

## **Krekó Béla szerepe a közgazdászképzés modernizálásában**

### **Krekó Béla (1915-1994) emlékére**

Forgó Ferenc és Komlósi Sándor

Krekó Béla a magyar közgazdasági oktatás megújításának kiemelkedő alakja, aki 1956 után és az 1960-as években a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen (MKKE) élharcosa volt a matematika oktatás reformjának, az operációkutatási oktatás bevezetésének és a tervmatematika szak beindításának. Születésének 100-ik évfordulóján megemlékezünk róla, mint a közgazdászképzés modernizálásának egyik legfontosabb szereplőjéről és a generációk számára alapműként szolgáló könyvek szerzőjéről. Ízelítőt adunk ezeknek a könyveknek az egységes szemléletét adó elemi bázistranszformáció (pivotálás) felhasználásából a lineáris algebra néhány klasszikus problémájának megoldására.

### **Előzmények**

Noha ebben a megemlékezésben főleg az MKKE-n folyó közgazdászképzéssel foglalkozunk, röviden meg kell emlékeznünk az előzményekkel. Magyarországon egyetemi szintű közgazdászképzés 1934 óta van. Az MKKE 1948-ban történt megalapítása előtt ez a Budapesti József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közgazdasági Karán folyt. Itt tanított a világhírű Jordán Károly, akinek tanítványa volt az ugyancsak világhírű Takács Lajos és a Magyarországon jól ismert és elismert Ziermann Margit.

1960 előtt az MKKE-n a matematika oktatás két dologra korlátozódott:

- középiskolai matematikai ismeretek pótlása,
- némi elemi szintű pénzügyi, biztosítási számítások és valamennyi kombinatorika oktatása.

Az előbbire azért volt szükség, mert tömegével kerültek be az egyetemre olyan hallgatók (például szakérettségisek, akik egy gyorsított középiskolai képzést kaptak), akiknek középiskolai ismereteik, ezen belül különösen a matematikai előképzettségük rendkívül gyenge volt. A már akkor is a tanszéken dolgozó kollégák (Halmai Erzsébet, Bikics Istvánné, Gyurkó Lajos, Gáspár László) elmesélt történeteiből egy olyan kép rajzolódott ki, amelyben a tanszék dolgozói tulajdonképpen korrepetálást végeztek a középiskolai anyagból. Abszurd módon egyedül őket tették felelőssé a hallgatók gyenge jegyei miatt. A Matematika Tanszék vezetője Huszár Géza professzor volt. Huszár Géza az 1956-ban játszott szerepe miatt kényszernyugdíjba vonult. Ezután 1961-ig, amikor Szép Jenő átvette a tanszék vezetését, ideiglenes tanszékvezetők voltak. Mentés Imre halála után 1959-ben Krekó Béla lett a megbízott tanszékvezető és tulajdonképpen ettől számíthatjuk a matematika reformjának és az operációkutatás akkor, és nagyrészt ma is, legfontosabb területeinek az oktatásba való beépítését.

A legnagyobb újdonságnak a lineáris programozás tananyagba való beemelése számított. A kezdetek központi találkozóhelyének számított a Matematikai Kutató Intézetben 1957-ben Prékopa András vezetésével indult szeminárium, amelynek Krekó Béla is aktív tagja volt. Az ELTE-n Prékopa András első lineáris programozási speciális előadásait 1958-ban tartotta és összeállított ebben a témában egy koherens, teljesen modern anyagot, amit a Bolyai Társulatban egy továbbképző tanfolyamon 1967 és 1969 között adott elő. Itt felhasználta a legendás, még ma is modern, matematikai igényességgel megírt „fehér könyv”-et, Prékopa (1968). Az ELTE-n az operációkutatás 1968-ban lett szakirány, a lineáris programozás, mint tantárgy speciális kollégiumként folyamatosan szerepelt 1958-tól kezdődően.

### **Az áttörés**

Az MKKE-n azonban az az út, amelyen Prékopa András és az ELTE elindult, nem volt járható. Egyrészt a hallgatóság matematikai előképzettsége nem tette lehetővé annak a matematikai precizitásnak a befogadását, amelyet a „fehér könyv” reprezentált, másrészt az egyetem vezetőségét és a diákokat meg kellett nyerni az ügynek. Krekó Béla egy kiváló stratégiát talált ki és ezt igazi hadvezérként meg is valósította. A lineáris programozás gyakorlati, főleg közgazdasági, üzleti alkalmazásaival kezdett, a matematikai tárgyalás főleg intuitív, a konkrét feladathoz alkalmazott, szemléletes, „közgazdasági” nyelven szólt a hallgatósághoz. Ragyogó példája ennek első két lineáris programozás könyve, Krekó és Bacskay (1957) majd Krekó (1962). Az utóbbi könyv két részből áll. Az első részben gyakorlati példákon mutatja be a szimplex módszer működését, majd a második részben a szimplex módszer matematikájára koncentrált. A hallgatóságtól függően lehetséges volt csak az első részt oktatni, vagy adott esetben mindkettőt. Megjegyzendő, hogy az 1957-es könyv kézírata már 1955-ben készen volt. A gyakorlati kipróbálás 1959-ben történt meg egy fakultatív tárgy keretében, kb. 20-30 hallgató részvételével, nagy sikerrel.

Közben állandó harcot kellett vívni az egyetem vezetőségével (rektor, egyetemi tanács, dékánok, kari tanácsok és egyes véleményvezér tanárok) az oktatás és a tananyag ilyen irányú modernizálásáért. Ennek egyik oka az az álláspont, amely a Szovjetunióban az 1920-as években alakult ki, és amely szerint a matematikai közgazdaságtan „burzsoá áltudomány”, amely a kapitalista kizsákmányolás elleplezésére és igazolására szolgál. Sztálin halála után ez a vonal némileg enyhült, de a hatalom részéről állandó gyanakvás kísért minden ilyen irányú tevékenységet. Mivel eleinte csak szűk körben létezett az operációkutatás fogalma, az operációkutatásnak is meg kellett harcolni a megfelelő státusért. A hivatalos állásfoglalás azonban idővel lepuhult: akkor és annyiban lehet a matematikai módszereket használni a közgazdaságtanban (az üzleti tudományok beleértendőek), amennyiben ez elősegíti a gazdasági teljesítmény növelését. A szemléletváltás azonban nem ment máról holnapra, főleg az ideológiával túltöltött MKKE-n. Minden egyes kis lépésért harcolni kellett a legkülönbözőbb fórumokon, leginkább a tananyagokat jóváhagyó legfelsőbb fórumon, az egyetemi tanácsban. Krekó Béla ragyogó harcos volt. Tudása, műveltsége, iróniája segítette. Sok igaz anekdota-szerű történet kering arról is, hogy felelős testületekben milyen nívójú véleményekkel kellett megküzdenie. Íme egy jellemző történet. Az egyetemi tanácsban, a hatvanas években, Krekó Béla javaslatot tett arra, hogy a játékelmélet is kerüljön be

választható tárgyként a tantervbe. Erre az egyik felháborodott ellenvetés így hangzott: „Na de elvtársak, őrizzük meg az egyetem komolyságát”.

Egyébként a hatvanas évek közepétől már gondtalanul lehetett használni az operációkutatás elnevezést, de konkrét tartalmáról még sokáig folytak szakmai viták, főleg a mind a mai napig rendszeresen megtartott operációkutatás konferenciákon. Ennek azonban már semmi köze nem volt az ideológiához. Az operációkutatás hazai története egyébként nem tárgya ennek a visszaemlékezésnek.

### **A terv-matematika szak**

Krekó Béla szinte egyszemélyes küzdelmét az MKKE-n a matematika/operációkutatás egyetemi státusának megteremtésére 1960-ban siker koronázta. Engedélyt kapott, hogy a felvételik során válasszon a matematikából kiemelkedően felvételiző hallgatók közül 15-20-at, akikkel megindulhat egy új szak, amelynek a terv-matematika elnevezést adták. A szak bevezetésének sikerében jelentős szerepe volt László Imre rektorhelyettesnek, a Népgazdaság tervezése tanszék vezetőjének, aki felkarolta és támogatta a kezdeményezést. Megkönnyítette a helyzetet az, hogy korábban volt egy terv-statisztika szak, természetesen teljesen eltérő tartalommal. A „terv” szó a korszellemnek megfelelően az új szak eladhatóságát és a különböző jóváhagyó fórumokon való túljutását támogatta. Persze a későbbi végzettek közül sokan dolgoztak az Országos Tervhivatalban, de ennek már nem sok köze volt a szak elnevezéséhez, sokkal inkább a tartalmához. A szak gondozását és felügyeletét közösen a Matematika és a Népgazdaság tervezése tanszékek látták el.

A következő táblázat a négy és fél év matematikai, statisztikai, számítástechnikai és operációkutatási szaktárgyait, tantervi helyét, heti óraszámát és tantárgyfelelősét (előadó) mutatja:

Félév	Tárgy neve	Heti óraszám	Előadó (tárgyfelelős)
1	Matematika (Lineáris algebra)	8	<b>Krekó Béla</b>
1	Fizika	2	Kovács Győző
2	Matematika (Analízis)	8	Szép Jenő
2	Elektrodinamika	2	Kovács Győző
3	Felsőfokú matematika (Lineáris algebra)	8	<b>Krekó Béla</b>
3	Általános statisztika	3	Köves Pál
4	Felsőfokú matematika (valószínűségszámítás)	8	<b>Krekó Béla</b>
4	Általános statisztika	4	Párniczky Gábor
5	Matematikai gépek	2	Kovács Győző
5	Gazdasági programozás (lineáris)	4	<b>Krekó Béla</b>
5	Matematikai statisztika	3	Meszéna György
5	Gazdaságstatisztika	4	Benedecki Jánosné
6	Matematikai statisztika	3	Meszéna György
6	Gazdasági programozás (nemlineáris)	4	<b>Krekó Béla</b>
6	Statisztika	4	Benedecki Jánosné
7	Gazdasági programozás (egészértékű)	3	<b>Krekó Béla</b>
7	Készletgazdálkodás	2	Ziermann Margit

8 Számítástechnika	4	Szelecsán János
8 Gazdasági programozás	4	<b>Krekó Béla</b>
8 Sorbanállási modellek	3	Ziermann Margit
9 Számítástechnika	4	Révész György
9 Számítástechnika	4	Környei Imre
9 Gazdasági programozás	2	<b>Krekó Béla</b>
10 Gazd. Mat. szakszeminárium	3	Jándy Géza
10 Játékelmélet	2	Szép Jenő

A matematikai alaptárgyak (lineáris algebra, analízis, valószínűségszámítás) az általános matematikai alapon kívül elsősorban a későbbi szaktárgyak igényeit igyekeztek kiszolgálni. A táblázatot vizsgálva láthatjuk, hogy Krekó Béla a tanításból és az azt támogató tananyagok kidolgozásából is milyen nagy részt vállalt, elsősorban a szakterületének számító lineáris algebrából, a lineáris és nemlineáris programozásból.

Közben 1968-ban, párhuzamosan az ELTE-én Prékopa András vezetésével a matematika szak egyik szakirányaként létrejött az operációkutatás szakirány. A terv-matematika szak az MKKE-n és az operációkutatás szakirány az ELTE-én egymást erősítették, a végzetek különböző intézményeknél jó csapatmunkások lettek és jól megértették egymást.

### **Tananyagok, könyvek**

Krekó Béla az egyetemi tananyagokat egységes szemlélet alapján állította össze és az írásos anyagokat (elsősorban tankönyveket) is ebben a szellemben írta. Első magyar nyelvű lineáris programozás könyve, Krekó-BacsKay (1957) ihletője Charnes, Cooper és Henderson (1953) könyve volt. A további könyveknek mintául Hadley (1961, 1963, 1964) könyvei szolgáltak, de a rengeteg ötlet, veretes stílus és az egységes szemlélet igazán egyedivé tette őket. A kor nemzetközi tendenciáit és a legújabb kutatások eredményeit is tartalmazta, a diákság szélesebb rétegei számára is „emészthető” formában. Az egységes szemléletet a konstruktív bizonyításokra való törekvés, az elemi bázis-transzformáció (pivotálás) szinte univerzális használata, az algoritmikus szemlélet, a számítástechnikai megvalósítás mérlegelése, a gyakorlati, főleg közgazdasági alkalmazások előtérbe helyezése, az egyes matematikai fogalmak és eljárások gazdasági interpretációja biztosította. Érdekes, hogy a determináns csak epizódszerephez jutott. Természetesen a számítástechnikai megvalósítást a kor technikája behatárolta.

A lineáris programozás Krekó (1966), a nem-lineáris és egészértékű programozás Krekó (1972), mátrixszámítás Krekó (1963) és a lineáris algebra Krekó (1976) voltak a témái a következő könyveknek. Ezek hosszú időre tankönyvként és kézikönyvként szolgálták az oktatást, kutatást és a gazdasági szakemberek igényét. Annak illusztrálására, hogy mennyire a kor színvonalát tükrözte a tananyag, álljon itt példának az Optimumszámítás (Nemlineáris programozás) könyv fejezeteinek jegyzéke:

1. Bevezetés
2. A folytonos modellekről általában

3. A szimplex módszer
4. A hatékony irányok módszere
5. Metsző síkok módszere
6. A szeparábilis célfüggvények módszere
7. A szekvenciális módszer
8. A dualitás
9. Optimumszámítás több célfüggvény mellett
10. Nemfolytonos modellekről általában
11. A metszési módszer
12. Kombinatorikus módszerek
13. Gráfelméleti módszerek
14. A nemfolytonos modellek és a dualitás

Ezeknek a könyveknek a minőségét jelzi, hogy lineáris programozásról szóló könyvei megjelentek a világpiacon is. Angol nyelvű, Krekó (1968), német nyelvű, Krekó (1964) és szerb-horvát nyelvű Krekó (1966) kiadásai bizonyítják ezt. Az angol nyelvű könyvet ma is meg lehet rendelni az Amazonon.

### **Tudományos tevékenység**

Mint azt már korábban említettük, Krekó Béla missziója a korszerű matematikai-operációkutatási módszerek és modellek megismertetése volt a közgazdászokkal. Ilyen mértékű könyvírás és szakmai közéleti tevékenység mellett kevesebb ideje és energiája maradt a szoros értelemben vett, folyóiratcikkekben is tükröződő tudományos munkára. Olyan nagyon ezt nem is ambicionálta. Ennek ellenére az irodalomjegyzékben találunk sok szakmai cikket, amelyek ugyan nem a legjobb nemzetközi folyóiratokban jelentek meg, de mindig volt mondanivalójuk, elsősorban a gazdasági szakemberek számára. Erős rábeszélésre, megszerezte a kandidátusi címet tudományos munkásságának tézisszerű összefoglalásával, Krekó (1975), de ennél tovább nem ment.

Ha végignézzük Krekó Béla munkásságának legfontosabb alkotásait jelentő könyveit, szembeötlő, hogy nem csak egy könyvön belül vonul végig egy egységes szemlélet, hanem a könyvek is szinte „egy füzérre” vannak fűzve. Ez a fűzér az elemi bázistranszformáció. A megemlékezés hátralévő részét ennek a témának szenteljük.

#### **Az elemi bázistranszformáció széleskörű alkalmazása Krekó Béla munkásságában**

Az 1950-es években a lineáris programozás numerikus módszere, a szimplex módszer a korábbinál fontosabb helyre pozícionálta az alapjául szolgáló elemi bázistranszformációt. Ahogy azt a múlt század 50-es, 60-as éveinek irodalma mutatja, ez a módszer azonban sokáig csupán a lineáris programozás numerikus módszerének számított.

Krekó Béla azok közé tartozott, akik felismerték az elemi bázistranszformáció szélesebb körű alkalmazhatóságát a mátrixszámításban, lineáris algebrában, de ismereteink szerint az egyetlen volt, aki már az 1960-as évek elején tankönyveiben, szakkönyveiben ezt be is

mutatta. Ezt a tudatos törekvését ő maga így fogalmazta meg Matrixszámítás c. könyvének előszavában 1963-ban:

*„Az anyag felépítése eltér a matrixszámítással foglalkozó könyvek szokásos felépítésétől. A számítási módszerek nem a determináns fogalomra, hanem az elemi bázistranszformációra támaszkodnak. Így sikerült elérni, hogy a lineáris algebra numerikus problémáinak megoldására lényegében ugyanazt az apparátust lehet használni, beleértve a lineáris programozási feladatok megoldását és a transzformációk kanonikus alakjának meghatározását is. Ez a tárgyalásmód, úgy vélem, jóval racionálisabb a szokásosnál, szorossá teszi a kapcsolatot az elmélet és a gyakorlat között, továbbá olyan numerikus eljárások megkonstruálásához vezet, amelyek viszonylag könnyen alkalmazhatók a programvezérlésű számolóberendezésekre is.”*

A következőkben röviden áttekintjük azokat a problémákat, melyekre Kerekó Béla az elemi bázistranszformációt alkalmazta. (A lineáris egyenletrendszerek megoldását, a mátrixok invertálását és a lineáris programozást, mint közismert problémákat itt most nem tárgyaljuk.) A Kerekó Béla által javasolt numerikus eljárások legtöbbje a szimmetrikus mátrixok  $LDL^T$ -felbontásának elemi bázistranszformációra épülő eljárásán alapul.

**Szimmetrikus mátrixok  $LDL^T$ -felbontása** (Matrixszámítás, 210-217 oldalak): Minden A szimmetrikus mátrix előállítható  $A = LDL^T$  alakban, ahol L olyan alsó háromszög mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme 1, D pedig diagonális mátrix.

Ezt az eljárást kvadratikus formák négyzetösszegre való redukciójára is alkalmazta, tudomásunk szerint elsőként a világon. Éppen ezért a Kerekó-féle módszert ennek a problémának a tárgyalása során mutatjuk be. Ez a problémakör egyébként is kiemelt szerepet játszik az Optimalizáláselméletben.

**Kvadratikus forma négyzetösszegre való redukciója** (Matrixszámítás, 210-217 oldalak)  
Legyen A n-ed rendű kvadratikus mátrix. Ekkor megadható olyan nonsinguláris G mátrix, hogy a  $\mathbf{z} = G\mathbf{x}$  koordináta transzformáció az  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  kvadratikus formát diagonális formára transzformálja.

Ennek a tételnek különös jelentősége van kvadratikus formák definitásának vizsgálatában.

**Kvadratikus formák definitásáról.** Tekintsük az  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  kvadratikus formát. Ha az A mátrix diagonális mátrix, akkor a kvadratikus formát diagonális formának nevezzük. Kvadratikus formák a matematika, fizika számos területén fontos szerepet játszanak, a sok lehetőség közül itt most csak a többváltozós függvények feltétel nélküli, illetve egyenlőség feltételes szélsőérték feladatait említjük.

**A) Tétel.** Legyen  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  kétszer differenciálható függvény, melynek legyen  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  stacionárius pontja. Ha az  $\mathbf{x}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{x}$  kvadratikus forma

- (i) pozitív definit, akkor  $f(\mathbf{x})$ -nek  $\mathbf{a}$ -ban lokális szigorú minimuma van,
- (ii) negatív definit, akkor  $f(\mathbf{x})$ -nek  $\mathbf{a}$ -ban lokális szigorú maximuma van,

(iii) *indefinit*, akkor  $f(\mathbf{x})$ -nek  $\mathbf{a}$ -ban *nincs szélsőértéke*.

**B) Tétel.** Legyenek  $f(\mathbf{x})$ ,  $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  kétszer differenciálható függvények.

Legyen  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  Lagrange-stacionárius pontja az

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{extr} \\ & \text{feltéve, hogy} \\ & g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

feladatnak és legyen a feltételrendszer Lagrange-reguláris ebben a pontban. Legyenek  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  a megfelelő Lagrange szorzók. Tekintsük a feladat *aktualizált Lagrange függvényét*:

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}).$$

Jelölje  $G$  a feltételrendszer Jacobi mátrixát:

$$G = [g'_1(\mathbf{a}) \quad g'_2(\mathbf{a}) \quad \cdots \quad g'_m(\mathbf{a})]^T.$$

(i) Ha az  $\mathbf{x}^T L''(\mathbf{a}) \mathbf{x}$  kvadratikus forma *pozitív definit* a  $G\mathbf{x} = \mathbf{0}$  altéren, vagyis, ha

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, G\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T L''(\mathbf{a}) \mathbf{x} > \mathbf{0},$$

akkor az  $f(\mathbf{x})$  függvénynek a feltételi halmazon *szigorú lokális minimuma* van az  $\mathbf{a}$  helyen.

(ii) Ha az  $\mathbf{x}^T L''(\mathbf{a}) \mathbf{x}$  kvadratikus forma *negatív definit* a  $G\mathbf{x} = \mathbf{0}$  altéren, vagyis, ha

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, G\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^T L''(\mathbf{a}) \mathbf{x} < \mathbf{0},$$

akkor az  $f(\mathbf{x})$  függvénynek a feltételi halmazon *szigorú lokális maximuma* van az  $\mathbf{a}$  helyen.

### C) Konvex és pszeudokonvex függvények másodrendű jellemzése

(a) A klasszikus analízisből jól ismert tétel, hogy a kétszer folytonosan differenciálható  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  függvény akkor és csak akkor konvex a  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  nyílt konvex halmazon, ha minden  $\mathbf{x} \in K$  pontban az  $f''(\mathbf{x})$  Hesse-mátrix pozitív szemidefinit. Ha  $f''(\mathbf{x})$  minden  $\mathbf{x} \in K$  pontban pozitív definit, akkor  $f(\mathbf{x})$  szigorúan konvex a  $K$  halmazon.

(b) Pszeudokonvex függvényekre az alábbi tulajdonság jellemző. A kétszer folytonosan differenciálható  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  függvény akkor és csak akkor pszeudokonvex a  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  nyílt konvex halmazon, ha minden  $\mathbf{a} \in K$  pontban teljesül a következő két feltétel egyike:

(i) Ha  $\mathbf{a} \in K$  és  $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ , akkor  $f(\mathbf{x})$ -nek  $\mathbf{a}$ -ban lokális minimuma van,

- (ii) Ha  $\mathbf{a} \in K$  és  $f'(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ , akkor az  $\mathbf{x}^T f''(\mathbf{a}) \mathbf{x}$  kvadratikus forma pozitív szemidefinit az  $f'(\mathbf{a})^T \mathbf{x} = 0$  altéren.

**Kvadratikus formák diagonalizációja.** Kvadratikus formák definitás vizsgálatának egy nagyon egyszerű, de nagyon hatékony módja a kvadratikus forma diagonális formára való transzformációja egy alkalmasan választott  $\mathbf{z} = G\mathbf{x}$  lineáris transzformáció segítségével. Ez az ötlet akkor vezet eredményre, ha  $G$  invertálható mátrix és  $D = (G^{-1})^T A G^{-1}$  diagonális mátrix. Legyenek  $D$  diagonális elemei  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . Ekkor

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{z}^T D \mathbf{z} = \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_2^2 + \dots + \delta_n z_n^2. \quad (D)$$

Ebből nyilvánvaló, hogy  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  akkor és csak akkor pozitív (negatív) definit, ha  $D$  valamennyi főátlóbeli eleme pozitív (negatív).

Egy kvadratikus alakot négyzetösszeggé transzformálni sokféleképpen lehet. Legyen  $F$  egy olyan invertálható mátrix, melyre  $F^T A F$  diagonális mátrix. Jelöljék az  $F$  mátrix oszlopvektorait  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ , melyek bázist alkotnak  $R^n$ -ben. Mivel

$$F^T A F = [\mathbf{f}_i^T A \mathbf{f}_j],$$

ezért  $F^T A F$  csak úgy lehet diagonális mátrix, ha  $i \neq j$  esetén  $\mathbf{f}_i^T A \mathbf{f}_j = 0$ . Ha az  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  bázis rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor azt *A-ortogonális* bázisnak nevezzük. Az *A-ortogonális* vektorokat szokták még *A-konjugált* vektoroknak is nevezni.

A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás értelemszerű módosításával  $R^n$  bármely bázisa *A-ortogonalizálható*, ez bizonyítja azt az állítást, hogy egy adott kvadratikus formát többféleképpen is lehet diagonalizálni. Mint később majd látni fogjuk, Krekó Béla módszere *A-ortogonális* bázis előállítását is eredményezi.

Kvadratikus formák négyzetösszegre redukálhatóságát leggyakrabban a szimmetrikus mátrixok főtengety transzformációjával szokták illusztrálni. Legyen  $S$  egy olyan mátrix melynek oszlopvektorai valamennyien az  $A$  mátrix sajátvektorai és ortonormált bázist alkotnak  $R^n$ -ben. Ekkor az  $\mathbf{u} = S^{-1} \mathbf{x}$  transzformáció alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{u}^T L \mathbf{u} = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_n u_n^2, \quad (L)$$

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  az  $A$  mátrix sajátértékei. Ebből adódik a definitási tulajdonságoknak a mátrix sajátértékeivel való jól ismert karakterizációja.

A főtengety transzformáció nagyon számításigényes eljárás. Kvadratikus formák diagonális alakra való transzformálására ennél lényegesen egyszerűbb eljárásokat is kidolgoztak. A legelső említést érdemlő numerikus módszert Lagrange nevéhez kapcsolják, aki a „teljes négyzetté kiegészítés” módszerével adott eljárást a négyzetes alakra hozásra. (Hadley, G., Linear Algebra, Addison-Wesley, Massachusetts, 1961, Chapter 7.)



**A Lagrange féle teljes négyzetté alakítás módszere.** Tekintsük a  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  kvadratikus formát. Tegyük fel, hogy  $\mathbf{A}$  diagonális elemei között van 0-tól különböző. Az általánosságot nem korlátozzuk, ha feltesszük, hogy  $a_{11} \neq 0$ . Partícionáljuk  $\mathbf{A}$ -t, illetve  $\mathbf{x}$ -et a következő módon:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor  $Q(\mathbf{x})$  a következő alakban is felírható:

$$Q(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + 2x_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^T\mathbf{C}_1\mathbf{x}_2.$$

A jobboldali összeg első két tagjára alkalmazzuk a teljes négyzetté kiegészítést:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2x_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{x}_2 &= a_{11} \left( x_1^2 + 2x_1 \frac{\mathbf{b}_1^T\mathbf{x}_2}{a_{11}} + \frac{\mathbf{x}_2^T\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{x}_2}{a_{11}^2} \right) - \frac{\mathbf{x}_2^T\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{x}_2}{a_{11}} = \\ &= a_{11} \left( x_1 + \frac{\mathbf{b}_1^T}{a_{11}}\mathbf{x}_2 \right)^2 - \frac{\mathbf{x}_2^T\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{x}_2}{a_{11}}. \end{aligned}$$

Ennek az összefüggésnek a segítségével  $Q(\mathbf{x})$  következő alakját kapjuk:

$$Q(\mathbf{x}) = a_{11} \left( x_1 + \frac{\mathbf{b}_1^T}{a_{11}}\mathbf{x}_2 \right)^2 + \mathbf{x}_2^T\mathbf{F}_1\mathbf{x}_2,$$

ahol  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{C}_1 - \frac{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^T}{a_{11}}$ . Vezessük be az

$$y_1 = x_1 + \frac{\mathbf{b}_1^T}{a_{11}}\mathbf{x}_2$$

új változót. Ekkor

$$\hat{Q}(y_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} y_1 & \mathbf{x}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = a_{11}y_1^2 + \mathbf{x}_2^T\mathbf{F}_1\mathbf{x}_2.$$

Az  $(x_1, \mathbf{x}_2)$  változókról az  $(y_1, \mathbf{x}_2)$  változókra való áttérés mátrixa

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{t}_1^T \\ 0 & \mathbf{E}_{n-1} \end{bmatrix},$$

ahol  $\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{a_{11}}$ . Teljesül ugyanis az alábbi

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{t}_1^T \\ 0 & \mathbf{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$$

transzformációs kapcsolat.

Ha a Lagrange-féle módszert hatékony numerikus eljárás szintjére akarjuk emelni, akkor „mindössze” a  $T_1$  mátrix első sorát kell az  $A$  mátrix elemeiből egy könnyen megadható eljárással kialakítani. 1966-ban két amerikai matematikus, Beightler, C. S. and Wilde, D. J. (1966) megmutatta, hogy az  $Ax = \mathbf{0}$  lineáris egyenletrendszer Gauss-féle eliminációs technikája (amikor az  $x_1$  változót elimináljuk az egyenletrendszer második, harmadik, ...,  $n$ -edik sorából) pontosan a  $T_1$  mátrix első sorát állítja elő.

Hasonló eredményre jutott Krekó Béla valamivel korábban (1964 előtt több évvel is), és korszerűbb módszert használva, felismerte azt, hogy a fent leírt transzformációs lépésben fontos szerepet játszó  $\mathbf{t}_1^T$  vektort és  $F_1$  mátrixot az  $A$  mátrixon  $a_{11}$  generáló elem választással végrehajtott elemi bázistranszformációval könnyedén megkapjuk. Krekó Béla módszerét 1964-ban megjelent könyve alapján ismertetjük, Krekó Béla(1964) 210-217 oldalak.

### A Krekó-féle módszer

**1. eset.** Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor az  $A$  szimmetrikus mátrixnak van 0-tól különböző diagonális eleme. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az első diagonális elem éppen ilyen. (Az  $\mathbf{x}$  komponenseinek átindexezésével ez az adott esetben mindig biztosítható.) A feltevésünk értelmében tehát

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_1 & C_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ahol  $p_1 \neq 0$  és  $C_1 = C_1^T$ .

Az  $A$  oszlopvektorai – mint tudjuk – felfoghatók, mint az egységvektorok által meghatározott bázisban megadott vektorok. Vonjuk bázisba az  $A$  első oszlopvektorát, mégpedig az  $\mathbf{e}_1$  egységvektor helyébe. Az  $A$  oszlopvektorainak az új bázisbeli koordinátáit a  $p_1 = a_{11}$  generáló elem szerinti elemi bázistranszformáció szolgáltatja. Így a következő

	$x_1$	$\mathbf{x}_2^T$	$\mathbf{x}_2^T$
$x_1$	$p_1$	$\mathbf{b}_1^T$	$\mathbf{f}_1^T$
	$\mathbf{b}_1$	$C_1$	$F_1$

táblázathoz jutunk, ahol

$$\mathbf{f}_1^T = \frac{1}{p_1} \mathbf{b}_1^T \quad \text{és} \quad F_1 = C_1 - \frac{1}{p_1} \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T.$$

A műveleti szabályok közvetlen alkalmazása révén belátható, hogy

$$\begin{bmatrix} p_1 & \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_1 & C_1 \end{bmatrix} - p_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{f}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & F_1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A_1 = A, \quad \mathbf{g}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{f}_1^T \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & F_1 \end{bmatrix}.$$

Ezekkel (2) a következőképpen írható:

$$A = A_1 = p_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_1^T + A_2. \quad (3)$$

Ha az  $F_2$  első diagonális eleme  $p_2 \neq 0$ , akkor az egész eljárás megismétlésével az

$$A_2 = p_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T + A_3$$

összefüggéshez jutunk, ahol

$$\mathbf{g}_2^T = \begin{bmatrix} 0, & 1, & \mathbf{f}_2^T \end{bmatrix},$$

és az  $A_3$  olyan szimmetrikus mátrix, melynek első két sora és első két oszlopa csupa 0-ból áll.

Ha az egymás után következő  $A_3, A_4, \dots$  mátrixokban mindig találunk 0-tól különböző diagonális elemet, akkor a további

$$\begin{aligned} A_3 &= p_3 \mathbf{g}_3 \mathbf{g}_3^T + A_4, \\ A_4 &= p_4 \mathbf{g}_4 \mathbf{g}_4^T + A_5, \\ &\vdots \\ A_r &= p_r \mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T + 0_{n-r}, \end{aligned}$$

összefüggésekhez jutunk, ahol  $r$  az  $A$  mátrix rangja. Az egymást követő  $A_3, A_4, \dots$  mátrixokban a csupa zérusból álló sorok és oszlopok száma lépésről lépésre nő, éppen úgy, mint a  $\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \dots$  vektorokban a 0-elemek száma.  $r$  számú elemi bázistranszformációval  $A$ -nak a következő előállítását kapjuk:

$$A = p_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_1^T + p_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T + \dots + p_r \mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T. \quad (4)$$

Legyen

$$G^T = [\mathbf{g}_1 \ \dots \ \mathbf{g}_r \ \mathbf{e}_{r+1} \ \dots \ \mathbf{e}_n]$$

és legyen  $P$  diagonális mátrix  $\langle p_1 \ \dots \ p_r \ 0 \ \dots \ 0 \rangle$  diagonális elemekkel. Ezekkel a jelölésekkel (4) egyenértékű az

$$A = G^T P G \quad (5)$$

összefüggéssel, aminek egyszerű következménye, hogy

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{x}. \quad (6)$$

A  $\mathbf{G}$  megkonstruálásának módjából következik, hogy  $\mathbf{G}$  nonszinguláris, következésképpen a

$$\mathbf{G} \mathbf{x} = \mathbf{z}$$

összefüggés koordináta-transzformáció  $\mathbb{R}^n$ -ben. Ez a koordináta-transzformáció, tekintettel (6)-ra, diagonális formára transzformálja  $Q(\mathbf{x})$ -et. A  $\mathbf{G} \mathbf{x} = \mathbf{z}$  helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$Q(\mathbf{x}) = \hat{Q}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} = p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + \dots + p_r z_r^2, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Ebből az előállításból nyilvánvaló, hogy  $Q(\mathbf{x})$  akkor és csak akkor pozitív (negatív) definit, ha  $r = n$  és valamennyi generáló elem pozitív (negatív). Ha  $r < n$  és valamennyi generáló elem pozitív (negatív), akkor  $Q(\mathbf{x})$  pozitív (negatív) szemidefinit. Az is nyilvánvaló, hogy ha a generáló elemek között különböző előjelű elemek is vannak, akkor  $Q(\mathbf{x})$  indefinit.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy elemi bázistranszformáció segítségével minden kvadratikuss formát diagonál formára lehet transzformálni.

Az elmondottakat Kerekó Béla a következő numerikus példával illusztrálta.

**1. példa.** Legyen a  $Q(\mathbf{x})$  kvadratikuss forma mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -13 \\ 1 & 1 & -13 & 1 \end{bmatrix}.$$

A diagonalizációhoz szükséges számítások a következők:

0	<b>a1</b>	<b>a2</b>	<b>a3</b>	<b>a4</b>	1	<b>a1</b>	<b>a2</b>	<b>a3</b>	<b>a4</b>
<b>e1</b>	1	2	0	1	<b>a1</b>	1	2	0	1
<b>e2</b>	2	3	4	1	<b>e2</b>	0	-1	4	-1
<b>e3</b>	0	4	1	-13	<b>e3</b>	0	4	1	-13
<b>e4</b>	1	1	-13	1	<b>e4</b>	0	-1	-13	0

2	<b>a1</b>	<b>a2</b>	<b>a3</b>	<b>a4</b>	3	<b>a1</b>	<b>a2</b>	<b>a3</b>	<b>a4</b>	4	<b>a1</b>	<b>a2</b>	<b>a3</b>	<b>a4</b>
<b>a2</b>	0	1	-4	1	<b>a3</b>	0	0	1	-1	<b>a4</b>	0	0	0	1
<b>e3</b>	0	0	17	-17	<b>e4</b>	0	0	0	-16					
<b>e4</b>	0	0	-17	1										

A felső sorokban az aktuális  $\mathbf{g}_i^T$  vektorok találhatóak, ennélfogva

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$P = \text{diag}\langle 1, -1, 17, -16 \rangle.$$

Ha tehát alkalmazzuk a  $G\mathbf{x} = \mathbf{z}$  transzformációt, a következő négyzetösszegre redukált alakhoz jutunk:

$$Q(\mathbf{x}) = \hat{Q}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T P \mathbf{z} = z_1^2 - z_2^2 + 17z_3^2 - 16z_4^2.$$

Ebből már látható, hogy a vizsgált kvadratikus forma indefinit.

**Megjegyzés.** A  $G^{-1}$  mátrix oszlopvektor rendszere *A-ortogonális* bázis  $\mathbb{R}^4$ -ben, ahol

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2. eset.** Ha az  $A$  mátrixnak minden diagonális eleme 0, akkor végrehajtunk egy olyan bázis-transzformációt, amelyben az  $A$  mátrix transzformáltjának már van 0-tól különböző diagonális eleme. Ez az eljárás azon a tényen nyugszik, hogy az

$$S = \begin{bmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol  $s \neq 0$ , az

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

átmenet mátrixszal olyan

$$\hat{S} = R^T S R = \begin{bmatrix} 2s & 0 \\ 0 & -2s \end{bmatrix}$$

alakra hozhatjuk, amelynek diagonális elemei már 0-tól különbözőek. Ezen az alapon belátható, hogy minden, a fenti tulajdonságú  $A$  mátrixhoz található olyan  $T$  mátrix, hogy az

$$\hat{A} = T^T A T \tag{7}$$

mátrixnak már van 0-tól különböző diagonális eleme. Ha ezután az  $\hat{A}$  mátrixot már fel tudjuk bontani az

$$\hat{A} = \hat{G}^T P \hat{G}$$

szorzatra, ahol  $P$  diagonális mátrix, akkor a  $\hat{A} = T^T A T = \hat{G}^T P \hat{G}$  egyenlőségből

$$A = (T^{-1})^T \hat{G}^T P \hat{G} T^{-1} = G^T P G \quad (7)$$

összefüggéshez jutunk, ahol  $G = \hat{G} T^{-1}$ . Ez azt jelenti, hogy a  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  kvadratikus formát a  $\mathbf{z} = G \mathbf{x}$  koordináta transzformáció diagonális formára transzformálja.

Az persze előfordulhat, hogy a (7) típusú transzformációt többször is alkalmazni kell.

Az elmondottakat Krekó Béla a következő példával illusztrálta.

**2. Példa.** Legyenek

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\hat{A} = T^T A T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazva az előző részben ismertetett eljárást, a következő számításokhoz jutunk:

0	a1	a2	a3
e1	2	0	6
e2	0	-2	-2
e3	6	-2	0

1	a1	a2	a3
a1	1	0	3
e2	0	-2	-2
e3	0	-2	-18

2	a1	a2	a3
a2	0	1	1
e3	0	0	-16

3	a1	a2	a3
a3	0	0	1

Ezekből azonnal leolvasható, hogy

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix},$$

és kiszámítható, hogy

$$B = \hat{G}T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 3 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy a  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  kvadratikus formát a  $\mathbf{z} = B \mathbf{x}$  koordináta transzformáció a

$$Q(\mathbf{x}) = \hat{Q}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T D \mathbf{z} = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 16z_3^2.$$

diagonális formára transzformálja.

**Megjegyzés.** A  $B^{-1}$  mátrix oszlopvektor rendszere  $A$ -ortogonális bázis  $\mathbb{R}^3$ -ban, ahol

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Krekó Béla módszerének ismertetése kapcsán mindenképpen meg kell említeni Sylvester tehetetlenségi tételét, melyet Ő maga is tárgyal könyveiben.

**Sylvester tehetetlenségi tétele – szimmetrikus mátrix inerciája.** Hogy az  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  kvadratikus forma különböző négyzetösszegre transzformált alakjaiban mi a közös, azt J.J.Sylvester (1852) mutatta meg.

Jelöljék  $\nu(D)$ ,  $\zeta(D)$  és  $\pi(D)$  az

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{z}^T D \mathbf{z} = \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_2^2 + \dots + \delta_n z_n^2 \quad (D)$$

négyzetösszeg együtthatói közül a negatív, a zérus és a pozitív együtthatók számát. Az

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{u}^T L \mathbf{u} = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_n u_n^2, \quad (L)$$

négyzetösszeg esetében ezeket a mennyiségeket jelöljék  $\nu(L)$ ,  $\zeta(L)$  és  $\pi(L)$ . A Sylvester-féle tehetetlenségi tétel szerint

$$\nu(D) = \nu(L), \quad \zeta(D) = \zeta(L) \quad \text{és} \quad \pi(D) = \pi(L).$$

Mivel ezek az egybeeső mennyiségek az  $A$  mátrixot jellemzik, ezért használhatjuk a

$$\nu(A) = \nu(L), \quad \zeta(A) = \zeta(L) \quad \text{és} \quad \pi(A) = \pi(L).$$

jelöléseket. Ezek alkotják a következő definíció alapját.

**Szimmetrikus mátrix inerciája.** Az  $n$ -ed rendű szimmetrikus  $A$  mátrix inerciája alatt azt az

$$\text{Iner}(A) = (\nu(A), \zeta(A), \pi(A))$$

rendezett számhármast értjük, ahol  $\nu(A)$ , illetve  $\pi(A)$  az  $A$  negatív, illetve pozitív sajátértékeinek számát jelenti (figyelembe véve a multiplicitásokat is).  $\zeta(A)$  a 0 sajátérték multiplicitása.

Szimmetrikus mátrixok sajátértékeire vonatkozó ismert tételből következik, hogy

$$\nu(A) + \zeta(A) + \pi(A) = n.$$

A Kerekó-féle módszer megad egy transzformációt, mellyel egy kvadratikus formát négyzetösszegre lehet redukálni. Ebből az alakból aztán egyszerűen kiolvasható az inercia is.

Számos feladatnál, és ide tartoznak az optimalitás másodrendű feltételei is, csak az inerciára van szükségünk, az azt feltáró transzformációra azonban nincs.

**Egy későbbi eredmény: a Haynsworth-Cottle-féle módszer.** E.V.Haynsworth (1968) megadott egy mátrixalgebrai összefüggést, amely arra vonatkozott, hogyan lehet szimmetrikus mátrix inerciáját kisebb méretű szimmetrikus mátrixok inerciája segítségével kiszámítani.

**A Haynsworth-féle inercia formula.** Tekintsük az  $n$ -ed rendű szimmetrikus  $A$  mátrixot a következő módon partícionálva

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

ahol  $A_{11}$  nonszinguláris és szimmetrikus. A következő állítások akkor is érvényben maradnak, ha az  $A_{11}$  blokk nem „bal felső” helyzetű. A lényeges kikötés az, hogy *principális* legyen, mely azt jelenti, hogy a szóban forgó blokk sorindexeinek halmaza megegyezzen oszlopindexeinek halmazával. Az

$$(A_{11} | A) := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \tag{S}$$

mátrixot az  $A_{11}$  mátrix  $A$ -ra vonatkozó Schur-komplementének nevezzük, amely  $A$ ,  $A_{11}$  és  $A_{22}$  szimmetriája folytán maga is szimmetrikus. Igaz a következő állítás:

$$\text{Iner}(A) = \text{Iner}(A_{11}) + \text{Iner}(A_{11} | A), \tag{H}$$

ahol az összeadás komponensenként értendő.

R.W. Cottle (1974), egy 1974-ben publikált cikkében a (H) formula iteratív alkalmazását javasolta szimmetrikus mátrix inerciájának kiszámítására a következő módon.

**1. eset.** Az  $A$  főátlójában van 0-tól különböző elem. Az általánosságot nem sértve feltehetjük, hogy  $a_{11} \neq 0$ . Legyen tehát  $A_{11} = [a_{11}]$ . Az  $A$  mátrixon hajtsunk végre egy elemei



bázistransz-formációt, ahol  $a_{11} \neq 0$  a generáló elem. Ha a transzformált táblából elhagyjuk az első sort és első oszlopot, akkor a megmaradó „komplement” rész pontosan az  $S = (A_{11} | A)$  Schur-komplement. Mivel az  $A_{11}$  mátrixnak egyetlen sajátértéke  $\lambda_1 = a_{11}$ , ezért

$$\text{Iner}(A_{11}) = \begin{cases} (1, 0, 0), & \text{ha } a_{11} < 0, \\ (0, 0, 1), & \text{ha } a_{11} > 0. \end{cases}$$

Az eljárást az S Schur-komplementtel folytatva, meghatározhatjuk az A mátrix inerciáját, melyet az 1. Példa A mátrixán mutatjuk be.

0	a1	a2	a3	a4
e1	1	2	0	1
e2	2	3	4	1
e3	0	4	1	-13
e4	1	1	-13	1

1	a1	a2	a3	a4
a1	1	2	0	1
e2	0	-1	4	-1
e3	0	4	1	-13
e4	0	-1	-13	0

2	a1	a2	a3	a4
a2	0	1	-4	1
e3	0	0	17	-17
e4	0	0	-17	1

3	a1	a2	a3	a4
a3	0	0	1	-1
e4	0	0	0	-16

A (H) formula ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\text{Iner}(A) = \text{Iner}([1]) + \text{Iner}([-1]) + \text{Iner}([17]) + \text{Iner}([-16]) = (2, 0, 2).$$

Láthatjuk, hogy abban az esetben, ha minden lépésben főátlóból tudunk generáló elemet választani, az eljárás numerikus része semmiben nem különbözik a Krekó-féle eljárástól.

Abban az esetben azonban, ha A-nak minden diagonális eleme 0, akkor a Cottle-féle eljárás kevesebb vesződséggel jár, mint a Krekó-féle. Ebben az esetben főátlón kívüli generáló elemet kell választanunk. Legyen ez  $a_{ij} \neq 0$ . Az ehhez tartozó egyelemű blokk azonban nem principális blokk A-ban és ennek következtében a hozzá tartozó Schur-komplement se lesz általában szimmetrikus. Végrehajtunk egy elemi bázistranszformációs lépést az  $a_{ij} \neq 0$  generáló elemmel. Mivel A-ban minden főátlóbeli elem 0, ezért az új táblában a j-edik sor, i-edik oszlopában álló elem változatlan marad és megegyezik az  $a_{ji} = a_{ij} \neq 0$  elemmel. A következő transzformáció generáló eleme  $a_{ji}$  kell, hogy legyen. Ha a transzformált táblából töröljük az i-edik és j-edik sorokat és oszlopokat, akkor pontosan az

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ a_{ji} & 0 \end{bmatrix}$$

blokkhoz tartozó  $S = (A_{11} | A)$  Schur-komplementst kapjuk. A (H) formula numerikus alkalmazhatóságát segíti elő az a tény, hogy tetszőleges  $p \neq 0$  esetén

$$\text{Iner} \begin{bmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{bmatrix} = (1, 0, 1).$$

Egyszerűen kiszámítható ugyanis, hogy a  $\begin{bmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{bmatrix}$  mátrixnak a sajátértékei  $\lambda_1 = p$  és  $\lambda_2 = -p$ .

Illusztrációként nézzük a 2. Példában szereplő mátrixot.

0	a1	a2	a3	1	a1	a2	a3	1	a1	a2	a3
e1	0	1	2	a2	0	1	2	a2	0	1	2
e2	1	0	4	e2	1	0	4	a1	1	0	4
e3	2	4	0	e3	2	0	-8	e3	0	0	-16

Ebből (H) alapján megállapítható, hogy

$$\text{Iner}(A) = \text{Iner} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \text{Iner}([-16]) = (1, 0, 1) + (1, 0, 0) = (2, 0, 1).$$

Szimmetrikus mátrix inerciájának meghatározásával nemcsak az A) feladat másodrendű feltételének ellenőrzése valósítható meg, hanem a B) illetve C) feladatoké is. Ezt a lehetőséget a következő eredmény biztosítja, Chabrilac, Y. and Crouzeix, J.-P. (1984).

**A Chabrilac-Crouzeix féle inercia teszt.** Az  $x^T L''(\mathbf{a})x$  kvadratikus forma

(i) akkor és csak akkor pozitív definit a  $Gx = \mathbf{0}$  altéren, ha

$$\text{Iner} \left( \begin{bmatrix} L''(\mathbf{a}) & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \right) = (m, 0, n).$$

(ii) akkor és csak akkor negatív definit a  $Gx = \mathbf{0}$  altéren, ha

$$\text{Iner} \left( \begin{bmatrix} L''(\mathbf{a}) & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \right) = (n, 0, m).$$

## A Krekó-féle determináns számítás

A mátrixalgebra számos problémáját determinánsok segítségével fogalmazza meg. A klasszikus értelmezés szerint egy determináns kiszámítása (főleg, ha az nagy méretű) meglehetősen számításigényes művelet. Krekó Béla megmutatja, hogy az elemi bázistranszformáció segítségével itt is lényegesen egyszerűsíteni lehet a számításokat.

Krekó Béla Matrixszámítás (1964) könyvében egy új determináns fogalmat vezet be. Azt, hogy ez ekvivalens a klasszikus determináns fogalommal csak évekkel később Lineáris Algebra (1976) könyvében (14.1. alfejezet) mutatja meg.

**Krekó Béla determináns fogalma** (Matrixszámítás, 59-60. old.) Legyen  $A$   $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$  oszlopvektor rendszerrel adott  $n$ -ed rendű nonszinguláris kvadratikus mátrix.  $n$  elemi bázistranszformációt végrehajtva a mátrix determinánsát a generáló elemek előjeles szorzataként értelmezzük. Az előjel meghatározása a következőképpen történik. Az  $A$  oszlopvektorainak bázisba vonása eredményezze az  $\{\mathbf{a}_{i(1)}, \mathbf{a}_{i(2)}, \dots, \mathbf{a}_{i(n)}\}$  bázist. Ha ezt a vektorrendszert páros számú elemcserékkel tudjuk az eredeti  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  sorrendbe visszaállítani, akkor az előjel  $(+1)$ . Ha az eredeti sorrend visszaállításához páratlan számú elemcsere szükséges, akkor az előjel  $(-1)$ . (Ha mindig a főátlóból választunk generáló elemet, akkor nincs szükség előjel korrekcióra.). Szinguláris mátrix determinánsa 0.

Krekó Béla Lineáris algebra könyvében egy egész fejezetet szentel a klasszikus és a „modern” definíciók egyenértékűségének bizonyítására. Ennek során Ő is eljut az egyenértékűséget igazoló Schur-lemmához.

**A Schur-lemma.** Legyen  $A$   $n$ -edrendű kvadratikus mátrix és legyen  $A_{11}$   $k \times k$ -as nonszinguláris blokk  $A$ -ban Az

$$(A_{11} | A) := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \quad (\text{S})$$

mátrixra, mely a mátrixalgebra számos problémájában előfordul, Haynsworth vezette be a *Schur komplement* elnevezést. mégpedig azon az alapon, hogy I. Schur egy 1917-es cikkében bizonyította és alkalmazta a

$$\det(A) = \text{par}(A_{11}) \det(A_{11}) \det(A_{11} | A) \quad (\text{SF})$$

formulát, ahol,  $A_{11}$  paritását a következő módon értelmezzük. Jelöljék  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , illetve  $j_1, j_2, \dots, j_k$  az  $A$  mátrix azon sorainak illetve oszlopainak indexeit, amelyek az  $A_{11}$  blokkot meghatározzák. Legyen

$$\text{par}(A_{11}) = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k}.$$

Az (SF) formulát *Schur-formula* néven hivatkozzák a mátrixalgebrában.

Mivel  $\text{par}([a_{ij}]) \det([a_{ij}]) = (-1)^{i+j} a_{ij}$ , ezért a *Schur-formula* megalapozza a determináns-számítás elemi bázistranszformációra épülő iteratív numerikus módszerét.

### **Az elemi bázistranszformáció további alkalmazásai Krekó Béla munkáiban**

**A-ortogonális bázis előállítása** (Matrixszámítás, 210-217. oldalak) Legyen A n-ed rendű szimmetrikus mátrix. Ekkor megadható olyan F mátrix, mellyel  $F^T A F$  diagonál mátrix. Ekkor az F mátrix oszlopai A-ortogonálisak (A konjugáltak).

**Megjegyzés:** Ha az  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \gamma$  kvadratikus függvénynek keressük a szélsőértékeit, akkor az A-ortogonális keresési irányokra épülő módszerek (konjugált gradiens módszerek) elég magasan jegyzett módszerek. (Hestenes-Stiefel, Fletcher-Reeves, Davidon-Fletcher-Powell, stb.)

**Bázisok ortogonalizálása** (Krekó: Matrixszámítás 220. old.) Legyen A teljes oszloprangú  $m \times n$ -es mátrix. Ekkor megadható olyan F n-ed rendű mátrix, hogy a  $B = A F$  mátrix ortogonális, abban az értelemben, hogy oszlopvektorai páronként merőlegesek és normáltak.

**Pozitív definit szimmetrikus mátrixok Cholesky-felbontása** (Matrixszámítás, 210-217. oldalak) Legyen A n-ed rendű pozitív definit mátrix. Ekkor A előállítható  $A = \hat{L} \hat{L}^T$  alakban, ahol  $\hat{L}$  alsó háromszögmátrix

**Trianguláris faktorizáció** (Lineáris algebra 303.old) Legyen A n-ed rendű kvadratikus mátrix. Ekkor A előállítható az  $A = L D U$  alakban, ahol D diagonál mátrix, L és U pedig olyan alsó-, illetve felső háromszög mátrixok, melyek minden diagonális eleme 1.

Ez a megemlékezés csak Krekó Béla szakmai életrajzának egy részéről (noha szerintünk a legfontosabbról) szólt. Köszönet jár neki kollégáitól, tanítványaitól és az egész közgazdász közösségtől az egész életműért és azért a lehetőségért, hogy oly sokan ismerhettük, tanulhattunk tőle, és élvezhettük egy kiváló, nagyműveltségű, sokoldalú ember barátságát. Példaképpént tiszteljük és állítjuk őt az ifjúság elé.

**Köszönetnyilvánítás.** Köszönettel tartozunk Prékopa Andrásnak, aki az események aktív szereplőjeként sok hasznos információval segített reális képet adni Krekó Béla munkásságáról.

## Krekó Béla válogatott művei

- Krekó, B. és Bacskay, Z. (1957) Bevezetés a Lineáris programozásba. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Krekó, B. (1958) A szállítási problémáról. A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Évkönyve, 251-271.
- Krekó, B. (1959) Lineáris egyenletrendszerek megoldása szimplex módszerrel. MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei, No. 3-4, 265-?
- Krekó, B. (1959) A gazdasági tevékenységek elemzésének néhány modern matematikai eszközéről. Közlekedés és Közlekedéscélpítéstudományi Intézet, Budapest, 183-197.
- Krekó, B. (1961) Einige Fragen der linearen Programmierung. Wiss. Z. Tech. Univ. Dresden 10: 1073-1075.
- Krekó, B. (1962) Lineáris programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Krekó, B. (1962) Ein neues Modell in der Verkehrsprogrammierung. Wiss. Z. Univ. Rostock 11:447-451.
- Bacskay, Z. és Krekó B. (1963) Matematikai alapismeretek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
- Krekó, B. (1963) Mátrixszámítás. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest
- Krekó, B. (1963) Problèmes de programmation discrète dans le planning du trafic. Revue Scientifique de l'Université Technique du Bâtiment et des Transports, Budapest, No.2. 257-265.
- Krekó, B. (1964) Lehrbuch der linearen Optimierung. Verlag der Wissenschaften, Berlin
- Krekó, B. (1965) Über einige neue Untersuchungen der mathematischen Optimierung. Colloquium on applications of mathematics to economics, Budapest 1963
- Krekó, B. (1965) Über das stetige Optimierungsproblem. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie, Akademie Verlag, Berlin 285-295.
- Krekó, B. (1966) Lineáris programozás, (átdolgozott és bővített kiadás). Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- Krekó, B. (1966) Linearno programiranja. Savrmena administracija, Beograd
- Krekó, B. (1967) A szimplex módszer egy változata nagyvolumenű feladatok megoldására. Döntési modellek, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 7-36.
- Krekó, B. (1968) Linear programming. Pitman, London
- Krekó, B. (1968) American Elsevier Publishing Company, Boston

Krekó, B. (1974) Optimierung: nichtlineare Modelle. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Krekó, B. (1975) Tézisek. (Tudományos tevékenység tézisszerű összefoglalója) MTA, p. 47.

Krekó, B. (1976) Lineáris algebra. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

Krekó, B. (1994) Biztosítási matematika – Életbiztosítás I., Aula, Budapest

### **Egyéb hivatkozások**

Beightler, C. S. and Wilde, D. J. (1966) Diagonalization of Quadratic Forms by Gauss Elimination. Management Science, **12** 371-379

Chabrillac, Y. and Crouzeix, J.-P. (1984) Definiteness and semidefiniteness of quadratic forms revisited. Linear Algebra Appl. **63** 283-292

Charnes, A.- Cooper, W.W. and Henderson, A. (1953) An introduction to linear programming. John Wiley & Sons, Inc. New York

Cottle R.W. (1974) Manifestations of the Schur complement. Linear Algebra Appl., **8** 189-211

Hadley, G. (1961) Linear algebra. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.

Hadley, G. (1963) Linear Programming. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.

Hadley, G. (1964) Nonlinear and dynamic programming. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.

Haynsworth, E.V. (1968) Determination of the inertia of a partitioned hermitian matrix. Linear Algebra Appl., **1** 73-81

Prékopa, A. (1968) Lineáris Programozás. Bolyai Társulat, 1969

Sylvester, J. J. (1852) A demonstration of a theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. Philosophical Magazine, **4** 138-142

## THE ROLE OF BÉLA KREKÓ IN THE REFORM OF ECONOMICS AND BUSINESS EDUCATION

IN MEMORIAM BÉLA KREKÓ (1915-1994)

Mathematics in the curriculum of business and economics education at the Karl Marx University of Economics had been confined to some college algebra and combinatorics before Béla Krekó launched his campaign to introduce basic operations research as part of a modernization process. He was also the founding father of a new specialization, a group of students majoring in mathematics and operations research. He fiercely fought with wit and determination to overcome the resistance of an old guard of professors opposing the plan. Béla Krekó emerged from this battle with flying colors. As a result, in the early sixties operations research became an integral part of economics education and it has been there ever since. He did a tremendous job in writing books catering to the special needs of economists and business people. These books were on par of those used at leading universities in the western world. The books were written in the unmistakable style of a witty, insightful author. The exposition was centered around the pivoting techniques (Gauss-Seidel elimination) making proofs constructive, ready to be converted to algorithms. A sample of problems is given where by the pivoting approach standard problems in linear algebra are solved. The exposition is based on parts taken from Krekó's books.