Svájci rendszerű sakk csapatversenyek rangsorolása

Csató László*

Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék
MTA-BCE „Lendület” Stratégiai Interakciók Kutatócsoport

2014. június 18.

Kivonat

A cikk a páros összehasonlításokon alapuló pontozási eljárásokat alkalmazza svájci rendszerű sakk csapatversenyek eredményének meghatározására. Bemutatjuk a nem körmérkőzéses esetben felmerülő kérdéseket, az egyéni és csapatversenyek jellemzőit, valamint a hivatalos lexikografikus rendezések hibáit. Axiomatikus alapokon rangsorolási problémaként modellezzük a bajnokságokat, definícióinkat összekapcsoljuk a pontszám, az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszerének tulajdonságaival. A javasolt eljárást két sakkcsapat Európa-bajnokság részletes elemzésével illusztráljuk. A végső rangsorok összehasonlítását távolságfüggvények segítségével végezzük el, majd a sokdimenziós skálázás révén ábrázoljuk azokat. A hivatalos sorrendtől való eltérés okait a legkisebb négyzetek módszerének dekompozíciójával tárjuk fel. A sorrendeket három szempont, az előrejelző képesség, a mintailleszkedés és a robusztusság alapján értékeljük, és a legkisebb négyzetek módszerének alkalmas eredménymátrixszal történő használata mellett érvelünk.

Journal of Economic Literature (JEL) kód: D71

Kulcsszavak: preferenciák aggregálása; páros összehasonlítás; legkisebb négyzetek módszere; rangsorolás; svájci rendszer

*e-mail: laszlo.csato@uni-corvinus.hu
A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/1-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg. A szerző köszönetet mond az OTKA K-77420 pályázat pénzügyi támogatásáért.
Hálával tartozom *Bozóki Sándor*nak és *Fülöp János*nak a kézirat elolvasásért és fontos észrevételeikért, valamint *Burak Can*nak hasznos tanácsaiért.

Ranking in Swiss system chess team tournaments

László Csató

Corvinus University of Budapest, Department of Operations Research and Actuarial Sciences
MTA-BCE "Lendület" Strategic Interactions Research Group
Budapest, Hungary

Abstract

The paper uses paired comparison-based scoring procedures in order to determine the result of Swiss system chess team tournaments. We present the main challenges of ranking in these tournaments, the features of individual and team competitions as well as the failures of official lexicographical orders. The tournament is represented as a ranking problem, our model is discussed with respect to the properties of the score, generalised row sum and least squares methods. The proposed method is illustrated with a detailed analysis of the two recent chess team European championships. Final rankings are compared through their distances and visualized by multidimensional scaling (MDS). Differences to official ranking are revealed due to the decomposition of least squares method. Rankings are evaluated by prediction accuracy, retrodictive performance, and stability. The paper argues for the use of least squares method with an appropriate generalised results matrix favouring match points.

Journal of Economic Literature (JEL) code: D71

Keywords: preference aggregation; paired comparison; least squares method; ranking; Swiss system

An English summary is given from page 33.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

Szokás a tant elméleti és gyakorlati tanra felosztani. Ez a felosztás azonban csak feltételesen alkalmazható, mert a legelvontabb tan sem lehet tapasztalás nélküli. És fordítva: csupán tapasztalati tan sincsen.[1]

Bolyai János

1. Bevezetés

A páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás egyik klasszikus alkalmazási területe a sport: a témával foglalkozó korai művek megszületéséhez több alkalommal sakkversenyek szolgáltatták az inspirációt (Landau, 1895, 1914; Zermelo , 1928). A következőkben egy ilyen rangsor felállítására teszünk kísérletet, a svájci rendszerű sakk csapatversenyek esetén. A kérdést már tárgyaltuk egy korábbi cikkünkben (Csató, 2013a), ezúttal azonban igyekszünk mélyebb, alaposabb módszertani megalapozást adni, és a különböző sorrendek értékelését szintén továbbfejlesztjük.

A cikkben pontozási eljárások egy családját, az általánosított sorösszeget (Chebotarev, 1989, 1994), illetve az ennek határértékeként adódó legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzuk. Előbbinek nem ismerjük gyakorlati felhasználását, utóbbival azonban már mások is foglalkoztak (Leeflang and van Praag, 1971; Stefani, 1980). A téma aktualitását részben egy nemrégiben megjelent munka szolgáltatja, González-Díaz et al. (2014) többek között az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszerének axiomatikus tulajdonságait vizsgálja. A legkisebb négyzetek módszeréről megmutattuk, hogy általában létezik iteratív előállítása, ami megkönnyíti az eredmények értelmezését (Csató, 2014a). Ilyen, rekurzív alapú eljárások használatát ajánlja a svájci rendszerű sakkversenyek esetén Brozos-Vázquez et al. (2010), amit immár a gyakorlatban is illusztrálunk. A rangsorok összehasonlítását lehetővé tevő távolságfüggvények kiválasztásához Can (2014) tett jelentős hozzájárulást.

A 2. fejezet a páros összehasonlításokkal történő rangsorolás egy, a későbbi tárgyalás alapját képező általános modelljét mutatja be. Bevezetjük a rangsorolási probléma fogalmát (2.1. alfejezet) és a páros összehasonlítások gráf reprezentációját (2.2. alfejezet), mely segítséget nyújt az egyes módszerek értelmezésében. A 2.3. alfejezetben az objektumok sorrendjének felállítására javasolt egyik megközelítést, a pontozási eljárások használatát tekintjük át, majd a választott módszereket ismertetjük. A 2.4. alfejezet két, a gyakorlati alkalmazás szempontjából jelentős tulajdonságot tárgyal.

A 3. fejezet a svájci rendszerű sakk csapatversenyek rangsorolási problémaként történő modellezését ismerteti. Elsőként a feladat általános jellemzőivel, a nem körmérkőzéses esetben felmerülő kérdésekkel foglalkozunk (3.1. alfejezet). Áttekintetjük a hivatalos lexikografikus rendezéseket, az egyéni és a csapatversenyek rendezésének részleteit, valamint rávilágítunk a külső és belső kör jelentőségére a svájci rendszerű tornákon. A 3.2. alfejezetben megállapítjuk, hogy a mérkőzésmátrix definíciója szinte triviális, az eredménymátrix kiválasztása pedig az előző fejezetben ismertetett axiómák segítségével megfelelő alapokra helyezhető.

A 4. fejezet két sakkcsapat Európa-bajnokság részletes elemzését nyújtja. A 4.1. alfejezet ismerteti a kiválasztott példákat és a használt módszerek részleteit. A kapott

[1] Idézi: Weszely Tibor: *Bolyai János.* Vince Kiadó, Budapest, 2002. 173. o.

rangsorok összehasonlítását Can (2014) javaslatából kiindulva, a Kemény- és a súlyozott távolságok vizsgálatával végezzük el (4.2. alfejezet). A sokdimenziós skálázás (MDS) lehetővé teszi a kapott sorrendek kétdimenziós leképezését, az eredmények grafikus szemléltetését. Mivel a legkisebb négyzetek módszeréből adódó sorrendek a hivatalos rangsortól viszonylag messze helyezkednek el, a 4.3. alfejezetben a Csató (2014a) által ismertetett dekompozícióval tárjuk fel az eltérés okait. A rangsorok értékélését három megközelítésben, az előrejelző képesség, a mintailleszkedés és a robusztusság alapján vizsgáljuk (4.4. alfejezet). Eredményeinket az 5. fejezetben összegezzük.

A függelékekben indokoljuk a távolságfüggvények kiválasztását (F.I. Függelék), közöljük az elemzett sakk csapatversenyek részleteit (F.II. Függelék) és néhány további ábrát (F.III. Függelék).

A 2. fejezet az általunk használt rangsorolási modellkeretet tárgyalja, a bemutatott alkalmazás nagyrészt ennek ismerete nélkül is megérthető. A svájci rendszerű sakk csapatversenyekben járatos olvasó ugyancsak átugorhatja a 3.1. alfejezetet.

A cikk az olvasótól csak minimális matematikai (elsősorban algebrai) előképzettséget igényel, csaknem minden szükséges fogalmat definiálni fogunk. A kétdimenziós mátrixokat és skalárokat formázás nélkül, a vektorokat félkövér betűkkel szedjük. $\mathbf{x}$ mindig oszlopvektor, a megfelelő sorvektort $\mathbf{x}^T$ jelöli. A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza alatt az összes nemnegatív egész számot értjük, $\mathbb{R}_+$ pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

2. A rangsorolási probléma és megoldása

A következőkben bemutatjuk a páros összehasonlítások általunk használt modelljét és az ezek segítségével történő rangsorolásra javasolt megközelítések közül a pontozási eljárásokat.

2.1. A páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás egy modellje

Elsőként az általunk használt páros összehasonlítási modellkeretet vezetjük be, ennek részletes tárgyalását lásd Csató (2014a).

2.1. Definíció. *Objektumhalmaz* (set of objects):[2] $N = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ az *objektumok halmaza*.

2.2. Definíció. *Mérkőzésmátrix* (matches matrix): Az $M = (m_{ij}) \in \mathbb{N}^{n \times n}$ szimmetrikus ($M^\top = M$) *mérkőzésmátrix* az objektumok összehasonlításainak számát tartalmazza.

Ugyan a későbbi eredmények mindegyike érvényes a folytonos esetben ($M \in \in \mathbb{R}^{n \times n}$) is, de helyenként sokkal bonyolultabb jelölések alkalmazása válna szükségessé. Az alkalmazások szempontjából ez nem jelent igazi megszorítást.

2.1. *Jelölés.* $m = \max\{m_{ij} : X_i, X_j \in N\}$.

[2] Bár a cikk magyar nyelven készült, a fogalmak mögött zárójelben szerepel a már használt (ez esetben hivatkozással) vagy az általam alkotott angol terminológia. Utóbbival kapcsolatban minden észrevételt szívesen fogadok.

2.3. Definíció. *Eredménymátrix* (results matrix): Az $R = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ferdén szimmetrikus ($R^\top = -R$) *eredménymátrix* az objektumok összehasonlításainak kimenetelét tartalmazza, ahol $r_{ij} \in [-m_{ij}, m_{ij}]$ minden $X_i, X_j \in N$ esetén.

Az eredménymátrix azonos a Saaty-féle páros összehasonlítás mátrixszal (Saaty, 1980), ha az utóbbi elemenkénti logaritmusait vesszük (Csató, 2012b).

A diagonálisban szereplő elemeknek, az objektumok önmagukkal vett összehasonlításainak a későbbiekben nem lesz jelentősége.

2.4. Definíció. *Rangsorolási probléma* (ranking problem): Az (N, R, M) hármas egy *rangsorolási probléma*, ahol N az objektumok halmaza, R az eredmény-, M a mérkőzésmátrix.

2.2. *Jelölés.* A rangsorolási problémák halmaza $\mathcal{R}$.

A 2.4. definícióban megadott modell az alábbi jelenségek leírására alkalmas:

1. Döntetlen ($r_{ij} = 0$): a döntéshozók összességében nem képesek különbséget tenni két objektum között;
2. Eltérő preferenciaintenzitás ($0 \leq r_{ij} \leq m_{ij}$ tetszőleges): a páros összehasonlítások eredménye nem feltétlenül binárisan (jobb / rosszabb) adott, hanem például gyakorisági alapon, így $r_{ij}/m_{ij} = 0{,}8$ azt jelentheti, hogy az X_i objektum az esetek 80%-ában bizonyult jobbnak X_j-nél;
3. Hiányzó összehasonlítás ($m_{ij} = m_{ji} = 0$): két objektum egymás elleni teljesítménye ismeretlen;
4. Többszörös összehasonlítás ($m_{ij} > 1$): egyes objektumpárok viszonya több alkalommal került meghatározásra (például két teniszező több mérkőzést játszott egymással), esetleg különbözik az összehasonlítások megbízhatósága.

A döntetlenek megjelenése a változó preferenciaintenzitás megengedésének egyenes következménye. Noha ideális esetben az összehasonlítások száma minden objektumpár esetén azonos, a szavazóknak lehetőségük van a választás elkerülésére is, ezért egyes összehasonlítások hiányozhatnak. Ennek oka sokszor az objektumok jelentős száma: amennyiben a páros összehasonlítások elvégzése költség-, idő- vagy egyéb korlátokba ütközik, nincs lehetőség minden viszony lekérdezésére. Bizonyos sportágakban ezért rendeznek egyenes kieséses (knockout) vagy svájci rendszerű (Swiss system) versenyeket. Egy másik eset lehet az előrejelzés igénye, mielőtt egy körmérkőzéses (round-robin) bajnokság összes fordulóját lejátszották volna.

2.5. Definíció. Speciális rangsorolási problémák: Egy $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma

- *kiegyensúlyozott* (balanced), ha $\sum_{X_k \in N} m_{ik} = \sum_{X_k \in N} m_{jk}$ minden $X_i, X_j \in N$-re, azaz minden páros összehasonlítás ugyanannyiszor került végrehajtásra;
- *körmérkőzéses* (round-robin), ha $m_{ij} = m_{k\ell}$ minden $X_i \neq X_j$ és $X_k \neq X_\ell$ különböző objektumokból álló pár esetén;

- *súlyozatlan* (unweighted), ha $m_{ij} \in \{0;1\}$ minden $X_i, X_j \in N$ esetén.

Kiegyensúlyozottság esetén az ismert összehasonlítások egyenletesen helyezkednek el a rangsorolási problémában. A körmérkőzéses problémák abban az értelemben teljesnek tekinthetők, hogy $m = m_{ij}$, $X_i \neq X_j$ miatt egyetlen páros összehasonlítás sem ismeretlen. Súlyozatlan esetben nem megengedettek a többszörös összehasonlítások, az R eredménymátrix szinte teljes mértékben leírja a rangsorolási problémát, de $r_{ij} = 0$ egyszerre felel meg a döntetlennek és a hiányzó összehasonlításnak.

2.3. *Jelölés.* A kiegyensúlyozott rangsorolási problémák halmaza $\mathcal{R}^B$.
A körmérkőzéses rangsorolási problémák halmaza $\mathcal{R}^R$.
A súlyozatlan rangsorolási problémák halmaza $\mathcal{R}^U$.

2.1. *Megjegyzés.* $\mathcal{R}^R \subset \mathcal{R}^B \subset \mathcal{R}$.

2.6. Definíció. *Összehasonlítások száma*: Legyen $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma. Az $X_i \in N$ objektum *összehasonlításainak száma* $d_i = \sum_{X_j \in N} m_{ij}$.

2.4. *Jelölés.* $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ a csupa 1-esből álló vektor, $e_i = 1$ minden $i = 1,2,\ldots,n$-re.
$I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az egységmátrix, melynek főátlójában 1-esek, azon kívül pedig 0-k vannak.
$\mathbf{0}$ az az $\mathbb{R}^n$-beli vektor, illetve $\mathbb{R}^{n \times n}$-beli mátrix, melynek minden eleme 0 (jelentése a szövegkörnyezet függvénye).

2.2. A mérkőzésmátrix gráf reprezentációja

Az M mérkőzésmátrixot bizonyos esetekben gráfokkal reprezentáljuk, az alábbiakban ennek módját mutatjuk be.

2.7. Definíció. Gráfelméleti alapfogalmak:

A $G = (N, E)$ pár egy *gráf*, ahol N a *csúcsok*, E pedig az *élek* halmaza. G *irányítatlan* (undirected) gráf, ha $E \subseteq N \times N$ és $(X_i, X_j) \in E \Rightarrow (X_j, X_i) \in E$ minden $X_i, X_j \in N$-re. G *multigráf* (multigraph), ha többszörös éleket is tartalmazhat.

A $G = (N, E)$ gráf $X_i = X_{k_0}, X_{k_1}, \ldots, X_{k_t} = X_j$ csúcssorozata egy X_i-ből X_j-be vezető *út*, ha $(X_{k_\ell}, X_{k_{\ell+1}}) \in E$ minden $\ell = 0,1,\ldots,t-1$-re. Egy X_i-ből X_j-be vezető út *kör*, amennyiben $X_i = X_j$. A $G = (N, E)$ irányítatlan gráf *összefüggő*, ha minden $X_i, X_j \in N$ esetén létezik X_i-ből X_j-be vezető út.

A $G = (N, E)$ irányítatlan gráfban az $X_i \in N$ csúcs *fokszám*a a vele szomszédos csúcsok száma: $deg_i = \sharp\{X_j : (X_i, X_j) \in E\}$ minden $X_i \in N$-re. $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a fokszámokból képzett diagonális mátrix: $d_{ii} = deg_i$ minden $X_i \in N$-re.

A $G = (N, E)$ multigráf gráf *szomszédsági mátrix*a $T = (t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ahol t_{ij} az $(X_i, X_j) \in E$ élek száma.

A $G = (N, E)$ multigráf *Laplace-mátrix*a $L = (\ell_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ahol $L = D - T$.

2.1. Lemma. *Egy $G = (N, E)$ multigráf Laplace-mátrixa szimmetrikus és $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n = 0$ sajátértékei valósak, pozitív szemidefinit. A $\mu_n = 0$-hoz tartozó sajátvektor* $\mathbf{e}$.

Bizonyítás. Lásd Mohar (1991, Theorem 2.1). □

2.8. Definíció. *Összehasonlítási multigráf* (comparison multigraph): Az irányítatlan $G := (N, E)$ multigráf az $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémához tartozó *összehasonlítási multigráf*, ahol az N csúcshalmaz az objektumok halmaza és az $(X_i, X_j) \in E$ élek száma m_{ij}.

Egy $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémához tartozó G összehasonlítási multigráfban $deg_i = d_i$, az $X_i \in N$ csúcs fokszáma a megfelelő objektum összehasonlításainak számával azonos.

2.2. *Megjegyzés.* A G összehasonlítási multigráf csak az M mérkőzésmátrixtól függ, Laplace-mátrixában $\ell_{ii} = d_i$ minden $X_i \in N$, és $\ell_{ij} = -m_{ij}$ minden $X_i \neq X_j$ esetén.

2.9. Definíció. *Összefüggő rangsorolási probléma* (connected ranking problem): Egy $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma *összefüggő*, ha a hozzá tartozó $G = (N, E)$ összehasonlítási multigráf összefüggő.

2.5. *Jelölés.* Az összefüggő rangsorolási problémák halmaza $\mathcal{R}^O$.

Tehát az $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma akkor és csak akkor összefüggő, ha összehasonlítási multigráfjában minden $X_i, X_j \in N$-re található X_i-ből X_j-be vezető út.

2.3. Pontozási eljárások

A rangsorolási probléma definiálása után a következő feladatot az alternatívák sorba rendezése jelenti. Egyfajta információtömörítés válik szükségessé: az n objektum $n(n-1)/2$ kölcsönös „távolságát" kellene leírni a megoldásként kapott rangsorból adódó $n-1$ különbséggel. Ez $n = 2$ esetén tökéletesen reprodukálható, két objektum esetén a páros összehasonlítás kimenetele minden információt megad a sorrendről. Ha viszont azok száma legalább három, már felmerülhet a Condorcet-paradoxonból (Condorcet, 1785) ismerős intranzitivitás problémája. Az ehhez hasonló inkonzisztenciák nem feltétlenül adathibából adódnak, konzisztens preferenciák aggregálása szintén ilyen következményekkel járhat.

Ez a nehézség már a körmérkőzéses rangsorolási problémák $\mathcal{R}^R$ osztályán is jelentkezik. Az általános esetben újabb problémák merülnek fel (David, 1987):

1. Az objektumok ellenfelei, a vele összehasonlított objektumok különböző erősségűek lehetnek, ami befolyásolja az általuk mutatott teljesítményt;

2. Az objektumok összehasonlításainak száma eltérhet egymástól, $d_i \neq d_j$.

David (1987) szerint az objektumok megfelelő rangsorolása nem várható el, ha azok összehasonlításainak száma jelentősen különbözik. Bizonyos esetekben a páros összehasonlítások olyan mértékű inkonzisztenciát tartalmazhatnak, ami értelmetlenné teszi egy rangsor felállítását. Ezzel a kérdéssel nem foglalkozunk, de felhívjuk az olvasó figyelmét Jiang et al. (2011) tanulmányára.

Moulin (1986) tanácsát követve célszerű elkülönítve vizsgálni a győztes megadásának, illetve egy teljes rangsor felállításának kérdését – mi csak az utóbbit fogjuk vizsgálni. Bár Bouyssou (2004) a legjobb alternatíva kiválasztásának sorozatos alkalmazása révén kísérletet tett a két megközelítés egyesítésére, eredményei arra utalnak, hogy az így definiált módszerek szinte biztosan megsértenek valamilyen monotonitási tulajdonságot, ezért a probléma megoldására inkább a közvetlen rangsoroló eljárások ajánlottak.

2.6. *Jelölés.* $X_i \succeq_{(N,R,M)} X_j$ jelentése, hogy az $(N,R,M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémában X_i legalább olyan jó, mint X_j. Ez egyben meghatározza az alábbi relációkat:

- $X_i \succ_{(N,R,M)} X_j$, azaz X_i jobb X_j-nél, ha $X_i \succeq_{(N,R,M)} X_j$ és $X_j \not\succeq_{(N,R,M)} X_i$;
- $X_i \sim_{(N,R,M)} X_j$, azaz X_i és X_j azonos erősségű, ha $X_i \succeq_{(N,R,M)} X_j$ és $X_j \succeq$ $\succeq_{(N,R,M)} X_i$;
- $X_i \perp_{(N,R,M)} X_j$, azaz X_i és X_j nem összehasonlítható, ha $X_i \not\succeq_{(N,R,M)} X_j$ és $X_j \not\succeq_{(N,R,M)} X_i$.

2.10. Definíció. *Rangsor* (ranking): Az N objektumhalmazon értelmezett reflexív és tranzitív (de nem feltétlenül teljes) $\succeq_{(N,R,M)}$ bináris reláció *rangsor*.

2.7. *Jelölés.* Az N objektumhalmazon értelmezett rangsorok halmaza $\mathcal{P}_N$.

2.11. Definíció. *Lineáris rendezés* (linear order): Az N objektumhalmazon értelmezett irreflexív, tranzitív, és teljes $\succ_{(N,A,M)}$ bináris reláció *lineáris rendezés*.

2.8. *Jelölés.* Az N objektumhalmazon értelmezett lineáris rendezések halmaza $\mathcal{L}_N$.

2.3. *Megjegyzés.* Minden lineáris rendezés tekinthető rangsornak, fordítva azonban nem feltétlenül, tehát $\mathcal{L}_N \subset \mathcal{R}_N$.

A rangsor meghatározásának egy lehetséges módja az alábbi (a továbbiakat lásd Csató (2013b)).

2.12. Definíció. *Pontozási eljárás* (scoring procedure): Egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ függvény *pontozási eljárás*.[3]

2.4. *Megjegyzés.* Egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás meghatározza a $\succeq^f : \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszert az $f_i(N,R,M) \geq f_j(N,R,M) \Rightarrow X_i \succeq^f_{(N,R,M)} X_j$ definícióval. A kapott rangsor egyértelmű és teljes, $X_i \perp^f_{(N,R,M)} X_j$ nem lehetséges.

2.13. Definíció. *Arányosság* (proportionality): Az $f^1, f^2 : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárások *arányosak*, ha létezik olyan $\kappa > 0$ konstans, hogy $f^1(N,R,M) = \kappa f^2(N,R,M)$ minden $(N,R,M) \in \mathcal{R}$-re.

2.9. *Jelölés.* Az $f^1, f^2 : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárások arányosságának jele $f^1 \propto f^2$.

2.2. Lemma. *Arányos pontozási eljárások által generált rangsorok azonosak.*

Számos pontozási eljárást ismertet Chebotarev és Shamis (1998) és González-Díaz et al. (2014), míg Csató (2013b) és Csató (2014b) átfogóan értékel néhányat.

[3] A definíció némileg pontatlan, mert n értéke függ a konkrét $(N,R,M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémától, azonban nem szerettük volna tovább bonyolítani a jelöléseket.

2.14. Definíció. *Pontszám módszer* (score method) (Borda, 1781; Copeland, 1951): $\mathbf{s} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$, ahol $\mathbf{s}(N, R, M) = R\mathbf{e}$ minden $(N, R, M) \in \mathcal{R}$-re.

A pontszám módszert számítása miatt sorösszegnek (row sum) is nevezik. Ez az eljárás bizonyos értelemben alkalmas a Condorcet-paradoxon kezelésére: azonos mértékű körbeverések esetén az érintett objektumok között holtversenyt ad.

Hiányzó és többszörös összehasonlítások (nem körmérkőzéses rangsorolási problémák) esetén azonban felmerül egy másik nehézség, amit a pontszám nem képes figyelembe venni: az objektumok megfigyelt teljesítményét, az r_{ij} eredményeket a mérkőzésmátrix szerkezete is befolyásolja (González-Díaz et al., 2014). Például, amennyiben X_i csupán X_j-vel került összehasonlításra egyetlen alkalommal, nem mindegy, vajon ez a végső rangsor szerint legjobb vagy legrosszabb objektum. Így, intuitív alapon, szükségessé válhat az ellenfelek, majd az érvelést tovább folytatva, az ellenfelek ellenfeleinek stb. erejének vizsgálata (David, 1987). A következő módszer erre is alkalmas lesz.

Chebotarev (1989) néhány, a pontozási eljárásban szereplő függvénytől megkövetelt tulajdonság segítségével egy parametrikus eljáráscsaládot vezetett be, amit a szerző egy későbbi munkájában részletesen elemzett (Chebotarev, 1994).

2.15. Definíció. *Általánosított sorösszeg módszer* (generalised row sum method, *GRS*) (Chebotarev, 1989): $\mathbf{x}(\varepsilon) : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$, ahol $\varepsilon > 0$ paraméter és $(I + \varepsilon L)\mathbf{x}(\varepsilon)(N, R, M) = (1 + \varepsilon mn)\mathbf{s}$ minden $(N, R, M) \in \mathcal{R}$-re.

Az általánosított sorösszeg módszer az összehasonlítási multigráf szerkezetének segítségével figyelembe veszi az ellenfelek teljesítményét is, hiszen minden $X_i \in N$-re $(1 + \varepsilon d_i)q_i - \varepsilon \sum_{X_j \in N} m_{ij} q_j = (1 + \varepsilon mn)s_i$. Az ε paraméter a pontszám kiigazításának mértékét tükrözi, értékének megválasztásához azonban kevés támpont ismert. Az általánosított sorösszeg a Laplace-mátrix szerepeltetése miatt minden elérhető objektum értékelését figyelembe veszi. Egy alternatív megoldás lenne csak a közvetlen ellenfelek erejének beépítése, mint David (1987) módszerénél.

2.3. Lemma. *Az általánosított sorösszeg arányos a pontszám módszerrel, ha $\varepsilon \to 0$, sőt,* $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{x}(\varepsilon) = \mathbf{s}$.

Modellünkben a páros összehasonlítások eredménye korlátos, $-m \leq r_{ij} \leq m$ minden $X_i, X_j \in N$-re. Ekkor többet is mondhatunk az ε paraméterről.

2.16. Definíció. *ε ésszerű választása* (reasonable choice of ε) (Chebotarev, 1994, Proposition 5.1): Legyen $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma. Az általánosított sorösszeg módszer ε paraméterének értéke *ésszerű*, ha

$$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{m(n-2)}.$$

Az ε paraméter *ésszerű felső határa* $1/\left[m(n-2)\right]$.

Az ésszerű felső határ kiszámításához szükséges az $n \geq 3$ implicit feltevés, $n = 2$ esetén a rangsorolási probléma megoldása amúgy is triviális.

2.1. Állítás. *Az ε paraméter ésszerű választása esetén $-m(n-1) \leq x_i(\varepsilon) \leq m(n-1)$ minden $X_i \in N$-re.*

Bizonyítás. Lásd Chebotarev (1994, Property 13). □

Ez az eredmény azért kívánatos, mert egy $(N, R, M) \in \mathcal{R}^R$ körmérkőzéses rangsorolási problémában $-m(n-1) \leq x_i(\varepsilon) \leq m(n-1)$ minden $X_i \in N$-re.

2.2. Állítás. *A pontszám és az általánosított sorösszeg módszereknek minden $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma mellett egyértelmű megoldása létezik.*

Bizonyítás. Lásd Chebotarev (1994, Property 1). A 2.1. lemma szerint a Laplace-mátrix pozitív szemidefinit, így $I + \varepsilon L$ tetszőleges ε esetén invertálható. □

A következő eljárás több tudományterület szakirodalmában is jól ismert, eredetéhez lásd Csató (2014a).

2.17. Definíció. *Legkisebb négyzetek módszere* (least squares method, LS): $\mathbf{q} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$, ahol $L\mathbf{q} = \mathbf{s}$ és $\mathbf{e}^\top \mathbf{q} = 0$ minden $(N, R, M) \in \mathcal{R}$-re.

Ebből $d_i q_i - \sum_{X_j \in N} m_{ij} q_j = s_i$ minden $X_i \in N$-re. A legkisebb négyzetek módszere szoros kapcsolatban áll az általánosított sorösszeg eljárással.

2.3. Állítás. *Az általánosított sorösszeg arányos a legkisebb négyzetek módszerével, amennyiben $\varepsilon \to \infty$, mégpedig $\lim_{\varepsilon \to \infty} \mathbf{x}(\varepsilon) = mn\mathbf{q}$.*

Bizonyítás. Az arányosságot lásd Chebotarev és Shamis (1998, 326. o.). $\varepsilon \to \infty$ határátmenetben az általánosított sorösszeg $(I + \varepsilon L)\mathbf{x}(\varepsilon)(N, R, M) = (1 + \varepsilon mn)\mathbf{s}$ egyenletrendszerének konstans együtthatójú tagjai elhanyagolhatóvá válnak, ennek következtében $\lim_{\varepsilon \to \infty} L\mathbf{x}(\varepsilon) = mn\mathbf{s} = mnL\mathbf{q}$. □

Eszerint az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere egyaránt tekinthető a pontszám egyfajta kiigazításának az összehasonlítási multigráf szerkezetének segítségével, annak Laplace-mátrixán keresztül, ahol az ε paraméter a korrekció mértékét tükrözi. Az általánosított sorösszeg módszer a legkisebb négyzetes becslés bayesi változataként értelmezhető (Chebotarev, 1994).

2.5. *Megjegyzés.* A pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere egy lineáris egyenletrendszer megoldását igényli, gyorsan és hatékonyan számítható (Jiang et al., 2011).

A Laplace-mátrixnak nem létezik inverze, hiszen a 2.1. lemma szerint $\mu_n = 0$, ezért felmerül a legkisebb négyzetek esetén felmerül megoldás egyértelműségének problémája.

2.4. Állítás. *A legkisebb négyzetek módszerének $\mathbf{q}$ értékelővektora akkor és csak akkor egyértelmű, ha a G összehasonlítási multigráf összefüggő, $(N, R, M) \in \mathcal{R}^O$.*

Bizonyítás. Az $(N, R, M) \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan esetben lásd Kaiser és Serlin (1978, 426. o.) és Bozóki et al. (2010, Theorem 4).

Általánosan Bozóki et al. (2014) látta be, bár – bizonyítás nélkül – Chebotarev és Shamis (1999, 220. o.) is említi ezt. □

A feltétel jelentése világos: ha található két olyan objektum, melyek nem hasonlíthatók össze sem közvetlenül, sem közvetve, más objektumokon keresztül, akkor nem állítható fel egyértelmű rangsor.

2.6. *Megjegyzés.* Chebotarev (1994, Property 5) *nulla feltevés* (zero presumption) tulajdonsága értelmében az általánosított sorösszegre, valamint a definícióból a pontszám módszerre is érvényes, hogy egy, a többivel nem összehasonlított $X_i \in N$ objektum értékelése nulla: ha $m_{ij} = 0$ minden $X_j \in N$-re, akkor $s_i(N, R, M) = x_i(N, R, M) = 0$.

Ezek alapján, a 2.3. állítás figyelembevételével, a legkisebb négyzetek módszerének egyértelműsége egy kiegészítő feltétellel is biztosítható.

1. Feltevés. *Amennyiben $(N, R, M) \notin \mathcal{R}^O$, bontsuk szét a G összehasonlítási multigráfot az összefüggő komponenseire, majd azokra külön-külön határozzuk meg a megoldást, az értékelések összegét minden esetben nullának választva.*

Az előzőek szerint a pontszám és az általánosított sorösszeg értelmezési tartománya az $\mathcal{R}$ halmaz, a legkisebb négyzetek módszeréé pedig $\mathcal{R}^O$, ami azonban egyszerűen kiterjeszthető $\mathcal{R}$-re. Ennek értelme kérdéses, hiszen bizonyos esetekben reménytelennek tűnik egy teljes rangsor felállítása: ha két objektum között sehogyan sem található kapcsolat, akkor lehetetlen megállapítani sorrendjüket. Gondoljunk például arra, hogyan hasonlítanánk össze két ország labdarúgó bajnokságának győzteseit, amennyiben nem lennének nemzetközi versenysorozatok, a Bajnokok Ligája és az Európa Liga.

Az általánosított sorösszegre Shamis (1994), a legkisebb négyzetek módszerére pedig Csató (2014a) adott gráf interpretációt; utóbbi nem reguláris páros[4] összehasonlítási multigráf esetén érvényes iteratív felbontását később használni fogjuk.

2.4. A pontozási eljárások néhány tulajdonsága

A következőkben elméletileg vonzó követelményeket fogalmazunk meg, majd megvizsgáljuk, hogy az egyes pontozási eljárások megfelelnek-e ezeknek.

2.18. Definíció. *Eredmények elfogadható transzformációja* (admissible transformation of the results): Legyen $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma. Az *eredmények elfogadható transzformációja* egy olyan $(N, kR, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémát eredményez, amire $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$ és $kr_{ij} \in [-m_{ij}, m_{ij}]$ minden $X_i, X_j \in N$ esetén.

A k pozitív szorzó értéke azért nem lehet tetszőleges, hogy megőrizzük a páros összehasonlítások eredményének – a 2.3. definícióban szereplő – korlátosságát. Ennek megfelelően $0 < k \leq 1$ mindig lehetséges.

2.19. Definíció. *Skála invariancia* (scale invariance, SI): Legyen $(N, R, M), (N, kR, M) \in \mathcal{R}$ két rangsorolási probléma, ahol (N, kR, M) az eredmények elfogadható transzformációjával kapható (N, R, M)-ből. Egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás *skála invariáns*, ha $f_i(N, R, M) \geq f_j(N, R, M) \Leftrightarrow f_i(N, kR, M) \geq f_j(N, kR, M)$ minden $X_i, X_j \in N$-re.

[4] A *nem reguláris páros* kifejezés azt jelenti, hogy a gráf nem lehet egyszerre reguláris és páros.

A skála invariancia szerint az objektumok rangsora változatlan, amennyiben a győzelmek ($r_{ij} > 0$) és a vereségek ($r_{ij} < 0$) mértékét – a pontozási eljárások értelmezési tartományán, az $\mathcal{R}$ halmazon belül maradva – arányosan módosítjuk.

Ez főleg a gyakorlati alkalmazások szempontjából tűnik fontosnak. Amennyiben a páros összehasonlítások eredménye nem mérhető folytonos skálán, hanem csak diszkréten[5], akkor nem egyértelmű, ezek hogyan jeleníthetők meg az R eredménymátrixban. A skála invariancia értelmében ez bizonyos esetekben nem számít: ha például három kimenetel lehetséges, a (győzelem $\Rightarrow r_{ij} = \kappa$; döntetlen $\Rightarrow r_{ij} = 0$; vereség $\Rightarrow r_{ij} = -\kappa$) kódolással az objektumok sorrendje független $0 < \kappa \leq \min_{X_i, X_j \in N} m_{ij}$ konkrét értékétől.

2.4. Lemma. *A pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere teljesíti az SI tulajdonságot.*

Bizonyítás. Az eljárások definícióiban szereplő lineáris egyenletrendszerek $\mathbf{s}$, $\mathbf{x}(\varepsilon)$ és $\mathbf{q}$ megoldásai egyaránt k-szorosukra változnak, így például $\mathbf{s}(N,R,M) \propto \mathbf{s}(N,kR,M)$. □

Az $\mathcal{R}^R$ körmérkőzéses rangsorolási problémák osztálya tűnik a legtágabb olyannak, ahol még nem érvelhetünk a pontszám módszer ellen a függetlenség az irreleváns mérkőzésektől tulajdonság teljesülésével González-Díaz et al. (2014). Ezért logikusnak tűnik egy olyan feltétel megfogalmazása, ami biztosítja a pontszámmal megegyező rangsort ezen a halmazon.

2.20. Definíció. *Pontszám konzisztencia* (score consistency, *SCC*) (González-Díaz et al., 2014): Egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás *pontszám konzisztens*, ha minden $(N,A,M) \in \mathcal{R}^R$ körmérkőzéses rangsorolási probléma esetén $f_i(N,R,M) \geq f_j(N,R,M) \Leftrightarrow s_i(N,R,M) \geq s_j(N,R,M)$ tetszőleges $X_i, X_j \in N$-re.

Egy hasonló tulajdonságot Zermelo (1928) úttörő dolgozata is említ, David (1987, Property 3) szintén ilyen követelményt fogalmaz meg.

2.7. *Megjegyzés.* Az általánosított sorösszegre Chebotarev (1994, Property 3) egy ennél erősebb tulajdonságot adott *egyetértés* (agreement) néven: ha $(N,R,M) \in \mathcal{R}^R$ egy körmérkőzéses rangsorolási probléma, akkor $\mathbf{x}(N,R,M) = \mathbf{s}(N,R,M)$.

2.5. Lemma. *A pontszám, az általánosított sorösszeg, és a legkisebb négyzetek módszere teljesíti az SCC tulajdonságot.*

Bizonyítás. Az általánosított sorösszeghez lásd a 2.7. megjegyzést, a legkisebb négyzetek módszeréhez pedig González-Díaz et al. (2014, Proposition 5.3)-at. □

A tárgyalt módszerek további tulajdonságaihoz lásd González-Díaz et al. (2014) és Csató (2014b).

[5] Vagy kvázi diszkréten: egy labdarúgó mérkőzés eredménye ugyan elvileg tetszőleges lehet, mégis ritka az olyan alkalom, amikor a két csapat együttesen 5-6 gólnál többet rúg.

3. Svájci rendszerű sakk csapatversenyek rangsorolásának modellezése

A résztvevők teljesítménye számos sportban csak egymáshoz képest, páros összehasonlításokkal értékelhető, ugyanakkor egy versenyen az indulók nagy száma, azok túlterhelésének elkerülése, a mérkőzés költségessége, illetve időhiány miatt nincs lehetőség egy teljes körmérkőzéses bajnokság rendezésére. Erre a problémára például a svájci rendszer (Swiss system) kínál megoldást: a torna előre megadott számú m körig (round) tart, az n játékos között minden fordulóban páros mérkőzéseket rendeznek (a résztvevők páratlan száma jelentette problémákra nem térünk ki). Az alábbiakban az ilyen formában rendezett sakkversenyekkel foglalkozunk.

3.1. Svájci rendszerű sakkversenyek jellemzői

Az előbb említett korlátok figyelembevételével valamilyen eljárással bármely n-hez meghatározható egy alkalmas (optimális?) m, bár a szervező ennek kiválasztásakor általában csak a résztvevők hozzávetőleges számát ismeri. A továbbiakban ezt adottságnak tekintjük, ahogy a játékosok számát is.

Svájci rendszerű versenyeknél két további, matematikai szempontból értelmezhető kihívás merül fel: hogyan párosítsuk a játékosokat (az egyes fordulókban kik között rendezzenek mérkőzéseket), illetve miként határozzuk meg a végeredményt, a résztvevők sorrendjét az m forduló lejátszását követően. Az első kérdést nem tárgyaljuk, csak röviden ismertetjük az alkalmazott eljárást. A svájci rendszerű sakkversenyek párosító algoritmusának alapelve, hogy lehetőség szerint azonos múltbeli teljesítményű játékosok mérkőzzenek meg egymással. A torna első fordulójában ez semmitmondó feltétel, így többnyire valamilyen külső információt vesznek figyelembe. Ezt követően a teljesítményt a játékosok pontszámával mérik, a mérkőzéseket azonos (vagy közel azonos) pontszámú csoportokon belül rendezik meg. Emellett arra is figyelni kell, hogy a világos-sötét mintázat megfelelő legyen. A különböző párosító algoritmusokról a nemzetközi sakkszövetség (Fédération Internationale des Échecs, FIDE) szabályzatában olvashatunk (FIDE, 2014), míg Kujansuu et al. (1999) egy stabil párosításon alapuló javaslatot ad a feladatra.

Egy sakkmérkőzés kétféle eredménnyel zárulhat: valamelyik játékos nyer, vagy döntetlen. A győztes többnyire egy, a vesztes nulla pontot kap, míg a döntetlen fél-fél pontot jelent számukra (néhány esetben, a labdarúgáshoz hasonlóan, győzelemért három, döntetlenért egy pont jár).

A rangsorolás szinte mindig egy olyan lexikografikus rendezés, melynek elsődleges szempontja a játékosok pontszáma. Ez még nem elegendő a holtversenyek eldöntésére, mert az m fordulóban legalább 0 és legfeljebb $2m$, azaz $2m+1$-féle pontszám szerezhető, így $m < n/2 - 1$ esetén az n játékos között garantáltan lesznek azonos pontszámúak. Ekkor különböző holtverseny-eldöntő szabályok (tie-breaking rules) alkalmazása válik szükségessé, lásd például FIDE (2014).

Az érdeklődők körében jól ismert, hogy a svájci rendszerű versenyek végeredményét döntően befolyásolhatja a párosítás: miután a játékosok különböző ellenfelekkel találkoznak, előnybe kerülhet az, aki gyengébb párokat kapott. Ezen probléma kezelésére a fenti elven nyugvó párosító algoritmus és a lexikografikus rendezés teljes mértékben nem alkalmas (Csató, 2012a, 2013a; Brozos-Vázquez et al., 2010; Jeremic és Radojicic, 2010). Tekintsünk két, az m forduló lejátszása után azonos pontszámú X_i és X_j játékost. X_i *belső kör*ön haladt, amennyiben pontjainak többségét az első körökben szerezte. Ehhez hasonlóan, X_j *külső kör*ön haladt, ha pontjainak nagy részét az utolsó fordulókban szerezte. Bár egyik sem formális definíció, a külső körös X_j játékos feladata könnyebbnek tűnik, hiszen a kezdeti szerényebb teljesítmény okán a párosító algoritmus számára gyengébb ellenfeleket ad. Ilyen helyzet akkor is előállhat, amikor X_j pontszáma kicsit meghaladja X_i-ét, ekkor viszont a lexikografikus rendezés alapján X_j biztosan előrébb kerül X_i-nél.

Ez a megállapítás ugyan szigorúan nézve csak akkor igaz, ha a gyengébb és erősebb fogalmak mérésére valóban megfelelő a pontszám (az imént mondottak szerint nem mindig ez a helyzet), a fenti rangsorolási módszer mégis jellemzően a külső körös játékosoknak kedvez. Természetesen lehet érvelni amellett, hogy a fokozatosan javuló teljesítmény többet ér az egyre romlónál, de ekkor a végeredmény olyan szubjektív értékítéletet tartalmaz, ami egy pozitív tudomány számára nehezen elfogadható. Ugyanilyen probléma merül fel egyes pontozási eljárásoknál, például a fair betsnél vagy a pozíciós erőnél (Csató, 2013b).

Csapatversenyek esetén azok tagjai $2t$, páros számú táblán mérkőznek meg egymással,[6] így különbséget kell tenni a csapat által elért *mérkőzéspont*ok (match points) és a csapattagok által szerzett *táblapont*ok[7] (board points) között. Utóbbiban a játékosok egyes táblákon elért pontszámát először mérkőzésenként, majd fordulónként összegzik. Minden táblán egy, azaz a teljes mérkőzésen $2t$ táblapont kerül szétosztásra. A mérkőzéspontokat szintén fordulónként számítják, a csapatok mérkőzésének eredményét a táblapontok száma határozza meg:

- kettő, ha az adott mérkőzésen elért táblapontok száma legalább $t + 0{,}5$, vagyis a csapat ellenfelénél többet szerzett;
- egy, ha az adott mérkőzésen elért táblapontok száma t, azaz a csapat ellenfelével megegyező számút szerzett;
- nulla, ha az adott mérkőzésen elért táblapontok száma legfeljebb $t - 0{,}5$, tehát a csapat ellenfelénél kevesebbet szerzett.

A lexikografikus rendezés fő szempontjaként szinte kizárólag ezek valamelyike szolgál. Az utóbbi időben talán elterjedtebb a mérkőzésponton alapuló rangsorolás, ezt használják a sakkolimpián és a csapat Európa-bajnokságon is.

3.2. A sorrend meghatározása pontozási eljárásokkal

Mivel $r < n - 1$, a résztvevők nem mérkőznek meg minden lehetséges ellenfelükkel, ugyanakkor a párosítás kizárja, hogy két szereplő egynél többször játsszon egymás ellen. Tehát modellünkben egy olyan $(N, R, M) \in \mathcal{R}^U$ súlyozatlan rangsorolási

[6] Általában minden csapatnak előre meg kell határoznia, hogy a $2t$ csapattag közül ki melyik (hányas számú) táblán játsszon. A mérkőzéseken az azonos sorszámú táblán játszók kerülnek szembe egymással. Lehet néhány tartalék játékos is, akik tetszőleges táblán helyettesíthetik a többieket.

[7] Ezt több helyen játékpont (game point) néven említik.

problémáról beszélhetünk, ahol az N objektumhalmaz a játékosok, az M mérkőzésmátrix pedig a párosítás által adott: $m_{ij} = 1$ akkor és csak akkor, ha $X_i \in N$ és $X_j \in N$ játszott egymással, különben $m_{ij} = 0$.[8]

Az előző fejezet alapján a végeredmény meghatározására, a játékosok sorrendjének kialakítására akár pontozási eljárások is alkalmazhatók, amihez a fentiek szerint csak a rangsorolási probléma R eredménymátrixát kell megadni. Ez egyéni versenyek esetén megnyugtató módon nem lehetséges, mert világos előnyben van sötéttel szemben, a páros összehasonlítások kimenetele nem szimmetrikus, ami viszont modellünkben nem megengedett. Ugyan vannak olyan egyéni versenyek, ahol a mérkőzéseket mindkét színkiosztással lejátsszák, de ezek jellemzően körmérkőzéses tornák. Csapatversenyeknél azonban a két csapat mérkőzését azok tagjai $2t$, páros számú táblán játsszák le, egy fordulóban ugyanannyian játsszanak világossal, mint sötéttel. Ekkor többé-kevésbé elfogadható feltevésnek tűnik az, hogy a színkiosztásnak nincs jelentősége, ezért a továbbiakban sakk csapatversenyekkel foglalkozunk.

3.1. *Jelölés.* $\mathbf{mp}$, illetve $\mathbf{gp}$ a mérkőzéspontok, illetve táblapontok vektora. $m \leq n-1$ a svájci rendszernek megfelelően lejátszott fordulók száma. $2t$ az egy mérkőzésen játszó csapattagok száma.

Az $\mathbf{mp}$ és $\mathbf{bp}$ vektorokból kapott sorrendek megegyeznek a gyakorlatban használt lexikografikus rendezésen alapuló rangsorokkal, kivéve, hogy a holtversenyeket nem döntik el.

A mérkőzés- és táblapontok megkülönböztetése miatt először két eljárást javasolunk az R eredménymátrix meghatározására, majd közös keretbe helyezzük azokat. $m_{ij} = 0$-ra nem szükséges megadni az eredménymátrix megfelelő r_{ij} elemét, mert a 2.3. definíció szerint ekkor $r_{ij} = 0$.

3.2. *Jelölés.* Az $X_i \in N$ csapat által az $X_j \in N$ csapat elleni mérkőzésen elért mérkőzés-, és táblapontok száma MP_{ij}, és BP_{ij}.

3.1. Definíció. *Mérkőzésponton alapuló eredménymátrix* (match points based results matrix): Az $(N, R^{MP}, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma eredménymátrixa *mérkőzésponton alapul*, ha $r_{ij}^{MP} = MP_{ij} - 1$ minden $X_i, X_j \in N$-re.

3.2. Definíció. *Táblaponton alapuló eredménymátrix* (board points based results matrix): Az $(N, R^{BP}, M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma eredménymátrixa *táblaponton alapul*, ha $r_{ij}^{BP} = \left(BP_{ij} - t\right)/t$ minden $X_i, X_j \in N$-re.

3.3. Definíció. *Általánosított eredménymátrix* (generalised results matrix): Az $(N, R^{P}(\lambda), M) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma eredménymátrixa *általánosított*, ha $r_{ij}^{P}(\lambda) = (1-\lambda)\left(MP_{ij} - 1\right) + \lambda\left(BP_{ij} - t\right)/t$ minden $X_i, X_j \in N$-re, ahol $\lambda \in (0,1)$ egy paraméter.

[8] Az egyes fordulók megkülönböztetését indokolatlannak tartjuk, bár – főleg előrejelzési szempontból – lehetne érvelni a későbbiek nagyobb jelentősége mellett. A Formula-1 autóversenyek értékelésénél az elmúlt hónapokban élénk vita bontakozott ki arról a normatív szempontból nehezen védhető, elsősorban a nézői érdeklődés fenntartása céljából született javaslatról, hogy az utolsó (vagy az utolsó három) futamon a helyezettek kétszeres pontszámban részesüljenek. Lásd például `http://www.bbc.com/sport/0/formula1/25859321` és `http://www.bbc.com/sport/0/formula1/25955560`.

Az eredménymátrix mindegyik esetben ferdén szimmetrikus és $r_{ij} \in [-m_{ij}, m_{ij}]$ minden $X_i, X_j \in N$-re, tehát valóban érvényes rangsorolási problémát kapunk.

3.1. Lemma. *Az általánosított eredménymátrix határértéke a mérkőzésponton alapuló eredménymátrix, ha $\lambda \to 0$: $\lim_{\lambda \to 0} R^P(\lambda) = R^{MP}$. Az általánosított eredménymátrix határértéke a táblaponton alapuló eredménymátrix, ha $\lambda \to 1$: $\lim_{\lambda \to 1} R^P(\lambda) = R^{BP}$.*

Bizonyítás. A definíciók alapján $R^P(\lambda) = (1-\lambda)R^{MP} + \lambda R^{BP}$. □

3.2. Lemma. *R^{MP} esetén a pontszám módszer ekvivalens az* $\mathbf{mp}$ *mérkőzéspont vektorral.*

Bizonyítás. A résztvevő csapatok páros száma miatt $d_i = m$ minden $X_i \in N$-re, ezért $\mathbf{s} = \mathbf{mp} - m\mathbf{e}$. □

3.3. Lemma. *R^{BP} esetén a pontszám módszer ekvivalens a* $\mathbf{bp}$ *táblapont vektorral.*

Bizonyítás. A résztvevő csapatok páros száma miatt $d_i = m$ minden $X_i \in N$-re, ezért $\mathbf{s} = \mathbf{bp} - m\mathbf{e}$. □

Ezek alapján kaphatjuk a gyakorlati alkalmazást megalapozó fő eredményünket.

3.1. Tétel. *Legyen $(N, R, M) \in \mathcal{R}^R$ egy körmérkőzéses rangsorolási probléma. Az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere R^{MP} esetén a mérkőzéspontok, míg R^{BP} mellett a táblapontok vektorával azonos rangsort eredményez.*

Bizonyítás. Az SCC tulajdonság teljesülése (2.5. lemma) miatt az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszere ekvivalens a pontszám módszerrel, így a 3.2. és a 3.3. lemmákból adódik az állítás. □

Eszerint mindkét eljárás tekinthető a hivatalosan használt lexikografikus rendezés olyan kiterjesztésének, mely az ellenfelek figyelembevételével próbálja kezelni a mérkőzések hiányát, az ideálisnak tekinthető körmérkőzéses esetnél kevesebb eredmény ismeretét. Amennyiben a hivatalos szabályzat a mérkőzéspontokat tekinti a sorrend alapjának, nyilván az R^{MP} kódolást célszerű használni. Kis, 0-hoz közeli λ értékek mellett az általánosított eredménymátrixból ehhez közeli eredmény kapható, de bizonyos mértékben a táblapontok száma, a győzelmek vagy vereségek mértéke is számítani fog. Utóbbi λ növekedésével egyre fontosabbá válik, végül az R^{BP} eredménymátrixhoz jutunk, ami a táblaponton alapuló sorrendet terjeszti ki svájci rendszerű versenyekre..

Az ellenfelek teljesítményének beépítése szimulációs vizsgálatok alapján azzal a gyakorlati előnnyel is jár, hogy nincs szükség a holtversenyeket eldöntő további szabályok alkalmazására.

Szintén komoly jelentőséggel bír az alábbi megállapítás.

3.1. Állítás. *Legyen $(N, R, M) \in \mathcal{R}$ egy rangsorolási probléma és $k \in (0,1]$. Az általánosított sorösszeg és a legkisebb négyzetek módszerével kapott rangsor az R^{MP} és kR^{MP}, illetve az R^{BP} és kR^{BP} eredménymátrixok esetén azonos.*

Bizonyítás. Az SI tulajdonság teljesüléséből (2.4. lemma) következik. □

A 3.1. állítás értelmében – az objektumok sorrendje szempontjából – csupán egyetlen mérkőzéspontokon alapuló kódolás létezik, ha elfogadjuk, hogy a győzelem jobb a vereségnél. Ugyanígy, a különböző mérkőzéseken szerzett táblapontok egyenlőségének előírása egyetlen eredménymátrixszá való transzformációt tesz lehetővé. A skála függetlenség hiányában bizonytalan lenne, milyen megfeleltetést alkalmazzunk, például a győzelmeket $r_{ij} = 0{,}5$ vagy $r_{ij} = 1$ reprezentálja.

További axiómák vizsgálata[9] alapján mind az általánosított sorösszeg, mind a legkisebb négyzetek módszere elfogadhatónak tűnik a svájci rendszerű sakk csapatversenyek végeredményének meghatározására. Legfőbb előnyük, hogy közel állnak a jelenleg elfogadott eljárások koncepciójához, egy lineáris egyenletrendszer megoldásaként számíthatók, és az összehasonlítási multigráf segítségével jól interpretálhatók. Emellett a mérkőzés- és táblapontok használatával szemben nem igényelnek kiegészítő szabályokat a holtverseny eldöntésére; ha két csapat értékelése mégis azonos lenne, érdemes elgondolkodni ennek megőrzésén.

A fenti eredmények nyomán a pontozási eljárások közül a pontszámot, az általánosított sorösszeget, és a legkisebb négyzetek módszerét fogjuk alkalmazni.

4. Alkalmazás: sakkcsapat Európa-bajnokságok

Ebben a fejezetben egy konkrét elemzést mutatunk be a svájci rendszerű sakk csapatversenyek 3. fejezetben ismertetett modellezése alapján.

4.1. Választott példák és megvalósítás

A bemutatott módszereket két sakk csapatversenyen keresztül illusztráljuk:

- 18. férfi (open[10]) sakkcsapat Európa-bajnokság (EB), 2011. november 3-11., Porto Carras, Görögország.
  Honlap: `http://euro2011.chessdom.com/`
  Versenyszabályzat: ECU (2012)
  Eredmények: `http://chess-results.com/tnr57856.aspx`

- 19. férfi (open) sakkcsapat Európa-bajnokság, 2013. november 7-18., Varsó, Lengyelország.
  Honlap: `http://etcc2013.com/`
  Versenyszabályzat: ECU (2013)
  Eredmények: `http://chess-results.com/tnr114411.aspx`

Mindkét versenyen $n = 38$ csapat szerepelt, melyek $2t = 4$ táblán $m = 9$ fordulót játszottak egymással. Az eredmények hozzáférhetősége mellett elsősorban ez indokolta kiválasztásukat: az egymás elleni mérkőzésekből adódó G összehasonlítási multigráfnak 171 éle van, reguláris, és nem páros. Körmérkőzéses esetben $n(n-1)/2 = 703$ eredmény lenne ismert, ennek körülbelül a áll rendelkezésre.

[9] Ezt bírálat alatti doktori értekezés-tervezetünkben tettük meg. Itt azért nem ismertetjük minden részletét, mert az újabb tulajdonságok bevezetése és elemzése nem sokat tenne hozzá a gyakorlati alkalmazáshoz, ugyanakkor meglehetősen nagy terjedelmet igényelne.

[10] A magyar csapatban mindkét tornán szerepelt Polgár Judit.

A két torna eredményeit, a résztevő csapatok egymás elleni táblapontszámait az F.II. Függelék 3.a és 3.b (2011), illetve 4.a és 4.b (2013) táblázatai tartalmazzák. Az összecsapás győztese a legalább 2,5 táblapontot elérő csapat, a 2 döntetlent, ennél kevesebb pedig vereséget jelent. A nem lejátszott mérkőzéseket – jelöli.

A két Európa-bajnokságon a hivatalos végeredményt adó lexikografikus rendezés elsődleges szempontja a mérkőzéspontok száma ($TB1$). A holtverseny eldöntésére vonatkozó szabályok 2013-ban sorrendben az alábbiak voltak (ECU, 2013):

1. $TB2$: Sonneborn-Berger pontok összege, az ellenfelek – a legkevesebb mérkőzéspontszámú kivételével – mérkőzéspontszáma szorozva az ellenük elért táblapontok számával, majd összeadva;

2. $TB3$: táblapontok száma;

3. $TB4$: az ellenfelek táblapontjainak összege;

4. $TB5$: a legyőzött ellenfelek táblapontszámai és a döntetlenekhez tartozók táblapontszámai felének összege.

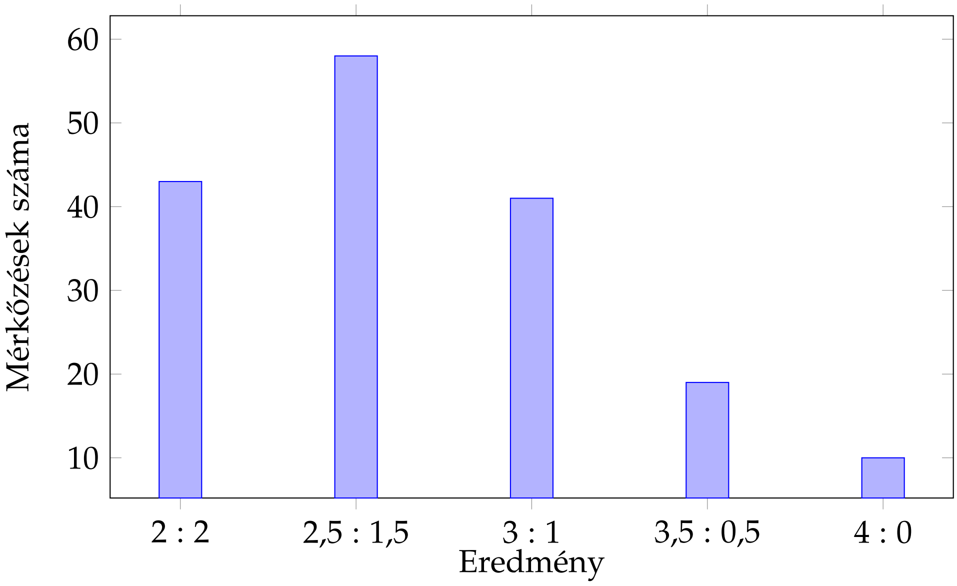
Mindenhol a magasabb pontszám jobb. A fenti jelöléssel 2011-ben a lexikografikus rendezés szempontjai sorrendben $TB1$, $TB3$, $TB4$ és $TB5$ voltak, az ötödik holtverseny eldöntésére szolgáló szabály alkalmazására nem volt szükség (ECU, 2012). Görögországban az első három, Lengyelországban már az első kettő kritérium egyértelmű rangsort, lineáris rendezést adott.

Ahogy láttuk, a $TB1$ mutató önmagában nem biztosíthatja ezt, mert a kilenc mérkőzésen legfeljebb 18 mérkőzéspont szerezhető, a résztvevők száma viszont 38, a 19 lehetséges érték kétszerese. Miután a második szempont (2011-ben a $TB3$, két évvel később a $TB2$) az elért táblapontok számát is figyelembe veszi, a csapatok mindkét tornán ösztönözve voltak ennek növelésére. Ez különösen a közepes teljesítményt nyújtókra igaz, mert a párosító algoritmus sajátosságai miatt ott sűrűsödnek a résztvevők. Egy minden mérkőzését megnyerő csapat ugyan garantáltan az első helyen végez, így szükségtelen táblapontjai növelésére törekednie, de ez a gyakorlatban elég ritkán történik meg, senki sem mehet biztosra. Más sportágakban ez nem feltétlenül igaz: míg egy teniszjátékosnak fontos a mérkőzés mielőbbi befejezése, a labdarúgásban sokszor marginális a gólkülönbség szerepe.

A 2013-as EB eredményeinek eloszlása, a több táblapontszámot elérő csapatok szempontjából, az 1. ábrán látható.[11] Eszerint a minimális arányú győzelmek a legvalószínűbbek, a 2 : 2 és 3 : 1 táblapontszámú mérkőzések gyakorisága pedig közel azonos. Ennél nagyobb mértékű fölény az összecsapások hatodában alakult ki. A 2011-es verseny hasonló képet mutat, bár ott csak 33 döntetlen született. Utóbbi azért is fontos kérdés lehet, mert a sakkban viszonylag egyszerűen, megegyezéssel elérhető ilyen eredmény, ezért a sikeres szereplésre már esélytelen csapatok körében felmerülhet az erre irányuló törekvés. A verseny előrehaladtával – részben a párosító algoritmus miatt – valóban emelkedett ezek gyakorisága, 2013-ban a nyolcadik forduló 19 mérkőzéséből kilenc döntetlennel végződött. Noha nem tudjuk kizárni a

[11] A további számítások eredményei kérésre elérhetők a szerzőnél.

1. ábra. A 2013-as sakkcsapat EB eredményeinek eloszlása



jelenség előfordulását, jobb módszer hiányában megőrizzük az eredmények változatlan értékelését.[12]

Térjünk rá a rangsorolási probléma megfogalmazására. A csapatok egyaránt érdekeltek a mérkőzéspontok és a táblapontok számának növelésében, ezért az előbbin és az utóbbin alapuló, valamint az általánosított eredménymátrix is használható. Négy különböző lehetőséget vizsgáltunk meg: R^{MP}, R^{BP}, illetve $R^{MB} = R^{P}(1/4) = 3/4\,R^{MP} + 1/4\,R^{BP}$ és $R^{BM} = R^{P}(2/3) = 1/3\,R^{MP} + 2/3\,R^{BP}$. A λ paraméter $(0,1)$ intervallumon nem szimmetrikus eloszlása azt a tényt tükrözi, hogy a mérkőzéspontok jelentősége a táblapontokénál nagyobb volt.

A pontozási eljárások tekintetében három lehetőséget vettünk figyelembe, a legkisebb négyzetek módszerén (LS) kívül az általánosított sorösszeget az $\varepsilon_1 = 1/324$ (GRS_1) és a $\varepsilon_2 = 1/6$ (GRS_2) paraméterértékek mellett. Előbbi az $1/\left[m(n-2)\right] = 1/\left[9(38-2)\right] = 1/324$, az ellenfelek szerepét meglehetősen alacsonynak minősítő, ésszerű felső határ. ε_2 meghatározásánál egyrészt arra figyeltünk, hogy lényegesen különbözzön az előbbiből származó rangsorral, másrészt ez ε_1-nél adódónál jóval közelebb áll a legkisebb négyzetek módszeréhez. A pontszám módszer alkalmazásától eltekintettünk, hiszen a mérkőzéspontok vektora a holtversenyek eldöntését leszámítva a hivatalos sorrendet adja, a táblapontok számának figyelembevételét pedig indokolatlannak tartottuk.

A legkisebb négyzetek módszerének egyértelműségéhez szükséges a G multigráf összefüggő volta (2.4. állítás), ami mindkét alkalommal a harmadik fordulót követően állt elő. Ez szinte a legkedvezőbb eset, hiszen két fordulóban csak 38 mérkőzést játszanak, és az összefüggőséghez minimálisan 37 él szükséges. Az eredmény a párosító algoritmus alapelvének köszönhető. Vagyis az általánosított sorösszeg és a legkisebb

[12] Hasonló problémát okozhat, ha egy erősebb csapat az utolsó fordulóban már egy döntetlennel képes elérni az áhított helyezést, így a kockázat minimalizálása érdekében erre vonatkozó ajánlatot tesz ellenfelének.

négyzetek módszere – a hivatalos rangsorhoz hasonlóan – a harmadik forduló végétől kezdve folyamatosan alkalmas a csapatok rangsorának meghatározására. A kevés ismert eredmény miatt igazából nem jelent korlátozást, hogy az első két fordulóban ez még nem lehetséges.

A rangsorokat a harmadiktól kezdve minden forduló után meghatároztuk a négy eredménymátrix és a három módszer mellett. Ez körönként 12 sorrendet jelent, amit a hivatalos (*Official*), és a csapattagok Élő-pontszámából adódó kezdeti, a priori rangsor (*Start*) egészít ki.

4.1. *Jelölés.* A 14 rangsor a következő: Start, Official; $GRS_1(R^{MP})$, $GRS_2(R^{MP})$, $LS(R^{MP})$; $GRS_1(R^{MB})$, $GRS_2(R^{MB})$, $LS(R^{MB})$; $GRS_1(R^{BM})$, $GRS_2(R^{BM})$, $LS(R^{BM})$; és $GRS_1(R^{BP})$, $GRS_2(R^{BP})$, $LS(R^{BP})$. Ugyanez az ábrákon sorrendben Start, Off; G1, G2, G3, G4; S1, S2, S3, S4; és L1, L2, L3, L4.

A Start és az Official rangsorok, a szabályzat szerint, egyben lineáris rendezések. Ellenőrizhető, hogy a két példában a többi 12 rangsor is ilyen, $X_i \sim X_j$ sehol sem fordul elő, így nincs szükség további holtverseny eldöntésére szolgáló szabályok alkalmazására. A két torna különböző módszerekkel kapott rangsorait az F.II. Függelék 5. (2011) és 6. (2013) táblázata tartalmazza.

4.2. A rangsorok ábrázolása

Elemzésünket a végeredmény, a kilencedik forduló után kapott rangsorok különbözőségének meeérésével kezdjük, hiszen a 38 elemű rangsorok eltérései önmagában nehezen értékelhetők. Ennek kiszámítására két lehetőséget választottunk, a *Kemény-* és a *súlyozott távolság*okat, melyek indoklása és a pontos definíciók az F.I. Függelékben olvashatók.

A 2011-es Európa-bajnokság rangsorainak δ^K Kemény-távolságai az 1.a táblázatban láthatók. Két sorrend távolságának maximuma akkor áll elő, ha az összes objektumpárt fel kell cserélni, azaz $\delta^K \leq n(n-1)/2 = 703$. Ettől minden érték jelentősen elmarad, azok legnagyobbja is csupán 130. A sok adat között nehezen fedezhető fel valamilyen törvényszerűség. Az eredményektől független Start rangsor csaknem mindegyiktől messze található. Legtöbb esetben – a táblapontszámból számított (R^{BP}) sorrendek kivételével – észrevehető az azonos eredménymátrixból (R^{MP}, R^{MB}, R^{BM} és R^{BP}) vagy módszerrel (GRS_1, $GRS2$ és LS) kapott rangsorok közötti kapcsolat. A hivatalos végeredmény megegyezik a $GRS_1(R^{MB})$ rangsorral.

A megfelelő súlyozott távolságokat az 1.b táblázat tartalmazza. Maximuma $n -$ $- 1 = 37$, míg a Kemény-távolságé ennek $n/2 = 19$-szerese. Két kiválasztott rangsor súlyozott és Kemény-távolságának aránya a 2011-es példában 8,73 és 17,44, a 2013-asban pedig 5,81 és 18,73 között található, tehát az utóbbi esetben a súlyozás valamivel jobban módosítja a távolságokat, a két megközelítés mégis várakozásainknál kevésbé tér el egymástól. Ennek oka (csak) az lehet, hogy a rangsorok eltérései a pozíciók függvényében többé-kevésbé egyenletesen fordulnak elő

A rangsorok távolságának bevezetésével azok összehasonlítása a 13-dimenziós térre redukálható, ahol 14 sorrend tökéletesen ábrázolható. Ez még mindig nehezen elemezhető, azonban lehetséges a dimenziószám további csökkentése, bár ez további információveszteséggel jár. Ehhez a Csató (2013a) tanulmányhoz hasonlóan a *sokdimenziós skálázás*t (multidimensional scaling, MDS) használtuk (Kruskal és Wish, 1978;

1.a táblázat. A 2011-es sakkcsapat EB rangsorainak Kemény-távolsága

	Start	Official	$GRS_1(R^{MP})$	$GRS_2(R^{MP})$	$LS(R^{MP})$	$GRS_1(R^{MB})$	$GRS_2(R^{MB})$	$LS(R^{MB})$	$GRS_1(R^{BM})$	$GRS_2(R^{BM})$	$LS(R^{BM})$	$GRS_1(R^{BP})$	$GRS_2(R^{BP})$	$LS(R^{BP})$
Start	0	107	100	98	100	107	99	96	110	93	93	130	99	85
Official	107	0	37	45	73	0	38	69	25	34	60	71	52	60
$GRS_1(R^{MP})$	100	37	0	16	44	37	13	42	62	31	43	108	61	53
$GRS_2(R^{MP})$	98	45	16	0	28	45	7	26	70	27	29	114	67	45
$LS(R^{MP})$	100	73	44	28	0	73	35	8	94	47	21	130	81	41
$GRS_1(R^{MB})$	107	0	37	45	73	0	38	69	25	34	60	71	52	60
$GRS_2(R^{MB})$	99	38	13	7	35	38	0	33	63	20	32	107	60	40
$LS(R^{MB})$	96	69	42	26	8	69	33	0	88	41	13	122	73	33
$GRS_1(R^{BM})$	110	25	62	70	94	25	63	88	0	49	79	46	41	71
$GRS_2(R^{BM})$	93	34	31	27	47	34	20	41	49	0	30	87	40	26
$LS(R^{BM})$	93	60	43	29	21	60	32	13	79	30	0	111	60	20
$GRS_1(R^{BP})$	130	71	108	114	130	71	107	122	46	87	111	0	57	97
$GRS_2(R^{BP})$	99	52	61	67	81	52	60	73	41	40	60	57	0	44
$LS(R^{BP})$	85	60	53	45	41	60	40	33	71	26	20	97	44	0

1.b táblázat. A 2011-es sakkcsapat EB rangsorainak súlyozott távolsága

	Start	Official	$GRS_1(R^{MP})$	$GRS_2(R^{MP})$	$LS(R^{MP})$	$GRS_1(R^{MB})$	$GRS_2(R^{MB})$	$LS(R^{MB})$	$GRS_1(R^{BM})$	$GRS_2(R^{BM})$	$LS(R^{BM})$	$GRS_1(R^{BP})$	$GRS_2(R^{BP})$	$LS(R^{BP})$
Start	0	10,8	9,68	9,60	9,39	10,8	9,54	9,15	11,3	9,45	8,66	12,2	10,0	8,10
Official	10,8	0	3,04	3,67	6,33	0,00	3,08	6,12	2,09	2,74	5,62	6,55	4,89	5,58
$GRS_1(R^{MP})$	9,68	3,04	0	1,02	3,80	3,04	0,75	3,73	5,04	2,29	3,80	9,41	5,87	4,39
$GRS_2(R^{MP})$	9,60	3,67	1,02	0	2,80	3,67	0,60	2,73	5,66	2,24	2,87	9,97	6,36	4,15
$LS(R^{MP})$	9,39	6,33	3,80	2,80	0	6,33	3,39	0,53	8,07	4,36	1,53	9,94	6,20	3,01
$GRS_1(R^{MB})$	10,8	0,00	3,04	3,67	6,33	0	3,08	6,12	2,09	2,74	5,62	6,55	4,89	5,58
$GRS_2(R^{MB})$	9,54	3,08	0,75	0,60	3,39	3,08	0	3,31	5,09	1,65	3,27	9,42	5,80	3,69
$LS(R^{MB})$	9,15	6,12	3,73	2,73	0,53	6,12	3,31	0	7,74	4,04	1,00	9,48	5,71	2,49
$GRS_1(R^{BM})$	11,3	2,09	5,04	5,66	8,07	2,09	5,09	7,74	0	4,10	7,20	4,48	3,96	6,58
$GRS_2(R^{BM})$	9,45	2,74	2,29	2,24	4,36	2,74	1,65	4,04	4,10	0	3,29	8,01	4,23	2,98
$LS(R^{BM})$	8,66	5,62	3,80	2,87	1,53	5,62	3,27	1,00	7,20	3,29	0	8,79	4,79	1,49
$GRS_1(R^{BP})$	12,2	6,55	9,41	9,97	9,94	6,55	9,42	9,48	4,48	8,01	8,79	0	4,53	7,78
$GRS_2(R^{BM})$	10,0	4,89	5,87	6,36	6,20	4,89	5,80	5,71	3,96	4,23	4,79	4,53	0	3,64
$LS_1(R^{BM})$	8,10	5,58	4,39	4,15	3,01	5,58	3,69	2,49	6,58	2,98	1,49	7,78	3,64	0

Kovács, 2011). A módszer alapelve, hogy a térben minden megfigyelésnek megfelel egy pont, és a hasonlók közelebb vannak egymáshoz. Az MDS mögött nem áll sztochasztikus modell, nincsenek eloszlásbeli megkötések és tesztelendő hipotézis, nem tételez fel oksági kapcsolatot. Egy klasszikus alkalmazási példa városok légvonalban mért távolságai alapján a térképen elfoglalt helyük (tökéletes) visszaadása. A sokdimenziós skálázás bizonyos értelemben hasonló a páros összehasonlítások alapján történő rangsoroláshoz, mindegyiknél egyfajta információtömörítés történik. A kapcsolat feltárása további kutatásokat igényel.

A sokdimenziós skálázás az eredeti távolságokat arány, intervallum, vagy ordinális skálán kezeli, esetünkben a legszigorúbb első választás alkalmazható, mert a rangsorok egyezése természetes minimumot jelent. Ekkor a redukált dimenziós térkép δ diszkrepanciái a $\delta = bd$ lineáris függvénnyel kapcsolódnak az eredeti d távolságokhoz. A leképezés jóságának eldöntésére, a dimenziócsökkentésből származó információveszteség mérésére a Kruskal-féle Stress és az RSQ mutatókat használtuk. Előbbi 0,2-nél nagyobb értéke esetén a dimenziócsökkentés nem elfogadható, míg 0,05 alatt tökéletes illeszkedésről beszélhetünk. A Stress mutató kisebb értéke kedvezőbb, a dimenziószám emelkedése biztosan nem növeli azt. Az RSQ az eredeti távolságban megfigyelhető variancia diszkrepanciák által magyarázott hányada, magasabb értéke kedvezőbb, a dimenziószám emelkedése nem csökkentheti.

A számításokat az SPSS statisztikai programcsomag 20-as verziójával készítettük.[13] Az illeszkedési mutatók alapján minden esetben elfogadtuk a két-, és elutasítottuk az egydimenziós leképezést. A tengelyeknek nem tulajdonítunk jelentést, irányuknak amúgy sincs jelentősége, a sokdimenziós skálázással kapott eredmények szimmetrikusak azokra (Kovács, 2011).[14] A pontos koordináták helyett lényegében a kapott pontok egymáshoz való pozíciója számít.

A 2. ábra a 2011-es Európa-bajnokságra Kemény-távolsággal kapott skálatérképet mutatja. A 2.a ábra megerősíti az 1.a táblázatból levont következtetéseket, a Start rangsor az összes többitől messze helyezkedik el. Ez jól magyarázható annak eltérő koncepciójával, hiszen a verseny eredményeinek figyelembevétele nélkül készült. A Stress-mutató 0,0995-ös értéke közepes mértékű illeszkedést jelent, az RSQ szerint a redukált skálatérkép az eredeti távolságok varianciájának 96,96 százalékát magyarázza. Az egydimenziós ábra Stress mutatója 0,2802, már nem elfogadható. A teljesen megegyező Official (Off) és $GRS_1(R^{BP})$ (G1) rangsorok skálatérképen elfoglalt pozíciója minimálisan különbözik, ez valószínűleg kerekítési hibák eredménye.

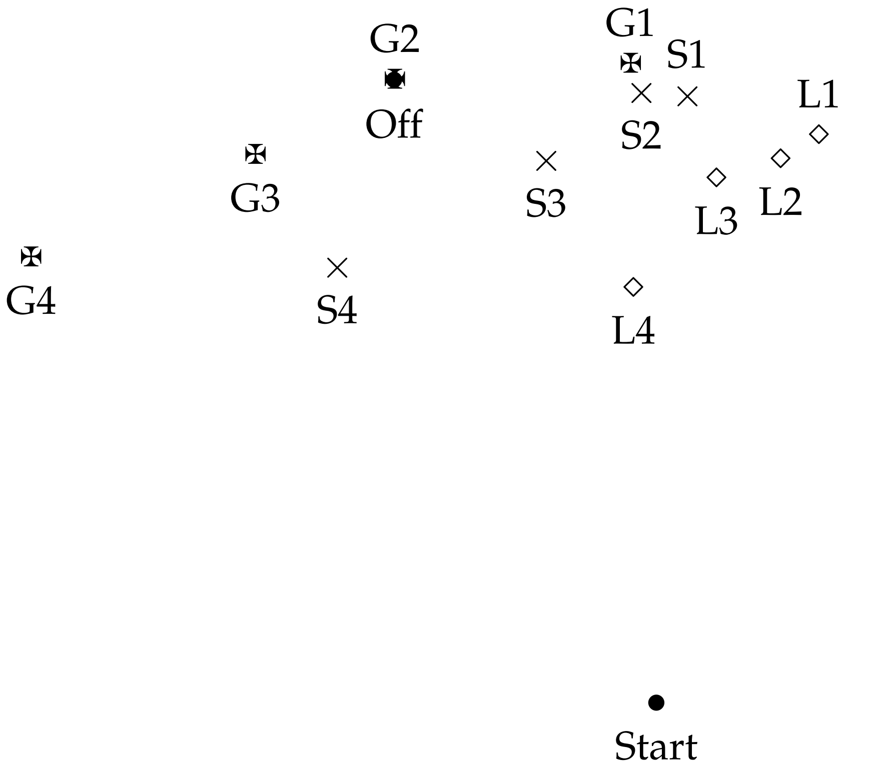
A többi sorrend megbízhatóbb összehasonlítására a számítást megismételtük a Start rangsor kihagyásával. A másik három esetben (súlyozott távolság, illetve 2013-ra Kemény- és súlyozott távolság) ez szintén outliernek tekinthető. A 2.b ábra alapján az eredménymátrix függvényében a GRS_1 módszernél látható a legnagyobb, a GRS_2 mellett közepes, míg az LS eljárásnál a legkisebb variancia. A táblapontszám (R^{BP} eredménymátrix, G4, S4 és L4) segítségével számolt sorrendek jelentősen eltérnek a többitől, különösen az előbbi kettő esetén. A hivatalos rangsorra leginkább a GRS_1 módszer hasonlít, legkevésbé pedig az LS. A rangsorok különbözősége a táblapontszám nagyobb szerepével együtt emelkedik. A skálatérkép a legkisebb négy-

[13] Az algoritmus lefutásához a szimmetrikus távolságmátrixnak legalább 10 objektumot kell tartalmaznia, részben ez indokolta az eredménymátrix többféle kódolásának használatát.

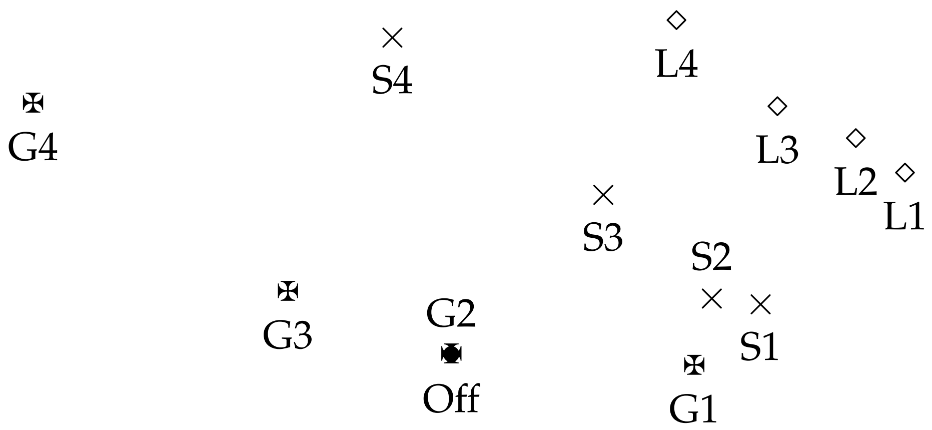
[14] A 2.a és 2.b ábrákon jól látható a függőleges tengely megfordulása.

2. ábra. A 2011-es sakkcsapat EB skálatérképei

(a) Kemény-távolság, a Start rangsorral



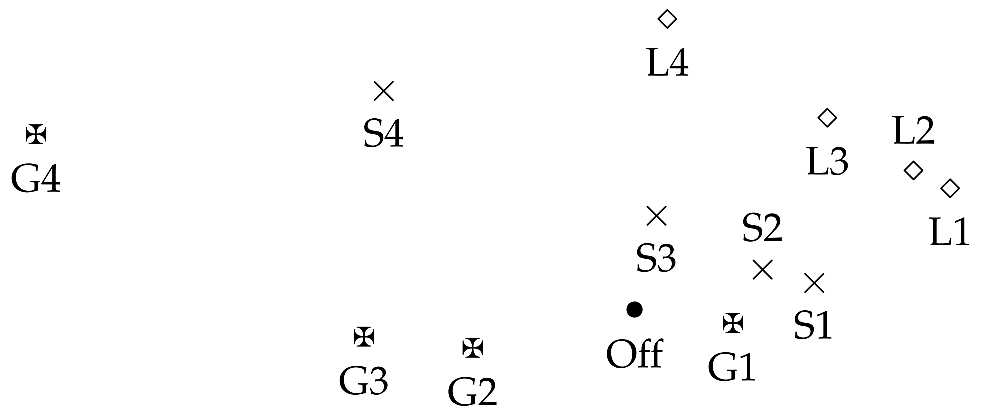
(b) Kemény-távolság, a Start rangsor nélkül



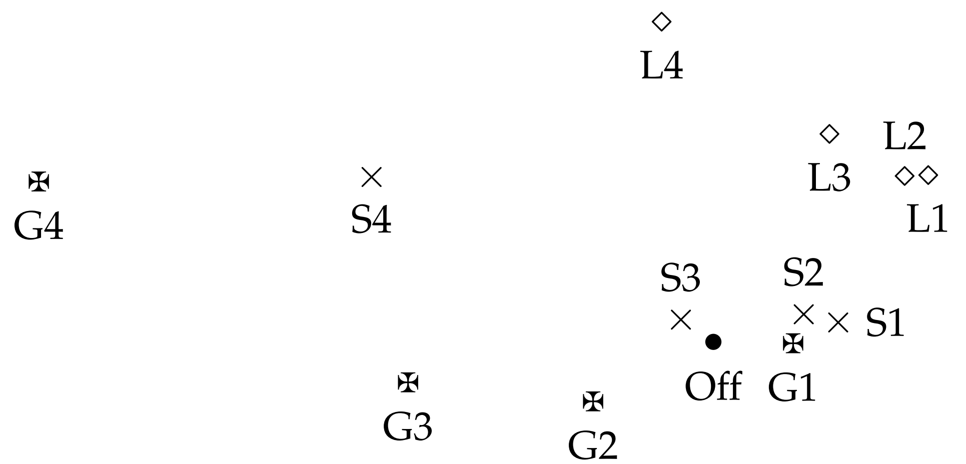
zetek módszere és a mérkőzéspontok nagyobb jelentősége mellett szolgáltat érveket. A Stress-mutató értéke a korábbinál jóval alacsonyabb (0,0264), míg az RSQ 0,9969, mindkettő szinte tökéletes illeszkedést jelez.

3. ábra. A 2013-as sakkcsapat EB skálatérképei

(a) Kemény-távolság, a Start rangsor nélkül



(b) Súlyozott távolság, a Start rangsor nélkül



A súlyozott távolság használatakor ehhez hasonló ábrákat kapunk, bár a GRS_1, GRS_2 és LS módszerek eltérése, valamint az R^{BP} eredménymátrix outlier volta jobban szembetűnik. Ennek illusztrálására a 3. ábrán mutatjuk be a 2013-as versenyre a Kemény- és súlyozott távolságok mellett adódó skálatérképeket, mindkét esetben a Start rangsor nélkül. A Stress-mutató értéke 0,0261, illetve 0,0430, a kétdimenziós MDS koordináták az eredeti távolságok varianciájának 99,74, illetve 99,37 százalékát magyarázzák, mindegyik kiváló illeszkedést jelez. Minőségi következtetéseink megegyeznek a 2.b ábrából levontakkal: az R^{BP} eredménymátrix használata, főként az általánosított sorösszegnél, nehezen indokolható, a legkisebb négyzetek módszere robusztus eredmény ad, de viszonylag messze található a hivatalostól, míg a Kemény- és súlyozott távolságok eltérése elhanyagolható, a két ábra lényegében azonos.

A Stress és RSQ mutatók alapján a kétdimenziós illeszkedés mindkét esetben nagymértékben javítható a Start rangsor elhagyásával, a Kemény-távolság a súlyozottnál jobban magyarázható. Tehát a rangsorok különbözősége a pozíciócserék helyének figyelembevétele nélkül alacsonyabb, ami a dobogón végzett csapatok eltéréseinek köszönhető, hiszen ez a súlyozás bevezetésekor sokkal meghatározóbbá válik a távolság kiszámításában. A skálatérkép némileg elfogadhatóbb a 2013-as versenyre.

4.3. A rangsorok dekompozíciója

A rangsorok összevetésére egy másik megközelítést kínál a legkisebb négyzetek módszerének gráf interpretációja. Mindkét verseny esetén kiegyensúlyozott rangsorolási problémát kapunk, a G összehasonlítási gráf reguláris, de nem páros, ezért – hurokélek hiányában – különösen jól értelmezhető Csató (2014a, Theorem 4.1) Neumann-soros (Neumann, 1877) iteratív felbontása. Ekkor az R^{MP} mérkőzéspontokon alapuló eredménymátrix használatakor a nulladik lépésben ($k = 0$) a hivatalos rangsort kapjuk vissza attól eltekintve, hogy utóbbiban a holtversenyek is eldöntésre kerültek. Az eljárás az ezt követő lépésekben a P^k hatványokon keresztül fokozatosan figyelembe veszi az ellenfelek, majd az ellenfelek ellenfeleinek stb. mérkőzéspontokkal mért erejét, így tükrözni fogja az egyes csapatok sorsolásának nehézségét is. A 2011-es EB esetén $k = 7$, a 2013-asnál pedig $k = 12$ esetén kapjuk meg a továbbiakban változatlan, a $\mathbf{q}(R^{MP})$ vektor által meghatározott végső sorrendet.

Az $LS(R^{MP})$ módszer iteratív felbontásának rangsorváltozásai a 2. táblázatban láthatók. A második oszlopban a holtversenyeket a hivatalos rangsornak megfelelőn döntöttük el, hogy elkerüljük a rangszámok torlódását (például a 13. helyezett Szerbia és a 18. Montenegró egyaránt 10 mérkőzéspontot szerzett). Mivel különböző mérkőzéspontszámok esetén erre nincs szükség, ez egyúttal azonos a hivatalos rangsorral. Az iteráció későbbi lépéseiben már nem használtunk ilyen szabályokat, mert a $\mathbf{q}^{(k)}(R^{MP})$ értékelővektor bármely két koordinátája minden $k \geq 1$-re különböző. Az egyes iterációs lépésekben a pozíció javulását a ↑, romlását a ↓ nyilak jelzik, számuk megegyezik a változás mértékével. Amennyiben ez háromnál több, értéke a megfelelő nyíl mögött zárójelben szerepel. Ennek megfelelően a ↑ és ↓ nyilak száma minden oszlopban azonos. A helyezés változatlanságát – jelzi.

Csató (2014a, Theorem 4.1) alapján $k = 1$ mellett a csapatok mérkőzéspontszámához hozzáadódik ellenfelei pontszámának átlaga, azokat részesítve előnyben, akik nehezebb sorsolással játszották a versenyt. A korrekció legnagyobb nyertese a hét pozíciót javító Szlovénia, vesztese a hat helyezést rontó Hollandia és a néggyel visszaeső Románia. Ezáltal a kilenc mérkőzéspontos Szlovénia megelőzi az ennél kettővel többet szerző Hollandiát. Három helyezéssel több csapat eredménye is változik, ennyit javít Fehéroroszország, Lengyelország 1 és Svájc, illetve ugyanennyit ront Dánia, Izland és Szerbia. A hivatalos holtverseny eldöntésére szolgáló szabályok közül az ellenfelek táblapontszámával megegyező $TB4$ utal erre.

Az ezt követő iterációs lépésekben gyakran az első irányával megegyező, de annál kisebb mértékű változás történik: a fentiek közül például Fehéroroszország és Szlovénia $k = 5$-nél még egy helyezést javít, Dánia $k = 3$-nál és $k = 9$-nél egyet-egyet ront.

2. táblázat. Pozícióváltozások az $LS(R^{MP})$ rangsor közelítésében, 2013

Hatvány	0	1	2	3	4	5	6	8	9	11	12
Anglia	10	–	↑	–	–	–	–	–	–	–	–
Ausztria	30	↑↑	↑↑	–	–	↑	–	–	–	–	–
Azerbajdzsán	1	–	↓	–	–	–	–	–	–	–	–
Belgium	33	–	–	↓	–	–	–	–	–	–	–
Bulgária	25	↑↑	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Csehország	8	↓	↓	–	–	–	–	–	–	–	–
Dánia	27	↓↓↓	↓	–	–	–	–	–	↓	–	–
Fehéroroszország	15	↑↑↑	–	–	–	↑	–	–	–	–	–
Finnország	34	–	–	↑	–	–	–	–	–	–	–
Franciaország	2	–	↑	–	–	–	–	–	–	–	–
Görögország	7	–	–	–	–	–	↓	–	–	–	–
Grúzia	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Hollandia	11	↓(6)	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Horvátország	17	↑↑	–	–	↓	–	–	–	–	–	–
Izland	29	↓↓↓	–	–	–	–	–	–	↑	–	–
Izrael	28	↑↑	↑	↑	–	–	–	–	–	–	–
Lengyelország $1^{\dagger}$	16	↑↑↑	–	–	–	↓	–	–	–	–	–
Lengyelország $2^{\ddagger}$	22	↓↓	–	↓	–	↓	–	–	–	–	–
Lengyelország 3^{*}	31	–	↑	–	–	–	↑	–	–	–	–
Litvánia	23	↓↓	↓(4)	–	–	–	↓	–	–	–	–
Macedónia	37	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Magyarország	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Montenegró	18	↓	–	↓	–	–	–	–	–	–	↓
Németország	20	–	–	↑	–	↑	–	–	–	–	–
Norvégia	35	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Olaszország	12	↑	–	–	–	↓	–	–	–	–	–
Oroszország	3	↓	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Örményország	4	↑	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Románia	14	↓(4)	↑	–	↑	–	–	–	–	–	–
Skócia	36	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Spanyolország	19	↓↓	–	–	–	–	↓	–	–	–	–
Svájc	32	↑↑↑	↑	↑	–	–	–	–	–	–	–
Svédország	26	↓	–	↓	–	–	–	–	–	–	–
Szerbia	13	↓↓↓	↓↓	–	–	↓	–	–	–	–	–
Szlovénia	21	↑(7)	–	–	–	↑	–	–	–	–	–
Törökország	24	↑↑	–	–	–	–	↑	–	–	–	↑
Ukrajna	9	↑	–	–	–	–	↑	–	–	–	–
Wales	38	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

† Poland
‡ Poland Futures
* Poland Goldies

Hollandia esetén nem történik újabb változás, Románia pedig részben visszanyeri elvesztett pozícióit, a közvetett ellenfelek ereje bizonyos mértékben kompenzálja a közvetlenek gyengeségét.

A változások abszolútértékének monotonitása alól az egyetlen kivétel Litvánia, amely $k = 1$-nél kettő, $k = 2$-nél viszont négy (!) pozíciót ront, tehát elsősorban nem az ellenfelek, hanem azok ellenfeleinek gyengesége dönt. Egy másik érdekes esetet jelent a viszonylag egyenletes megoszlással öt helyezést javító Ausztria. A változások iránya tekintetében már több csapatnál sem teljesül annak egyirányúsága: ilyen a már említett Románián kívül Horvátország, Izland, Lengyelország 1 és Olaszország. Eszerint az első körben pozíciót változtató csapatok egy részénél a későbbi iterációs lépésekben ez (bizonyos mértékben) korrigálódhat.

Az első helyen $k = 2$-nél Franciaország váltja Azerbajdzsánt, a hat vezető pozícióban a hivatalos rangsorhoz képest ez az egyetlen változás – az azonos mérkőzéspontszámmal rendelkező Oroszország és Örményország helycseréjét leszámítva. Utóbbi egyértelműen indokolt, Oroszország a verseny elején mutatott gyengébb teljesítmény után, külső körön jutott fel a dobogóra. Franciaország és Azerbajdzsán viszonyán lehet vitatkozni, az előbbi sorsolása talán kicsit nehezebb volt (ezt tükrözheti magasabb $TB4$ mutatója), a másik csapat viszont nem szenvedett vereséget. Mindenesetre sokat segítene, ha eggyel több forduló kerül megrendezésre, így lejátszhatták volna az Azerbajdzsán-Oroszország mérkőzést. Az utolsó változás Törökország és Montenegró helycseréje $k = 12$-nél. A legkisebb négyzetek módszere nem csupán az azonos mérkőzéspontú csapatok közötti holtversenyek eldöntésére szolgál, több esetben előfordul, hogy – mint azt Szlovénia és Hollandia példája mutatta – kettővel kevesebb pontszámú résztvevő előz meg egy, a hivatalos sorrend szerint nála jobb csapatot.

A svájci rendszerű versenyek hivatalos rangsorolásának hibáira a 2011-es verseny szolgáltat kiváló példát. Az első hat mérkőzésén három győzelmet és három döntetlent elérő, akkor hatodik Franciaország az utolsó három fordulóban vereséget szenvedett, így a vele azonos mérkőzéspontszámú csapatokhoz képest jóval nehezebb ellenfelekkel találkozott. Az $LS(R^{MP})$ rangsor iteratív felbontása a 2. táblázatban használt jelölésekkel:

Hatvány	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Franciaország	19	↑ (4)	↑↑↑	–	–	↑	–	↑	–

Tehát a csapat a hivatalos 19. helyett a mérkőzéspontokon alapuló eredménymátrixot használó legkisebb négyzetek módszerével már a hetedik iterációs lépés után 10. helyezést ért el. A javulás főként ellenfelei, illetve ellenfelei ellenfelei erejének köszönhető. A furcsa jelenségre szakértők is felfigyeltek.[15]

4.4. A rangsorok értékelése

A különböző rangsorok összehasonlítása után rátérhetünk a legjobb sorrend kiválasztásának kérdésére. Ehhez három megközelítést választottunk:

[15] *A franciák sokáig az élbolyban küzdöttek, a végén a svájci rendszer minden „átkának” az áldozataivá váltak.* Lásd `http://sakkblog.postr.hu/sokan-palyaznak-dobogos-helyezesre-izgalmas--utolso-fordulo-dont`. Mi azonban úgy véljük, a párosítás különbözőségből fakadó torzítások jelentős részben kiküszöbölhetők lennének a javasolt módszerek alkalmazásával, így nem kellene a svájci rendszer átkáról beszélni.

◇ Előrejelző képesség vizsgálata (predictive performance);

◇ Múltbeli eredmények leírása, mintailleszkedés (retrodictive performance);

◇ A rangsor változásai az egyes fordulók után.

Pasteur (2010) az első kettőt említi a matematikai alapú rangsoroló módszerek kritériumaként: az előrejelző eljárások célja a jövő minél pontosabb megbecslése, a múltbeli eseményeket közelítőknél ezzel szemben a mintára való illeszkedés számít. Az ökonometriai modellek többségét szintén e két csoportba sorolhatjuk.

A harmadik szempontot, a rangsor minél kisebb változékonyságot két okból is fontosnak tartjuk. Egyrészt sem a közönség, sem a résztvevők nem szeretik, ha túlságosan instabil az eredmény, egy vereség vagy győzelem után nagymértékben módosul a csapat helyezése. Természetesen a másik véglet is kerülendő, de ezt elég nehéz számszerűsíteni. Másrészt axiomatikus megközelítésben is nehéz meghatározni a svájci rendszerű versenyek optimális fordulószámát, az átváltást az esemény időbeli korlátai és a játékosok terhelése, illetve a stabil sorrend kialakítása között. Ezért egyértelműen jobbnak tűnik egy olyan módszer, ami robusztusabb, kevésbé reagál a váratlan eredményekre, mert ekkor a gyengébben szereplő résztvevők nem érvelhetnek azzal, hogy csak egy-két további forduló kellett volna képességeik érvényesítéséhez. Ennek alapján némi megszorítással úgy véljük, kedvezőbbnek tekinthető, ha a vizsgált eljárással kapott rangsorok kevésbé változnak az egyes fordulók között.

A múltbeli és jövőbeli eredmények leírásának képességét két mutatóval mérjük: egy alacsonyabbra értékelt csapat hány mérkőzés-, illetve táblapontot szerzett egy nála jobb ellenében. Ezek egyike sem veszi figyelembe a helyezések eltérésének nagyságát, nincs különbség aközött, hogy az utolsó résztvevő az első vagy az utolsó előtti ellen szerez pontot. A két mérőszám összehasonlításra így is alkalmas, emellett nem merül fel az önkényesség vádja, ami bármilyen más definíciónál nehezen lenne elkerülhető. Jövőbeli kutatásainkban azonban megfontolandónak tartjuk ezen megkötés enyhítését, módosítását.

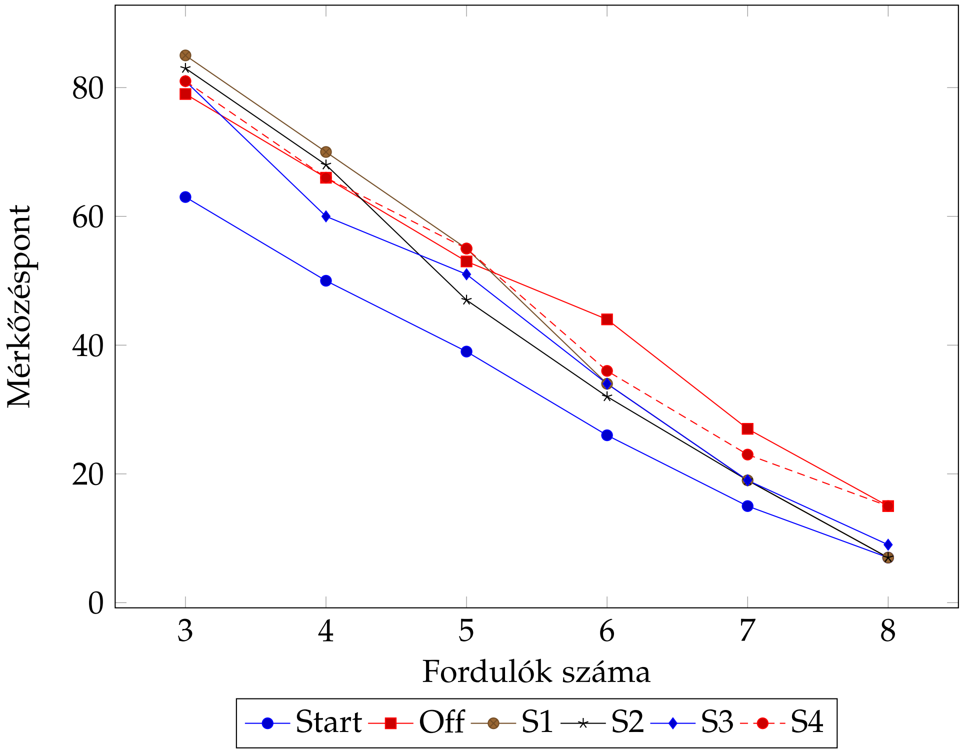
A számított mutatókat összesen öt diagramon szemléltetjük. Mindkét versenyre minőségileg azonos eredményeket kaptunk, és az alkalmazott módszerek is hasonlóan viselkednek, ezért eltekintünk az összes részlet közlésétől.

A 4. ábrán a hátrébb végző ellenfelek által az egyes fordulókat követően szerzett mérkőzés-, illetve táblapontok kumulált száma szerepel. A számítás a harmadik körtől indul, amikor az összehasonlítási multigráf összefüggővé vált. Mind a 12 általunk számított sorrend a hivatalossal azonos teljesítményt mutat, a Start rangsor bizonyul a legjobb előrejelzőnek, annak ellenére, hogy egyáltalán nem veszi figyelembe a torna korábbi eredményeit. Tehát a mérkőzések kimenetelét valamivel jobban befolyásolja a csapatok képessége, mint a verseny előző szakaszában megfigyelt eredményeik, ami azonban nem zárja ki egyes résztvevők látványosan rosszabb vagy jobb teljesítményét. A 2013-as versenyen a Start sorrend előrejelzési fölénye nem érvényesül.

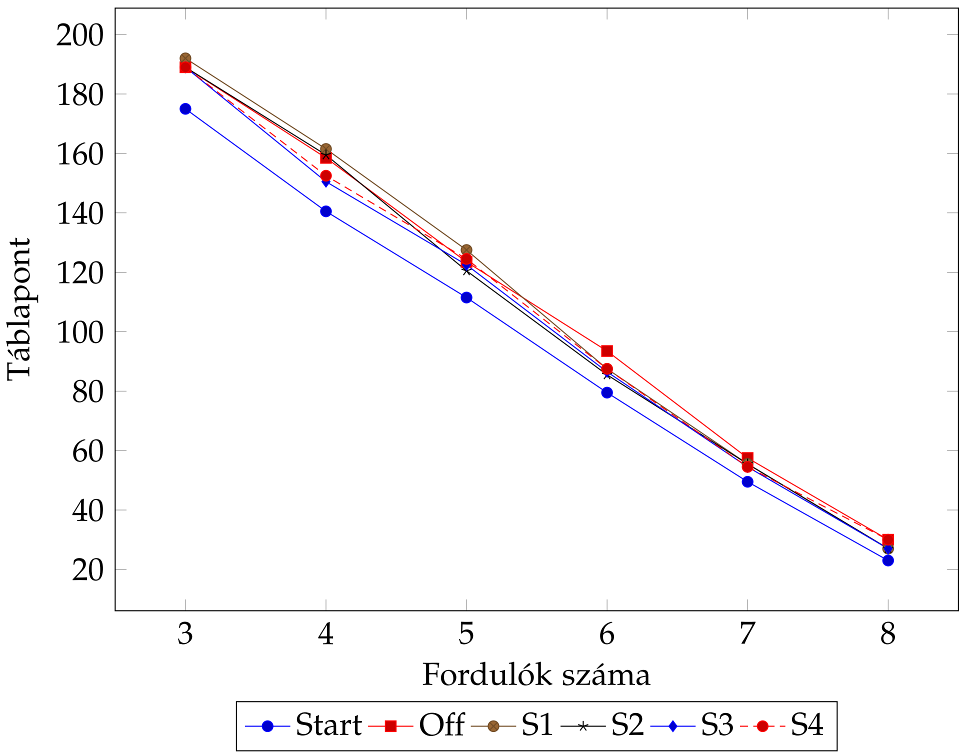
A némileg váratlan következtetés talán csak abból adódik, hogy túl hosszú időszakra akartunk előrejelezni, ezért jobb mutató lehet kizárólag a következő kör vizsgálata. Ez az F.III. Függelék 8. ábráján látható, ismét a mérkőzés-, illetve táblapontok alapján. Nagyjából minden rangsor azonosan teljesít, ezúttal még a Start sem különbözik a többitől. Tehát az előrejelzés alapján nem tudunk optimális sorrendet választani.

4. ábra. Teljes előrejelző képesség, 2011-es sakkcsapat EB

(a) Mérkőzéspont, GRS_2 eljárás

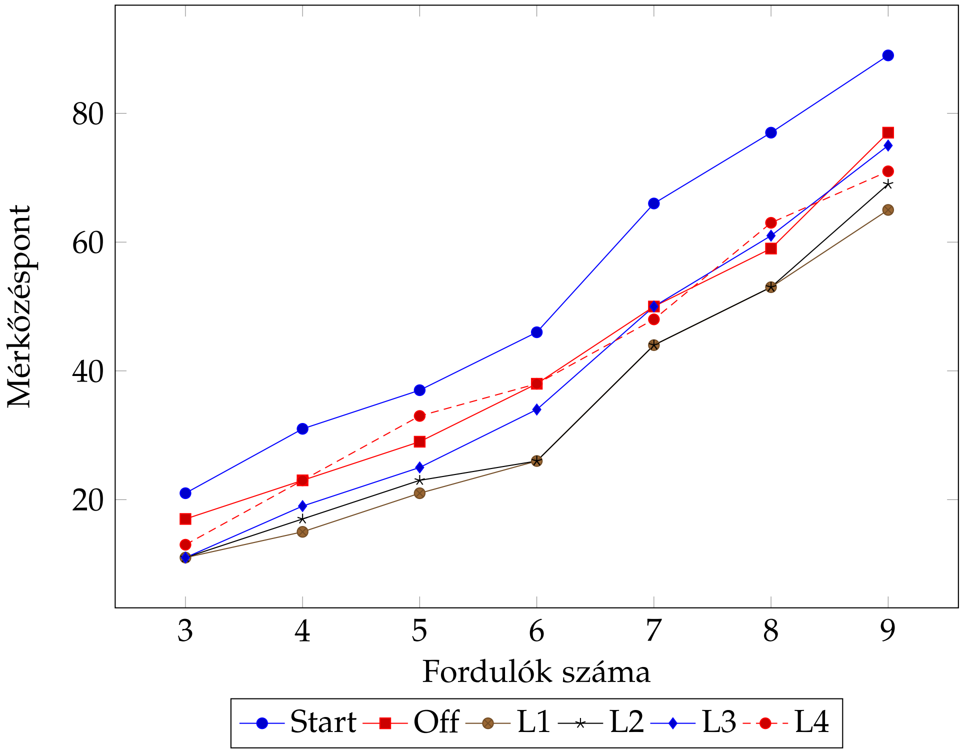


(b) Táblapont, GRS_2 eljárás

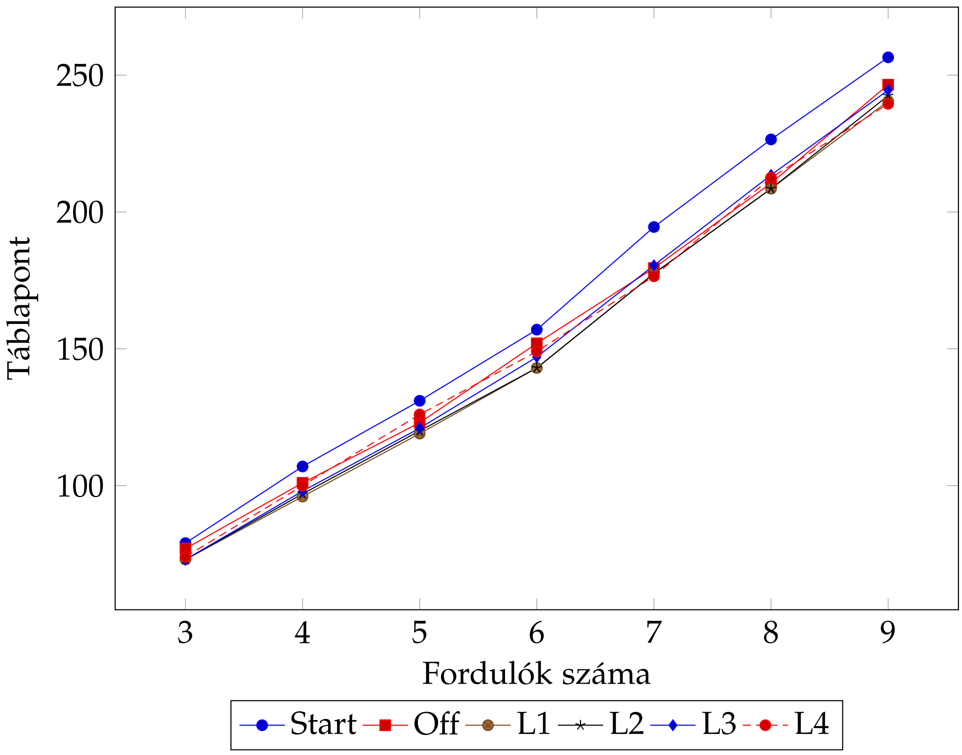


5. ábra. Mintailleszkedés, 2013-as sakkcsapat EB

(a) Mérkőzéspont, *LS* eljárás



(b) Táblapont, *LS* eljárás



Egy másik megközelítést jelent a múltbeli eredmények leírására való képesség. Az 5. ábrán az egyes fordulókban a gyengébb ellenfelek által szerzett mérkőzés-, illetve táblapontok kumulált száma szerepel a Start, a hivatalos, és a legkisebb négyzetek módszerével kapott rangsorok esetén. Ez megint a harmadik körtől kezdve számítható, de ezúttal a verseny végén is értelmezhető (ott az előrejelzés értelemszerűen nem vizsgálható).

Ugyan nem feltétlenül meggyőző mértékben, de egyértelműen az LS eljárás tűnik jobbnak, a minimális értékek többsége ezen módszer valamelyik változatánál található. Az eredménymátrix választása nem tűnik befolyásoló tényezőnek, ahogy azt az MDS skálatérképek (2. és 3. ábra) mutatták, esetleg a mérkőzéspontnak nagyobb szerepet juttató R^{MP} és R^{MB} minősíthetők kedvezőbbnek. Az általánosított sorösszeg mintailleszkedése a legkisebb négyzetek és a hivatalos rangsor között helyezkedik el. Hasonló következtetésekre jutunk a 2011-es Európa-bajnokság vizsgálatakor.

Harmadik kritériumként a rangsorok stabilitásának vizsgálatát említettük. Ez a Start rangsorra nyilván nem értelmezhető, az összes többire azonban, a harmadik és negyedik körök közötti változástól kezdve, igen. Következtetéseinket az egymás utáni fordulók rangsorainak összehasonlításából vonjuk le, ezúttal is a Kemény- és súlyozott távolságok használatával. Csak az R^{MP} mérkőzéspontokon alapuló eredménymátrixból kapott rangsorokat ábrázoljuk.

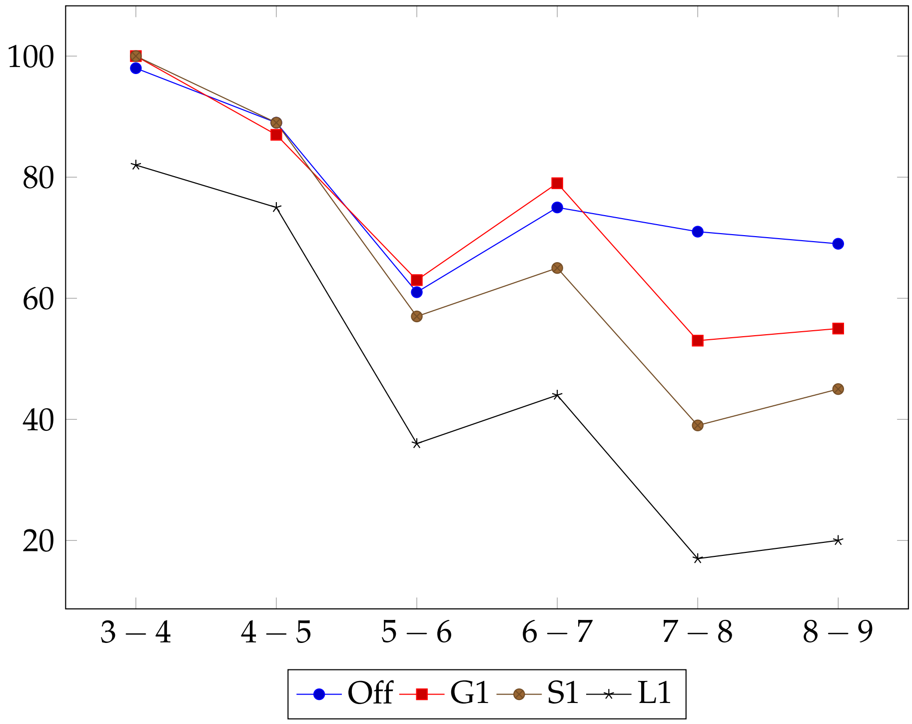
A 6. ábra a 2011-es sakkcsapat Európa-bajnokságot rangsorainak robusztusságát szemlélteti. Noha azok változékonysága nem szigorúan monoton csökken (ezt az egyes körök eredményei is befolyásolják), megfigyelhető a hanyatló tendencia, hiszen az aktuális forduló jelentősége egyre kisebb a már ismert mérkőzésekhez viszonyítva. A Kemény-távolság esetén a kezdeti időszakot leszámítva, a súlyozott távolságnál pedig végig a legkisebb négyzetek módszerével kapott $LS(R^{MP})$ sorrend bizonyult a legstabilabbnak. A második helyezett egyértelműen a $GRS_2(R^{MP})$, ezt követi a $GRS_1(R^{MP})$, majd a hivatalos sorrend. Eszerint az ellenfelek teljesítményének fokozott figyelembevétele csökkenti a sorrend változékonyságot, a beérkező új információ hatását. A különbség sokkal lényegesebb a súlyozott távolság esetén, vagyis az általunk számított rangsorok éppen a kritikus tartományban, az első néhány pozícióban bizonyultak robusztusabbnak.

Az ábrán nem szereplő, az R^{MB}, R^{BM} és R^{BP} eredménymátrixból számított rangsorok szintén a hivatalosnál kevésbé változékonyak, jellemzően azonban némileg rosszabbak a bemutatottnál. Ezekre is érvényes az $LS < GRS_2 < GRS_1$ sorrend, az ε paraméter csökkenésével emelkedő instabilitás. Az eltérés ugyancsak a súlyozott távolságnál nagyobb, a változékonyság kisebb a mezőny első felében.

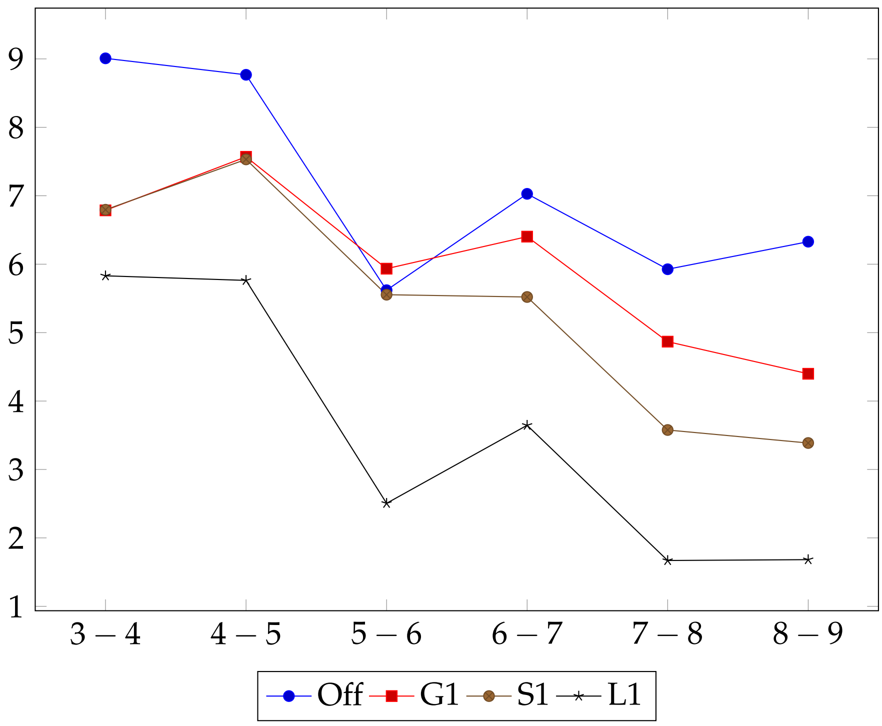
A 2013-as versenyre számolt hasonló mutatók az F.III. Függelék 9. ábráján láthatók. Ezúttal kevésbé jelentős a stabilitásbeli különbség, ami azonban kizárólag eredményeink megbízhatóságát befolyásolhatja. Ismét érvényes az $LS < GRS_2 < GRS_1$ sorrend, noha az utóbbi kettő lényegében a hivatalossal azonosan teljesít. Szintén csak mérsékelten igaz, hogy súlyozott távolságnál nagyobb eltérések figyelhetők meg. A másik három eredménymátrixszal kapott rangsorok közül az LS eljárás a legrobusztusabb, a GRS_2 módszer helyenként, a GRS_1 pedig szinte mindig a hivatalosnál rosszabbul teljesít. Összességében kijelenthető, hogy a Buchholz pontszámot általánosító legkisebb négyzetek módszere különösen stabil, használata elsősorban akkor ajánlott, ha szeretnénk elkerülni a lejátszott körök számából fakadó torzításokat.

6. ábra. Rangsorok stabilitása a fordulók között, 2011-es sakkcsapat EB

(a) Kemény-távolság, R^{MP} eredménymátrix



(b) Súlyozott távolság, R^{MP} eredménymátrix



Ahogy korábban említettük, a rangsorok nagyobb stabilitása ugyan nem feltétlenül előnyös a nézettség szempontjából, mert csökkenti a meglepetések valószínűségét, viszont sokkal megalapozottabbá teszi a svájci rendszerű verseny előre adott számú körének lejátszása után kialakuló sorrendet. Véleményünk szerint ez utóbbi hatás a döntő, a változékonyság nem hanyatlik olyan kritikus szintre, ami már értelmetlenné tenné az új fordulók rendezését.

5. Összefoglalás

A 2. fejezetben Chebotarev és Shamis (1998), illetve González-Díaz et al. (2014) nyomán bevezettük a páros összehasonlításon alapuló rangsorolás egyik legáltalánosabb modelljét, mely a nem szimmetrikus és az objektumok önmagukkal vett összehasonlításain kívül minden elképzelhető lehetőséget tartalmaz. Az eredmény- és mérkőzésmátrixok megkülönböztetése lehetővé teszi az összehasonlítások szerkezetének gráf reprezentációját, ami több pontozási eljárás meghatározásában is szerepel. Ezek közül bemutattuk a pontszámot és a legkisebb négyzeteket, valamint a ε paramétertől függő általánosított sorösszeg módszercsaládot, mely az előbbi kettő között helyezkedik el. Végül ismertettünk két tulajdonságot, az általunk definiált skála invarianciát és a pontszám konzisztenciát (González-Díaz et al., 2014).

A 3. fejezetben a páros összehasonlításokon alapuló pontozási eljárások svájci rendszerű sakk csapatversenyek rangsorolására történő alkalmazásának elméleti hátterét vizsgáltuk. Elsőként a feladat általános jellemzőivel, a nem körmérkőzéses esetben felmerülő kérdésekkel foglalkoztunk. Áttekintettük a hivatalos lexikografikus rendezéseket, az egyéni és a csapatversenyek rendezésének részleteit, illetve rávilágítottunk a külső és belső kör jelentőségére a svájci rendszerű tornákon. Megállapítottuk, hogy a rangsorolási problémaként való felírásban a mérkőzésmátrix szinte triviális, az eredménymátrix választása pedig a pontszám konzisztencia révén – a táblapontszám jelentőségének függvényében – megfelelő alapokra helyezhető.

A 4. fejezet két sakkcsapat Európa-bajnokság részletes elemzését nyújtja. Ismertettük a kiválasztott példák jellemzőit és a használt módszereket, a kapott rangsorok összehasonlítását pedig Can (2014) javaslatából kiindulva, a Kemény- és a súlyozott távolságok vizsgálatával végeztük. A sokdimenziós skálázás lehetővé tette a kapott sorrendek kétdimenziós leképezését, az eredmények grafikus szemléltetését. A legkisebb négyzetek módszere bizonyult a legjobb választásnak, mert ez függ legkevésbé az eredménymátrix megválasztásától. Mivel az ebből adódó sorrendek a hivatalos rangsortól viszonylag messze helyezkedtek el, Csató (2014a) dekompozíciójával tártuk fel az eltérés okait, megerősítve az ellenfelek teljesítményének figyelembevételére vonatkozó javaslatunkat.

A rangsorok értékelését három megközelítésben, az előrejelző képesség, a mintailleszkedés és a robusztusság alapján vizsgáltuk (4.4. alfejezet). Eredményeink szerint hasonló versenyek esetén az alábbi következtetések alapozhatják meg a legkisebb módszerének alkalmazását:

1. Egyetlen eljárás, köztük a hivatalos sorrend sem jobb előrejelző a csapatok a priori értékelését tükröző Start rangsornál, akkor sem, ha csak a következő forduló eredményeit kell megbecsülni;

2. A mintailleszkedés az ε paraméter, az ellenfelek szerepének növekedésével javul, a legkisebb négyzetek kismértékben jobb a hivatalosnál;
3. A verseny egyes köreinek lejátszása után kapott rangsorok az ε paraméter, az ellenfelek szerepének növekedésével stabilabbá válnak, a legkisebb négyzetek egyértelműen jobb a hivatalosnál.

A mérkőzéspontok felé hajló általánosított eredménymátrix (alacsony, 0-hoz közeli λ) használata minél több táblapont gyűjtésére ösztönöz, azokhoz képest mégis a mérkőzéspontokat preferálja.

Bár korábban is születtek javaslatok rekurzív alapú módszerek használatára svájci rendszerű sakkversenyeken (Brozos-Vázquez et al., 2010), ez tekinthető az első axiomatikus megközelítésű gyakorlati vizsgálatnak. A rangsorolási problémaként való modellezés kérdését – legalábbis a sakk csapatversenyek esetén – sikerült lezárnunk, és jelentős lépéseket tettünk a megfelelő pontozási eljárás kiválasztása felé. Az alkalmazást bemutató rész szintén tartalmaz innovatív elemeket. Ilyennek tekintjük a súlyozott távolság számítását, mely nagy valószínűséggel Can (2014) karakterizációjának első gyakorlati megvalósítása. Tudomásunk szerint egy korábbi cikkünktől (Csató, 2013a) eltekintve a sokdimenziós skálázást sem használták rangsorok összehasonlítására. Ezenkívül a stabilitás bevezetését emelnénk ki a svájci rendszerű versenyek rangsorolásának értékelési szempontjaként.

A Brozos-Vázquez et al. (2010) által felsorolt hátrányok véleményünk szerint nem jelentősek. A pontozási eljárások a résztvevők számára talán tényleg nehezen érthetők, de ez a svájci rendszerben rendezett tornák minden részletére igaz. A számítást ugyan megkönnyítik a modern informatika eszközei, azonban a dekompozíció révén ez a P mátrix első néhány hatványának felírásával, „papíron" is elvégezhető. Bár csak az első 3-4 kör után kapható rangsor, ezt megelőzően nyugodtan használható az eredeti pontszám módszer. Ezek figyelembevételével úgy véljük, érdemes lenne megkísérelni a Buchholz pontszám általánosítását jelentő legkisebb négyzetek módszerének alkalmazását a végeredmény kialakítására. Amennyiben ez a szervezők vagy a játékosok ellenállásába ütközik, első lépésként megfontolandó lehet csak a holtverseny eldöntésére szolgáló szabályként történő bevezetése is.

Elemzésünk számos kérdést vet fel. További csapatversenyek vizsgálata, esetleg ezek szimulációja megerősítheti vagy cáfolhatja főbb következteéseinket. Több lehetséges komplikációtól eltekintettünk, mint a világos-sötét probléma, a lejátszott mérkőzések számának különbözősége (például a résztvevők páratlan száma miatt). Nem tárgyaltuk az általánosított sorösszeg ε paraméterének megválasztását, mely átfogóbb vizsgálatot igényelhet, bár erre vonatkozó eredményeket nem ismerünk. Végül az általunk ajánlott rangsorolás két lehetséges felhasználását említenénk. Egyrészt a kapott sorrendek beépíthetők a párosító algoritmusba, ami hozzájárulhat a sorsolás kiegyensúlyozásához. Másrészt a rangsor fordulók közötti stabilitásának elemzése segíthet a lejátszandó körök számának meghatározásában, melynek értéke a résztvevők száma és a szervezés korlátainak ismeretében endogénné tehető.[16]

[16] Számunkra úgy tűnik, ennek meghatározása jelenleg *ad hoc* döntéseken múlik: a 2006-os torinói bajnokságon 148 (férfi), illetve 103 (női) csapat 13, a 2008-as drezdain pedig 146, illetve 111 résztvevő 11 mérkőzést játszott. Ráadásul a lexikografikus rendezés fő szempontja az első esetben a táblapontok, a másodikban a mérkőzéspontok száma volt.

Summary

Csató (2014b) introduces the necessary definitions of ranking problems and scoring procedures.

Modelling of the problem

Chess tournaments are often organized in the Swiss system. It goes for a predetermined number of rounds, and in each round two players compete head-to-head. All of them participate in the entire tournament, none are eliminated. The system is used when there are too many players to play a round-robin tournament, consequently, there are pairs of players without a match between them. However, it is more efficient than a knock-out tournament as more matches are played at the same time.

Two main issues are how to pair the players and how to rank the participants based on their respective results. The pairing method is not discussed in the paper as it is commonly accepted. Nevertheless, some proposals have been recommended to improve them, for example, by stable matchings (Kujansuu et al., 1999).

In chess, there are both individual and team tournaments. From an analytical point of view, the latter seems to be preferable, since in individual championships colour allocation has a prominent role: it is not neutral whether the given result is achieved by white or black. In team tournaments a match is played on $2t$ boards, the winner of a game on one board gets 1 board point, the loser 0, while a draw yields 0.5 for both teams, thus $2t$ board points are allocated between them. The winner team, which achieves more (so at least $t + 0.5$) board points scores 2 match points, the loser 0, while a draw results in 1 match point for each of them.

Difficulties of the ranking are caused by varying schedules, the opponents of a given competitor strongly influence its performance. Official results are lexicographical orders with match or board points as a first aspect. It means that, because of the pairing algorithm, they prefer teams with improving performance during the tournament contrary to teams with declining results. This subjective component seems to be vulnerable from the positive approach of theoretical research, and experts also often debate it. Some anomalies arising from this feature are discussed in Csató (2013b). We will argue that the application of generalised row sum and, especially, least squares is able to improve on this issue. Brozos-Vázquez et al. (2010) also support their application.

In order to use paired comparison-based scoring procedures, the tournament should be formulated as a ranking problem. Set of objects N consists of the teams of the competition. Matches matrix M is given by $m_{ij} = 1$ if team $X_i \in N$ and $X_j \in N$ have played against each other, and $m_{ij} = 0$ otherwise. We suggest two possibilities for the choice of results matrix R, then they will be connected.

Notation 1. MP_{ij}, and BP_{ij} denote the number of match points, and board points of team $X_i \in N$ against team $X_j \in N$, respectively.

Definition 1. *Match points based results matrix*: Results matrix of ranking problem $(N, R^{MP}, M) \in \mathcal{R}$ is *based on match points*, if $r_{ij}^{MP} = MP_{ij} - 1$ for all $X_i, X_j \in N$.

Definition 2. *Board points based results matrix*: Results matrix of ranking problem $(N, R^{BP}, M) \in \mathcal{R}$ is *based on board points*, if $r_{ij}^{BP} = BP_{ij} - t$ for all $X_i, X_j \in N$.

Definition 3. *Generalised results matrix*: Results matrix of ranking problem $(N, R^P(\lambda), M) \in \mathcal{R}$ is *generalised*, if $r_{ij}^P(\lambda) = (1-\lambda)\left(MP_{ij} - 1\right) + \lambda\left(BP_{ij} - t\right)/t$ for all $X_i, X_j \in N$ such that $\lambda \in (0,1)$.

Lemma 1. *The limit of generalised results matrix is the match points based results matrix, if $\lambda \to 0$, that is, $\lim_{\lambda \to 0} R^P(\lambda) = R^{MP}$. The limit of generalised results matrix is the board points based results matrix, if $\lambda \to 1$, that is, $\lim_{\lambda \to 1} R^P(\lambda) = R^{BP}$.*

Notation 2. **mp** and **gp** denotes the vector of match points and board points, respectively. $m \leq n-1$ is the number of rounds. $2t$ is the number of players who play a match in each team.

Rankings derived from **mp** and **bp** are the same as the official lexicographical order based on match points and game points, respectively, without tie-breaking rules.

Lemma 2. *Score method with R^{MP} is equivalent to* **mp**.

Lemma 3. *Score method with R^{BP} is equivalent to* **bp**.

Our main result is the following, which establishes the subsequent application.

Theorem 1. *Let $(N, R, M) \in \mathcal{R}^R$ be a round-robin ranking problem. Generalised row sum and least squares with R^{MP} and are R^{BP} equivalent to* **mp** *and* **bp**, *respectively.*

Proof. In case of round-robin problems, generalised row sum and least squares are equivalent to the score method (Csató, 2014b, Lemma 5.10), hence Lemmata 2 and 3 provide the result. □

Proposition 1. *Let $(N, A, M) \in \mathcal{R}$ be a ranking problem and $k \in (0,1]$. Rankings derived from generalised row sum and least squares methods with R^{MP} and kR^{MP} as well as with R^{BP} and kR^{BP} are the same.*

Proof. It is the consequence of property SI (Csató, 2014b). □

More details on Swiss system chess team tournaments can be found in Csató (2012a,b, 2013a).

An application: chess team European championships

We illustrate the method proposed above through the two recent European Team Chess Championship open tournaments of 2011 and 2013. Webpages of the events are available at `http://euro2011.chessdom.com/` and at `http://etcc2013.com/`, results can be found at `http://chess-results.com/tnr57856.aspx` and at `http://chess-results.com/tnr114411.aspx`. In both tournaments the number of competing teams is $n = 38$ and the number of rounds is $m = 9$, so comparisons are known in about the quarter of possible pairs, $9 \times 19 = 171$ from $n(n-1)/2 = 703$. The first aspect of the official lexicographical orders was the number of match points, but tie-breaking rules were different.

Besides the known Start (based on Élő points of team players) and official, 12 further rankings have been calculated from the ranking problem representation. Four results matrix have been considered: R^{MP}, $R^{MB} = 3/4\, R^{MP} + 1/4\, R^{BP}$, $R^{BM} = 1/3\, R^{MP} + 2/3\, R^{BP}$ and R^{BP}. We have chosen three methods, least squares (LS), and generalised row sum with the reasonable upper bound $\varepsilon_1 = 1/324$ (GRS_1) and $\varepsilon_2 = 1/6$ (GRS_2). The existence of a unique least squares solution requires connectedness of the comparison multigraph (Csató (2014a, Proposition 3.1)), which is provided after the third round. Rankings in the first two rounds are highly unreliable, therefore they were eliminated, but from the third round all methods give one order of teams. In all, we have $7 \times 14 = 98$ rankings.

Notation 3. The final rankings are denoted by Start, Official; $GRS_1(R^{MP})$, $GRS_2(R^{MP})$, $LS(R^{MP})$; $GRS_1(R^{MB})$, $GRS_2(R^{MB})$, $LS(R^{MB})$; $GRS_1(R^{BM})$, $GRS_2(R^{BM})$, $LS(R^{BM})$; and $GRS_1(R^{BP})$, $GRS_2(R^{BP})$, $LS(R^{BP})$. In figures, they are abbreviated by Start, Off; G1, G2, G3, G4; S1, S2, S3, S4; and L1, L2, L3, L4.

In order to compare the final rankings, their distances have been calculated. We have chosen the well-known Kemeny-distance (Kemeny, 1959; Kemeny és Snell, 1962; Can és Storcken, 2013) and its weighted version proposed by Can (2014). In the latter case, our weight vector is $\omega_i = 1/i$ for all $i = 1, 2, \dots, n-1$. The of 14 rankings can be plotted on the basis of pairwise distances in a 13-dimensional space without loss of information, however, it seems to be unmanageable. Therefore, similarly to Csató (2013a), multidimensional scaling (Kruskal és Wish, 1978) have been applied with a ratio scale. Both Stress and RSQ tests for validity strengthens that two dimensions are sufficient, but one is too restrictive. The method gives a map where only the position of objects count and more similar rankings are closer to each other. Start is far away from all other rankings, thus it is omitted, which improves somewhat on reliability.

There is not much difference between the four charts (2011 vs 2013, Kemeny vs weighted distance), two of them are shown on page 36. They suggest the following:

1. Start greatly differs from other rankings since it does not depend on the results of the tournament;

2. Generalised row sum rankings (with low λ) are more similar to the official one than least squares;

3. The order of results matrices by variance is $R^{MP} < R^{MB} < R^{BM} < R^{BP}$, a larger role of match points stabilize the rankings;

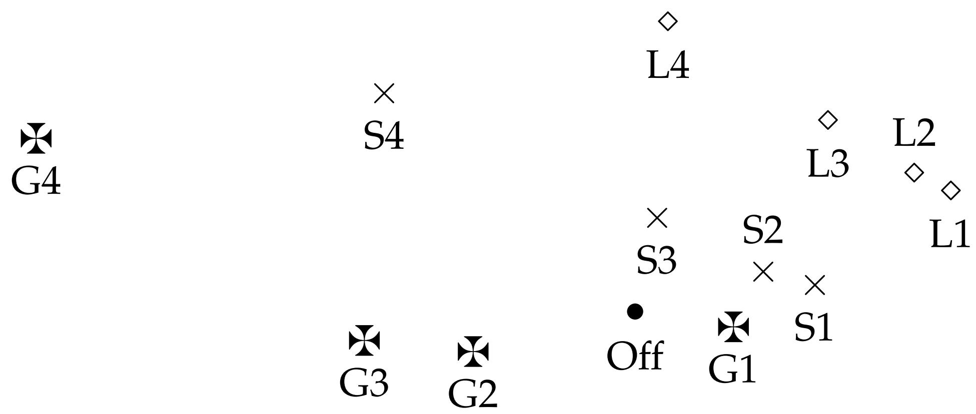
4. The order of scoring procedures by variance is $LS < GRS_2 < GRS_1$, a larger role of opponents stabilize the rankings.

Based on these observations, we propose to use least squares with a generalised results matrix favouring match points (a low λ, for example, $1/4$ as in R^{MB}) for ranking in Swiss system chess team tournaments as it gives incentives for teams to score more board points, but still prefers match points.

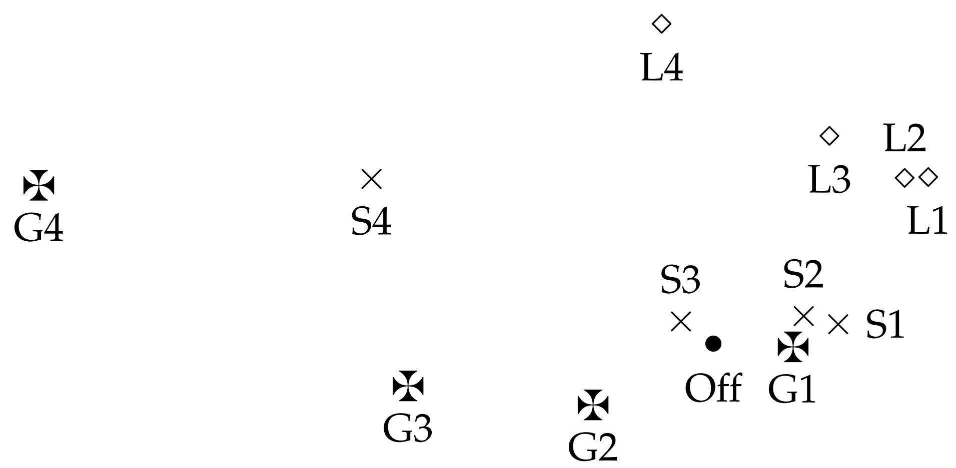
We have carried out other investigations. Decomposition of the least squares rating (Csató, 2014a) have highlighted the need for taking the performance of opponents

MDS maps of the 2013 European Team Chess Championship rankings

(a) Kemeny distance, without Start



(b) Weighted distance, without Start



into account. An extreme case is France in the 2011 tournament. It also shows that final rankings are created after some steps of iterations.

For evaluating the rankings during the competition, three approaches have been applied:

- Predictive performance: ability to forecast outcomes of future matches;
- Retrodictive performance: ability to match the results of contests already played;
- Robustness between subsequent rounds.

The first two are the proposals of Pasteur (2010) for classifying mathematical ranking models. The third seems to be important as the number of rounds in a Swiss system tournament is often determined arbitrarily. The first two have been measured by the number of match and board points scored by an underdog against a better team. Stability has been defined as the distance of rankings in subsequent rounds.

Our findings are the following:

1. No method, including the official, overcomes Start at forecasting, moreover, the latter was the best for 2011. This result does not change if prediction of the next round is compared only.
2. Retrodictive performance gives the order $LS < GRS_2 < GRS_1$, a larger role of opponents improves matching. Least squares is somewhat better than the official ranking.
3. Robustness also results in the order $LS < GRS_2 < GRS_1$ according to both Kemeny and weighted distances. Least squares is significantly more stable than the official ranking.

The second and, especially, the third observation supports the use of least squares method.

Conclusion

On the basis of these examples, we argue for the use of least squares method with a generalised result matrix favouring match points. The proposal is based on a lot of soft findings, variance with respect to the chosen results matrix as well as retrodictive performance (the ability to match the outcomes of matches already played) and robustness (stability of the ranking between two subsequent rounds).

All results discussed above are our contribution. We do not know any analytical discussion of ranking in Swiss system tournaments (suggestions of Brozos-Vázquez et al. (2010) are more or less based on intuition), connected with investigations through examples, despite the latter was given by Jeremic és Radojicic (2010), Csató (2012a), and Csató (2013a). MDS has been applied first for comparison of the rankings by Csató (2013a). According to our knowledge, we are the first to use the weighted distance of Can (2014). Stability is also a new idea in evaluation of Swiss system tournament rankings.

Irodalomjegyzék

Borda, J. C. Mémoire sur les élections au scrutin. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, 1781.

Bouyssou, D. Monotonicity of 'ranking by choosing': a progress report. *Social Choice and Welfare*, 23(2):249–273, 2004.

Bozóki, S., Fülöp, J. és Rónyai, L. On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1-2):318–333, 2010.

Bozóki, S., Csató, L., Rónyai, L. és Tapolcai, J. Robust peer review decision process. Kézirat, 2014.

Brozos-Vázquez, M., Campo-Cabana, M. A., Díaz-Ramos, J. C. és González-Díaz, J. Ranking participants in tournaments by means of rating functions. *Journal of Mathematical Economics*, 44(11):1246–1256, 2008.

Brozos-Vázquez, M., Campo-Cabana, M. A., Díaz-Ramos, J. C. és González-Díaz, J. Recursive tie-breaks for chess tournaments. 2010. `http://eio.usc.es/pub/julio/Desempate/Performance_Recursiva_en.htm`.

B. Can. Weighted distances between preferences. Technical Report RM/12/056, Maastricht University School of Business and Economics, Graduate School of Business and Economics, 2012.

B. Can. Weighted distances between preferences. *Journal of Mathematical Economics*, 51:109–115, 2014.

Can, B. és Storcken, T. A re-characterization of the Kemeny distance. Technical Report RM/13/009, Maastricht University School of Business and Economics, Graduate School of Business and Economics, 2013.

Chebotarev, P. Yu. Generalization of the row sum method for incomplete paired comparisons. *Automation and Remote Control*, 50(3):1103–1113, 1989.

Chebotarev, P. Yu. Aggregation of preferences by the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):293–320, 1994.

Chebotarev, P. Yu. és Shamis, E. Characterizations of scoring methods for preference aggregation. *Annals of Operations Research*, 80:299–332, 1998.

Chebotarev, P. Yu. és Shamis, E. Preference fusion when the number of alternatives exceeds two: indirect scoring procedures. *Journal of the Franklin Institute*, 336(2): 205–226, 1999.

Condorcet, M. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. L'imprimerie royale, Paris, 1785.

Copeland, A. H. A reasonable social welfare function. Seminar on Applications of Mathematics to social sciences, University of Michigan, 1951.

Cramer, G. *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*. Frères Cramer et C. Philibert, Genève, 1750.

Csató, L. A pairwise comparison approach to ranking in chess team championships. In Fülöp P. (szerk.) *Tavaszi Szél 2012 Konferenciakötet*, 514–519. o. Doktoranduszok Országos Szövetsége, Budapest, 2012a.

Csató, L. A paired comparisons ranking and Swiss-system chess team tournaments. Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület VI. éves konferencia, 2012b. http://media.coauthors.net/konferencia/conferences/7/LLSM_Buch_ranking__.pdf.

Csató, L. Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments. *Central European Journal of Operations Research*, 21(4):783–803, 2013a.

Csató L. Páros összehasonlításokon alapuló rangsorolási módszerek. *Szigma*, XLIV (3-4):155–198, 2013b.

Csató, L. A graph interpretation of the least squares ranking method. *Social Choice and Welfare*, 2014a. Megjelenés alatt. http://link.springer.com/article/10.1007/s00355-014-0820-0#page-1.

Csató, L. Additive and multiplicative properties of scoring methods for preference aggregation. Corvinus Economics Working Papers 3/2014, 2014b. http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1562/.

David, H. A. Ranking from unbalanced paired-comparison data. *Biometrika*, 74(2):432–436, 1987.

European Chess Union (ECU). *Tournament Rules*, 2012. http://europechess.net/index.php?option=com_content&view=article&id=9&Itemid=15.

European Chess Union (ECU). *Tournament Rules*, 2013. http://etcc2013.com/wp--content/uploads/2013/06/ETCC-2013-tournament-rules-June-06--2013.pdf.

González-Díaz, J., Hendrickx, R. és Lohmann, E. Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods. *Social Choice and Welfare*, 42(1):139–169, 2014.

Jeremic, V. M. és Radojicic, Z. A new approach in the evaluation of team chess championships rankings. *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, 6(3):Article 7, 2010.

Jiang, X., Lim, L.-H., Yao, Y. és Ye, Y. Statistical ranking and combinatorial Hodge theory. *Mathematical Programming*, 127(1):203–244, 2011.

Kaiser, H. F. és Serlin, R. C. Contributions to the method of paired comparisons. *Applied Psychological Measurement*, 2(3):423–432, 1978.

Kemeny, J. G. Mathematics without numbers. *Daedalus*, 88(4):577–591, 1959.

Kemeny, J. G. és Snell, L. J. Preference ranking: an axiomatic approach. In *Mathematical models in the social sciences*, pages 9–23. Ginn, New York, 1962.

Kendall, M. G. A new measure of rank correlation. *Biometrika*, 30(1/2):81–93, 1938.

Kovács E. (szerk.) *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése*. 4., bővített kiadás. Tanszék Kft., Budapest, 2011.

Kruskal, J. B. és Wish, M. *Multidimensional scaling*. Sage Publications, Beverly Hills és London, 1978.

Kujansuu, E., Lindberg, T. és Mäkinen, E. The stable roommates problem and chess tournament pairings. *Divulgaciones Matemáticas*, 7(1):19–28, 1999.

Landau, E. Zur relativen Wertbemessung der Turnierresultate. *Deusches Wochenschach*, 11:366–369, 1895.

Landau, E. Über Preisverteilung bei Spielturnieren. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 63:192–202, 1914.

Leeflang, P. S. H. és van Praag B. M. S. A procedure to estimate relative powers in binary contacts and an application to Dutch Football League results. *Statistica Neerlandica*, 25(1):63–84, 1971.

Mohar, B. The Laplacian spectrum of graphs. In Alavi, Y., Chartrand, G., Oellermann, O. R. és Schwenk, A. J. (szerk.) *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, volume 2, pages 871–898. Wiley, 1991.

Moulin, H. Choosing from a tournament. *Social Choice and Welfare*, 3(4):271–291, 1986.

Neumann, C. *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*. B. G. Teubner, Leipzig, 1877.

Pasteur, R. D. When perfect isn't good enough: Retrodictive rankings in college football. In Gallian, J. A. (szerk.), *Mathematics & Sports*, Dolciani Mathematical Expositions 43, pages 131–146. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2010.

Saaty, T. L. *The Analytic Hierarchy Process: planning, priority setting, resource allocation*. McGraw-Hill International Book Co., New York, 1980.

Shamis, E. Graph-theoretic interpretation of the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):321–333, 1994.

Stefani, R. T. Improved least squares football, basketball, and soccer predictions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 10(2):116–123, 1980.

World Chess Federation (FIDE). *Handbook.* `http://www.fide.com/fide/handbook.html`.

E. Zermelo. Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 29:436–460, 1928.

F.I. Függelék: Lineáris rendezések távolsága

A 4.2. alfejezetben a rangsorok (lineáris rendezések) összehasonlítását távolságuk definiálásával hajtottuk végre. Az alábbiakban Can (2014) alapján indokoljuk ezek kiválasztását.

F.I.1. Definíció. *Eltérésfüggvény* (dissimilarity function): Egy $\delta : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ függvény *eltérésfüggvény*, ha teljesíti az alábbi feltételeket:

- *Nemnegativitás* (non-negativity): $\delta(L, L') \geq 0$ minden $L, L' \in \mathcal{L}_N$-re;
- *Megkülönböztethetetlenség* (identity of indiscernibles): $\delta(L, L') = 0 \Leftrightarrow L = L'$ minden $L, L' \in \mathcal{L}_N$-re;
- *Szimmetria* (symmetry): $\delta(L, L') = \delta(L', L)$ minden $L, L' \in \mathcal{L}_N$-re.

F.I.2. Definíció. *Távolságfüggvény* (distance function, metric): Egy $\delta : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ eltérésfüggvény *távolságfüggvény*, amennyiben teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget (triangular inequality), vagyis $\delta(L, L'') \leq \delta(L, L') + \delta(L', L'')$ minden $L, L', L'' \in \mathcal{L}_N$ esetén.

F.I.3. Definíció. *Kemény-távolság* (Kemeny distance) (Kemeny, 1959): Az $L, L' \in \mathcal{L}_N$ lineáris rendezések $\delta^K(L, L')$ *Kemény-távolság*a az egyiktől a másikhoz történő eljutás érdekében felcserélendő objektumpárok száma.

A fogalom különböző tudományterületen más-más elnevezéssel szerepel (Can és Storcken, 2013), általunk ismert legkorábbi megjelenése Cramer (1750). Közgazdászoknak talán ismerősebben cseng a Kendall τ távolság (Kendall, 1938).

Kemeny és Snell (1962) Kemény-távolságra adott karakterizációjáról Can és Storcken (2013) megmutatta, hogy a felhasznált öt axióma logikailag nem független, közülük négy is elegendő az egyértelműséghez.

F.I.1. Állítás. *A δ^K Kemény-távolság az egyetlen olyan $\delta : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény, ami teljesíti az alábbi feltételeket:*

- Erős dekomponálhatóság *(strong decomposability, betweenness): $\delta(L, L'') = \delta(L, L') + \delta(L', L'')$ minden $L, L', L'' \in \mathcal{L}_N$-re;*
- Semlegesség *(neutrality): tetszőleges $\sigma : N \to N$ permutációra $\delta(L, L') = \delta(\sigma L, \sigma L')$ minden $L, L' \in \mathcal{L}_N$ mellett;*
- Normalizálás *(normalization):* $\min_{L, L' \in \mathcal{L}_N} \{\delta(L, L') : L \neq L'\} = 1$.

Bizonyítás. Lásd Can és Storcken (2013, Corollary 1). Az első tulajdonság a távolságfüggvény definíciója. □

F.I.1. *Megjegyzés.* A normalizálás követelményének elhagyásával δ^K pozitív konstansszorosai is megengedetté válnak (Can és Storcken, 2013), ez azonban nem változtat a rangsorok távolságainak arányán.

A Kemény-távolság a távolság számításánál nem tesz különbséget a szükséges cserék helye szerint, például az $X_i \succ X_j \succ X_k$ rangsortól ugyanolyan messze (egy távolságra) található $X_j \succ X_i \succ X_k$, mint $X_i \succ X_k \succ X_j$. Mégis úgy érezzük, előbbi az utóbbinál jobban eltér az eredetitől, mert az első és második helyezett változása fontosabbnak tűnik, mint a második és harmadik felcserélődése. Egy sakkverseny végeredményénél jogos felvetés lehet, hogy a mezőny első felének rangsorolása, különösen a dobogón végző csapatok meghatározása élvezzen prioritást.

Ennek beépítéséhez nyilván le kell mondanunk az F.I.1. állításban szereplő tulajdonságok valamelyikéről. Az F.I.1. megjegyzés szerint a normalizálás mellőzése nem szünteti meg a fenti problémát, a szimmetria kihagyása pedig indokolhatatlan. Amennyiben továbbra is távolságokat keresünk, csak az erős dekomponálhatóság maradt, miszerint a végeredmény szempontjából teljesen mindegy, milyen sorrendben végezzük el a szükséges cseréket. Részben ez az axióma is megőrizhető lesz.

F.I.4. Definíció. *Lineáris rendezésekből álló út* (path on linear orders): Legyen $L, L' \in \mathcal{L}_N$ két lineáris rendezés. $L = L_0, L_1, L_2, \dots, L_k = L'$ egy L-ből L'-be vezető *lineáris rendezésekből álló út*, ha $\delta^K(L_\ell, L_{\ell+1}) = 1$ minden $\ell = 0,1,\dots,k-1$ esetén.

Tehát a lineáris rendezésekből álló út szomszédos elemei között mindig csak egyetlen cserét kell elvégezni.

F.I.1. *Jelölés.* Legyen $L, L' \in \mathcal{L}_N$ két lineáris rendezés. $\mathcal{D}(L, L')$ az L-ből L'-be vezető lineáris utak halmaza.

F.I.5. Definíció. *Dekomponálhatóság* (decomposability) (Can, 2014): Egy $\delta : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ eltérésfüggvény *dekomponálható*, ha minden $L, L' \in \mathcal{L}_N$-re létezik olyan L-ből L'-be vezető $(L = L_0, L_1, L_2, \dots, L_k = L') \in \mathcal{D}(L, L')$ lineáris rendezésekből álló út, amire

$$\delta(L, L') = \sum_{\ell=1}^{k-1} \delta(L_\ell, L_{\ell+1}).$$

Erősen dekomponálható távolságfüggvény esetén bármelyik L-ből L'-be vezető $(L = L_0, L_1, L_2, \dots, L_k = L') \in \mathcal{D}(L, L')$ lineáris rendezésekből álló út választható.

A következő axióma a semlegességet módosítja annak az új koncepciónak megfelelően, hogy a lineáris rendezésekben előforduló eltérések fontossága az elfoglalt helyezés függvénye lehet.

F.I.6. Definíció. *Pozíciós semlegesség* (positional neutrality) (Can, 2014): Legyen $k < n$, $k \in \mathbb{N}$, illetve $L, L' \in \mathcal{L}_N$ és $\bar{L}, \bar{L}' \in \mathcal{L}_N$ olyan lineáris rendezések, hogy L és L', valamint $\bar{L}$ és $\bar{L}'$ a k-adik és $k+1$-edik objektum felcserélésével kapható egymásból, azaz $\delta^K(L, L') = \delta^K(\bar{L}, \bar{L}') = 1$. Egy $\delta : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ eltérésfüggvény *pozíciós semleges*, ha $\delta(L, L') = \delta(\bar{L}, \bar{L}')$.

A pozíciós semlegesség fennállásakor két szomszédos rangsor távolsága kizárólag attól függ, melyik pozícióban történt változás.

F.I.2. *Jelölés.* A $h : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \{1,2,\dots,n-1\}$ függvény megadja, hogy az $\bar{L}, \bar{L}' \in \mathcal{L}_N$ szomszédos lineáris rendezések ($\delta^K(\bar{L}, \bar{L}') = 1$) között melyik pozíció cserélődik fel. Az indexelés a kettő közül a kisebb számmal történik.

F.I.7. Definíció. *Súlyozott eltérésfüggvény* (weighted dissimilarity function) (Can, 2014): Legyen $L, L' \in \mathcal{L}_N$ két lineáris rendezés. Egy $\delta_\omega : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ eltérésfüggvény *súlyozott*, ha létezik olyan $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ súlyvektor, amire valamelyik L-ből L'-be vezető $(L = L_0, L_1, L_2, \dots, L_k = L') \in \mathcal{D}(L, L')$ lineáris rendezésekből álló út esetén

$$\delta_\omega(L, L') = \sum_{\ell=1}^{k-1} \omega_{h(L_\ell, L_{\ell+1})}.$$

Az *omega* $\in \mathbb{R}^{n-1}$ súlyvektor definiálja az egyes pozíciókban végrehajtott cserék fontosságát: ω_1 az első és második, ω_2 a második és harmadik, és így tovább, ω_{n-1} az utolsó előtti és az utolsó helyezett felcserélésének értékét. A távolságok relatív nagysága invariáns az ω súlyvektor pozitív konstanssal való szorzására.

F.I.2. Állítás. *Egy $\delta : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ eltérésfüggvény akkor és csak akkor dekomponálható és pozíció semleges, ha $\delta = \delta_\omega$ súlyozott eltérésfüggvény.*

Bizonyítás. Lásd Can (2014, Proposition 1). □

F.I.3. Állítás. *Egy $\delta : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ eltérésfüggvény akkor és csak akkor erősen dekomponálható és pozíció semleges, ha $\delta = \delta_\omega$ súlyozott eltérésfüggvény az $\omega = [c, c, \dots, c]^\top \in \mathbb{R}^{n-1}$, $c > 0$ súlyvektorral.*

Bizonyítás. Lásd Can (2014, Proposition 2). □

F.I.2. *Megjegyzés.* Az $\omega = [c, c, \dots, c]^\top \in \mathbb{R}^{n-1}$, $c > 0$ súlyvektorral adott súlyozott eltérésfüggvényre $\delta_\omega = c\delta^K$, így a Kemény-távolság az $\omega = \mathbf{e}$ választással írható le.

Vagyis, ha szeretnénk különböző súlyokat adni az egyes pozíciókban bekövetkező változásoknak, az erős dekomponálhatóságot már nem lehet megkövetelni. A súlyozott eltérésfüggvény F.I.7. definíciója megengedi, hogy az $(L = L_0, L_1, L_2, \dots, L_k = = L') \in \mathcal{D}(L, L')$ dekompozíció a vizsgált $L, L' \in \mathcal{L}_N$ lineáris rendezésekre *ex ante* rögzített legyen, ami meglehetősen furcsának tűnik. Ezt küszöböli ki a következő függvénycsalád.

F.I.8. Definíció. *Útminimalizáló súlyozott eltérésfüggvény* (path-minimizing function) (Can, 2014): Egy $\delta_\omega^{PM} : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ súlyozott eltérésfüggvény *útminimalizáló*, ha létezik olyan $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ súlyvektor, amire minden $L, L' \in \mathcal{L}_N$ esetén

$$\delta_\omega^{PM}(L, L') = \min_{(L=L_0, L_1, L_2, \dots, L_k = L') \in \mathcal{D}(L, L')} \sum_{\ell=1}^{k-1} \omega_{h(L_\ell, L_{\ell+1})}.$$

Az útminimalizálás lehetővé teszi a távolságfüggvényekre való áttérést.

F.I.4. Állítás. *Legyen $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ egy rögzített súlyvektor. A $\delta_\omega : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ eltérésfüggvény akkor és csak akkor teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget (azaz távolságfüggvény), ha $\delta_\omega = \delta_\omega^{PM}$ útminimalizáló súlyozott eltérésfüggvény.*

Bizonyítás. Lásd Can (2014, Theorem 1). A bizonyítás kulcsa, hogy δ_ω-nak *minden* előre rögzített $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ súlyvektor mellett távolságfüggvénynek kell lennie. □

Az erős dekomponálhatóság hiánya továbbra is gondot okozhat, mert a végeredményben számítani fog a cserék végrehajtásának sorrendje. Az útminimalizáló lineáris rendezésekből álló út meghatározása bonyolult lehet, a Dijkstra-algoritmushoz hasonló módszerrel, vagy nyers erővel, a két rangsor közötti összes lehetséges út közül a minimális kiválasztásával kapható (Can, 2014). Bizonyos esetekben azonban az útminimalizáló dekompozíció explicit formában is megadható.

F.I.9. Definíció. *Lehmer-függvény* (Lehmer function) (Can, 2014): Egy $\delta_\omega^L : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ súlyozott eltérésfüggvény *Lehmer-függvény*, ha minden $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ súlyvektor és $L, L' \in \mathcal{L}_N$ lineáris rendezés esetén

$$\delta_\omega^L(L, L') = \min_{(L=L_0,L_1,L_2,\ldots,L_k=L')\in\mathcal{D}(L,L')} \sum_{\ell=1}^{k-1} \omega_{h(L_\ell,L_{\ell+1})} = \sum_{\ell=1}^{k-1} \omega_{h\left(L_\ell^d,L_{\ell+1}^d\right)},$$

ahol $(L = L_0^d, L_1^d, L_2^d, \ldots, L_k^d = L') \in \mathcal{D}(L, L')$ az az L-ből L'-be vezető lineáris rendezésekből álló út, amely először az L'-ben győztes objektumot viszi ebbe a pozícióba, majd az L'-ben második objektum kerül a második helyre, és így tovább.[17]

A Lehmer-függvényben a két lineáris rendezés között alkalmazandó dekompozíció a fenti algoritmus által adott. Ezt illusztrálja az alábbi példa.

F.I.1. Példa. Legyen $L = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ és $L' = \{X_3, X_1, X_4, X_2\}$, illetve $\omega = [3, 2, 1]$. Ekkor az F.I.9. definícióban szereplő, L-ből L'-be vezető $(L = L_0^d, L_1^d, L_2^d, \ldots, L_k^d = L') \in \in \mathcal{D}(L, L')$ lineáris rendezésekből álló út:
$L_0^d = \{X_1, X_2, X_3, X_4\} = L$
$L_1^d = \{X_1, X_3, X_2, X_4\}$
$L_2^d = \{X_3, X_1, X_2, X_4\}$
$L_3^d = \{X_3, X_1, X_4, X_3\} = L'$.

Tehát sorozatos elemi cserékkel először X_3-at visszük az első pozícióba, majd – mivel X_1 már a helyén van – X_4-et a harmadikba. Ennek megfelelően $\delta_\omega^L(L, L') = = \delta_\omega^L(L_0^d, L_1^d) + \delta_\omega^L(L_1^d, L_2^d) + \delta_\omega^L(L_2^d, L_3^d) = \omega_2 + \omega_1 + \omega_3 = 6$.

A Kemény-távolság az $\bar{\omega} = [1, 1, 1]$ súlyvektorral kapható tetszőleges L-ből L'-be vezető lineáris rendezésekből álló út mentén, ezért $\delta^K(L, L') = \delta_{\bar{\omega}}^L(L, L') = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1 + + \bar{\omega}_3 = 3$.

F.I.5. Állítás. *$\delta_\omega^{PM}(L, L') = \delta_\omega^L(L, L')$ minden $L, L' \in \mathcal{L}_N$ esetén akkor és csak akkor, ha ω monoton csökkenő, $\omega_k < \omega_{k+1}$ minden $k = 1,2, \ldots n-2$-re.*

Bizonyítás. Lásd Can (2012, Proposition 3). □

Az F.I.5. állítás értelmében a Lehmer-függvény akkor és csak akkor útminimalizáló súlyozott eltérésfüggvény, ha az ω súlyvektor monoton csökkenő. Egy sakkverseny esetén ez elfogadható megszorításnak tűnik, mert az egyes pozíciókban megfigyelt eltérések fontossága fokozatosan kisebb lehet. Más esetekben nem feltétlenül ez a helyzet. Amennyiben például egy 20 csapatos labdarúgó-bajnokság utolsó két helyezettje esik ki (kerül alsóbb osztályba), a 18. helyezés nagyobb jelentőségűvé válhat, mint a 13. vagy a 16.

[17] Remélhetőleg nem okoz félreértést a δ_ω^L jelölés, ebben L nyilván nem egy lineáris rendezés.

F.I.1. Következmény. *Legyen $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ egy rögzített súlyvektor. Egy $\delta^L_\omega : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ Lehmer-függvény akkor és csak akkor távolságfüggvény (azaz teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget), ha ω monoton csökkenő, $\omega_k < \omega_{k+1}$ minden $k = 1,2,\ldots,n-2$-re.*

Bizonyítás. Lásd Can (2012, Corollary 1). Az F.I.4. és az F.I.5. állításokból adódik. □

A további részletek iránt érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk Can (2014) tanulmányát.

Can (2014) fenti eredményei alapján egy ilyen (szigorúan) monoton csökkenő súlyvektort választottunk.

F.I.10. Definíció. *Súlyozott távolság* (weighted distance): A $\delta^L_{1/k} : \mathcal{L}_N \times \mathcal{L}_N \to \mathbb{R}$ Lehmer-függvény *súlyozott távolság*, ha $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ súlyvektorára $\omega_k = 1/k$ minden $k = 1,2,\ldots,n-1$ mellett.

Ekkor például az első és második helyezett felcserélődése kétszer olyan fontos, mint a másodiké és a harmadiké. A választás egyik előnye a könnyen kiszámítható maximum, ugyanis két teljesen ellentétes rangsor súlyozott távolsága

$$\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + 1\right) + \left(\frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{n-2}{n-2} + \cdots + 1 = n-1.$$

Tudomásunk szerint ez a Can-féle súlyozott távolságfüggvény első gyakorlati alkalmazása, ezért nem áll rendelkezésünkre olyan ismeret, ami alátámaszthatná vagy támadhatóvá tenné a fenti meghatározást.

F.I.3. *Megjegyzés.* Can (2014) eredményének publikálása előtt magunk is kísérletet tettünk a rangsor elején előforduló eltéréseknek nagyobb súlyt adó távolságfüggvény konstruálására a τ távolság bevezetésével (Csató, 2013a). Ennek azonban hiányzik az axiomatikus megalapozása, nem dekomponálható, néhány esetben pedig indokolatlannak tűnő fontosságot tulajdonít az első pozíciókban bekövetkező változásoknak. Ezen problémákat Csató (2013a) értelemszerűen kevésbé hangsúlyozta. Ezúton is szeretnénk köszönetet mondani *Burak Can*nak a súlyozott távolságfüggvény korrekt megalapozásáért.

F.II. Függelék: Sakkcsapat Európa-bajnokságok eredményei és rangsorai

3.a táblázat. A 2011-es sakkcsapat Európa-bajnokság eredményei I.

	Anglia	Ausztria	Azerbajdzsán	Bulgária	Ciprus	Csehország	Dánia	Finnország	Franciaország	Görögország	Grúzia	Hollandia	Horvátország	Izland	Izrael	Lengyelország	Lettország	Litvánia	Luxemburg
Anglia	–	–	–	–	–	2	–	3,5	–	1,5	–	–	–	–	1,5	1	2,5	3	–
Ausztria	–	–	–	–	–	–	2	2,5	–	–	2	–	–	–	–	1	1	–	–
Azerbajdzsán	–	–	–	3,5	–	–	–	–	2	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Bulgária	–	–	0,5	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	2,5	–	–	–
Ciprus	–	–	–	–	–	–	0	0	–	0	0	–	–	–	–	–	–	–	1,5
Csehország	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	2,5	–	2	–	–
Dánia	–	2	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,5	–	2,5	–	–
Finnország	0,5	1,5	–	–	4	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	0	–	–	3,5
Franciaország	–	–	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–	–	3,5	–
Görögország	2,5	–	1	–	4	–	–	–	–	–	2,5	1,5	–	–	–	2	–	–	–
Grúzia	–	2	–	–	4	–	–	–	–	1,5	–	–	2	3	–	–	–	–	–
Hollandia	–	–	–	–	–	2,5	–	2	–	2,5	–	–	–	–	–	2,5	–	–	–
Horvátország	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	1	–	–	–
Izland	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	3
Izrael	2,5	–	–	–	–	1,5	3,5	–	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Lengyelország	3	3	–	1,5	–	–	–	4	–	2	–	1,5	3	–	–	–	–	2	–
Lettország	1,5	3	–	–	–	2	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–
Litvánia	1	–	–	–	–	–	–	–	0,5	–	–	–	–	–	–	2	2	–	–
Luxemburg	–	–	–	–	2,5	–	–	0,5	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–
Macedónia	–	–	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	1	–	1	–	2
Magyarország	–	–	–	4	–	2	3	–	–	–	–	–	2	–	–	–	2,5	–	–
Moldova	–	2,5	–	–	–	2	3	–	1,5	–	–	–	1,5	–	–	–	–	–	4
Montenegró	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	–	–	3,5
Németország	–	–	2,5	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–
Norvégia	–	–	–	–	–	0,5	0,5	3	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	2	–
Olaszország	–	–	1,5	1	–	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–
Oroszország	–	–	1,5	1	–	3,5	–	–	2,5	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–
Örményország	2	3,5	1	–	–	–	3,5	–	2,5	–	–	3	3	–	–	–	–	–	–
Románia	–	–	1	–	–	–	–	–	–	2,5	–	2,5	–	–	–	–	–	2,5	–
Skócia	–	–	–	–	3	–	2	1	–	–	0,5	–	1	0	–	–	–	1	–
Spanyolország	–	–	2	–	–	–	–	–	2,5	1,5	–	–	–	2,5	–	–	3	–	–
Svájc	–	–	–	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	1,5	–	–	1	–
Svédország	–	–	–	–	–	–	–	2,5	2	–	1	1,5	1,5	–	–	–	–	–	3
Szerbia	–	–	–	–	–	1,5	–	–	–	–	–	1,5	–	2,5	–	–	–	3	4
Szlovénia	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–	–	3	–	2	–	–	–
Törökország	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–	–
Ukrajna	2,5	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	3	3	2	–	–	–	–
Wales	–	0	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2

3.b táblázat. A 2011-es sakkcsapat Európa-bajnokság eredményei II.

	Macedónia	Magyarország	Moldova	Montenegró	Németország	Norvégia	Olaszország	Oroszország	Örményország	Románia	Skócia	Spanyolország	Svájc	Svédország	Szerbia	Szlovénia	Törökország	Ukrajna	Wales
Anglia	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–
Ausztria	–	–	1,5	2	–	–	–	–	0,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4
Azerbajdzsán	–	–	–	–	1,5	–	2,5	2,5	3	3	–	2	–	–	–	–	–	–	–
Bulgária	–	0	–	–	3	–	3	3	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–	2	–
Ciprus	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	1	–	2
Csehország	–	2	2	–	–	3,5	–	0,5	–	–	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–
Dánia	–	1	1	–	–	3,5	–	–	0,5	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–
Finnország	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	3	–	–	1,5	–	–	–	–	–
Franciaország	–	–	2,5	–	–	–	–	1,5	1,5	–	–	1,5	–	2	–	–	–	–	–
Görögország	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	1,5	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–
Grúzia	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3,5	–	–	3	–	1,5	1,5	–	–
Hollandia	–	–	–	–	–	–	–	2	1	1,5	–	–	–	2,5	2,5	–	–	–	–
Horvátország	–	2	2,5	–	–	–	–	–	1	–	3	–	2	2,5	–	–	–	1	–
Izland	2,5	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	4	1,5	–	–	1,5	1	–	1	–
Izrael	3	–	–	–	2	–	1,5	–	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–	2	–
Lengyelország	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–
Lettország	3	1,5	–	–	–	2,5	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–
Litvánia	–	–	–	–	–	2	–	–	–	1,5	3	–	3	–	1	–	–	–	–
Luxemburg	2	–	0	0,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	0	–	–	–	2
Macedónia	–	1	–	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–	4
Magyarország	3	–	–	–	1,5	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	3	–	–	–
Moldova	–	–	–	3	–	–	1,5	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Montenegró	2,5	–	1	–	1	3	–	–	–	–	–	–	–	2	1,5	–	–	–	–
Németország	–	2,5	–	3	–	–	3	–	2,5	2,5	–	–	–	–	–	–	–	3,5	–
Norvégia	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	2,5	–	2	–	–	–	2,5	–	–
Olaszország	–	–	2,5	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–	2	–	–	3,5
Oroszország	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	3	–	2,5	–
Örményország	–	–	–	–	1,5	–	–	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–
Románia	–	2	–	–	1,5	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	3	–	4
Skócia	–	–	–	–	–	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3,5
Spanyolország	–	–	–	–	–	–	–	1	1,5	3	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–
Svájc	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	2,5	3	4
Svédország	–	–	–	2	–	–	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–	–
Szerbia	–	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	–	1,5	4	–	–
Szlovénia	–	1	–	–	–	–	2	1	–	–	–	–	3	–	2,5	–	–	0,5	–
Törökország	1,5	–	–	–	–	1,5	–	–	–	1	–	–	1,5	1,5	0	–	–	–	3,5
Ukrajna	–	–	–	–	0,5	–	–	1,5	–	–	–	–	1	–	–	3,5	–	–	–
Wales	0	–	–	–	–	–	0,5	–	–	0	0,5	–	0	–	–	–	0,5	–	–

4.a táblázat. A 2013-as sakkcsapat Európa-bajnokság eredményei I.

	Anglia	Ausztria	Azerbajdzsán	Belgium	Bulgária	Csehország	Dánia	Fehéroroszország	Finnország	Franciaország	Görögország	Grúzia	Hollandia	Horvátország	Izland	Izrael	Lengyelország 1†	Lengyelország 2‡	Lengyelország 3*
Anglia	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	2	–	–	–	–	2	–	3
Ausztria	–	–	–	–	1	–	–	–	2,5	–	–	–	2,5	–	–	0,5	–	–	2
Azerbajdzsán	–	–	–	–	2,5	2,5	–	–	–	2	2,5	3	–	–	–	–	2,5	–	–
Belgium	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	–	–	1,5	–	–	1,5	–	–	–	–
Bulgária	–	3	1,5	–	–	–	–	–	3,5	–	–	–	0,5	–	2,5	–	–	–	–
Csehország	–	–	1,5	–	–	–	–	2	–	1,5	–	2	2	–	2,5	–	–	–	–
Dánia	–	–	–	2,5	–	–	–	1	2	–	–	–	1	–	1,5	–	–	–	–
Fehéroroszország	–	–	–	–	–	2	3	–	–	1,5	1	–	–	–	–	–	–	–	–
Finnország	–	1,5	–	–	0,5	–	2	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–
Franciaország	–	–	2	–	–	2,5	–	2,5	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–	–
Görögország	3	–	1,5	–	–	–	–	3	–	1,5	–	2	–	3	–	–	–	–	–
Grúzia	2	–	1	2,5	–	2	–	–	–	–	2	–	–	–	–	3,5	–	–	–
Hollandia	–	1,5	–	–	3,5	2	3	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	3
Horvátország	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	2	2	3	–
Izland	–	–	–	2,5	1,5	1,5	2,5	–	2	–	–	–	–	–	–	–	1	–	1,5
Izrael	–	3,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,5	2,5	2	–	–	–	1,5	–
Lengyelország 1†	2	–	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	3	–	–	–	–
Lengyelország 2‡	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	2,5	–	–	3
Lengyelország 3*	1	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	2,5	–	–	1	–
Litvánia	–	–	–	3	–	–	2	–	2,5	–	1,5	–	–	–	–	–	–	1	1,5
Macedónia	–	–	–	1	–	–	–	–	1,5	–	–	–	–	1,5	–	–	–	0,5	–
Magyarország	2	–	2	–	–	–	3	3	–	2	–	2	–	–	–	–	–	–	–
Montenegró	0,5	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2,5
Németország	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	–	2,5	2	2	–
Norvégia	–	–	–	0,5	–	–	0	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Olaszország	–	–	–	–	2,5	1	–	–	3	–	2	–	–	–	–	3,5	–	–	–
Oroszország	2	4	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–
Örményország	–	2,5	2	–	2	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Románia	–	2	–	–	–	1,5	–	–	–	–	2	–	–	2	–	–	–	–	3
Skócia	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0,5	–	–	–	–
Spanyolország	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	2,5	–	1,5	3	–
Svájc	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1	–	–
Svédország	–	–	2	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3	–
Szerbia	–	–	–	3,5	–	–	–	1,5	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–
Szlovénia	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	0,5	–	–	2,5	2,5	–	–
Törökország	–	–	–	–	–	0,5	–	1,5	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–	–
Ukrajna	2	–	–	–	–	–	–	2	–	1	–	1,5	–	2,5	–	–	–	3	–
Wales	–	–	–	0	–	–	0,5	–	0	–	–	–	0	–	–	–	–	–	0,5

† Poland ‡ Poland Futures * Poland Goldies

4.b táblázat. A 2013-as sakkcsapat Európa-bajnokság eredményei II.

	Litvánia	Macedónia	Magyarország	Montenegró	Németország	Norvégia	Olaszország	Oroszország	Örményország	Románia	Skócia	Spanyolország	Svájc	Svédország	Szerbia	Szlovénia	Törökország	Ukrajna	Wales
Anglia	–	–	2	3,5	2,5	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	–
Ausztria	–	–	–	–	–	–	–	0	1,5	2	–	2	–	–	–	–	–	–	–
Azerbajdzsán	–	–	2	–	–	–	–	–	2	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–
Belgium	1	3	–	–	–	3,5	–	–	–	–	2	–	–	–	0,5	–	–	–	4
Bulgária	–	–	–	–	–	–	1,5	–	2	–	–	–	1,5	2	–	–	–	–	–
Csehország	–	–	–	–	–	–	3	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	3,5	–	–
Dánia	2	–	1	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3,5
Fehéroroszország	–	–	1	–	–	3	–	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–	2,5	2	–
Finnország	1,5	2,5	–	1,5	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	4
Franciaország	–	–	2	–	–	–	–	1,5	2	–	–	–	–	–	–	2,5	–	3	–
Görögország	2,5	–	–	–	–	–	2	–	–	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Grúzia	–	–	2	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–
Hollandia	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	–	–	–	–	–	3,5	–	–	4
Horvátország	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–	2	–	2,5	–	–	2	–	–	1,5	–
Izland	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	3,5	1,5	–	–	–	–	–	–	–
Izrael	–	–	–	–	1,5	–	0,5	–	–	–	–	–	3	–	–	1,5	–	–	–
Lengyelország 1†	–	–	–	–	2	–	–	–	–	–	–	2,5	3	–	–	1,5	2	–	–
Lengyelország 2‡	3	3,5	–	–	2	–	–	–	–	–	–	1	–	1	–	–	–	1	–
Lengyelország 3*	2,5	–	–	1,5	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	3,5
Litvánia	–	4	–	–	1	2,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Macedónia	0	–	–	–	–	1,5	–	–	–	–	2,5	–	–	1,5	–	–	–	–	4
Magyarország	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	3	3	–	–	–	–	–	–
Montenegró	–	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	3	2	–	2,5	2	1	–	–	–
Németország	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	2	3	–	–	–	0,5	–	–
Norvégia	1,5	2,5	–	–	–	–	–	–	–	–	3	–	1,5	–	–	1	–	–	3
Olaszország	–	–	–	–	–	–	–	0,5	–	–	–	–	–	–	2	2	2,5	–	–
Oroszország	–	–	–	–	–	–	3,5	–	1,5	2,5	–	–	–	–	2,5	–	1,5	–	–
Örményország	–	–	2,5	2,5	–	–	–	2,5	–	–	–	–	–	–	–	3	–	1	–
Románia	–	–	–	–	–	–	–	1,5	–	–	–	–	3,5	–	–	–	–	2	4
Skócia	–	1,5	–	1	–	1	–	–	–	–	–	–	–	0	2	–	1	–	4
Spanyolország	–	–	1	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	2,5	–	–	–	–	–
Svájc	–	–	1	–	1	2,5	–	–	–	0,5	–	–	–	3	–	–	2	–	–
Svédország	–	2,5	–	1,5	–	–	–	–	–	–	4	1,5	1	–	0,5	–	–	–	–
Szerbia	–	–	–	2	–	–	2	1,5	–	–	2	–	–	3,5	–	–	3	–	–
Szlovénia	–	–	–	3	–	3	2	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	0,5	–
Törökország	–	–	–	–	3,5	–	1,5	2,5	–	–	3	–	2	–	1	–	–	–	–
Ukrajna	–	–	–	–	–	–	–	–	3	2	–	–	–	–	–	3,5	–	–	–
Wales	–	0	–	–	–	1	–	–	–	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–

† Poland ‡ Poland Futures * Poland Goldies

5. táblázat. A 2011-es sakkcsapat Európa-bajnokság rangsorai

Csapat	Start	Official	$GRS_1(R^{MP})$	$GRS_2(R^{MP})$	$LS(R^{MP})$	$GRS_1(R^{MB})$	$GRS_2(R^{MB})$	$LS(R^{MB})$	$GRS_1(R^{BM})$	$GRS_2(R^{BM})$	$LS(R^{BM})$	$GRS_1(R^{BP})$	$GRS_2(R^{BP})$	$LS(R^{BP})$
Anglia	8	22	22	21	19	22	22	18	21	21	18	20	20	17
Ausztria	23	32	31	31	30	32	31	30	31	30	30	31	30	30
Azerbajdzsán	3	2	2	2	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1
Bulgária	7	7	6	5	4	7	6	4	11	6	5	18	9	6
Ciprus	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	37	38	38
Csehország	12	16	14	14	14	16	14	16	17	16	15	19	17	14
Dánia	24	28	28	27	26	28	28	27	29	28	29	29	28	29
Finnország	28	31	32	32	32	31	32	32	30	33	32	30	32	33
Franciaország	6	19	18	15	10	19	15	9	18	13	8	14	11	8
Görögország	19	20	19	17	17	20	18	17	19	18	17	16	18	18
Grúzia	15	13	17	22	27	13	21	25	8	20	24	7	16	23
Hollandia	9	6	7	7	8	6	7	8	9	9	9	13	13	12
Horvátország	16	21	20	19	18	21	20	19	23	22	21	28	23	21
Izland	32	26	26	28	28	26	27	28	26	26	26	25	25	26
Izrael	11	14	15	16	15	14	16	15	13	14	14	10	10	11
Lengyelország	14	8	11	12	16	8	11	13	6	8	12	5	6	9
Lettország	27	24	23	23	22	24	23	22	24	23	22	23	22	22
Litvánia	33	33	30	29	24	33	29	24	33	29	25	32	29	25
Luxemburg	37	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
Macedónia	30	30	33	33	33	30	33	33	28	31	33	22	31	31
Magyarország	5	3	5	6	6	3	5	6	3	5	6	2	4	5
Moldova	20	18	21	20	20	18	19	20	15	19	20	9	14	20
Montenegró	29	25	25	26	29	25	26	29	25	25	28	24	24	27
Németország	10	1	1	1	2	1	1	2	1	1	2	3	2	2
Norvégia	31	29	29	30	31	29	30	31	32	32	31	34	33	32
Olaszország	22	11	9	9	9	11	10	10	14	12	11	17	19	15
Oroszország	1	5	3	3	3	5	3	3	5	4	3	8	5	3
Örményország	4	4	4	4	5	4	4	5	4	3	4	4	3	4
Románia	17	9	10	10	12	9	9	12	10	10	13	11	12	13
Skócia	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
Spanyolország	13	10	8	8	7	10	8	7	12	7	7	12	8	7
Svájc	26	23	27	24	23	23	24	23	22	24	23	21	26	24
Svédország	25	27	24	25	25	27	25	26	27	27	27	27	27	28
Szerbia	18	12	16	18	21	12	17	21	7	15	19	6	7	16
Szlovénia	21	17	12	13	13	17	13	14	20	17	16	26	21	19
Törökország	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	33	34	34
Ukrajna	2	15	13	11	11	15	12	11	16	11	10	15	15	10
Wales	36	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	38	37	37

6. táblázat. A 2013-as sakkcsapat Európa-bajnokság rangsorai

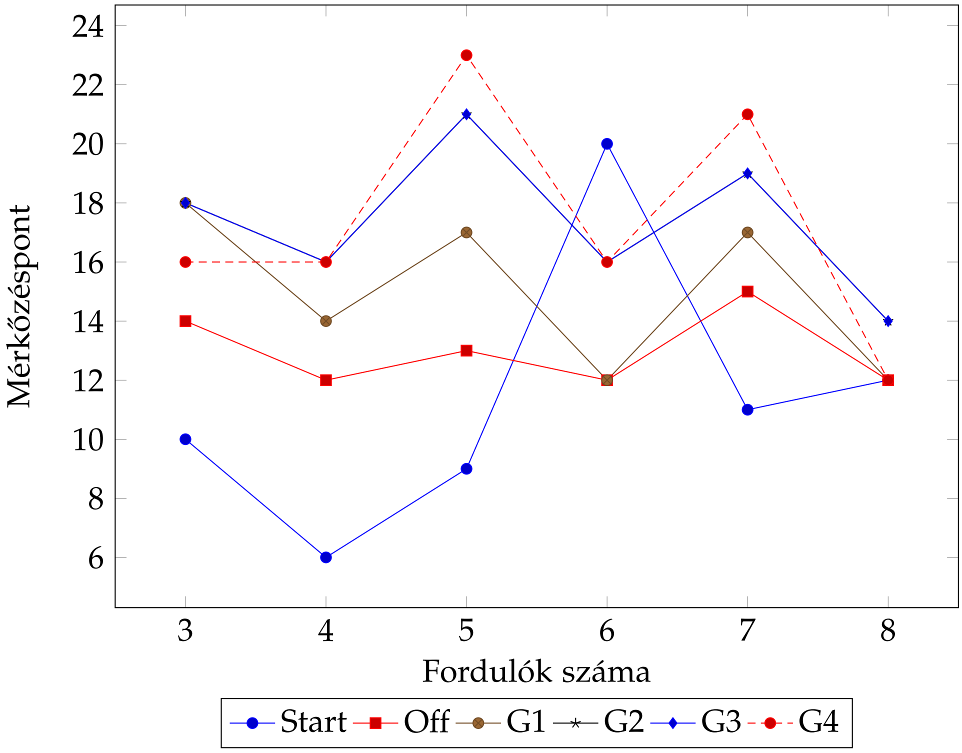
Csapat	Start	Official	$GRS_1(R^{MP})$	$GRS_2(R^{MP})$	$LS(R^{MP})$	$GRS_1(R^{MB})$	$GRS_2(R^{MB})$	$LS(R^{MB})$	$GRS_1(R^{BM})$	$GRS_2(R^{BM})$	$LS(R^{BM})$	$GRS_1(R^{BP})$	$GRS_2(R^{BP})$	$LS(R^{BP})$
Anglia	4	10	10	9	9	11	10	9	12	10	10	12	10	10
Ausztria	27	30	29	28	25	33	28	26	34	30	26	34	33	29
Azerbajdzsán	6	1	1	1	2	1	1	2	2	1	2	5	2	3
Belgium	33	33	33	33	34	28	33	34	28	33	33	20	30	33
Bulgária	21	25	25	24	23	25	24	23	24	23	22	21	19	21
Csehország	9	8	9	10	10	10	9	10	9	9	9	8	7	6
Dánia	26	27	27	30	32	24	29	32	23	28	31	19	26	30
Fehéroroszország	17	15	13	12	11	16	12	11	16	15	11	17	16	12
Finnország	32	34	34	34	33	34	34	33	32	34	34	31	32	34
Franciaország	3	2	2	2	1	3	2	1	4	3	1	7	4	1
Görögország	15	7	7	7	8	8	7	7	8	7	6	9	6	5
Grúzia	14	6	6	6	6	6	6	6	7	6	8	11	9	8
Hollandia	8	11	12	14	17	7	13	17	3	11	15	1	5	11
Horvátország	16	17	15	15	16	17	17	16	17	17	18	18	17	17
Izland	28	29	32	32	31	29	32	31	29	29	30	28	28	28
Izrael	29	28	28	26	24	30	27	24	30	27	24	30	29	23
Lengyelország 1†	12	16	14	13	14	15	14	13	15	16	13	14	15	16
Lengyelország 2‡	23	22	22	23	26	22	23	25	22	24	25	24	23	24
Lengyelország 3*	24	31	31	31	29	31	31	30	31	32	32	32	31	32
Litvánia	34	23	23	25	30	19	25	29	18	25	29	16	22	27
Macedónia	35	37	37	37	37	36	37	37	36	36	37	35	36	36
Magyarország	7	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	3	3	4
Montenegró	30	18	18	19	21	18	19	22	19	21	23	27	27	25
Németország	10	20	20	20	18	20	20	19	20	18	19	22	18	19
Norvégia	36	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	36	35	35
Olaszország	13	12	11	11	12	12	11	12	14	12	12	15	14	14
Oroszország	1	3	4	4	4	2	4	4	1	2	3	2	1	2
Örményország	2	4	3	3	3	4	3	3	6	5	4	13	11	9
Románia	19	14	17	17	15	13	15	15	11	13	14	4	13	13
Skócia	37	36	36	36	36	37	36	36	37	37	36	37	37	37
Spanyolország	11	19	21	21	22	21	21	21	21	20	21	23	20	22
Svájc	31	32	30	29	27	32	30	27	33	31	28	33	34	31
Svédország	25	26	26	27	28	26	26	28	25	26	27	25	24	26
Szerbia	20	13	16	18	19	14	16	18	13	14	16	6	12	15
Szlovénia	22	21	19	16	13	23	18	14	26	19	17	29	25	20
Törökország	18	24	24	22	20	27	22	20	27	22	20	26	21	18
Ukrajna	5	9	8	8	7	9	8	8	10	8	7	10	8	7
Wales	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38

† Poland
‡ Poland Futures
* Poland Goldies

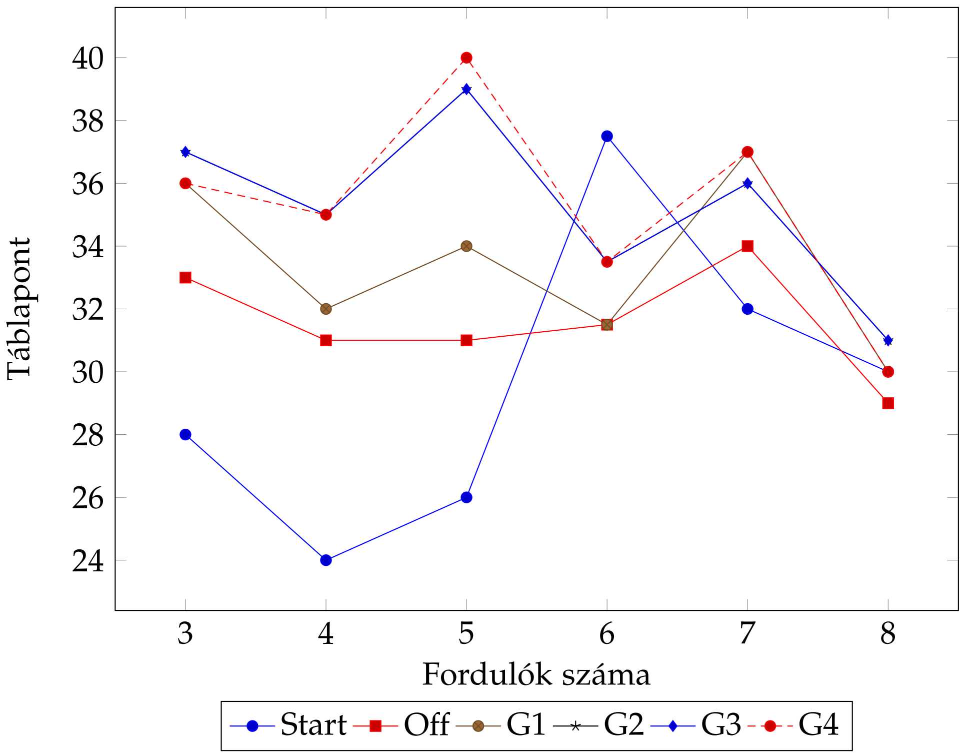
F.III. Függelék: Ábrák

8. ábra. Következő forduló előrejelző képessége, 2013-as sakkcsapat EB

(a) Mérkőzéspont, GRS_1 eljárás

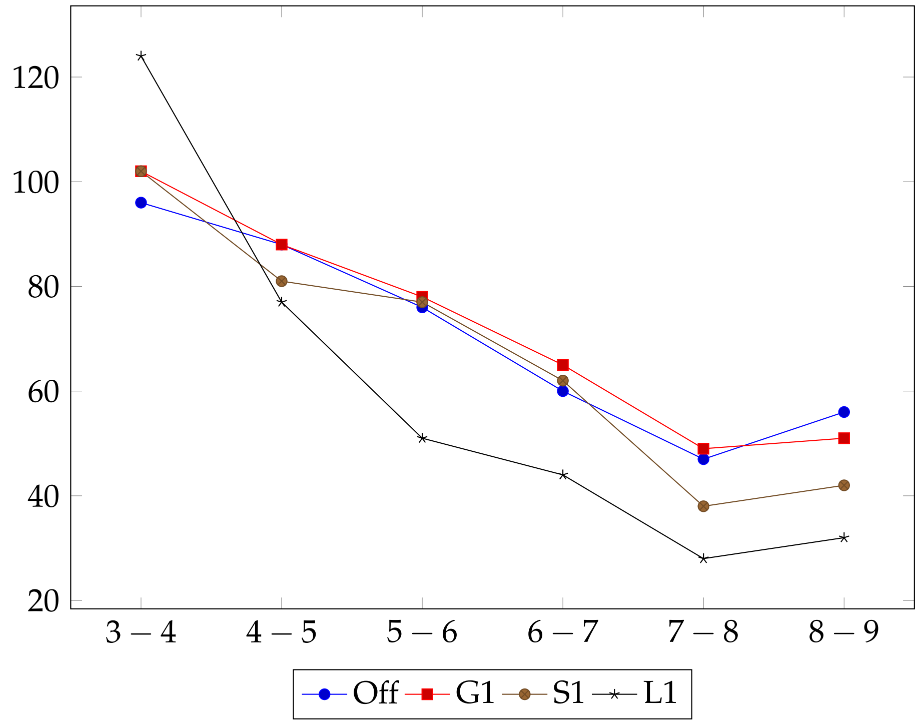


(b) Táblapont, GRS_1 eljárás



9. ábra. Rangsorok stabilitása a fordulók között, 2013-as sakkcsapat EB

(a) Kemény-távolság, R^{MP} eredménymátrix



(b) Súlyozott távolság, R^{MP} eredménymátrix