Walter György–Berlinger Edina

# Faktormodellek az értékpapírpiacon

## *Az arbitrált árfolyamok modellje (APT)*

**Az alábbi cikk az értékpapírszámtan és portfóliókezelés területén gyakran felbukkanó, népszerű, úgynevezett arbitrált árfolyamok modelljének alapfeltevéseivel és legfontosabb tételeivel foglalkozik. A pénzügyi számításokról, befektetésekről, portfóliókezelésről szóló tankönyvben többnyire egy-egy fejezet vagy részfejezet foglalkozik e témával, általában a Markowitz-modell, a hozam-variancia diagramok és a CAPM (tőkepiaci árfolyamok modellje) tárgyalása után. Mindezen témák, fogalmak és levezetések azonban nagyon gyakran teljesen összekeverednek az APT fogalmaival, emiatt az olvasótól óriási energiát igényel a modell lényegének megértése, az előbbi témákkal való összefüggések és főleg a különbségek azonosítása. A szerzők azoknak szeretnének segíteni, akiket az APT témaköre komolyabban érdekel, továbbá mindazoknak, akik valamilyen hasonló modellel a gyakorlatban, például portfóliókezelő szoftvereknél vagy empirikus vizsgálatokban találkoznak.**

A cikk elején a modell alapfeltevéseit és főbb fogalmait mutatjuk be a lehető legtömörebben. Ezek után az APT legfontosabb definícióit, tételeit, összefüggéseit vezetjük le az eredeti, Ross által kidolgozott arbitrázsmentesség elmélete alapján. Végül rátérünk az APT „rokonaira", a klasszikus egyensúlyi modellekre, ezen belül is a CAPM-re. Mivel itt tapasztalható a legtöbb félreértés, ezzel kapcsolatban elsősorban a különbségekre és azonosságokra hívjuk majd fel a figyelmet. Hangsúlyozzuk, hogy célunk a főbb összefüggések és alapvető tételek összefoglalása, és nem korrekt matematikai bizonyításuk, ezt a szorgalmasabb olvasó a hivatkozott cikkekben részletesen megtalálhatja. Sőt, inkább arra törekedtünk, hogy a háttérben felhalmozott rengeteg matematikai, statisztikai, ökonometriai fogalmat és levezetést, lehetőség szerint egyszerűen és közérthetően mutassuk be, mindig csak a leglényegesebbre felhívva a figyelmet. Az is érzékelhető, hogy a tárgyalt témák még korántsem fedik le a teljes APT- és a faktormodellek területét – erre egy cikk terjedelme nem is lenne elegendő –, éppen csak az alapeszköztár megszerzésére nyújt lehetőséget, és továbbra is számos nyitott kérdés marad, mint például a modellek tesztelhetősége, vagy az empirikus kutatások.[1]

### AZ APT-MODELL ÁLTALÁNOS TŐKEPIACI FELTÉTELRENDSZERE ÉS FŐBB FOGALMAI

A következőkben az eredeti és a továbbfejlesztett APT-modell feltételeit és a levezetéshez, illetve a gondolatmenet megértéséhez szükséges fogalmakat, definíciókat mutatjuk be röviden. Mindezek csupán a modell „tartozékai", elemei, de megértésük a tételek tárgyalásához elengedhetetlen.

[1] A hivatkozott cikkeken kívül a faktormodellek megértéséhez segítséget nyújthat még *Sauer* [1993] faktormodellekről és a német piacon folytatott empirikus kutatásokról írt disszertációja.

### Tőkepiaci feltételek

1. A vizsgált tőkepiac a tökéletes piac intézményi és befektetőkre vonatkozó feltételeinek felel meg, azaz:
- Nincs tranzakciós költség.
- Nincsenek adók.
- Intézményi korlátok nincsenek, minden csere, a rövidre eladás is szabad.
- A befektetők korlátozott felelősséggel rendelkező értékpapírokkal kereskednek.
- Az értékpapírok korlátlanul oszthatók.
- Sok, de véges számú racionális befektető van a piacon, akik árelfogadóak.

2. A befektetők $t_0 - t_1$ időpontok közötti befektetést és ennek hozamát vizsgálják.

3. A piacon végtelen sok[2] értékpapírral kereskednek ($M$). A modellekben gyakran képeznek a végtelen számú értékpapírokból részportfóliókat, amelyeket portfóliósorozatként vizsgálnak. $M_n$ portfólió jelenti azt a portfóliót, amelyet úgy képeztünk, hogy az $n$–1-edik lépésben az $M_{n-1}$ portfólióhoz hozzáteszünk még egy értékpapírt ($M_1 \subset M_2 \subset \ldots M$).

### Lineáris *K*-faktorstruktúra

Az úgynevezett lineáris $K$-faktorstruktúra létezése, illetve feltételezése az APT központi gondolata. Az elgondolás szerint, az értékpapírhozamok nagy részét néhány, a gazdaságban létező tényező, faktor határozza meg. Ezek az úgynevezett szisztematikus faktorok.[3] A hozamoknak azt a részét, amelyekre ezek nem adnak magyarázatot, hívjuk értékpapír-specifikus, egyedi hozamoknak. Az egyedi hozam a nem szisztematikus, tehát specifikus kockázatnak köszönhető. A modell arra a feltételre épít, hogy az egyperiódusos értékpapírhozamokat egy úgynevezett lineáris $K$-faktorstruktúrával tudjuk jellemezni.[4]

Ez annyit jelent: minden befektető egyetért azzal, hogy a piacon tapasztalható értékpapírhozamok – a ténylegesen realizált és nem az elvárt hozamokról van szó – az alábbi összetevőkre bonthatóak:
- az értékpapír elvárt hozama,
- a piaci kockázatot reprezentáló tényezők nem várt változásából származó hozam,
- az egyedi kockázatból származó hozam.

Mindezek alapján tehát feltételezzük, hogy az n darab értékpapír hozama felírható a következő egyenlettel:

$$r_n = \mu_n + B_n f_k + \varepsilon_n$$

ahol
$r_n$ = az értékpapírok egy periódusra számolt hozamainak $n$-vektora;
$\mu_n$ = az értékpapírok egy periódusra számolt elvárt hozamainak $n$-vektora;
$B_n$ = az n értékpapírok faktorérzékenységét mutató ($n \times K$) mátrix;
$f_k$ = a közös faktorok $K$-vektora;
$\varepsilon_n$ = az értékpapírok egy periódusra számolt egyedi (reziduális) hozamainak $n$-vektora

Egyéb feltételek:

$$E[\varepsilon_n] = 0_n$$
$$E[f_K] = 0_n$$
$$E[f_K f_K^T] = I_K$$
$$E[\varepsilon_n f_K^T] = 0_{nK}$$
$$E[\varepsilon_n \varepsilon_n^T] = \Omega_n$$

Vizsgáljuk meg a feltételek jelentését.[5]

A faktorok várható értéke nulla, vagyis a specifikus kockázatból származó hozamok várható értéke zéró. Ezek szerint a ténylegesen realizált hozam csak akkor tér el az elvárttól – eltekintve az egyedi kockázattól – ha a faktorokban nem várt változás áll be. (Tegyük fel például, hogy az egyik specifikus faktor a gazdasági növekedést reprezen-

---

[2] A „végtelen sok" vagy „végtelen számú" értékpapír fogalmával a továbbiakban még többször találkozunk, ez mindannyiszor az értékpapírok fajtájára vonatkozik. A végtelen értékpapírpiac fogalmát is ilyen értelemben használjuk.

[3] „This is the core of the APT: there are only few systematic components of risk existing in the nature" - Roll-Ross [1980], 1077. o.)

[4] vö: *Ingersoll* [1984].

[5] $I_n$ = a ($K \times K$) egységmátrixnak, $0_{nK}$ az ($n \times K$) nullmátrixnak felel meg.
$I_K$ = az egységmátrixot jelenti, tehát a faktorok varianciája 1-re van normálva. A faktorok és az egyedi hozamok korrelálatlanok.
$\Omega_n$ = jelöli a reziduális kovariancia-variancia ($n \times n$) mátrixot.

tálja: a GDP növekedése, az ipari termelés növekedése stb. Ez a faktor csak akkor hat a realizált hozamra, ha a jövőben tapasztalt gazdasági növekedés a korábban elvárt növekedéstől eltér.) Mindez igaz a specifikus kockázatra is.

A specifikus kockázatból származó többlethozam várható értéke szintén nulla, itt is csak a nem várt változás hat a tényleges hozamra. Tehát még egyszer: ha a szisztematikus kockázat (amelyeket a faktorok reprezentálnak) és az egyedi kockázat a „várakozás" szerint alakul, akkor a realizált hozam az elvárt hozammal egyezik meg (vagyis $\mu_i = E[r_i]$), mint ahogy ezt a józan ész is diktálná. Ha a gazdaságban a folyamatok nem úgy alakulnak, ahogy azt a szereplők várják, akkor a $B_n$ mátrix megmutatja, hogy az egyes értékpapírok mennyire érzékenyen reagálnak a az adott szisztematikus faktorok nem várt változásaira (a $B_n$ mátrix tagjai végesek). A modell további feltétele, hogy az egyedi és specifikus kockázati tényezők korrelálatlanok.

Szintén feltételként szokták megadni, hogy $K$ lényegesen kisebb $n$-nél, vagyis legyen értelme a faktorok bevezetésének, valóban érthetőbb és áttekinthetőbb legyen a hozamok leírását szolgáló modell. A faktormodell feltételei függetlenek az értékpapírok számától, és valamennyi részportfólióra érvényesek, a faktorok száma az értékpapírok számának módosulásával nem változik.

Az előbbi egyenlet alapján felírható és a specifikus (egyedi) kockázat alapján felbontható az n darab értékpapír hozamainak kovariancia mátrixa:[6]

$$E\left[(r_n - \mu_n)(r_n - \mu_n)^T\right] = \Sigma_n = B_n B_n^T + \Omega_n$$

A $K$ faktorstruktúra megértésével és konkrét felírásával kapcsolatban a legfontosabb problémaként az említhető, hogy igazából semmit nem mond a faktorok konkrét számáról, valamint közgazdasági jelentéséről. Az elméleti modell megalkotásakor még inkább statisztikai fogalmakról van szó, amelyek ráadásul állandóan változtathatóak, hiszen a faktorok rotálásával[7] ekvivalens modelleket kaphatunk.

### Diverzifikáció

Egy portfólió[8] kockázata meghatározható a portfóliósúlyok és kovariancia-variancia mátrix szorzataként. Bármely értékpapír vagy portfólió kockázata felbontható szisztematikus és egyedi kockázatokra. Akkor mondhatjuk egy portfólióról, hogy teljesen diverzifikált, ha egyedi kockázatot nem tartalmaz.

A $K$-lineáris faktorstruktúra egyenletét és az ott bemutatott kovariancia mátrixot felhasználva egy portfólió kockázatát a következőképpen írhatjuk fel:

$$x_n^T \Sigma_n x_n = x_n^T B_n B_n^T x_n + x_n^T \Omega_n x_n$$

Mivel feltételezésünk szerint a $\Omega_n$ mátrix pozitív definit, így látható, hogy az egyedi kockázat soha nem csökkenthető nullára. Bár egyre több értékpapírt tartalmazó portfólió esetén az egyedi kockázat jelentősége és súlya egyre csökken, végleg nem tüntethető el. Ez csak akkor teljesülhet, ha az értékpapírok számát végtelen nagyra növeljük. Ez elvezet minket a diverzifikált portfólió-sorozatok fogalmához: csak egy portfóliósorozat „határ"-

[6] Vö. *Ingersoll* [1984].

[7] A faktorok és a faktorsúlyok rotálásnak nevezzük azt a műveletet, amikor a faktorsúlyok mátrixát és a faktorok vektorát egy ortogonális mátrixszal megszorozzuk. Legyen tehát $OK$ egy tetszőleges $(K \times K)$ ortogonális mátrix: $O_K^T O_K = I_K$. Ha ezzel rotálunk, ez azt jelenti, hogy : $f^*_K = O_K^T f_K$ és $B^*_n = B_n O_K$.

[8] A befektető $vn$ vektor mutatja az $n$ darab értékpapírba fektetett pénzösszeget ($v_i$ az $i$-edik értékpapírba fektetett pénzösszeg). $\sum_{i=1}^{n} v_1 = V_0 > 0$; $x_i$ vektor az összes pénzvagyon százalékában mutatja be az egyes értékpapírba történő befektetés nagyságát, amely ezentúl egy portfóliót reprezentál. $x_i = \frac{v_i}{V_0}$, így $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

portfóliója (határértéke) nevezhető diverzifikáltnak.[9]

## Aszimptotikus arbitrázs

Arbitrázspozíciónak $(y_n)$[10] azt nevezzük, amikor a $t = 0$ időpont nem igényel pénzbefektetést, (azaz $y_n^T 1_n = 0$ úgy, hogy $y_n$ nem a nullvektor, vagyis legalább két értékpapírból áll), ugyanakkor a pozíció pozitív hozamot ígér, nulla kockázat mellett. Ha az arbitrázspozíciót $M_n$ portfóliókból állítjuk elő, akkor befektetési pozíciók sorozatáról beszélhetünk (az $M_{n-1}$ portfólióhoz hozzátettünk még egy értékpapírt).

Aszimptotikus arbitrázsnak nevezzük azt a pozíciót, amikor n darab értékpapírt tartalmazó portfóliónkat újabb értékpapírokkal kiegészítve a portfólió várható hozama nullánál nagyobb, míg a portfólió varianciája 0-hoz tart.

Vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \{Var(y_n, r_n)\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \{y_n^T((B_n B_n^T + \Omega_n))y_n\} = 0$$

miközben

$$E[y_n^T r] > 0$$[11]

A végtelen számú értékpapírt tartalmazó piac akkor arbitrázsmentes, ha ott asszimptotikus arbitrázs lehetősége sem létezik.

## Faktorstruktúrák

A modellekben nagy jelentősége van, hogy milyen statisztikai tulajdonságú faktorokat (milyen faktorstruktúrát) használunk, és ezek hogyan alakítják a variancia-kovariancia mátrixot. A kutatások során különböző tulajdonságú faktorstruktúrák kerültek be a modellekbe, amelyek egyre kevésbé szigorú feltételeket tartalmaznak, és közelítenek a valós világhoz. A figyelem elsősorban a reziduális kovariancia mátrix szerkezetére és a minimális számú, ugyanakkor szignifikáns, tehát tényleg jelentős magyarázó erővel bíró faktort tartalmazó struktúra meghatározására helyeződött. *Ross* modellje még az egyszerűbb, az ún. szigorú faktorstruktúra feltételére épült, később építették be a modellekbe a közelítő, minimális, ekvivalens és teljes faktorstruktúrákat. Tekintsük át röviden a modellekben használt faktorstruktúrák jellemzőit.

### *a) Szigorú (strict) faktorstruktúra*

Szigorú faktorstruktúráról[12] beszélünk, ha az értékpapírhozamokra érvényes a lineáris $K$-faktorstruktúra feltétele, valamint a reziduális kovariancia mátrix diagonális, tehát a specifikus kockázatok korrelálatlanok és az egyedi kockázat (variancia) korlátos.

Vagyis minden $n$ esetében:

$$E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \begin{cases} = 0 & \text{ha } \; i \neq j \\ \leq \sigma^2 \; < \infty & \text{ha } \; i = j \end{cases}$$

### *b) Approximatív faktorstruktúra*

A következőkben a reziduális kovariancia mátrixot tovább általánosítjuk, és már nem kötjük ki, hogy a specifikus kockázatok korrelálatlanok legyenek. Így a reziduális kovariancia mátrix már nem csak diagonális lehet, a kezelhetőség szempontjából azonban még feltételezzük, hogy az egyedi kovarianciák „nem túl nagyok". Azt a faktorstruktúrát tehát, amely eleget tesz a lineáris K-faktorstruktúra feltételének, és ahol az egyedi kovarianciák léteznek ugyan, de nagyságuk egy adott mértéket nem halad meg, nevezzük approximatív faktorstruktúrának.[13]

---

[9] Vö. *Ingersoll* [1984].

[10] Az $y_i$ vektor az előzőekhez hasonlóan az összes pénzvagyon százalékában mutatja be az egyes értékpapírba történő befektetés nagyságát, $y_i$ itt az arbitrázsportfóliót reprezentálja.

[11] Vö. *Ingersoll* [1984].

[12] Az elnevezés *Chamberlain-Rotchild* [1983] munkájából származik.

[13] A reziduális kovarianciák nagyságának mérésére vezette be Ingersoll a mátrix normáját (vö. *Ingersoll* [1984]).

A következő faktorstruktúrák a faktorok megfelelő számára és magyarázó erejükre koncentrálnak.

*c) Minimális faktorstruktúra*[14]

Amennyiben a reziduumok korrelálnak, ez azt jelenti, hogy elvileg több faktor is kimutatható lenne, amelynek a lineáris *K*-faktorstruktúrában szerepelhetne. Annyi faktornak kellene szerepelnie, amelyek összességükben jól magyarázzák az egyes értékpapírok hozamait, és még egyenként szignifikáns magyarázó erővel is bírnak. Két ellentétes célnak kell megfelelni: a faktorstruktúra dimenzióját növelni, hogy minél pontosabban becsülje a hozamokat, de ugyanakkor minden faktor szignifikáns maradjon. Egy faktor akkor mondható szignifikánsnak, ha az értékpapírok számának végtelenre való növelése során a rá vonatkozó faktorsúlyok többsége nullától lényegesen különbözik.

*d) Ekvivalens faktorstruktúra*[15]

Bár az előbbiek alapján az egyes faktorokról eldönthető szignifikanciájuk, ugyanakkor nem derül ki, hogy nincs-e az egyes faktorok között lineáris kapcsolat n növelésével. (Például nem magyaráz-e egy vagy több faktor egy másik faktort is, amelyre így nincs szükség.) Faktorok rotálásával áttérhetünk egy ekvivalens faktorstruktúrára. Ha létezik a faktorok között összefüggés, akkor létezik egy ekvivalens faktorstruktúra is, ahol egy faktor már nem szignifikáns (és bekerül a reziduális kovariancia mátrixba). Ha nincsen ekvivalens faktorstruktúra, akkor minimális faktorstruktúráról beszélhetünk.

*d) Teljes faktorstruktúra*[16]

Ha az értékpapírhozamokra érvényes a lineáris *K*-faktorstruktúra, a faktorstruktúra approximatív és minimális, akkor teljes faktorstruktúráról beszélünk. Ekkor az egyedi kovarianciák „megfelelően kicsik", ugyanakkor minden faktor szignifikáns. Más szavakkal, ha kevesebb faktort használnánk, akkor a faktorstruktúra már nem lenne approximatív, ha eggyel többet, akkor nem lenne minimális.

## ROSS TÉTELE – AZ APT

### Ross tétele

Mindezen fogalmak alapján felírható az eredetileg *Ross* által levezetett approximatív, tehát az értékpapírokra nem pontos, csak közelítő eredményt adó egy periódusú értékelési modell, az *arbitrált árfolyamok modellje* (APT). Fontos hangsúlyozni, hogy az egyensúlyi modellekkel ellentétben, az APT-nél (legalábbis az eredeti, Ross által kidolgozott modelleknél) nem találkozunk a befektetői preferenciákkal, hasznosságfüggvényekkel. Az érvényességéhez szükséges feltétel (a fentebb említett tökéletes piaci feltételek mellett) „csak" az arbitrázs kizárása.[17] Ugyanakkor érdemes még egyszer megemlíteni, hogy Ross kezdeti vizsgálata szigorú faktorstruktúrát feltételez. A tételt a következőképpen foglalhatjuk össze.

Bizonyítható, hogy ha a tőkepiac megfelel a cikk elején említett feltételeknek, és az értékpapírok hozamaira teljesül a szigorú faktorstruktúra feltétele ($r_n = \mu_n + B_n f_k + \varepsilon_n$), valamint nincsen lehetőség aszimptotikus arbitrázsra, akkor minden $n$-re létezik egy $(K + 1)$ vektor $\lambda^n{}_{K+1} = (\lambda_0{}^n, \lambda_1{}^n, \ldots, \lambda_K{}^n)$, amely segítségével az értékpapírok elvárt hozamaira felírható a következő összefüggés:

$$\mu_n \approx B_n{}^1 \lambda^n{}_{K+1}$$

és ahol a négyzetes értékeléshibák összege minden n esetén felülről korlátos, vagyis minden n-re létezik egy V szám, amelynél

$$(\mu_n - B_n{}^1 \lambda^n{}_{K+1})^T (\mu_n - B_n{}^1 \lambda^n{}_{K+1}) \leq V < \infty$$

[14] Részletesebben lásd *Connor* [1982].
[15] Részletesebben lásd *Connor* [1982].
[16] Részletesebben lásd *Ingersoll* [1984].
[17] Az egyensúlyi modellekben sincs lehetőség arbitrázsra, de ott ez nem elégséges feltétel.

Bebizonyítható,[18] hogy ha ez nem teljesül, akkor aszimptotikus arbitrázs lehetősége létezik a piacon.[19]

A legfontosabb következtetés tehát, hogy amennyiben elfogadjuk a lineáris K-faktorstruktúra és a többi feltétel létezését, akkor az értékpapírok elvárt hozama (itt már az elvárt hozamról és nem a realizáltról van szó) és a szisztematikus kockázat között bizonyíthatóan lineáris összefüggés van, amely egyenletben a eredeti $K$-faktorstruktúrában meghatározott faktorsúlyok, érzékenységek szerepelnek. (Egyben igazolja azt az általános elvet, hogy a piac többlethozamot csak a szisztematikus kockázat után fizet.) Ugyanakkor az, hogy a kvadratikus értékeléshibák összege felülről korlátos, nem jelenti azt, hogy minden értékpapír hozamára pontos értékelést ad a modell, még végtelen értékpapír esetén sem! Az egyes értékpapírok esetén a hiba tetszőlegesen nagy is lehet, és az átlagos négyzetes hibának kell alacsonynak lennie. Ez teljesül is, ha a piacon elegendően sok értékpapírt találunk. Az egyes értékpapírok elvárt hozama tehát csak közelítően (approximatív módon) kiszámítható a faktorsúlyok lineáris kombinációjaként, így a modellt is közelítő (approximatív) hozamértékelő modellnek nevezik.

A későbbiekben pontosítani próbálták a lineáris összefüggést, és más faktorstruktúrákat is megvizsgáltak. Így került a középpontba a már korábban bemutatott, nem diagonális reziduális kovariancia mátrixot eredményező közelítő faktorstruktúra, amely végtelen számú értékpapír esetén ugyancsak biztosítja a diverzifikálhatóságot, és bizonyítható, hogy teljesül a Ross által levezetett egyenlőség is.[20]

Mindezek után fordult a figyelem konkrétan a faktorokra, a faktorok megfelelő számára, (lásd minimális,[21] teljes faktorstruktúra[22]) jelentésére és konkrét portfólióként való azonosítására. Ez utóbbi esetekben már mindig teljes faktorstruktúrát feltételezünk.

**Faktorportfóliók és kockázati prémiumok**

A következőkben a faktorok konkrét megvalósulásával, illetve a tőlük elvárható hozamot megtestesítő faktorportfóliókkal foglalkozunk.

$K$ faktorportfóliónak nevezzük azt a diverzifikált portfóliót ($p$), amelynek elvárt hozamát a faktorsúlyok lineáris kombinációjaként úgy írhatjuk fel, hogy a $k$-ik faktorra vonatkozó faktorsúly 1 ($b_{pk}$), míg minden más faktorsúly ($b_{pj}$) értéke 0-val egyenlő. Másképpen fogalmazva, ezek a portfóliók az egyik faktorral tökéletesen korrelálnak, az ő jelentésüket hordozzák magukban.

Egyenlettel felírva:

$$\mu_p = \lambda_0 + \lambda_k$$

ahol $\lambda_0$ egy olyan, jól diverzifikált portfólió elvárt hozama, amely semmilyen faktorkockázattal nem rendelkezik, vagy, ha a piacon létezik ilyen, akkor a kockázatmentes eszköz elvárt hozama.

A fentiekből következik: ha minden faktorra létezik egy faktorportfólió, akkor az egyenletben szereplő $\lambda_k$ a $k$-ik faktor kockázati hozamprémiumaként (faktorhozamként) értelmezhető.

Ahhoz, hogy létezzenek faktorportfóliók, a teljes $K$-faktorstruktúrának úgynevezett szeparálhatónak kell lennie.[23] Megmutatható, hogy ha a faktorstruktúra nem szeparálható, akkor létezik egy ún. globális faktor (megfelelő rotáció után), és minden értékpapír e „globális" faktortól azonos mértékben függ. Ekkor nincs olyan értékpapír vagy portfólió, amely ne függne ettől a bizonyos globális tényezőtől, tehát az eddigi értelemben vett faktorportfólió sem számítható, és a kockázatos eszközökből kockázatmentes portfóliót sem tudunk előállítani.

[18] A tételt és bizonyítását lásd *Ingersoll* [1984], Theorem I.

[19] Az arbitrázsmentesség-feltétel működésére és az elvárt hozam – béta faktor közötti lineáris kapcsolatra egyszerű, de szemléletes példa, amelyet *Ross* [1977] dolgozott ki, a Függelékben található.

[20] Vö. *Ingersoll* [1984], *Chamberlain–Rotschild* [1983].

[21] Vö. *Connor* [1982]

[22] Vö. *Ingersoll* [1984].

[23] Vö. *Ingersoll* [1984].

A szeparálhatóságtól függően a Ross által felírt hozambecslő egyenlet a szeparálhatóság alapján kétféleképpen írható fel.

1. Feltéve, hogy az értékpapírpiacon teljes $K$-faktorstruktúra található, akkor amennyiben ez a faktorstruktúra szeparálható, az APT hozamegyenlete:

$$\mu_n \approx \mu_0^* 1_n + B_n \left[ \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_K^* \end{pmatrix} - \mu_0^* 1_K \right]$$

ahol $\mu_0^*$ egy teljesen diverzifikált portfólió elvárt hozama, amelynek nincsen faktorkockázata.

Ha kockázatmentes eszköz létezik a piacon és ennek hozama $r_f$, akkor $\mu_0^* = r_f$.

A $\mu_K$* pedig azon teljesen diverzifikált portfólió elvárt hozama, amelyek faktorsúlya $k$-ik faktor esetén 1, minden más faktor esetében 0.

2. Ha a faktorstruktúra nem szeparálható, akkor a hozamegyenlet a következőképpen módosul:

$$\mu_n \approx \mu_1^* 1_n + B_n^{R_{K-1}} \left[ \begin{pmatrix} \mu_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_K^* \end{pmatrix} - \mu_1^* 1_{K-1} \right]$$

ahol $\mu_1^*$ egy teljesen diverzifikált portfólió elvárt hozama, amely csak a globális faktorra érzékeny (faktorsúlya 1), minden más faktorra vonatkozó súlya 0 (a maradék faktorokhoz viszonyítva ez nevezhető a zéró-béta portfóliónak).

A $\mu_k^*$ ($k = 2 \ldots n$) pedig azon teljesen diverzifikált portfólió elvárt hozama, amely faktorsúlya $k$-ik faktor és a globális faktor esetén 1, minden más faktor esetében 0.

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy bár elvben most már konkrét portfóliókat határoztunk meg – amelyek a faktorokat reprezentálják –, azokat közgazdasági gyakorlatban is értelmezhető tartalommal még mindig nem töltöttük meg.

Mielőtt azonban erre rátérnénk, érdemes egy pillantást vetni a faktormodellek egyensúlyi feltételek között történő értelmezéséről is. Ezt annál is inkább érdemes megtenni, mivel a gyakorlatban a legnépszerűbb modell, a CAPM is ebbe a csoportba tartozik, mégis sokan keverik az arbitrázsmentes érvelésre épülő APT-modellekkel.

## EGYENSÚLYI MODELLEK ÉS EGZAKT FAKTORÉRTÉKELÉS

### 1. Egyensúlyi modellek

Az APT K-faktormodell hozamértékelő egyenlete nem csak az arbitrázsmentes piac feltétele alapján vezethető le. Az elmélet fejlődésében következő lépést jelentett az egyensúlyi modellek szigorú feltételei alapján levezetett faktormodell. Az elsődleges cél az volt: véges nagyságú értékpapírpiacon is megtalálják az eszközök hozamára vonatkozó egzakt (tehát minden egyes értékpapírra pontos és nem közelítő hozambecslést adó) összefüggést. Ez sikerül is, azonban a modell levezetése csak még az eddigieknél is szigorúbb alapfeltevések mellett lesz lehetséges. A modellekben a szokásos egyensúlyi modellek feltételei érvényesek: a tőkepiaci hatékonyság mellett a legfontosabb új feltételek a befektetői preferenciák, hasznosságfüggvények meghatározása, valamint a homogén várakozások.[24]

Mindezen feltételekből kiindulva bizonyítható,[25] hogy ha a piacra érvényesek az előbbi feltételek, és ha ei a faktoroktól statisztikailag független, akkor létezik egy egzakt hozamértékelő faktormodell, melynek egyenlete a következő:

$$\mu_i = r_f + b_i^T \lambda_K$$

ha legalább egy befektető van a piacon, akinek az optimális portfóliója teljesen diverzifikált.

[24] Részletesebben lásd *Merton* [1982].

[25] Lásd *Chen-Ingersoll* [1983].

Bár általában ez explicit módon nem jelenik meg, ahhoz, hogy egy egzakt értékelő egyenletet kapjunk, mindenhol feltételként szerepel, miszerint legalább egy, teljesen diverzifikált portfólió létezzen a piacon. Ez viszont ismételten csak felveti a kérdést, hogy vajon teljesülhet-e mindez egy véges értékpapírpiacon? E feltétel, és így a modell is még inkább restriktívvé válik, ami az ez irányú kutatásokat az értékelési hiba vizsgálatára irányította át.

Ha a teljesen diverzifikált portfólió explicit módon történő feltételezésétől eltekintünk, akkor az értékelési hibára irányuló kutatások arra a következtetésre jutottak, hogy az adott modell-felételek mellett és szigorú faktorstruktúrát véve, az elvárt hozamra vonatkozó összefüggés minden értékpapírra (egzakt módon) pontosan teljesül (ez annyit jelent, hogy az átlagos négyzetes eltérés minden értékpapírra nulla lesz), amennyiben az értékpapírok száma elegendően nagy.[26] Ezzel megint visszaértünk a végtelen számú értékpapír szükségességéhez. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy adott feltételek mellett az itt kapott faktormodell egzakt modellként értelmezhető, tehát nem átlagosan ad kis becslési hibát, hanem minden egyes értékpapírt pontosan értékel.

## CAPM és az APT összehasonlítása

A kérdést egyszerűen is el lehetne intézni, ugyanis a két modell eredeti formájában nem összehasonlítható. Az APT-modell egy végtelen értékpapírpiacon érvényes, az értékpapírok hozamára felírt közelítő értékelési függvény, amely levezetése az arbitrázsérvelésen, illetve annak kizárásán alapul. A CAPM-modell véges értékpapírpiacon egy egzakt kapcsolatot ír le az eszközök elvárt hozama és az értékpapír-piaci portfólióra vonatkozó béta faktor között. E mellett a CAPM eredménye az arbitrázs kizárásán kívül, lényegesen kötöttebb feltételek mellett, adott befektetői preferenciákat feltételező egyensúlyi modellből vezethető le.

Az egyensúlyi modellekben az APT-hez képest egyébként is szigorúbb eredményt kapunk, mely szerint az elvárt hozamra vonatkozó összefüggés minden értékpapírra pontosan teljesül, tehát az átlagos négyzetes eltérés minden értékpapírra nulla lesz, amennyiben az értékpapírok száma elegendően nagy, vagy másképpen megfogalmazva: az egyes értékpapírok súlya a piaci portfólión belül elhanyagolhatóan kicsi. (Ez azt is jelenti, hogy a piaci portfólió nem tartalmaz specifikus kockázatot és így teljesen diverzifikált.)

Megemlíthető még a diverzifikáció fogalmának eltérése a két modell levezetésében. A CAPM-modellben a jól diverzifikáltság implicit módon jelenik meg, arra a portfólióra értjük, amely a piaci portfólióval (amely a szisztematikus kockázatot egyedül képviseli) tökéletesen korrelál. A befektetők a kockázatos eszközök esetén csak a piaci (ami teljesen diverzifikált is) portfólióba fektetnek. Az APT-modellben a diverzifikáció fogalma sokkal általánosabb, minden „elég nagy", viszonylag egyenletes portfólió jól diverzifikáltnak tekinthető. A piaci portfóliónak itt nincs semmiféle kitüntetett szerepe. Érdekesség, hogy a gyakorlati életben, annak ellenére, hogy általában a CAPM eszközrendszerét és fogalmait használják, a szakemberek általában mégis ebben az értelemben használják a jól diverzifikáltság, teljes diverzifikáltság fogalmát.

Végül, és a gyakorlatban talán ezzel az érveléssel találkozunk a legtöbbet, empirikus vizsgálatokban a két modell egybeeshet, ha a CAPM mellett egy egyfaktoros faktormodellt vizsgálunk, ahol a faktort a piaci portfólió képviseli.

[26] Másképpen megfogalmazva, ha az egyes értékpapírok súlya a piaci portfólión belül elhanyagolhatóan kicsi. Ezen kívül további feltétel, hogy az abszolút kockázatelutasító együttható felülről korlátos. Részletesebben lásd *Jarrow* [1988].

## FÜGGELÉK

### Példa no-arbitrázs érvelésre

A piacon érvényes a $K$-faktorstruktúra, tehát

$$r_n = \mu_n + B_n f_k + \varepsilon_n$$

Vegyünk egy arbitrázsportfóliót $y_n$.

Mivel az arbitrázs nem igényel befektetést:

$$y_n{}^T e_n = 0$$

A portfólió hozama:

$$r_y = y_n{}^T r_n = (y_n{}^T \mu_n) + (y_n{}^T \beta_n) f_n + y_n{}^T \varepsilon_n$$

Tegyük fel, hogy az arbitrázsportfólió jól diverzifikált, tehát a hibatényező elegendően nagyszámú értékpapír esetén eltűnik.

Végül olyan arbitrázsportfóliót válasszunk, amelynek szisztematikus kockázata sincs, tehát:

$$y_n{}^T \beta_n = 0$$

Ekkor a portfólió hozamának számítása leegyszerűsödik, mivel azonban arbitrázsportfólióról van szó, hozamának nullát kell adnia, tehát

$$ry = (y_n{}^T \mu_n) = 0$$

Ez ahhoz az algebrai tételhez vezet bennünket, hogy ha $y_n$ vektor ortogonális $e_n$-tre és $\beta_n$-re, akkor ortogonális $\mu_n$-re is, és $\mu_n$ lineáris kombinációja kell, hogy legyen $e_n$, és $\beta_n$-nak.

Ha $r_0$ konstanssal írjuk fel, akkor:

$$\mu_i = r_0 + \alpha\, \beta_i$$

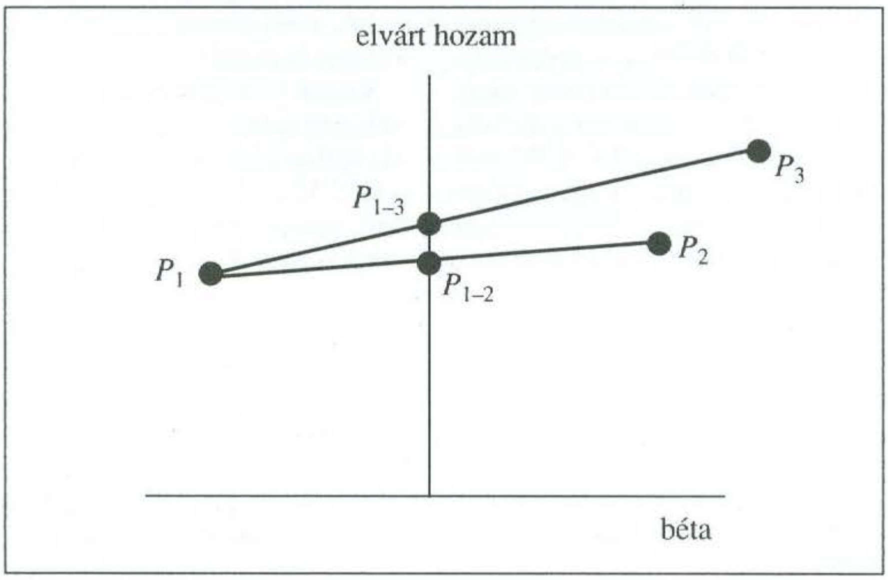
Az *1. ábra* három eszköz esetén mutatja be az előbbi érvelést. Tegyük fel, hogy a három eszköz már olyan jól diverzifikált portfóliónak felel meg, amely nem tartalmaz specifikus kockázatot. Az arbitrázsmentességre vonatkozó érvelés annyit állít, hogy a három portfólió pontjai egy (értékpapír) egyenesen kell, hogy elhelyezkedjen, különben arbitrázsra van lehetőség. Az ábrán látható helyzet nem ezt mutatja.

Ha $P_1$, $P_2$ portfóliókat $^1/_2$–$^1/_2$ súllyal összerakjuk, akkor egy szisztematikus zéró béta portfóliót kapunk ($P_{1-2}$). Ha $P_1$ és $P_3$ portfólióból $^2/_3$–$^1/_3$ súllyal egy újabb portfóliót ($P_{2-3}$) alkotunk, akkor ennek szintén nem lesz kockázata. A két újabb portfóliónak nem egyezik meg a hozama ($r_{1-2} < r_{1-3}$), holott mindkettő kockázatmentes.

Így, ha a $P_{1-2}$ portfóliót rövidre eladunk és ebből megvásároljuk $P_{1-3}$ portfóliót, akkor kockázatmentes nyereséghez jutunk. (Ha lenne kockázatmentes eszköz, akkor ennek hozama is a kockázatmentes portfóliók hozamával kell egybeessen arbitrázsmentes piac esetén.)

Összefoglalva tehát, ha nincs lehetőség arbitrázsra, akkor $r_{1-2} = r_{1-3}$ és a portfóliók egy egyenesen helyezkednek el.

*1. ábra*



## IRODALOMJEGYZÉK

*Chamberlain, G.–Rotschild, M.* [1983]: Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets. Econometrica, Vol. 51.

*Chen, N.–F. Ingersoll, J. E.* [1983]: Exact Pricing in Linear Factor Models with Finitely Many Assets: A Note. Journal of Finance, Vol. 38.

*Connor, G.* [1982]: Asset Pricing Theory in Factor Economies. Dissertation, Yale University

*Ingersoll, J. E.* [1984]: Some results in the Theory of Arbitrage Pricing. Journal of Finance, Vol. 39.

*Jarrow, R. A.* [1988]: Finance Theory. Prentice-Hall, London

*Merton* [1982]: On the Microeconomic Theory of Investment under Uncertainty – Handbook of Mathematical Economics Vol. 2.

*Roll, R.–Ross S. A.* [1980]: An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory. Journal of Finance Vol 35.

*Ross, S. A.* [1977]: – Return Risk and Arbitrage. (Megjelent: Friend, I, Bicksler, J. L.: Risk and Return in Finance könyvében, Cambridge, Massachusetts: Ballinger.)

*Ross, S. A.* [1976]: The Arbitrage Theroy of Capital Asset Pricing. Journal of Economic Theory 13.

*Sauer, A.* [1993]: Faktormodelle und Bewertung am deutschen Aktienmarkt. Fritz Knapp Verlag, 1993.