Walter György–Kóbor Ádám

Alsóági kockázatmérési eszközök és portfólió-kiválasztás

A piaci kockázatelemzés utóbbi időkben legelterjedtebb és legnépszerűbb eszköze a kockáztatott érték, vagyis a VaR módszere, amely befektetői döntéshozatalnál a veszteségek szintjének korlátozásában nyújthat segítséget. A szerzők azonban nemcsak a VaR és a részvényportfólió-kezelés kapcsolatát mutatják be. Az úgynevezett alsóági kockázatokat (downside risk) elemző és bemutató elemzési eszközök köre meglehetősen régi múltra tekint vissza: gyakorlatilag a klasszikus portfóliókezelés megszületésével párhuzamosan fejlődött ki. A cikk elején az alsóági kockázatmérés eszközeinek bemutatására kerül sor, ezt követően a szerzők különböző portfólió-optimalizálási kritériumokat fogalmaznak meg, és az eljárásokat szemléltetik a magyar részvénypiacon elvégzett számításokkal. Az elemzés során a megfelelő feltételek mellett azt is megvizsgálják, miként lehet ötvözni a klasszikus portfólió-elméletet és az ott használatos hozam-szórás diagrammokat az alternatív alsóági kockázatelemzés fogalmaival és optimalizálási problémáival.

Alsóági kockázatok elmélete

A legtöbb portfóliókezelésben használt modell általában a hozam-szórás, illetve hozam-variancia térben mozog, köszönhetően annak, hogy Markowitz tanulmánya után elfogadottá vált, hogy a befektetések, értékpapírok hozamának kockázatát a hozam varianciájával vagy szórásával mérjük. Ekkor azonban figyelmen kívül hagyjuk azt a jelenséget, miszerint a befektetők nagyobb súllyal értékelik a lehetséges veszteséget, mint az ugyanolyan nagyságú nyereség lehetőségét. A szimmetrikus variancia érték helyett tehát egy, a potenciális veszteségekre koncentráló kockázati mérőszámra is szükség van.

Az alternatív modellek egyik csoportja arra a feltételezésre épült, hogy a befektetők nem akarják, vagy nem tudják a várható hasznosság maximalizálás matematikai rendszerét alkalmazni, hanem egyszerűbb döntési eszközöket használnak. Ezeket az elméleteket korábban „safety first"[1]-modelleknek nevezték, amelyek mind arra a feltételezésre épültek, hogy a befektetők elsősorban a rossz kimenetelt, a nagy veszteséget szeretnék elkerülni. Ez annyit jelent, hogy a kockázat tekintetében a hozamok valószínűségeloszlásának veszteségoldalát tekintik relevánsnak.

A következőkben az alsóági kockázatmérési eszközök egy csoportját és a safety first-modelleket mutatjuk be, amelyek már évtizedek óta a portfólióelmélet részét képezik. Az utóbbi évekig mindezen eszközök kevésbé kerültek alkalmazásra, azonban a 90-es évektől a lehetséges nagy veszteségek vizsgálata, a kockáztatott érték (VaR) népszerűvé válásának kapcsán az egyik legnépszerűbb kutatási témává vált. Az aktuális szakirodalom fogalomrendszerét használva, a 80-as évek végétől erre az eszközcsoportra összefoglalóan alsóági kockázatmérési eszközök (downside-risk measures) néven hivatkoznak[2]. Ezek a mutatók az eloszlás veszteségoldalát jellemzik, és arra

[1] A safety first-modellekről áttekintést ad *Elton-Gruber* [1991].

[2] Hozzá kell azonban tenni, hogy például a safety first elnevezés, amely az eszközök ugyanilyen tulajdonságát elemzi, már az 50-es évektől kezdve használatos volt.

világítanak rá, hogy az eloszlás hogyan viselkedik egy adott alsó határérték vagy hozamkorlát alatt. A következőkben az elmúlt évtizedekben felbukkanó ezen kockázatkezelő modellek legfontosabb fogalmait és jelentőségét foglaljuk össze, bemutatva az elmélet fejlődését egészen a VaR alkalmazásáig.

Alsóági momentumok

Az alsóági kockázat mérésére szolgáló mutatók egyik csoportját lower partial moments-nek (LPM) nevezik.[3] Az LPM a hozamok valószínűség-eloszlásának veszteségoldalát vizsgálja, és a nagy veszteségek valószínűségének, várható értékének és egyéb statisztikai mérőszámának meghatározását célozza.

Számítása a következő módon történik:

$$LPM^n = \sum_{r_p=-\infty}^{r_T} p_p (r_T - r_p)^n$$

ahol:

p_p mutatja annak valószínűségét, hogy a portfólió hozama r_p lesz,

r_T jelöli az alsóágon kijelölt minimális hozamkorlát, hozamszint értékét[4],

n pedig a momentum rendjét mutatja.

Amennyiben $n = 0$, akkor a kapott érték annak a valószínűsége, hogy a portfólió hozama a hozamkorlát alatt lesz a periódus végén: ez nem más, mint egy fordított VaR-számítás. Ezt a momentumot már a VaR használata előtt is fontos mutatónak tartották, azonban egyedülálló eszközként részletesebb elemzésre és főleg portfólió-döntéshozatalra nem tartották alkalmasnak, azzal az indokkal, amely a napjainkban is folyó elemzéseknél is sok problémát okoz. E mutató ugyanis nem veszi figyelembe az adott hozamkorlát alatti hozamokat, illetve azok távolságtól az adott hozamszinttől, így nem tudunk meg semmit arról: mi történik, milyen eloszlást találunk a hozamkorlát szintje alatt. Ennek ellenére, ahogyan később kitérünk rá, mégis a VaR-érték lesz, amelyet korlátként, befektetési kritériumként a portfóliókezelők gyakran megkapnak, és bizonyos mértékig portfólió-kiválasztás során is segítséget nyújthat.

Megemlítendő, hogy a széles körben ismert VaR-fogalom mellett létezik az úgynevezett feltételes VaR-modell is (conditional VaR), amely a hozamok egy alsó korlátja (lehet ez akár a hagyományos VaR-érték) alatti veszteségek várható értékét fejezi ki.[5] Ez utóbbi az LPM^1 jelentéséhez áll közel: az elsőrendű LPM^1 ($n = 1$), hasonlóan a várható érték fogalmához a hozam várható eltérését mutatja a hozamkorlát alatt.[6] Az LMP^2 mutató jelentése a varianciához áll közel, ez a valószínűségekkel súlyozott négyzetes eltéréseket jelenti, szintén a kitűzött hozamszint alatt. Mindezen mutatók esetében úgy tűnik, hogy új fogalmakkal és jelölésekkel mutatják be az alsóági kockázat mérésének lehetőségét, de szeretnénk hangsúlyozni, hogy mindezeket már a portfólióelmélet születésekor definiálták. A várható hozam körüli félvariancia ötlete például az 50-es évek végén is megfogalmazódott[7], az alsóági, nem a várható hozam körüli félvariancia előnyeit, alkalmasságát, más elméletekkel való összefüggéseit pedig már sok szempontból az LPM-ek felbukkanása előtt évtizedekkel korábban is megvizsgálták.[8]

Portfóliók optimalizálása klasszikus hozam-szórás térben

Markowitz modelljében a portfóliókiválasztás módszertanát és végeredményét széles körben ismerik, ide kapcsolódik a klasszi-

[3] Az alábbiakban csak a legfontosabb elemeket és néhány érdekességet emelünk ki. A Downside Risk Measure hagyományos kockázatmérési eszközökhöz viszonyított előnyeit, valamint a LPM számítását és jellemzőit részletesen bemutatja *Harlow* [1991] cikke.

[4] A hozamkorlát kifejezés alatt általánosan az elfogadható hozamok alsó korlátját értjük (eredeti kifejezés: „target return"). Ezt a cikkben az r_T szimbólummal jelöljük.

[5] Vö. *Rockefellar–Uryasev* [2000].

[6] A külföldi szakirodalomban ezt a mutatót „target shortfall"-mutatónak hívják.

[7] Vö. *Markowitz* [1959].

[8] Lásd például *Mao* [1970] vagy *Porter* [1974].

kus teljes hozam-szórás térben kialakítható hatékony portfóliók és a hasznossági függvény alapján az egyéni befektetők számára optimális portfólió meghatározása.

A lehetséges optimális portfóliók halmaza a hatékony portfóliók között található. A határportfóliók megtalálásához egy szélsőértékszámítási probléma megoldásával jutunk el. Keressük azokat a portfóliósúlyokat, amelylyel az adott hozamszinthez a minimális kockázatú portfólió adódik.

Ez a klasszikus szórás kockázat alkalmazásakor

$$\sigma_p^2 = \underline{w}'\,\underline{\Omega}\,\underline{w} \rightarrow \min.$$
$$\text{amikor} \quad \underline{w}'\,\underline{R} = r_p^*$$
$$\text{és} \quad \Sigma_j w_j = 1$$

ahol:

- $\underline{w}$ jelöli a portfólió-allokációk vektorát, amely meghatározott
- r_p^* várható hozamot ad, továbbá
- $\underline{\Omega}$ a portfólió elemeinek kovariancia mátrixa és
- $\underline{R}$ a portfólió alkotóelemeinek várható hozam vektora.

Ha ezt a feladatot megoldjuk, megkapjuk a határportfóliók jól ismert görbéjét, illetve kockázatmentes értékpapír létezésének feltételével a tőkepiaci egyenest.

Amennyiben rendelkezünk a hatékony portfóliókkal (a határportfóliók minimum-variancia portfólió feletti része), akkor egy optimalizálási probléma megoldásával megkaphatjuk az adott kockázatviselő képességgel rendelkező (ahol az *A* paraméter fejezi ki a befektető kockázathoz kapcsolódó attitűdjét) befektető maximális hasznosságot biztosító optimális portfólióját is.

$$U = r - A\alpha\sigma^2 \rightarrow \max.$$
$$\text{azaz} \quad U = \underline{w}'R - A\alpha\underline{w}'\underline{\Omega}\,\underline{w} \rightarrow \max.$$
$$\text{ha} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad \text{és} \quad w_i \geq 0.$$

Hatékony portfóliók alsóági kockázat mellett és Harlow empirikus vizsgálata

Felvetődik a kérdés, hogy a portfóliókezelők, illetve befektetők hogyan tudnák a régi irányelvekhez hasonlóan, de már az új kockázati mérőszámok alapján értelmezett hatékony portfóliókat meghatározni. Hasonlóan az eredeti várható hozam-variancia számításhoz, most is adott hozamszintekhez keressük a legkisebb kockázatú, vagyis hatékony portfóliókat.

Ezen hatékony portfóliók görbéjének felírásához a megoldandó probléma a következőképpen írható fel:

$$LPM^n(r_T, w) = \sum_{r_p=-\infty}^{r_T} p_p (r_T - r_p)^n \rightarrow \min.$$
$$\text{amikor} \quad \Sigma_j w_j E(r_j) = r_p^*$$
$$\text{és} \quad \Sigma_j w_j = 1$$

Ha nincs lehetőség short-sale-re, akkor az optimalizálás kibővíthető még egy feltétellel: $w_j > 0$.

Ezek alapján tehát keressük azokat a portfóliósúlyokat szimbolizáló $\underline{w}$ vektorokat, amelyek előállításával kapott portfóliók, adott hozamszint mellett, a legkisebb LPM^n értéket adják. Az egész eloszlásra vonatkozó információkat jelenleg csak a várható hozam tartalmazza, a nyereségoldali ág tulajdonságának változása az LPM-ek módszerével leírt kockázatra azonban nem hat ki. Amennyiben elvégezzük a fent felírt optimalizálást akkor az eredmény egy, az eredeti hozam-variancia térben már megismert alakú határportfólió-görbe lesz, ezúttal azonban a várható hozammal, illetve LPM^n értékekkel a tengelyeken.

A fenti elmélet bemutatására már születtek publikált empirikus számítások is, amelyek jó áttekintést nyújtanak ezen új hatékony portfóliók görbéjének viselkedéséről, tulajdonságairól. A következőkben egy ilyen vizsgálat fő eredményeit ismertetjük röviden.[9]

Harlow 11 ország értékpapírpiacán elvégzett vizsgálatot mutat be, 1980–1990 közötti

[9] A számítás eredményeit lásd részletesebben *W.V. Harlow* [1991].

hozam adatokat vizsgálva. Az optimalizációt és a hatékony portfóliók meghatározását az LPM^1, illetve LPM^2 kockázati mutató számítással egyaránt elvégezte. Az egyik fő érdekesség, amit tapasztalt, hogy azonos r_T hozamkorlát megadása esetén az LPM^1, illetve LPM^2 mellett elvégzett optimalizáció különböző hatékony portfólió görbét eredményezett.

Harlow azt is megvizsgálta, hogyan változik a hatékony portfólió görbéje, ha a hozamkorlát értékét megváltoztatjuk. A számítás igazolta azt a várakozását, hogy az optimalizálás után kapott görbe a nagyobb hozamkorlát megadásakor mindinkább jobbra tolódik. Ugyanakkor az is kiderült, hogy a hatékony portfóliók összetétele (azonos várható hozam mellett kapott hatékony portfóliók esetét vizsgálva) kevésbé változott. Az optimalizálásra tehát jóval nagyobb hatással volt, hogy melyik kockázati momentumot szerepeltetjük a számítás során, mint az, hogy a hozamkorlátnak pontosan mekkora értéket adunk.

Harlow még további számításokat is végzett, amelyekben a két módszerre épülő eszközallokációs stratégiát hasonlította össze. 1985–1990-es adatokkal számolva, kéthavonként folyamatosan módosítva a portfóliók összetételét, 11 hozamszint mellett kereste meg a hatékony portfóliókat a hozam-teljes szórás, illetve a hozam-LPM^2 optimalizálással. Végül azt az eredményt kapta, hogy az LPM^2 optimalizálással kapott portfóliók magasabb hozamot adtak alacsonyabb kockázat mellett minden esetben, amely ismételten az LPM^2 melletti optimalizálás eredményességét igazolta.[10]

VaR mint alsóági kockázat a hozam-szórás térben

Ebben a fejezetben az LPM^0, vagy ami ezzel egyenértékű, a VaR fogalmára koncentrálunk a portfóliókiválasztás, illetve az optimális portfólió keresésének vizsgálatában. A klasszikus portfóliódöntések, portfóliókiválasztással kapcsolatos elméletek során, a hozam-szórás térben való ábrázolás és az ennek alapján történő kiválasztás mindvégig nagyon fontos szerepet játszott, ezt már a portfólióelmélet indulásától kezdve részletesen vizsgálták. Az új modellekben, az alsóági kockázat vizsgálatánál szintén felmerült az igény, hogy ezt az új módszert a régen ismert keretek közé beillesszék. Mindez már a safety first elméletek elemzése során is megtörtént, az ott bemutatott elemzéseket szintén a hozam-szórás térben való ábrázolással tették érthetőbbé. Ez a későbbi elemzésekben és optimalizálási problémák bemutatásában is szerepet kapott. Az alábbiakban bemutatásra kerülő LPM^0 vizsgálatát és e különleges környezetben való elemzését például *Leibowitz-Henriksson* is elvégezte.[11] A következőkben mi erre az elemzésre utalunk, amely segítségével az adott portfólióhoz tartozó VaR-értéket a hozam-szórás ábrán is be tudjuk mutatni. Az illusztrációk során, az egyszerűség kedvéért, a normalitás keretei között maradunk.

Az alapvető kérdést úgy fogalmazhatjuk meg: hol helyezkednek el azok a portfóliók, amelyek egy adott konfidencia-intervallum szerint meghatározott adott veszteségszintnél tehát nem fognak rosszabbul teljesíteni.

Az VaR-számítás során – az egyszerűség kedvéért tehát a hozamok normális eloszlását feltételezve – láthatjuk, hogy ezek a portfóliók egy egyenesen találhatók, amelyet könnyen elhelyezhetünk a szórás–hozam térben:

$$r_T = r_p - \alpha\sigma_p$$

ahol:

- α a standard normális eloszlás adott valószínűséghez tartozó egyoldalú tartománya,
- r_p a portfólió várható hozama,
- σ_p a portfólió szórása,
- r_T pedig a portfólió adott valószínűség melletti várható minimális hozama – vagy maradva a korábban bevezetett kifejezésnél: hozamkorlátja.

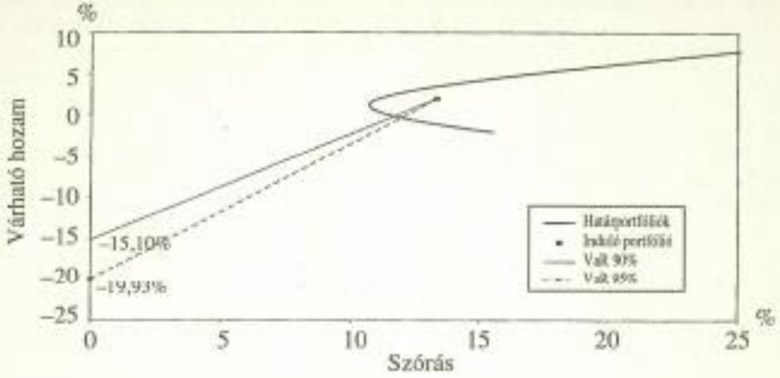
Az egyenes meredeksége pontosan az α értékével egyezik meg, a várható hozam tengelyt pedig a hozamkorlát értékénél metszi. A meghúzott vonalon minden portfólió adott konfidenciaszinten legalább ugyanazt a portfólió hozamkorlátot nyújtja. A vonal feletti portfóliók ennél nagyobb hozamot, a vonal

[10] A részletes eredményeket tartalmazó táblázathoz lásd *Harlow* [1991].

[11] Lásd *Leibowitz-Henriksson* [1989].

1. ábra

95% és 90% konfidencia-intervallum mellett megadott VaR-hozamok



alatti portfóliók pedig kisebb hozamkorlátot nyújtanak az adott konfidencia-intervallum mellett.

A következőkben tekintsünk egy illusztrációt[12], amelyen keresztül a fentebb említettek, illetve a következőkben tárgyalt témák könnyebben érthetővé válnak.

Az egyenlő súlyokkal összeállított portfóliónk várható havi[13] hozama 1,96%, míg szórása 13,31% (1. ábra).

Tegyük fel, hogy 95%-os konfidencia-intervallum mellett keressük az ábrán először azt a hozamkorlátot, amelynél a portfólió 95%-os valószínűséggel nem hoz egy hónap alatt kevesebbet.

$$(\alpha = 1{,}645):\ r_{cél} = 1{,}96\% - 1{,}645 \times 13{,}31\% = -19{,}93\%.$$

Az egyenes tehát a –19,93%-nál metszi az y tengelyt. Ezen helyezkednek el mindazon portfóliók, amelyek egy hónap alatt 95%-os konfidencia-intervallum mellett –19,93%-nál nem szenvednek el nagyobb veszteséget. Azonos konfidencia intervallum mellett az egyenes feletti portfóliók VaR-hozama ennél kedvezőbb, az alatta található portfóliók VaR hozama a kiválasztott portfóliónknál rosszabb.

Adott portfóliót tekintve, minél kisebb konfidencia-intervallumot határozunk meg, a hozamkorlát (VaR) természetesen annál magasabb (abszolút értékben alacsonyabb) lesz, tehát az egyenes meredeksége csökken. Ha például a VaR értékét 90%-os konfidencia-intervallum mellett szeretnénk meghatározni, az új VaR-érték a megszokott számítás mellett –15,10% (mivel $\alpha = 1{,}28$). Az *1. ábrán* ezeket az eredményeket, a határportfóliók görbéjét és a két konfidencia intervallumhoz tartozó egyeneseket láthatjuk.

Optimalizálási kérdések

Roy optimalizálási kritériuma

Az egyik legelső optimalizálási kérdés[14], amelyet az alsóági kockázatok, pontosabban a safety first-elmélet kapcsán vizsgáltak: melyik portfólió az, amely a lehető legkisebb valószínűséggel hoz kisebb hozamot, mint egy kitűzött hozamkorlát értéke.[15]

[12] A empirikus illusztráció feltételeit, a kiválasztási szempontokat és a portfólió összetételét lásd a Függelékben.

[13] Általában a portfólió allokációs döntések hosszú távú szemléletben születnek, a VaR-becslések azonban rövid távra szólnak. Emiatt az 1 hónapos időtávot választottuk, amely e két eltérő időszemlélet között elfogadható átmenetnek minősülhet.

[14] Lásd pl.: *Pyle–Turnovsky* [1971]

[15] Ezt a kérdést tette fel Roy a safety first elméletben írt cikkében, lásd: *Roy* [1952] vagy *Pyle–Turnovsky* [1970].

Az optimalizálás kritériuma:

$$P(r_p < r_T) \rightarrow \min$$

Amennyiben a hozamok eloszlása normális, akkor a minimalizálási kritérium lefordítható a klasszikus hozam-variancia elemzés nyelvére. Ez esetben azt a portfóliót keressük (r_p), amelyből a hozamkorláthoz (r_T) húzható egyenes a legmeredekebb.

A fenti VaR egyenes egyenletét átrendezve tehát a

$$\alpha = \frac{r_p - r_T}{\sigma_p} \rightarrow \max.$$

kritériumot kapjuk.

Tegyük fel, hogy a kockázatmentes befektetés lehetőségét figyelmen kívül hagyjuk. Ez esetben az optimális megoldás természetesen akkor adódik, amikor az egyre meredekebb egyenes a kockázatos eszközöket tartalmazó hatékony portfóliók görbéjét érinti. Ekkor már nem lehet az egyenes meredekségét tovább növelni. A *2. ábrán* az optimalizálás menetét mutatjuk be. Tegyük fel, hogy – előző példánkat folytatva – annak a valószínűségét szeretnénk minimalizálni, hogy a portfóliónk hozama kisebb lesz mint –19,93%.

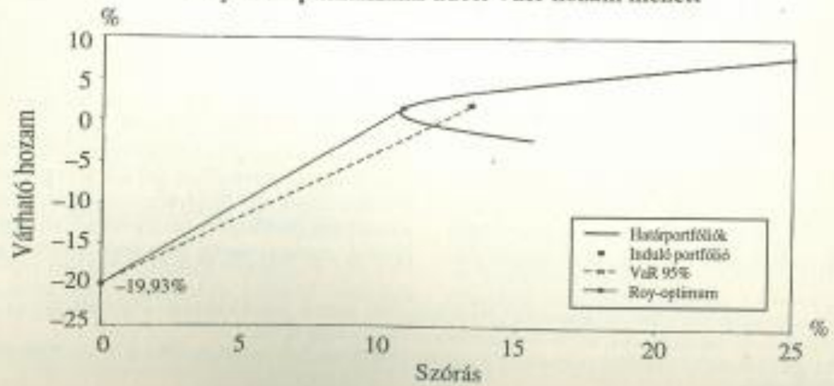
A *2. ábra* alsó egyenese már ismert, ez mutatja az eredeti portfóliónk 95%-os konfidencia-intervallumhoz tartozó VaR hozamát. Az optimalizáció kritériuma azonban megköveteli, hogy ennél kedvezőbb tulajdonságú portfóliókat keressünk. A valószínűség, hogy portfóliónk –19,93% hozamnál rosszabbul teljesít, azon portfólióknál lesz kisebb, amelyek azokon az egyeneseken helyezkednek el, amelyek végpontja továbbra is a –19,93%-nál van, de meredekségük nagyobb. Minél nagyobb meredekségű egyeneseket vizsgálunk, a konfidencia-intervallum egyre nagyobb lesz.

Az egyenest tehát addig „hajtjuk fel", meredekségét addig növeljük, amíg tartalmaz létező portfóliót. Az optimális pont a lehető legmeredekebb egyenes és a határportfóliók görbéjének érintő portfóliója lesz. Az ábra felső egyenese ezt az érintő egyenest mutatja be, az optimális portfóliót is megjelölve. Az optimális portfólió egyébként példánkban 1,63% hozamot ígér, szórása 10,81%. Mindezen adatoknál érdekesebb, hogy mennyivel sikerült csökkentenünk a VaR alatti hozam bekövetkeztének valószínűségét. Az optimális portfólióhoz tartozó konfidencia-intervallum 97,7% ($\alpha = 1{,}99$), vagyis minden más portfólió nagyobb valószínűséggel hoz nagyobb hozamot egy hónap alatt, mint –19,93%. A portfólió példabeli összetétele a függelékben megtekinthető.

Más a helyzet akkor, ha az elméleti kockázatmentes befektetési lehetőség is a rendelkezésünkre áll. Ebben az esetben a hatékony portfóliók már a kockázatmentes értékpapír pontja és a belőle induló érintő portfólió által kifeszített egyenesen találhatók. Ha tehát ezen hatékony portfóliók közül keressük a

2. ábra

Roy-féle optimalizálás adott VaR-hozam mellett



fenti kritérium alapján számított optimális portfóliót, akkor két eset lehetséges.

Amennyiben a hozamkorlát értéke a kockázatmentes hozam alatt található, akkor addig emeljük az egyenes meredekségét, amíg a függőleges tengelybe be nem olvad, vagyis az optimális portfólió a kockázatmentes értékpapír. Ez intuitív módon is belátható: amennyiben a kívánt hozam alacsonyabb, mint a kockázatmentes hozam, akkor (ha minden pénzünket a kockázatmentes befektetésbe fektetjük) nulla a valószínűsége annak, hogy a realizált hozam a hozamkorlátnál kisebb legyen.

Ha azonban a kívánt hozamkorlát a kockázatmentes befektetés hozamánál nagyobb, akkor is érdekes, szélsőséges megoldást kapunk. Az optimális befektetési stratégia végtelen nagyságú hitelfelvételt és a felvett hitelnek az érintő portfólióba való befektetését irányozza elő.[16]

Kataoka kritériuma

A következő lehetséges optimalizálási probléma formális definíciója[17]:

$$r_T \rightarrow \max.$$
$$\text{miközben } P(r_p < r_T) \text{ adott.}$$

Keressük tehát azt a portfóliót, amely adott konfidencia-intervallum mellett nem hoz várhatóan rosszabb hozamot, mint a megcélzott minimális hozamkorlát, de további célunk ennek a veszteségkorlátnak a mérséklése.

Az optimalizálási feladat a VaR nyelvezetén felírva:

$$VaR = r_p - \alpha\sigma \rightarrow \max.$$

ahol a *VaR*-hozam értéket maximalizáljuk.

Amennyiben mindezt a hozam-szórás térben vizsgáljuk, és azonos konfidencia-intervallumokat veszünk, akkor a szóba jöhető portfóliók halmazai az egymáshoz képest párhuzamosan elhelyezkedő egyeneseken találhatók. Nyilvánvalóan a legmagasabban lévő egyenes, illetve az azon lévő portfóliók számítanak a legjobb befektetésnek. Adott szóráshoz ezek egyre magasabb hozamot ígérnek, adott konfidencia-intervallum mellett a maximális hozamveszteség pedig egyre kisebb. Így tehát hasonló portfólió-kiválasztási problémába ütköztünk, mint amellyel már a klasszikus elméletben a tőkepiac egyenes felrajzolásánál találkoztunk. Az adott konfidencia-intervallummal megadott, rögzített meredekségű párhuzamos egyenesek ugyancsak valamiféle kiválasztási lehetőséget adnak a portfólió-befektetőknek. Természetesen minden portfóliókezelő adott korlát mellett a lehető „legmagasabb" pontokat szeretné befektetésként megszerezni.

Tekintsünk el újra a kockázatmentes befektetés lehetőségétől, amennyiben a szórás hozam térbe berajzoljuk a lehetséges portfóliók és az ebből számított hatékony portfóliók halmazát, illetve görbéjét, akkor egy adott konfidencia-intervallum esetén az optimális portfólió az érintési portfólió lesz. Az azonos meredekségű egyenest tehát addig toljuk felfelé párhuzamosan, amíg nem érinti a hatékony portfóliók görbéjét. Ekkor ez a portfólió adja a legkisebb várható veszteséget a megszabott valószínűség mellett, vagyis adott valószínűséggel a VaR-értéknél nem teljesít rosszabbul. Ez az optimalizálási folyamat látható a *3. ábrán*.

Az optimális portfólió új VaR-hozama példánkban −16,14% lett 95%-os változatlan nagyságú konfidencia-intervallum mellett. Minden más portfóliónak 95% valószínűség mellett, a maximális hozam vesztesége nagyobb lesz, mint −16,14%. Az optimális portfólió várható hozama 1,73%, szórása 10,87%, az illusztrációként alkalmazott portfólió összetételét a függelékben mutatjuk be.

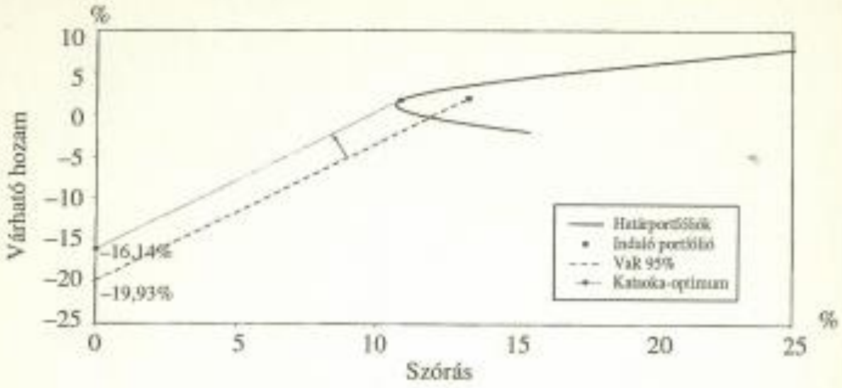
Amennyiben kockázatmentes befektetés is a rendelkezésünkre áll, akkor a hatékony portfóliókat ismét egy egyenesen találjuk. Ekkor a hatékony portfólió egyenese és a VaR-egyenesünk metszéspontja adja meg az adott kö-

[16] Mivel példánkban a kockázatmentes hozam nagyobb, mint a „célul kitűzött" −19,93%, így az optimális megoldás esetünkben a 100% kockázatmentes befektetés lenne.

[17] Az optimalizálási probléma olvasható *Kataoka* [1963] eredeti cikkében, illetve *Pyle–Turnovsky* [1970] cikkében.

3. ábra

Optimalizáció adott konfidencia-intervallum mellett



rülmények között ideális portfóliót. Most a két egyenes meredeksége a döntő szempont. Amennyiben a VaR-egyenes meredeksége nagyobb, mint a hatékony portfólió egyenesének meredeksége, akkor az optimális portfólió a kockázatmentes befektetés lesz. Ha fordított helyzetet tapasztalunk, akkor ismételten végtelen hitelfelvétel és a kockázatos érintő portfólióba történő befektetés kombinációja adódik optimális megoldásként.

Telser kritériuma

Telser a következő optimalizálási kritériumot ajánlotta.[18] Keressük azt a portfóliót vagy portfóliókat, amelyek maximális hozamot biztosítanak úgy, hogy annak a valószínűsége: a hozam kisebb vagy egyenlő lesz, mint egy előre meghatározott minimális hozamszint, nem nagyobb, mint egy adott százalék.

Az optimalizálási feltételt képlettel felírva ez a következőket jelenti:

$$r_p \rightarrow \max.$$
$$\text{miközben } P(r_p \leq r_T) \text{ adott.}$$

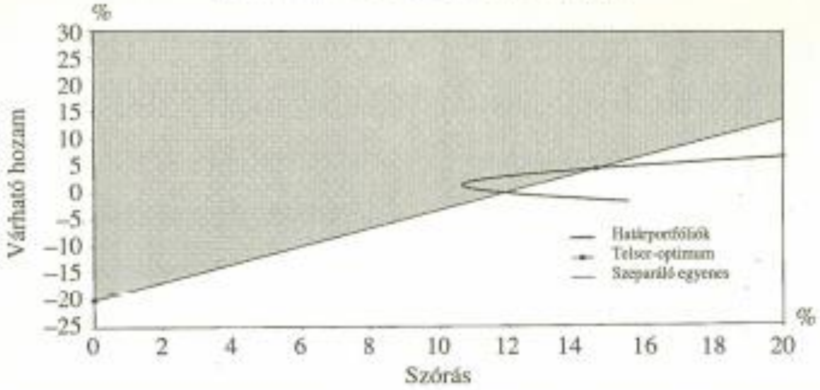
Mindenekelőtt ki kell térnünk rá, hogy mi a különbség a Kataoka- és a Telser-kritérium között: míg a Kataoka-kritérium a várható legnagyobb veszteséget (VaR-t) minimalizálta abszolút értékben, addig a Telser-kritérium a portfólió várható hozamát maximalizálja. Mindez annyit jelent, hogy az r_T és az α értéke meghatározza a hozam szórás térben az egyenes helyét, és minden olyan portfólió, amely az egyenes felett található (ha van ilyen), megfelel a korlátozó feltételnek. Így nem csak egy, hanem több portfóliót találunk, amely a korlátozó feltételnek megfelel. Amennyiben az egyenes minden portfólió, vagyis a hatékony portfóliók felett van, akkor nincs optimális portfólió.

A példaadatok alapján tekintsük a következő optimalizálási problémát. Keressük azokat a portfóliókat, amelyek a legmagasabb hozamot ígérik, miközben annak a valószínűsége, hogy a portfóliónk hozama kevesebbet hoz, mint −19,93%, nem nagyobb, mint 5%. Amennyiben a *4. ábrára* tekintünk, azt láthatjuk, hogy esetünkben minden vonal feletti portfólió megfelel a korlátozó feltételnek. A hatékony portfóliók halmazából a legmagasabb hozamú portfólió számít optimálisnak, amely az egyenes és a hatékony portfóliók görbéjének felső metszéspontjában látható, amelyet ponttal külön megjelöltünk. A példabeli optimális portfólió összetétele a függelékben megtekinthető.

[18] Részletesebben lásd *Telser* [1955], illetve *Pyle–Turnovsky* [1970].

4. ábra

Optimalizálás Telser kritériuma alapján



Benchmarkhoz képest számított VaR optimalizálása és ábrázolás

Az optimalizálási kritériumok között utolsóként tárgyaljuk a Leibowitz-Heriksson által bemutatott[19] módszert. Ennek során a VaR-t, vagyis egy adott konfidencia-intervallum melletti minimális hozam elérését nem abszolút értékben határozza meg, hanem egy benchmark portfólió hozamához viszonyítva. A kiválasztott portfóliónak a benchmark portfólió teljesítményéhez képest kell valamekkora minimális hozamot biztosítania, természetesen előre meghatározott valószínűséggel. A portfólió-kiválasztás problémáját úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a két portfólió (kiválasztott és benchmark) hozamának különbségére koncentrálunk és az eltérés eloszlását vizsgáljuk.[20]

A különbség (r_D) várható értéke a két várható hozam különbsége.

$$E(r_D) = E(r_P) - E(r_B)$$

A hozamkülönbség varianciája felírható a két portfólió hozamának és a hozamok közötti korrelációs együttható segítségével:

$$\sigma_D^2 = \sigma_P^2 + \sigma_B^2 - 2(\sigma_P \sigma_B \sigma_{PB})$$

Amennyiben tehát arra vagyunk kíváncsiak, mekkora az a legkisebb különbség, amelynél adott konfidencia-intervallum mellett a két portfólió hozamából adódik, akkor most a hozamkülönbségre bemutatott VaR-egyenletet tudjuk felírni:

$$E(r_D) - \alpha\sigma_D = v_D$$

Adott valószínűséggel, amely az α értékét meghatározza, a portfóliónk hozama és a benchmark portfólió hozamának különbsége nem lesz kisebb mint v_D érték.[21]

Fordítva is feltehetjük a kérdést: keressük azokat a portfóliókat, amelyek adott valószínűség mellett nem teljesítik alul a benchmark portfóliót egy előre meghatározott hozamkülönbségnél nagyobb mértékben. Ekkor ismerjük az előírt konfidencia-intervallumot, a maximális hozameltérést (v_D), valamit a szórásokat és a korrelációs együtthatót.

Így a keresett portfólió hozama a következőképpen számítható ki.

$$r_P - r_B - \alpha\sigma_D = v_D$$

$$r_P = r_B + \alpha(\sigma_P^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{PB}\sigma_P\sigma_B)^{0.5} + v_D$$

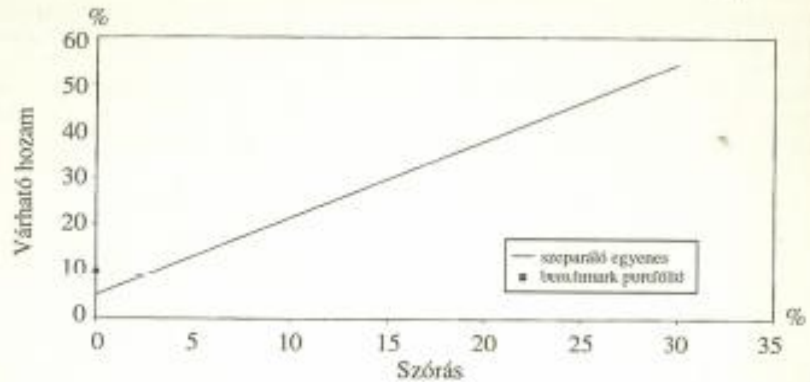
[19] *Leibowitz–Heriksson* [1989].

[20] A feladatot ugyancsak így elemzi algebrailag *Leibowitz–Heriksson* [1989] a cikk végén lévő mellékletben.

[21] Mivel legtöbbször a benchmark portfólió hozamánál kisebb hozamot is megengednek, így a hozameltérés általában negatív érték.

5. ábra

Lehetséges portfóliók halmaza kockázatmentes benhmark értékpapír esetén



Természetesen nemcsak ezek a portfóliók, hanem minden ennél nagyobb hozammal rendelkező portfólió megfelel a feltételnek:

$$r_P \geq r_B + \alpha(\sigma_P^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{PB}\sigma_P\sigma_B)^{0.5} + v_D$$

Miként azt a fenti egyenletben látjuk, a probléma megoldása nagymértékben függ a benchmark portfólió és a vizsgált portfólió kockázatától, illetve a két portfólió közötti korrelációs együtthatótól. Amennyiben – elméleti megközelítésben – a benchmark portfólió kockázatmentes eszköznek felel meg ($\sigma_B = 0$), akkor a számítás és ábrázolás könnyen elvégezhető.

$$r_P \geq r_B + v_D + \alpha\sigma_P$$

Mint a korábbi esetekben, itt is egy egyenest kapunk, amelynek meredeksége a konfidencia-intervallumtól függ, a tengelymetszet a kockázatmentes portfólió alatt található annak függvényében, hogy a benchmark portfólióhoz képest mekkora az előírt maximális hozameltérés (lásd: *5. ábra*).

Ezt az ábrát azonban már láttuk egy másik feladat megoldásakor, itt is minden egyenes feletti hatékony portfólió optimálisnak tekinthető. Ugyanezzel az optimalizálási feladattal találkoztunk a Telser által javasolt kritérium felírásakor (*4. ábra*), a most benchmarkként

Az 5. ábra paraméterei	
benchmark portfólió szórása	0%
benchmark portfólió hozama	10%
korrelációs együttható	0
megengedett hozameltérés	–5%
alfa (95%)	1,645

jelzett hozam akkor a meghatározott hozamkorlátként szerepelt.

Összetettebb a helyzet akkor, ha a benchmark portfólió egy kockázatos, például egy a piacot reprezentáló portfóliónak felel meg[22]. Ebben az esetben is azokat a portfóliókat keressük, amely adott valószínűséggel nem hoznak a benchmark portfólióhoz képest valamilyen mértékkel alacsonyabb hozamot. Természetesen ekkor nagy szerepet kap a kiválasztott portfólió kockázata, illetve a benchmark portfólióval lévő korreláció nagysága. Indulásként ismételten vegyünk egy szélsőséges esetet, amikor a portfóliónk a benchmark portfólió hozamával tökéletesen korrelál, vagyis $\sigma_{PB} = 1$.

Ekkor a szóba jöhető portfólió elvárt hozama a két portfólió szórásának különbségétől függ, annak növekvő lineáris függvénye.

$$r_P \geq r_B + v_D + \alpha(\sigma_P^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_P\sigma_B)^{0.5}$$

$$r_P \geq r_B + v_D + \alpha(\sigma_P - \sigma_B)$$

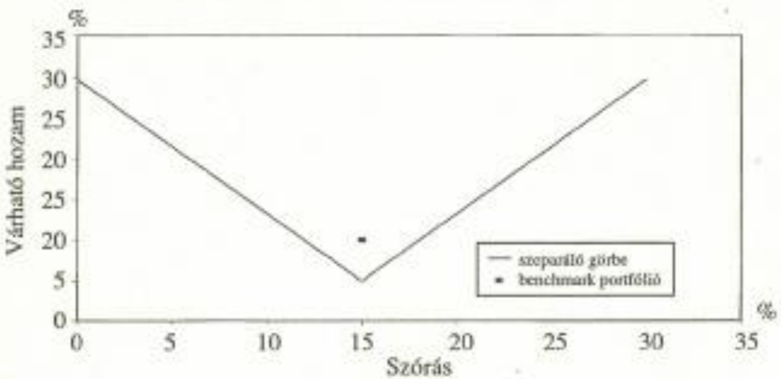
[22] A *benchmark* gyakorlatbeli értelmezéséhez természetesen ez az eset áll közelebb, hiszen egy részvényportfólió teljesítményét csakis egy hozzá hasonló kockázati jellegű referencia-portfólióhoz érdemes viszonyítani.

Ezt mutatja a *6. ábra*, jól kezelhető paraméterekkel.

A képletből kiolvasható az is, hogy amennyiben a korrelációs együttható kisebb egynél, akkor a portfólió várható hozama, azonos kockázatot feltételezve, a tökéletes korrelációt feltételező esetnél nagyobb lesz. Ez annyit jelent, hogy minél kisebb a korreláció, annál nagyobb hozamot kell elvárnunk a portfóliótól, hogy adott konfidencia-intervallum mellett a benchmarkhoz képest ugyanolyan hozamkülönbséggel teljesítsen. Másképpen fogalmazva, ha a korreláció a két portfólió között alacsony, akkor megnő annak a valószínűsége, hogy a portfóliónk a benchmark-portfóliónál rosszabbul teljesít. Hogy mindez kompenzálódjon, a portfóliótól nagyobb hozamot kell elvárnunk a kisebb korrelációjú (de azonos szórással rendelkező) portfóliókhoz képest. Nem tökéletes korreláció esetén az azonos korrelációjú lehetséges portfóliók egy konvex görbén helyezkednek el, amely egyre magasabbra kerül, ahogy a korreláció csökken. (Lásd *7. ábra*.)

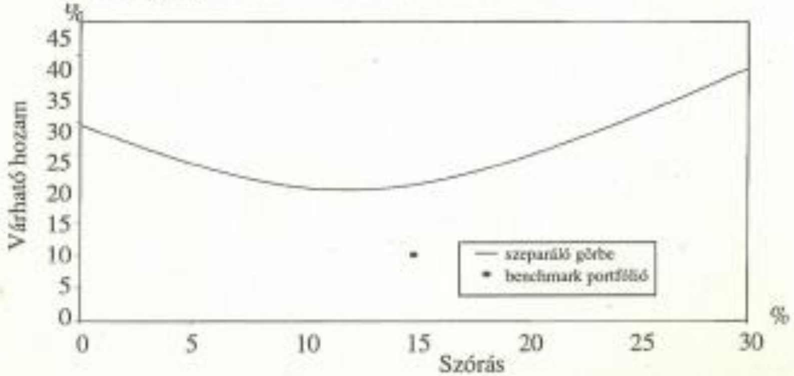
6. ábra

Lehetséges portfóliók halmaza tökéletes korreláció esetén



7. ábra

Lehetséges portfóliók halmaza nem tökéletes korreláció esetén



A 6. ábra paraméterei	
benchmark portfólió szórása	15%
benchmark portfólió hozama	10%
korrelációs együttható	1
megengedett hozameltérés	–5%
alfa (95%)	1,645

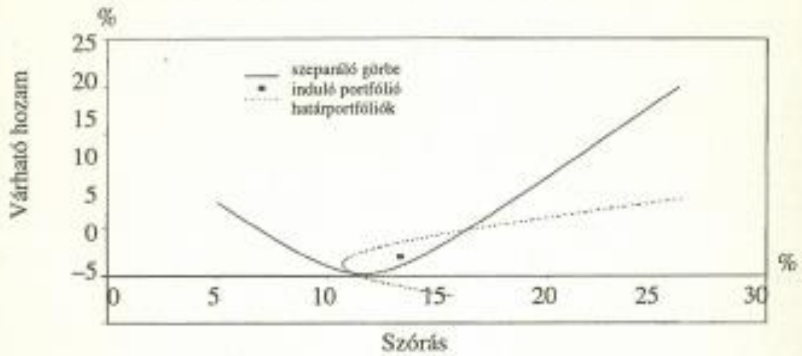
A 7. ábra paraméterei	
benchmark portfólió szórása	15%
benchmark portfólió hozama	10%
korrelációs együttható	0,8
megengedett hozameltérés	–5%
alfa (95%)	1,645

Adott konfidencia-intervallum esetén az is előfordulhat, hogy a hatékony portfóliók görbéjén egyetlen portfólió sem felel meg a korlátozó feltételnek, és az optimális portfólió a hatékony portfólió görbéjén belül helyezkedik el.

A következőkben ismételten tekintsük példaként a mintaportfóliónkat, amely teljesítményét most a BUX indexhez, mint benchmark portfólió értékéhez képest mérjük. Az alábbi kis táblázatban megtekinthető az adott időszak adatai alapján számított BUX index egyhónapos hozama, szórása és a portfóliónkkal számított korrelációs együtthatója. Azt szeretnénk elérni, hogy a portfóliónk 95%-os valószínűséggel ne produkáljon 5 száza-

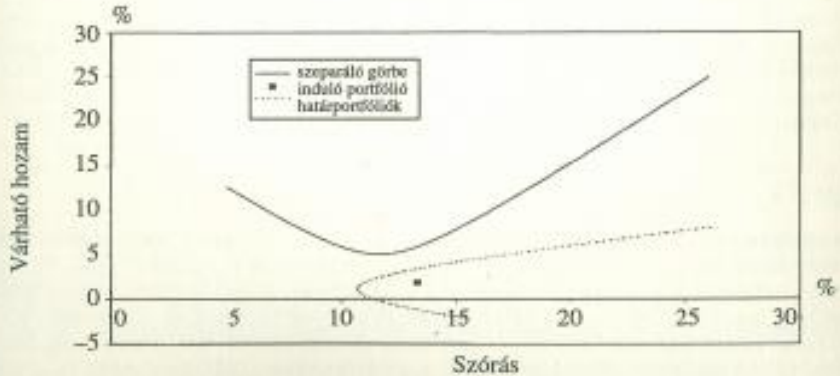
8. ábra

Optimalizálás BUX benchmark és –5% hozameltérés esetén



9. ábra

Optimalizálás BUX benchmark és 0% hozameltérés esetén

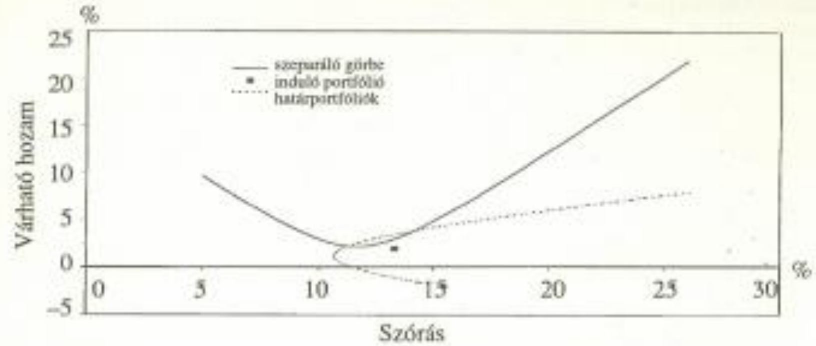


A 8. ábra paraméterei	
benchmark (BUX) portfólió szórása	11,9%
benchmark (BUX) portfólió hozama	1,00%
korrelációs együttható	0,98
megengedett hozameltérés	–5%
alfa (95%)	1,645

A 9. ábra paraméterei	
benchmark (BUX) portfólió szórása	11,9%
benchmark (BUX) portfólió hozama	1,00%
korrelációs együttható	0,98
megengedett hozameltérés	0%
alfa (95%)	1,645

10. ábra

Optimalizálás BUX benchmark és –3% hozameltérés esetén



A 10. ábra paraméterei	
benchmark (BUX) portfólió szórása	11,9%
benchmark (BUX) portfólió hozama	1,00%
korrelációs együttható	0,98
megengedett hozameltérés	–3%
alfa (95%)	1,645

lékponttal rosszabb hozamot, mint a BUX benchmark portfólió hozama.

Adott paraméterek mellett a konvex görbe mutatja, hogy adott szórás esetén legalább mekkora elvárt hozamot kell a portfóliótól elvárni ahhoz, hogy megfeleljen az optimalizálás feltételének. A *8. ábrára* pillantva látható, hogy ebben az esetben a kiválasztott portfóliónk a görbe felett van, így megfelel az optimalizálás kritériumának.

A következőkben egy kicsit szigorítunk a feltételeken, és az eltérés adott konfidencia-intervallum mellett nem lehet több mint 0%. Ekkor a minimális hozamokat mutató görbe feljebb tolódik, és csak a magasabb elvárt hozamot ígérő portfóliók felelnek meg a feltételnek. A *9. ábrán* látható, hogy a megadott paraméterek alapján egyetlen portfólió sem lehet optimális, így magától értetődően a kiválasztott portfólió sem lehet az.

Végül vegyük azt a példát, amikor az eltérés értéke maximum –3% lehet, 95%-os valószínűséggel. Az ábráról leolvasható *(10. ábra)*, hogy elvileg léteznek olyan szórás-hozam párral rendelkező portfóliók, amelyek adott paraméterek és korreláció esetén megfelelnének a feltételnek. A kiválasztott portfóliónk, azonban a görbe alatt van, így ez nem lehet optimális. Az optimalizálás iterációs eljárással oldható meg.

Függelék

Az empirikus vizsgálat elvégzéséhez egy viszonylag jól diverzifikált portfóliót állítottunk össze magyar részvényekből. Ugyan a BUX index önmagában is vizsgálható lenne, mi egy viszonylag sokelemű mintaportfóliót hoztunk létre, amely azonban szándékosan nem teljesen hatékony, hogy elemzésünk még valósághűbb és látványosabb lehessen. Az elméleti portfólióba nyolc likvid részvény került.[23] A választást a likviditáson túl befolyásolta még, hogy legalább hároméves idősor álljon rendelkezésre az elemzéshez (1997. november 14.–2000 december 27., összesen 777 kereskedési nap).

Portfóliónkat az idősor minden napján úgy képeztük, hogy a választott részvényekbe azonos arányban (megengedve, hogy „tört" részvényt is vegyünk) fektettünk be. Ez azt jelenti, hogy a három év alatt dinamikus portfóliót vizsgálunk: bármely napi nyereségérték egy olyan portfólióra vonatkozik, amelybe az előző nap azonos arányban fektettük be vagyonunkat. Elemzésünk során minden nap azonos arányban osztottuk szét vagyonunkat a nyolc részvény között, így a havi nyereségek és VaR-értékek a három év folyamán végig összehasonlíthatóak maradtak, hiszen minden változás a piaci árfolyamok alakulásával magyarázható, a portfólió értékváltozásának és szerkezeti átrendeződésének hatását kiszűrtük. Ez persze meglehetősen elméleti jellegű megközelítés, hiszen a valóságban a portfóliókat nem igazgatják azonos szerkezetűre naponta, és idővel a portfólió egészének értékváltozása már önmagában is befolyásolja a pénzösszegben kifejezett VaR-értéket.

[23] Borsodchem, Egis, Matáv, MOL, NABI, OTP, Richter és TVK.

Optimális portfóliók összetétele

1. Roy-kritérium melletti optimális portfólió:

MATÁV	MOL	OTP	RICHT	BCHEM	EGIS	NABI	TVK
51,0%	39,8%	11,0%	–20,7%	11,5%	10,8%	–12,4%	9,1%

2. Kataoka kritériuma melletti optimális portfólió:

MATÁV	MOL	OTP	RICHT	BCHEM	EGIS	NABI	TVK
50,6%	37,3%	15,3%	–21,5%	9,6%	11,3%	–12,9%	10,3%

3. Telser kritériuma melletti optimális portfólió:

MATÁV	MOL	OTP	RICHT	BCHEM	EGIS	NABI	TVK
41,3%	–19,3%	113,4%	–39,0%	–31,8%	21,4%	–23,7%	37,6%

IRODALOMJEGYZÉK

Elton, E. J.–Gruber, M. J.: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. John Wiley & Sons, Inc. 1991. Chapter 9.

Harlow, W. V.: Asset Allocation in a Downside-risk Framework. Financial Analysts Journal, 1991 Sept.–Okt.

Leibowitz, M. L.–Henriksson, R. D.: Portfolio Optimization with Shortfall Constraints: A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk. Financial Analysts Journal, 1989. March–April.

J.P.Morgan/Reuters: Risk Metrics – Technical Document. 1996.

Jorion, P.: Kockáztatott érték. Panem 1999.

Kataoka, S.: A Stochastic Programming Model. Econometrica, 1963. Jan–Apr.

Mao, J.C.T.: Survey of Capital Budgeting: Theory and Practise. Journal of Finance, 1970, May

Markowitz, H.: Portfolio Selection. Journal of Finance, 1952, Vol 8.

Markowitz, H.: Portfolio Selection. New Haven: Yale University Press, 1959.

Makara, T: Portfólióelmélet alapjai és a CAPM. Kiegészítő tananyag, Vállalati Pénzügy tanszék, BKE. 1996.

Porter, R., B.: Semivariance and Stochastic Dominance: A Comparison. American Economic Review, 1974, March

Pyle, D. H.–Turnovsky S. J: Safity first and Expected Utility Maximization in Mean Standard Deviation Portfolio Analysis. Review of Economics and Statistics, 1970. February

Rockafellar, R. T.–Uryasev, S.: Optimization of conditional value-at risk. Journal of Risk, 2000. Vol. 2., No. 3.

Roy, A. D.: Safity-First and the Holding of Assets. Econometrica, 1952. July

Telser, L.: Safity-First and Hedging. Review of Economic Studies. 1955, 23.