



ÖSSZEFÜGGŐ BIZTOSÍTÁSI KOCKÁZATOK MODELLEZÉSE

© Vékás Péter (*e-mail: vekaspeter@yahoo.com*), 2012

Budapesti Corvinus Egyetem

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

1093 Budapest, Fővám tér 13-15., Sóház 201./a

Tartalom

Bevezetés.....	3
1. Az összefüggő kockázatok modellezésének matematikai eszközei.....	4
2. Nevezetes kopulák.....	12
3. Kopulák illesztése statisztikai adatokra (maximum likelihood elven)	16
4. Esettanulmány: dániai tűzkárok modellezése kopulák segítségével	18
5. Monte Carlo szimulációs technikák.....	20
6. Szavatoló tőke számítása összefüggő kockázatok esetén.....	25
Függelék: Számítások kopulákkal Microsoft Excel környezetben (VBA kódok)	29
Irodalomjegyzék.....	31

Bevezetés

A biztosítási és pénzügyi gyakorlatban előforduló kockázatok jó része nem tekinthető egymástól függetlennek, hagyományosan legtöbbször mégis megelégedtek az alkalmazók a függetlenség feltételezésével vagy jobb esetben a lineáris korrelációs együttható kiszámításával, a matematikai kezelhetőség kedvéért. A '90-es évek második fele azonban paradigmaváltással járt e téren: akadémiai körökben csakúgy, mint az aktuáriusok, kockázatkezelők könyvespolcain is megjelentek és gyorsan teret hódítottak maguknak a kopulákról szóló cikkek és tanulmányok, így a kopulák mára az összefüggő kockázatok modellezésének standard eszközévé váltak.

Álljon itt néhány példa olyan egymással összefüggő mennyiségekre, melyek jól modellezhetők kopulák segítségével:

- Biztosítási állományok összkárai (pl. baleseti rokkantság és baleseti műtéti térítés).
- Ugyanazon gépjárművezető kgfb- és casco-biztosításán bejelentett kárnagyságok.
- Házasság- és élettársak élettartama több életre szóló életbiztosítások esetén.
- Különböző eszközalapok hozamai unit-linked életbiztosítás esetén.
- Ugyanazon szerződésen bejelentett kárösszeg értéke különböző periódusokban stb.

A tanulmány a korrelációs és rangkorrelációs együtthatók bemutatásával kezdődik, majd áttér a kopulákkal kapcsolatos lényeges matematikai fogalmak és a legfontosabb nevezetes kopulák ismertetésére. Ezt a kopulák illesztésének bemutatása követi, majd az eddigieket egy dániai tűzkárokkal kapcsolatos esettanulmány is illusztrálja. Külön rész foglalkozik a Monte Carlo szimulációs technikák alapjainak leírásával. Végül a tanulmányt a szavatolótőke-számítási modellek bevezető jellegű, rövid tárgyalása zárja. A tanulmány gyakorlati céljait szem előtt tartva a matematikai tételeket bizonyítás nélkül közöljük.

A tanulmány elválaszthatatlan része három Microsoft Excelben készült, részletesen kidolgozott demó, melyek az elméleti ismeretek gyakorlati tudásra váltásának folyamatát hivatottak lerövidíteni az olvasó számára.

A szerző nagy örömmel fogadja az esetleges kérdéseket, észrevételeket a címlapon megadott e-mail címre.

1. Az összefüggő kockázatok modellezésének matematikai eszközei

1.1. Korrelációs együttható

Két kockázat (vagyis két valószínűségi változó) közötti összefüggés szorosságának és irányának mérésére hagyományosan a leggyakrabban alkalmazott mérőszám a Pearsontól származó korrelációs együttható:

$$r(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

Ha a mutató értékét mintából becsüljük, akkor az együttható képletében szereplő várható értékeket és varianciákat azok mintából becsült értékeivel kell helyettesíteni. Mintából becsült korrelációs együttható a Microsoft Excel táblázatkezelő programban a *KORREL()* függvény segítségével számolható.

A korrelációs együtthatóra igaz a

$$-1 \leq r(X, Y) \leq 1$$

összefüggés, továbbá abszolút értéke pontosan akkor 1, ha a két valószínűségi változó között tökéletes *lineáris* kapcsolat áll fenn. Az együttható előjele a kapcsolat irányát jelzi.

A korrelációs együttható fontos tulajdonsága, hogy invariáns a pozitív monoton *lineáris* transzformációra:

$$r(u(X), v(Y)) = r(X, Y),$$

amennyiben u és v szigorúan monoton növekvő, lineáris függvények.¹

Gyakorlati szempontból a mutatószám fontos hiányossága, hogy annak 0 értéke nem implikálja a valószínűségi változók függetlenségét², sőt, nem nehéz olyan példákat konstruálni, melyekben 0 korrelációs együtthatójú valószínűségi változók között akár

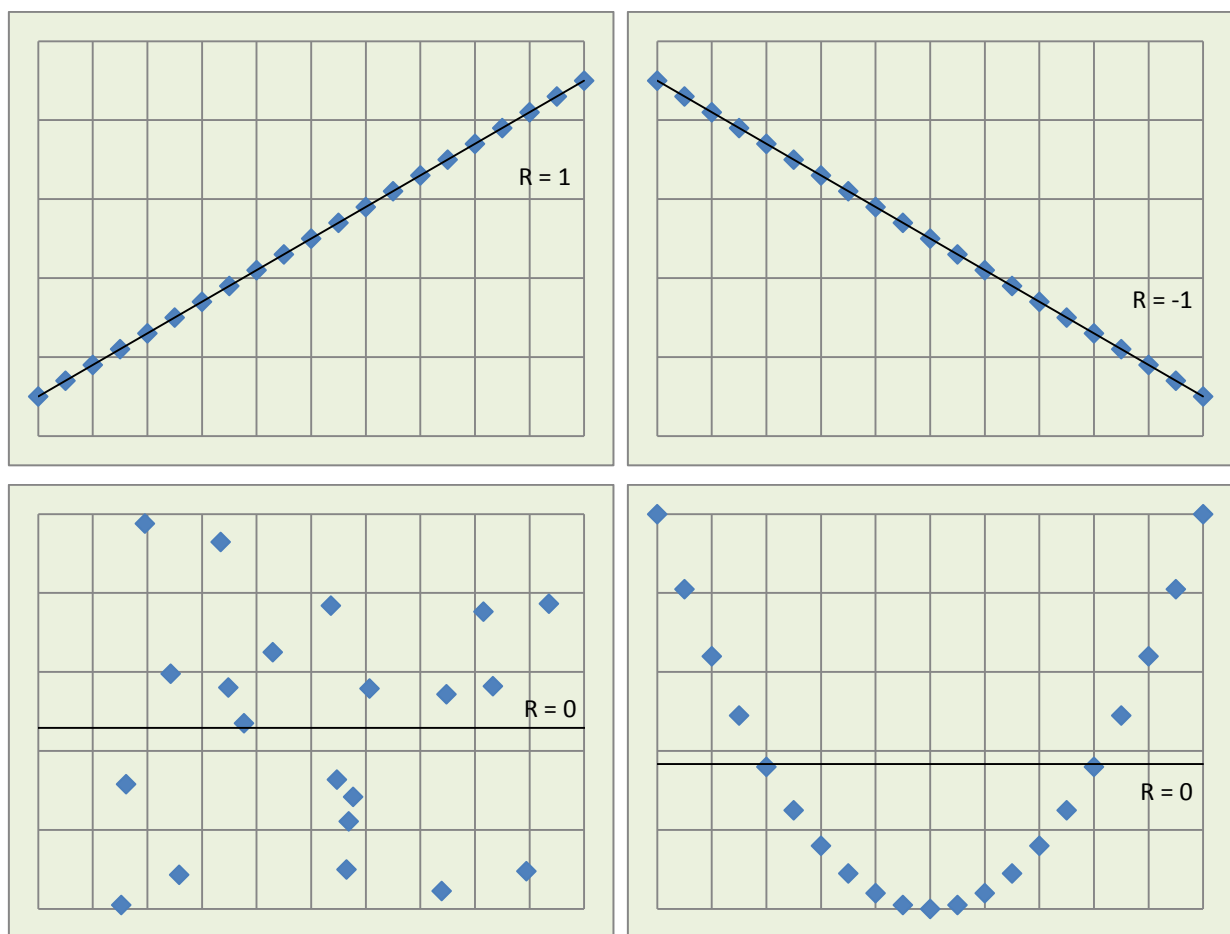
¹ Ha a pontosan az egyik transzformáló függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor a korrelációs együttható értéke az ellentettjére változik.

² Kivéve azt a fontos speciális esetet, amikor a valószínűségi változók többdimenziós normális eloszlást követnek. Ebben az esetben a korrelációs együttható alkalmazása teljesen indokolt.

függvényszerű, determinisztikus (de természetesen nem lineáris, hanem pl. kvadrátikus függvénnyel leírható, ld. pl. 1. ábra, jobb alsó sarok) kapcsolat is fennállhat.

Többek között ezzel magyarázható, hogy a modern biztosítási és pénzügyi matematikában a korrelációs együttható mint a kockázatok összefüggőségének jellemzésére alkalmazott gondolkodási keret egyre inkább újabb fogalmaknak adja át a helyét: a rangkorrelációs együtthatónak és még inkább a lehető legrugalmasabb modellkeretet biztosító kopuláknak.

Az 1. ábrán $r = 1$, $r = -1$ és $r = 0$ melletti pontdiagramok láthatók.



1. ábra: Pontdiagramok a korrelációs együttható különböző értékei esetén.

1.2. Rangkorrelációs együttható

A korrelációs együtthatóhoz hasonló, de a kockázatok közötti összefüggést annál általánosabb értelemben jellemző mérőszám a Spearman-féle rangkorrelációs együttható:

$$\varrho(X, Y) = r(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

ahol

$$\tilde{X} = F_X(X) \text{ és } \tilde{Y} = F_Y(Y)$$

az X és Y valószínűségi változók $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásúvá transzformált változatai.³

Az együttható értéke mintából úgy becsülhető, hogy az X és Y változók megfigyelt értékeihez kiszámítjuk, hogy hányadikak a saját változójukból származó, nagyság szerint növekvő sorba rendezett mintában (Microsoft Excelben ezt megtehetjük pl. a *SORSZÁM()* függvény segítségével), majd ez utóbbi ún. rangszámok között hagyományos korrelációs együtthatót számítunk.

Természetesen a rangkorrelációs együtthatóra is igaz a

$$-1 \leq \varrho(X, Y) \leq 1$$

összefüggés, továbbá az együttható abszolút értéke pontosan akkor 1, ha a két valószínűségi változó között *szigorúan monoton* (csökkenő vagy növekvő) kapcsolat áll fenn. Ebből egyenesen következik, hogy a korrelációs együttható abszolút értékének 1 volta implikálja azt, hogy a rangkorrelációs együttható abszolút értéke is 1, de az állítás megfordítása nem igaz. Tehát a rangkorreláció a korrelációnál általánosabb fogalomnak tekinthető, mely a kockázatok között fennálló nemlineáris kapcsolatokat is képes jellemezni. Az együttható előjele a kapcsolat irányát jelzi.

A rangkorrelációs együttható fontos tulajdonsága, hogy invariáns *bármely* pozitív monoton transzformációra:

³Ld. 5. rész, 5.5 tétel. E tétel következménye, hogy a transzformált változók eloszlása valóban a $(0,1)$ intervallumon egyenletes.

$$\varrho(u(X), v(Y)) = \varrho(X, Y),$$

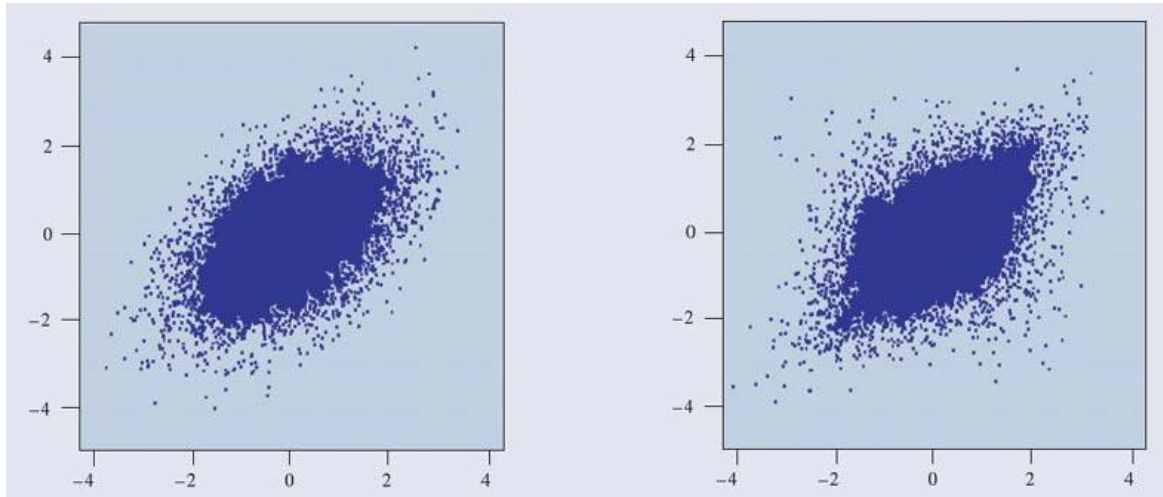
amennyiben u és v szigorúan monoton növények.⁴ Innen is látszik, hogy a rangkorreláció fogalma általánosabb a hagyományos korrelációs együtthatóénál.

Bár a korreláció fogalmánál általánosabb, komplexitásában a rangkorrelációs együttható sem felel meg maradéktalanul a biztosítási és pénzügyi szférák XXI. századi elvárásainak: mindkét eddig tárgyalt mutató nagyon rugalmatlan abban az értelemben, hogy a kockázatok közötti összefüggéseket egyetlen számba sűrítve jellemzik.

Ezzel szemben a valóságban jellemző, hogy a kockázatok közötti összefüggés normális körülmények között általában mérsékelt, ám extrém káralakulás (többek között pl. természeti és ipari katasztrófák, terrortámadások) esetén akár közel tökéletessé is válhat, mivel ekkor a veszteségek rendkívüli méretei ugyanarra a közös külső okra vezethetők vissza. Ezt a viselkedést az angolszász irodalomban *tail dependency*-nek (magyar fordításként használatos pl. az „összefüggés a széleken” kifejezés) nevezik. A jelenség, melyet a 2. ábra illusztrál szemléletesen, a korrelációs és rangkorrelációs együtthatók segítségével matematikai modellekben nem adható vissza. A bal oldali ábra egy közepesen erős pozitív korrelációs együttható melletti pontdiagram, ahol nem tapasztalható összefüggés a széleken. Ezzel szemben a jobb oldali ábrán megfigyelhető, hogy a pontfelhő jobb felső (és bal alsó) sarkában a bal oldali, gömbölyű forma helyett „csúcsosodik” a pontdiagram: ha az első veszteség nagysága extrém magas, akkor a második veszteség is várhatóan extrém nagy lesz.

A széleken való összefüggést a biztosítási szektorban azért kiemelten fontos megfelelően modellezni, mert a biztosítók és viszontbiztosítók érthető okokból fokozottan tartanak az extrém katasztrófakockázatoktól, továbbá a Solvency II. keretrendszerben (ld. 6. rész illetve [1]) a szavatoló tőke nagyságát is a 200 évente egyszer előforduló, kiemelkedően magas veszteségekre kell méretezni, így a kockázatok modellezése során nő az eloszlások széleinek jelentősége.

⁴ Ha a pontosan az egyik transzformáló függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor a rangkorrelációs együttható értéke az ellentettjére változik.



2. ábra: Hagyományos korreláció (bal oldal) és összefüggés a széleken (jobb oldal). (A kép forrása: <http://www.risklab.ch/press/QuantitativeFinance2002e.html>.)

A korábbi megközelítésekkel szemben a kopula egy többváltozós függvénnyel jellemzi a kockázatok közötti összefüggést, így jóval nagyobb rugalmasságot enged meg. Kopulák segítségével többek között egyszerűen modellezhető a széleken való összefüggés jelensége is. A kopula matematikai fogalmát és az ahhoz kapcsolódó főbb matematikai definíciókat, tételeket foglalja össze a következő szakasz.

1.3. Kopulák

Mint később látni fogjuk, a kopula matematikailag úgy értelmezhető, mint az egységnégyzetbe, egyenként egyenletes eloszlásúvá transzformált valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye. Tehát a kopula az együttes eloszlásfüggvények speciális altípusa, ezért először az együttes eloszlásfüggvényekkel kapcsolatos, a későbbi részek megértéséhez minimálisan szükséges tudnivalókat közöljük, majd áttérünk a kopulák tárgyalására.

Az X_1, X_2, \dots, X_p valószínűségi változók *együttes eloszlásfüggvénye* az

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_p < x_p)$$

p -változós függvény.

A továbbiakban a tárgyalás egyszerűsége kedvéért csak a kétdimenziós esettel ($p = 2$) foglalkozunk. A további állítások egyszerű analógia alkalmazása révén, erőfeszítés nélkül általánosíthatók lennének magasabb dimenziókba is.

Természetesen nem minden kétváltozós függvény lehet együttes eloszlásfüggvény. Belátható, hogy egy $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$ függvény pontosan akkor két valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvénye, ha rendelkezik az alábbi négy tulajdonsággal:

$$\text{a.) } \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0,$$

$$\text{b.) } \lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = 1,$$

$$\text{c.) } F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \geq 0 \quad (\forall b > a, d > c),$$

d.) F mindkét változójában balról folytonos.

Az összekapcsolt valószínűségi változók egyváltozós

$$F_1(x_1) = P(X_1 < x_1) \text{ és}$$

$$F_2(x_2) = P(X_2 < x_2)$$

eloszlásfüggvényeit ebben a kontextusban *peremeloszlás-függvényeknek* nevezzük. Ezek az együttes eloszlásfüggvényből határértékek képzése révén állíthatók elő:

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) \text{ és}$$

$$F_2(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2).$$

Mint később a Sklar-tételnél látni fogjuk, a két kockázat együttes viselkedését tökéletesen leíró együttes eloszlásfüggvényt egyértelműen meghatározzák egyfelől a peremeloszlás-függvények, melyek a kockázatok egyenkénti viselkedését írják le maradéktalanul, másfelől egy $[0,1]^2$ egységnegyzeten értelmezett kétváltozós függvény, amely a kockázatok között fennálló, komplex kapcsolatrendszer jellemzi. Ez utóbbit nevezik a kockázatkezelésről szóló matematikai-statisztikai irodalomban *kopulának*.

A kopula matematikailag egy olyan, a $[0,1]^2$ egységnyezeten értelmezett együttes eloszlásfüggvény, melynek peremeloszlásai a $[0,1]$ intervallumon értelmezett, folytonos egyenletes eloszlások. Ezt fogalmazza meg precízebb formában a következő definíció.

Azokat a $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ kétváltozós függvényeket, melyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal, kopulának nevezzük:

$$\text{a.) } \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} C(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} C(x_1, x_2) = 0,$$

$$\text{b.) } \lim_{x_1, x_2 \rightarrow 1^-} C(x_1, x_2) = 1,$$

$$\text{c.) } C(b, d) - C(a, d) - C(b, c) + C(a, c) \geq 0 \quad (\forall 0 < a < b < 1, 0 < c < d < 1),$$

d.) C mindkét változójában balról folytonos,

$$\text{e.) } \lim_{x_2 \rightarrow 1^-} C(x_1, x_2) = x_1,$$

$$\text{f.) } \lim_{x_1 \rightarrow 1^-} C(x_1, x_2) = x_2.$$

A *Sklar-tétel*, mely absztrakt matematikai eredményből nőtte ki magát a kockázatkezelésben gyakorta alkalmazott matematikai tétellé, 1959-ből származik (ld. [6]). A tétel kimondja, hogy tetszőleges $F(x_1, x_2)$ együttes eloszlásfüggvény felírható

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

alakban, ahol C egy kopula,

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) \text{ és } F_2(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2)$$

pedig a peremeloszlás-függvények. (Igaz továbbá, hogy ha a peremeloszlások abszolút folytonosak, akkor a C kopula egyértelmű.)

Megfordítva az állítást: ha az $F(x_1, x_2)$ kétváltozós függvény felírható

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

alakban, ahol C tetszőleges kopula, $F_1(x_1)$ és $F_2(x_2)$ pedig eloszlásfüggvények, akkor az $F(x_1, x_2)$ függvény együttes eloszlásfüggvény.

A Sklar-tétel gyakorlati haszna, hogy biztosítja, hogy tetszőleges együttes eloszlásfüggvényen belül egyszerűen elkülöníthető a peremeloszlás-függvényektől az azokat összekapcsoló kopula, így a gyakorlatban egymástól elkülönülten modellezhető a kockázatok egyenkénti viselkedése (a peremeloszlás-függvények révén) és a kockázat közötti kapcsolatrendszer (a kopula révén). A gyakorlatban előforduló kockázatok modellezésére jellemzően korlátozott számú paraméteres család közül választanak peremeloszlás-függvényeket és kopulát. A rendkívül bonyolult többdimenziós eloszlások modellezése így jelentősen leegyszerűsödik.

A Sklar-tétel egyenes következménye, hogy alkalmazva az $u = F_1(x_1)$, $v = F_2(x_2)$ helyettesítéseket, az együttes eloszlásfüggvény ismeretében egyszerűen meghatározható a peremeloszlás-függvényeket összekapcsoló kopula:

$$C(u, v) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F(x_1, x_2) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)).$$

Példa:

Legyen két összefüggő kockázat együttes eloszlásfüggvénye

$$F(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) \quad (x_1, x_2 \geq 1).$$

Ebből határérték-képzéssel egyszerűen kiszámíthatók a peremeloszlás-függvények:

$$F_1(x_1) = \left(1 - \frac{1}{x_1}\right) \quad (x_1 \geq 1) \quad \text{és} \quad F_2(x_2) = \left(1 - \frac{1}{x_2}\right) \quad (x_2 \geq 1),$$

valamint azok inverz függvényei:

$$F_1^{-1}(u) = \frac{1}{1-u} \quad \text{és} \quad F_2^{-1}(v) = \frac{1}{1-v},$$

így a Sklar-tétel következménye alapján a C kopula is meghatározható:

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) = uv[1 - (1-u)(1-v)].$$

2. Nevezetes kopulák

Ebben a részben a legfontosabb nevezetes kopulákat mutatjuk be.

a.) Függetlenségi (más néven szorzat-) kopula:

$$C(u, v) = uv.$$

Ha két valószínűségi változó a függetlenségi kopula révén kapcsolódik egymáshoz, akkor a szóban forgó valószínűségi változók függetlenek. Valóban, a Sklar-tétel alapján ekkor

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F_1(x_1)F_2(x_2),$$

ami a függetlenség definíciója.

b.) Komonotonitási kopula:

$$C(u, v) = \min(u, v).$$

Megmutatható, hogy ebben az esetben a kopula által összekapcsolt valószínűségi változók pozitív irányú, determinisztikus, de nem feltétlenül lineáris kapcsolatban állnak egymással, vagyis rangkorrelációs együtthatójuk 1. A komonotonitási kopula tehát a tökéletesen összefüggő kockázatok modelljének tekinthető. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a komonotonitási kopula bármely kopula felső korlátja.

c.) Kontramonotonitási kopula:

$$C(u, v) = \max\{u + v - 1; 0\}.$$

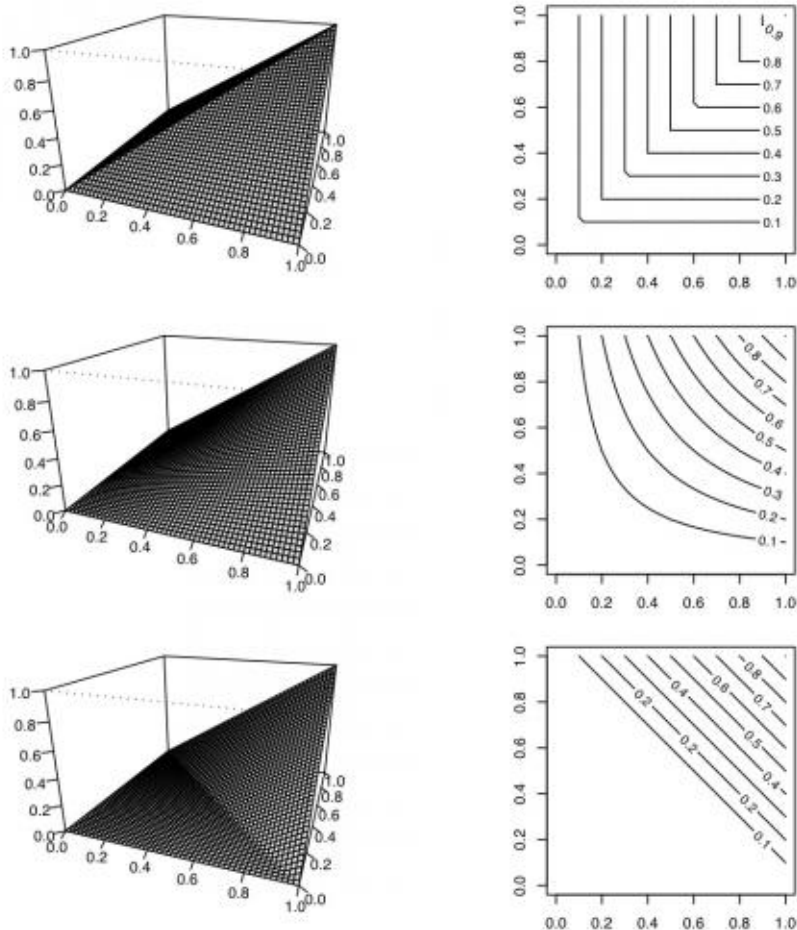
Megmutatható, hogy a kontramonotonitási kopula által összekapcsolt valószínűségi változók negatív irányú, determinisztikus, de nem feltétlenül lineáris kapcsolatban állnak egymással, vagyis rangkorrelációs együtthatójuk -1 . Ez a kopula az egymással tökéletesen ellentétesen

alakuló kockázatok modellje (magasabb dimenzióba nem általánosítható, hiszen pl. 3 kockázatból nem mozoghat bármelyik kettő egymással tökéletesen ellentétesen).

Fréchet-Hoeffding tétel néven ismeretes az az eredmény, hogy két dimenzióban bármely kopula gráfja a ko- és kontramonotonitási kopulák gráfjai közé esik:⁵

$$\max(u + v - 1; 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v).$$

A tételt szemlélteti a 3. ábra, ahol a bal oldali diagramok fentről lefelé a komonotonitási, függetlenségi és kontramonotonitási kopulák felületdiagramjai (látható, hogy a középső felület az alsó és felső felületek közé esik), a jobb oldali diagramok pedig ugyanezen kopulák kétdimenziós szintvonalai.



3. ábra: A komonotonitási, függetlenségi és kontramonotonitási kopulák felületdiagramja. (A kép forrása: <http://fedc.wiwi.hu-berlin.de/quantnet/index.php?p=show&id=1271.>)

⁵ Magasabb dimenziókban is igaz a tétel állítása, de ekkor az alsó korlát nem definiál kopulát.

d.) **Normális (Gauss-) kopula:**

$$C(u, v) = \Phi_r(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \quad (-1 \leq r \leq 1).$$

A normális kopula képletében Φ_r annak az r korrelációs együtthatójú, többdimenziós normális eloszlásnak az együttes eloszlásfüggvénye, melynek peremeloszlásai standard normális eloszlások, Φ pedig az egydimenziós standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

A normális kopulával összekapcsolt, tetszőleges peremoszlású valószínűségi változók úgy foghatók fel, mintha egy r korrelációs együtthatóval rendelkező, többdimenziós normális eloszlás peremeloszlásait normális eloszlásokból a megfelelő függvénytranszformációk (ld. 5. rész) segítségével a kívánt peremoszlásúvá transzformáltuk volna.

A normális kopulával összekapcsolt, normális peremoszlású valószínűségi változók együttesen többdimenziós normális eloszlásúak. Normálistól eltérő peremoszlások használata esetén csak a függőségi struktúrát tartjuk meg a többdimenziós normális eloszlásból.

Ismeretes az a tétel, miszerint többdimenziós normális eloszlás esetén szinuszgörbe írja le a korrelációs és rangkorrelációs együtthatók közötti kapcsolatot:

$$r(X_1, X_2) = 2 \sin\left(\varrho(X_1, X_2) \frac{\pi}{6}\right).$$

Ezt a Monte Carlo szimulációról szóló 5. részben fel is fogjuk használni.

A normális kopula által definiált függőségi struktúra előnye, hogy egyetlen jól értelmezhető mutatószámmal – a korrelációs együtthatóval – jellemezhető. A normális kopula speciális esetekként $r = 0$ esetén a függetlenségi, $r = 1$ esetén a komonotonitási, $r = -1$ esetén pedig a kontramotonitási kopulát adja.

A normális kopula által összekapcsolt valószínűségi változók peremoszlásai nem mutatnak összefüggést az eloszlások szélein, így a kizárólag extrém esetekben tapasztalható szoros együttmozgások modellezésére a normális kopula nem alkalmas.

A következő két kopulát elsősorban azért alkalmazzák a kockázatkezelés gyakorlatában, mert jól visszaadják az eloszlások szélein tapasztalt szoros összefüggést.

e.) **Clayton-kopula:**

$$C(u, v) = (\max \{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1; 0\})^{-\frac{1}{\theta}} \quad (\theta \geq -1, \theta \neq 0).$$

Clayton-kopula használata esetén a peremeloszlások *bal szélei* mutatnak összefüggést a széleken (ha az egyik kockázat vagy pl. nyereség értéke extrém alacsony, akkor várhatóan a másiké is az lesz).

f.) **Gumbel-kopula:**

$$C(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (\theta \geq 1).$$

Gumbel-kopula használata esetén a peremeloszlások *jobb szélei* mutatnak összefüggést a széleken (ha az egyik kockázat értéke extrém magas, akkor várhatóan a másiké is az lesz).

Az ezekhez a kopulákhoz tartozó Microsoft Excel felhasználói függvények Visual Basic forráskódjai megtalálhatók a tanulmány függelékében.

A szakirodalomban és az interneten fellelhető anyagokban az itt bemutatottakon kívül számos további kopula előfordul (ld. pl. [3]).

3. Kopulák illesztése statisztikai adatokra (maximum likelihood elven)

Paraméteres (pl. Clayton- és Gumbel-) kopulák illesztéséhez a megfigyelt (x_{i1}, x_{i2}) értékpárokat először a $(0,1)$ intervallumba kell transzformálni az

$$y_{i1} = \frac{w(x_{i1})}{n+1}, y_{i2} = \frac{w(x_{i2})}{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

transzformációk segítségével, ahol $w(x_{i1})$ az x_{i1} mintaelem sorszáma az x_1 változóból származó, növekvő sorrendbe rendezett mintában, $w(x_{i2})$ ugyanígy értelmezhető, valamint n a minta elemszáma.

Ezt követően meghatározzuk a kopula sűrűségfüggvényét, ami nem más, mint a kopula másodrendű vegyes parciális deriváltja (θ a kopula becsülni kívánt paramétereit jelöli):

$$c(u, v, \theta) = C''_{uv}(u, v, \theta).$$

A transzformált megfigyelések és a kopula sűrűségfüggvénye segítségével ezután felírható az

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln [c(y_{i1}, y_{i2}, \theta)]$$

log-likelihood függvény, melyet az ismeretlen θ paraméter(ek) szerint maximalizálva kaphatók a paraméter(ek) maximum likelihood becslései.

Normális kopula esetén az ismeretlen paraméter az r korrelációs együttható, melynek értéke a log-likelihood függvény használata helyett annál egyszerűbben, a $(0,1)$ intervallumba transzformált adatok közötti, mintából becsült korrelációs együtthatóval is becsülhető.

A kopula illesztése után tesztelni kell az illeszkedés jóságát. A tesztelés pl. a Pearson-féle, χ^2 alapú illeszkedésvizsgálat segítségével végezhető el. Ehhez a $[0,1] \times [0,1]$ -es egységnégyzetet pl. $k \times k$ darab, egyenlő nagyságú kis négyzetre osztjuk fel, és meghatározzuk az egyes kis négyzetekbe eső pontpárok számát, melyet n_{ij} -vel jelölünk $(i, j = 1, 2, \dots, k)$.

Ezt követően kiszámítjuk az egyes kis négyzetekbe esés p_{ij} -vel $(i, j = 1, 2, \dots, k)$ jelölt valószínűségét a valószínűség-számításból ismert

$$P(a < X_1 < b, c < X_2 < d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

összefüggés alapján, majd meghatározzuk az egyes intervallumokba eső pontpárok tökéletes illeszkedés esetén várt darabszámát az

$$n_{ij}^* = p_{ij}n$$

képlet alapján.

A tesztstatisztika képlete a következő:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*}.$$

Nagy mintában ez a kifejezés az illeszkedésre vonatkozó nullhipotézis fennállása esetén aszimptotikusan $\nu = k^2 - b - 1$ szabadságfokú χ^2 -eloszlást követ, ahol b a mintából becsült paraméterek száma (a normális, Clayton- és Gumbel-kopulák esetén 1). A tesztstatisztika értékét a ν szabadságfokú χ^2 -eloszlás

$$c_f = \chi_{1-\alpha}^2(\nu)$$

kvantilisével (az ún. kritikus értékkel) kell összehasonlítani, ahol α az alkalmazott szignifikanciaszint (az elsőfajú hiba valószínűsége). Az illeszkedésre vonatkozó nullhipotézist abban az esetben fogadhatjuk el, ha $\chi^2 < c_f$ teljesül.

A mintát a gyakorlatban általában akkor tekintik nagyknak, ha a várt darabszámokra

$$n_{ij}^* \geq 5$$

fennáll minden $i, j = 1, 2, \dots, k$ -ra.

4. Esettanulmány: dániai tűzkárok modellezése kopulák segítségével

Az eddigiek gyakorlati illusztrálására álljon itt egy esettanulmány (az adatok forrása: <http://www.ma.hw.ac.uk/~mcneil/data.html>). A számítások részletei megtalálhatók a tanulmányhoz mellékelt *összefüggő kockázatok.xls* Microsoft Excel fájlban, mely az eddigiekben bemutatott elméleti fogalmak gyakorlati alkalmazásának elsajátításához kíván segítséget nyújtani az olvasónak.

Az adatok a dániai székhelyű Copenhagen Reinsurance viszontbiztosító társaság vagyonbiztosítási állományából származnak. 1980 januárjától 1990 decemberéig minden egyes hónapban (összesen 132 hónap) ismert külön-külön az épületekben okozott havi károk összege illetve a berendezésekben okozott és egyéb havi károk összege. A modellezés előtt a nyers adatokat a megfelelő szintre aggregálni kellett. A kárösszegek millió dán koronában, 1985-ös összehasonlító árszintre inflálva és deflálva adottak.

A kapcsolódó Microsoft Excel demó munkalapjai közül az *'1. korreláció és rangkorrr.'* munkalap a korrelációs és rangkorrelációs együtthatók kiszámítását mutatja be. A *'2. (0,1)x(0,1) pontdiagram'* munkalap az egységnégyzetbe transzformált pontpárokat szemlélteti. Mivel a pontpárok nem egyenletesen terítik be az egységnégyzetet, ezért szemmel látható, hogy a modellezett összkárok nem tekinthetők függetlennek. Ezt a megállapítást a korrelációs együtthatók nullától jelentősen eltérő értékei is megerősítik.

A *'3. Clayton illesztés'* és *'4. Gumbel illesztés'* munkalapok a Clayton- és Gumbel-kopulák maximum likelihood elv segítségével történő illesztésének folyamatát szemléltetik.⁶ A log-likelihood függvényt a Microsoft Excel Solver bővítménye segítségével maximalizáltuk. A munkalapok hivatkoznak a *GUMBEL()* és *CLAYTON()* felhasználói Excel függvényekre, melyek Visual Basic forráskódja megtalálható a tanulmány függelékében.

Az *'5. Clayton illeszkedés'*, *'6. Gumbel illeszkedés'* és *'7. független illeszkedés'* munkalapok az egyes kopulák illeszkedését tesztelik a Pearson-féle χ^2 -próba segítségével. Az illeszkedésvizsgálat során 3 x 3-as feloszlást alkalmaztunk, mert finomabb, 4 x 4-es

⁶ Normális kopula használata esetén a ρ rangkorrelációs együttható (vagyis nem az r korrelációs együttható!) lenne a kopula r paraméterének mintából becsült értéke.

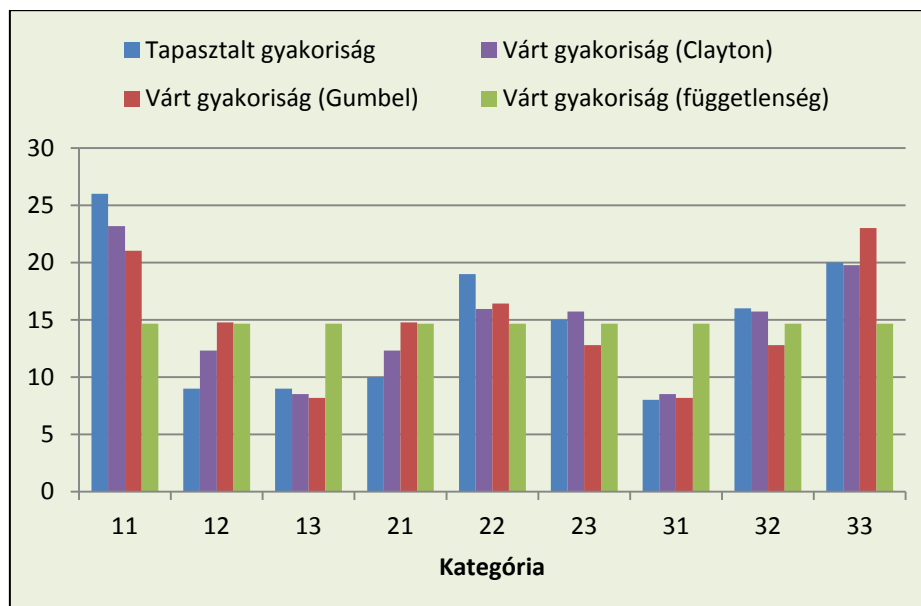
felosztás esetén már nem teljesült az a hüvelykujj-szabály, hogy a várt darabszámnak minden egyes kategóriában el kell érnie az 5-öt.⁷

A maximum likelihood becslések és illeszkedésvizsgálatok főbb eredményeit az 1. táblázat foglalja össze:

Kopula neve	$\hat{\theta}$ becsült par.	χ^2 tesztstat.	c_f krit. érték	Következtetés
Clayton	0,64	2,35	14,07	Illeszkedik.
Gumbel	1,35	7,04	14,07	Illeszkedik.
Függetlenségi	–	21,00	15,51	Nem illeszkedik.

1. táblázat: A maximum likelihood becslések és illeszkedésvizsgálatok eredményei.

A táblázatból jól látható, hogy az alkalmazott szignifikanciaszinten ($\alpha = 5\%$) a Clayton- és Gumbel-kopulák egyaránt jól illeszkednek az adatokra. Ezzel szemben egyértelműen elutasítható a függetlenségi kopula illeszkedése, ami megerősíti az elemzőt abban, hogy szükséges modellezni a kockázatok között fennálló összefüggést. A Clayton- és Gumbel-kopulák közül a χ^2 -tesztstatisztika értéke és a 4. ábrán látható oszlopdiagram alapján egyaránt egyértelműen a Clayton-kopula illeszkedése tekinthető megfelelőbbnek, így gyakorlati modellekben ezt a kopulát érdemes alkalmazni a szóban forgó adatokra.



4. ábra: Kopulák illeszkedésének összehasonlítása

⁷ Az illeszkedésvizsgálathoz alkalmazott 3 x 3-as rácsot szemlélteti a '2. (0,1)x(0,1) pontdiagram' munkalap is.

5. Monte Carlo szimulációs technikák

A Monte Carlo szimuláció a várható értékek és valószínűségek becslésének a biztosítási és pénzügyi gyakorlatban is gyakran alkalmazott módszere. Segítségével megbecsülhetők pl.:

- a jövőbeli kárkifizetések várható értéke,
- a szükséges díj vagy tartalék mértéke,
- a biztosítási profit várható nagysága,
- az inszolvenca vagy a díj elégtelenségének valószínűsége stb.

A módszer feltételezi, hogy ismertek egy modell bizonyos bemenő paramétereinek (pl. kárnagyságok, kárszámok, kárvalószínűségek, hozamok stb.) valószínűség-eloszlásai, továbbá explicit módon ismertek a képletek, melyek segítségével a bemenő paraméterek megvalósult értékeiből kiszámíthatók a modell bizonyos kimenő paraméterei (pl. a megvalósult kárszámokból és kárnagyságokból adott díjbevétel és egyéb környezeti paraméterek esetén kiszámítható a biztosító terméksintű profitjának nagysága). A kimenő paraméterek bináris (0 vagy 1) értékű változók is lehetnek: pl. bekövetkezett-e az inszolvenca, elégtelen volt-e a díj stb. Ez abban az esetben indokolt, ha várható értékek helyett valószínűségeket szeretnénk becsülni.⁸

Egy tipikus Monte Carlo szimuláció legfontosabb lépései a következők:

- a bemenő paraméterek valószínűség-eloszlásaiból vett véletlen minta generálása,
- a kimenő paraméterek értékeinek kiszámítása a modell működését leíró formulák segítségével,
- a nagy méretű mintában a kimenő paraméterek értékeinek átlagolása egyszerű számtani átlag használatával.

A módszer a nagy számok törvényén alapul: kellően nagy mintában a kimenő paraméterek számtani átlagai tetszőlegesen jól megközelítik a kimenő paraméterek elméleti várható értékeit. Mivel a mintaelemszámnak csak a gépi számítási kapacitás szabhat határt, ezért általában a módszer segítségével tetszőlegesen jó közelítés elérhető. Monte Carlo szimuláció alkalmazása esetén gyakoriak a hosszú számítási idők.

A témáról bővebb áttekintést nyújt pl. [2] és [5].

⁸ Ennek háttérében az áll, hogy egy bináris változó várható értéke azonos az 1 érték felvételének valószínűségével.

A Monte Carlo módszer egyetlen matematikai nehézsége a kívánt eloszlással rendelkező bemenő paraméterek generálása. Ez a rész arról nyújt áttekintést, hogy az egyes, gyakran előforduló valószínűség-eloszlásokból hogyan lehet véletlen mintát venni számítógépes programok (pl. a Microsoft Excel) segítségével⁹. A módszereket a tanulmányban matematikai tételek formájában közöljük, gyakorlati alkalmazásukat pedig a tanulmányhoz mellékelt *szimuláció.xls* Microsoft Excel munkafüzetben szemléltetjük, ahol minden egyes algoritmust külön-külön munkalapokon mutatunk be. Ha nem érthető egy tétel a szövegben, akkor érdemes áttanulmányozni a hozzá tartozó Excel munkalapot is.

Alapkövetelményként feltételezzük, hogy rendelkezésünkre áll egy olyan algoritmus, mely egymástól független, a $(0,1)$ intervallumban egyenletes (jelölése a továbbiakban: $U(0,1)$) eloszlású véletlenszámok sorozatát generálja. Microsoft Excel környezetben ezt a feladatot a $VÉL()$, munkafüzethez kapcsolódó VBA programkódban pedig az Rnd függvény látja el.

A generálási technikákat leíró tételek:

5.1 Generálás az (a, b) intervallumon értelmezett $U(a, b)$ egyenletes eloszlásból:

Ha $U \sim U(0,1)$, és $X = a + (b - a)U$, akkor $X \sim U(a, b)$.

5.2 Generálás az M és N pozitív egészek között értelmezett $DU(M, N)$ ún. diszkrét egyenletes eloszlásból:¹⁰

Ha $X \sim U(M, N + 1)$, és $Y = \lfloor X \rfloor$, akkor $Y \sim DU(M, N)$.

⁹ A Microsoft Excel Adatelemzés bővítményében található Random Number Generation alponban is lehet mintát generálni néhány nevezetes eloszlásból.

¹⁰ A diszkrét egyenletes eloszlás jelentése: $P(Y = M) = P(Y = M + 1) = \dots = P(Y = N) = \frac{1}{N - M + 1}$.

5.3 Generálás tetszőleges diszkrét eloszlásból:¹¹

Ha $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$, $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ és $I_j = \left[\sum_{k=1}^{j-1} p_k, \sum_{k=1}^j p_k \right)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), valamint $X = x_j$

pontosan akkor, ha $U \in I_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), ahol $U \sim U(0,1)$, akkor $P(X = x_j) = p_j$.

5.4 Generálás tetszőleges folytonos eloszlásból:

Ha F folytonos eloszlásfüggvény, és $X = F^{-1}(U)$, ahol $U \sim U(0,1)$, akkor X eloszlásfüggvénye F .

5.5 Folytonos eloszlások közötti átjárás:

Ha az X folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F , és $U = F(X)$, akkor $U \sim U(0,1)$. Továbbá ha G folytonos eloszlásfüggvény, és $Y = G^{-1}(U) = G^{-1}(F(X))$, akkor Y eloszlásfüggvénye G .

5.6 Generálás többdimenziós normális eloszlásból:

Ha az $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ (oszlop-) vektor többdimenziós normális eloszlású $\underline{0}$ várható értékkel és \underline{I} kovarianciamátrixszal (a koordináták egyenként független standard normális eloszlásúak), és a $\underline{\Sigma}$ kovarianciamátrix a $\underline{\Sigma} = \underline{C}\underline{C}^T$ alakban szorzatra bontható (pl. Cholesky-felbontással), akkor az $\underline{Y} = \underline{C}\underline{X} + \underline{\mu}$ vektor többdimenziós normális eloszlású $\underline{\mu}$ várható értékkel és $\underline{\Sigma}$ kovarianciamátrixszal.

^{11, 12} Ha a felvehető értékek halmaza megszámlálhatóan végtelen (pl. Poisson-eloszlás esetén), akkor egy adott küszöbértéknél csonkítani kell az eloszlást, pl. úgy, hogy a küszöbérték feletti értékek valószínűségeinek összege egy adott szint (pl. 0,1%) alatt maradjon.

5.7. Generálás többdimenziós diszkrét eloszlásból:¹²

Ha $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$, $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ és $I_j = \left[\sum_{k=1}^{j-1} p_k, \sum_{k=1}^j p_k \right)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), valamint $\underline{X} = \underline{x}_j$

pontosan akkor, ha $U \in I_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), ahol $U \sim U(0,1)$, akkor $P(\underline{X} = \underline{x}_j) = p_j$.

5.8 Adott rangkorrelációjú, folytonos eloszlású véletlen változók generálása (normális kopulával):¹³

Ha (Y_1, Y_2) standard normális eloszlásúak r korrelációval, ahol $r = 2 \sin\left(\rho \frac{\pi}{6}\right)$, és

$U_1 = \Phi(Y_1)$, $U_2 = \Phi(Y_2)$, valamint F_1, F_2 folytonos eloszlásfüggvények, és $X_1 = F_1^{-1}(U_1)$, $X_2 = F_2^{-1}(U_2)$, akkor $\rho(X_1, X_2) = \rho$, továbbá X_1 eloszlásfüggvénye F_1 és X_2 eloszlásfüggvénye F_2 .

5.9 Adott kopulával rendelkező, folytonos eloszlású véletlen változók generálása:

Ha egy adott C kopulára $p_{ij} = P\left(Y_1 \in \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right), Y_2 \in \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right)\right)$ a $[0,1]^2$ egységnégyzeten belül kialakított $m \times m$ -es rács négyzeteibe esés valószínűsége ($i, j = 1, 2, \dots, m$), és (Z_1, Z_2) -t

7.) alapján úgy generáljuk, hogy $P\left(Z_1 = \frac{i-1}{m}, Z_2 = \frac{j-1}{m}\right) = p_{ij}$ teljesüljön, valamint

$U_1 = Z_1 + \frac{1}{m}V_1$, $U_2 = Z_2 + \frac{1}{m}V_2$, ahol $V_1, V_2 \sim U(0,1)$ függetlenek egymástól és a (Z_1, Z_2)

generálásához használt véletlenszámtól is, akkor (U_1, U_2) közelítőleg a C kopulából

¹³ Normális kopulából általános esetben is így kell generálni (a 9. alkalmazása szükségtelen bonyolítás), de ekkor nincs adott ρ , és nem szükséges az $r = 2 \sin\left(\rho \frac{\pi}{6}\right)$ feltétel.

származik.¹⁴ Továbbá ha F_1, F_2 folytonos eloszlásfüggvények, és $X_1 = F_1^{-1}(U_1), X_2 = F_2^{-1}(U_2)$, akkor (X_1, X_2) kopulája közelítőleg a C kopula, a peremeloszlás-függvények pedig F_1 és F_2 .

¹⁴ Az $m \times m$ -es rács négyzetein belül maximálisan elkövethető hibavektor normája egy négyzet átlójának hossza: $\frac{\sqrt{2}}{m}$, amely 0-hoz tart, ha $m \rightarrow \infty$.

6. Szavatoló tőke számítása összefüggő kockázatok esetén

6.1. A Solvency II. keretrendszer standard formulája

Ebben a részben a Solvency II. keretrendszerben szereplő – a vállalati szintű szavatoló tőkére vonatkozó – standard formulát mutatjuk be, mely a modellezett kockázatok többdimenziós normális eloszlásának feltételezésére épül. A formula a CEIOPS (Európai Biztosítás- és Munkáltatói Nyugdíjpénztár Felügyelők Bizottsága) ajánlásaira épül. A témával kapcsolatban bővebb felvilágosítást nyújt pl. [1].

Jelöljön p darab kockázatot X_1, X_2, \dots, X_p , melyek p -dimenziós normális eloszlást követnek. Az egyes kockázatok várható értékeit tartalmazza a μ ($p \times 1$ -es) vektor, a szórásokat a σ ($p \times 1$ -es) vektor, a korrelációmátrixot pedig jelölje R ($p \times p$ -s).

Mivel a törvényi szabályozás alapján a biztosító minden egyes kockázatra a μ_i várható kockázat mértékének megfelelő tartalékot köteles képezni, ezért szavatoló tőkét csak a tartalékhoz képesti $\tilde{X}_i = X_i - \mu_i$ meghaladásokra szükséges számítani. E meghaladások szintén p -dimenziós normális eloszlást követnek 0 ($p \times 1$ -es vektor) várható értékkel, σ ($p \times 1$ -es vektor) szórásokkal és R ($p \times p$ -s mátrix) korrelációmátrixszal.

Egy-egy kockázatra külön-külön a Solvency II. keretrendszer alapján akkora szavatoló tőkét szükséges képezni, hogy az legalább 99,5% valószínűséggel fedezze a kockázatból eredő potenciális veszteséget.

A normalitásra vonatkozó feltevésből levezethető, hogy ez a szabály a következő egyedi szavatolótőke-szinteket (SCR: solvency capital requirement) adja:

$$SCR_i = z_{0,995} \sigma_i \approx 2,58 \sigma_i,$$

ahol $z_{0,995}$ a standard normális eloszlás 99,5%-os megbízhatósági szinthez tartozó kvantilise:

$$z_{0,995} = \Phi^{-1}(0,995) \approx 2,58.$$

Az egyedi szavatolótőke-szinteket foglaljuk az s ($p \times 1$ -es) vektorba!

Ekkor a vállalati szintű szavatolótőke-szükséglet az

$$SCR = \sqrt{sRs}$$

összefüggés alapján számítható ki.

Belátható, hogy az így kapott szavatolótőke-szint nem lehet több az egyedi szavatolótőke-szintek összegénél, és csak abban a szélsőséges esetben veszi fel az utóbbi felső korlátot, ha az R korrelációmátrix minden eleme 1. Tehát minél alacsonyabbak a korrelációk az egyedi kockázatok között, annál alacsonyabb szavatoló tőkére van szükség a diverzifikációnak köszönhetően.

A felső korláthoz képesti eltérés felfogható úgy, mint a diverzifikáció jótékony hatása:

$$\delta = \sum_{i=1}^p SCR_i - SCR.$$

Az egyedi szavatolótőke-szintek összegénél ennyivel kevesebb vállalati szintű szavatoló tőkét elegendő képezni annak köszönhetően, hogy az egyedi kockázatok nem tökéletesen korreláltak, és így egy-egy rossz káralakulású egyedi kockázat hatását ellentételezheti a többi egyedi kockázat kedvezőbb káralakulása.

A Solvency II. keretrendszer által nevesített egyedi kockázatok:

- piaci kockázat,
- partnerkockázat (nemfizetési kockázat),
- életbiztosítási kockázat,
- egészségbiztosítási kockázat,
- neméletbiztosítási kockázat.

A szabályozó a szavatoló tőke kiszámításához alkalmazandó korrelációs mátrixot is megadja (a kockázatok sorrendje azonos a fenti felsorolásbeli sorrenddel):

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 1 & 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 1 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 1 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A felsorolásban nem szerepel a működési kockázat, mely esetében a szabályozás alapján nem érvényesíthető diverzifikációs hatás, ami a gyakorlatban azt jelenti, hogy a működési kockázatra képzendő szavatoló tőkét egy az egyben hozzá kell adni a vállalati szintű szavatolótőke-szükséglethez.

A Solvency II. keretrendszerben szereplő moduláris („bottom-up”) megközelítés lényege, hogy az egyes kockázati modulok további almodulokra oszthatók, és az almodulok szavatolótőke-szükségletéből az ugyanitt, fentebb már bemutatott, többdimenziós normális eloszlásra épülő megközelítés segítségével számítható ki az egyes kockázati modulok SCR_i szavatolótőke-szükséglete.

Az egyes modulok almoduljai és a modulokon belül alkalmazandó korrelációs mátrixok megtalálhatók [1]-ben.

Az eljárást a tanulmányhoz csatolt *szavatoló tőke.xls* Microsoft Excel munkafüzet '1. Solvency II.' munkalapja szemlélteti.

6.2. Szavatoló tőke számítása Monte Carlo szimuláció segítségével

Monte Carlo szimuláció segítségével a Solvency II. szellemében, de a standard formulától némileg eltérő megközelítésben is lehet szavatoló tőkét számítani. A szimulációs megközelítés előnye, hogy a standard formula többdimenziós normális eloszlásra vonatkozó feltételezése helyett tetszőleges peremeloszlások és kopulák használhatók az egyedi kockázatok és a közöttük fennálló kapcsolatrendszerek modellezésére, jobban alkalmazkodva a biztosító társaság kockázati profiljához. A megközelítéssel járó viszonylagos szabadság segíthet a társaság számára legelőnyösebb szavatolótőke-szint megtalálásában is.

A *szavatoló tőke.xls* munkafüzet '3. Monte Carlo' munkalapján található egy példa erre a megközelítésre is, melynek alapja az *összefüggő kockázatok.xls* munkafüzetben már részletesen ismertetett, dániai tűzkárokkal kapcsolatos esettanulmány, melyben a lakóingatlanokban bekövetkezett havi összkár és a berendezésekben bekövetkezett és egyéb havi összkár közötti kapcsolatot maximum likelihood becslést és illeszkedésvizsgálatot követően a legjobban illeszkedő, ($\theta = 0,64$ paraméterű) Clayton-kopula segítségével írtuk le.

Itt feltételezzük, hogy egy nagy magyarországi biztosító társaság saját adatok hiányában átveszi a dániai esettanulmányban szereplő kopulát, de a peremeloszlásokat a saját kártapasztalatai alapján becsüli. A peremeloszlásokra a biztosító Gamma-eloszlásokat illetve $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2$ valamint $\alpha_2 = 3$, $\beta_2 = 2$ paraméterekkel, és meg kívánja becsülni annak a valószínűségét, hogy egy adott mennyiségű tőke egy adott hónapban nem elegendő a kétféle havi összkár összegének fedezetére.

A tőke elégtelenségének valószínűségét megbecsülendő a '3. Monte Carlo' munkalapon az előző részben már ismertetett módon (ld. *szimuláció.xls*, '9. adott kopula' munkalap) 1000 elemű véletlen mintát generálunk a megadott együttes eloszlásból, majd minden egyes kimenetel esetén egy bináris változóval kódoljuk, hogy elegendő volt-e a rögzített tőkemennyiség a havi összkárok összegének fedezetére (1: nem, 0: igen). A nagy számok törvénye alapján az így kapott bináris változó 1000 realizációjának számtani átlaga a tőke elégtelenségének becsült valószínűsége.

Éves szintre aggregálva, 99,5%-os valószínűségi küszöbérték alkalmazásával a Solvency II. szerinti szavatoló-tőke-szükséglet is kiszámítható a tűzkárbiztosítási kockázatra ugyanezen megközelítéssel. Egy ilyen nagyobb léptékű modell felépítéséhez azonban a gyakorlatban először mindenképpen a tanulmányban alkalmazott, stilizált feltételezések pontosítására (pl. törlési hányadok, tartalékok, viszontbiztosítás, kárhányadtól függő díjvisszatérítés stb. figyelembe vételére) lenne szükség, a szóban forgó kockázat egyedi jellegzetességeinek megfelelően, ami meghaladja jelen tanulmány kereteit.

Függelék: Számítások kopulákkal Microsoft Excel környezetben (VBA kódok)

Ebben a függelékben két, a biztosítási és pénzügyi területen gyakran alkalmazott kopula Visual Basic programnyelven írt kódját közöljük: a Clayton- és Gumbel-kopulákét. A két kopulára egy-egy felhasználói függvényt közlünk, melyek a standard Excel függvényekhez hasonlóan hivatkozhatók a munkalapokról közvetlenül, a Visual Basic hívása nélkül, amennyiben a felhasználó korábban bemásolta a kódokat az aktív munkafüzetbe tartozó Visual Basic szerkesztőbe.¹⁵ Természetesen más kopulák képletei is analóg módon leprogramozhatók.

A függvények hívásakor kitöltendő paraméterek: u és v a kopulák első és második változója, θ a kopulák θ paramétere, valamint a cdf nevű, utolsó argumentum segítségével adható meg, hogy a kopulát vagy annak sűrűségfüggvényét szeretné meghívni a felhasználó (1 érték esetén a függvény a kopula értékét adja vissza, 0 vagy egyéb érték esetén pedig a kopula sűrűségfüggvényének értékét).

A VBA kódok, melyeket a túloldalon közlünk, megtalálhatók a tanulmány mindhárom Microsoft Excel formátumú mellékletében is.

¹⁵ A tanulmányhoz tartozó *kopula.xls* is tartalmazza ezeket a kódokat, és a kopulák illesztésénél és az illeszkedés vizsgálatánál hivatkozik is azokra.

Function Clayton(u, v, theta, cdf)

Select Case cdf

Case 1

If ((u = 0) Or (v = 0)) Then Clayton = 0 Else Clayton = (u ^ (-theta) + v ^ (-theta) - 1) ^ (-1 / theta)

Case Else

If u ^ (-theta) + v ^ (-theta) - 1 <= 0 Then Clayton = 0 Else Clayton = (theta + 1) * (u * v) ^ (theta - 1) * (u ^ (-theta) + v ^ (-theta) - 1) ^ (-1 / theta) * (u ^ theta + v ^ theta - (u * v) ^ theta) ^ (-2)

End Select

End Function

Function Gumbel(u, v, theta, cdf)

Select Case cdf

Case 1

If ((u = 0) Or (v = 0)) Then Gumbel = 0 Else Gumbel = Exp(-((-Log(u)) ^ theta + (-Log(v)) ^ theta) ^ (1 / theta))

Case Else

Gumbel = 1 / (u * v) * (Log(u) * Log(v)) ^ (theta - 1) * Exp(-((-Log(u)) ^ theta + (-Log(v)) ^ theta) ^ (1 / theta)) * (theta - 1 + ((-Log(u)) ^ theta + (-Log(v)) ^ theta) ^ (1 / theta)) * ((-Log(u)) ^ theta + (-Log(v)) ^ theta) ^ (1 / theta - 2)

End Select

End Function

Irodalomjegyzék

- [1] CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR STANDARD FORMULA, Article 111(d) – Correlations.
(https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/consultations/consultationpapers/CP74/CEIOPS-L2-Advice-Correlation-Parameters.pdf)
- [2] Deák, I. (1990): Random number generators and simulation. *Mathematical Methods of Operations Research*, Akadémiai Kiadó.
- [3] Panjer, Harry H. (2008): Loss Models: From Data to Decisions, *third edition (with S.A. Klugman and G.E. Willmot)*. John Wiley and Sons.
- [4] Panjer, Harry H. (2007): Operational Risk: Modelling Analytics, John Wiley and Sons.
- [5] Ross, Sheldon M. (1997): Simulation, *2nd Edition*, Academic Press.
- [6] Sklar, A. (1959): Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 8: 229–231.