x_h\notin V} m_{\ell h}x_h$ tagok – V makrocsapat volta miatt – azonosak, így a különbségképzéskor eltűnnek. A két egyenlet jobb oldala azonos, mert a pontszám módszer makrocsapat önálló. Bevezetve a $\Delta_{ij}=(x'_i-x'_j)-(x_i-x_j)$ jelölést minden $X_i,X_j\in N$-re, a második és az első egyenlet különbsége:

$$\left(1+\varepsilon\sum_{X_h\notin V} m_{kh}\right)\Delta_{k\ell}+\varepsilon\left(\sum_{X_i\in V} m_{ki}\Delta_{ki}-\sum_{X_i\in V} m_{\ell i}\Delta_{\ell i}\right)=0.$$

Itt az indirekt feltevés következtében $\Delta_{k\ell}>0$, továbbá $\Delta_{ki}\geq 0$ és $\Delta_{\ell i}\leq 0$. Emiatt az összeg első tagja pozitív, a második pedig nemnegatív, ami ellentmondásra vezet.

A legkisebb négyzetek módszere esetén ugyanezzel a $q'_k-q_k=\max_{X_i\in V}(q'_i-q_i)>\min_{X_i\in V}(q'_i-{}-q_i)=q'_\ell-q_\ell$ indirekt feltevéssel élünk. Az általánosított sorösszeggel analóg levezetés végén

$$\sum_{X_h\notin V} m_{kh}\Delta_{k\ell}+\left[\sum_{X_i\in V} m_{ki}\Delta_{ki}-\sum_{X_i\in V} m_{\ell i}\Delta_{\ell i}\right]=0,$$

ahol $\Delta_{k\ell}>0$, illetve $\Delta_{ki}\geq 0$ és $\Delta_{\ell i}\leq 0$ ismét ellentmondást eredményez. □

A bizonyításban központi szerepe van az $m_{ik}=m_{jk}$ minden $X_i,X_j\in V$ és $X_k\in N\setminus V$ mellett követelménynek, ezért MVA tovább nem erősíthető.

3.7. Lemma. *Legyen $(N,A,M)\in\mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma. Az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere teljesíti az IIM tulajdonságot.*

Bizonyítás. A 3.1. tételből és a 3.1. állításból adódik. □

3.3. Kapcsolat a pontszám módszerrel

A pontszám módszernek legalább három különböző karakterizációja létezik az $\mathcal{R}^R$ round-robin rangsorolási problémák osztályán (Young, 1974; Nitzan és Rubinstein, 1981; Bouyssou, 1992). Ezekre itt nem térünk ki, csupán annyit jegyzünk meg, hogy a felhasznált axiómák zöme nehezen vitatható, szinte természetes követelmény. Ugyanakkor a reprezentációs tételek a jóval bővebb $\mathcal{R}$ osztályon már nem érvényesek, vagy kevésbé elvárható a felhasznált axiómák teljesülése. Ezért logikusnak tűnik egy olyan feltétel megfogalmazása, ami biztosítja a pontszám módszerrel azonos eredményt az $\mathcal{R}^R$ halmazon, ezt fogalmazza meg az alábbi axióma.

3.7. Definíció. ***Pontszám konzisztencia*** *(score consistency, SCC) (González-Díaz et al., 2013): Legyen $(N,A,M)\in\mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma. Az $f:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^n$ pontozási eljárás pontszám konzisztens, ha $f_i(N,A,M)\geq f_j(N,A,M)\Leftrightarrow s_i(N,A,M)\geq s_j(N,A,M)$ minden $X_i,X_j\in N$-re, vagyis a pontszám módszerrel azonos rangsort ad.*

3.3. Megjegyzés. *Az általánosított sorösszegre Chebotarev (1994, Property 3) egy ennél erősebb tulajdonságot fogalmazott meg* egyetértés *(agreement) néven: ha $(N,A,M)\in\mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma, akkor $\mathbf{x}(N,A,M)=\mathbf{s}(N,A,M)$.*

Egy másik, ennél általánosabb követelmény adható a 3.5. lemma alapján.

3.8. Definíció. ***Győzelmek homogén kezelése*** *(homogeneous treatment of victories, HTV) (González-Díaz et al., 2013): Legyen $V=\{X_i,X_j\}\subseteq N$ makrocsapat az $(N,A,M)\in\mathcal{R}$ rangsorolási problémában. Az $f:\mathcal{R}\to\mathbb{R}^n$ pontozási eljárás homogén módon kezeli a győzelmeket, amennyiben $f_i(N,A,M)\geq{}\geq f_j(N,A,M)\Leftrightarrow s_i(N,A,M)\geq s_j(N,A,M)$ minden $X_i,X_j\in N$-re.*

González-Díaz et al. (2013) a HTV axióma kimondásában nem használja a makrocsapat fogalmát. A makrocsapat önállóságból következik, hogy $f_i(N,A,M)$ és $f_j(N,A,M)$ relatív nagysága független az összes többi objektum közötti összehasonlítások számától és eredményétől.

Mindkét tulajdonság értelmezhető a legkisebb négyzetek módszerére, ha elfogadjuk az 1. feltevést, vagy feltesszük a G összehasonlítási multigráf összefüggőségét.

3.2. Következmény. *Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti a HTV tulajdonságot, akkor az SCC-t is teljesíti.*

3.4. Megjegyzés. *Az általánosított sorösszegre Chebotarev (1994, Property 10) egy ennél erősebb tulajdonságot fogalmazott meg* dominancia *(domination) néven: ha $V = \{X_i, X_j\} \subseteq N$ makrocsapat az $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémában, akkor*

$$x_i(N,A,M) - x_j(N,A,M) = \frac{1+\mathfrak{m}n}{1+d_0+m_{ij}} \left[s_i(N,A,M) - s_j(N,A,M) \right], \quad \textit{ahol } d_0 = d_i = d_j.$$

3.2. Állítás. *A pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere is teljesíti a HTV tulajdonságot.*

Bizonyítás. A pontszám módszerre az állítás a definícióból következik. Az általánosított sorösszeghez lásd a 3.4. megjegyzést, illetve González-Díaz et al. (2013, Proposition 5.4)-et, a legkisebb négyzetek módszeréhez pedig González-Díaz et al. (2013, Proposition 5.3)-at.

Jelölje x_i az általánosított sorösszeg módszer alkalmazásával kapott értékeléseket az (N, A, M) rangsorolási problémában, valamint legyen $s_i = s_i(N, A, M)$ minden $X_i \in N$-re. Tekintsük az $X_i, X_j \in V$ objektumokra vonatkozó egyenletek különbségét:

$$\left(1 + \varepsilon \sum_{X_h \notin V} m_{ih}\right)(x_i - x_j) + \varepsilon \left[m_{ij}(x_i - x_j) - m_{ji}(x_j - x_i) \right] = (1 + \varepsilon \mathfrak{m}n)(s_i - s_j),$$

azaz

$$\left[1 + \varepsilon \left(\sum_{X_h \notin V} m_{ih} + 2m_{ij} \right)\right](x_i - x_j) = (1 + \varepsilon \mathfrak{m}n)(s_i - s_j),$$

Itt $\sum_{X_h \notin V} m_{ih} + 2m_{ij} = d_i + m_{ij} \geq 0$, ezért $x_i \geq x_j \Leftrightarrow s_i \geq s_j$.

A legkisebb négyzetek módszerére – a megfelelő módosításokkal – ugyanez a gondolatmenet alkalmazható. □

3.3. Következmény. *A legkisebb négyzetek módszerére a 3.4. megjegyzésben jelzett módon HTV tovább erősíthető: ha $V = \{X_i, X_j\} \subseteq N$ makrocsapat az $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémában, akkor $q_i(N,A,M) - q_j(N,A,M) = [s_i(N,A,M) - s_j(N,A,M)] / (d_0 + m_{ij})$, ahol $d_0 = d_i = d_j$.*

3.8. Lemma. *A pontszám, általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere teljesíti az SCC tulajdonságot.*

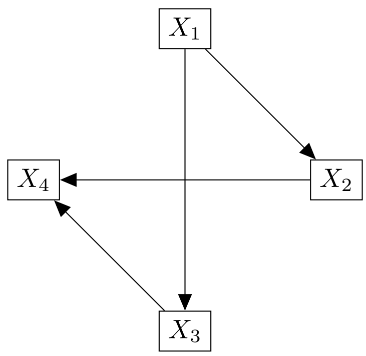
4. Monotonitás az objektumok teljesítményéből

Ebben a fejezetben egy, a pontozási eljárásoktól elvárható monotonitási tulajdonságot mutatunk be, mely a „hasonló” helyzetű objektumok sorrendjével kapcsolatos követelményeket fogalmaz meg. Ezután belátunk egy ezzel kapcsolatos lehetetlenségi tételt, majd részletesen elemezzük a kapott eredményt.

4.1. Önkonzisztencia

Bevezetésként egy példán keresztül világítunk rá a tulajdonság motivációjára.

1. ábra. A 4.1. példa rangsorolási problémája



4.1. Példa. *Tekintsük az $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ objektumhalmazzal adott $(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan rangsorolási problémát, ahol:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ azaz } L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az 1. ábrán látható, hogy az $(X_i, X_j) \in N \times N$ irányított él az $a_{ij} = 1$ ($a_{ji} = -1$), $m_{ij} = 1$ páros összehasonlítást jelöli. Ezt a későbbiekben is használni fogjuk, az $a_{ij} = 0$ ($a_{ji} = -1$), $m_{ij} = 1$-nek megfelelő $(X_i, X_j) \in N \times N$ nem irányított él mellett.

A pontszám módszer alapján az objektumok rangsora $X_1 \succ (X_2 \sim X_3) \succ X_4$, mert $\mathbf{s}(N, A, M) = [2,0,0,-2]^\top$. A négy objektumhoz tartozó hat relatív sorrend közül az $X_1 \succ X_4$ összefüggés tűnik a legkönnyebben indokolhatónak, ugyanis X_1 és X_4 ellenfelei azonosak, $O_1 = O_4$, viszont $a_{12} > a_{42}$ és $a_{13} > a_{43}$. Hasonlóan érvelhetünk az $X_2 \sim X_3$ reláció mellett, hiszen $O_2 = O_3$, és mindkét objektum azonos eredményt ért el ugyanazon ellenfelek ellen.

Ezt a követelményt formalizálja az alábbi axióma.

4.1. Definíció. ***Önkonzisztencia*** *(self-consistency, SC) (Chebotarev és Shamis, 1997): Legyen $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás és $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, melyre az $X_i, X_j \in N$ objektumok O_i és O_j ellenfél multihalmazai között létezik olyan $g : O_i \leftrightarrow O_j$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy $a^p_{ik} \geq a^p_{jg(k)}$, $p = 1,2,\dots,|O_i|$ és $f_k(N, A, M) \geq f_{g(k)}(N, A, M)$, valamint $a_{ik} = \sum_{p=1}^{|O_i|} a^p_{ik}$ és $a_{jg(k)} = \sum_{p=1}^{|O_j|} a^p_{jg(k)}$ minden $(X_k, g(X_k)) \in O_i \times O_j$ objektumpár esetén.*
Az f pontozási eljárás önkonzisztens, ha $f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M)$, sőt, $f_i(N, A, M) > f_j(N, A, M)$, amennyiben az $a^p_{ik} \geq a^p_{jg(k)}$ vagy az $f_k(N, A, M) \geq f_{g(k)}(N, A, M)$ egyenlőtlenségek valamelyike szigorú formában teljesül.

Az önkonzisztencia azt követeli meg, hogy az egyértelműen nem rosszabb alternatívák értékelése ne legyen kisebb, míg a jobbaké nagyobb legyen. Mikor lehet két objektum között ilyen kapcsolatot találni? Először az ellenfeleik erejét kell összevetni, amit éppen a vizsgált rangsorolási módszer biztosít (erre utal az önkonzisztencia elnevezés). Ez csak akkor lehetséges, ha az ellenfél multihalmazok között található kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Másodszor, a nem rosszabb ellenfelei ellen legalább olyan eredményesnek kellett lennie.

4.1. Állítás. *Az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere teljesíti az SC tulajdonságot.*

Bizonyítás. Lásd (Chebotarev és Shamis, 1998, Theorem 5).

Legyen $g : O_i \leftrightarrow O_j$ a definícióban szereplő kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az $X_i, X_j \in N$ objektumok ellenfél multihalmazai között. Jelölje x_i az általánosított sorösszeg módszer alkalmazásával kapott értékeléseket az (N, A, M) rangsorolási problémában, valamint legyen $s_i = s_i(N, A, M)$ minden $X_i \in N$-re. Írjuk fel az $X_i, X_j \in N$ objektumokra vonatkozó egyenletek különbségét:

$$(x_i - x_j) - \varepsilon \sum_{X_k \in O_i} \left(x_k - x_{g(k)} \right) = s_i - s_j = \sum_{X_k \in O_i} \left(a_{ik} - a_{jg(k)} \right).$$

Most $a_{ik} \geq a_{jg(k)}$ következtében $s_i - s_j \geq 0$, valamint $x_k - x_{g(k)} \geq 0$. Emiatt $x_i \geq x_j$, ha pedig valahol szigorú egyenlőtlenség található, akkor $x_i > x_j$ is teljesül. Ezzel tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén bizonyítottuk az önkonzisztencia feltételében megkövetelt implikáció fennállását.

A legkisebb négyzetek módszerére – a megfelelő módosításokkal – ugyanez a gondolatmenet alkalmazható. □

4.1. Megjegyzés. *A pontszám módszerre nem működik a 4.1. állítás bizonyítása, mert $\varepsilon = 0$ következtében $s_i = s_j$ úgy is teljesülhet, hogy $s_k > s_{g(k)}$ valamilyen $X_k \in O_i$ objektumra.*

4.1. Lemma. *A pontszám módszer megsérti az SC tulajdonságot.*[6]

4.2. Egy lehetetlenségi tétel

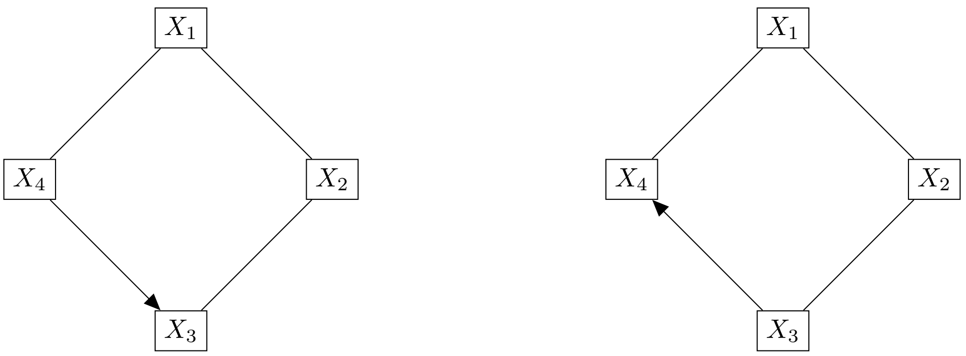
A 4.1. állítás és a 4.1. megjegyzés együttesen arra utal, hogy létezhet valamilyen kapcsolat a függetlenségi axiómák (IIM és MVA) és az önkonzisztens monotonitás között. Valóban megfogalmazható néhány ilyen eredmény.

4.1. Tétel. *Nem létezik olyan $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az SC és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A minimális, $n = 4$ esetben egy példán keresztül bizonyítjuk a két tulajdonság között érvényesülő ellentmondást (ennél kisebb méretre IIM nem értelmezhető).

2. ábra. A 4.2. példa rangsorolási problémái

(a) Az (N, A, M) rangsorolási probléma (b) Az (N, A', M) rangsorolási probléma



4.2. Példa. *Tekintsük az $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ objektumhalmazzal adott $(N, A, M), (N, A', M) \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan rangsorolási problémákat (2. ábra), ahol:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; \textit{és } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

[6] Nem érthetünk egyet Chebotarev és Shamis (1998, Theorem 5) ezzel ellentétes kijelentésével.

Most $O_1 = O_3 = \{X_2, X_4\}$ és $O_2 = O_4 = \{X_1, X_3\}$. Tegyük fel, hogy f önkonzisztens és független az irreleváns mérkőzésektől, valamint $f_1(N, A, M) > f_2(N, A, M)$. Az IIM axióma szerint $f_1(N, A', M') > > f_2(N, A', M')$, mert az X_3 és X_4 közötti összehasonlítás kimenetele nem befolyásolhatja ezt a relációt. Tekintsük az X_1 és X_2 objektumokat és az (N, A', M) rangsorolási problémát. Legyen a $g_{21} : O_2 \leftrightarrow O_1$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre $g_{21}(X_1) = X_2$ és $g_{21}(X_3) = X_4$. Mivel $a'_{21} = a'_{12} = 0$ és $a'_{23} = a'_{14} = 0$, valamint $f_1(N, A', M) > f_2(N, A', M)$, ha $f_3(N, A', M) \geq f_4(N, A', M)$ is teljesül, akkor g_{21} teljesíti az önkonzisztencia feltételében megfogalmazott követelményeket, így $f_2(N, A', M) > > f_1(N, A', M)$. Az ellentmondás csak úgy kerülhető el, hogy $f_4(N, A', M) > f_3(N, A', M)$.

Tekintsük az X_2 és X_4 objektumokat. Legyen a $g_{24} : O_2 \leftrightarrow O_4$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre $g_{24}(X_1) = X_1$ és $g_{24}(X_3) = X_3$. Ekkor $a'_{21} = a'_{41} = 0$ és $0 = a'_{23} > a'_{43} = -1$, így g_{24} teljesíti az önkonzisztencia feltételében megfogalmazott követelményeket, $f_2(N, A', M') > f_4(N, A', M')$. Tekintsük az X_1 és X_3 objektumokat. Legyen a $g_{31} : O_3 \leftrightarrow O_1$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre $g_{31}(X_2) = = X_2$ és $g_{34}(X_4) = X_4$. Ekkor $a'_{32} = a'_{12} = 0$ és $1 = a'_{34} > a'_{14} = 0$, így g_{31} teljesíti az önkonzisztencia feltételében megfogalmazott követelményeket, $f_3(N, A', M') > f_1(N, A', M')$. Tehát az SC tulajdonság fennállásakor $f_2(N, A', M') > f_4(N, A', M') > f_3(N, A', M') > f_1(N, A', M')$, ami ellentmond az $f_1(N, A', M') > f_2(N, A', M')$ feltevésnek.

Ha f önkonzisztens és független az irreleváns mérkőzésektől, valamint $f_1(N, A, M) < f_2(N, A, M)$, akkor az (N, A, M) rangsorolási problémát vizsgálva a fentivel analóg érveléssel jutunk ellentmondásra, mert az X_1 és X_2 objektumok helyzete szimmetrikus (N, A, M)-ben és (N, A', M)-ben.

Tegyük fel, hogy f önkonzisztens és független az irreleváns mérkőzésektől, valamint $f_1(N, A, M) = = f_2(N, A, M)$. Tekintsük az X_1 és X_2 objektumokat és az (N, A, M) rangsorolási problémát. Legyen a $g_{21} : O_2 \leftrightarrow O_1$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre $g_{21}(X_1) = X_2$ és $g_{21}(X_3) = X_4$. Mivel $a_{21} = a_{12} = = 0$ és $a_{23} = a_{14} = 0$, valamint $f_1(N, A, M) \geq f_2(N, A, M)$, ha $f_3(N, A, M) > f_4(N, A, M)$ is fennáll, akkor g_{21} teljesíti az önkonzisztencia feltételében megfogalmazott követelményeket, így $f_2(N, A, M) > > f_1(N, A, M)$. Az ellentmondás csak úgy kerülhető el, hogy $f_4(N, A, M) \geq f_3(N, A, M)$. Legyen a $g_{12} : O_1 \leftrightarrow O_2$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $g_{12}(X_2) = X_1$ és $g_{12}(X_4) = X_3$. Mivel $a_{12} = a_{21} = = 0$ és $a_{14} = a_{23} = 0$, valamint $f_2(N, A, M) \geq f_1(N, A, M)$, ha $f_4(N, A, M) > f_3(N, A, M)$ is fennáll, akkor g_{12} teljesíti az önkonzisztencia feltételében megfogalmazott követelményeket, így $f_1(N, A, M) > > f_2(N, A, M)$. Az ellentmondás csak úgy kerülhető el, hogy $f_3(N, A, M) \geq f_4(N, A, M)$. Összegezve, $f_3(N, A, M) = f_4(N, A, M)$.

Az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség értelmében $f_1(N, A', M) = f_2(N, A', M)$, mert az X_3 és X_4 közötti összehasonlítás kimenetele nem befolyásolhatja ezt a relációt. Az előzőhöz hasonló érveléssel kapható $f_3(N, A', M) = f_4(N, A', M)$, mert abban semmilyen szerepet sem játszott a_{34}. Az $f_1(N, A', M) > f_2(N, A', M)$ esetben adott érvelés érvényes marad, mert X_2 és X_4, illetve X_1 és X_3 relatív értékelésének vizsgálatakor sehol sem használtuk ki ezt a tényt. Vagyis $f_2(N, A', M) > f_4(N, A', M) = = f_3(N, A', M) > f_1(N, A', M)$, ami ismét lehetetlen.

Ezzel beláttuk, hogy egyetlen pontozási eljárás sem teljesíti egyszerre az SC és IIM axiómákat. □

4.2. Lemma. *A 4.1. tételben szereplő két tulajdonság logikailag független.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy közülük bármelyiket kiválasztva létezik olyan eljárás, amely ezt kielégíti, tehát a másikat biztosan megsérti:

$\boxed{1}$ SC: általánosított sorösszeg és legkisebb négyzetek módszere (4.1. állítás);

$\boxed{2}$ IIM: pontszám módszer (3.4. lemma).

□

4.3. Lemma. *Az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere nem teljesíti az IIM tulajdonságot.*

Bizonyítás. González-Díaz et al. (2013) egy minimális ($n = 4$) példán keresztül mutatta meg, hogy a legkisebb négyzetek módszere és az általánosított sorösszeg rögzített $\varepsilon = 1/\left[\mathfrak{m}(n-2)\right]$ paraméter mellett nem független az irreleváns mérkőzésektől. A megállapítás közvetlenül adódik a 4.1. állításból és a 4.1. tételből. □

4.2. Megjegyzés. *A 4.1. tétel eredménye formális alátámasztását adja a González-Díaz et al. (2013) cikk utolsó mondatában megfogalmazott gondolatnak, miszerint* „So when players have different opponents (or face opponents with different intensities), IIM is a property one would rather not have.”

A 4.1. tétel erősen emlékeztet Altman és Tennenholtz (2008) egyik fő eredményére. Utóbbi az irányított gráfokon értelmezett rangsorolási eljárásokat vizsgálta axiomatikus szempontból, ez a mi modellünk $a_{ij} \in \{-m_{ij}, m_{ij}\}$ és $m_{ij} \in \{0,1\}$ korlátozással definiált alesete. Az *erős* és *gyenge tranzitivitás* (strong / weak transitivity) lényegében az 5. fejezetben bemutatott önkonzisztens monotonitásnak felel meg, míg a *rangsorolási függetlenség az irreleváns objektumoktól* (ranked independence of irrelevant alternatives, $RIIA$) egy olyan feltétel, ami szintén egyfajta lokális tulajdonságot követel meg a pontozási eljárástól. Utóbbi nehezen terjeszthető ki a mi általános modellünkre, és kevésbé tartjuk relevánsnak, mint az IIM axiómát. Altman és Tennenholtz (2008, Theorem 5.1) szintén egy lehetetlenségi eredményt mond ki: az irányított gráfok halmazán nem található olyan rangsorolási eljárás, mely egyszerre gyengén tranzitív és teljesíti az $RIIA$ tulajdonságot.

A 4.1. tétel első ránézésre meglepő dolgot állít: nem létezik olyan pontozási eljárás, ami elég érzékeny az összehasonlítások eredményére és az objektumok rangsorára (önkonzisztencia), de közben az irreleváns összehasonlítások kimenetelétől is független. Az ellentmondás oka alapvetően abban rejlik, hogy az előbbi egy globális, a teljes eredménymátrixot figyelembe vevő feltétel, míg az utóbbi a relatív sorrend meghatározását a lokális, helyi struktúra vizsgálatára szűkíti le. Ennek figyelembevételével már nem olyan váratlan a kapott eredmény.

4.3. A lehetetlenségi tétel általánosságának gyengítése

A 4.1. tételhez hasonló ellentmondások esetén alapvetően két út kínálkozik pozitív üzenetek megfogalmazására: az axiómák gyengébbre cserélése vagy az értelmezési tartomány szűkítése. Először kövessük a második irányt.

A kiegyensúlyozott rangsorolási problémák $\mathcal{R}^B$ osztálya nem jelent elégséges korlátozást.

4.2. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ egy kiegyensúlyozott rangsorolási probléma. Nem létezik olyan $f : \mathcal{R}^B \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az SC és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A 4.1. tételben ellentmondást biztosító 4.2. példa rangsorolási problémái kiegyensúlyozottak, mert $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 2$. A tulajdonságok függetlensége a 4.2. lemmából kapható. □

Ugyanez a helyzet súlyozatlan rangsorolási problémák esetén.

4.3. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ egy súlyozatlan rangsorolási probléma. Nem létezik olyan f : : $\mathcal{R}^U \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az SC és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A 4.1. tételben ellentmondást biztosító 4.2. példa rangsorolási problémái súlyozatlanok, mert $m_{12} = m_{14} = m_{23} = m_{34} = 1$ és $m_{13} = m_{24} = 0$. A tulajdonságok függetlensége a 4.2. lemmából kapható. □

Nem jelent megoldást az objektumok számának korlátozása sem, mert a 4.2. ellenpélda minimális méretű.

Ellenben round-robin rangsorolási problémákra már mindkét tulajdonság kielégíthetővé válik.

4.4. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma. Létezik olyan $f : \mathcal{R}^R \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az SC és IIM axiómákat, például a pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere.*

Bizonyítás. A 3.8. lemma értelmében ezek az eljárások minden $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ round-robin rangsorolási probléma esetén azonos sorrendet adnak, SC és IIM is csak az objektumok relatív értékelését tekinti. szerint Mindegyikük független az irreleváns mérkőzésektől (3.7. lemma), és önkonzisztens (4.1. állítás). □

Most nézzük a függetlenségre vonatkozó IIM feltétel (részleges) gyengítését.

4.5. Állítás. *Létezik olyan $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az SC és MVA axiómákat, például az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere.*

Bizonyítás. Ezek a pontozási eljárások önkonzisztensek (4.1. állítás) és makrocsapat önállóak (a 3.1. tétel). □

Tehát a makrocsapat ragadja meg „helyesen” az irrelevancia fogalmát: a többiek közötti mérkőzések akkor számítanak ilyennek a két vizsgált objektum tekintetében, ha ugyanannyiszor lettek összehasonlítva azokkal.

Utoljára maradt az SC tulajdonság finomítása. Elsőként próbálkozzunk a szigorú egyenlőtlenség elhagyásával.

4.2. Definíció. ***Gyenge önkonzisztencia*** *(weak self-consistency, WSC): Legyen $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás és $(N,A,M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, melyre az $X_i, X_j \in N$ objektumok O_i és O_j ellenfél multihalmazai között létezik olyan $g : O_i \leftrightarrow O_j$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$, $p = 1,2,\dots,|O_i|$ és $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$, valamint $a_{ik} = \sum_{p=1}^{|O_i|} a_{ik}^p$ és $a_{jg(k)} = \sum_{p=1}^{|O_j|} a_{jg(k)}^p$ minden $(X_k, g(X_k)) \in O_i \times O_j$ objektumpár esetén.*
Az f pontozási eljárás gyengén önkonzisztens, ha $f_i(N,A,M) \geq f_j(N,A,M)$.

4.1. Következmény. *Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti az SC tulajdonságot, akkor a WSC-t is teljesíti.*

4.4. Lemma. *Az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere kielégíti a WSC axiómát.*

4.5. Lemma. *A pontszám módszer teljesíti a WSC tulajdonságot.*

Bizonyítás. Ha az $X_i, X_j \in N$ objektumokra fennáll az önkonzisztens monotonitásban megkövetelt feltétel, akkor

$$s_i(N,A,M) = \sum_{X_k \in O_i} a_{ik} \geq \sum_{g(X_k) \in O_j} a_{jg(k)} = s_j(N,A,M).$$

□

4.6. Állítás. *Létezik olyan $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti a WSC és IIM axiómákat, például az egyenlő, és a pontszám módszer.*

Bizonyítás. Az egyenlő módszer független az irreleváns mérkőzésektől, emellett teljesíti a gyenge önkonzisztenciát is, mert utóbbi sohasem zárja ki két objektum értékelésének azonosságát.
A pontszám módszerhez lásd a 3.4. (IIM) és a 4.5. (WSC) lemmát. □

A 4.6. állítás szerint az egyenlő módszer kielégíti a WSC és az IIM tulajdonságokat. Ez az eljárás nem igazán fogadható el gyakorlati célokra, mert teljesen független az A eredménymátrixtól, tehát az SC tulajdonság ezen gyengítése túl erősnek bizonyult.

A következő fogalom Altman és Tennenholtz (2008) kvázi tranzitivitás definícióját követi.

4.3. Definíció. ***Kvázi önkonzisztencia*** *(quasi self-consistency, QSC): Legyen $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás, $(N,A,M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, melyre az $X_i, X_j \in N$ objektumok O_i és O_j ellenfél multihalmazai között létezik olyan $g : O_i \leftrightarrow O_j$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$, $p = 1,2,\dots,|O_i|$ és $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$, valamint $a_{ik} = \sum_{p=1}^{|O_i|} a_{ik}^p$ és $a_{jg(k)} = \sum_{p=1}^{|O_j|} a_{jg(k)}^p$ minden $(X_k, g(X_k)) \in O_i \times O_j$ objektumpár esetén.*
Az f pontozási eljárás kvázi önkonzisztens, amennyiben $f_i(N,A,M) \geq f_j(N,A,M)$, sőt, $f_i(N,A,M) > f_j(N,A,M)$, ha az $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$ vagy az $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$ egyenlőtlenségek valamelyike minden $p = 1,2,\dots,|O_i|$-ra szigorú formában teljesül.

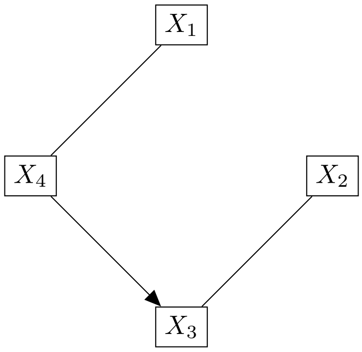
4.2. Következmény. *Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti az SC tulajdonságot, akkor a QSC-t is teljesíti.*
Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti a QSC tulajdonságot, akkor a WSC-t is teljesíti.

4.6. Lemma. *Az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere teljesíti a QSC tulajdonságot.*

4.7. Lemma. *A pontszám módszer nem teljesíti a QSC tulajdonságot.*

Bizonyítás. Ellenpéldát adunk $n = 4$ esetén.

3. ábra. A 4.3. példa rangsorolási problémája



4.3. Példa. *Tekintsük az $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ objektumhalmazzal adott $(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan rangsorolási problémát (3. ábra), ahol:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ azaz } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Itt $O_1 = \{X_4\}$ és $O_2 = \{X_3\}$. A két multihalmaz között csupán egyetlen $g : O_i \leftrightarrow O_j$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik, a $g(X_4) = X_3$. A pontszám módszerre $s_1(N, A, M) = 0 = s_2(N, A, M)$, azonban X_1 és X_2 között fennáll a QSC tulajdonságban megkövetelt feltétel, mert $a_{14} \geq a_{23}$ és $1 = s_4(N, A, M) > s_3(N, A, M) = -1$. Ekkor teljesülnie kellene az $s_1(N, A, M) > s_2(N, A, M)$ egyenlőtlenségnek. Ezzel ellentmondáshoz jutottunk, a pontszám módszer nem kvázi önkonzisztens. □

4.4. Metsző kiegyensúlyozottság

A kvázi önkonzisztencia és az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség axiómákat egyszerre kielégítő pontozási eljárásokkal kapcsolatban egyelőre nem tudtunk a 4.1. tételhez és a 4.6. állításhoz hasonló eredményt megfogalmazni. Ehhez szükség van egy újabb tulajdonság, majd ennek általánosított változata bevezetésére, amit az alábbi példa indokol.

4.4. Példa. *[Chebotarev és Shamis (1999, Fig. 1) alapján] Tekintsük a 4.3. példát, melyben $O_1 = \{X_4\}$, $O_2 = \{X_3\}$, $O_3 = \{X_2, X_4\}$, és $O_4 = \{X_1, X_3\}$, így az önkonzisztencia által megkövetelt implikációk:*

- ◇ $f_4(N, A, M) \geq f_3(N, A, M) \Rightarrow f_1(N, A, M) \geq f_2(N, A, M)$, *és*
  $f_3(N, A, M) \geq f_4(N, A, M) \Rightarrow f_2(N, A, M) \geq f_1(N, A, M)$

  A $g_{12} : O_1 \leftrightarrow O_2$, $g_{12}(X_4) = X_3$ és a $g_{21} : O_2 \leftrightarrow O_1$, $g_{21}(X_3) = X_4$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések alapján.

- ◇ $[f_1(N, A, M) \geq f_2(N, A, M)$ *és* $f_3(N, A, M) \geq f_4(N, A, M)] \Rightarrow f_4(N, A, M) > f_3(N, A, M)$ *és*
  $[f_1(N, A, M) \geq f_4(N, A, M)$ *és* $f_3(N, A, M) \geq f_2(N, A, M)] \Rightarrow f_4(N, A, M) > f_3(N, A, M)$

  A $g_{43} : O_4 \leftrightarrow O_3$, $g_{43}(X_1) = X_2$, és $g_{43}(X_3) = X_4$, illetve a $g'_{43} : O_4 \leftrightarrow O_3$, $g'_{43}(X_1) = X_4$, és $g'_{43}(X_3) = X_2$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések alapján.

- ◇ *Az első csoport két implikációja szigorú formában is felírható:*
  $f_4(N, A, M) > f_3(N, A, M) \Rightarrow f_1(N, A, M) > f_2(N, A, M)$, *és*
  $f_3(N, A, M) > f_4(N, A, M) \Rightarrow f_2(N, A, M) > f_1(N, A, M)$

Vagyis $X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1$ egy, az önkonzisztencia teljesülése mellett lehetséges rangsor. Ez a következőképpen lenne magyarázható. Tegyük fel, hogy a négy objektum négy sakkozó, az összehasonlítások egymás elleni mérkőzéseik eredményét tükrözik. Ha valamilyen külső forrásból ismert, hogy X_2 a világbajnok, a másik három pedig amatőr játékos, akkor az első helyezett kiléte nem meglepő. X_3 világbajnok ellen elért döntetlene kiváló eredmény, amire X_4 nem lett volna képes, így az utóbbitól elszenvedett vereség ellenére $X_3 \succ X_4$. Végül X_1 és X_4 döntetlent játszott egymással, utóbbi azonban rendelkezik egy győzelemmel.

Ugyanakkor a 4.4. példában megadott lehetséges rangsor furcsának tűnik, mert X_3 a lehető legrosszabb eredményt érte el X_4 ellen. Ezt kezeli a bemutatandó tulajdonság, amihez azonban némi előkészítés szükséges.

4.4. Definíció. ***Domináns halmaz*** *(dominant set): Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma. A $D \subseteq N$ objektumhalmaz domináns halmaz, ha $a_{ij} = m_{ij}$ minden $X_i \in D$ és $X_j \in N \setminus D$ esetén.*

A makrocsapat analógiájára logikus lehetne a domináns csapat (vertex) elnevezés. Ezt azért kerültük el, mert az előbbivel ellentétben a domináns halmaz nem az M mérkőzésmátrixtól, hanem az A eredménymátrixtól függ. Tehát a domináns halmazon kívüli objektumoknak nincs esélyük a D-beliek legyőzésére. Ebből szinte természetesen adódik az alábbi, egyébként meglehetősen gyenge követelmény.

4.5. Definíció. ***Metsző kiegyensúlyozottság*** *(splitting balance, SB) (Chebotarev és Shamis, 1999): Legyen $D \subseteq N$ domináns halmaz az $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémában. Az $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás metsző kiegyensúlyozott, ha léteznek $X_i \in D$ és $X_j \in N \setminus D$ objektumok, melyekre $f_i(N, A, M) \geq$ $\geq f_j(N, A, M)$.*

Chebotarev és Shamis (1999) a metsző kiegyensúlyozottságot a domináns halmaz fogalma nélkül definiálja, számunkra azonban, jelentős részben a későbbi tárgyalás megkönnyítése érdekében, egyszerűbbnek tűnt ezen az úton. A metsző kiegyensúlyozottság tehát kizárja, hogy a domináns halmaz minden objektuma a rajta kívüliek mögött végezzen. Eszerint a 4.4. példában SB teljesülése esetén $X_2 \succ X_3 \succ X_4 \sim X_1$ nem lehetséges, mert $\max\{f_1(N, A, M); f_4(N, A, M)\} \geq \min\{f_2(N, A, M); f_3(N, A, M)\}$.

Egy ennél erősebb, a domináns csapattal kapcsolatos axióma az alábbi.

4.6. Definíció. ***Erős metsző kiegyensúlyozottság*** *(reinforced splitting balance, RSB): Legyen $D \subseteq$ $\subseteq N$ domináns halmaz az $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémában, jelölje $D^{\max} = \{X_i \in D : \exists X_j \in N \setminus$ $\setminus D,\ \text{amire}\ m_{ij} > 0\} \subseteq D$ és $D^{\min} = \{X_j \in N \setminus D : \exists X_i \in D,\ \text{amire}\ m_{ij} > 0\} \subseteq N \setminus D$. Az $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás erősen metsző kiegyensúlyozott, ha $\sum_{X_i \in D} f_i(N, A, M) > \sum_{X_j \in N \setminus D} f_j(N, A, M)$ vagy $\max_{X_i \in D^{\max}} f_i(N, A, M) > \min_{X_j \in D^{\min}} f_j(N, A, M)$.*

RSB azt követeli meg, hogy a domináns halmazban szereplő objektumok értékeléseinek összege meghaladja a rajta kívüliekét, vagy a két csoport közötti maximális mértékű összehasonlításokkal érintett objektumok között legyen olyan D-beli, amelyik a rangsorban megelőzi valamelyik nem D-beli ilyen objektumot. Ebből az előbbi tűnik természetesebbnek, azonban fennállása nem garantálható, ha D és $N \setminus D$ számossága jelentősen eltér. Az axióma elsősorban technikai célokat szolgál, ez teszi lehetővé a 4.3. tételben az ellentmondás megteremtését, ugyanakkor az előírt feltételek egyike sem tűnik teljesen indokolhatatlannak.

Még számos egyéb, hasonló jellegű tulajdonság definiálható lenne, nekünk azonban csak ezekre lesz szükségünk a továbbiakban.[7]

4.3. Következmény. *Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti az RSB tulajdonságot, akkor SB-t is teljesíti.*

Bizonyítás. Indirekt módon: ha $f_i(N, A, M) < f_j(N, A, M)$ minden $X_i \in D$ és $X_j \in N \setminus D$ objektumra, akkor $\max_{X_i \in D} f_i(N, A, M) > \min_{X_j \in \bar{D} \subseteq (N \setminus D)} f_j(N, A, M)$ sem teljesülhet. □

4.2. Tétel. *A pontszám, általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere is teljesíti az RSB tulajdonságot.*

Bizonyítás. Jelölje x_i az általánosított sorösszeg módszerrel kapott értékeléseket az (N, A, M) rangsorolási problémában, valamint legyen $s_i = s_i(N, A, M)$ minden $X_i \in N$-re. Tekintsük az $X_i \in D$ objektumokra vonatkozó egyenletek összegét:

$$\sum_{X_i \in D} x_i + \varepsilon \left[\sum_{X_j \in N \setminus D} m_{ij}(x_i - x_j) \right] = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n) \sum_{X_i \in D} s_i = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n) \sum_{X_i \in D} \sum_{X_j \in N \setminus D} m_{ij} > 0.$$

[7] Például a metsző kiegyensúlyozottság egyik természetes, RSB-nél gyengébb kiterjesztését jelentené olyan $X_i \in D$ és $X_j \in N \setminus D$ objektumok létezésének megkövetelése, melyekre $f_i(N, A, M) > f_j(N, A, M)$. Számos ehhez hasonló megoldással próbálkoztunk, azonban a 4.6. definícióban szereplő bizonyult az egyetlen olyannak, amellyel érvényes a 4.2. és a 4.3. tétel.

Az egyenlőtlenség jobb oldalán

$$\sum_{X_i \in D} x_i + \varepsilon \left[\sum_{X_j \in N \setminus D} m_{ij}(x_i - x_j) \right] \leq \sum_{X_i \in D} x_i + \varepsilon \left[\sum_{X_j \in D^{\min}} m_{ij} \left(\max_{X_i \in D^{\max}} x_i - \min_{X_j \in D^{\min}} x_j \right) \right],$$

mert $m_{ij} = 0$ minden $X_i \in D \setminus D^{\max}$ és $X_j \in N \setminus \left(D \cup D^{\min}\right)$ esetén. Ebből azonnal adódik az erős metsző kiegyensúlyozottság követelménye, mert két nempozitív szám összege nem lehet pozitív.

A legkisebb négyzetek módszerére – a megfelelő módosításokkal – ugyanez a gondolatmenet alkalmazható. □

4.3. Megjegyzés. *A 4.2. tétel bizonyítása szerint a pontszám módszer esetén* $\sum_{X_i \in D} f_i(N,A,M) > > \sum_{X_j \in N \setminus D} f_j(N,A,M)$*, a legkisebb négyzeteknél* $\max_{X_i \in D^{\max}} f_i(N,A,M) > \min_{X_j \in D^{\min}} f_j(N,A,M)$ *fog fennállni, míg az általánosított sorösszegnél akár mindkét előírás teljesülhet.*

4.8. Lemma. *A pontszám, általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere teljesíti az SB tulajdonságot.*

A kvázi önkonzisztenciával szintén kimondható egy, a 4.2. tételhez hasonló lehetetlenségi eredmény, ehhez azonban szükség van az RSB tulajdonságra is.

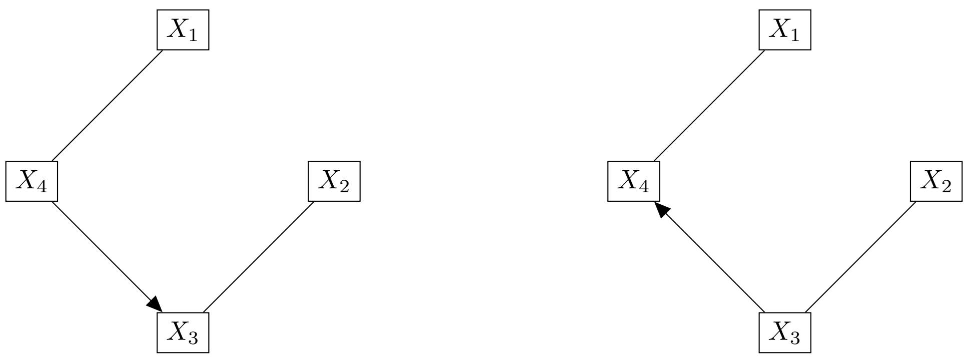
4.3. Tétel. *Nem létezik olyan* $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ *pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az RSB, QSC, és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A minimális, $n = 4$ esetben a 4.5. példa segítségével bizonyítjuk a három tulajdonság között érvényesülő ellentmondást (ennél kisebb méretre IIM nem értelmezhető).

4. ábra. A 4.5. példa rangsorolási problémái

(a) Az (N, A, M) rangsorolási probléma

(b) Az (N, A', M) rangsorolási probléma



4.5. Példa. *Tekintsük az* $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ *objektumhalmazzal adott* $(N,A,M), (N,A',M') \in \mathcal{R}^U$ *súlyozatlan rangsorolási problémákat (8. ábra), ahol:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \textit{és } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Itt $O_1 = \{X_4\}$, $O_2 = \{X_3\}$, $O_3 = \{X_2, X_4\}$ és $O_4 = \{X_1, X_3\}$. Ha $f_1(N,A,M) > f_2(N,A,M)$, akkor IIM következtében $f_1(N,A',M) > f_2(N,A',M)$, ezért $f_4(N,A',M) > f_3(N,A',M)$. Ellenkező esetben ugyanis létezik $g_{21} : O_2 \leftrightarrow O_1$, $g_{21}(X_3) = X_4$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, ami teljesíti a (kvázi) önkonzisztenciában megkövetelt feltételeket, így $f_1(N,A',M) \leq f_2(N,A',M)$, ami ellentmondás. Tehát $f_1(N,A',M) > f_2(N,A',M)$ és $f_4(N,A',M) > f_3(N,A',M)$, ezért nem teljesül a(z erős) metsző kiegyensúlyozottságban előírt $\max\{f_2(N,A',M); f_3(N,A',M)\} \geq \min\{f_1(N,A',M); f_4(N,A',M)\}$ egyenlőtlenség. Hasonló módon kapható $f_2(N,A,M) > f_1(N,A,M)$ lehetetlensége, miután ebből $f_3(N,A,M) > > f_4(N,A,M)$ adódik.

Legyen $f_1(N,A,M) = f_2(N,A,M)$. Ha $f_4(N,A,M) > f_3(N,A,M)$, akkor a $g_{12} : O_1 \leftrightarrow O_2$, $g_{12}(X_4) = X_3$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel a kvázi önkonzisztenciából $f_1(N,A,M) > f_2(N,A,M)$, ami ellentmondás. Ha pedig $f_3(N,A,M) > f_4(N,A,M)$, akkor a $g_{21} : O_2 \leftrightarrow O_1$, $g_{21}(X_3) = X_4$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel a kvázi önkonzisztenciából $f_2(N,A,M) > f_1(N,A,M)$, ami szintén lehetetlen.

Vagyis csak $f_1(N,A,M) = f_2(N,A,M)$ és $f_3(N,A,M) = f_4(N,A,M)$ fordulhat elő, ekkor viszont nem teljesül az RSB által megkövetelt $f_1(N,A,M) + f_4(N,A,M) > f_2(N,A,M) + f_3(N,A,M)$ és az $f_4(N,A,M) > f_3(N,A,M)$ egyenlőtlenség sem. Ezzel végleg ellentmondásra jutottunk, a három axióma egyszerre nem elégíthető ki. □

4.4. Megjegyzés. *Az 5.3. tételben szereplő három tulajdonság logikai függetlenségéhez azt kellene megmutatni, hogy közülük bármely kettőt kiválasztva létezik olyan eljárás, amely ezeket kielégíti, így a harmadikat biztosan megsérti:*

$\boxed{1}$ *RSB és QSC: általánosított sorösszeg és legkisebb négyzetek módszere (4.2. tétel és 4.6. lemma);*

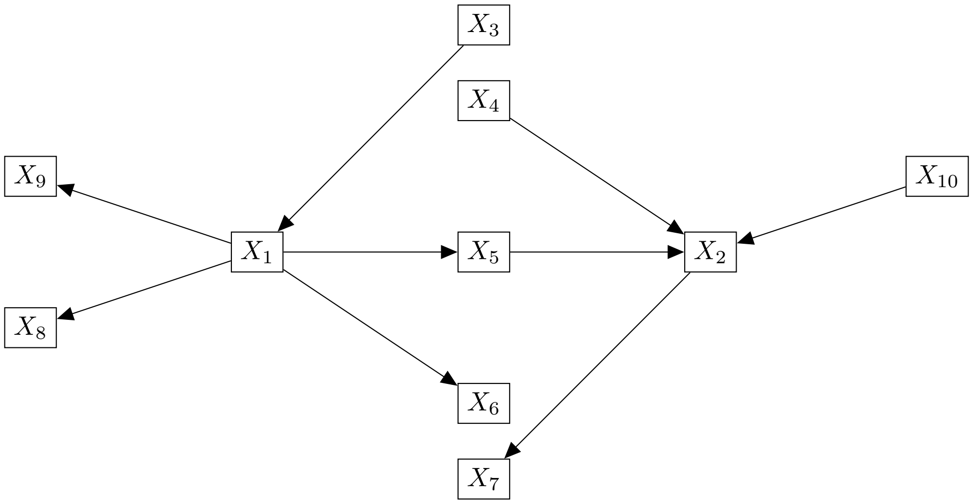
$\boxed{2}$ *RSB és IIM: pontszám módszer (4.2. tétel és 3.4. lemma);*

$\boxed{3}$ *QSC és IIM: ismeretlen, de az a sejtésünk, hogy található ilyen eljárás.*

Amennyiben létezik a QSC és IIM tulajdonságokat kielégítő pontozási eljárás, a 4.5. példa szerint ez csak meglehetősen szokatlan lehet. Ugyanis az erős metsző kiegyensúlyozottság hiányában $f_1(N,A',M) > f_2(N,A',M)$ és $f_4(N,A',M) > f_3(N,A',M)$, vagy $f_1(N,A,M) < f_2(N,A,M)$ és $f_4(N,A,M) < f_3(N,A,M)$, vagy $f_1(N,A,M) = f_2(N,A,M)$ és $f_3(N,A,M) = f_4(N,A,M)$, melyek mindegyike az intuícióval ellentétesnek tűnik.

Az 5.3. lehetetlenségi tétel már kevésbé emlékeztet Altman és Tennenholtz (2008) eredményeire. Az ott definiált erős tranzitivitás (mely többé-kevésbé az önkonzisztens monotonitásnak feleltethető meg) és az $RIIA$ axiómák ugyan ellentmondanak egymásnak, de a QSC-nél erősebbnek tekinthető kvázi erős tranzitivitás már a rangsorolási függetlenség az irreleváns objektumoktól axiómával együtt is kielégíthető.

5. ábra. Az 5.1. példa rangsorolási problémája



5. Kiterjesztett monotonitás az objektumok teljesítményéből

A 4.1. tétel alapján az önkonzisztencia fontosabb követelménynek tűnik, mint az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség, mert a teljes rangsorolási probléma vizsgálatakor nem feltétlenül célszerű az objektumok lokális eredményeire támaszkodni, ahogy azt az IIM axióma előírja. Ezért ebben a fejezetben, a kapott ellentmondás ellenére, az SC tulajdonság kiterjesztéseivel foglalkozunk.

5.1. Önkonzisztens monotonitás

5.1. Megjegyzés. *Az önkonzisztencia csak akkor jelent megszorítást az X_i és X_j objektumok sorrendjével kapcsolatban, ha $|O_i| = |O_j|$, mert ellenkező esetben az utóbbiak között nem létezhet kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.*

Az 5.1. megjegyzés szerint SC hatóköre meglehetősen korlátozott, ahogy azt már a 4.4. példában láthattuk. Az önkonzisztencia további erősítésének iránya azonnal adódik, ha felidézzük, hogy az A eredménymátrixban szereplő értékek az $a_{ij} \in [-m_{ij}, m_{ij}]$ módon korlátozva voltak. Emiatt két objektum összevetésekor ellenfeleik egymással való összehasonlítása elhagyható, ha a páros összehasonlítás kimenetele valamelyik extrémumot veszi fel. Ismét egy példával illusztráljuk az ötletet.

5.1. Példa. *Tekintsük az $N = \{X_1, \dots, X_{10}\}$ objektumhalmazzal adott, az 5. ábrán látható $(N, A, M) \in \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan rangsorolási problémát.*

Tegyük fel, hogy $X_3 \succ X_4$ és $X_6 \succ X_7$ (ez lehet valamilyen külső információ, vagy akár a pontozási eljárásból kapott eredmény). Ekkor X_1 egyértelműen jobbnak tűnik X_2-nél, mert egy X_3 elleni vereség kedvezőbb egy X_4 elleninél, egy X_6 elleni győzelem többet ér egy X_7 elleninél, és az X_5 elleni győzelem biztosan többet ér egy vele szembeni vereségnél. Ezenkívül X_1 egy-egy győzelemmel, maximális arányú páros összehasonlítással rendelkezik X_8-cal és X_9-cel szemben, X_2 viszont a lehető legrosszabb eredményt érte el X_{10} ellen. Összefoglalva, ebben a helyzetben az $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárástól logikusnak tűnik az $X_1 \succ X_2$ reláció, vagyis az $f_1(N, A, M) > f_2(N, A, M)$ szigorú egyenlőtlenség megkövetelése.

Az 5.1. példa üzenete világos: ha X_i legalább olyan jó, mint X_j, akkor X_j nem előzheti meg a rangsorban X_i-t, továbbá, amennyiben a reláció szigorúnak tekinthető, a kapott sorrendben döntetlen sem állhat fenn a két objektum között. Ezt fogalmazza meg az alábbi axióma. A definíció meglehetősen nehézkes, mert eredetileg olyan modellekre javasolták, ahol az (N, A, M) rangsorolási probléma $\mathfrak{m}$ darab súlyozatlan rangsorolási probléma összegeként áll elő.

5.1. Definíció. ***Önkonzisztens monotonitás*** *(self-consistent monotonicity, SCM) (Chebotarev és Shamis, 1997): Legyen $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás és $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, melyben az $X_i, X_j \in N$ objektumok O_i és O_j ellenfél multihalmazaira:*

† $O_i^{\max} \subseteq O_i$ *és* $a'_{ik} = m'_{ik}$ *minden* $X_k \in O_i^{\max}$*-ra, ha* X_k *pontosan* m'_{ik}*-szor szerepel* $O_i^{\max}$*-ban;*

† $O_j^{\min} \subseteq O_j$ *és* $a'_{jk} = -m'_{jk}$ *minden* $X_k \in O_j^{\min}$*-re, ha* X_k *pontosan* m'_{jk}*-szor szerepel* $O_j^{\min}$*-ben;*

† *létezik* $g : (O_i \setminus O_i^{\max}) \leftrightarrow \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ *kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy* $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$*,* $p = 1,2,\dots,|O_i \setminus O_i^{\max}|$ *és* $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$*, valamint* $a_{ik} = a'_{ik} + \sum_{p=1}^{|O_i \setminus O_i^{\max}|} a_{ik}^p$ *és* $a_{jg(k)} = a'_{jg(k)} + \sum_{p=1}^{|O_j \setminus O_j^{\min}|} a_{jg(k)}^p$ *minden* $(X_k, g(X_k)) \in (O_i \setminus O_i^{\max}) \times \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ *objektumpár esetén.*

Az f *pontozási eljárás önkonzisztens monoton, ha* $f_i(N,A,M) \geq f_j(N,A,M)$*, sőt,* $f_i(N,A,M) > f_j(N,A,M)$*, amennyiben az* $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$ *vagy az* $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$ *egyenlőtlenségek valamelyike szigorú formában teljesül, vagy* $O_i^{\max} \neq \emptyset$*, vagy* $O_j^{\min} \neq \emptyset$*.*

5.1. Következmény. *Ha egy* $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ *pontozási eljárás kielégíti az SCM tulajdonságot, akkor az SC-t (következésképp a QSC-t és a WSC-t) is teljesíti.*

5.1. Lemma. *A pontszám módszer nem teljesíti az SCM tulajdonságot.*

5.2. Lemma. *Ha az* $X_i, X_j \in N$ *objektumokra fennáll az önkonzisztens monotonitásban megkövetelt feltétel, akkor* $s_i(N,A,M) \geq s_j(N,A,M) + \mid O_i^{\max} \mid + \mid O_j^{\min} \mid$*.*

Bizonyítás. Legyen $s_i = s_i(N,A,M)$ minden $X_i \in N$-re. A definíció alapján

$$
\begin{aligned}
s_i &= \sum_{X_k \in O_i} a_{ik} = \sum_{X_k \in O_i^{\max}} a_{ik} + \sum_{X_\ell \in O_i \setminus O_i^{\max}} a_{i\ell} = \sum_{X_k \in O_i^{\max}} 1 + \sum_{X_\ell \in O_i \setminus O_i^{\max}} a_{i\ell} \geq \\
&\geq \mid O_i^{\max} \mid + \sum_{X_\ell \in O_i \setminus O_i^{\max}} a_{i\ell} \geq \mid O_i^{\max} \mid + \sum_{X_\ell \in O_j \setminus O_j^{\min}} a_{j\ell} - \sum_{X_k \in O_j^{\min}} 1 + \mid O_j^{\min} \mid \geq \\
&\geq \mid O_i^{\max} \mid + \sum_{X_k \in O_j^{\min}} a_{jk} + \sum_{X_\ell \in O_j \setminus O_j^{\min}} a_{i\ell} + \mid O_j^{\min} \mid = s_j + \mid O_i^{\max} \mid + \mid O_j^{\min} \mid .
\end{aligned}
$$

□

5.2. Példa. *A 4.4. példában SCM fennállásakor megjelenő további feltételek:*

◇ $f_1(N,A,M) \geq f_2(N,A,M) \Rightarrow f_4(N,A,M) > f_3(N,A,M)$
Az $O_4^{\max} = X_3$*,* $O_3^{\min} = X_4$*,* $g_{43} : (O_4 \setminus O_4^{\max}) \leftrightarrow \left(O_3 \setminus O_3^{\min}\right)$*,* $g_{43}(X_1) = X_2$ *választással. Ez azonban nem jelent újabb megszorítást, mert az önkonzisztenciából*

$$[f_1(N,A,M) \geq f_2(N,A,M) \text{ és } f_3(N,A,M) \geq f_4(N,A,M)] \Rightarrow f_4(N,A,M) > f_3(N,A,M),$$

ami kizárja $f_1(N,A,M) \geq f_2(N,A,M)$ *és* $f_3(N,A,M) \geq f_4(N,A,M)$ *együttes fennállását.*

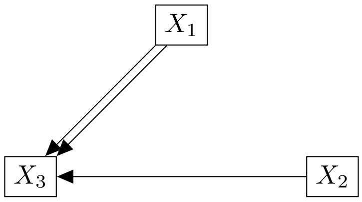
◇ $f_1(N,A,M) \geq f_4(N,A,M) \Rightarrow f_4(N,A,M) > f_1(N,A,M)$ *és*
$f_1(N,A,M) \geq f_3(N,A,M) \Rightarrow f_4(N,A,M) > f_2(N,A,M)$
Az $O_4^{\max} = X_3$*,* $g_{41} : (O_4 \setminus O_4^{\max}) \leftrightarrow O_1$*,* $g_{41}(X_1) = X_4$*, illetve az* $O_4^{\max} = X_3$*,* $g_{42} : (O_4 \setminus O_4^{\max}) \leftrightarrow O_2$*,* $g_{42}(X_1) = X_3$ *választással.*

◇ $f_4(N,A,M) \geq f_2(N,A,M) \Rightarrow f_1(N,A,M) > f_3(N,A,M)$ *és*
$f_3(N,A,M) \geq f_2(N,A,M) \Rightarrow f_2(N,A,M) > f_3(N,A,M)$
Az $O_3^{\min} = X_4$*,* $g_{13} : O_1 \leftrightarrow \left(O_3 \setminus O_3^{\min}\right)$*,* $g_{13}(X_4) = X_1$*, illetve az* $O_3^{\min} = X_4$*,* $g_{23} : O_2 \leftrightarrow \left(O_3 \setminus O_3^{\min}\right)$*,* $g_{23}(X_3) = X_2$ *választással.*

Ezekből $f_4(N,A,M) > f_1(N,A,M)$ *és* $f_2(N,A,M) > f_3(N,A,M)$*, így az önkonzisztens monotonitás sem zárja ki a* $X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1$ *rangsort. Vagyis az önkonzisztens monotonitás az önkonzisztenciánál erősebb követelmény, hiszen lehetővé teszi különböző fokszámú objektumok összevetését, de ebből sem következik a metsző kiegyensúlyozottság.*

5.1. Állítás. *A legkisebb négyzetek módszere nem teljesíti az SCM tulajdonságot.*

6. ábra. Az 5.3. példa rangsorolási problémája



Bizonyítás. $n = 4$-re lásd Chebotarev és Shamis (1999, Proposition 10). Ennél kisebb ellenpéldát adunk.

5.3. Példa. *Tekintsük az* $N = \{X_1, X_2, X_3\}$ *objektumhalmazzal adott* $(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ *súlyozatlan rangsorolási problémát (6. ábra), ahol:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ és } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ azaz } L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Legyen $O_1^{\max} = \{X_3\} \neq \emptyset$, így $O_1 \setminus O_1^{\max} = O_2 = \{X_3\}$, valamint $g(X_3) = X_3$. Azonban $a_{13} - m'_{13} = = 2 - 1 = a''_{13} \geq a''_{23} = a_{23} = 1$, így fennállnak az önkonzisztens monotonitásban szereplő implikáció feltételei. Ekkor $q_1(N, A, M) > q_2(N, A, M)$, vagyis $X_1 \succ X_2$. A legkisebb négyzetek módszerével kapott értékelővektor viszont $\mathbf{q} = (1/3)\,[1{,}1, -2]^\top$, azaz $X_1 \sim X_2$. □

5.2. Megjegyzés. *Legyen* $n = 2$. *Ekkor a legkisebb négyzetek módszere teljesíti az* SCM *tulajdonságot.*

Bizonyítás. Ekkor minden rangsorolási probléma round-robin, a 3.8. lemma szerint a legkisebb négyzetek módszere arányos a pontszám módszerrel. Az 5.2. lemma értelmében, ha az $X_i, X_j \in N$ objektumokra fennáll az önkonzisztens monotonitásban megkövetelt feltétel, akkor $s_i(N, A, M) \geq s_j(N, A, M)$. □

5.2. Következmény. *Az 5.3. példa minimális méretű.*

Az 5.3. példában SCM megsértésének oka az, hogy a legkisebb négyzetek módszere nem képes figyelembe venni a maximális intenzitású összehasonlítások számát. Ez az általánosított sorösszeg módszerre már nem feltétlenül igaz, amint azt az alábbi eredmény mutatja.

5.2. Állítás. *Az általánosított sorösszeg eljárás minden* $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ *paraméterérték mellett teljesíti az* SCM *tulajdonságot.*

Bizonyítás. Lásd Chebotarev és Shamis (1997, Theorem 8). A bizonyítás, némileg eltérő formában, már Chebotarev (1994, Property 14)-ben is megtalálható. □

5.3. Megjegyzés. *Az 5.2. állításban szereplő* $\varepsilon = 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ *felső határ univerzális, csak* n*-től és* $\mathfrak{m}$*-től függ. Ennél bővebb intervallum is megengedett lehet, ha figyelembe vehetők az* A *eredménymátrix és az* M *mérkőzésmátrix más sajátosságai is (Chebotarev, 1994).*

Az 5.1. következmény alapján kimondható a 4.1. tétellel analóg állítás.

5.3. Állítás. *Nem létezik olyan* $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ *pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az* SCM *és* IIM *axiómákat.*

5.3. Lemma. *Az 5.3. állításban szereplő két tulajdonság logikailag független.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy közülük bármelyiket kiválasztva létezik olyan eljárás, amely ezt kielégíti, tehát a másikat biztosan megsérti:

$\boxed{1}$ SCM: általánosított sorösszeg $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ paraméter mellett (5.2. állítás);

$\boxed{2}$ IIM: pontszám módszer (3.4. lemma).

□

A további részletek iránt érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk a Chebotarev és Shamis (1997), Chebotarev és Shamis (1998), Chebotarev és Shamis (1999), González-Díaz et al. (2013), illetve a Csató (2013b) cikkeket.

5.2. Gyenge önkonzisztens monotonitás

Mivel az 5.1. állítás szerint a legkisebb négyzetek módszere nem önkonzisztens monoton, a következőkben az SCM axióma gyengítésével próbálkozunk. Ez egyben azt is lehetővé teheti, hogy kiküszöböljük a 4.1. tétel ellentmondását.

Elsőként nézzük meg, mire jutunk az SCM axióma gyenge önkonzisztenciával analóg módosításával.

5.2. Definíció. ***Gyenge önkonzisztens monotonitás*** *(weak self-consistent monotonicity, $WSCM$): Legyen $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás és $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, melyben az $X_i, X_j \in N$ objektumok O_i és O_j ellenfél multihalmazaira:*

- ‡ $O_i^{\max} \subseteq O_i$ *és* $a'_{ik} = m'_{ik}$ *minden* $X_k \in O_i^{\max}$*-ra, ha* X_k *pontosan* m'_{ik}*-szor szerepel* $O_i^{\max}$*-ban;*
- ‡ $O_j^{\min} \subseteq O_j$ *és* $a'_{jk} = -m'_{jk}$ *minden* $X_k \in O_j^{\min}$*-re, ha* X_k *pontosan* m'_{jk}*-szor szerepel* $O_j^{\min}$*-ben;*
- ‡ *létezik* $g : (O_i \setminus O_i^{\max}) \leftrightarrow \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ *kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy* $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$, $p = 1,2, \dots, |O_i \setminus O_i^{\max}|$ *és* $f_k(N, A, M) \geq f_{g(k)}(N, A, M)$*, valamint* $a_{ik} = a'_{ik} + \sum_{p=1}^{|O_i \setminus O_i^{\max}|} a_{ik}^p$ *és* $a_{jg(k)} = a'_{jg(k)} + \sum_{p=1}^{|O_j \setminus O_j^{\min}|} a_{jg(k)}^p$ *minden* $(X_k, g(X_k)) \in (O_i \setminus O_i^{\max}) \times \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ *objektumpár esetén.*

Az f pontozási eljárás gyengén önkonzisztens monoton, amennyiben $f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M)$.

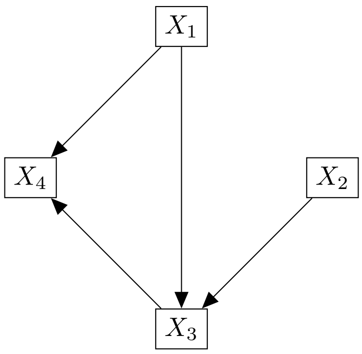
5.3. Következmény. *Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti az SCM tulajdonságot, akkor a $WSCM$-et is teljesíti.*
Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti a $WSCM$ tulajdonságot, akkor a WSC-t is teljesíti.

5.4. Lemma. *Az általánosított sorösszeg eljárás minden $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ paraméterérték mellett teljesíti a $WSCM$ tulajdonságot.*

5.4. Állítás. *A legkisebb négyzetek módszere nem teljesíti a $WSCM$ tulajdonságot.*

Bizonyítás. Chebotarev és Shamis (1999, Proposition 10) nyomán ellenpéldát adunk $n = 4$-re.

7. ábra. Az 5.4. példa rangsorolási problémája



5.4. Példa. *Chebotarev és Shamis (1999, Fig. 4) Tekintsük az $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ objektumhalmazzal adott $(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan rangsorolási problémát (7. ábra), ahol:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ azaz } L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Legyen $O_1^{\max} = \{X_4\} \neq \emptyset$, így $O_1 \setminus O_1^{\max} = O_2 = \{X_3\}$, valamint $g(X_3) = X_3$. Mivel $a_{13} \geq a_{23}$, fennállnak a gyenge önkonzisztens monotonitásban szereplő implikáció feltételei, ezért $q_1(N, A, M) \geq$ $\geq q_2(N, A, M)$-nek, vagyis $X_1 \succ X_2$-nek teljesülnie kell. A legkisebb négyzetek módszerével kapott értékelővektor azonban $\mathbf{q} = (1/12)\,[5{,}9, -3, -11]^\top$, azaz $X_1 \prec X_2$. □

5.4. Megjegyzés. *Legyen $n \leq 3$. Ekkor az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere teljesíti a WSCM tulajdonságot.*

Bizonyítás. $n = 2$ esetén érvényes az 5.2. megjegyzés, az állítás az 5.3. következményből kapható.

Amennyiben $n = 3$, jelölje x_i az általánosított sorösszeg módszer alkalmazásával kapott értékeléseket az (N, A, M) rangsorolási problémában, valamint legyen $s_i = s_i(N, A, M)$ minden $X_i \in N$-re. Indirekt módon tegyük fel, hogy az $X_i, X_j \in N$ objektumokra teljesül a (gyenge) önkonzisztens monotonitás feltétele a $g : (O_i \setminus O_i^{\max}) \leftrightarrow \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel, így az 5.2. lemma szerint $s_i \geq s_j + \mid O_i^{\max} \mid + \mid O_j^{\min} \mid \geq s_j + |m_{ij} - m_{jk}|$, azonban $x_i < x_j$. Képezzük a két objektumra vonatkozó egyenletek különbségét:

$$(x_i - x_j) + 2\varepsilon m_{ij}(x_i - x_j) + \varepsilon m_{ik}(x_i - x_k) - \varepsilon m_{jk}(x_j - x_k) = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)(s_i - s_j) \geq (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)|m_{ik} - m_{jk}|.$$

Ebből x_i helyére $x_j > x_i$-t helyettesítve $m_{ij} - m_{jk} \geq 0$ esetén $x_j - x_k > (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)/\varepsilon$. Ezért $x_j > x_i$ és $x_j > x_k$ alapján az általánosított sorösszeg zérusösszegűsége (lásd 3.1. lemma) miatt $x_j > 0$. Az X_j-re vonatkozó egyenletből

$$x_j + \varepsilon m_{ij}(x_j - x_i) + \varepsilon m_{jk}(x_j - x_k) = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)s_j = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)\left(a_{ji} + a_{jk}\right) \leq (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)\left(a_{ji} + m_{jk}\right).$$

A bal oldalon $x_j + \varepsilon m_{ij}(x_j - x_i) + \varepsilon m_{jk}(x_j - x_k) > (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)m_{jk}$, tehát $a_{ji} > 0$, következésképp $a_{ij} = -a_{ji} < 0$. Ez azt jelenti, hogy $g(X_j) = X_i$ nem lehetséges, mert $a_{ij} < a_{jg(j)}$. Ezért $g(X_k) = X_i$, vagyis az indirekt feltevésből $x_k \geq x_i$. Az X_i-re vonatkozó egyenlet

$$x_i + \varepsilon m_{ij}(x_i - x_j) + \varepsilon m_{ik}(x_i - x_k) = (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)s_i < 0.$$

Ekkor az $X_i, X_j \in N$ objektumokra vonatkozó egyenletek különbsége:

$$(x_i - x_j) + 2\varepsilon m_{ij}(x_i - x_j) + \varepsilon m_{ik}(x_i - x_k) - \varepsilon m_{jk}(x_j - x_k) < 0 - (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n) \geq (1 + \varepsilon \mathfrak{m} n)|m_{ik} - m_{jk}|,$$

ami ellentmondásra vezet, az indirekt feltevés nem igaz, $x_i \geq x_j$.

A legkisebb négyzetek módszerére – a megfelelő módosításokkal – ugyanez a gondolatmenet alkalmazható. □

5.4. Következmény. *Az 5.4. példa minimális méretű.*

WSCM megsértésének oka elsősorban az, hogy a legkisebb négyzetek módszere korlátozás nélküli numerikus preferenciák esetére lett kidolgozva. Az 5.4. példában X_1-et megbünteti az X_4 feletti győzelemért, mert ennél nagyobb arányú fölényt vár el: amennyiben $a_{13} = 1$ és $a_{34} = 1$, akkor $a_{14} \geq 2$ szükséges ahhoz, hogy X_1 jobbnak bizonyuljon X_2-nél (ez a célfüggvényből egyszerűen levezethető). Mivel ez lehetetlen, X_1 mindenképp rosszabb lesz X_2-nél, ha $m_{14} > 0$, miközben $m_{24} = 0$.

5.5. Lemma. *Legyen $n \geq 4$. Ekkor az általánosított sorösszeg nem teljesíti az SCM és WSCM tulajdonságokat.*

Bizonyítás. $\varepsilon \to \infty$ esetén a legkisebb négyzetek módszere arányos az általánosított sorösszeggel, és az utóbbi egy lineáris egyenletrendszer megoldásaként folytonos, ezért megfelelően nagy ε paraméter mellett az utóbbira is érvényes az 5.4. példából kapható ellentmondás, elérhető $x(\varepsilon)_1(N, A, M) < x(\varepsilon)_2(N, A, M)$. Ebből az 5.3. következmény alapján adódik az önkonzisztens monotonitás megsértése. Az általánosított sorösszeg azonban az 5.3. példában nem sérti meg az önkonzisztens monotonitást. □

5.6. Lemma. *A pontszám módszer teljesíti a WSCM tulajdonságot.*

Bizonyítás. Következik az 5.2. lemmából. □

5.5. Állítás. *Létezik olyan $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti a WSCM és IIM axiómákat, például az egyenlő, és a pontszám módszer.*

Bizonyítás. Az egyenlő módszer független az irreleváns mérkőzésektől, és teljesíti a gyenge önkonzisztens monotonitást is, mert utóbbi sohasem zárja ki két objektum értékelésének azonosságát.
A pontszám módszerhez lásd a 3.4. (IIM) és az 5.6. ($WSCM$) lemmát. □

Tehát a gyenge önkonzisztencia és az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség kapcsolatára vonatkozó 4.6. állítás kellemetlen eredménye nem javítható előbbi erősítésével, *WSCM* bevezetésével sem, mert az 5.5. állítás szerint az egyenlő módszer is kielégíti a *WSCM* és az *IIM* tulajdonságokat. Ez az eljárás nem fogadható el gyakorlati célokra, mert teljesen független az A eredménymátrixtól, tehát az *SCM* tulajdonság ezen gyengítése túlságosan erősnek bizonyult.

5.3. Kvázi önkonzisztens monotonitás

Altman és Tennenholtz (2008) kvázi tranzitivitás fogalmának analógiájára kapható a kvázi önkonzisztens monotonitás.

5.3. Definíció. ***Kvázi önkonzisztens monotonitás*** *(quasi self-consistent monotonicity, QSCM): Legyen $f: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás és $(N,A,M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, melyben az $X_i, X_j \in N$ objektumok O_i és O_j ellenfél multihalmazaira:*

- ‡ *$O_i^{\max} \subseteq O_i$ és $a'_{ik} = m'_{ik}$ minden $X_k \in O_i^{\max}$-ra, ha X_k pontosan m'_{ik}-szor szerepel $O_i^{\max}$-ban;*
- ‡ *$O_j^{\min} \subseteq O_j$ és $a'_{jk} = -m'_{jk}$ minden $X_k \in O_j^{\min}$-re, ha X_k pontosan m'_{jk}-szor szerepel $O_j^{\min}$-ben;*
- ‡ *létezik $g: (O_i \setminus O_i^{\max}) \leftrightarrow \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$, $p = 1,2,\dots,|O_i \setminus O_i^{\max}|$ és $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$, valamint $a_{ik} = a'_{ik} + \sum_{p=1}^{|O_i \setminus O_i^{\max}|} a_{ik}^p$ és $a_{jg(k)} = a'_{jg(k)} + \sum_{p=1}^{|O_j \setminus O_j^{\min}|} a_{jg(k)}^p$ minden $(X_k, g(X_k)) \in (O_i \setminus O_i^{\max}) \times \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ objektumpár esetén.*

Az f pontozási eljárás kvázi önkonzisztens monoton, ha $f_i(N,A,M) \geq f_j(N,A,M)$, sőt, $f_i(N,A,M) > f_j(N,A,M)$, amennyiben az $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$ vagy az $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$ egyenlőtlenségek valamelyike minden $p = 1,2,\dots,|O_i \setminus O_i^{\max}|$-ra szigorú formában teljesül, vagy $O_i^{\max} \neq \emptyset$, vagy $O_j^{\min} \neq \emptyset$.

5.5. Következmény. *Ha egy $f: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti az SCM tulajdonságot, akkor a QSCM-et is teljesíti.*
Ha egy $f: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti a QSCM tulajdonságot, akkor a WSCM-et is teljesíti.
Ha egy $f: \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti a QSCM tulajdonságot, akkor a QSC-t (következésképp a WSC-t) is teljesíti.

5.7. Lemma. *Az általánosított sorösszeg eljárás minden $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ paraméterérték mellett teljesíti a QSCM tulajdonságot.*

5.8. Lemma. *A pontszám módszer nem teljesíti a QSCM tulajdonságot.*

5.5. Megjegyzés. *Legyen $n \leq 3$. Ekkor a pontszám módszer teljesíti a QSCM tulajdonságot.*

Bizonyítás. $n = 2$ esetén az 5.2. lemma alapján, ha az $X_i, X_j \in N$ objektumokra fennáll a (kvázi) önkonzisztens monotonitásban megkövetelt feltétel, akkor $s_i(N,A,M) \geq s_j(N,A,M)$. Amennyiben $n = 3$, tegyük fel, hogy fennáll a (kvázi) önkonzisztens monotonitásban megkövetelt feltétel, azaz $s_i(N,A,M) \geq s_j(N,A,M)$. Ha $d_i \neq d_j$, akkor az 5.2. lemma szerint $s_i(N,A,M) > s_j(N,A,M)$. Ha $d_i = d_j = 1$, akkor $O_i = O_j$ és $g(X_k) = X_k$, így $s_k(N,A,M) = s_g(k)(N,A,M)$, teljesül a megkövetelt implikáció. Végül $d_i = d_j = 2$ esetén $g(X_j) = X_i$ és $g(X_k) = X_k$ mellett a $QSCM$ axióma $s_k(N,A,M) = s_{g(k)}(N,A,M)$ miatt csak a $s_i(N,A,M) \geq s_j(N,A,M)$ egyenlőtlenséget követeli meg, ami teljesül. Ha pedig $g(X_j) = X_k$ és $g(X_k) = X_i$, és $s_\ell(N,A,M) > s_{g(\ell)}(N,A,M)$ minden $x_\ell \in O_i = \{X_j, X_k\}$-ra, akkor $s_j(N,A,M) > s_k(N,A,M) > s_i(N,A,M)$, ami lehetetlen. □

5.6. Következmény. *A 4.3. példa minimális méretű.*

5.6. Megjegyzés. *Legyen $n \leq 3$. Ekkor a pontszám módszer teljesíti a QSC tulajdonságot.*

5.6. Állítás. *Az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere nem teljesíti a QSCM tulajdonságot.*

Bizonyítás. Itt is érvényes az 5.4. példa, mely igazolja az állítást a legkisebb négyzetek módszerére. Az általánosított sorösszegre az 5.5. lemma bizonyításában használt érvelés alkalmazható. A legkisebb négyzetek módszeréhez az 5.3. példa is elegendő lenne, az általánosított sorösszeghez azonban nem. Tehát előbbi $n \geq 3$, utóbbi pedig $n \geq 4$ esetén sérti meg biztosan a $QSCM$ axiómát. □

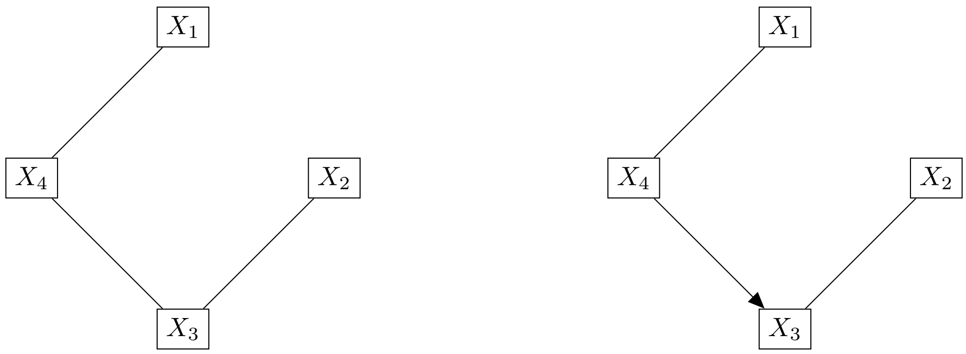
A kvázi önkonzisztens monotonitással szintén kimondható egy, az 5.3. állításhoz hasonló lehetetlenségi eredmény, ehhez azonban – a kvázi önkonzisztenciánál látottakhoz (4.3. tétel) – hasonlóan szükség van egy további tulajdonságra.

5.1. Tétel. *Nem létezik olyan $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti a SYM, $QSCM$, és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A minimális, $n = 4$ esetben az 5.5. példán keresztül bizonyítjuk a három tulajdonság között érvényesülő ellentmondást (ennél kisebb méretre IIM nem értelmezhető).

8. ábra. Az 5.5. példa rangsorolási problémái

(a) Az (N, A, M) rangsorolási probléma (b) Az (N, A', M) rangsorolási probléma



5.5. Példa. *Tekintsük az $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ objektumhalmazzal adott $(N, A, M), (N, A', M') \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan rangsorolási problémákat (8. ábra), ahol:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \textit{és } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Itt $O_1 = \{X_4\}$, $O_2 = \{X_3\}$, $O_3 = \{X_2, X_4\}$ és $O_4 = \{X_1, X_3\}$. A pontozási eljárás szimmetrikus, ezért $f_1(N, A, M) = f_2(N, A, M)$. IIM következtében $f_1(N, A', M) = f_2(N, A', M)$. Ekkor az $O_2^{\max} = \{X_3\} \neq \emptyset$ és $O_3^{\min} = \{X_4\}$, illetve $g_{34}(X_1) = X_2$ választással az X_4 és X_3 objektumok között fennáll a (kvázi) önkonzisztens monotonitásban megkövetelt feltétel, ezért $f_4(N, A', M) > f_3(N, A', M)$. A $g_{12}(X_1) = X_2$ definícióval az X_1 és X_2 objektumok között is teljesül $WSCM$ követelménye, vagyis $f_1(N, A', M) > f_2(N, A', M)$, ami ellentmondás. □

5.7. Megjegyzés. *Az 5.1. tételben szereplő három tulajdonság logikai függetlenségéhez azt kellene megmutatni, hogy közülük bármely kettőt kiválasztva létezik olyan eljárás, amely ezeket kielégíti, így a harmadikat biztosan megsérti:*

$\boxed{1}$ *SYM és $QSCM$: általánosított sorösszeg minden $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ paraméter mellett (3.3. lemma és 5.7. lemma);*

$\boxed{2}$ *SYM és IIM: pontszám módszer (3.3. lemma és 3.4. lemma);*

$\boxed{3}$ *$QSCM$ és IIM: ismeretlen, de az a sejtésünk, hogy található ilyen eljárás.*

A szimmetria meglehetősen természetes követelménynek tűnik, elvárása ellen nehezen tudnánk érvelni, ezért az 5.1. lehetetlenségi tétel már kevésbé emlékeztet Altman és Tennenholtz (2008) eredményeire, hiába létezik a $QSCM$ és IIM tulajdonságokat kielégítő pontozási eljárás. Ugyan az ott definiált erős tranzitivitás (mely többé-kevésbé az önkonzisztens monotonitásnak feleltethető meg) és az $RIIA$ axiómák ellentmondanak egymásnak, de a $QSCM$-mel lényegében analóg kvázi erős tranzitivitás kielégíthető a rangsorolási függetlenség az irreleváns objektumoktól axióma mellett.

A 4.3. tétel analógiájára egy, az erős önkonzisztens monotonitást tartalmazó megállapítás is tehető. Mivel az 5.5. következmény alapján ez QSC-nél erősebb, lehetőség nyílik RSB gyengítésére.

5.2. Tétel. *Nem létezik olyan $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az SB, $QSCM$, és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A minimális, $n = 4$ esetben a 4.5. példán keresztül bizonyítjuk a három tulajdonság között érvényesülő ellentmondást (ennél kisebb méretre IIM nem értelmezhető). A bizonyítás a 4.3. tételét követi, figyelve a kvázi önkonzisztencia és kvázi önkonzisztens monotonitás, illetve a metsző kiegyensúlyozottság és az erős metsző kiegyensúlyozottság közötti eltérésekre.

Itt $O_1 = \{X_4\}$, $O_2 = \{X_3\}$, $O_3 = \{X_2, X_4\}$ és $O_4 = \{X_1, X_3\}$. Ha $f_1(N, A, M) > f_2(N, A, M)$, akkor IIM következtében $f_1(N, A', M) > f_2(N, A', M)$, ezért $f_4(N, A', M) > f_3(N, A', M)$. Ellenkező esetben ugyanis létezik $g_{21} : O_2 \leftrightarrow O_1$, $g_{21}(X_3) = X_4$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, ami teljesíti a (kvázi) önkonzisztens monotonitásban megkövetelt feltételeket, így $f_1(N, A', M) \leq f_2(N, A', M)$, ami ellentmondás. Tehát $f_1(N, A', M) > f_2(N, A', M)$ és $f_4(N, A', M) > f_3(N, A', M)$, így nem teljesül a metsző kiegyensúlyozottságban előírt $\max\{f_2(N, A', M); f_3(N, A', M)\} \geq \min\{f_1(N, A', M); f_4(N, A', M)\}$ egyenlőtlenség. Hasonló módon kapható $f_2(N, A, M) > f_1(N, A, M)$ lehetetlensége, mert ebből $f_3(N, A, M) >$ $> f_4(N, A, M)$ adódik.

Legyen $f_1(N, A, M) = f_2(N, A, M)$. Ha $f_4(N, A, M) > f_3(N, A, M)$, akkor a $g_{12} : O_1 \leftrightarrow O_2$, $g_{12}(X_4) =$ $= X_3$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel a kvázi önkonzisztens monotonitásból $f_1(N, A, M) >$ $> f_2(N, A, M)$, ami ellentmondás. Ha pedig $f_3(N, A, M) > f_4(N, A, M)$, akkor a $g_{21} : O_2 \leftrightarrow O_1$, $g_{21}(X_3) = X_4$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel $QSCM$ értelmében $f_2(N, A, M) > f_1(N, A, M)$, ami szintén ellentmondás.

Vagyis csak $f_1(N, A, M) = f_2(N, A, M)$ és $f_3(N, A, M) = f_4(N, A, M)$ lehetséges, így az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség alapján $f_1(N, A', M) = f_2(N, A', M)$. Ekkor viszont az (N, A', M) rangsorolási problémában az $O_4^{\max} = x_3 \neq emptyset$ és $O_3^{\min} = X_4$, illetve $g_{34}(X_1) = X_2$ választással az X_4 és X_3 objektumok között fennáll a kvázi önkonzisztens monotonitásban megkövetelt feltétel, ezért $f_4(N, A', M) > f_3(N, A', M)$. Ezzel végleg ellentmondásra jutottunk, a három axióma egyszerre nem elégíthető ki. □

5.8. Megjegyzés. *Az 5.2. tételben szereplő három tulajdonság logikai függetlenségéhez azt kellene megmutatni, hogy közülük bármely kettőt kiválasztva létezik olyan eljárás, amely ezeket kielégíti, így a harmadikat biztosan megsérti:*

$\boxed{1}$ *SB és QSCM: általánosított sorösszeg minden $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ paraméter mellett (3.3. lemma és 5.7. lemma);*

$\boxed{2}$ *SB és IIM: pontszám módszer (3.3. lemma és 3.4. lemma);*

$\boxed{3}$ *QSCM és IIM: ismeretlen, de az a sejtésünk, hogy található ilyen eljárás.*

Itt is érvényes a 4.4. megjegyzésben tett megállapítás, miszerint a QSCM és IIM tulajdonságokat kielégítő pontozási eljárás csak meglehetősen furcsa, az intuícióval ellenkező lehet.

Mivel Chebotarev és Shamis (1999) csak említés szintjén foglalkozik az SB axiómával, az 5.2. tétel tekinthető ezen axióma első gyakorlati alkalmazásának.

5.4. Kiegyensúlyozott önkonzisztens monotonitás

Az objektumok fokszáma az 5.3. és az 5.4. példában sem azonos, az (N, A, M) rangsorolási probléma nem kiegyensúlyozott. Ugyanakkor az 5.1. megjegyzés szerint ez az önkonzisztenciánál egyértelmű elvárás volt, vagyis célszerű lehet SCM implikációjának korlátozása az azonos fokszámú objektumokra.

5.4. Definíció. ***Kiegyensúlyozott önkonzisztens monotonitás*** *(balanced self-consistent monotonicity, BSCM): Legyen $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás és $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, melyben az $X_i, X_j \in N$ objektumok O_i és O_j ellenfél multihalmazaira:*

‡ $d_i = |O_i| = |O_j| = d_j$;

‡ $O_i^{\max} \subseteq O_i$ *és* $a'_{ik} = m'_{ik}$ *minden* $X_k \in O_i^{\max}$*-ra, ha* X_k *pontosan* m'_{ik}*-szor szerepel* $O_i^{\max}$*-ban;*

‡ $O_j^{\min} \subseteq O_j$ *és* $a'_{jk} = -m'_{jk}$ *minden* $X_k \in O_j^{\min}$*-re, ha* X_k *pontosan* m'_{jk}*-szor szerepel* $O_j^{\min}$*-ben;*

‡ *létezik* $g : (O_i \setminus O_i^{\max}) \leftrightarrow \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ *kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy* $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$, $p = 1,2,\dots,|O_i \setminus O_i^{\max}|$ *és* $f_k(N, A, M) \geq f_{g(k)}(N, A, M)$*, valamint* $a_{ik} = a'_{ik} + \sum_{p=1}^{|O_i \setminus O_i^{\max}|} a_{ik}^p$

és $a_{jg(k)} = a'_{jg(k)} + \sum_{p=1}^{|O_j \setminus O_j^{\min}|} a^p_{jg(k)}$ *minden* $(X_k, g(X_k)) \in (O_i \setminus O_i^{\max}) \times \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ *objektumpár esetén.*

Az f *pontozási eljárás kiegyensúlyozott önkonzisztens monoton, ha* $f_i(N, A, M) \geq f_j(N, A, M)$*, sőt,* $f_i(N, A, M) > f_j(N, A, M)$*, ha az* $a^p_{ik} \geq a^p_{jg(k)}$ *vagy az* $f_k(N, A, M) \geq f_{g(k)}(N, A, M)$ *egyenlőtlenségek valamelyike szigorú formában teljesül, vagy* $O_i^{\max} \neq \emptyset$*, vagy* $O_j^{\min} \neq \emptyset$*.*

5.7. Következmény. *Ha egy* $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ *pontozási eljárás kielégíti az* SCM *tulajdonságot, akkor a* $BSCM$*-et is teljesíti.*
Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ *pontozási eljárás kielégíti a* $BSCM$ *tulajdonságot, akkor az* SC*-t (következésképp a* WSC*-t és a* QSC*-t) is teljesíti.*

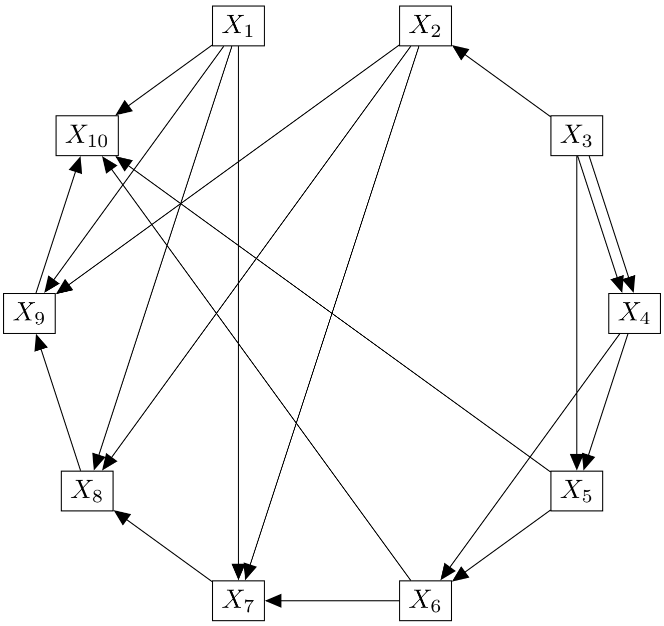
5.9. Lemma. *Az általánosított sorösszeg eljárás minden* $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ *paraméterérték mellett teljesíti a* $BSCM$ *tulajdonságot.*

5.10. Lemma. *A pontszám módszer nem teljesíti a* $BSCM$ *tulajdonságot.*

5.3. Tétel. *A legkisebb négyzetek módszere nem teljesíti a* $BSCM$ *tulajdonságot.*

Bizonyítás. Ellenpéldát adunk $n = 10$-re.

9. ábra. Az 5.6. példa rangsorolási problémája



5.6. Példa. *Tekintsük az* $N = \{X_1, \dots, X_{10}\}$ *objektumhalmazzal adott, a 8. ábrán látható* $(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ *kiegyensúlyozott rangsorolási problémát.*

Legyen $O_1^{\max} = \{X_{10}\} \neq \emptyset$ és $O_2^{\min} = \{X_3\} \neq \emptyset$, így $O_1 \setminus O_1^{\max} = O_2 \setminus O_2^{\min} = \{X_7, X_8, X_9\}$, valamint $g(X_7) = X_7$, $g(X_8) = X_8$ és $g(X_9) = X_9$ egy megfelelő kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Mivel $1 = a_{17} \geq a_{27} = 1$, $1 = a_{18} \geq a_{28} = 1$ és $1 = a_{19} \geq a_{29} = 1$, illetve $d_1 = |O_1| = |O_2| = d_2 = 4$, az $X_1, X_2 \in N$ objektumokra fennállnak a kiegyensúlyozott önkonzisztens monotonitás feltételei, tehát $X_1 \succ X_2$-nek kell teljesülnie. Azonban

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0{,}209 & 0{,}382 & 1{,}584 & 0{,}831 & 0{,}293 & -0{,}136 & -0{,}559 & -0{,}693 & -0{,}803 & -1{,}109 \end{bmatrix}^\top,$$

amiből $q_1(N, A, M) < q_2(N, A, M)$, ez pedig ellentmond $BSCM$-nek. □

5.11. Lemma. *Az általánosított sorösszeg nem teljesíti a* $BSCM$ *tulajdonságot.*

Bizonyítás. Az 5.5. lemma bizonyításához hasonló érveléssel kapható. □

5.7. Állítás. *Nem létezik olyan $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti a $BSCM$ és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A 4.1. tételből és az 5.7. következményből adódik. □

5.12. Lemma. *Az 5.7. állításban szereplő két tulajdonság logikailag független.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy közülük bármelyiket kiválasztva létezik olyan eljárás, amely ezt kielégíti, tehát a másikat biztosan megsérti:

$\boxed{1}$ $BSCM$: általánosított sorösszeg minden $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ paraméter mellett (5.9. lemma);

$\boxed{2}$ IIM: pontszám módszer (3.4. lemma).

□

Az 5.7. állítás ismét jobban emlékeztet az Altman és Tennenholtz (2008) tanulmányban kapott ellentmondásra: a gyenge tranzitivitás leginkább a kiegyensúlyozott önkonzisztens monotonitásnak feleltethető meg, míg $RIIA$ és IIM egyaránt a pontozási eljárás lokalitását követeli meg.

5.5. Az értelmezési tartomány szűkítése

Az önkonzisztens monotonitás gyengítésére egy további irányt kínál az értelmezési tartomány módosítása. Itt csak az SCM axiómával kapcsolatos lehetetlenségi tételekkel foglalkozunk.

Elsőként vizsgáljuk meg a kiegyensúlyozott rangsorolási problémák részhalmazát.

5.8. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ egy kiegyensúlyozott rangsorolási probléma. Nem létezik olyan $f : \mathcal{R}^B \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az SCM és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A 4.2. állításból és az 5.1. következményből adódik. A tulajdonságok függetlensége az 5.3. lemmából kapható. □

Kiegyensúlyozott rangsorolási problémák esetén bármely két objektum fokszáma azonos, ebből adódik az alábbi eredmény.

5.9. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ egy kiegyensúlyozott rangsorolási probléma. Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti a $BSCM$ tulajdonságot, akkor SCM-et is teljesíti.*

Így az 5.7. következmény értelmében a két axióma ezen az osztályon ekvivalens.

5.8. Következmény. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ egy kiegyensúlyozott rangsorolási probléma. Egy $f :$ $: \mathcal{R}^B \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás akkor és csak akkor elégíti ki az SCM tulajdonságot, ha $BSCM$-et is teljesíti.*

5.10. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ egy kiegyensúlyozott rangsorolási probléma. Az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere sem teljesíti a SCM tulajdonságot.*

Bizonyítás. Az 5.5. példában szereplő rangsorolási probléma kiegyensúlyozott, ez igazolja a megállapítást a legkisebb négyzetek módszerére. Az általánosított sorösszegre az 5.5. lemma bizonyításában használt érvelés alkalmazható. □

5.9. Megjegyzés. *Az 5.10. állítás negatív eredménye nem mondható váratlannak, mégis súlyos következményekkel jár. A legkisebb négyzetek módszerének gráf reprezentációja alapján (Csató, 2013b) ugyanis azt gondoltuk, kiegyensúlyozott rangsorolási problémákra ez egy megfelelő pontozási eljárás. Az 5.5. példa azt mutatja, hogy ez a vélekedés – legalábbis akkor, ha az objektumok száma elég nagy, $n \geq 10$ – az önkonzisztens monotonitás megsértése miatt erősen vitatható.*

Ugyanez a helyzet súlyozatlan rangsorolási problémák esetén.

5.11. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ egy súlyozatlan rangsorolási probléma. Nem létezik olyan $f :$ $: \mathcal{R}^U \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az SCM és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A 4.3. állításból és az 5.1. következményből adódik. A tulajdonságok függetlensége az 5.3. lemmából kapható. □

5.12. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ egy súlyozatlan rangsorolási probléma. Az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere sem teljesíti a SCM tulajdonságot.*

Bizonyítás. Az 5.4. példában szereplő rangsorolási probléma súlyozatlan, ez igazolja a megállapítást a legkisebb négyzetek módszerére. Az általánosított sorösszegre az 5.5. lemma bizonyításában használt érvelés alkalmazható. □

További lehetőségként kínálkozik az objektumok számának korlátozása. $n \geq 3$ esetén az IIM axióma nem értelmezhető, az 5.4. ellenpélda minimális méretű, ezért az $\mathcal{R}^U$ részhalmazra szűkítés nem jelent megoldást. A kiegyensúlyozott problémákra vonatkozó 5.5. példa viszonylag sok objektumot tartalmaz, de ebben a konstrukcióban nem tudtuk csökkenteni azok számát.

1. Sejtés. *Az 5.5. példa az objektumok számára nézve minimális: $n \leq 9$ esetén nem találhatunk olyan $(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ kiegyensúlyozott rangsorolási problémát, melyre a legkisebb négyzetek módszere megsérti az önkonzisztens monotonitást, így a kiegyensúlyozott önkonzisztens monotonitást is.*

Ellenben round-robin rangsorolási problémákra már mindkét tulajdonság kielégíthetővé válik.

5.13. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma. Létezik olyan $f : \mathcal{R}^R \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az SCM és IIM axiómákat, például a pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere.*

Bizonyítás. A 3.8. lemma értelmében ezek az eljárások minden $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ round-robin rangsorolási probléma esetén azonos sorrendet adnak, SCM és IIM is csak az objektumok relatív értékelését tekinti. Mindegyikük független az irreleváns mérkőzésektől (3.7. lemma), és önkonzisztens monoton (5.2. állítás). □

Számos további ötlet merülhet fel az értelmezési tartomány szűkítésére a $WSCM$, $QSCM$, vagy $BSCM$ axiómák vonatkozásában, itt azonban az 5.13. állítás pozitív eredményével lezárjuk ezt az irányt. Eszerint round-robin problémák esetén a pontszám módszer alkalmazása ajánlható, a rangsorolási problémák ennél bővebb osztályain azonban, szinte biztosan, nem várható el az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség, ha szeretnénk megőrizni a kedvező monotonitási tulajdonságokat.

Az SCM axióma finomításának hosszas tárgyalása, a gyenge, kvázi, és kiegyensúlyozott önkonzisztens monotonitás bevezetése, illetve az értelmezési tartomány vizsgálata helyenként öncélúnak tűnhet, véleményünk szerint azonban indokolt a hasonló részletességű elemzés. Az 5.3. állítás szerint ugyanis az önkonzisztens monotonitás nem elégíthető ki az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség mellett, vagyis nem létezik olyan pontozási eljárás, mely egyszerre lenne jól viselkedő globális és lokális szempontból.

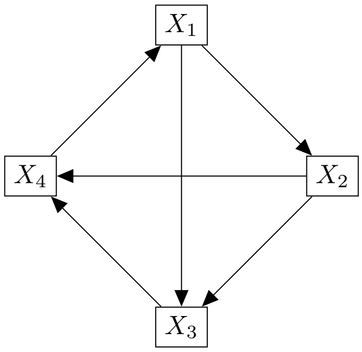
A gyenge önkonzisztens monotonitással kapott eredmények szerint a szigorú egyenlőtlenségek elhagyása SCM-ben nem indokolható, mert az egyenlő módszer IIM teljesülése esetén is lehetséges marad (5.5. állítás). A kvázi önkonzisztens monotonitás bevezetése, Altman és Tennenholtz (2008) nyomán, azt a célt szolgálta, hogy az irreleváns mérkőzésektől való függetlenségen kívül bizonyos mértékű globális konzisztencia is megkívánható legyen. Az 5.1. és az 5.2. tételek értelmében ez már két, meglehetősen gyenge tulajdonság (SYM vagy SB) előírásával kizárható. Végül, a kiegyensúlyozott önkonzisztens monotonitás legkisebb négyzetek általi megsértése miatt annak alkalmazása – a módszer gráf interpretációja Csató (2013b) által sugalltak ellenére – a kiegyensúlyozott rangsorolási problémák halmazán is megkérdőjelezhető.

6. Az önkonzisztencia és az önkonzisztens monotonitás erősítése

Az 5.1. következmény alapján SCM-ből következik az önkonzisztencia teljesülése. Ennek nyomán felmerül a kérdés, milyen további feltétel biztosíthatja az ekvivalenciához szükséges fordított irányú tartalmazást. Első ötletünk – az 5.1. megjegyzés figyelembevételével – a rangsorolási probléma kiegyensúlyozottsága volt, ezt azonban cáfolja a 4.1. és az 5.7. állítás eredménye: előbbi szerint a legkisebb négyzetek módszere kielégíti az SC, utóbbi szerint viszont megsérti az SCM axiómát e részhalmazon. Ugyanez igaz a súlyozatlan rangsorolási problémákra (lásd a 4.1. és az 5.10. állítást).

Ezek után csak a round-robin rangsorolási problémák $\mathcal{R}^R$ osztálya maradt. Ehhez lássunk egy szemléletes példát.

10. ábra. A 6.1. példa rangsorolási problémája



6.1. Példa. *(Slutzki és Volij, 2005; Slikker et al., 2012) Tekintsük az $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ objektumhalmazzal adott $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ round-robin rangsorolási problémát (10. ábra), ahol:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ azaz } L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az X_2 és X_3 objektumokra $O_2 = \{X_1, X_3, X_4\}$ és $O_3 = \{X_1, X_2, X_4\}$, tehát $d_2 = d_3 = 3$ miatt az önkonzisztencia értelmezhető. Legyen $O_2^{\max} = \{X_3\}$ és $O_3^{\min} = \{X_2\}$, ekkor $O_2 \setminus O_2^{\max} = O_3 \setminus O_3^{\min} = \{X_1, X_4\}$, valamint $g(X_1) = X_1$ és $g(X_4) = X_4$ egy megfelelő kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Mivel $-1 = a_{12} \geq a_{13} = -1$ és $1 = a_{24} \geq a_{34} = 1$, ezért fennáll az önkonzisztens monotonitás feltétele, vagyis SCM-ből $X_2 \succ X_3$ adódik.

Nehéz is lenne a fordított sorrend mellett érvelni, hiszen mindkét objektum vereséget szenvedett X_1-től, viszont legyőzte X_4-et, ilyen tekintetben tökéletesen azonos teljesítményt mutatva. Ellenben X_2 (maximális mértékben) jobbnak bizonyult X_3-nál, így logikusnak tűnik szigorúan előrébb rangsorolni. Ezt az önkonzisztencia még nem követeli meg: mivel X_2 és X_3 össze lett hasonlítva egymással, ha valóban teljesül $X_2 \succ X_3$, akkor nem található az SC-ben előírt feltételekkel rendelkező $O_2 \leftrightarrow O_3$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mert X_3 egyik ellenfele, X_2 szigorúan jobb X_2 egyik ellenfelénél, X_3-nál.

A 6.1. példa alapján érdemes némileg erősíteni az SC axiómán a fentihez hasonló esetek kezelésére.

6.1. Definíció. ***Erős önkonzisztencia*** *(reinforced self-consistency, RSC): Legyen $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás, valamint $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, melyben az $X_i, X_j \in N$ objektumok O_i és O_j ellenfél multihalmazaira:*

- ‡ *$O_i^j \subseteq O_i$, O_i^j-ben csak X_j szerepel, pontosan m_{ij}-szer, valamint $a_{ij} \geq 0$;*
- ‡ *$O_j^i \subseteq O_j$, O_j^i-ben csak X_i szerepel, pontosan $m_{ji} = m_{ij}$-szer, valamint $a_{ji} = -a_{ij} \leq 0$;*
- ‡ *létezik $g : \left(O_i \setminus O_i^j\right) \leftrightarrow \left(O_j \setminus O_j^i\right)$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$, $p = 1,2,\ldots,|O_i|$ és $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$, valamint $a_{ik} = \sum_{p=1}^{|O_i|} a_{ik}^p$ és $a_{jg(k)} = \sum_{p=1}^{|O_j|} a_{jg(k)}^p$ minden $(X_k, g(X_k)) \in \left(O_i \setminus O_i^j\right) \times \left(O_j \setminus O_j^i\right)$ objektumpár esetén.*

Az f pontozási eljárás erősen önkonzisztens, amennyiben $f_i(N,A,M) \geq f_j(N,A,M)$, sőt, $f_i(N,A,M) >$ $> f_j(N,A,M)$, ha $a_{ij} > 0$, vagy az $a^p_{ik} \geq a^p_{jg(k)}$ vagy az $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$ egyenlőtlenségek valamelyike szigorú formában teljesül.

6.1. Következmény. *Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti az RSC tulajdonságot, akkor az SC-t (következésképp a WSC-t és a QSC-t) is teljesíti.*

6.1. Lemma. *A pontszám módszer nem teljesíti az RSC tulajdonságot.*

6.1. Tétel. *Az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere teljesíti az RSC tulajdonságot.*

Bizonyítás. Legyen $g : \left(O_i \setminus O_i^j\right) \leftrightarrow \left(O_j \setminus O_j^i\right)$ a definícióban szereplő kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az $X_i, X_j \in N$ objektumok módosított ellenfél multihalmazai között, valamint $a_{ij} \geq 0$. Jelölje x_i az általánosított sorösszeg módszer alkalmazásával kapott értékeléseket az (N,A,M) rangsorolási problémában, valamint legyen $s_i = s_i(N,A,M)$ minden $X_i \in N$-re. Írjuk fel az $X_i, X_j \in N$ objektumokra vonatkozó egyenletek különbségét:

$$(1+\varepsilon m_{ij})(x_i - x_j) - \varepsilon \sum_{X_k \in O_i \setminus O_i^j} \left(x_k - x_{g(k)}\right) = (1+\varepsilon \mathfrak{m}n)\left[2a_{ij} + \sum_{X_k \in \setminus O_i^j} \left(a_{ik} - a_{jg(k)}\right)\right].$$

Most $a_{ik} \geq a_{jg(k)}$ és $a_{ij} \geq 0$ következtében $s_i - s_j \geq 0$, és $x_k - x_{g(k)} \geq 0$. Emiatt $x_i \geq x_j$, amennyiben pedig valahol szigorú egyenlőtlenség található, akkor $x_i > x_j$ is teljesül. Ezzel tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén bizonyítottuk az önkonzisztencia feltételében megkövetelt implikáció fennállását.

A legkisebb négyzetek módszerére – a megfelelő módosításokkal – ugyanez a gondolatmenet alkalmazható. □

6.1. Megjegyzés. *A 4.4. példában RSC nem jelent további megszorítást az önkonzisztens monotonitáshoz képest, ezért ismét lehetséges az $X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1$ rangsor. Tehát RSC-ből sem következik a metsző kiegyensúlyozottság.*

A 6.1. következmény alapján ismét kimondható egy, a 4.1. tételhez hasonló lehetetlenségi állítás.

6.1. Állítás. *Nem létezik olyan $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az RSC és IIM axiómákat.*

6.2. Lemma. *Az 5.3. állításban szereplő két tulajdonság logikailag független.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy közülük bármelyiket kiválasztva létezik olyan eljárás, amely ezt kielégíti, tehát a másikat biztosan megsérti:

$\boxed{1}$ *RSC*: általánosított sorösszeg és legkisebb négyzetek módszere (6.1. tétel);

$\boxed{2}$ *IIM*: pontszám módszer (3.4. lemma).

□

Az értelmezési tartomány szűkítése ezúttal sem jelent megoldást a 6.1. állítás által okozott problémára.

6.2. Állítás. *Legyen $(N,A,M) \in \mathcal{R}^B$ egy kiegyensúlyozott rangsorolási probléma. Nem létezik olyan $f : \mathcal{R}^B \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az RSC és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A 4.2. állításból és a 6.1. következményből adódik. A tulajdonságok függetlensége a 6.2. lemmából kapható. □

6.3. Állítás. *Legyen $(N,A,M) \in \mathcal{R}^U$ egy súlyozatlan rangsorolási probléma. Nem létezik olyan $f :$ $: \mathcal{R}^U \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az RSC és IIM axiómákat.*

Bizonyítás. A 4.3. állításból és a 6.1. következményből adódik. A tulajdonságok függetlensége a 6.2. lemmából kapható. □

Ellenben round-robin rangsorolási problémákra már mindkét tulajdonság kielégíthetővé válik.

6.4. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma. Létezik olyan $f : \mathcal{R}^R \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az RSC és IIM axiómákat, például a pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere.*

Bizonyítás. A 3.8. lemma értelmében ezek az eljárások minden $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ round-robin rangsorolási probléma esetén azonos sorrendet adnak, SCM és IIM is csak az objektumok relatív értékelését tekinti. Mindegyikük független az irreleváns mérkőzésektől (3.7. lemma), és erősen önkonzisztens (6.1. tétel). □

Az alábbi megállapítás szerint az önkonzisztencia és az önkonzisztens monotonitás ekvivalenciájának megteremtéséhez az értelmezési tartomány round-robin rangsorolási problémák $\mathcal{R}^R$ osztályára való szűkítése sem elegendő.

6.5. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma. Létezik olyan $f : \mathcal{R}^R \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely kielégíti az RSC tulajdonságot, de nem teljesíti az SCM-et.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az önkonzisztens monotonitás által megkövetelt implikációkat az erős önkonzisztencia nem minden esetben teljesíti. Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, és $O_1^{\max} = \{X_2, X_3\}$, $O_2^{\min} = \{X_1, X_4\}$, illetve $g(X_4) = X_5$, $g(X_5) = X_3$, továbbá $a_{14} \geq a_{25}$, $a_{15} \geq a_{23}$, $f_4(N, A, M) \geq$ $\geq f_5(N, A, M)$, és $f_5(N, A, M) \geq f_3(N, A, M)$. Ekkor az SCM tulajdonságban előírt implikáció miatt $X_1 \succ X_2$. Ha viszont $a_{25} > a_{15}$ és $f_4(N, A, M) > f_5(N, A, M) > f_3(N, A, M)$, akkor ez az implikáció nem állítható elő RSC alapján. Ugyanis $a_{25} > a_{15}$ miatt a $g : \left(O_1 \setminus O_1^2\right) \leftrightarrow \left(O_2 \setminus O_2^1\right)$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben $g(X_5) = X_3$ szükséges $f_5(N, A, M) \geq f_3(N, A, M)$ megteremtéséhez, így nem található olyan $g(X_3)$ objektum, amivel elérhető lenne $f_3(N, A, M) \geq f_{g(3)}(N, A, M)$. Vagyis az erős önkonzisztenciából, SCM-mel ellentétben, nem következik az $X_1 \succ X_2$ összefüggés. □

A 6.5. állítás szerint SCM sokkal erősebb, mint RSC, hiszen még a lehető legegyszerűbb, round-robin esetben sem következik belőle. Némileg váratlan, de a fordított irányú tartalmazás sem érvényes.

6.6. Állítás. *Legyen $(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ egy round-robin rangsorolási probléma. Létezik olyan $f : \mathcal{R}^R \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely kielégíti az RSC tulajdonságot, de nem teljesíti az SCM-et.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az erős önkonzisztencia által megkövetelt implikációkat az önkonzisztens monotonitás nem minden esetben teljesíti. Ha a 6.1. példában $a_{23} = 0{,}5$ lenne, akkor $X_2 \succ X_3$ intuitív levezetése továbbra is érvényes, de az önkonzisztens monotonitás nem elegendő ennek eléréséhez, mert már nem használható az $O_2^{\max} = \{X_3\}$ és $O_3^{\min} = \{X_2\}$ választás. $O_2^3 = \{X_3\}$ és $O_3^2 = \{X_2\}$ nyomán viszont a $g : \left(O_2 \setminus O_2^3\right) \leftrightarrow \left(O_3 \setminus O_3^2\right)$, $g(X_k) = X_k$ minden $X_k \in O_i$-ra kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés teljesíti az RSC által megkövetelt feltételeket, így megkapható az $X_2 \succ X_3$ összefüggés. Ez egészen addig teljesül, amíg $a_{23} > 0$. Amennyiben $a_{23} = 0$, akkor $X_2 \sim X_3$, míg $a_{23} < 0$ esetén $X_2 \prec X_3$ adódik, amint azt a 10. ábra sugallja. □

A 6.4. állítás szerint van értelme SCM erős önkonzisztenciával analóg kiterjesztésének, mert ez a 6.1. példához hasonló esetekben is előírja az intuitív módon kapott összefüggések teljesülését. Tárgyalásunkat ezen követelmény és néhány kapcsolódó gondolat kimondásával zárjuk.

6.2. Definíció. ***Erős önkonzisztens monotonitás*** *(reinforced self-consistent monotonicity, $RSCM$): Legyen $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ egy pontozási eljárás és $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma, melyben az $X_i, X_j \in N$ objektumok O_i és O_j ellenfél multihalmazaira:*

- ‡ *$O_i^{\max} \subseteq O_i$ és $a'_{ik} = m'_{ik}$ minden $X_k \in O_i^{\max}$-ra, ha X_k pontosan m'_{ik}-szor szerepel $O_i^{\max}$-ban;*
- ‡ *$O_j^{\min} \subseteq O_j$ és $a'_{jk} = -m'_{jk}$ minden $X_k \in O_j^{\min}$-re, ha X_k pontosan m'_{jk}-szor szerepel $O_j^{\min}$-ben;*
- ‡ *$O_i^j \subseteq O_i$, O_i^j-ben csak X_j szerepel, pontosan m_{ij}-szer, valamint $a_{ij} \geq 0$;*
- ‡ *$O_j^i \subseteq O_j$, O_j^i-ben csak X_i szerepel, pontosan $m_{ji} = m_{ij}$-szer, valamint $a_{ji} = -a_{ij} \leq 0$;*
- ‡ *létezik $g : (O_i \setminus O_i^{\max}) \leftrightarrow \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy $a_{ik}^p \geq a_{jg(k)}^p$, $p = 1{,}2, \dots, |O_i \setminus O_i^{\max}|$ és $f_k(N, A, M) \geq f_{g(k)}(N, A, M)$, valamint $a_{ik} = a'_{ik} + \sum_{p=1}^{|O_i \setminus O_i^{\max}|} a_{ik}^p$ és $a_{jg(k)} = a'_{jg(k)} + \sum_{p=1}^{|O_j \setminus O_j^{\min}|} a_{jg(k)}^p$ minden $(X_k, g(X_k)) \in (O_i \setminus O_i^{\max}) \times \left(O_j \setminus O_j^{\min}\right)$ objektumpár esetén.*

Az f pontozási eljárás erősen önkonzisztens monoton, amennyiben $f_i(N,A,M) \geq f_j(N,A,M)$, sőt, $f_i(N,A,M) > f_j(N,A,M)$, ha $a_{ij} > 0$, vagy az $a^p_{ik} \geq a^p_{jg(k)}$ vagy az $f_k(N,A,M) \geq f_{g(k)}(N,A,M)$ egyenlőtlenségek valamelyike szigorú formában teljesül, vagy $O_i^{\max} \neq \emptyset$, vagy $O_j^{\min} \neq \emptyset$.

6.2. Következmény. *Ha egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás kielégíti az $RSCM$ tulajdonságot, akkor SCM-et (következésképp SC-t, WSC-t, QSC-t, $WSCM$-et, $QSCM$-et, és $BSCM$-et) is teljesíti.*

6.3. Lemma. *A pontszám, az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere nem teljesíti az $RSCM$ tulajdonságot.*

6.7. Állítás. *Nem létezik olyan $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, amely egyszerre teljesíti az $RSCM$ és IIM axiómákat.*

6.2. Megjegyzés. *A 4.4. példában $RSCM$ nem jelent további megszorítást az önkonzisztens monotonitáshoz képest, ismét lehetséges az $X_2 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_1$ rangsor. Tehát $RSCM$-ből sem következik a metsző kiegyensúlyozottság.*

2. Sejtés. *Az általánosított sorösszeg eljárás minden $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$ paraméterérték mellett teljesíti az $RSCM$ tulajdonságot.*

Amennyiben a 2. sejtés igaznak bizonyul, a 6.7. állítás alapján kapható egy, a 4.1. tételhez hasonló eredmény. Enélkül viszont nem tudhatjuk, létezik-e olyan pontozási eljárás, amely kielégíti az erős önkonzisztens monotonitást.

7. Összefoglalás

1. táblázat. Pontozási eljárások tulajdonságai

Tulajdonság	Név	Egyenlő	Pontszám	Általánosított sorösszeg, $0 < \varepsilon \leq 1/[(n-2)\mathfrak{m}]$	Általánosított sorösszeg, $\varepsilon > 1/[(n-2)\mathfrak{m}]$	Legkisebb négyzetek
CNT	✘	✓	✓	✓	✓	✓
SYM	✘	✓	✓	✓	✓	✓
INV	✘	✓	✓	✓	✓	✓
IIM	✓	✓	✓	✘	✘	✘
MVA	✓	✓	✓	✓	✓	✓
SCC	✘	✘	✓	✓	✓	✓
HTV	✘	✘	✓	✓	✓	✓
SC	✘	✘	✘	✓	✓	✓
WSC	✘	✓	✓	✓	✓	✓
QSC	✘	✘	✘	✓	✓	✓
SB	✘	✓	✓	✓	✓	✓
RSB	✘	✘	✓	✓	✓	✓
SCM	✘	✘	✘	✓	✘	✘
$WSCM$	✘	✓	✓	✓	✘	✘
$QSCM$	✘	✘	✘	✓	✘	✘
$BSCM$	✘	✘	✘	✓	✘	✘
RSC	✘	✘	✘	✓	✓	✓
$RSCM$	✘	✘	✘	?	✘	✘

Az 1. táblázat a pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek pontozási eljárások teljesítményét mutatja a vizsgált axiómák tükrében. Az általánosított sorösszeg módszercsaládot két részre bontottuk az önkonzisztens monotonitás alapján. A név és egyenlő módszerek didaktikai célból kerültek az összevetésbe, ezek jól mutatják bizonyos tulajdonságok erejét. A pontszám és a legkisebb négyzetek módszere között az IIM és az SC, illetve az utóbbihoz kapcsolódó axiómák tekintetében látható különbség. Az önkonzisztens monotonitás és rokonainak megsértése arra utal, hogy a legkisebb négyzetek módszerének használata elsősorban nem korlátos preferenciák esetén ajánlott. Az általánosított sorösszeg, megfelelően nagy ε paraméter mellett, a vizsgált tulajdonságok alapján nem különböztethető meg a legkisebb négyzetek módszerétől: ezek még önkonzisztensek, de nem önkonzisztens monotonok.[8] Az $1/[(n-2)\mathfrak{m}]$ küszöbértéknél alacsonyabb paraméterek mellett előbbi csaknem tökéletesnek mondható, az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség megsértése a 4.1. tételből következik.

González-Díaz et al. (2013) azonban felhívja a figyelmet, hogy az általánosított sorösszeg a fenti tartomány felső határán elhelyezkedő ε esetén sem tükrözi megfelelő mértékben az ellenfelek erejét. Ezért nagy jelentőséggel bírhat az 5.3. megjegyzés, mely szerint nem univerzális korlát megengedésével ennél nagyobb ε értékekre is garantálható az SCM tulajdonság fennállása. Ugyanakkor e tekintetben nem ismerünk a Chebotarev (1994) cikknél újabb eredményeket. Ezenkívül, a cikkben megválaszolatlanul hagyott kérdéseken (például a kvázi önkonzisztencia kvázi önkonzisztens monotonitás kapcsolata az irreleváns mérkőzésektől való függetlenséggel) kívül ígéretesnek tűnik SC és SCM további elemzése, különös tekintettel a többi monotonitási axióma (lásd például González-Díaz et al. (2013)) tükrében.

A tárgyalt tulajdonságok hét csoportra oszthatók. A technikai jellegű feltételek bevezetése nem jelen cikk érdeme. A két függetlenségi axióma közül a makrocsapat önállóság saját definíció, ez szorosan kapcsolódik Chebotarev (1994, Property 8) makrocsapat függetlenség tulajdonságához, annak mintegy másik oldalát képezi. Az SCC és HTV axiómák, Chebotarev (1994) és González-Díaz et al. (2013) nyomán, a pontszám módszerrel kötik össze a pontozási eljárásokat. Az SC-t és SCM-et finomító metsző kiegyensúlyozottság fogalmát Chebotarev és Shamis (1999) vezette be, részletesebb tárgyalás nélkül, a

[8] Bár az 5.5. lemma bizonyításában tett megjegyzésünk mutatja, hogy a legkisebb négyzetek módszere már $n = 3$ esetén megsérti az önkonzisztens monotonitást, az általánosított sorösszeg viszont csak $n \geq 4$-re. A kettő közötti különbséget González-Díaz et al. (2013) ***hídjátékos függetlenség*** (bridge player independence) axiómája mutatja.

tanulmányban ennek, illetve RSB-nek nevezett általánosításának sikerült szerepet találni két szorosan kapcsolódó állításban.

Az önkonzisztencia és önkonzisztens monotonitás tulajdonságokat Chebotarev és Shamis (1997) definiálta, itt ezeket jártuk alaposan körbe, elsősorban a lehetséges gyengítésekre fókuszálva. Az RSC és $RSCM$ axiómák ugyanakkor azt mutatják, hogy mindkettőnek létezik viszonylag magától értetődő kiterjesztése. Ennek megfelelően MVA, RSB, valamint az önkonzisztenciához és az önkonzisztens monotonitáshoz kapcsolódó többi tulajdonság definiálása is saját eredménynek tekinthető; az elkülöníthetőség érdekében csak a legfontosabb saját állításokat illettük tétel elnevezéssel.

Legfontosabbnak a 4.1. tétel eredményét tartjuk, miszerint nem található olyan pontozási eljárás, mely egyszerre lenne jól viselkedő lokális és globális szempontból. Az ellentmondás összhangban van Altman és Tennenholtz (2008) irányított gráfokra megfogalmazott hasonló állításával, és alátámasztja González-Díaz et al. (2013) az irreleváns mérkőzésektől való függetlenség megkérdőjelezhetőségére vonatkozó megállapítását. A lehetetlenségi tételből lényegében nem sikerült pozitív eredményt kihozni, az önkonzisztencia túlzott gyengítése révén nem zárható ki az egyértelműen elvetendő egyenlő módszer. A hasonló ellentmondást megfogalmazó a 4.3., az 5.1 és az 5.2. tételek illusztrálják az egyes axiómák közötti átváltási lehetőségeket: a kvázi önkonzisztenciára korlátozás esetén IIM mellett szükség van az erős metsző kiegyensúlyozottságra is, ami az ennél erősebb kvázi önkonzisztens monotonitásnál a szimmetriára vagy a metsző kiegyensúlyozottságra cserélhető.

Az értelmezési tartomány szűkítése csak annyit tesz lehetővé, hogy round-robin esetben az axiomatikusan jól megalapozott pontszám módszert használatát javasolhassuk. Az 5.9. megjegyzés szerint az 5.10. állítás negatív eredménye azt jelenti, hogy – a gráf interpretáció által sugallt intuitív benyomásunkkal szemben (Csató, 2013b) – González-Díaz et al. (2013) legkisebb négyzetek módszere elleni érvelése a kiegyensúlyozott rangsorolási problémák $\mathcal{R}^B$ osztályán is érvényes marad. Végül a makrocsapat önállóság révén rámutattunk az irreleváns összehasonlítások egy olyan értelmezésére, mely már nem kerül összeütközésbe az SC és SCM axiómákkal.

A fentihez hasonló tulajdonságok bevezetése meglátásunk szerint három területen bizonyulhat hasznosnak. Egyrészt hozzájárulhat a módszerek mélyebb megértéséhez, másfelől új szempontokkal gazdagítja a pontozási eljárások axiomatikus tárgyalását (Chebotarev és Shamis, 1998, 1999; Slutzki és Volij, 2006; González-Díaz et al., 2013; Csató, 2012b), végül pedig támpontokkal szolgálhat a páros összehasonlítások megtervezésében. Pszichológiai vizsgálatokban, svájci rendszerű sportversenyek rendezésekor és számos más esetben a szervezőnek, irányító hatóságnak lehetősége nyílik az összehasonlításra kerülő objektumpárok megválasztására. Ekkor az itt tárgyalt axiómák feltételeinek megteremtése segítheti az előre megadott vagy később kiválasztandó pontozási módszerrel kapott értékelések értelmezését: például az önkonzisztencia igazi ereje akkor mutatkozik meg, ha minél több objektum fokszáma azonos, a rangsorolási probléma közel kiegyensúlyozott, míg bizonyos összehasonlítások irrelevanciája makrocsapatok előállításával biztosítható.

Az axiomatikus tárgyalás végső célja kétségtelenül a pontozási eljárások karakterizációja, ez azonban – legalábbis a vizsgált általános esetben – meglehetősen nehéz feladatnak tűnik. Ugyanakkor a makrocsapat önállóság (MVA), és az erős metsző kiegyensúlyozottsággal kiegészítve (RSB) erős önkonzisztencia (RSC) már elég szigorú feltételnek tűnik ahhoz, hogy nagymértékben szűkítse a szóba jöhető módszerek körét, mindkettő segítséget nyújthat az általánosított sorösszeg, vagy a legkisebb négyzetek módszerének karakterizálásában. Az axiomatikus megközelítés eredményei konkrét reprezentációs tételek hiányában sem elvetendők, mert hasznos támpontokkal szolgálhatnak a pontozási eljárások közötti választáshoz, illetve a módszertan gyakorlati alkalmazásához.

Hivatkozások

A. Altman és M. Tennenholtz. Ranking systems: the PageRank axioms. In *Proceedings of the 6th ACM conference on Electronic commerce*, 1–8. o., 2005.

A. Altman és M. Tennenholtz. Axiomatic foundations for ranking systems. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 31(1):473–495, 2008.

K. J. Arrow. *Social choice and invidual values*. Wiley, New York, 1951.

Olympic badminton is not incentive compatible. 2012.
`http://agtb.wordpress.com/2012/08/01/olympic-badminton-is-not-incentive--compatible-6/`.

J. C. Borda. Mémoire sur les élections au scrutin. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, 1781.

P. Borm, R. van den Brink, és M. Slikker. An iterative procedure for evaluating digraph competitions. *Annals of Operations Research*, 109(1-4):61–75, 2002.

D. Bouyssou. Ranking methods based on valued preference relations: a characterization of the net flow method. *European Journal of Operational Research*, 60(1):61–67, 1992.

D. Bouyssou. Monotonicity of 'ranking by choosing': a progress report. *Social Choice and Welfare*, 23 (2):249–273, 2004.

S. Bozóki, J. Fülöp, és L. Rónyai. On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1-2):318–333, 2010.

S. Bozóki, L. Csató, L. Rónyai, és J. Tapolcai. Robust peer review decision process. Kézirat, 2013.

R. A. Bradley és M. E. Terry. Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons. *Biometrika*, 39(3/4):324–345, 1952.

S. Brin és L. Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer networks and ISDN systems*, 30(1):107–117, 1998.

M. Brozos-Vázquez, M. A. Campo-Cabana, J. C. Díaz-Ramos, és J. González-Díaz. Ranking participants in tournaments by means of rating functions. *Journal of Mathematical Economics*, 44(11):1246–1256, 2008.

B. Can és T. Storcken. A re-characterization of the Kemeny distance. Technical Report RM/13/009, Maastricht University School of Business and Economics, Graduate School of Business and Economics, 2013.

P. Yu. Chebotarev. Generalization of the row sum method for incomplete paired comparisons. *Automation and Remote Control*, 50(3):1103–1113, 1989.

P. Yu. Chebotarev. Aggregation of preferences by the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):293–320, 1994.

P. Yu. Chebotarev és E. Shamis. Constructing an objective function for aggregating incomplete preferences. In A. Tangian és J. Gruber (szerk.): *Constructing Scalar-Valued Objective Functions*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 100–124. o. Springer Berlin Heidelberg, 1997.

P. Yu. Chebotarev és E. Shamis. Characterizations of scoring methods for preference aggregation. *Annals of Operations Research*, 80:299–332, 1998.

P. Yu. Chebotarev és E. Shamis. Preference fusion when the number of alternatives exceeds two: indirect scoring procedures. *Journal of the Franklin Institute*, 336(2):205–226, 1999.

G. R. Conner és C. P. Grant. An extension of Zermelo's model for ranking by paired comparisons. *European Journal of Applied Mathematics*, 11(3):225–247, 2000.

G. R. Conner és C. P. Grant. Neighborhood monotonicity, the extended Zermelo model, and symmetric knockout tournaments. *Discrete Mathematics*, 309(12):3998–4010, 2009.

A. H. Copeland. A reasonable social welfare function. Seminar on Applications of Mathematics to social sciences, University of Michigan, 1951.

G. Crawford és C. Williams. Analysis of subjective judgment matrices. Interim report R-2572-AF, The Rand Corporation, Office of the Secretary of Defense USA, 1980.

G. Crawford és C. Williams. A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of Mathematical Psychology*, 29(4):387–405, 1985.

L. Csató. A pairwise comparison approach to ranking in chess team championships. In P. Fülöp (szerk.): *Tavaszi Szél 2012 Konferenciakötet*, 514–519. o. Doktoranduszok Országos Szövetsége, Budapest, 2012a.

L. Csató. A paired comparisons ranking and Swiss-system chess team tournaments. Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület VI. éves konferencia, 2012b. `http://media.coauthors.net/konferencia/conferences/7/LLSM_Buch_ranking__.pdf`.

L. Csató. Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments. *Central European Journal of Operations Research*, 21(4):783–803, 2013a.

L. Csató. A graph interpretation of the least squares ranking method. 2013b. Benyújtva. `http://www.sztaki.mta.hu/~bozoki/csatolaszlo/Csato-AGraphInterpretation-2013-manuscript.pdf`.

T. Csendes és E. Antal. PageRank based network algorithms for weighted graphs with applications to wine tasting and scientometrics. In *Proceedings of the 8th International Conference on Applied Informatics*, 209–216. o., 2010.

H. A. David. Ranking from unbalanced paired-comparison data. *Biometrika*, 74(2):432–436, 1987.

J.G. De Graan. Extensions of the multiple criteria analysis method of T.L. Saaty. Presented at EURO IV Conference, Cambridge, UK, July 22-25, 1980.

N. Dingle, W. Knottenbelt, és D. Spanias. On the (Page) Ranking of professional tennis players. In M. Tribastone és S. Gilmore (szerk.): *Computer Performance Engineering*, Lecture Notes in Computer Science, 237–247. o. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

Ö. Éltető és P. Köves. Egy nemzetközi összehasonlításoknál fellépő indexszámítási problémáról. *Statisztikai Szemle*, 42(5):507–518, 1964.

J. González-Díaz. Recursive tie-breaks for chess tournaments. 2010. `http://eio.usc.es/pub/julio/Desempate/Performance_Recursiva_en.htm`.

J. González-Díaz, R. Hendrickx, és E. Lohmann. Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods. *Social Choice and Welfare*, DOI 10.1007/s00355-013-0726-2, 2013.

H. Gulliksen. A least squares solution for paired comparisons with incomplete data. *Psychometrika*, 21 (2):125–134, 1956.

B. Hansson és H. Sahlquist. A proof technique for social choice with variable electorate. *Journal of Economic Theory*, 13(2):193–200, 1976.

P.T. Harker. Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process. *Mathematical Modelling*, 9(11):837–848, 1987.

P. J.-J. Herings, G. van der Laan, és D. Talman. The positional power of nodes in digraphs. *Social Choice and Welfare*, 24(3):439–454, 2005.

P. Horst. A method for determining the absolute affective value of a series of stimulus situations. *Journal of Educational Psychology*, 23(6):418–440, 1932.

X. Jiang, L.-H. Lim, Y. Yao, és Y. Ye. Statistical ranking and combinatorial Hodge theory. *Mathematical Programming*, 127(1):203–244, 2011.

H. F. Kaiser és R. C. Serlin. Contributions to the method of paired comparisons. *Applied Psychological Measurement*, 2(3):423–432, 1978.

J. G. Kemeny. Mathematics without numbers. *Daedalus*, 88(4):577–591, 1959.

J. G. Kemeny és J. L. Snell. *Mathematical models in the social sciences.* Ginn, New York, 1962.

L. Á. Kóczy és A. Nichifor. The intellectual influence of economic journals: quality versus quantity. *Economic Theory*, 52(3):863–884, 2013.

L. Á. Kóczy és M. Strobel. The world cup of economics journals: A ranking by a tournament method. IEHAS Discussion Papers 1018, Institute of Economics, Hungarian Academy of Sciences, 2010.

M. Kwiesielewicz. The logarithmic least squares and the generalized pseudoinverse in estimating ratios. *European Journal of Operational Research*, 93(3):611–619, 1996.

P. S. H. Leeflang és B. M. S. van Praag. A procedure to estimate relative powers in binary contacts and an application to Dutch Football League results. *Statistica Neerlandica*, 25(1):63–84, 1971.

A. London és T. Csendes. HITS based network algorithm for evaluating the professional skills of wine tasters. Carpathian Applied Mathematics Workshop 2013. `http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/saci13107.pdf`.

B. Mohar. The Laplacian spectrum of graphs. In Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Oellermann, és A. J. Schwenk (szerk.): *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, 2. kötet, 871–898. o. Wiley, 1991.

J. H. Morrissey. New method for the assignment of psychometric scale values from incomplete paired comparisons. *Journal of the Optical Society of America*, 45(5):373–378, 1955.

F. Mosteller. Remarks on the method of paired comparisons: I. The least squares solution assuming equal standard deviations and equal correlations. *Psychometrika*, 16(1):3–9, 1951.

S. Nitzan és A. Rubinstein. A further characterization of Borda ranking method. *Public Choice*, 36(1): 153–158, 1981.

L. Page, S. Brin, R. Motwani, és T. Winograd. The PageRank citation ranking: Bringing order to the web. Technical report, Stanford InfoLab, 1999.

I. Palacios-Huerta és O. Volij. The measurement of intellectual influence. *Econometrica*, 72(3):963–977, 2004.

G. Pinski és F. Narin. Citation influence for journal aggregates of scientific publications: theory, with application to the literature of physics. *Information Processing & Management*, 12(5):297–312, 1976.

F. Radicchi. Who is the best player ever? A complex network analysis of the history of professional tennis. *PloS one*, 6(2):e17249, 2011.

A. Rubinstein. Ranking the participants in a tournament. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38 (1):108–111, 1980.

T.L. Saaty. *The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource allocation.* McGraw-Hill International Book Co., New York, 1980.

E. Shamis. Graph-theoretic interpretation of the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):321–333, 1994.

L. S. Shapley. A value for n-person games. In H. W. Kuhn és A. W. Tucker (szerk.): *Contributions to the Theory of Games*, 2. kötet, 307–317. o. Princeton University Press, Princeton, 1953.

M. Slikker, P. Borm, és R. van den Brink. Internal slackening scoring methods. *Theory and Decision*, 72 (4):445–462, 2012.

G. Slutzki és O. Volij. Ranking participants in generalized tournaments. *International Journal of Game Theory*, 33(2):255–270, 2005.

G. Slutzki és O. Volij. Scoring of web pages and tournaments – axiomatizations. *Social Choice and Welfare*, 26(1):75–92, 2006.

B. Szulc. Indeksy dla porownan wieloregionalnych. *Przeglad Statysticzny*, 3:239–254, 1964.

O. Taussky. A recurring theorem on determinants. *The American Mathematical Monthly*, 56(10):672–676, 1949.

J. Temesi, L. Csató, és S. Bozóki. Mai és régi idők tenisze – A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok egy alkalmazása. In T. Solymosi és J. Temesi (szerk.): *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára*, 213–245. o. Aula Kiadó, Budapest, 2012.

R. van den Brink és R. P. Gilles. Ranking by outdegree for directed graphs. *Discrete Mathematics*, 271 (1-3):261–270, 2003.

R. van den Brink és M. Pintér. On axiomatizations of the Shapley value for assignment games. Discussion Paper TI 2012-092/II, Tinbergen Institute, 2012.

H. P. Young. An axiomatization of Borda's rule. *Journal of Economic Theory*, 9(1):43–52, 1974.

E. Zermelo. Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 29(1):436–460, 1929.

Függelék

F.1. táblázat. Pontozási eljárások az axiómák tükrében I.

Tulajdonság	Korábbi megjelenés	Definíció	Pontszám
CNT	Chebotarev (1994)	3.1. definíció	3.1. lemma
SYM	González-Díaz et al. (2013)	3.2. definíció	González-Díaz et al. (2013), 3.3. lemma
INV	Chebotarev és Shamis (1998)*	3.3. definíció	González-Díaz et al. (2013), 3.2. lemma
IIM	González-Díaz et al. (2013)◊	3.4. definíció	González-Díaz et al. (2013), 3.4. lemma
MVA	—	3.6. definíció	3.1. tétel
SCC	González-Díaz et al. (2013)†	3.7. definíció	González-Díaz et al. (2013), 3.8. lemma
HTV	González-Díaz et al. (2013)‡	3.8. definíció	González-Díaz et al. (2013), 3.2. állítás
SC	Chebotarev és Shamis (1997)	4.1. definíció	4.1. lemma
WSC	—	4.2. definíció	4.5. lemma
QSC	—	4.3. definíció	4.7. lemma, $n \leq 3$-ra 5.6. megjegyzés
SB	Chebotarev és Shamis (1999)	4.5. definíció	4.8. lemma
RSB	—	4.6. definíció	4.2. tétel, 4.3. megjegyzés
SCM	Chebotarev és Shamis (1997)	5.1. definíció	5.1. lemma
$WSCM$	—	5.2. definíció	5.6. lemma
$QSCM$	—	5.3. definíció	5.8. lemma, $n \leq 3$-ra 5.5. megjegyzés
$BSCM$	—	5.4. definíció	5.10. lemma
RSC	—	6.1. definíció	6.1. lemma
$RSCM$	—	6.2. definíció	6.3. lemma

* Chebotarev (1994, Property 7) általánosított sorösszegre vonatkozó *transzponálhatóság* axiómája ezzel ekvivalens.

◊ Más néven vagy formában léteznek korábbi változatok is, például Rubinstein (1980, Axiom III), illetve Nitzan és Rubinstein (1981, Axiom 5).

‡ Chebotarev (1994, Property 3) általánosított sorösszegre vonatkozó *egyetértés* axiómája ennél erősebb (3.3. megjegyzés).

† Chebotarev (1994, Property 10) általánosított sorösszegre vonatkozó *dominancia* axiómája ennél erősebb (3.4. megjegyzés).

F.2. táblázat. Pontozási eljárások az axiómák tükrében II.

Tulajdonság	Korlátozás	Általánosított sorösszeg	Legkisebb négyzetek
CNT	—	Chebotarev (1994, Property2) 3.1. lemma	3.1. lemma
SYM	—	González-Díaz et al. (2013) 3.3. lemma	González-Díaz et al. (2013) 3.3. lemma
INV	—	González-Díaz et al. (2013, Proposition 4.6) 3.2. lemma	González-Díaz et al. (2013, Proposition 4.6) 3.2. lemma
IIM	—	González-Díaz et al. (2013, Example 6.1) 4.3. lemma	González-Díaz et al. (2013, Example 6.1) 4.3. lemma
IIM	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$	3.7. lemma	3.7. lemma
MVA	—	3.1. tétel	3.1. tétel
SCC	—	Chebotarev (1994, Property 3) 3.3. megjegyzés, 3.8. lemma	González-Díaz et al. (2013) 3.8. lemma
HTV	—	Chebotarev (1994, Property 10) 3.4. megjegyzés, 3.2. állítás	González-Díaz et al. (2013, Proposition 5.3) 3.2. állítás, 3.3. következmény
SC	—	Chebotarev és Shamis (1997, Theorem 8) 4.1. állítás	Chebotarev és Shamis (1998) 4.1. állítás
WSC	—	4.4. lemma	4.4. lemma
QSC	—	4.6. lemma	4.6. lemma
SB	—	4.8. lemma	4.8. lemma
RSB	—	4.2. tétel, 4.3. megjegyzés	4.2. tétel, 4.3. megjegyzés
SCM	—	Chebotarev és Shamis (1997, Theorem 8) 5.2. állítás, 5.5. lemma	Chebotarev és Shamis (1999, Proposition 10) 5.1. állítás, $n = 2$-re 5.2. megjegyzés
SCM	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$	5.10. állítás	5.10. állítás
SCM	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$	5.12. állítás	Chebotarev és Shamis (1999, Proposition 10) 5.12. állítás
$WSCM$	—	5.4. lemma, 5.5. lemma $n \leq 3$-ra 5.4. megjegyzés	5.4. állítás, $n \leq 3$-ra 5.4. megjegyzés
$QSCM$	—	5.7. lemma, 5.6. állítás	5.6. állítás
$BSCM$	—	5.9. lemma, 5.11. lemma	5.3. tétel
RSC	—	6.1. tétel	6.1. tétel
$RSCM$	—	2. sejtés, 6.3. lemma	6.3. lemma

F.3. táblázat. Pontozási eljárások és fogalmak

Fogalom	Korábbi megjelenés	Definíció
Arányosság	—	2.1. definíció
Név módszer	Slutzki és Volij (2005)	2.2. definíció
Egyenlő módszer	Slutzki és Volij (2005)	2.3. definíció
Pontszám módszer	Borda (1781); Copeland (1951)	2.4. definíció
Általánosított sorösszeg módszer	Chebotarev (1989, 1994)	2.5. definíció
Legkisebb négyzetek módszere	Horst (1932); Mosteller (1951); Gulliksen (1956)	2.6. definíció
Makrocsapat	Chebotarev (1994)	3.5. definíció
Domináns halmaz	—	4.4. definíció

F.4. táblázat. Axiómák kapcsolata

Implikáció	Bizonyítás	Megjegyzés
$INV \Rightarrow SYM$	3.1. következmény	González-Díaz et al. (2013)
$MVA \Rightarrow IIM$	3.1. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ round-robin
$HTV \Rightarrow SCC$	3.2. következmény	González-Díaz et al. (2013)
$SC \Rightarrow WSC$	4.1. következmény	—
$SC \Rightarrow QSC$	4.2. következmény	—
$QSC \Rightarrow WSC$	4.2. következmény	—
$RSB \Rightarrow SB$	4.3. következmény	—
$SCM \Rightarrow SC$	5.1. következmény	Chebotarev és Shamis (1997)
$SCM \Rightarrow WSC$	5.1. következmény	—
$SCM \Rightarrow QSC$	5.1. következmény	—
$SCM \Rightarrow WSCM$	5.3. következmény	—
$WSCM \Rightarrow WSC$	5.3. következmény	—
$SCM \Rightarrow QSCM$	5.5. következmény	—
$QSCM \Rightarrow WSCM$	5.5. következmény	—
$QSCM \Rightarrow WSC$	5.5. következmény	—
$QSCM \Rightarrow QSC$	5.5. következmény	—
$SCM \Rightarrow BSCM$	5.7. következmény	—
$BSCM \Rightarrow SC$	5.7. következmény	—
$BSCM \Rightarrow WSC$	5.7. következmény	—
$BSCM \Rightarrow QSC$	5.7. következmény	—
$BSCM \Rightarrow SCM$	5.9. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ kiegyensúlyozott
$BSCM \Leftrightarrow SCM$	5.8. következmény	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ kiegyensúlyozott
$RSC \Rightarrow SC$	6.1. következmény	—
$RSC \Rightarrow WSC$	6.1. következmény	—
$RSC \Rightarrow QSC$	6.1. következmény	—
$RSC \not\Rightarrow SCM$	6.5. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ round-robin
$SCM \not\Rightarrow RSC$	6.6. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ round-robin
$RSCM \Rightarrow SC$	6.2. következmény	—
$RSCM \Rightarrow WSC$	6.2. következmény	—
$RSCM \Rightarrow QSC$	6.2. következmény	—
$RSCM \Rightarrow SCM$	6.2. következmény	—
$RSCM \Rightarrow WSCM$	6.2. következmény	—
$RSCM \Rightarrow QSCM$	6.2. következmény	—
$RSCM \Rightarrow BSCM$	6.2. következmény	—

F.5. táblázat. Axiómák együttes kielégíthetősége

Metszet	Bizonyítás	Megjegyzés	Módszer
$SC \cap IIM = \emptyset$	4.1. tétel	függetlenség: 4.2. lemma	—
$SC \cap IIM = \emptyset$	4.2. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ kiegyensúlyozott	—
$SC \cap IIM = \emptyset$	4.3. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan	—
$SC \cap IIM \neq \emptyset$	4.4. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ súlyozatlan	pontszám, általánosított sorösszeg, legkisebb négyzetek
$SC \cap MVA \neq \emptyset$	4.5. állítás	—	általánosított sorösszeg, legkisebb négyzetek
$WSC \cap IIM \neq \emptyset$	4.6. állítás	—	egyenlő, pontszám
$QSC \cap IIM \cap RSB = \emptyset$	4.3. tétel	függetlenség: 4.4. megjegyzés	—
$IIM \cap RSB \neq \emptyset$	4.4. megjegyzés	—	pontszám
$QSC \cap RSB \neq \emptyset$	4.4. megjegyzés	—	általánosított sorösszeg, legkisebb négyzetek
$SCM \cap IIM = \emptyset$	5.3. állítás	függetlenség: 5.3. lemma	—
$WSCM \cap IIM \neq \emptyset$	5.5. állítás	—	egyenlő, pontszám
$BSCM \cap IIM = \emptyset$	5.7. állítás	függetlenség: 5.12. lemma	—
$QSCM \cap IIM \cap SYM = \emptyset$	5.1. tétel	függetlenség: 5.7. megjegyzés	—
$IIM \cap SYM \neq \emptyset$	5.7. megjegyzés	—	pontszám
$QSCM \cap IIM \cap SYM \neq \emptyset$	5.7. megjegyzés	—	általánosított sorösszeg, $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$
$QSCM \cap IIM \cap SB = \emptyset$	5.2. tétel	függetlenség: 5.8. megjegyzés	—
$IIM \cap SB \neq \emptyset$	5.8. megjegyzés	—	pontszám
$QSCM \cap SB \neq \emptyset$	5.8. megjegyzés	—	általánosított sorösszeg, $0 < \varepsilon \leq 1/\left[(n-2)\mathfrak{m}\right]$
$SCM \cap IIM = \emptyset$	5.8. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ kiegyensúlyozott	—
$SCM \cap IIM = \emptyset$	5.11. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan	—
$SCM \cap IIM \neq \emptyset$	5.13. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ round-robin	pontszám, általánosított sorösszeg, legkisebb négyzetek
$RSC \cap IIM = \emptyset$	6.1. állítás	függetlenség: 6.2. lemma	—
$RSC \cap IIM = \emptyset$	6.2. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^B$ kiegyensúlyozott	—
$RSC \cap IIM = \emptyset$	6.3. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan	—
$RSC \cap IIM \neq \emptyset$	6.4. állítás	$(N, A, M) \in \mathcal{R}^R$ round-robin	pontszám, általánosított sorösszeg, legkisebb négyzetek
$RSCM \cap IIM = \emptyset$	6.7. állítás	—	—