Gondolatok az egyensúlyról a játékelméletben

Forgó Ferenc

Kivonat

A tanulmány a Nash egyensúly és a korrelált egyensúly interpretációjával, a racionalitással való kapcsolatával és a Nash egyensúly axiomatikus megalapozásával foglalkozik. Problémákat vet fel, kételyeket fogalmaz meg és válaszokat keres. Foglalkozik többek között a lineáris duopólium Nash egyensúlyának iterált dominancia alapján történő meghatározásával, a visszafele indukció és a Nash egyensúly konzisztencia alapon való axiomatizálásának analógiájával. A korrelált egyensúly iterálásának a lehetőségét a gyáva nyúl játékon mutatja be, és a korrelált egyensúly Aumann-féle interpretációjának egy módosításával is foglalkozik. A problémák felvetése és a válaszok már egy bevezető játékelméleti kurzusban is hasznosíthatók.

1 Bevezetés

Az egyensúlyról mindenkinek megvan az informális, intuitív elképzelése. Leginkább a fizikai egyensúly jut az embereknek elsőre az eszébe. Ezt úgy lehetne definiálni, szintén informálisan, hogy ha egy testre ható erők eredője eredményeként a test nyugalomban van, akkor egyensúlyról beszélünk. A létrejöttét is jól lehet szemléltetni azzal a kísérlettel, amelyben egy félgömb alakú edénybe egy golyót teszünk, amely kilengő mozgás után az edény alján nyugalomba kerül. A közgazdaságtanban leginkább azt az állapotot tekintik egyensúlynak, amikor a kereslet megegyezik a kínálattal.

Nem ilyen egyértelmű a helyzet a játékelméletben. Még ha korlátozzuk magunkat a nem-kooperatív játékokra, akkor is többféle egyensúly létezik, hogy csak a két legfontosabbat, a Nash egyensúlyt (NE) és a korrelált egyensúlyt (CE) említsük. Az NE olyannyira elfogadott és elterjedt a nem-kooperatív játékként modellezett szituációk elemzésében, hogy gyakran olyan megfogalmazásokkal is találkozunk a legkülönbözőbb alkalmazásokban, hogy „keressük meg a megoldást", amelyen automatikusan a (vagy egy) NE megkeresését értik. Ez, ha az adott helyzetben adekvát megoldás is, indoklást mindenképpen igényel.

Az NE matematikai definíciójával nincs is semmi baj, az interpretációjával és a racionális, konzisztens döntéshozói magatartással való kapcsolatával annál több probléma van. Ezekről általában kevés szó esik, noha Nash (1951) maga a híres dolgozatában ennek több teret szentel, mint magának a Nobel-díjat érő fogalomalkotásnak és egzisztencia tétel bizonyításnak. Sajnos az oktatásban is kevesebb idő jut a koncepcionális dolgok tárgyalására, mint kellene. Ennek ellenére, az ebben a tanulmányban tárgyaltakat, az irodalmi hivatkozásokon túl, sokéves oktatási tapasztalat, az érdeklődő hallgatók kérdései és megjegyzései ugyanúgy inspirálták, mint a saját kételyeim és gondolataim.

Nem véletlen, hogy ezeket a régóta bennem élő gondolatokat most fogalmazom meg először és itt közlöm. Barátom, Zalai Ernő munkásságában is nagy helyet foglal el a közgazdasági egyensúly, amely szintén nem probléma mentes fogalom. Nem tudtam volna jobb fórumot találni, mint Ernő 70-ik születésnapjára szerkesztett kötetet.

2 Mi a baj a Nash egyensúllyal?

Először rajzoljuk fel a pályát, ahol mozogni fogunk: Nem-kooperatív, szimultán (one-time interaction) n-személyes játékok normál (stratégiai) formában adva. A játék tehát, amit vizsgálunk: $G = \{S_1, ..., S_n; f_1, ..., f_n\}$, ahol S_i az i-edik játékos nem üres stratégia halmaza, $S = S_1 \times ... \times S_n$ a stratégiaprofilok halmaza, $f_i : S \to \mathbb{R}$ az i-edik játékos kifizetőfüggvénye, $i = 1, ..., n$.

A legvonzóbb tulajdonsága az NE-nek az egyszerű definíció, a matematikai tömörség és a lehetőség, hogy a matematika gazdag eszköztárát könnyen lehet használni egzisztencia és unicitás tételek bizonyítására, valamint egyensúly kereső módszerek kifejlesztésére. Itt rögtön adódik egy választási lehetőség az NE fogalmának bevezetésére:

- Megadjuk a matematikai definíciót, majd interpretáljuk és diszkutáljuk a jelentését.
- Megfigyelünk különböző többszereplős döntési helyzeteket és ezekhez keresünk adekvát matematikai formát.
- Bizonyos tulajdonságok megkövetelésével axiomatikusan határozzuk meg az NE-t.

Lássuk tehát a közismert definíciót. Ehhez definiáljuk először az $S_{-i} = \times_{j \neq i} S_j, i = 1, ..., n$ csonka stratégiaprofilok halmazát és állapodjunk meg abban, hogy egy teljes $\mathbf{s}$ stratégiaprofilt az $\mathbf{s} = (s_i, \mathbf{s}_{-i})$, $s_i \in S_i, \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ formában is felírhatunk. Az $\mathbf{s}^* \in S$ stratégiaprofilt NE-nek nevezzük, ha

$$f_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

fennáll minden $s_i \in S_i$ és $i = 1, ..., n$-re.

A fent említett lehetőségek közül az első a leggyakoribb megközelítés, hiszen ez áll közelebb a játékelmélet „normatív" tudományok közé való besorolásához, és az interpretáció is természetesen adódik: Az NE olyan stratégiaprofil, amelyen egyik játékosnak sem érdeke egyedül változtatni, feltéve, hogy a többiek nem változtatnak. Egy csomó részletkérdés tárgyalásától és kisebb interpretációs problémáktól most eltekintünk.

Egy normatív döntéselméleti tudománynak (a játékelmélet ilyen) illik tisztázni a viszonyát a racionalitáshoz. Régi és természetes igény, mivel nem-kooperatív környezetben vagyunk, ahol a játékosok egyéni érdekeiket akarják érvényesíteni, hogy az egyéni racionalitást tegyük meg sarokkőnek. Az egyéni racionalitást informálisan úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a játékosok cselekedeteiket egyedül a saját érdekük figyelembe vételével választják meg, vagy kicsit formálisabban: ha minden egyéb tényezőt adottnak veszünk és a játékos hasznossága csak a saját cselekedetétől függ, akkor a saját hasznossági függvényét maximalizálja. Ehhez még hozzá szokták venni a racionalitás köztudását, amit elég most intuitíve értelmeznünk a szokásos módon.

Risse (2000) kitűnő írásában meggyőzően cáfolja a legszokásosabb érveket és okfejtéseket, amelyekkel az NE egyéni racionalitásból való levezetését tűzték ki célul. A játékelmélet olyan nagyságai vannak közöttük, mint Neumann és Morgenstern (1944), Aumann (1995), Harsányi (1977).

A konklúzió az, hogy ahhoz, hogy az NE-t a racionalitás alapján lehessen támogatni, az kell, hogy a játékot, mint a játékosok „közös problémáját" (joint problem) fogjuk fel, ami pedig ellentmond annak, hogy a játék nem-kooperatív. Jegyezzük meg, hogy ez csak a szimultán játékokra vonatkozik, nem vonatkozik például az ismételt játékokra.

3. Orvosságok a bajra?

Mit lehet tehát csinálni a diagnózis megállapítása után? Van-e terápia? Természetesen semmit sem érünk el azzal, ha beemeljük a racionalitási követelmények közé, hogy racionális játékos NE-re törekszik. Ez egyrészt tautológia, másrészt, ha több NE van, akkor nem biztos, hogy az egyenként egyensúlyra törekvő játékosok cselekedeteinek eredményeként NE jön létre. Ehhez a felcserélhetőségi tulajdonság kell, ami csak viszonylag szűk játékosztályokra áll fenn (páldául az antagonosztikus játékokra).

Közismert, hogy a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése egyetlen NE-et sem távolít el. Így ha a stratégiaprofilok halmaza egyetlen pontra redukálódik, vagy egyetlen ponthoz konvergál, akkor az NE. Minthogy a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölése az egyéni racionalitáson és annak köztudásán alapszik, ezért igen széles játékosztályon (például a véges játékok kevert bővítésén) az így kapott NE joggal tekinthető racionálisnak.

Milyen következménye van ennek a játékelmélet tanításában? Első sorban az, hogy ahol csak lehet, még ha az NE direkt meghatározása könnyebb is, mutassuk meg a fáradságosabb utat is: jussunk el az NE-hez a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével is (vagy csak azzal). Nézzük példaként a legegyszerűbb oligopol játékot, a szimmetrikus, lineáris duopóliumot. Az általánosságot nem sértve, az egyszerűség kedvéért nulla költséggel számolunk.

A két játékos döntési változói a $q_1, q_2 \geq 0$ volumenek, a $q_1 + q_2$ iparági termeléshez a $\max\{a - b(q_1 + q_2), 0\}$ ár tartozik, ahol $a, b > 0$. Világos, hogy minden olyan q termelési volument, amely kívül esik a $\left[0, \frac{a}{b}\right]$ intervallumon, szigorúan dominál egy kellőképpen pozitív termelés, mivel függetlenül attól, hogy mennyi a másik vállalat termelése, az ár és így a profit is 0. Így a szigorúan dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésekor indulásként mindkét játékos termelésének alsó korlátja $L_0 = 0$, a felső korlátja pedig $U_0 = \frac{a}{b}$. Egy iterációs lépésnek azt tekintjük, amikor mindkét játékos nem dominált stratégiáinak halmazát szűkítjük (ha tudjuk), vagyis az alsó korlátot növeljük, és/vagy a felső korlátot csökkentjük. A szimmetria miatt minden lépésben mindkét játékos korlátai ugyanúgy módosulnak. Tegyük fel, hogy a k-ik lépésben az alsó és felső korlát L_k és U_k.

Tekintsük az első játékost. Ahhoz, hogy a korlátait javítani tudjuk, kell találni olyan q_1 és x termelési volument, amelyekre $q_1, x \in [L_k, U_k]$, $q_1 \neq x$ és q_1 szigorúan dominálja x-et, vagyis

$$q_1(a - b(q_1 + q_2)) > q_1(a - b(x + q_2)) \qquad (1)$$

fennáll minden $q_2 \in [L_k, U_k]$ esetén. Ekkor x-et, mint szigorúan domináltat, el lehet hagyni. Különböztessünk meg két esetet:

(i) $q_1 > x$

Ekkor (1)-et átrendezve kapjuk a

$$q_1 + x < \frac{a}{b} - q_2 \qquad (2)$$

egyenlőtlenséget, amelynek fenn kell állni minden $q_2 \in [L_k, U_k]$-re. Ha (2) fennáll $q_2 = U_k$-ra, akkor nyilván fennáll $q_2 \in [L_k, U_k]$-re is. Tehát $q_1 = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - U_k)$ dominál minden olyan x-et, amelyre $x < \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - U_k)$. Így definiálhatjuk az új alsó korlátot: $L_{k+1} = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - U_k)$.

(ii) $q_1 < x$

Hasonlóan, mint az (i) esetben, átrendezés után az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk

$$q_1 + x > \frac{a}{b} - q_2, \qquad (3)$$

amelynek szintén fenn kell állni minden $q_2 \in [L_k, U_k]$-re. Ha (3) fennáll $q_2 = L_k$-ra, akkor nyilván fennáll $q_2 \in [L_k, U_k]$-re is. Tehát $q_1 = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - L_k)$ dominál minden olyan x-et, amelyre $x > \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - L_k)$. Így definiálhatjuk az új felső korlátot: $U_{k+1} = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - L_k)$.

Vegyük észre, hogy $U_{k+1} - L_{k+1} = \frac{1}{2}(U_k - L_k)$ és $L_0 = 0, U_0 = \frac{a}{b}$, ezért $(U_k - L_k) \to 0$, ha $k \to \infty$. Így az $\{L_k\}$ és az $\{U_k\}$ sorozatok konvergensek, q^* közös határértékük a játék NE-je, hiszen a szigorú dominancián alapuló elimináció NE-ket nem távolít el. A $q = \frac{1}{2}(\frac{a}{b} - q)$ egyenlet megoldása $q^* = \frac{a}{3b}$, ami természetesen az egyetlen NE.

Megjegyezzük, hogy ez az eljárás már nem működik, ha a játékosok száma több, mint kettő.

Egy másik fontos terület, ahol a gyenge dominancián alapuló iteratív kiküszöbölés garantáltan egy pontot, az egyetlen NE-t eredményezi, a generikus extenzív formában adott véges tökéletes információs játékok. A „generikus" jelző itt azt jelenti, hogy bármely játékos kifizetései a játékfa végpontjaiban különbözőek. Meg lehet mutatni (lásd Osborne és Rubinstein (1994)), hogy az egyetlen részjáték tökéletes NE-t meg lehet kapni gyengén dominált stratégiák iteratív kiküszöbölésével a játék teljes normál formájában. Tehát ebben a játékosztályban is következik az NE az egyéni racionalitás és annak köztudása feltételezéséből. Ennek részletes kifejtése megtalálható Aumann (1995)-ben.

Érdemes a generikus tökéletes információs véges játékok NE-jét a következő három tulajdonsággal jellemezni:

$T1$ Egyéni racionalitás: Minden pontban olyan élen kell elindulni, amelyen a saját hasznosság az itt kezdődő részfában a legnagyobb.

$T2$ Részjáték tökéletesség: Ha a játékot bármely részfára korlátozzuk, akkor az NE erre a részfára való korlátozása szintén NE.

$T3$ Az NE-t visszafelé indukcióval, „alulról felfelé” meghatározhatjuk: „Rövidebb” játékokból fokozatosan „hosszabbakat” építünk fel mindaddig, amíg eljutunk a teljes játék egyetlen részjáték tökéletes NE-jéig.

Felmerül a kérdés, hogy ha megfelelően formalizálva, egy megoldáskoncepciótól (ilyen például az NE) megköveteljük a $T1, T2, T3$ tulajdonságok (vagy valami hasonló) fennállását, akkor ezek a tulajdonságok egyértelműen meghatározzák-e az illető megoldáskoncepciót. Ez a korábban megfogalmazott lehetőségek közül a harmadik: az axiomatikus megközelítés. Az irodalomban lényegében egy ilyen található, Peleg és Tijs (1996) nevéhez fűződik. Noha a Forgó et al. (2007) elektronikus tankönyvben szerepel, mégsem közismert, ezért a könnyebb hivatkozás kedvéért itt is megadjuk.

Egy kicsit más jelölést alkalmazva tekintsünk egy $G = \{N, (S_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ játékot normál formában, ahol N a játékosok véges halmaza, $S_i, i \in N$ az i-ik játékos stratégia halmaza és $f_i : \times_{j\in N} S_j \longrightarrow \mathbb{R}$ a kifizetőfüggvénye. Legyen $\emptyset \neq T \subset N$ a játékosok egy részhalmaza és vezessük be az $S^T = \times_{i\in T} S_i$ jelölést. Legyen továbbá Γ a játékok (normál formában) egy halmaza. Nevezzük a $\varphi : \Gamma \longrightarrow 2^S$ függvényt megoldásfüggvénynek (megoldáskoncepciónak) a Γ halmazon, ha minden $G \in \Gamma$ játékhoz az $S = S^N$stratégiaprofilok egy nem üres $\varphi(G)$ részhalmazát rendeli.

1. Definíció ($P1$ követelmény) A φ megoldásfüggvény kielégíti az *egyszemélyes racionalitás* (one person rationality: OPR) követelményét, ha minden $G = \{\{i\}, S_i, f_i\}$, $G \in \Gamma$ egyszemélyes játékra fennáll a következő:

$$\varphi(G) = \{x_i \in S_i : f_i(x_i) \geq f_i(y_i) \text{ minden } \quad y_i \in S_i\text{-re}\}.$$

OPR alapvető követelmény a döntéselméletben és játékelméletben: minden játékos maximalizálja a saját hasznosságfüggvényét.

Legyen $G = \{N, (S_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\}$ egy játék, $\emptyset \neq T \subset N$ a játékosok egy nem üres részhalmaza, valamint $\mathbf{x} \in S$ egy stratégiaprofil. A $G_{\mathbf{x},T} = \{T, (S_i)_{i\in T}, (f_i^{\mathbf{x}})_{i\in T})\}$ játékot a G játék T-re és $\mathbf{x}$-re vonatkozó *redukált játékának* (reduced game) nevezzük, ahol $f_i^{\mathbf{x}}(y^T) = f_i(\mathbf{y}^T, \mathbf{x}^{N\setminus T})$ minden $\mathbf{y}^T \in S^T$ és $i \in T$-re. $G_{\mathbf{x},T}$ az a játék, amelyet T játékosai játszanak, miután megtudják, hogy $N \setminus T$ játékosai az x_i, $i \in N \setminus T$ stratégiákat választották és elhagyták a G játékot.

A játékok egy Γ halmazát *zártnak* nevezzük, ha $G \in \Gamma$, $\emptyset \neq T \subset N$ és $\mathbf{x} \in S \Longrightarrow G_{\mathbf{x},T} \in \Gamma$, vagyis Γ minden játékának a redukált játékait is tartalmazza.

2. Definíció ($P2$ követelmény) Legyen Γ a játékok egy zárt halmaza és φ egy megoldásfüggvény a Γ halmazon. A φ megoldásfüggvényt *konzisztensnek* ($CONS$) nevezzük, ha $G \in \Gamma$, $\emptyset \neq T \subset N$ és $\mathbf{x} \in \varphi(G) \Longrightarrow \mathbf{x}^T \in \varphi(G_{\mathbf{x},T})$.

($\mathbf{x}^T$ az $\mathbf{x} = \mathbf{x}^N$-nek csak azokat a komponenseit tartalmazza, amelyek a T-ben lévő játékosokhoz tartoznak).

$CONS$ azt jelenti, hogy ha a T-ben lévő játékosok tudják, hogy az $N \setminus T$ játékosai az $\mathbf{x}_{N\setminus T}$ stratégiaprofilt választották és elhagyták a G játékot, akkor nem kell megváltoztatni a G -ben használt stratégiáikat, amikor a $G_{\mathbf{x},T}$ redukált játékot játsszák.

Legyen Γ a játékok egy zárt halmaza és φ egy megoldásfüggvény Γ-án. Ha $G = \{N, (S_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\} \in \Gamma$ és $|N| \geq 2$, akkor definiáljuk a $\widetilde{\varphi}(G)$ halmazt a következő képpen:

$$\widetilde{\varphi}(G) = \{\mathbf{x} \in S : \mathbf{x}^T \in \varphi(G_{\mathbf{x},T}) \quad \text{minden} \quad T \subset N, T \neq \emptyset, N\text{-re}\}$$

3. Definíció ($P3$ követelmény) Egy a Γ halmazon definiált φ megoldásfüggvény kielégíti a *fordított konzisztencia* (converse consistency: $COCONS$) követelményét, ha minden legalább két játékossal rendelkező $G \in \Gamma$ játék esetében $\widetilde{\varphi}(G) \subset \varphi(G)$.

Érdemes megjegyezni, hogy a $CONS$ tulajdonképpen az a követelmény, hogy a fordított tartalmazás, vagyis a $\varphi(G) \subset \widetilde{\varphi}(G)$ teljesüljön minden $G \in \Gamma$-re. $COCONS$ azt jelenti, hogy kevesebb személyes redukált játékok megoldásait konzisztens módon "egyesítve" megkaphatjuk a játék megoldását.

Ha Γ egy olyan játékosztály (például a véges játékok kevert bővítései, amelyik játékosztály zárt, mert minden véges játék kevert bővítséhez tartozó redukált játék is egy véges játék kevert bővítése), amelyben minden játéknak van legalább egy NE-je, akkor jelöljük NE-vel azt a megoldásfüggvényt, amely minden játékhoz hozzárendeli az NE-ek halmazát. Az alábbi tételek Peleg és Tijs (1996) eredményei.

1. Tétel Az NE kielégíti az $OPR, CONS$ és $COCONS$ ($P1, P2, P3$) követelményeket (minden NE-re zárt Γ játékosztályon).

2. Tétel Legyen φ a Γ zárt függvényosztályon definiált megoldásfüggvény. Ha φ kielégíti az OPR és $CONS$ követelményeket, akkor $\varphi(G) \subset NE(G)$ minden $G \in \Gamma$-re.

3. Tétel Legyen φ a Γ zárt függvényosztályon definiált megoldásfüggvény. Ha φ kielégíti az OPR és $COCONS$ követelményeket, akkor $NE(G) \subset \varphi(G)$ minden $G \in \Gamma$-ra.

Következmény: Ha a Γ zárt játékosztályon definiált φ megoldásfüggvény kielégíti az $OPR, CONS$ és $COCONS$ követelményeket, akkor $\varphi = NE$.

Ez a három követelmény tehát egyértelműen meghatározza a Nash megoldásfüggvényt. Be lehet bizonyítani, hogy ezek a követelmények függetlenek, vagyis ha bármelyiket elhagyjuk, akkor a másik kettőt nem csak az NE megoldásfüggvény elégíti ki. Az NE-t, (és egyéb fontos megoldásfüggvényt) más axiómákkal is lehet jellemezni. A témát részletesen tárgyalja Peleg és Tijs (1996).

Nem szorul magyarázatra, hogy $T1$ és $P1$ ugyanaz. $T2$ és $P2$ valamint $T3$ és $P3$ viszont koncepcionálisan nagyon hasonlóak. Az a követelmény, hogy az egész játékra vonatkozó megoldás ne változzék a redukált játékban, analóg azzal a követelménnyel, hogy az egész játékra vonatkozó egyensúly a játék egy részére is érvényes maradjon. Így $T2$ és $P2$ szoros kapcsolatba hozható. $P3$ azt követeli meg, hogy a játék „megoldását" alulról felfelé építkezve is meg lehet kapni. A különbség $T3$-tól az csupán, hogy itt nem a fa aljától indulunk felfelé, hanem az egyszemélyes játékoktól egészen az n-személyes eredeti játékig. Az egyes szintekről a következőre való áttérésnek „konzisztensnek" kell lennie, vagyis ha „visszafordulnánk" az alacsonyabb szintre, akkor a redukált játéknak ugyanannak kell lennie, mint ahonnan kiindultunk. Ez pedig nagyon hasonlít $T3$-ra, mert a visszafele indukció is egy alulról felfelé való építkezés konzisztens módon.

Lehet, hogy az NE jellemzésében a kulcsfogalom nem a racionalitás, hanem a konzisztencia? Mit kellene tennünk, hogy akár kerülő úton eljussunk mégis a racionalitáshoz? Peleg és Tijs (1996) tesznek is egy lépést efelé, amikor megmutatják, hogy ha egy megoldásfüggvény kielégíti az alábbi $P2'$ és a $P2$" követelményeket, akkor $P2$-őt is.

$P2'$ (*Dummy*) A $d \in N$ játékost "dummy"-nak nevezzük, ha az S_d stratégiahalmaza egyetlen elemből áll (nem igazi játékos, nincs választása). Legyen Γ egy zárt játékosztály és φ egy megoldásfüggvény. φ kielégíti a $P2'$(dummy) követelményt, ha minden $G = \{N, (S_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\} \in \Gamma$ játékra, minden $d \in N$ dummy játékosra és minden $\mathbf{x} \in S$-re $\varphi(G) = S_d \times \varphi(G_{\mathbf{x},N\setminus\{d\}})$. $P2'$ azt a nyilvánvaló követelményt fejezi ki, hogy azok a játékosok, akiknek nincs stratégiai döntésük, ne befolyásolják a megoldást.

$P2$" (*Irreleváns stratégiáktól (alternatíváktól) való függetlenség*, IIS) Ha $G = \{N, (S_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\} \in \Gamma$, $\mathbf{x} \in \varphi(G), x_i \in T_i \subseteq S_i$ minden $i \in N$-re és $H = \{N, (T_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N}\} \in \Gamma$, akkor $\mathbf{x} \in \varphi(H)$.

$P2$" azt a követelményt fejezi ki, hogy ha a stratégiahalmazokból irreleváns elemeket távolítunk el, akkor a megoldás ne változzék.

Noha az IIS követelményt sokan megkérdőjelezik, de legalább annyian elfogadhatónak tartják a racionális döntéshozó viselkedésformájaként. Azon kívül nagyon operacionális is, hiszen megegyezik az optimumszámításban oly hasznos „relaxációs" elvvel.

Nyitott kérdés: Lehet-e a $P3$ követelményt hasonló módon „racionalizálni"? Peleg et al. (1996) arra az érdekes eredményre jutnak, hogy $P3$-tól teljes egészében meg lehet szabadulni, ha a Γ játékosztályt megfelelően definiáljuk. Itt van rögtön két lehetőség.

1. Legyen Γ azoknak a játékoknak az összessége, amelyeknek van legalább egy NE-je. (Mivel $P2$-őt továbbra is megköveteljük, a Γ-nak zártnak kell lenni, tehát minden $G \in \Gamma$ játék redukált játékának is van legalább egy NE-je).

2. Legyen Γ azoknak a véges játékoknak az összessége, amelyeknek van legalább egy NE-je.

Ez az axiomatizálás azonban még a szerzők szerint sem elegáns, mivel a Γ játékosztály definiálásában szerepel az a megoldásfüggvény (az NE), amit karakterizálni akarunk. Ezért a nyitott kérdés továbbra is nyitott kérdés.

Megfigyelhetjük, hogy a játékosztály, amelyen az axiomatizálás történik, a legfeljebb n-személyes játékok valamely zárt osztálya. Ezen a játékosztályon megkövetelni bizonyos tulajdonságok fennállását sokkal „szigorúbb", mint ha csak az n-személyes játékok megfelelő osztályán, ami egy szűkebb halmaz, követeljük meg bizonyos tulajdonságok meglétét. Ha ezen szűkebb halmazon megkövetelt tulajdonságok egyértelműen meghatározzák az NE-t, akkor ez egy erősebb eredmény, mint Peleg és Tijs axiomatizálása. Itt is a $P3$ axióma a kritikus, hiszen $P1, P2$" csak az n-személyes játékokra vonatkozik. Ugyan a $P1$ egyszemélyes racionalitás egyszemélyes játékokra lett megfogalmazva, a $P2'$ dummy axióma pedig az $n-1$ személyesekre, de mégsem minden legfeljebb n-személyes játékra. Kérdés: Lehet-e a $P3$ követelményt felcserélni olyannal (olyanokkal), amely csak 1,$n-1$ és n-személyes játékokra vonatkozik?

4. Mit old meg és mit nem a korrelált egyensúly?

A korrelált egyensúlyt (correlated equilibrium, CE) Aumann (1974) vezette be. Nem biztos hogy helyesen, de pedagógiailag minden képpen indokoltan, általában az alábbi történettel (forgatókönyvvel) vezetjük be a CE-t. A következőkben véges játékokra és azok kevert bővítésére szorítkozunk. Nyugodtan fel lehet tenni, az általánosságot nem fogjuk sérteni, de a jelölésrendszert nagyban egyszerűsíti, hogy két játékosunk van, akik kifizetéseit az A, B $m \times n$-es mátrixok elemei adják meg. Tehát egy $G = \{A, B\}$ bimátrix játékról van szó. Jelöljük a sorjátékos tiszta stratégiáinak halmazát $I = \{1, ..., m\}$-vel, az oszlopjátékos tiszta stratégiáinak halmazát pedig $J = \{1, ..., n\}$-vel. Feltesszük, hogy adott egy $P = \{p_{ij}\}, i \in I, j \in J$ köztudott valószínűségeloszlás a tiszta stratégiaprofilok halmazán. Egy "játékvezető" kisorsol egy (i, j) stratégiaprofilt a P eloszlás szerint, majd mindkét játékosnak javasolja saját i és j stratégiáját, de a másik stratégiáját titokban tartja. Ezek után mindkét játékos dönt, hogy mit játszik. CE-nek nevezzük a P eloszlást, ha egyik játékosnak sem érdeke (nem javul a kifizetésének várható értéke), hogy mást játsszon, mint a játékvezető javaslata, feltéve, hogy a másik játékos is ezt teszi.

A tanítás során hanyagul, több könyv nyomdokain haladva, meg szoktam jegyezni, hogy itt egy E extenzív játékról van szó, amely a játékvezető sorsolásával kezdődik, majd a játékosok lépnek (választanak a saját információ halmazukban lévő stratégiákból). A sorjátékos i-ik stratégiájához tartozó információ halmazát azok a stratégiaprofilok (az E játék fájában pontok) alkotják, amelyekben a sorjátékos az i-ik stratégiáját játssza. Az E játékban pl. a sorjátékos egy stratégiája egy függvény, amely minden információ halmazhoz hozzárendel egy $k \in I$ tiszta stratégiát. A játékvezető javaslatának követése csak egy stratégia a sok közül. Könnyen látható, hogy E-ben a "javaslatkövető" stratégia páros NE. Itt szokott elsikkadni, hogy E-ben lehet a javaslatkövető stratégia pároson kívül NE is. Nézzünk egy konkrét példát, a gyáva nyúl játékot az alábbi kifizetésekkel és a szokásos autós történettel:

	K	N
K	$(6,6)$	$(2,7)$
N	$(7,2)$	$(0,0)$

K=kitér, N=nem tér ki.

Itt az ebből felépített E extenzív játékban mindkét játékosnak négy stratégiája van, amelyeket a $\{K, N\}$ betűkészletből két betűvel adunk meg: az első azt jelenti, hogy mit csinál a játékos, ha a játékvezető K-t, a második pedig azt, hogy mit, ha a játékvezető N-et javasol. Tehát a négy stratégia: KK, KN, NK, NN. Az első és a negyedik két "következetes" stratégia: mindegy mit javasol a játékvezető, a játékos K-t illetve N-et választ. A második az "ellenszegülő", aki mindig mást csinál, mint amit javasolnak, a harmadik pedig a javaslatkövető. A kifizetések a P eloszlással számolt várható értékek az E-ben választott stratégia párosok esetében. Válasszuk P-nek a hasznosságok összegét a CE-k halmazán maximalizáló eloszlást. Könnyen lehet látni, csak egy lineáris programozási feladatot kell megoldani, hogy az egyetlen optimális megoldás:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Könnyen kiszámolható, hogy az E játék normál formája a következő (a számok negyedeket jelentenek):

$$C = \begin{array}{c} \\ KK \\ NK \\ KN \\ NN \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} KK & NK & KN & NN \end{array} \\ \begin{bmatrix} (24,24) & (12,27) & (20,25) & (8,28) \\ (27,12) & (9,9) & (20,10) & (2,7) \\ (25,20) & (10,20) & (21,21) & (6,21) \\ (28,8) & (7,2) & (21,6) & (0,0) \end{bmatrix} \end{array}$$

A tiszta stratégiák halmazán három NEP van: a javaslatkövető (KN, KN) és az aszimmetrikus következetes (KK, NN) és (NN, KK). Semmilyen olyan érvet nem tudok felhozni, amelyik garantálná, hogy feltétlenül a javaslatkövető stratégiapáros fog megvalósulni.

Ezen a ponton felmerül az a gondolat, hogy menjünk még egy lépéssel tovább, és tekintsük a C játékot kiinduló játéknak és keressük ennek egy olyan korrelált egyensúlyát, amely maximalizálja a várható hasznosságok összegét. Az világos, hogy ha a (KN, KN) javaslatkövető stratégiapárost 1 valószínűséggel sorsoljuk ki, akkor 42 összhasznosságot kapunk. Kérdés, hogy van-e ennél jobb? A most már kicsit nagyobb LP-t megoldva azt látjuk, hogy nincs. Viszont nem csak egy megoldás van, hanem végtelen sok. Például a következő két mátrix minden konvex lineáris kombinációja:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Igy lehetőség van arra, hogy a sok optimális CE közül egyéb, a modellben nem szereplő megfontolások alapján válasszon a játékvezető. Hogyan lehet ezt a "kétszintű" korrelált egyensúlyt interpretálni? Egy lehetséges forgatókönyv a következő. Két játékvezető van. Az első szinten a játékvezető javaslatokat tesz és a játékosok választanak K és N közül. A második szinten a játékvezető javaslatot tesz arra, hogy hogyan reagáljanak játékosok az első szinten kapott javaslatokra. Természetesen időben a második szint javaslata jut el a játékosokhoz először, azután következik az első szint. Ha javaslatkövető magatartást választanak a játékosok a második szinten, akkor nem kötelező javaslatkövetőnek lenni az első szinten, mégis lehet maximális hasznosságösszeget realizálni. Sőt, az sem kötelező, hogy az első szinten a sorsolás egy CE-t realizáló eloszlás szerint történjék.

Mindebből azt a tanulságot szűrtem le, hogy hiába olyan vonzó a forgatókönyvvel kezdeni a korrelált egyensúly tanítását, mégis jobb először a korrelált egyensúlyt matematiakilag definiálni az ösztönző feltételekkel és csak utána belemerülni a különböző interpretációkba. A korrelált egyensúlyokat definiáló egyenlőtlenség rendszer (az ösztönző feltételek) két játékos esetén az alábbi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_{ij} &\geq \sum_{j=1}^{n} a_{kj} p_{ij}, \text{ minden } i, k \in I\text{-re}, \\ \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_{ij} &\geq \sum_{i=1}^{m} b_{il} p_{ij}, \text{ minden } j, l \in J\text{-re}. \end{aligned}$$

Az interpretációk közül a leghíresebb Aumanné (1987), aki azt állítja, hogy a korrelált egyensúly a bayesi döntéselmélet javaslataival legjobban összhangban lévő egyensúlyi fogalom. A végletekig leegyszerűsítve: egy bayesi döntéshozó a saját várható hasznosságát maximalizálja a világ állapotairól alkotott véleménye szerint, amely vélemény a világ állapotain definiált (szubjektív) valószínűségeloszlásban ölt testet. Tekintsünk úgy a stratégia profilok halmazára, mint a lehetséges világállapotok halmazára és a P mátrixra, mint egy ezen definiált a priori valószínűségeloszlásra. Ha a sorjátékos ahhoz az információhoz jut, hogy a sorsolás olyan világállapotot eredményezett, amelyben az ő stratégiája i, akkor az oszlopjátékos világállapotainak halmaza J, a hozzá tartozó valószínűségek pedig a posterior valószínűségek (a feltétel az, hogy az i-ik sor választása már megtörtént). Ekkor a fenti ösztönző feltételek ekvivalensek azzal, hogy a sorjátékos, miután megtudta, hogy a kisorsolt stratégiaprofilból az ő része az i-ik, bayesi döntéshozóként maximalizálja a posterior valószínűségekkel számolt várható hasznosságát. Ha a P eloszlás CE, akkor az i-ik stratégia az optimális választás.

Aumann kritikusainak legfőbb ellenvetése, hogy furcsa világállapot az, amely döntésekből tevődik össze. Igy a végén a döntés meghozatalának az eredménye egy világállapot. Összekeverednek a dolgok, a lehetséges döntések hol döntésként, hol világállapotként szerepelnek. Aumann védi álláspontját, de igazán soha sem sikerült meggyőzni kritikusait. Holott egy egyszerű "trükkel" ezt a problémát meg lehet oldani. Tekintsük a problémát, mint egy nem teljes információs játékot, amelyben mind a sor, mind az oszlopjátékos minden stratégiájához hozzárendelünk egy típust. Tulajdonképpen minden stratégiához (cselekvéshez) hozzárendelünk egy tulajdonságot, amit az jellemez, hogy egy ilyen tulajdonságú játékos általában így cselekszik. Például a gyáva nyúl játékban a Kitér cselekvéshez az $\acute{O}$vatos, a Nem tér ki cselekvéshez a Merész típus tartozhat. Így a négy világállapot: $\acute{O}\acute{O}, \acute{O}M, M\acute{O}, MM$. Korrelált egyensúlyban a "légy önmagad", vagyis ha $\acute{O}$ típus vagy, akkor játsszál K-t, ha M típus vagy, akkor játsszál N-et stratégia páros bayesi Nash egyensúly.

Végezetül vegyük észre, hogy a CE, noha általánosítása az NE-nek, ugyanazokkal a koncepcionális problémákkal rendelkezik, mint az NE. Egyrészt azért, mert az extenzív játékká vagy nem teljes információs játékká való átalakítás során a korrelált egyensúlyt azonosítottuk egy kibővített játék NE-jével, másrészt Aumann interpretációját ugyanúgy nem lehet az egyéni racionalitásra és annak a köztudására visszavezetni, mint az NE-ét. Lásd bővebben Risse (2000).

Köszönetnyilvánítás A tanulmány az OTKA támogatásával a 101224 számú pályázat keretében készült.

Irodalomjegyzék

Aumann, R. J. (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 1: 67-96.

Aumann, R. J. (1987) Correlated equilibrium as an expression of bayesian rationality. *Econometrica*, 54: 1-18.

Aumann,R. J. (1995) Backwards induction and common knowledge of rationality. *Games and Economic Behavior,* 8: 6-19.

Forgó, F., Pintér, M., Simonovits, A. és Solymosi, T.(2007) *Játékelmélet.* Elektronikus könyv, BCE

Harsanyi, J. (1977) *Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations.* Cambridge University Press, Cambridge

Nash, J. F (1951) Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54: 286-295.

Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994) *A Course in Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts

Peleg, B. and Tijs, S. (1996) The consistency principle for games in strategic form. *International Journal of Game Theory*, 25: 13-34.

Peleg, B., Potters, J. and Tijs, S. (1996) Minimality of consistent solutions for strategic games, in particular for potential games. *Economic Theory*, 7: 81-93.

Risse, M. (2000) What is rational about Nash equilibria? *Synthese,* 124: 361-384.

von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton