

Vékás Péter

**AZ ÉLETTARTAM-KOCKÁZAT
MODELLEZÉSE**

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

Témavezetők:

Dr. Kovács Erzsébet CSc

Dr. Deák István DSc

©Vékás Péter



BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

ÁLTALÁNOS ÉS KVANTITATÍV KÖZGAZDASÁGTAN DOKTORI ISKOLA

AZ ÉLETTARTAM-KOCKÁZAT MODELLEZÉSE

Doktori értekezés (tervezet)

Témavezetők:

Dr. Kovács Erzsébet CSc

Dr. Deák István DSc

Vékás Péter

Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke	9
Táblázatok jegyzéke	12
Köszönetnyilvánítás	14
1. Bevezetés	16
1.1. Az élettartam-kockázat problémája	16
1.2. Élettartam-kockázat a Szolvencia II keretrendszerben . .	18
1.3. Az értekezés felépítése	21
1.4. Kutatási kérdések és fő eredmények	23
I. A halandósági modellezés szakirodalmi háttere és keresztmetszeti módszertana	27
2. Szakirodalmi áttekintés	29
2.1. Nemzetközi szakirodalom	30
2.1.1. A halandósági modellezés kialakulása	30
2.1.2. A Lee–Carter modell	31
2.1.3. A Lee–Carter modell bírálata és kiterjesztései . .	33
2.1.4. Újabb halandóság-előrejelző módszerek	37
2.1.5. Többdimenziós halandóság-előrejelzés	39

2.1.6.	Az élettartam-kockázat pénzügyi hatásai	42
2.2.	Hazai kutatások és alkalmazások	43
3.	A halandósági modellezés módszertani alapjai	47
3.1.	A halandóság statisztikai mérőszámai	47
3.2.	A halandóság matematikai modellezése	51
3.2.1.	A folytonos modell és a halálozási intenzitás	53
3.2.2.	A diszkrét modell és a halandósági tábla	55
3.2.3.	A folytonos és a diszkrét modell kapcsolata	58
3.3.	A halandósági tábla becslése	61
3.3.1.	Becslés diszkrét modellkeretben	61
3.3.2.	Becslés folytonos modellkeretben	62
3.3.3.	A születésnapok és a naptári év kezdete közötti eltérés korrekciója	63
3.3.4.	Kiegyenlítő eljárások	64
3.3.5.	Az illeszkedés vizsgálata	66
II.	A Lee–Carter modell és alkalmazása	69
4.	A Lee–Carter modell elmélete	71
4.1.	A modell felírása	71
4.2.	Interpretáció	73
4.3.	A paraméterek becslése	75
4.3.1.	A modell log-likelihood függvénye	75
4.3.2.	Az eltérés-négyzetösszeg redukált alakja	76
4.3.3.	A szingulárisérték-felbontás (SVD) és az Eckart–Young–Mirsky approximációs tétel . . .	78
4.3.4.	Az optimális megoldás	80

4.4. A mortalitási index kiigazítása	83
4.5. A mortalitási index időbeli alakulása	84
4.5.1. A modell felírása	85
4.5.2. A paraméterek becslése	85
4.5.3. A trend szignifikanciája	86
4.6. Előrejelzés	87
5. Esettanulmány: A magyar nyugdíjrendszer fenntartha-	
 tóságáról	89
5.1. Demográfiai előrejelzés	90
5.1.1. A halandóság modellezése	90
5.1.2. A termékenység modellezése	92
5.1.3. Lakosságszám és időskori függőségi ráta	95
5.2. A bevételek és kiadások modellezése	96
5.3. Gazdasági feltételezések	99
5.4. A modell validációja	101
5.5. Eredmények	102
5.6. Mikroszimulációs modellek	107
III. Újabb halandóság-előrejelző módszerek és	
alkalmazásuk	113
6. Az általánosított korcsoport-időszak-kohorsz (GAPC)	
 modellcsalád	115
6.1. A modell felírása	115
6.2. Interpretáció	117
6.3. A GAPC modellcsalád nevezetes tagjai	118
6.3.1. A Poisson Lee–Carter (LC) modell	118

6.3.2.	A Renshaw–Haberman (RH) modell	120
6.3.3.	A korcsoport–időszak–kohorsz (APC) modell . . .	121
6.3.4.	A Cairns–Blake–Dowd (CBD) modell	122
6.3.5.	A Plat modell	123
6.3.6.	Áttekintés és csoportosítás	124
6.4.	A paraméterek becslése	127
6.5.	Modellválasztás és illeszkedés	129
6.5.1.	Egymásba ágyazott modellek közötti választás . .	129
6.5.2.	Egyedi, teljes és skálázott deviancia	130
6.5.3.	Információs kritériumok	132
6.6.	A mortalitási indexek és a kohorszhatás időbeli alakulása	133
6.6.1.	Modellspecifikáció	133
6.6.2.	A paraméterek becslése	135
6.7.	Előrejelzés	136
6.7.1.	Pontbecslés	137
6.7.2.	A bizonytalanság modellezése	138
7.	Esettanulmány: Élettartam-kockázat a nyugdíjcélú élet- járadékok díjszámításában	140
7.1.	A kérdés aktualitása	141
7.2.	Adatok és módszerek	143
7.3.	Az életjáradékok díjszámítása statikus és dinamikus ha- landósági ráták alapján	148
7.4.	Eredmények	149
8.	Összefoglalás	153
	Irodalomjegyzék	159

Ábrák jegyzéke

1.1. Nemenkénti születéskor várható élettartamok Magyarországon (1900–2014, forrás: saját szerkesztés a KSH adatai alapján)	17
1.2. A szavatoló tőke összetevői a Szolvencia II keretrendszerben (forrás: saját szerkesztés)	19
3.1. Központi halandósági ráta (‰) a világ országaiban 2014-ben (forrás: www.indexmundi.com)	50
3.2. A KSH 2013. évi férfi néphalandósági táblájának részlete (forrás: KSH NKI)	56
3.3. Születéskor várható élettartam években a világ országaiban 2014-ben (forrás: www.indexmundi.com)	58
3.4. Férfi koréves halálozási valószínűségek, kezdeti halandósági ráták és simított koréves halálozási valószínűségek (2013-ban, 0–84 évesekre, 10.000 főre, logaritmikus skálán, forrás: saját szerkesztés a KSH NKI adatai alapján)	65
5.1. Becsült és előrejelzett k_t mortalitási indexek (1980–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	91
5.2. Múltbeli és előrejelzett születéskor várható élettartamok (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	92

5.3. A teljes termékenységi ráta múltbeli és előrejelzett értékei (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	93
5.4. A korcsoportos termékenységi ráta múltbeli és előrejelzett értékei (2000–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	94
5.5. A népességszám múltbeli és előrejelzett értékei nemeként (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	95
5.6. Az időskori függőségi ráta múltbeli és előrejelzett értékei (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) .	96
5.7. A nyugdíjmodell felépítése (forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	97
5.8. Az alkalmazott makrogazdasági feltételezések (forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	100
5.9. A modell eredményeinek összehasonlítása az ONYF adataival (forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	102
5.10. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása az alapforgatókönyv esetén (2014. évi áron, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	103
5.11. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása a makrogazdasági paraméterekre vonatkozó alternatív forgatókönyvek esetén (2014. évi áron, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	104

5.12. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása a nyugdíjkorhatár várható élettartamhoz igazított folyamatos emelése esetén (2014. évi áron, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])	105
6.1. A GAPC modelles család néhány nevezetes tagja és a közöttük fennálló hierarchia (forrás: saját szerkesztés) . .	126
7.1. GAPC modellek illeszkedése a tesztidőszakon és a modellek effektív paraméterek száma (2005–2014, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés)	144
7.2. GAPC modellek illeszkedésének összehasonlítása a tesztidőszakon (2004–2013, forrás: saját szerkesztés)	146
7.3. GAPC modellek illeszkedésének összehasonlítása a tesztidőszakon (2004–2013, forrás: saját szerkesztés)	147

Táblázatok jegyzéke

3.1. A legelterjedtebb interpolációs eljárások (forrás: saját szerkesztés Bowers és szerzőtársai [1997] alapján)	59
3.2. Néhány nevezetes halandósági törvény (forrás: saját szerkesztés)	66
6.1. Néhány nevezetes GAPC modell jellemzői (forrás: saját szerkesztés)	125
7.1. Összehasonlítás: a 65 éves korban várható hátralévő élet-tartam és az életjáradék egyszeri nettó díja (forrás: saját számítás és Májer–Kovács [2011])	151

Édesapám,

Dr. Vékás Gusztáv

emlékére,

aki munkám elkészültét

már sajnos nem érhetette meg

Köszönetnyilvánítás

Szeretném röviden kifejezni a hálámat néhány olyan embernek, akik különböző módokon hozzájárultak pályakezdésemhez, kutatásaimhoz és doktori értekezés-tervezetem elkészültéhez.

Köszönettel tartozom Dr. Kovács Erzsébet „tanárnőnek” az immár több mint hat éve végzett közös munkánk során nyújtott folyamatos, áldozatos és számtalan területre kiterjedő szakmai támogatásért, Dr. Tasnádi Attilának az MTA–BCE „Lendület” Stratégiai Interakciók Kutatócsoportban való részvételi lehetőségért, amely óriási segítséget jelentett a doktori kutatásaimban való elmélyüléshez, Bajkó Attila, Maknics Anikó és Tóth Krisztián ifjú aktuáriusoknak a kiemelkedő színvonalú, lelkes modellezési és kutatómunkáért, Rézmovits Ádámnak a MIDAS-HU nyugdíj-mikroszimulációs modell elkészítésében való részvételi lehetőségért és az ennek során szerzett felbecsülhetetlen szakmai tapasztalatokért, Dr. Maarten H. van der Vlerknek és Dr. Wim K. Klein Haneveldnek a tudományos kutatás rejtelseibe való bevezetésért és a folyamatos szakmai támogatásért, Dr. Deák Istvánnak rendkívül széles tudása megosztásáért és a kutatói pályával kapcsolatos iránymutatásért, Dr. Banyár Józsefnek a közös kutatásban való részvételi lehetőségért, valamint Dr. Demetrovics Jánosnak nemes segítségéért és a kutatásaimmal kapcsolatos hasznos észrevételeiért.

Hálás vagyok továbbá (abécé-sorrendben) Dr. Ágoston Kolosnak, Berekméri Magdának, Dr. Bozóki Sándornak, Kovács Eszternek, Dr. Medvegyev Péternek, Rétaillé Orsolyának, Dr. Solymosi Tamásnak, Szepesváry Lászlónak, Dr. Szüle Borbálának, Dr. Temesi Józsefnek és a Sóház II. emeletén dolgozó munkatársaimnak a barátságos munkahelyi légkörért és a folyamatos szakmai együttműködésért.

Köszönöm doktorandusztársaimnak, (abécé-sorrendben) Bednay Dezsőnek, Fliszár Vilmosnak, Hajdu Tamásnak, Kelemen Józsefnek, Lovas Anitának, Németh András Olivérnek, Németh Petrának, Pálvölgyi Dénesnek, Poesz Attilának és Selei Adriennek az együtt töltött, nem mindig száz százalékosan konszolidált pillanatokát. Köszönöm Papp Gergőnek az értékezésem megírásával kapcsolatos biztatást és az egyszerre hasznos és szórakoztató közös kutatási napokat.

Hálával tartozom továbbá Molnárné Brinzik Katalinnak a KSH Népeségstudományi Intézettől kapott friss és részletes halandósági adatokért, melyeket felhasználtam dolgozatomban.

Elnézést kérek bárkitől, aki esetleg a felsorolásból kifelejtve érzi magát. Ebben az esetben mentségemre egyedül az hozható fel, hogy ezt a súlyos hibát minden bizonnyal figyelmetlenségből, és semmiképpen nem rossz szándékkal követtem el.

Értekezésem elkészültében elengedhetetlen segítséget jelentett számomra az MTA–BCE „Lendület” Stratégiai Interakciók Kutatócsoport és az MNB Kutatási Kiválósági Díj keretében kapott nagyvonalú támogatás, melyet ezúton hálásan köszönök.

A dolgozatomban maradt esetleges hibákért és tévedésekért minden felelősség egyedül engem terhel.

1. fejezet

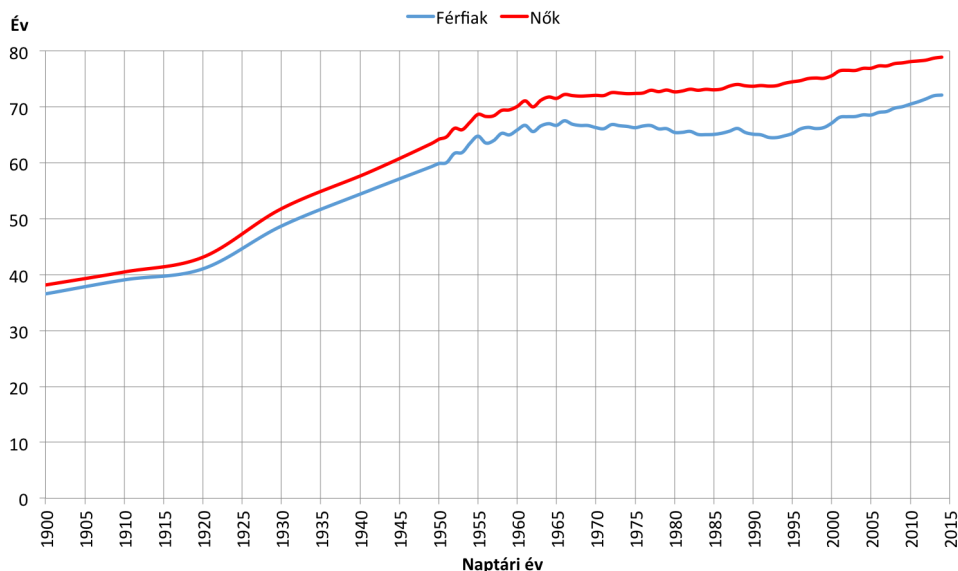
Bevezetés

1.1. Az élettartam-kockázat problémája

Az emberi élet hosszának előreláthatatlansága az idők kezdete óta foglalkoztatja az emberiséget. Bár az emberi élettartam egy-egy egyén esetén előzetesen többnyire nehezen megjósolható, nagy számú, egymáshoz kellőképpen hasonló egyén megfigyelt adatai alapján mégis számos gyakorlati célra megfelelően modellezhető. A halandósági modellezés fontos alkalmazási területei az élet- és nyugdíjbiztosítás, amelyekre az 5. és 7. fejezetekben bemutatandó két esettanulmány fókuszál.

Empirikus tény, hogy az emberi élettartam átlagos hossza az elmúlt évszázadok során rendkívül gyorsan növekedett, melynek háttérében elsősorban az orvostudomány fejlődése és az étel-miszer-ellátás javulása állnak. A növekedés viszonylag rövid távon is érzékelhető. A jelenség szemléltetése kedvéért az 1.1. ábrán látható a magyarországi nemenkénti, években mért születéskor várható élettartamok alakulása 1900 és 2014 között. Az ábra alapján megállapítható, hogy a születéskor várható élettartam Magyarországon mind a férfiak, mind a nők esetén

közel kétszeresére emelkedett az utóbbi valamivel több mint egy évszázadban.



1.1. ábra. Nemenkénti születéskor várható élettartamok Magyarországon (1900–2014, forrás: saját szerkesztés a KSH adatai alapján)

A kutatók és modellező szakemberek munkájuk során kevés ilyen egyértelműen pozitív, örömdetes társadalmi-gazdasági jelenséggel foglalkozhatnak. Ezt figyelembe véve valójában helyesebb lett volna a kissé negatív kicsengésű cím helyett például „Az emberi élettartam növekedéséből származó bizonytalanság modellezése” címet adni értekezésemnek, jobban kihangsúlyozva a jelenség örömteli jellegét. Ennek ellenére mégis az aktuárius szakmában magyar nyelven is meghonosodott „*longevity risk*” kifejezés Májer–Kovács [2011] cikkében bevezetett fordítását, az *élettartam-kockázatot* helyeztem értekezésem címének középpontjába, ezzel nyomatékosítva azt, hogy dolgozatom a kérdést szigorúan aktuáriusi – és nem például demográfiai vagy kvantitatív pénzügyi – szemléletben közelíti meg.

Az aktuáriusi élettartam-kockázat a közgazdaságtudományi szakiroda-

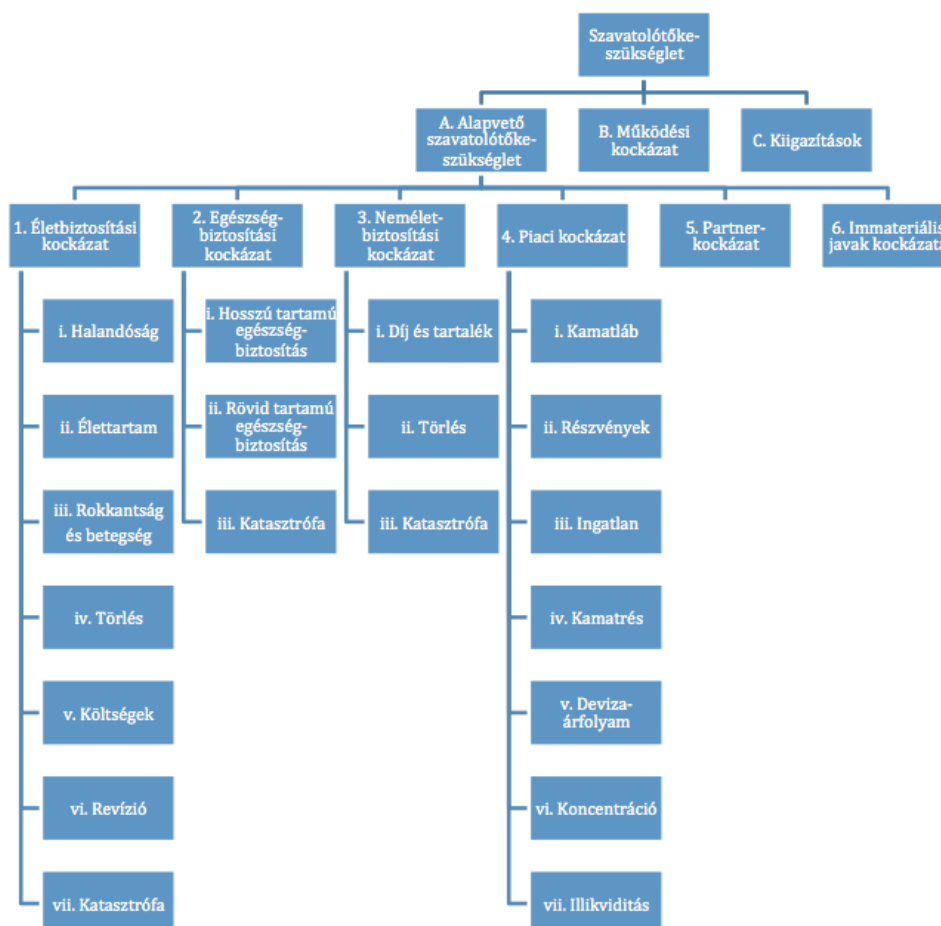
lomban nem általánosan előforduló, alapvető fogalom, így némi további kifejtést igényel. Az élettartam-kockázat abból ered, hogy a felosztó-kirovó elven működő állami nyugdíjrendszerek, a nyugdíjpénztárak és a járadéktermékeket értékesítő életbiztosítók – a javuló élettartamkilátások jelenségének másodlagos hatásaként – egy adott pillanatban a múlt- és jelenbeli halandósági statisztikák alapján csupán meglehetősen pontatlanul jelezhetik előre az intézmény jövőbeli bevételeit és kiadásait, így komoly tervezési hibát követnek el, és jelentős veszteségre számíthatnak a jövőben. Ezt az 5. és 7. fejezetekben bemutatandó esettanulmányok az állami nyugdíjrendszer, illetve a nyugdíjpénztárak és biztosítók példáján illusztrálják majd. A jelenség mindemellett egyéni szinten, az öngondoskodás keretében is értelmezhető, mivel az emelkedő várható élettartam a személyes időskori megélhetés tervezése során is kihívást jelent.

Az élettartam-kockázat szükségessé teszi a kifinomult, modern halandóság-előrejelző módszerek alkalmazását. Aktuáriusi számításokban betöltött szerepe mellett a jelenség aktualitását az adja, hogy 2016. január 1-étől, a Szolvencia II keretirányelv előírásainak gyakorlati hatályba lépésétől immár hatályos jogszabály is rendelkezik annak modellezéséről és kiemelt kezeléséről.

1.2. Élettartam-kockázat a Szolvencia II keretrendszerben

Az Európai Unióban működő biztosító társaságok és nyugdíjpénztárak kockázatkezelését és szavatolótőke-szükségletének meghatározását szabályozó, a gyakorlatban 2016. január 1-én életbe lépett Szolvencia

II irányelv (EU [2009]) és az arra épülő kockázatkezelési keretrendszer külön figyelmet fordít az élettartam-kockázat modellezésére.



1.2. ábra. A szavatoló tőke összetevői a Szolvencia II keretrendszerben (forrás: saját szerkesztés)

A *szavatoló tőke* azt hivatott biztosítani, hogy a társaság egy év időtávon legalább 99,5 százalékos valószínűséggel fizetőképessé maradjon, vagyis – eltekintve a bevételek és kiadások várhatóan csupán 200 évente bekövetkező, kiugróan kedvezőtlen alakulásától – eleget tudjon tenni a vállalt kötelezettségeinek.

A *szavatoló tőke-szükséglet* Szolvencia II keretrendszer szerinti hierarchikus, lentől felfelé építkező szemléletű felépítését az 1.2. ábra szemlél-

teti. A szavatolótőke-szükséglet fő összetevői az *alapvető szavatolótőke-szükséglet*, a működési kockázat (lásd például Panjer [2006] könyvét és Vékás [2009] összefoglalóját) szavatolótőke-szükséglete és a kiigazítások értéke. Az alapvető szavatolótőke-szükséglet meghatározása hat, az 1.2. ábrán arab számokkal jelölt úgynevezett *modul* segítségével történik. A modulok szavatolótőke-szükségeit a modulok között feltételezett korrelációkat figyelembe véve szükséges aggregálni az alapvető szavatolótőke-szükséglet meghatározása érdekében. Az egyik ilyen – értekezésem szempontjából kitüntetett szerepű – modul az 1.2. ábrán 1. sorszámmal jelölt életbiztosítási kockázathoz tartozik. A modulok további, az 1.2. ábrán kisbetűs római számokkal jelölt *almodulokból* állnak, melyek szavatolótőke-szükségletét – az almodulok között feltételezett korrelációkat figyelembe véve – aggregálva kapható meg az egyes modulok szavatolótőke-szüksége. Az 1.2. ábrán a ii. sorszám jelöli az élettartam-kockázat almodulját, amely értekezésem fókuszában áll. Az egyes almodulok szavatolótőke-szüksége a Szolvencia II keretrendszerben a sokkforgatókönyvekre épülő úgynevezett sztenderd modell vagy a vállalat egyéni jellegzetességeire szabott belső modell segítségével is meghatározható (EIOPA [2012]).¹ A sztenderd modell keretében az élettartam-kockázat szavatolótőke-szükségletét a nettó eszközérték csökkenése adja meg egy olyan feltételezett sokkhatás esetén, ha a modellben valamennyi halandósági ráta értéke azonnal és véglegesen 20 százalékkal csökken. Az élettartam-kockázat vállalatspecifikus belső modellek keretében történő, aktuáriusi szempontból megfelelő modellezéséhez elengedhetetlenek a későbbiekben ismertetendő

¹ Vállalati szinten úgynevezett hibrid modell is alkalmazható, melynek keretében a kockázatok egy része esetén a szavatolótőke-szükségletet a sztenderd formula, más része esetén pedig belső modellek segítségével határozza meg a társaság.

halandóság-előrejelző módszerek.

1.3. Az értekezés felépítése

Értekezésem három fő részre tagolódik:

- Az I. részhez tartozó 2. fejezetben a halandósági modellezés, előrejelzés és az élettartam-kockázat gazdag nemzetközi és hazai szakirodalmi háttérét, a 3. fejezetben pedig a halandósági modellezés keresztmetszeti, statikus módszertanát mutatom be. A statikus módszertan figyelmen kívül hagyja a halandóság időbeli változását, ugyanakkor annak ismertetése szükséges a II. és III. részekben bemutatandó dinamikus megközelítések tárgyalásához.
- A II. részhez tartozó 4. fejezetben a halandóság-előrejelzés vezető módszerének tekintett Lee–Carter [1992] modell elméletét ismertetem. Itt igyekszem nagy hangsúlyt fektetni az eljárás matematikai háttérének a szakirodalomban megszokottnál mélyebb és szabatosabb bemutatására. Az 5. fejezetben a módszer gyakorlati alkalmazását mutatom be Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] cikke alapján. Az esettanulmány első alfejezetében bemutatom a hazai korfüggő halandósági és termékenységi ráták, a népesség, a születéskor várható élettartam és az időskori függőségi ráta előrejelzését, a további alfejezetekben pedig egy kohorszalapú nyugdíjmodell segítségével ismertetem az állami nyugdíjrendszer főbb mutatóinak az elkövetkező húsz évre vonatkozó előrejelzését, továbbá a makrogazdasági és gazdaságpolitikai feltételezések változtatására vonatkozó érzékenységet. Az eredmények alapján lehetséges gazdaságpolitikai ajánlásokat is ismertetek a rendszer hosszú távú

fenntarthatóságának biztosítása érdekében.

- A III. részhez tartozó 6. fejezet a Lee–Carter modellnél újabb, az aktuáriusi gyakorlatban egyre népszerűbb halandóság-előrejelző eljárásokat módszertanilag egységes tárgyalásban mutatja be az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellecsalád (Hunt–Blake [2014]) keretében. A 7. fejezetben ismertetett esettanulmányban Májer–Kovács [2011] cikke nyomán a GAPC modellecsalád segítségével végzem el a hazai nyugdíjasok nyugdíjkorhatáron várható hátralévő élettartamának és a nyugdíjcélú életjáradékok egyszeri nettó díjának aktuáriusi becslését, miután kiválasztom a mintán kívüli előrejelzési pontosság kritériuma alapján javasolható legjobb modellváltozatot. Elemzésemben nagy hangsúlyt fektetek a paraméterbizonytalanság megfelelő modellezésére. A kérdés aktualitását az önkéntes nyugdíjpénztári járadékszolgáltatásra vonatkozó szabályok friss változásai adják, amelyek felértékelik a halandóság-előrejelző módszertan szerepét. Végezetül eredményeimet összevetem Májer–Kovács [2011] korábbi adatok és eltérő módszertan alapján számított hasonló értékeivel.

A következő, 1.4. alfejezetben dolgozatom kutatási kérdéseit, hipotéziseit és fő eredményeit ismertetem. A 8. fejezetben a kutatási kérdésekre és a megfogalmazott hipotézisekre adott, értékezésemben kissé elszórtan elhelyezett válaszokat foglalom össze, és végezetül néhány lehetséges jövőbeli kutatási irányt ismertetek.

Dolgozatom matematikai jellegű részeiben a téma erősen alkalmazott jellegénél fogva, a száraz tárgyalás elkerülése érdekében eltekintek a szigorú állítás-bizonyítás sorrendtől.

1.4. Kutatási kérdések és fő eredmények

Az értekezésemben megválaszolandó fő kérdések, melyek vizsgálatához a szükséges módszertant és elemzési keretet dolgozatom I–III. részeiben ismertetem majd:

- Várhatóan hogyan alakulnak 2035-ig a következő mutatószámok: a magyarországi férfiak és nők halandósági rátái, a termékenységi ráták, az ország népessége, a születéskor várható élettartam és a nyugdíjrendszer szempontjából lényeges időskori függőségi ráta?
- Mennyi ideig tartható fenn a magyar állami nyugdíjrendszer bevételeinek és kiadásainak egyensúlya a jelenlegi foglalkoztatási, halandósági, gyermekvállalási és reálbér-növekedési trendek és nyugdíjkorhatár mellett, illetve az idő múlásával hogyan alakul várhatóan a rendszer egyenlege? Ceteris paribus milyen paraméter-változások és mennyi ideig képesek meghosszabbítani a rendszer hozzávetőleges egyensúlyi állapotát?
- Melyik széles körben elterjedt halandóság-előrejelző modell írja le legmegfelelőbben a hazai időskori halandóság alakulását a mintán kívüli előrejelzési pontosság kritériuma alapján?
- Várhatóan mekkora tévedést, illetve pénzügyi veszteséget eredményez, ha a járadékszolgáltató a klasszikus aktuáriusi módszertan alapján, dinamikus helyett statikus halandósági feltételezések mellett számítja ki a nyugdíjkorhatáron várható hátralévő élettartamot és a nyugdíjcélú életjáradékok egyszeri nettó díját?
- Vajon jelentősen változott-e az életjáradékok díjszámítása során

az élettartam-kockázat figyelmen kívül hagyásával elkövetett díjszámítási hiba nagysága az elmúlt nyolc évben?

A kapcsolódó hipotéziseim:

1. A hazai halandóság javulása a termékenységi és munkaerő-piaci trendekkel együttesen az állami nyugdíjrendszer jelenlegi paramétereit mellett középtávon a kiadások túlsúlyához és a rendszer fenntarthatatlanságához vezet.
2. A hazai időskori halandóság előrejelzésére a klasszikus Lee–Carter [1992] modellnél alkalmasabb valamely az ezredfordulót követően elterjedt újabb eljárás.
3. Az elmúlt nyolc évben országos szinten emelkedett az élettartam-kockázat jelentősége a nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában.

Az 5. fejezetben ismertetendő, a hazai rendszer sajátosságaira szabott nyugdíjmodell a forráscikken (Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015]) kívül nem szerepel máshol a szakirodalomban, illetve legjobb tudomásom szerint a forráscikk az első olyan hazai alkalmazás, amely a Lee–Carter [1992] modellt a termékenységi ráták előrejelzésére alkalmazza, továbbá értekezésem az első olyan hazai tudományos munka, amely a legújabb mortalitás-előrejelző módszereket, illetve az azokat egységesítő GAPC modellkeretet ismerteti és hazai halandósági statisztikai adatokon alkalmazza, figyelembe véve ezen adatsorok egyedi jellegzetességeit.

Dolgozatom fő hozzájárulásait a hazai állami nyugdíjrendszer mutatóinak aktuáriusi szemléletű előrejelzése és érzékenységvizsgálata, az élettartam-kockázat nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában betöltött szerepének részletes elemzése, a Lee–Carter [1992] modell matematikai hátterének szabatos ismertetése, valamint a legelterjedtebb

halandóság-előrejelző eljárások részletes összehasonlítása és az azokat magába foglaló GAPC modelles család hazai adaptációja adják.

Célom, hogy eredményeimet a tudományos kutatók, társadalombiztosítási szakemberek és gyakorló aktuáriusok egyaránt eredményesen használhassák fel a jövőben az olyan modellek készítése során, amelyekben lényeges szempont az élettartam-kockázat módszertani szempontból megfelelő figyelembe vétele.

I. rész

A halandósági modellezés szakirodalmi háttere és keresztmetszeti módszertana

2. fejezet

Szakirodalmi áttekintés

Ebben a fejezetben a téma nemzetközi és hazai szakirodalmát tekintem át. Mivel – a doktori értekezésekben szokásos és azoktól elvárt módon – a választott témám rendkívül széles körű, folyamatosan és gyors ütemben bővülő szakirodalommal rendelkezik, melynek csupán egy kis, de remélhetőleg lényegi szeletét volt módom megismerni kutatásaim során, ezért a teljességre törekvés helyett kénytelen vagyok a főbb csapásirányok felvázolására szorítkozni, nagy hangsúlyt fektetve az új és ígéretes kutatási területek vázlatos ismertetésére.

A vonatkozó hazai szakirodalmat külön alfejezetben ismertetem, mivel lényegesnek tartom munkám magyarországi kutatásokhoz fűződő viszonyának meghatározását.

Némi további, az itt bemutatott forrásokhoz szorosan nem kapcsolódó szakirodalmi áttekintést tartalmaz majd az 5.6. alfejezet, amely az 5. fejezetben bemutatott alkalmazás mikroszimulációs továbbfejlesztési lehetőségeit ismerteti.

2.1. Nemzetközi szakirodalom

A témához kapcsolódó nemzetközi szakirodalmat az áttekinthetőség kedvéért strukturáltan, tematikus szakaszokra bontva mutatom be.

2.1.1. A halandósági modellezés kialakulása

Az első mai értelemben vett halandósági táblát a halandósági modellezés atyjának tekinthető Halley [1693]¹ készítette. A halandósági táblák elterjedését követően számos kísérlet történt az emberi élettartam valószínűségeloszlásának egyszerű, paraméteres matematikai összefüggések segítségével történő leírására, melyeket a szakirodalom *halandósági törvények* (angolul *mortality laws*) néven ismer. Ezek részletesebb bemutatására a 3.3.4. szakaszban kerül majd sor. Az első – kezdetleges – halandósági törvényt de Moivre [1752] javasolta. Törvénye szerint az emberi élettartamok a születés és a feltételezett legmagasabb életkor közötti intervallumon egyenletes eloszlásúak. Gompertz [1825] törvénye szerint a életkorfüggő halandóság² az életkorral exponenciálisan nő, ami abból az empirikus megfigyelésből ered, hogy a Gompertz által megfigyelt életkorfüggő halandósági ráták nagyjából konstans hosszúságú intervallumokként kétszereződtek meg. Gompertz törvényét Makeham [1867] additív konstanssal bővítette, amit az életkortól függetlenül alakuló – jellemzően baleseti – halálozások indokolnak. Az általa javasolt összefüggés Gompertz–Makeham törvény néven is ismert. A logisztikus törvény (Perks [1932]) a Gompertz–Makeham törvény olyan módosítása, amely képes megragadni a legmagasabb életkorokban már lassu-

¹ Az angol Edmond Halley nevét viseli a híres Halley-üstökös is.

² Precízebben: a halálozási intenzitás (lásd a 3.2.1. szakaszban).

ló ütemben növekvő halandóság³ empirikus jelenségét. Weibull törvénye (Weibull [1951]) a megbízhatóság-elméletből származik, és konstrukciója egy egymástól függetlenül meghibásodó alkatrészekkel rendelkező mechanizmus élettartamát írja le. Újabb, összetettebb paraméteres halandósági törvényekre példa a nyolc paraméterrel rendelkező Heiligman–Pollard törvény (Heiligman–Pollard [1980]).

A életkorfüggő halandósági ráták előrejelzésének lehetséges módszere a megfigyelt adatokra illesztett halandósági törvények paramétereinek előrejelzése valamely idősoros modell segítségével (lásd például Forfar–Smith [1985]). Ezt a módszert az újabb eljárások elterjedése miatt manapság viszonylag ritkán alkalmazzák a gyakorlatban.⁴

2.1.2. A Lee–Carter modell

A halandóság előrejelzésében hatalmas áttörést hozott Lee–Carter [1992] cikke, amelyben a szerzők a életkorfüggő halandósági rátákra egy viszonylag egyszerű, naptári időszaktól és életkortól függő paraméterekkel rendelkező log-bilineáris modell illesztését javasolják, amely meglepően jól írja le az Egyesült Államok 1900–1989. évi életkorfüggő halandósági rátáinak alakulását. A szerzők a paraméterek becslését követően a pontosság érdekében a naptári évtől függő paraméterek (az úgynevezett mortalitási index) újrabecslését javasolják, előírva a modell alapján várt és a ténylegesen megfigyelt halálesetek számainak egyezését. Az újrabecslült mortalitási index idősorát *autoregresszív integrált*

³ Gavrilov–Gavrilova [2011] amellett érvelnek, hogy ez a jelenség valójában irreleváns, illetve annak korábbi észlelései adat- és módszertani hibákból fakadtak.

⁴ Hasonló módszert alkalmaz Arató és szerzőtársai [2009] 2.2. alfejezetben ismertetett tanulmánya.

mozgóátlagolású⁵ (ARIMA, angolul *Autoregressive Integrated Moving Average*) folyamatnak tekintik, és az adatok alapján az eltolásos véletlen bolyongás modellspecifikációját találják megfelelőnek. A folyamat előrejelzése alapján a modellben az újrabecsült mortalitási index idő-sora várhatóan lineárisan csökken, és az előrejelzett halandósági ráták csökkenése exponenciális. Az azóta Lee–Carter modell néven elterjedt eljárás Deaton–Paxson [2001] szerint az ezredfordulóra a világ vezető halandóság-előrejelző módszerévé vált.

A Lee–Carter [1992] modell megjelenése óta az alkalmazásokkal kapcsolatos nemzetközi tapasztalatokról számtalan cikk látott napvilágot. A modell első nyolc évének tapasztalatairól Lee [2000] ad áttekintést. Tuljapurkar–Li–Boe [2000] tanulmánya a G7 országok fél évszadot felölelő adataira alkalmazza a modellt, és valamennyi vizsgált országban helytállónak találja annak a mortalitási index lineáris csökkenésére vonatkozó feltételezését. Csupán az illusztráció kedvéért néhány ország-specifikus tanulmány: például Argentínában Andreozzi és szerzőtársai [2011], Portugáliában Coelho [2001], Svédországban pedig Wang [2007] alkalmazták a modellt.

Fontos megjegyezni, hogy a Lee–Carter modell – a továbbiakban ismertetendő egyéb módszerekhez hasonlóan – statisztikai alapú, úgynevezett *extrapolatív eljárás*, amely a múltban megfigyelt trendek meghosszabbítására épül, figyelmen kívül hagyva a változások háttérben álló mögöttes (például orvostudományi, életmódbeli stb.) okokat. A halandósági folyamatok háttérben rejlő jelenségeket leíró *strukturális modellekről* például Booth–Tickle [2008] tanulmánya nyújt rövid összefoglalást, amelynek szerzői megállapítják, hogy ez a megközelítés jelentős kívánni

⁵ Az ARIMA modellekről és az azokhoz szorosan kapcsolódó Box–Jenkins módszertanról részletesebben lásd például Asteriou–Hall [2015] könyvét.

valókat hagy maga után az oksági kapcsolatok elégtelen ismerete miatt. Keilman ([1998] és [2008]) tanulmányaiban amellett érvel, hogy a nemzeti és nemzetközi statisztikai szolgálatok által készített, gyakran szubjektív szakértői véleményekre alapozott hivatalos demográfiai projekciók pontossága erősen megkérdőjelezhető, mivel azok a múltban szisztematikusan és jelentősen alábecsülték az emberi élettartam javulási ütemét és ezáltal az élettartam-kockázat nagyságát. Lee–Miller [2001] és Wong–Fupuy–Haberman [2004] megállapítják, hogy a Lee–Carter modellt visszemenőleg alkalmazva a hivatalos projekciónál jóval megbízhatóbb előrejelzések készíthetők.

A szakmában nincs egyetértés azzal kapcsolatban, hogy vajon az emberi élettartam múltban tapasztalt, gyors ütemű növekedése a jövőben is folytatódik-e. Míg Wong–Fupuy–Haberman [2004] a pesszimista szakértői becslések pontatlansága és a Lee–Carter modell meglepően jó teljesítménye alapján arra következtet, hogy a növekedés fenntartható, addig a vitában szkeptikus álláspontra helyezkedők (például a maguk álláspontját „realistaként” aposztrofáló Carnes–Olshansky [2007]) megkérdőjelezzik az extrapolatív halandóság-előrejelző eljárások hosszú távú alkalmazhatóságát, és elképzelhetőnek tartják, hogy a fejlett országokban a születéskor várható élettartamok előbb-utóbb egyfajta plafonba ütköznek, sőt, akár csökkenőbe fordulnak majd.

2.1.3. A Lee–Carter modell bírálata és kiterjesztései

Számtalan tanulmány bírálja a Lee–Carter [1992] modell előfeltevéseit, és javasolja annak módosítását, illetve kiterjesztését. Egy egyszerű módosítás már Lee–Carter [1992] eredeti tanulmányában is szerepel,

amelyben a szerzők az első világháborút követő spanyolnáthajárvány idején megfigyelt *halandósági sokk* kezelésére bináris változókkal bővítik a halandósági ráták egyenleteit a sokkhatás éveiben.

Wilmoth [1993] bírálja a Lee–Carter [1992] modell úgynevezett *homoszkedaszticitási feltevését*, miszerint az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó logaritmikus halandósági ráták hibatagjainak varianciái azonosak, rámutatva arra, hogy a hibavariancia valójában közelítőleg fordítottan arányos az egyes korcsoport-naptári év kombinációkban megfigyelt halálesetek számaival. A probléma orvoslása érdekében a szerző a súlyozott legkisebb négyzetek módszerét javasolja a paraméterek becslésére a Lee–Carter [1992] tanulmányában szereplő szingulárisérték-felbontás helyett.

Lee–Miller [2001] az eredeti modell módosításaként azt javasolják, hogy a becsült mortalitási index kiigazítása ne a halálesetek száma, hanem a születéskor várható élettartam alapján történjen, továbbá hogy a mortalitási index előrejelzésének kiindulópontjául a legutolsó ismert év becsült értéke helyett a tényleges érték szolgáljon.

Alternatív megoldásként Brouhns és szerzőtársai [2002a] a normális eloszlású hibatagok alkalmazása helyett az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó halálesetek számainak Poisson-eloszlását feltételezik. Az általuk javasolt – Poisson Lee–Carter modell néven is ismert – modellváltozat számos előnnyel rendelkezik Lee–Carter [1992] eredeti modelljéhez képest: többek között nem él a homoszkedaszticitásra vonatkozó irreális feltevéssel, a maximum likelihood becslés révén – Wilmoth [1993] módszeréhez hasonlóan – figyelembe veszi az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó létszámokat, szükségtelenné teszi a mortalitási index erősen heurisztikus, a sztochasz-

tikus modellkeretbe nem illeszkedő újrabecslését, valamint könnyedén beágyazható aktuáriusi alkalmazásokba. Ez utóbbira példaként Brouhns és szerzőtársai [2002a] egy életjáradék-piaci antiszelekciót elemző alkalmazást mutatnak be.

A Lee–Carter [1992] modellel szembeni gyakori kritika, hogy a szerzők értelmezésében az előrejelzett halandósági ráták konfidenciaintervallumai csupán a mortalitási index idősorának hibatagjaiból fakadó bizonytalanságot tartalmazzák, ismertnek tekintve a modell – valójában becsült – paramétereit. A modell ezáltal figyelmen kívül hagyja a paraméterbecslési eljárásból fakadó bizonytalanságot, jelentősen alábecsülve a tényleges előrejelzési hiba nagyságát. Brouhns és szerzőtársai [2005] megmutatják, hogy a Brouhns és szerzőtársai [2002a] által javasolt Poisson Lee–Carter modellváltozatban az előrejelzett halandósági ráták konfidenciaintervallumaiba a *paraméterbizonytalanság* is beépíthető a statisztikai becsléelméletben Efron [1979] óta ismert bootstrap eljárás segítségével.

A Lee–Carter [1992] modellel és annak Poisson-változatával szemben egyaránt gyakran felmerülő további kritika, hogy az életkortól függő (keresztmetszeti) és naptári évtől függő (hosszmetszeti) hatásokon túl nem veszi figyelembe az azonos naptári időszakban született egyének halandóságának a születés időpontjától függő – a szakirodalomban *kohorszthatás* néven ismert – jellegzetességeit. A Lee–Carter modell legismertebb, kohorszthatást tartalmazó kiterjesztése a Renshaw–Haberman [2006] modell. Mivel ez az eljárás a gyakorlatban numerikusan instabillnak bizonyult, ezért Haberman–Renshaw [2011] újabb tanulmányukban modelljüket úgy egyszerűsítik, hogy az eredeti modellben életkortól füg-

gő kohorszhatást életkortól függetlennek tekintik.⁶

A halandóság-előrejelző modellek további bővítési iránya a halandóság hosszmetzeti változását leíró egydimenziós idősorok számának növelése, amelyekből az eddig ismertetett modellek csupán egyet tartalmaznak. Az ilyen irányban bővített modelleket a szakirodalom *többtenyezős eljárásoknak* nevezi. A Lee–Carter [1992] modell – bizonyos szempontból természetes – többtenyezős kiterjesztését mutatja be Booth–MainDonald–Smith [2002] tanulmánya. Figyelembe véve, hogy a klasszikus Lee–Carter modellben a keresztmetzeti és hosszmetzeti hatások paraméterei a soronként centralizált logaritmikus mortalitási ráták mátrixának szingulárisérték-felbontásával, majd a legnagyobb szingulárisértéknél kisebb szingulárisértékek elhagyásával nyerhetők, Booth–MainDonald–Smith [2002] – a főkomponenselemzés (Kovács [2011]) analógiájára – a további szingulárisértékek közül is megtartanak néhányat, így téve többtenyezőssé a modellt. A szerzők ausztrál adatok felhasználásával megállapítják, hogy az így nyert további tényezők nehezen építhetők be az előrejelzésekbe. Booth–MainDonald–Smith [2002] továbbá ajánlásokat fogalmaznak meg a mortalitási index kiigazításával és a becslési időszak kiválasztásával kapcsolatban. Booth és szerzőtársai [2006] a Lee–Miller [2001] és Booth–MainDonald–Smith [2002] modellváltozatok, valamint az eredeti Lee–Carter modell előrejelző képességét hasonlítják össze egymással, és tíz fejlett ország adatainak vizsgálatával megállapítják, hogy az újabb modellváltozatok pontossággal jellemzően felülmúlja az eredeti modellét.

A Lee–Carter modell és kiterjesztései az életkorfüggő termékenységi ráták modellezésére is alkalmazhatók. Ilyen alkalmazásokra két pél-

⁶ Sajnos még az egyszerűsített modell illesztése is gyakran komoly numerikus problémákkal jár. A témát bővebben Hunt–Villegas [2015] tanulmánya tárgyalja.

da: Hyndman–Ullah [2007] cikke, amely a Lee–Carter [1992] modell módosított változatát a korcsoportos termékenységi ráták előrejelzésére alkalmazza ausztrál adatok felhasználásával, valamint Wiśniowski és szerzőtársai [2015] tanulmánya, amely a halandóság, a termékenység és a vándorlás elemzését közös bayes-i modellkeretbe ágyazza be Lee–Carter [1992] modelljének kiterjesztésével, és a modell segítségével előrejelzi Nagy-Britannia népességének alakulását.

2.1.4. Újabb halandóság-előrejelző módszerek

Haberman–Renshaw [2011] újabb modelljének nevezetes speciális esete az orvosi statisztikában már régóta alkalmazott korcsoport–időszak–kohorsz (röviden APC, vagy angolul Age–Period–Cohort) modell (Hobcraft és szerzőtársai [1982], illetve Carstensen [2007]), amelyben a kohorszhatáson kívül a hosszmetzeti hatás is – a Lee–Carter modell-től eltérően – független az életkortól.

Az aktuáriusi gyakorlatban a legelterjedtebb, újabb többtényezős halandóság-előrejelző módszerek a kéttényezős Cairns–Blake–Dowd [2006], valamint az azt általánosító, háromtényezős Plat [2009] modellek. Speciálisan az időskori halandóság modellezésére Plat [2009] modelljének olyan kéttényezős egyszerűsítését javasolja, amely a Cairns–Blake–Dowd modell kohorszhatással bővített változata. A korábban ismertetett eljárásoktól eltérően ezekben a modellekben paraméteres formában adott a halandósági ráták érzékenysége a mortalitási tényezők változására.

Lovász [2011] tanulmánya finn és svéd halandósági adatok felhasználásával számos, az eddigiekben tárgyalt halandóság-előrejelző modellt összehasonlít egymással, és az eredmények alapján aktuáriusi alkalma-

zások céljára a Plat [2009] modellt javasolja. Cairns és szerzőtársai [2009] nagy-britanniai adatokon a Cairns–Blake–Dowd [2006], amerikai adatokon pedig a Renshaw–Haberman [2006] modell illeszkedését találják a legmegfelelőbbnek, ugyanakkor megállapítják, hogy e modellek becsült paraméterei nem eléggé robusztusak a becslési időszak változtatására nézve. A szerzők a probléma megoldására a Cairns–Blake–Dowd modell kvadratikus életkorhatást tartalmazó bővítését javasolják.

A tudományos és gyakorlati szakmák részéről egyaránt jelentkező, természetes igény a Lee–Carter modell kritikája nyomán született, rendkívül szerteágazó halandóság-előrejelző eljárások átlátható, egységes módszertani keretbe foglalása. Erre többek között Hunt–Blake [2014], Villegas és szerzőtársai [2016], valamint Currie [2016] tettek kísérletet a közelmúltban. Az általuk javasolt – számos, már létező és széles körben alkalmazott modellt felölelő – egységes modellkeret összefoglaló neve *általánosított korcsoport-időszak-kohorsz* (angolul *Generalized Age-Period-Cohort* vagy röviden GAPC) *modell*, a statisztikában és az aktuáriustudományokban elterjedt általánosított lineáris modell (angolul *Generalized Linear Model* vagy röviden GLM, lásd például McCullagh–Nelder [1989], illetve magyarul Gray–Kovács [2001]) analógiájára. A GAPC modellkeret az életkorban és időszakban log-bilineáris vagy logit-bilineáris, egy- és többtényezős, valamint kohorszhatástól mentes és azt tartalmazó eljárásokat egységesíti. Az így nyert, igen széles modelles család tagjai többek között a korábbiakban már ismertetett Poisson Lee–Carter (Brouhns és szerzőtársai [2002a]), Renshaw–Haberman [2006], korcsoport-időszak-kohorsz (Carstensen [2007]), Cairns–Blake–Dowd [2006] és Plat [2009] modellek. A GAPC modellek keretében lehetőség nyílik többek között a paraméterbecslés, a modellválasztás és

az előrejelzés egységes keretben történő tárgyalására és elvégzésére.

A bemutatott halandóság-előrejelző módszerek további fejlesztése a életkorfüggő halandóság simításának⁷ és a halandóság előrejelzésének egységesítése, amelyre példa Currie és szerzőtársai [2004] p-spline interpolációs függvényeket felhasználó tanulmánya.

Egyéb halandóság-előrejelzési megközelítésekre példák a panel-ökonometriai eljárások használatát javasló Babel–Bomsdorf–Schmidt [2008], illetve a Lee–Carter modellbeli becsült mortalitási index változása és egyes makroökonómiai változók változásai közötti összefüggéseket elemző Hanewald [2009] tanulmányok. Hanewald [2009] elemzésében arra a következtetésre jut, hogy hat fejlett országban gazdasági fellendülés esetén jellemzően kissé csökken a halandóság csökkenési üteme, tehát az emberi élettartam javulása enyhén kontraciklikus. Eredményét a halálokok közötti, gazdasági növekedéstől függő átrendeződéssel magyarázza.

2.1.5. Többdimenziós halandóság-előrejelzés

Számos tanulmány foglalkozik a különböző populációkra készített halandósági előrejelzések koherens keretbe foglalásával. Lee [2000] például a közös nemenkénti mortalitási index előírását javasolja, amennyiben lényeges szempont az előrejelzések koherenciája. Li–Lee [2005] megállapítják, hogy a Lee–Carter [1992] modellben a különböző populációkban egymástól hosszú távon nem divergáló előrejelzések szükséges és elégséges feltétele, hogy a mortalitási indexek eltolásos véletlen bolyongásainak sztochasztikus trendparaméterei és az index változására vonatkozó életkorfüggő érzékenységi paraméterek egyaránt azonosak legyenek a

⁷ A téma valamivel részletesebb tárgyalására a 3.3.4. szakaszban kerül majd sor.

vizsgált populációkban. Ezen túl a szerzők előírják a mortalitási indexek idősorainak azonosságát is, mivel a közös trend irreális feltételezés lenne a valójában erősen különböző trendet követő idősorokra. Így a koherens modellben csak a életkorfüggő átlagos logaritmikus mortalitási szintek különböznek országonként. A vizsgált tizenöt országból tizenegy esetén a koherens előrejelzések nagyjából megegyeznek az egyenkénti előrejelzésekkel, négy másik ország esetén pedig egy-egy országspecifikus komponenssel bővítve az egyenleteket már elfogadható a közös modell. Li–Lee [2005] amellett érvelnek, hogy a javasolt koherens keretben egy adott ország esetén a hasonló demográfiai adottságokkal rendelkező országok adatainak felhasználása javíthatja az előrejelzések pontosságát. Cairns és szerzőtársai [2011] a bayes-i modellkeretbe beágyazott korcsoport–időszak–kohorsz (Carstensen [2007]) modellt javasolják koherens előrejelzésre.

Ígéretes kutatási terület a halandósági ráták halálozási okok szerint bontott előrejelzése, amely pontosabbá teheti az előrejelzéseket. A halálozási okokat egymástól függetlenül jelzi előre Wilmoth [1995] tanulmánya, amely az aggregált előrejelzéshez képest pesszimistább becsléseket közöl a várható élettartam növekedési ütemére, illetve Di Cesare–Murphy [2009] cikke, amely nagy-britanniai adatok segítségével három lényeges halálozási ok trendjeit jelzi előre különböző népszerű mortalitás-előrejelző módszerek felhasználásával.

A fejlettebb megközelítések különös figyelmet fordítanak a halálozási okok közötti korrelációk statisztikai szempontból megfelelő kezelésére. Arnold–Gaille–Sherris [2016] a többváltozós idősorelemzésből kölcsönzött kointegrációs, vektor-autoregressziós és vektor-hibakorrekciós eljárásokat alkalmazzák, és öt halálokot elemeznek az Egyesült Államok,

Japán, Franciaország, Nagy-Britannia és Ausztrália adatai alapján. Tanulmányukban megállapítják, hogy a modell inkább a halálokok közötti összefüggések vizsgálatára alkalmas, de a megközelítés kiforratlansága miatt nem javasolják annak előrejelzési célú használatát. Alai–Arnold–Gaille–Sherris [2015] a különböző halálokokat és a túlélést mint versengő kimeneteleket hosszmetzeti multinomiális logisztikus regresszió segítségével modellezzik, és modelljüket franciaországi adatok alapján előrejelzésre is felhasználják. Korrelált kockázatok (például házastársak élettartamai vagy különböző betegségek okozta halálesetek) modellezésére a kvantitatív modellezésben az ezredforduló óta elterjedt kopulák szintén alkalmazhatók.⁸ Dimitrova–Haberman–Kaishev [2013] tanulmánya ezzel a módszertannal modellezi a halálokok közötti összefüggéseket, és megállapítja, hogy az ismertetett eredmények sztochasztikus halandóság-előrejelzésre is felhasználhatók.

A várható élettartamon túl külön figyelmet érdemel a várható egészséges élettartam mutatója is, amelyet az Egészségügyi Világszervezet (WHO) a rokkantság vagy halál valamelyikének bekövetkezéséig eltelt idő várható értékeként definiál. A többdimenziós halandóság-előrejelző módszertan ennek vizsgálatára is alkalmazható: például Májer és szerzőtársai [2013] cikke 55 éves és annál idősebb holland egyének adatai alapján a Lee–Carter [1992] modell segítségével jelzi előre az egészséges, rokkant és elhunyt állapotok közötti átmenetvalószínűségeket.

⁸ A kopula a többdimenziós egységkockán értelmezett, a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes peremeloszlásokkal rendelkező eloszlásfüggvény, melyet tetszőleges peremeloszlásokkal kombinálva bármely többdimenziós eloszlásfüggvény előállítható Sklar tétele alapján (lásd például Nelsen [2006] vagy magyarul Vékás [2012]).

2.1.6. Az élettartam-kockázat

pénzügyi hatásai

Az élettartam-kockázat pénzügyi hatásairól a Nemzetközi Valuta-alap készített átfogó jelentést (IMF [2012]), amely egyebek mellett megállapítja, hogy a 63 éves korban várható hátralévő élettartam minden egy évnyi növekedése hozzávetőleg 3 százalékkal növeli a nyugdíjkötelezettségek értékét az Egyesült Államokban.

Brouhns és szerzőtársai [2002b] cikke az élettartam-kockázat életjáradékok díjszámításában betöltött szerepét vizsgálja a Brouhns és szerzőtársai [2002a] tanulmányában bemutatott Poisson Lee–Carter modell segítségével. A szerzők a halandóság-előrejelző modell paramétereit többdimenziós normális eloszlásból szimulálják (Deák [1990] és Gassmann–Deák–Szántai [2002]) a maximum likelihood becslőfüggvény értéke és aszimptotikus kovarianciamátrixa alapján, majd minden egyes replikációra kiszámítják az életjáradék nettó díját, így közelítve annak eloszlását. Hári és szerzőtársai [2008] cikke hasonló célra a kéttényezős Lee–Carter modellt (Booth–MainDonald–Smith [2002]) alkalmazza. Tanulmányukban Richards–Currie [2009] a modellkockázat szerepére hívják fel a figyelmet, kimutatva, hogy az alkalmazott modellfeltevések hatása pénzügyileg jelentős lehet az életjáradékok piacán.

Börger [2010] cikkében az élettartam-kockázat szavatolótőke-szükségletét a Szolvencia II keretrendszerben a sztenderd formula és a Lee–Carter [1992] modellre épülő belső modell segítségével egyaránt kiszámítja, és megállapítja, hogy a sztenderd formula leegyszerűsítő sokkforgatókönyve nincs összhangban a keretrendszer által előírt 99,5 százalékos kvantilis elvével. Ezért összetettebb sokkforga-

tókönyvek használatát javasolja.

Csupán illusztrációként néhány prominens forrás az élettartam-kockázat értékezésében nem tárgyalta, kvantitatív pénzügyi és befektetési vonatkozásaival kapcsolatban: az élettartam-kockázat értékpapírosítással – mint a pénzügyi piacokon az ezredforduló óta feltűnt új jelenséggel – például Krutov [2006] és Cairns–Blake–Dowd [2008], az ennek keretében megjelent longevity kötvények árazási kérdéseivel Blake és szerzőtársai [2006] és Bauer és szerzőtársai [2010], a kapcsolódó „longevity swap” csereügyletekkel pedig Dowd és szerzőtársai [2006] tanulmánya foglalkozik.

2.2. Hazai kutatások és alkalmazások

A történelmi Magyarország első halandósági tábláját Fáy [1854] készítette, azonban ezt követően csak hosszú szünet elteltével, a XX. század elején készült újra hasonló számítás hazánkban. Az 1900–1968. évek magyarországi halandósági tábláit és azok módszertani hátterét Pallós [1971] műve foglalja össze.

Csupán illusztrációként három, a hazai népesség részcsoportjainak halandóságára vonatkozó munka: a hazai halandóságot iskolázottság szerinti bontásban vizsgáló Hablicsek–Kovács [2007], valamint a nyugdíjban és nyugdíjszerű ellátásban részesülők halandóságával foglalkozó Hablicsekné–Hollósné [2007] és Molnár–Hollósné [2015] tanulmányok. A halálozás oka szerint bontott halandósági trendekkel foglalkozik Kovács [2012] írása.

Baran és szerzőtársai [2007] a Lee–Carter modell többtenyezős változatát alkalmazzák hazai adatokon, és az illesztett háromtenyezős modell

alapján megállapítják, hogy az 1949–2003. évek adatai alapján nyert előrejelzések nem megfelelők a mortalitási indexek trendjeiben bekövetkezett strukturális törések miatt, amelyek az 1989–2003 közötti bázisidőszak esetén már nem jelentkeznek. A szerzők szerint a modell segítségével nyert előrejelzéseket óvatosan kell kezelni a hazai halandóság múltbeli változékonysága miatt.

Mivel a járadékban részesülők halandósága jelentősen eltérhet a néphalandóságtól, és a hazai életjáradék-piac rövid története és alacsony volumene miatti szűkös tapasztalatok általában nem teszik lehetővé a járadékszolgáltatók számára a megbízható, vállalatspecifikus halandósági táblák készítését, ezért Arató és szerzőtársai [2009] tanulmánya más országok olyan, múltbeli halandósági tábláinak használatát javasolja, amelyek kellőképpen hasonlóak az előrejelzendő adatokhoz. A megfelelő referenciatábla kiválasztására három lehetséges távolságmértéket javasolnak, és ismertetnek egy eljárást a táblák egyezésére vonatkozó teszt kritikus értékeinek szimulációjára (Deák [1990]). A szerzők megállapítják, hogy a 60–90 év közötti életkorokban az Egyesült Államok 1950. évi férfi és 1970. évi női halandósági táblái meglehetősen jól illeszkednek a 2000. évi hazai halandósági tapasztalatokhoz. A referenciatáblák segítségével végzendő előrejelzés céljából bemutatnak továbbá egy egyszerű paraméteres halandósági törvényre épülő előrejelző eljárást és annak egy lehetséges alkalmazását is.

Májer–Kovács [2011] tanulmánya a 65–100. korévek 1970–2006. évi halandósági adataira a Lee–Carter [1992] modellt illeszti, és a klasszikus statikus, keresztmetszeti halandósági tábla és a halandóság előrevetítése alapján egyaránt kiszámítja a jelenlegi nyugdíjkorhatár betöltésekor, 65 évesen várható hátralévő élettartamot és a nyugdíjcélú életjáradék

egyszeri nettó díját⁹. A szerzők eredményei alapján a nyugdíjazáskor várható élettartamot 6,33%-kal, az életjáradék egyszeri nettó díját pedig 4,51%-kal becsüli alá az élettartam-kockázatot figyelmen kívül hagyó keresztmetszeti számítás. A tanulmány két eltérő megközelítésben közöl konfidenciaintervallumokat a nyugdíjazáskor várható élettartamra és az életjáradék nettó díjára: az első esetben Lee–Carter [1992] nyomán csupán a mortalitási index folyamatának véletlen hibatagjait tekintik a bizonytalanság forrásának, míg a második esetben a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterét is valószínűségi változóként kezelik, így az előrejelzési hiba részeként – részben – a becslés során fellépő paraméter-bizonytalanságot is figyelembe veszik. Megmutatják továbbá, hogy élettartam-kockázat jelenlétében még nagy kockázatközösség esetén, határértékben sem válik az nyugdíjcélú életjáradék nyújtása kockázatmentessé a járadékszolgáltató számára.

Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] cikke a Lee–Carter [1992] modell alapváltozatát alkalmazza a életkorfüggő halandósági és termékenységi ráták előrejelzésére és a magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságának vizsgálatára. E tanulmány részletes bemutatására az 5. fejezetben kerül majd sor.

Arató–Dryden–Taylor [2006] hierarchikus bayes-i térstatisztikai modellt illesztenek 150 magyarországi kistérség életkorfüggő halálozási adataira. A kistérségenként különböző életkorfüggő halandósági ráták megbízhatósági intervallumait a szerzők Markov-lánc Monte Carlo szimuláció segítségével állítják elő, és relatív kockázati szinteket is becsülnek a

⁹ Az egyszeri nettó díj az az azonnali befizetés, amelyért cserébe az adott szerződésen – a díjtartalékon a technikai kamatlábnak megfelelő hozamot elérve – a járadékszolgáltató díjbevételeinek és járadék-kifizetéseinek várható jelenértékei megegyeznek (Banyár [2003]). A nettó díj közgazdasági értelemben nem tekinthető árnak. Az ár itt a nettó díjon felül felszámított költségekhez kapcsolódik (Banyár–Vékás [2015]).

nem és településméret változók kategóriáira.

A Lee–Carter [1992] modellben is alkalmazott szingulárisérték-felbontás általánosításait mutatja be Ispány és szerzőtársai [2010] tanulmánya, melynek szerzői a javasolt módszereket hazai néphalandósági adatok modellezésére és vizualizációjára alkalmazzák.

Ágoston [2001] tanulmánya három olyan, a halandósági ráták becslésére alkalmazható módszert mutat be, amelyek cenzorált megfigyelések (például év közben felmondott életbiztosítási szerződések) jelenlétében is alkalmazhatók: a Kaplan–Meier, aktuáriusi és maximum likelihood becslőfüggvényeket. Az orvosi statisztikában régóta alkalmazott, halandóság becslésére is alkalmazható Kaplan–Meier és Cox-regressziós modelleket magyar nyelven Vékás [2011] ismerteti. Bár nem szigorúan hazai alkalmazás, mégis itt említem meg Májer és szerzőtársai [2011] cikkét, amely Cox-regresszió segítségével elemzi a rokkant egyének halandóságát, és megállapítja, hogy várható élettartamuk 10 évvel marad el az egyéb csoportokétól, amelyből 6 év magyarázható a két populáció között az életmód, a társadalmi-demográfiai jellemzők és a krónikus betegségek terén fennálló különbségekkel.

A nyugdíjpénztári életjáradékok elméleti és gyakorlati kérdéseiről és modellezési problémáiról Banyár [2012] nyújt széles körű áttekintést. Az élettartam-kockázat, a népességöregedés, valamint a rokkantnyugdíjasok magas száma okozta anomáliák hazai nyugdíjrendszerben betöltött szerepét mutatják be Kovács–Szüle ([2005] és [2006]) munkái. Szepesváry [2015] cikkében a Lee–Carter modell felhasználásával modellezi az élettartam-kockázatot a Szolvencia II keretrendszerben.

3. fejezet

A halandósági modellezés módszertani alapjai

Ebben a fejezetben a halandóság keresztmetszeti, statikus modellezéséről adok áttekintést a halandóság statisztikai mérőszámaiból kiindulva a folytonos és diszkrét matematikai modelleken át az aktuárius szakmában elengedhetetlen eszközként szolgáló halandósági tábla konstruálásáig és teszteléséig. Előre megjegyzem, hogy tárgyalásomban – a téma sokszínűségéből adódóan, az egyszerűséget szem előtt tartva – néhol keverednek a statisztikában, valószínűségszámításban és az aktuárius-tudományokban szokásos jelölésmódok.

3.1. A halandóság statisztikai mérőszámai

A halandóság múltbeli adatok alapján történő számszerűsítésének leg-alapvetőbb leíró statisztikai eszköze a *halandósági ráta* (más néven *halálózási arányszám*), amely egy választott időszak és populáció vonatkozásában értelmezhető, és az adott időszak során az adott populációban

bekövetkező halálozások számának a populáció létszámához viszonyított arányaként számítható ki. Képlettel felírva:

$$m = \frac{D}{E}. \quad (3.1)$$

ahol m a halandósági ráta, $D \in \mathbb{N}$ a vizsgált időszakban elhunytak száma, $E > 0$ pedig a vizsgált populáció valamilyen módon értelmezett létszáma. Értekezésemben a vizsgált időszak hossza egy év lesz.

A populáció létszámát pontosabban definiálni szükséges: érthető alatta a vizsgált időszak kezdetén élő egyének száma (úgynevezett *kezdeti kitettség*, angolul *initial exposed to risk*, jelölése: E^0) vagy a vizsgált időszak alatt élő egyének átlagos létszáma (úgynevezett *központi kitettség*, angolul *central exposed to risk*, jelölése: E^c) is. Ez utóbbi a vizsgált időszak kezdetén életben lévő egyénekre a vizsgált időszakban megélt egyéni időmennyiségeket összegezve számítható ki.¹

Kezdeti kitettség alkalmazása esetén *kezdeti halandósági rátáról* (angolul *initial death rate*, jelölése: m^0), központi kitettség esetén pedig *központi halandósági rátáról* (angolul *central death rate*, jelölése: m^c) beszélhetünk. A kétféle halandósági ráta közötti kapcsolat a vizsgált időszakban elhunyt egyének által megélt időmennyiségektől függ. Ha a vizsgált időszak során elhunyt, az időszak kezdetén még élő egyének átlagosan $A > 0$ egységnyi időt éltek az időszak kezdetétől számítva, akkor a kétféle kitettség közötti kapcsolat:

$$E^c = E^0 - (1 - A)D. \quad (3.2)$$

¹ A központi kitettség mértékegysége fő és év is lehet, attól függően, hogy átlagos létszámnak vagy összes megélt időmennyiségnek tekintjük.

Így a (3.1) és (3.2) összefüggések alapján adódik a kétféle halandósági ráta közötti kapcsolat:

$$\begin{aligned} m^c &= \frac{D}{E^c} = \frac{D}{E_0 - (1-A)D} = \frac{\frac{D}{E^0}}{\frac{E_0 - (1-A)D}{E^0}} = \frac{m^0}{1 - (1-A)m^0}, \\ m^0 &= \frac{m^c}{1 + (1-A)m^c}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Gyakori az $A = \frac{1}{2}$ egyszerűsítő feltevés, miszerint a vizsgált időszakban elhunytak átlagosan az időszak feléig éltek. Ebben az esetben a (3.3) összefüggés következtében a kétféle halandósági ráta egymásból az alábbi képletek segítségével származtatható:

$$\begin{aligned} m^c &= \frac{m^0}{1 - \frac{1}{2}m^0}, \\ m^0 &= \frac{m^c}{1 + \frac{1}{2}m^c}. \end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy minden esetben fennállnak az

$$\begin{aligned} 0 &\leq m^0 \leq 1, \\ m^0 &\leq m^c \end{aligned}$$

összefüggések, és a központi halandósági ráta a kezdeti halandósági rátával ellentétben egységnyinél nagyobb értéket is felvehet.

1. Példa. *Magyarország lakossága 2014. január 1-én $E^0 = 9.877.365$ fő volt, és az év során $D = 126.308$ halálozást regisztráltak. Ekkor a 2014. évi országos kezdeti halandósági ráta értéke*

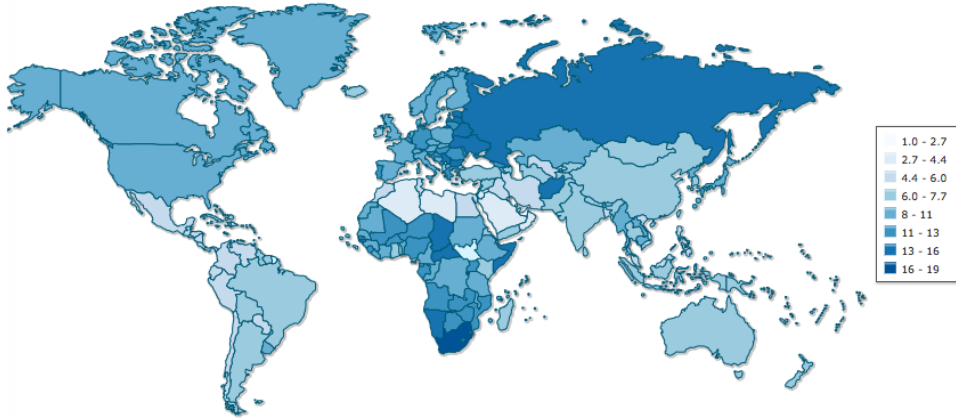
$$m^0 = \frac{D}{E^0} = \frac{126.308}{9.877.365} \approx 12,79\%,$$

az $A = \frac{1}{2}$ év feltételezés mellett pedig a központi kitettség értéke a (3.2) összefüggés alapján

$$E^c = E^0 - \frac{1}{2}D = 9.877.365 - \frac{1}{2}126.308 = 9.814.211,$$

így a 2014. évi országos központi halandósági ráta értéke

$$m^c = \frac{D}{E^c} = \frac{126.308}{9.814.211} \approx 12,87\%.$$



3.1. ábra. Központi halandósági ráta (‰) a világ országaiban 2014-ben (forrás: www.indexmundi.com)

Illusztrációképpen a 3.1. ábra a központi halandósági ráta országonkénti alakulását szemlélteti a világon a 2014. évben. Ugyanekkor az egész világra nézve a ráta értéke 7,89‰ volt. Érdeemes megfigyelni, hogy számos fejlődő országban a fejlett országok többségéhez képest kedvezőbb a ráta értéke, ami a fejlődő országok fiatalosabb korösszetételével magyarázható. Azonos korcsoportok rátáit összehasonlítva már megmutatkozna a fejlődő országok jelentős hátránya.

A kezdeti és központi halandósági ráták közötti módszertani különbségtételen túl számos különböző típusú halandósági rátát szokásos megkü-

lönböztetni a vizsgált populáció szerint:

- *Életkor szerint*: életkortól független (úgynevezett nyers) és életkorfüggő (korévenként vagy bővebb korcsoportonként bontott) halandósági ráták,
- *Nem szerint*: uniszex, férfi és női halandósági ráták,
- *Lakóhely szerint*: országos, regionális, megyei halandósági ráták,
- *Egyéb szelekciós változók szerint*: például nyugdíjasok, házasok, egy adott biztosító valamely termékének ügyfelei, egy vállalat alkalmazottai, a saját bevallásuk szerint napi három száznál több cigarettát fogyasztók stb. halandósági rátái.

Értekezésem további fejezeteiben kitüntetett szerepet játszanak majd a életkorfüggő halandósági ráták, melyek esetén a továbbiakban az adott $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ korcsoportot alsó index jelöli majd. Ennek megfelelően az életkorfüggő kezdeti és központi halandósági ráták képletei a (3.1) összefüggés alapján:

$$\begin{aligned} m_x^0 &= \frac{D_x}{E_x^0} \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\ m_x^c &= \frac{D_x}{E_x^c} \quad (x = 1, 2, \dots, X). \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2. A halandóság matematikai modellezése

A múltbeli adatokon nyugvó, leíró statisztikai szemléleten és annak korlátain az élettartamok hosszára vonatkozó, valószínűségi számítási alapokra épülő, sztochasztikus modell feltételezésével lehetséges túllépni. Értekezésem további részében az *élettartam* kifejezés (jelölése: L) minden esetben valamely években mért, nemnegatív valószínűségi változóra

fog utalni.

A mortalitási modellezésben kiemelt jelentőségű a *túlélési függvény* (angolul *survival function*) fogalma, amely az élettartam valószínűség-eloszlását jellemzi. Az L élettartam túlélési függvényén azt a $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ függvényt szokás érteni, amelyre

$$G(y) = \mathbb{P}(L \geq y) \quad (y \geq 0).$$

Nyilvánvalóan teljesülnek a

$$G(0) = 1,$$

$$G(y) = 1 - F(y) \quad (y \geq 0)$$

összefüggések, ahol $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ az L élettartam eloszlásfüggvénye.

Ha a modellezett egyén már betöltött egy adott $x \geq 0$ életkort, akkor $L - x$ *hátralévő élettartamának* valószínűségeloszlása az $L \geq x$ feltétel melletti feltételes eloszlásként modellezhető megfelelően. Ezt ragadja meg a $G_x : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ ($x \geq 0$) *reziduális túlélési függvény* fogalma:

$$G_x(y) = \mathbb{P}(L - x \geq y | L \geq x) = \frac{\mathbb{P}(L \geq x + y)}{\mathbb{P}(L \geq x)} = \frac{G(x + y)}{G(x)} \quad (x, y \geq 0).$$

Fontos mutatószám az $x \geq 0$ éves korban *várható hátralévő élettartam*, melynek jelölése és kiszámítási módja:

$$e_x = \mathbb{E}(L - x | L \geq x) = \int_x^\infty G_x(y) dy \quad (x \geq 0), \quad (3.5)$$

illetve annak $x = 0$ melletti nevezetes speciális esete, az

$$e_0 = \mathbb{E}(L) = \int_0^\infty G(y)dy \quad (3.6)$$

születéskor várható élettartam.

Az L élettartam eloszlásának konkrét specifikációjában két jellegzetes irány különül el aszerint, hogy a modellező folytonos vagy – jellemzően egész értékű – diszkrét valószínűségi változónak tekinti azt. E két modellkeretet külön szakaszokban tárgyalom.

3.2.1. A folytonos modell és a halálozási intenzitás

Folytonos eloszlások használata esetén célszerű a halandóság mértékét az egyes életkorokban az adott pillanatra vonatkoztatni, úgy, hogy az így kapott mérőszám ne függjön a vizsgált időszak hosszától. Persze adott pillanatban a halálozási valószínűség mindig nulla, mivel folytonos eloszlás esetén bármely $y \geq 0$ értékre

$$\mathbb{P}(L = y) = 0.$$

Határértékekben viszont értelmezhető egyfajta pillanatnyi évesített halálozási valószínűség, ha egy rövid időtartam évesített halálozási valószínűségében az időtartam hossza nullához tart. Az így kapott mutatószámot szokás *halálozási intenzitásnak* (más néven *hazárráta* vagy *kockázati ráta*, angolul *hazard rate*, Ágoston–Kovács [2000]) nevezni:

$$\mu(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\mathbb{P}(L < y + \varepsilon | L \geq y)}{\varepsilon} \quad (y \geq 0).$$

A halálozási intenzitás tehát – bár maga nem valószínűség – egyfajta *évesített pillanatnyi halálozási valószínűségnek* tekinthető. A halálozási intenzitás fenti definíciója tartalmi szempontból igen szemléletes, ugyanakkor a gyakorlatban a halálozási intenzitásfüggvényt többnyire könnyebb a következő összefüggés alapján kiszámítani:

$$\mu(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{F(y + \varepsilon) - F(y)}{\varepsilon G(y)} = \frac{f(y)}{G(y)} \quad (y \geq 0, G(y) > 0),$$

ahol $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ az L élettartam sűrűségfüggvénye.

Használatos még a *kumulált halálozási intenzitás* fogalma, amely a halálozási intenzitásfüggvény és a vízszintes tengely közötti területként számítható ki:

$$M(y) = \int_0^y \mu(x) dx \quad (y \geq 0). \quad (3.7)$$

A kumulált halálozási intenzitás gyakorlati jelentőségét az adja, hogy segítségével könnyedén meghatározható a túlélési függvény a következő összefüggés alapján (Vékás [2011]):

$$G(y) = e^{-M(y)} \quad (y \geq 0). \quad (3.8)$$

2. Példa. Legyen $\mu(y) = y$ ($y \geq 0$). Ekkor a (3.7) egyenlet alapján

$$M(y) = \int_0^y \mu(x) dx = \int_0^y x dx = \frac{1}{2} y^2 \quad (y \geq 0),$$

továbbá a (3.8) összefüggés alapján

$$G(y) = e^{-M(y)} = e^{-\frac{1}{2} y^2} \quad (y \geq 0),$$

így a születéskor várható élettartam a (3.6) egyenlet és a sztenderd normális eloszlás sűrűségfüggvényének tulajdonságai alapján

$$e_0 = \int_0^\infty G(y)dy = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3.2.2. A diszkrét modell és a halandósági tábla

Aktuáriusi alkalmazásokban kitüntetett jelentőségű az egész értékű élettartamokra épülő *halandósági tábla* (angolul *life table*), melynek konstruálásához szükséges a *koréves túlélési*, illetve *koréves halálozási valószínűségek* ismerete, amelyek egész életkorok esetén annak a valószínűségét adják meg, hogy egy adott életkort éppen betöltött egyén a soron következő születésnapját megéri, illetve már nem éri meg:

$$p_x = \mathbb{P}(L \geq x + 1 | L \geq x) \quad (x \in \mathbb{N}),$$

$$q_x = \mathbb{P}(L < x + 1 | L \geq x) \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Nyilvánvalóan fennáll a következő azonosság:

$$p_x + q_x = 1 \quad (x \in \mathbb{N}), \quad (3.9)$$

illetve a koréves túlélési valószínűségek és a túlélési függvény egész életkorokban felvett értékei egymásból egyszerűen meghatározhatók:

$$p_x = \frac{G(x+1)}{G(x)} \quad (x \in \mathbb{N}, \quad G(x) > 0), \quad (3.10)$$

$$G(x) = \prod_{y=0}^{x-1} p_y \quad (x \in \mathbb{N}).$$

Az egészértékűség feltevése két okból is célszerű: egyrészt az emberi élettartamokról általában egész években mért adatok állnak csupán rendelkezésre, másrészt pedig az integrálok helyett könnyebb véges összegekkel dolgozni a modellezés során.

Az egészértékű modell matematikai hátterének ismertetéséhez mindekelőtt célszerű a T élettartamot annak egész és tört részének összegére felbontani:

$$T = \lfloor T \rfloor + T_t,$$

ahol $\lfloor T \rfloor$ az élettartam egész része, T_t pedig annak tört része. A koréves halálozási valószínűségek csak az élettartam egész részének eloszlását definiálják, így a tört rész alakulásával kapcsolatban pótlólagos feltevessel szükséges élni ebben a modellben (lásd a 3.2.3 szakaszban).

Magyarország férfinépesességének halandósági táblája a 2013. évre

x	q_x	l_x	d_x	e_x
0	0,00589	100 000	589	72,01
1	0,00035	99 411	35	71,43
2	0,00020	99 376	20	70,46
3	0,00017	99 357	17	69,47
4	0,00010	99 340	10	68,48
5	0,00005	99 330	5	67,49
6	0,00006	99 324	6	66,49
7	0,00010	99 318	9	65,50
8	0,00012	99 308	12	64,50
9	0,00013	99 296	13	63,51
10	0,00012	99 283	12	62,52
11	0,00011	99 271	10	61,53
12	0,00009	99 260	9	60,53
13	0,00012	99 251	12	59,54
14	0,00023	99 239	23	58,55
15	0,00028	99 216	27	57,56
16	0,00032	99 188	32	56,58
17	0,00036	99 157	36	55,59
18	0,00041	99 121	41	54,61
19	0,00045	99 080	45	53,64
20	0,00049	99 035	49	52,66
21	0,00052	98 987	52	51,69
22	0,00055	98 935	54	50,71
23	0,00057	98 880	57	49,74
24	0,00059	98 824	59	48,77
25	0,00061	98 765	61	47,80
26	0,00063	98 704	62	46,83
27	0,00063	98 642	62	45,86
28	0,00063	98 580	62	44,88

3.2. ábra. A KSH 2013. évi férfi néphalandósági táblájának részlete
(forrás: KSH NKI)

A halandósági táblák általában tartalmaznak egy olyan feltételezett

$\omega \in \mathbb{N}$ maximális életkort, amelyre $\mathbb{P}(T > \omega) = 0$. Magyarországon a KSH az $\omega = 100$ év paramétert alkalmazza. A maximális életkor feltevésének következménye, hogy az élettartam egész részének eloszlását meghatározzák a q_x ($x = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1$) valószínűségek a szokásos $q_\omega = 1$ pótlólagos feltételezéssel együtt, amely biztosítja, hogy a modellben nulla az ω -nál magasabb életkor megérésének valószínűsége. A halandósági táblákban a p_x és q_x ($x = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1$) valószínűségekén kívül rendszerint szerepel még az

$$\begin{aligned} l_x &= l_0 G(x) \quad (x = 0, 1, 2, \dots, \omega), \\ d_x &= l_{x+1} - l_x \quad (x = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1) \end{aligned}$$

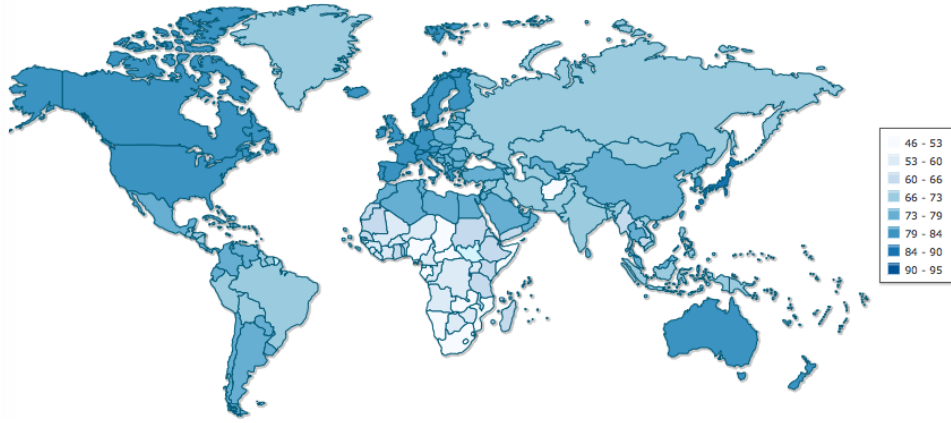
továbbélési és kihálási rend, ahol $l_0 = 100.000$ a halandósági tábla *alapszáma*. A továbbélési rend a túlélési függvény konstansszorosa, és egy az alapszámmal megegyező létszámú – hipotetikus – újszülött populációban adja meg a legalább x éves kort elérő egyének várható számát, amellett az – igen súlyos – feltételezés mellett, hogy az idő múlásával a koréves túlélési valószínűségek változatlanok maradnak. A kihálási rend ugyenezen feltevés mellett az x éves korukban elhunyt egyének várható számát adja meg.

A halandósági táblákban szerepelnek még a következő képlet alapján kiszámított *várható hátralévő élettartamok*:

$$e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{i=x+1}^{\omega} l_i + \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, \omega - 1), \quad (3.11)$$

melyekről könnyen belátható, hogy a (3.5) egyenletnek megfelelő mennyiségek, feltéve, hogy az élettartam tört részének várható érté-

ke $\mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{2}$, továbbá annak egész és tört részei függetlenek.



3.3. ábra. Születéskor várható élettartam években a világ országaiban 2014-ben (forrás: www.indexmundi.com)

Illusztrációképpen a 3.2. ábrán a KSH 2013. évi férfi néphalandósági táblájának egy részlete látható, valamint a 3.3. ábra szemlélteti az években mért születéskor várható élettartam alakulását 2014-ben a világ országaiban.

3.2.3. A folytonos és a diszkrét modell kapcsolata

Az egészértékű modell könnyedén beágyazható a folytonos modellbe: a szükséges koréves túlélési valószínűségek a (3.10) összefüggés alapján meghatározhatók, szükség esetén egy $\omega \in \mathbb{N}$ feltételezett maximális életkorral és a $q_\omega = 1$ lezárással kiegészítve. Tehát a folytonos modell alapján is elkészíthető a halandósági tábla.

Fordított irányban a két modell kapcsolata már nem ilyen egyértelmű: az egészértékű modell nyilvánvalóan kevesebb információt hordoz a folytonos modellnél, mivel a túlélési függvényt csak egész életkorok esetén definiálja, nem specifikálva az élettartam tört részének eloszlását.

Ebben az esetben – szükség esetén – két egész életkor között a túlélési függvényt a szomszédos egész értékek közötti interpolációval szokás definiálni, így bizonyos értelemben a folytonos modell is beágyazható az egészértékű modellbe.² Az interpoláció mikéntjére többféle megoldás létezik a szakirodalomban. A túlélési függvény interpolációja általános alakban, az argumentumot annak x egész és v tört részére felbontva (Bowers és szerzőtársai [1997], 3.6. alfejezet):

$$\phi(G(x+v)) = (1-v)\phi(G(x)) + v\phi(G(x+1)) \quad (x \in \mathbb{N}, 0 \leq v < 1),$$

ahol a $\phi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton *interpolációs függvény* általában a következők valamelyike:

- identitásfüggvény: $\phi(s) = s$,
- logaritmusfüggvény: $\phi(s) = \ln s$,
- reciprokfüggvény: $\phi(s) = s^{-1}$.

A fenti választások esetén ebben a sorrendben *lineáris*, *exponenciális* vagy *harmonikus interpolációról* beszélhetünk. E három eljárás esetén a $G(x+v)$ és $\mu(x+v)$ ($x \in \mathbb{N}$, $0 \leq v < 1$) interpolált túlélési és halálozási intenzitásfüggvényeket a 3.1. táblázat foglalja össze.

Eljárás	$\phi(s) =$	$G(x+v) =$	$\mu(x+v) =$
Lineáris	s	$(1-v)G(x) + vG(x+1)$	$\frac{q_x}{1-vq_x}$
Exponenciális	$\ln s$	$G(x)(p_x)^v$	$-\ln p_x$
Harmonikus	s^{-1}	$\frac{G(x)G(x+1)}{vG(x)+(1-v)G(x+1)}$	$\frac{q_x}{1-(1-v)q_x}$

3.1. táblázat. A legelterjedtebb interpolációs eljárások (forrás: saját szerkesztés Bowers és szerzőtársai [1997] alapján)

²Érdemes megjegyezni, hogy az itt bemutatott interpolációs módszerek például 5 év hosszúságú időszakra vonatkozó halandósági ráták évesítésére is alkalmazhatók.

A lineáris interpolációt ebben a kontextusban a halálesetek éven belüli egyenletes eloszlása hipotézisének is nevezik, mivel egyszerűen belátható, hogy alkalmazása egyenértékű azzal a feltételezéssel, hogy az élettartam tört része egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon, valamint független annak egész részétől. Ebben az esetben a (3.5) és (3.11) egyenletek azonos eredményre vezetnek. Az eljárás szemléletessége ellenére az intuícióval ellentétes, hogy alkalmazása esetén a halálozási intenzitásfüggvény az egész életkoroknál található ugráspontokban nem feltétlenül monoton növekvő.

Exponenciális interpoláció esetén a halálozási intenzitásfüggvény szakaszonként konstans (lépcsős) függvény, amelyet ezért a konstans halálozási intenzitás hipotézisének is neveznek. Az intenzitásfüggvény monoton növekvő, ha a koréves halálozási valószínűségek sorozata növekvő.³ Ekkor az exponenciális interpoláció az egyetlen olyan a bemutatott három megközelítés közül, amely – az intuíciónak megfelelően – garantáltan monoton növekvő halálozási intenzitásfüggvényt eredményez. Az eljárás további kedvező tulajdonsága a 3.1. táblázatban szereplő interpolált túlélési és halálozási intenzitásfüggvények egyszerűsége.

A hiperbolikus interpolációt a szakirodalom Balducci-hipotézis néven is ismeri. Használata az intuícióval és a tapasztalatokkal ellentétesen azt feltételezi, hogy egész életkorok között a halálozási intenzitásfüggvény csökkenő.

³ Ez utóbbi feltevés általában csak igen alacsony életkorok esetén sérül, de ekkor nem is várható el a halálozási intenzitásfüggvény monotonitása.

3.3. A halandósági tábla becslése

3.3.1. Becslés diszkrét modellkeretben

Feltéve, hogy minden egyes $x \in \{0, 1, \dots, \omega - 1\}$ életkorra megfigyelhető $E_x^0 \in \mathbb{N}_{>0}$ egyén túlélése az egyének x -edik születésnapját követő egy-egy évben, jelölje D_x az x éves életkorban megfigyelt halálozások számát, valamint \tilde{D}_x a megfelelő elméleti valószínűségi változót. Ekkor az egyéni élettartamok függetlenségét feltételezve ez utóbbiak független, binomiális eloszlású valószínűségi változók az alábbi paraméterekkel:

$$\tilde{D}_x \sim \text{Bin}(E_x^0, q_x) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega - 1). \quad (3.12)$$

Ezért a modell log-likelihood függvénye a következő alakban írható fel:

$$\ell(q_0, q_1, \dots, q_{\omega-1}) = \alpha + \sum_{x=0}^{\omega-1} \left(D_x \ln q_x + (E_x^0 - D_x) \ln(1 - q_x) \right), \quad (3.13)$$

ahol $\alpha = \sum_{x=0}^{\omega-1} \ln \left(\frac{E_x^0}{D_x} \right)$ konstans. A (3.13) függvény a maximumát akkor veszi fel, ha a jobb oldalon szereplő összeg minden egyes tagja maximális. Elemi differenciálszámítással belátható, hogy ez a

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{E_x^0} = m_x^0 \quad (x = 0, 1, \dots, \omega - 1) \quad (3.14)$$

értékek esetén teljesül, vagyis a q_x koréves halálozási valószínűségek maximum likelihood becslőfüggvényei a (3.4) egyenlet szerinti életkorfüggő kezdeti halandósági ráták.

3.3.2. Becslés folytonos modellkeretben

A diszkrét modellt a folytonos modellbe a 3.2.3. szakaszban ismertetett – legkedvezőbb tulajdonságokkal rendelkező – exponenciális interpoláció feltevése mellett beágyazva a modell log-likelihood függvénye a következő alakban írható fel (Ágoston–Kovács [2000]):

$$\ell(\mu(0), \mu(1), \dots, \mu(\omega - 1)) = \sum_{x=0}^{\omega-1} \left(D_x \ln \mu(x) - \mu(x) E_x^c \right). \quad (3.15)$$

A (3.15) függvény maximumhelyén a jobb oldalon szereplő összeg minden egyes tagja maximális, ami a

$$\hat{\mu}(x) = \frac{D_x}{E_x^c} = m_x^c \quad (x = 0, 1, \dots, \omega - 1) \quad (3.16)$$

választás esetén teljesül. Tehát ebben a modellkeretben a halálozási intenzitásfüggvény egész életkorokban felvett értékeinek maximum likelihood becsléseit a (3.4) összefüggés szerinti életkorfüggő központi halandósági ráták adják.

A 3.1. táblázat és a (3.9) összefüggés alapján exponenciális interpoláció esetén teljesül az alábbi összefüggés:

$$\mu(x) = -\ln(1 - q_x) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega - 1), \quad (3.17)$$

így ebben a modellben a (3.16) és (3.17) egyenletek összevetéséből és a maximum likelihood becslőfüggvény függvénytranszformációval szembeni invarianciájából adódik a koréves halálozási valószínűségek maxi-

mum likelihood becslése:

$$\begin{aligned} -\ln(1 - \hat{q}_x) &= m_x^c, \\ \hat{q}_x &= 1 - e^{-m_x^c} \quad (x = 0, 1, \dots, \omega - 1), \end{aligned}$$

ami általában a (3.14) összefüggéstől – a különböző kiinduló feltevések következtében – kissé eltérő eredményt ad, de a különbség a gyakorlatban jelentéktelen.

Értekezésem további részében koréves halálozási valószínűségek esetén a (3.14), halálozási intenzitásfüggvény esetén pedig a (3.16) összefüggést tekintem mérvadónak.

3.3.3. A születésnapok és a naptári év kezdete közötti eltérés korrekciója

Fontos kitétel, hogy a (3.14) összefüggés feltételezi, hogy a megfigyelési időszak kezdete az egyének születésnapjára esik, így egyénenként különböző. Ezzel szemben a valóságban egy adott naptári évre vonatkozó halandósági tábla összeállításánál az adott év január elsején megfigyelt x éves egyének – ritka kivételektől eltekintve – nem aznap töltötték be az x -edik életévüket, így elképzelhető, hogy az adott naptári évben bekövetkező haláluk idején már $x + 1$ évesek, illetve – ehhez hasonlóan – az év során x évesen elhunyt egyének jelentős része a naptári év kezdetekor még csak $x - 1$ éves. Így ha E_x^0 a *naptári év kezdetén* x éves egyének számát és D_x a *naptári év során* x évesen elhunyt egyének számát jelöli, akkor a (3.14) összefüggés már hibás eredményt ad, mivel a számlálóban figyelembe vett egyének egy része nem szerepel a nevezőben, és a nevezőben figyelembe vett, a naptári év során elhunyt

egyének egy része nem szerepel a számlálóban.

A probléma megoldására a KSH az alábbi úgynevezett Böckh-formulát (Radnóti [2003]) alkalmazza, amely már figyelembe veszi és korrigálja a naptári év kezdete és az egyének születésnapjai közötti eltérést:

$$\begin{aligned} \hat{q}_0 &= 1 - \left(1 - \frac{D'_0}{B}\right) \left(1 - \frac{D''_0}{E_x^0}\right), \\ \hat{q}_x &= 1 - \left(1 - \frac{D'_x}{E_{x-1}^0 - D''_{x-1}}\right) \left(1 - \frac{D''_x}{E_x^0}\right) \quad (x = 1, 2, \dots, \omega - 1), \end{aligned} \quad (3.18)$$

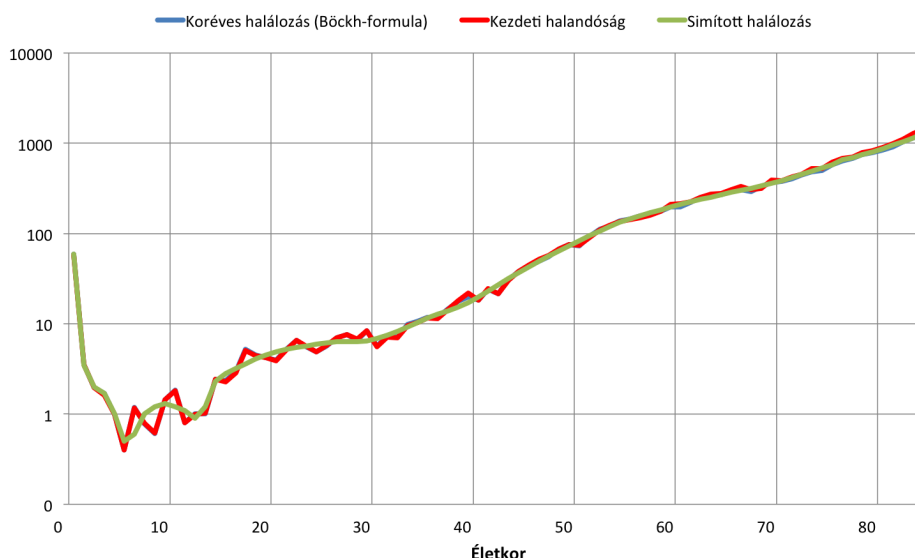
ahol B az adott naptári évre eső élveszületések száma, valamint D'_x és D''_x azon x évesen, az adott naptári év folyamán elhunyt egyének száma, akik x -edik születésnapjukat az adott, illetve a megelőző naptári évben töltötték be.⁴

A 3.4. ábra egy példán keresztül szemlélteti, hogy valódi hazai halandósági adatokon a (3.14) és (3.18) képletek eredményei még magas életkorok esetén sem különböznek egymástól számottevően: a koréves halálozási valószínűségek és a kezdeti halandósági ráták görbéi szabad szemmel megkülönböztethetetlenek egymástól.

3.3.4. Kiegyenlítő eljárások

Ahogy a 3.4. ábrán is látható, a (3.14) vagy (3.18) összefüggések alapján becsült koréves halálozási valószínűségek sorozata meglehetősen szabálytalan, véletlen ingadozást tartalmaz, amelyet célszerű kiszűrni az adatokból az élet- és nyugdíjbiztosítási alkalmazások céljára. Az aktuáriusi szakirodalom ezt *kiegyenlítésnek* vagy *simításnak* (angolul *graduation* vagy *smoothing*) nevezi. Erre a célra félpaméteres, paraméteres

⁴ Nyilvánvalóan fennáll a $D'_x + D''_x = D_x$ ($x = 1, 2, \dots, \omega - 1$) azonosság.



3.4. ábra. Férfi koréves halálozási valószínűségek, kezdeti halandósági ráták és simított koréves halálozási valószínűségek (2013-ban, 0–84 évesekre, 10.000 főre, logaritmikus skálán, forrás: saját szerkesztés a KSH NKI adatai alapján)

és nemparaméteres eljárások egyaránt alkalmazhatók.

A KSH a (3.18) összefüggés alapján becsült koréves halálozási valószínűségek simítására a következő félpaméteres eljárást alkalmazza (Ágoston [2003]): 0–3 éves életkorok esetén a becsült koréves halálozási valószínűségeket változatlanul hagyják, 4–14 éves életkorok között negyedfokú polinom illesztésével simítják azokat, 15–74 éves életkorok között a mozgóátlagoláshoz hasonló – mechanikus kiegyenlítésnek is nevezett –, úgynevezett Karup–King interpolációt alkalmazzák, 75–100 éves életkorok között pedig a Gompertz–Makeham törvényt (lásd a 3.2. táblázatban) illesztik a becsült adatokra. A 3.4 ábrán látható a simítás hatása a koréves halálozási valószínűségekre.

További lehetőség a paraméteres simító módszerek alkalmazása, vagyis paraméteres eloszlás illesztése a megfigyelt élettartamokra. Az ilyen eloszlásokat a szakirodalom *halandósági törvényekként* (angolul *morta-*

lity laws) is ismeri. A paraméteres simítás leginkább abban az esetben hasznos az aktuáriusi gyakorlatban, ha – például kisebb állománnyal rendelkező életbiztosítók vagy nyugdíjpénztárak esetén – a megfigyelt populációban túl kevés adat áll rendelkezésre a halandósági tábla megbízható becslésére. Ekkor a paraméteres eloszlás által meghatározott szabályszerűségek hivatottak kiegészíteni a hiányos halandósági tapasztalatokat. Az eloszlások paraméterei a közönséges és súlyozott legkisebb négyzetek módszerével és a maximum likelihood módszerrel egyaránt becsülhetők. Csupán illusztrációképpen, a teljesség igénye nélkül néhány nevezetes halandósági törvény paramétereit és $\mu(y)$ ($y \geq 0$) halál-
lozási intenzitásfüggvényeit mutatja be a 3.2. táblázat.

Név	Paraméterek	Intenzitásfüggvény
de Moivre	$\omega > 0$	$(\omega - y)^{-1}$ ($y < \omega$)
Gompertz	$\alpha, \beta > 0$	$\alpha e^{\beta y}$
Gompertz–Makeham	$\alpha, \beta, \gamma > 0$	$\alpha e^{\beta y} + \gamma$
Logisztikus	$\alpha, \beta, \gamma > 0$	$\frac{\alpha e^{\beta y}}{1 + \alpha e^{\beta y}} + \gamma$
Weibull	$\alpha, \beta > 0$	αy^{β}

3.2. táblázat. Néhány nevezetes halandósági törvény
(forrás: saját szerkesztés)

A féLPARAMÉTERES és paraméteres módszereken kívül további lehetőség a nemparaméteres simító eljárások alkalmazása. Ilyenre példák a korábban említett Karup–King interpoláció, a mozgóátlagolás vagy a p-spline interpoláció (lásd például Currie és szerzőtársai [2004]).

3.3.5. Az illeszkedés vizsgálata

Ha rendelkezésre állnak feltételezések a q_x koréves halálozási valószínűségek értékeire, akkor az azonos korcsoportokra vonatkozó, ismert E_x^0 kezdeti kitettség és D_x haláleseti gyakoriságok esetén érdemes

megvizsgálni, hogy a tapasztalt értékek származhatnak-e a feltételezett halandósági ráták által meghatározott eloszlásból. A életkorfüggő elméleti halálesi gyakoriságok valószínűségi változóit \tilde{D}_x -szel jelölve a nullhipotézis ekkor:

$$H_0 : \quad \mathbb{E}(\tilde{D}_x) = D_x \quad (x = 1, 2, \dots, X). \quad (3.19)$$

Az egyes egyének egymástól független túlélését feltételezve az életkorfüggő elméleti halálesi gyakoriságok független, binomiális eloszlású valószínűségi változók:

$$\tilde{D}_x \sim \text{Bin}(E_x^0, q_x) \quad (x = 1, 2, \dots, X),$$

melyek eloszlásai elegendően nagy kezdeti kitettségek esetén a közismert de Moivre–Laplace tétel következtében normális eloszlással közelíthetők:

$$\tilde{D}_x \sim \mathcal{N}(E_x^0 q_x, E_x^0 q_x (1 - q_x)) \quad (x = 1, 2, \dots, X). \quad (3.20)$$

A (3.20) összefüggés ekvivalens felírása sztenderdizálás segítségével:

$$\frac{\tilde{D}_x - E_x^0 q_x}{\sqrt{E_x^0 q_x (1 - q_x)}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (x = 1, 2, \dots, X). \quad (3.21)$$

A (3.19) nullhipotézis fennállása esetén így – elegendően nagy kezdeti kitettségeket feltételezve – a (3.21) összefüggés következtében felírható a következő tesztstatisztika:

$$\chi^2 = \sum_{x=1}^X \frac{(D_x - E_x^0 q_x)^2}{E_x^0 q_x (1 - q_x)} \sim \chi^2(X). \quad (3.22)$$

Így az illeszkedésre vonatkozó (3.19) nullhipotézis az adott $0 < \alpha < 1$ szignifikanciaszinten elutasítható, ha fennáll az alábbi reláció:

$$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(X),$$

ahol $\chi^2_{1-\alpha}(X)$ a $\nu = X$ szabadságfokú χ^2 -eloszlás $1 - \alpha$ valószínűségi szinthez tartozó kvantilise.

Érdemes megjegyezni, hogy központi kitettségek ismerete esetén a (3.2) közelítés segítségével kiszámított kezdeti kitettségek alapján is felírható a (3.22) tesztstatisztika.

A halandósági táblák egyezésének vizsgálatára számos további eljárást és tesztstatisztikát mutat be például Benjamin–Pollard [1993] műve és Arató és szerzőtársai [2009] tanulmánya.

II. rész

A Lee–Carter modell és alkalmazása

4. fejezet

A Lee–Carter modell elmélete

Ebben a fejezetben a halandóság-előrejelzésben mára mára klasszikussá vált Lee–Carter [1992] modell részletes matematikai hátterét ismertetem. A fejezetben az m_{xt} jelölés minden esetben az $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ korcsoporthoz és $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ időszakhoz tartozó m^c központi halandósági rátákra vonatkozik majd: az egyszerűség kedvéért a c felső indexet elhagyom a halandósági ráták jelölésében. Az $1, 2, \dots, T$ időszakok minden esetben egymást követő naptári éveket jelentenek majd.¹

4.1. A modell felírása

Lee–Carter [1992] modellje feltételezi, hogy minden $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ korcsoportra és $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ időszakra ismertek egy populáció $m_{xt} > 0$ korcsoport- és időszakfüggő központi halandósági rátái, melyek alakulását a következő egyenlet írja le:

$$\ln m_{xt} = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \quad (4.1)$$

¹ Bár egyéb azonos hosszúságú, egymást követő időszakokat is jelölhetnének.

ahol az $X \geq 2$ és $T \geq 2$ egész számok a vizsgált korcsoportok és időszakok számai. A korcsoportokat többnyire korévenként, az időszakokat pedig általában naptári évenként szokás megadni.

A (4.1) egyenlet jobb oldalán szereplő a_x és b_x , valamint k_t értékek a mortalitás alakulásának életkortól, illetve időszaktól függő paraméterei, ε_{xt} pedig a modell véletlen hibatagjait jelöli, melyekről általában szokás feltenni, hogy független, 0 várható értékű, azonos $\sigma^2 > 0$ varianciájú, normális eloszlású valószínűségi változók:²

$$\varepsilon_{xt} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

Ekkor a különböző korcsoport-időszak kombinációkhoz tartozó logaritmikus halandósági ráták függetlenek, valamint teljesül rájuk a következő összefüggés:

$$\ln m_{xt} \sim \mathcal{N}(a_x + b_x k_t, \sigma^2) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (4.2)$$

A továbbiakban célszerű a (4.1) összefüggés jobb oldalán szereplő ismeretlen paramétereket a következő vektorokba foglalni:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_T \end{bmatrix}.$$

² Bár Lee–Carter [1992] eredeti cikke a várható értéken és a variancián túl nem alkalmaz peremeloszlásbeli feltevést a hibatagokra, a normális eloszlás feltevésének előnye, hogy lehetővé teszi a szabatos maximum likelihood becslést, mely az eredeti cikkben leírttal azonos eredményre vezet.

Látható, hogy a hibatagok szórásával együtt a modell ismeretlen paramétereinek száma $2X + T + 1$, melyek a parszimónia elve jegyében kellően nagy X és T értékek esetén az ismert XT darab halandósági ráta tömör leírását szolgáltatják.

Identifikációs problémát okoz, hogy a (4.1) egyenletben szereplő paraméterek nem egyértelműek: könnyen belátható, hogy az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{k})$ paraméterek esetén az

$$(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{k}}) = \left(\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}, \frac{1}{\beta} \mathbf{b}, \beta(\mathbf{k} - \alpha \mathbf{1}) \right) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$$

transzformált paraméterekre is fennáll a (4.1) összefüggés. A szabadságfokok megszüntetése érdekében Lee–Carter [1992] a következő pótlólagos paramétermegkötéseket javasolják:³

$$\sum_{x=1}^X b_x = \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 1, \quad (4.3)$$

$$\sum_{t=1}^T k_t = \mathbf{1}^T \mathbf{k} = 0. \quad (4.4)$$

4.2. Interpretáció

A Lee–Carter modell paraméterei a következőképpen értelmezhetők:

- *Átlagos log-mortalitás:* Az a_x ($x = 1, 2, \dots, X$) paraméterek az átlagos logaritmusos halandósági ráták értékeit adják meg az egyes korcsoportokban (lásd később a (4.8) egyenletet), így a halandóság életkor szerinti tipikus alakulását jelenítik meg. Az életbiztosításban szokásos korévenkénti, 0–100 év közötti felosztás esetén jellemzően egy viszonylag magas újszülöttkori értéket (csecsemő-

³ $\mathbf{1}^T = (1, 1, \dots, 1)$ a megfelelő dimenzióbeli összegzővektor.

halandóság) követően értékük néhány éven belül eléri minimumát, majd közel lineárisan emelkedik, végül bizonyos esetekben kiugróan magas (például 95 év feletti) életkorokban kissé konkávva válik.

- *Mortalitási index:* A k_t ($t = 1, 2, \dots, T$) sorozatot mortalitási indexnek szokás nevezni. Ez a (4.1) egyenlet egyetlen időtől függő komponense, mely így a halandóság időbeli változását testesíti meg a modellben. Általában csökkenő sorozat, de gyakran tartalmaz rövid növekvő szakaszokat (például háborúk idején vagy Magyarországon a rendszerváltozást követő néhány évben).
- *Életkorfüggő érzékenység:* A b_x ($x = 1, 2, \dots, X$) együtthatók a logaritmikus halandósági ráták érzékenységét adják meg a mortalitási index változására nézve:

$$\mathbb{E}(\ln m_{x,t+1} - \ln m_{xt}) = b_x(k_{t+1} - k_t) \quad (t = 1, 2, \dots, T - 1),$$

vagyis ha a mortalitási index egy időegység alatt egységnyivel nő/csökken, akkor az adott életkorbeli logaritmikus halandósági ráta várhatóan b_x egységgel nő/csökken, illetve a (nem logaritmikus) halandósági ráta az e^{b_x} tényezőszeresére változik. Időben csökkenő mortalitási index mellett a pozitív b_x paraméterrel rendelkező életkorokbeli mortalitás csökken, a negatív életkorfüggő érzékenységű korcsoportok mortalitása pedig a trenddel ellentétesen változik.

- *Átlagos négyzetes hiba:* A σ^2 paraméter a megfigyelt logaritmikus halandósági ráták változékonyságát adja meg a korcsoport- és időszakspecifikus szisztematikus becslés körül (lásd a (4.22) egyen-

letet). Alacsony értéke esetén a modell jól reprodukálja a tapasztalatokat.

A (4.1) egyenlet bal oldalán szereplő halandósági ráták logaritmikus transzformációját a következő két körülmény indokolja: egyrészt így nem fordulhat elő negatív becsült halandósági ráta a modellben, másrészt a varianciastabilizáló transzformáció mellett valósághűbb a homogén varianciára vonatkozó úgynevezett homoszkedaszticitási feltevés a (4.2) összefüggés jobb oldalán, hiszen míg a különböző korcsoportokhoz és életkorokhoz tartozó halandósági ráták nagyságrendekkel is eltérhetnek egymástól, addig a valós és becsült értékek hányadosa alapján számított relatív eltérések alakulása jóval kiszámíthatóbb.

4.3. A paraméterek becslése

A (4.1) egyenlet paramétereinek itt bemutatott becslési eljárását Lee–Carter [1992] kissé heurisztikus gondolatmenettel indokolják, amely a maximum likelihood elv alapján tehető precízzé. Következzen tehát a paraméterbecslési eljárás ismertetése! A levezetés egyúttal elégséges feltételeket ad a megoldás létezésére és egyértelműségére.

4.3.1. A modell log-likelihood függvénye

A paramétereket a $\boldsymbol{\theta}^T = (\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{k}^T, \sigma) \in \Theta = \mathbb{R}^{2X+T} \times \mathbb{R}_{>0}$ vektorba foglalva azok maximum likelihood becslése a (4.2) összefüggés alapján felírt log-likelihood függvény (4.3) és (4.4) feltételek melletti maxima-

lizálásával végezhető el:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \{\ell(\boldsymbol{\theta}) : \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 1, \mathbf{1}^T \mathbf{k} = 0\}, \\ \ell(\boldsymbol{\theta}) &= \alpha - XT \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - a_x - b_x k_t)^2,\end{aligned}\quad (4.5)$$

ahol $\alpha = -\frac{1}{2}XT \ln(2\pi)$ konstans. A (4.5) feladat felírásából látható, hogy a $\boldsymbol{\xi}^T = (\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{k}^T) \in \Xi = \mathbb{R}^{2X+T}$ paraméter maximum likelihood becslését tetszőleges $\sigma > 0$ esetén a (4.5) egyenlet jobb oldalán szereplő eltérés-négyzetösszeg minimalizálása szolgáltatja:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\xi}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} \{SSE(\boldsymbol{\xi}) : \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 1, \mathbf{1}^T \mathbf{k} = 0\}, \\ SSE(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - a_x - b_x k_t)^2.\end{aligned}\quad (4.6)$$

4.3.2. Az eltérés-négyzetösszeg redukált alakja

Bár a (4.6) feladat jellegében hasonlít a klasszikus legkisebb négyzetek problémájához, megoldása nem végezhető a közönséges legkisebb négyzetek (OLS) módszerével, mivel a (4.1) összefüggésben egyedül a bal oldalon szerepelnek ismert mennyiségek.

Mivel a (4.6) feladat célfüggvénye folytonosan differenciálható, és az a_x paraméterekre nem vonatkoznak megkötések, ezért a feladat optimális megoldásában a hibanégyzetösszeg a_x paraméterek szerinti parciális deriváltjai nullával egyenlők:

$$\left. \frac{\partial SSE(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_x} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}} = -2 \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{k}_t) = 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X).\quad (4.7)$$

A (4.4) megkötésből és a (4.7) összefüggésből következik, hogy az a_x paraméterek maximum likelihood becslőfüggvényei minden egyes korcsoportban az ismert logaritmikus halandósági ráták átlagos értékeivel egyenlők:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X). \quad (4.8)$$

A továbbiakban célszerű bevezetni az \tilde{m}_{xt} *centrált logaritmikus halandósági ráták* fogalmát, melyek definíciója:

$$\tilde{m}_{xt} = \ln m_{xt} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (4.9)$$

Az $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$ becsült paraméterérték (4.8) összefüggés szerinti behelyettesítésével a (4.6) feladat a következő redukált problémára egyszerűsödik, melynek megoldása a $\boldsymbol{\psi}^T = (\mathbf{b}^T, \mathbf{k}^T) \in \Psi = \mathbb{R}^{X+T}$ vektor maximum likelihood becslőfüggvénye:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\psi}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\psi} \in \Psi} \{SSE(\hat{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\psi}) : \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 1, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{k} = 0\}, \\ SSE(\hat{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\psi}) &= \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\tilde{m}_{xt} - b_x k_t)^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A centrált logaritmikus központi halandósági rátákat az

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} & \dots & \tilde{m}_{1T} \\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22} & \dots & \tilde{m}_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{m}_{X1} & \tilde{m}_{X2} & \dots & \tilde{m}_{XT} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

mátrixba rendezve, valamint az euklideszi norma általánosításaként tetszőleges $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ mátrixra bevezetve a

$$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_{ij}^2} \quad (4.12)$$

mátrixnormát⁴, a (4.10) feladat célfüggvénye a következő alakot ölti:

$$SSE(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{b}, \mathbf{k}) = \|\mathbf{M} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\|_F^2. \quad (4.13)$$

A (4.10) minimalizálási feladat a (4.13) összefüggés alapján tehát az adott \mathbf{M} mátrix $\mathbf{b}\mathbf{k}^T$ alakban történő legjobb közelítésével ekvivalens, ahol az optimalitás kritériuma az eltérés-négyzetösszeg minimalizálása, figyelembe véve a (4.3) és (4.4) paramétermegkötéseket. E feladat megoldásához szükség van két lineáris algebrai tételre: a *szingulárisérték-felbontásra* (ismertebb, angol nevén *Singular Value Decomposition* vagy röviden SVD), illetve az *Eckart–Young–Mirsky approximációs tételre*. Következzen tehát e tételek ismertetése!

4.3.3. A szingulárisérték-felbontás (SVD) és az Eckart–Young–Mirsky approximációs tétel

A szingulárisérték-felbontás a lineáris algebra egyik központi tétele:⁵

1. Tétel. (Szingulárisérték-felbontás)

Tetszőleges $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ mátrix felírható

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T$$

⁴ A (4.12) normafogalom Frobenius-norma néven ismert.

⁵ A tételt és bizonyítását lásd például Harville [1997] könyvének 556–565. oldalain.

alakban, ahol $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ és $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ortogonális mátrixok, valamint $\Delta \in \mathbb{R}^{r \times s}$ olyan diagonális mátrix, melynek főátlóbeli δ_i elemei monoton csökkennek, a rang \mathbf{M} -edik értékig bezárólag pozitívak, azt követően pedig nullával egyenlők:

$$\begin{aligned} \delta_1 &\geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{\text{rang } \mathbf{M}} > 0, \\ \delta_i &= 0 \quad (\text{rang } \mathbf{M} < i \leq \min\{r, s\}). \end{aligned}$$

A δ_i ($i = 1, 2, \dots, \min\{r, s\}$) számokat az \mathbf{M} mátrix szingulárisértékeinek, az \mathbf{U} és \mathbf{V} mátrixok \mathbf{u}_i és \mathbf{v}_i oszlopvektorait pedig az \mathbf{M} mátrix δ_i szingulárisértékéhez tartozó bal és jobb oldali szingulárisvektorainak szokás nevezni.

Belátható, hogy a valamely adott szingulárisértékhez tartozó szingulárisvektorok nem egyértelműek: tetszőleges δ_i ($i = 1, 2, \dots, \min\{r, s\}$) szingulárisértékhez tartozó \mathbf{u}_i és \mathbf{v}_i bal és jobb oldali szingulárisvektorokra az $\tilde{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\beta} \mathbf{u}_i$, $\tilde{\mathbf{v}}_i = \beta \mathbf{v}_i$ ($\beta \in \mathbb{R}$) vektorok is ugyanazon szingulárisértékhez tartozó bal és jobb oldali szingulárisvektorok.

A szingulárisérték-felbontásnál közismertebb, azzal rokon módszer a szimmetrikus mátrixok spektrálfelbontása. Érdekes tehát megvizsgálni a két módszer közötti kapcsolatot. Az 1. tételben szereplő szingulárisérték-felbontás alapján az $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ és $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ (szimmetrikus) mátrixok a következő alakban állnak elő:

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \mathbf{U}\Delta\mathbf{V}^T\mathbf{V}\Delta^T\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\Delta\Delta^T\mathbf{U}^T, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{V}\Delta^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\Delta\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\Delta^T\Delta\mathbf{V}^T. \quad (4.15)$$

Mivel \mathbf{U} és \mathbf{V} ortogonális mátrixok, valamint $\Delta\Delta^T$ és $\Delta^T\Delta$ olyan

diagonális mátrixok, amelyek főátlóbeli pozitív elemei az \mathbf{M} mátrix pozitív szingulárisértékeinek négyzetei, ezért a (4.14) és (4.15) képletek az $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ és $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ mátrixok spektrálfelbontását adják. Belátható tehát, hogy ezen mátrixok pozitív sajátértékei megegyeznek az \mathbf{M} mátrix pozitív szingulárisértékeinek négyzeteivel, sajátvektoraik pedig megegyeznek \mathbf{M} bal illetve jobb oldali szingulárisvektoraival.

Az Eckart–Young–Mirsky tétel a mátrixok alacsonyabb rangú mátrixokkal történő közelítésének problémájára ad optimális megoldást.⁶

2. Tétel. (*Eckart–Young–Mirsky tétel*)

Tetszőleges $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ mátrixra és $\rho \in \{1, 2, \dots, \text{rang } \mathbf{M}\}$ értékre az

$$\hat{\mathbf{M}} = \arg \min_{\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times s}} \{ \|\mathbf{M} - \mathbf{C}\|_F^2 : \text{rang } \mathbf{C} \leq \rho \}$$

feladat optimális megoldása felírható a következő alakban:

$$\hat{\mathbf{M}} = \sum_{i=1}^{\rho} \delta_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

ahol δ_i az $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T$ mátrix i -edik szingulárisértéke, \mathbf{u}_i és \mathbf{v}_i pedig annak i -edik bal és i -edik jobb oldali szingulárisvektora.

A 2. tétel alapján tehát $\rho = 1$ esetén az $\hat{\mathbf{M}} = \delta_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T$ alakú mátrixok biztosítják az \mathbf{M} mátrix legpontosabb egységnyi rangú közelítését.

4.3.4. Az optimális megoldás

Mivel a $\mathbf{b}\mathbf{k}^T$ alakú mátrixok egységnyi rangúak, sőt, bármely egységnyi rangú mátrix felírható ilyen formában, így az 1. és 2. tételek egyenes következménye, hogy a (4.13) összefüggésbeli eltérés-négyzetösszeget

⁶ A tételt és bizonyítását lásd például Markovsky [2012, p. 86.] könyvében.

minimalizálják az \mathbf{M} mátrix \mathbf{u}_1 első bal és \mathbf{v}_1 első jobb oldali szingulárisvektorainak következő formában felírt konstansszorosai ($\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$):

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{\beta} \mathbf{u}_1, \quad (4.16)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \beta \delta_1 \mathbf{v}_1. \quad (4.17)$$

A β konstans megválasztásánál figyelembe kell venni a (4.3) és (4.4) paramétermegkötéseket. Jól látható, hogy a (4.3) megkötés teljesül, amennyiben a (4.16) egyenletben

$$\beta = \mathbf{1}^T \mathbf{u}_1 \neq 0 \quad (4.18)$$

az \mathbf{u}_1 vektor koordinátáinak összege.⁷

Továbbá mivel a (4.9) és (4.11) összefüggésekből látható, hogy az \mathbf{M} mátrix sorainak összege nulla, ezért

$$\mathbf{M} \mathbf{1} = \mathbf{0}. \quad (4.19)$$

A (4.15) összefüggés alapján \mathbf{v}_1 az $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ mátrix δ_1^2 sajátértékhez tartozó sajátvektora, ezért a (4.19) egyenlet alapján

$$0 = (\mathbf{M} \mathbf{1})^T \mathbf{M} \mathbf{v}_1 = \mathbf{1}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_1) = \mathbf{1}^T \delta_1^2 \mathbf{v}_1 = \delta_1^2 \mathbf{1}^T \mathbf{v}_1,$$

vagyis a \mathbf{v}_1 vektor koordinátáinak összege $\mathbf{1}^T \mathbf{v}_1 = 0$, így a (4.17) egyenlet miatt a (4.4) megkötés automatikusan teljesül.⁸

⁷ Ha kivételesen $\mathbf{1}^T \mathbf{u}_1 = 0$ adódik, akkor a (4.3) megkötés a $\mathbf{b}^T \mathbf{b} = 1$ feltétellel helyettesíthető. Az új megkötés a (4.16) egyenlet alapján $\beta = 1$ mellett teljesül, mivel ekkor $\hat{\mathbf{b}}^T \hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{\beta^2} \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = 1$, figyelembe véve, hogy \mathbf{U} ortogonális mátrix.

⁸ Eltekintve a $\delta_1 = 0$ elfajult esettől. A 1. tétel alapján ekkor $\text{rang } \mathbf{M} = 0$, vagyis $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, és a (4.9) és (4.11) egyenletek következtében $\ln m_{xt}$ bármely adott $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ korcsoporra konstans t -ben, tehát nincs mit modellezni.

A $\hat{\psi}$ megoldás egyértelműségéhez elégséges, ha

$$\delta_1 > \delta_2, \quad (4.20)$$

mivel ekkor a (4.14) és (4.15) mátrixok δ_1^2 sajátértékhez tartozó sajátalterei egydimenziósak.⁹

Tekintve, hogy a (4.5) log-likelihood függvény folytonosan differenciálható, és a σ paraméterre a $\sigma > 0$ feltételtől eltekintve nem vonatkoznak megkötések, ezért a maximumhelyen σ szerinti parciális deriváltja nullával egyenlő:

$$\left. \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\frac{XT}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3} \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{k}_t)^2 = 0, \quad (4.21)$$

így a (4.21) összefüggésből következik, hogy a hibatagok varianciájának maximum likelihood becslőfüggvénye a modell átlagos négyzetes hibája:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{XT} \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T (\ln m_{xt} - \hat{a}_x - \hat{b}_x \hat{k}_t)^2 = \frac{SSE(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{XT}. \quad (4.22)$$

Ha az \mathbf{M} mátrixra teljesül a

$$\text{rang } \mathbf{M} > 1 \quad (4.23)$$

feltétel, akkor a 2. tétel szerinti egységnyi rangú közelítés nem lehet tökéletes, így a (4.6) feladat célfüggvényére $SSE(\hat{\boldsymbol{\xi}}) > 0$, vagyis a (4.22) egyenlet alapján teljesül a $\hat{\sigma} > 0$ feltétel.¹⁰

Könnyen ellenőrizhető, hogy a (4.5) egyenletbeli $\ell(\boldsymbol{\theta})$ log-likelihood

⁹ A vonatkozó tételt lásd például Harville [1997] könyvének 530. oldalán.

¹⁰ A rang $\mathbf{M} = 1$ speciális esetben $SSE(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = 0$, vagyis az illesztett modell hiba nélkül leírja a logaritmikus halandósági ráták alakulását, így nincs szükség hibatagokra.

függvény σ -ban folytonos az $\mathbb{R}_{>0}$ halmazon, valamint bármely adott $SSE(\hat{\xi}) > 0$ mellett

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \ell(\hat{\xi}, \sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \ell(\hat{\xi}, \sigma) = -\infty,$$

így az $\ell(\theta)$ függvény felveszi a maximumát a Θ halmazon.

Mivel beláttuk, hogy $SSE(\hat{\xi}) \leq SSE(\xi)$ ($\xi \in \Xi$), továbbá az $\ell(\theta)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható, és $\hat{\sigma} > 0$ esetén fennáll a

$$\left. \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \sigma \partial \sigma} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -2 \frac{XT}{\hat{\sigma}^2} < 0,$$

összefüggés, ezért a (4.22) egyenlet szerint választott $\hat{\sigma}$ maximalizálja a log-likelihood függvényt. Tehát a (4.8), (4.16), (4.17), (4.18) és (4.22) egyenletek együttesen a θ paraméter maximum likelihood becslését szolgáltatják.

Végezetül az itt ismertett eredmények alapján megállapítható az is, hogy a (4.18), (4.20) és (4.23) feltételek együttesen elégségesek a maximum likelihood becslőfüggvény létezéséhez és egyértelműségéhez.

4.4. A mortalitási index kiigazítása

Ha minden $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ korcsoportra és $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ időszakra ismertek a korcsoport- és életélethorfüggő $E_{xt}^c > 0$ központi kitettségek és $D_{xt} \in \mathbb{N}$ halálesi gyakoriságok, akkor Lee–Carter [1992] a mortalitási index tapasztalati adatokhoz történő kiigazítását javasolják. Az eljárás ezen lépését az a megfigyelés motiválja, hogy a Lee–Carter modell 4.3. szakaszban bemutatott becslése egyenlő súllyal kezeli az egyes korcsoportokat, figyelmen kívül hagyva azok létszámait és halálesi gya-

koriságait, így a halálesetek számait pontosabban becsüli a fiatalabb, mint az idősebb életkorokban.

A kiigazított mortalitási indexet a

$$\hat{\mathbf{k}}^{(adj)} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^T : D_t = \sum_{x=1}^X D_{xt} = \sum_{x=1}^X E_{xt}^c e^{a_x + b_x k_t} \quad (t = 1, 2, \dots, T)\} \quad (4.24)$$

egyenletrendszer megoldása szolgáltatja. A kiigazítás alkalmazása esetén teljesül tehát, hogy az egyes időszakokban megfigyelt halálesetek számai pontosan megegyeznek azok modellbeli várható értékeivel.

Látható, hogy a (4.24) egyenletrendszer jobb oldalán szereplő kifejezés minden $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ esetén k_t -ben folytonos, szigorúan monoton növekvő, valamint határértéke $k_t \rightarrow -\infty$ esetén 0, $k_t \rightarrow \infty$ esetén pedig ∞ , így ha $D_t > 0$ ($t = 1, 2, \dots, T$), vagyis minden megfigyelt időszakban történt haláleset, akkor az egyenletrendszer megoldása létezik és egyértelmű. Gyakorlati alkalmazásokban az egyenletrendszer megoldását numerikus eljárásokkal szükséges előállítani.

Kíváncsi tulajdonságai ellenére a mortalitási index kiigazítása heurisztikus eljárásnak tekinthető, mely nem illeszkedik a 4.3. alfejezetben bemutatott, maximum likelihood elvre épülő becslési keretbe.

4.5. A mortalitási index időbeli alakulása

A kiigazított mortalitási index idősorát Lee–Carter [1992] ARIMA folyamatnak (lásd például Asteriou–Hall [2015]) tekintik. Empirikus vizsgálataik igazolták, hogy az eltolásos véletlen bolyongás néven ismert eltolásos ARIMA(0, 1, 0) modellspecifikáció valós adatokon többnyire igen jó illeszkedést mutat. Az azóta publikált alkalmazások túlnyomó

részében is ez a specifikáció szerepel.

4.5.1. A modell felírása

Az eltolásos véletlen bolyongás modellje alapján a kiigazított mortalitási index időbeli alakulása a következő egyenlet segítségével írható le:

$$\hat{k}_t^{(adj)} = \hat{k}_{t-1}^{(adj)} + s + \phi_t \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (4.25)$$

ahol $\hat{k}_1^{(adj)} \in \mathbb{R}$ adott kezdőérték, az $s \in \mathbb{R}$ trendparaméter az eltolás mértéke, ϕ_t pedig a folyamat véletlen hibatagjait jelöli, melyek független, 0 várható értékű, azonos $\sigma_{RWD}^2 > 0$ varianciájú, normális eloszlású valószínűségi változók:

$$\phi_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{RWD}^2) \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (4.26)$$

továbbá függetlenek a Lee–Carter modell (4.1) alapegyenletének ε_{xt} ($x = 1, 2, \dots, X$, $t = 1, 2, \dots, T$) hibatagjaitól is.

Tehát a kiigazított mortalitási index a Lee–Carter modellben a (4.25) egyenlet alapján az időben lineáris sztochasztikus trendfolyamatot követ, melynek növekményei függetlenek. A sztochasztikus trend meredekségét megadó s trendparaméter jellemzően negatív a halandóság időbeli javulása miatt.

4.5.2. A paraméterek becslése

A (4.25) egyenletet átrendezve a (4.26) összefüggésből adódik, hogy a kiigazított mortalitási index idősorának elsőrendű differenciái függet-

len, azonos paraméterekkel rendelkező, normális eloszlású valószínűségi változók:

$$\hat{k}_t^{(adj)} - \hat{k}_{t-1}^{(adj)} \sim \mathcal{N}(s, \sigma_{RWD}^2) \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (4.27)$$

így közös eloszlásuk várható értékének és varianciájának maximum likelihood becslőfüggvényei a megfigyelt minta átlagával, illetve varianciájával egyenlők:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{k}_t^{(adj)} - \hat{k}_{t-1}^{(adj)}) = \frac{\hat{k}_T^{(adj)} - \hat{k}_1^{(adj)}}{T-1}, \\ \hat{\sigma}_{RWD}^2 &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{k}_t^{(adj)} - \hat{k}_{t-1}^{(adj)} - \hat{s})^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A (4.28) egyenlet alapján látható, hogy a kiigazított mortalitási index trendparamétere csak az első és utolsó megfigyelt értékektől függ, és az idősor kezdő és záró időszakok közötti átlagos megváltozásával egyenlő.

4.5.3. A trend szignifikanciája

A növekmények függetlensége és a (4.27) egyenlet szerint feltételezett normalitása miatt az eltolásos véletlen bolyongás trendparaméterére a következő konfidenciaintervallum írható fel:

$$\mathbb{P} \left(\hat{s} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2) \frac{\hat{\sigma}_{RWD}}{\sqrt{T-1}} < s < \hat{s} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2) \frac{\hat{\sigma}_{RWD}}{\sqrt{T-1}} \right) = 1 - \alpha, \quad (4.29)$$

ahol $0 < \alpha < 1$ adott szignifikanciaszint, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T-2)$ pedig a $\nu = T-2$ szabadságfokú Student-eloszlás $1 - \frac{\alpha}{2}$ valószínűségi szinthez tartozó kvantilise. Amennyiben a (4.29) konfidenciaintervallum tartalmazza

a nulla értéket, vagy ezzel ekvivalens módon, amennyiben a

$$TS = \frac{s - \hat{s}}{\hat{\sigma}_{RWD}} \sqrt{T - 1}$$

tesztstatisztikára $|TS| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(T - 2)$ teljesül, úgy a

$$H_0 : \quad s = 0,$$

$$H_1 : \quad s \neq 0$$

hipotézispár alkalmazása esetén az adatok alapján nem vethető el a H_0 nullhipotézis, vagyis az s trendparaméter az adatok alapján nem különbözik szignifikánsan nullától. A nullhipotézis – elegendően hosszú idősor esetén empirikus adatokon igen ritkán előforduló – elfogadása esetén a (4.25) egyenlet alapján a kiigazított mortalitási index várható értéke időben konstansnak tekinthető, és a (4.1) egyenlet alapján az időben változatlan, statikus életkorfüggő halandósági ráták alkalmazása elfogadható. Vagyis ebben a ritka esetben a Lee–Carter modell szerint valójában nincs szükség a halandósági ráták előrejelzésére, mivel azok legutolsó ismert, T -edik időszakbeli értékükkel előrejelezhetők a modell alapján.

4.6. Előrejelzés

A Lee–Carter modell eddig ismertetett lépéseinek célja a halandósági ráták múltbeli alakulásának minél pontosabb leírása a nyers adatoknál kevesebb paraméter segítségével, ami az időtől függő mortalitási index extrapolálása révén lehetőséget ad a halandósági ráták előrejelzésére.

A mortalitási index jövőbeli értékeinek pontbecslései a már ismert érté-

keket adottnak tekintve a (4.27) összefüggés extrapolálásával adódnak:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{k}_{T+j}^{(adj)}) &= \mathbb{E}\left(\hat{k}_T^{(adj)} + \sum_{i=1}^j (\hat{k}_{T+i}^{(adj)} - \hat{k}_{T+i-1}^{(adj)})\right) = \\ &= \hat{k}_T^{(adj)} + \sum_{i=1}^j \mathbb{E}(\hat{k}_{T+i}^{(adj)} - \hat{k}_{T+i-1}^{(adj)}) = \hat{k}_T^{(adj)} + js \quad (j = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

A maximum likelihood becslőfüggvény függvénytranszformációra vonatkozó invarianciája miatt a (4.28) egyenletben szereplő becsült trend-paraméter behelyettesítésével nyerhető a jövőbeli mortalitási indexek várható értékének maximum likelihood becslőfüggvénye:¹¹

$$\hat{\mathbb{E}}(\hat{k}_{T+j}^{(adj)}) = \hat{k}_T^{(adj)} + j\hat{s} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (4.30)$$

Végül a (4.30) egyenletet a (4.1) összefüggésbe helyettesítve jelezhetők előre a központi logaritmikus halandósági ráták:

$$\ln \hat{m}_{x,T+j} = \hat{a}_x + \hat{b}_x(\hat{k}_T^{(adj)} + j\hat{s}) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad j = 1, 2, \dots).$$

Az előrejelzési bizonytalanság a (4.25) egyenlet hibatagjainak Monte Carlo szimulációjával (Deák [1990]) modellezhető.¹²

¹¹ Lee–Miller [2001] cikkében szerepel az a javaslat, hogy a mortalitási index utolsó ismert értéke legyen a projekció kiindulópontja. Alkalmazásokban előfordul a T -edik időszakbeli, lineáris trend alapján becsült érték használata is.

¹² A bizonytalanság modellezését lásd valamivel részletesebben a 6.7.2. szakaszban.

5. fejezet

Esettanulmány:

A magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságáról

Értekezésem jelen fejezete Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] tanulmányára épül. A bemutatott cikk a Lee–Carter [1992] modell segítségével jelzi előre a következő évtizedek statisztikai alapon várható demográfiai mutatóit, valamint bemutat egy a kapott eredmények felhasználásával felépített nyugdíjmodellt, melynek segítségével megvizsgálja a demográfiai folyamatok, a feltételezett makrogazdasági és nyugdíjpolitikai paraméterek, illetve egyes feltételezett gazdaságpolitikai intézkedések hatását a magyar állami nyugdíjrendszer fenntarthatóságára.

A felosztó-kirovó elven működő nyugdíjrendszer modellezése közgazdasági és statisztikai megközelítésben egyaránt végezhető. Számtalan tanulmány alkalmaz e célra mikro- és makroökonómiai megközelítéseket. Ezekre néhány példa: Simonovits [2003] a nyugdíjrendszerek kvantitatív modellezéséről szóló átfogó műve, Simonovits [2009] és Major–

Varga [2013] parametrikus nyugdíjreformokról szóló tanulmányai, továbbá Varga [2014] demográfiai átmenettel foglalkozó cikke. Az itt bemutatott tanulmány ezekkel szemben nem feltételez optimalizáló viselkedést és mögöttes hasznosságfüggvényeket, hanem aktuáriusi szemléletben pusztán a statisztikai módszerekkel elérhető legpontosabb előrejelzésre törekszik, a demográfiai folyamatokra és a nyugdíjrendszer működésére koncentrálva.

A módszertan mellett az egyes tanulmányok különbözhetnek aszerint is, hogy parametrikus reformok vagy szerkezeti változások hatását elemzik-e az adott modell segítségével. Az itt bemutatott tanulmány parametrikus változtatások hatását vizsgálja, míg a szerkezeti változásokat elemző tanulmányok sorába tartozik például Orbán–Palotai [2006] a tőkefedezeti pillér hatásairól írt cikke, amely a Magyar Nemzeti Bank nyugdíjmodelljével végzett szimulációk eredményeit mutatja be, illetve a Holtzer [2010] kötetben szereplő tanulmányok.

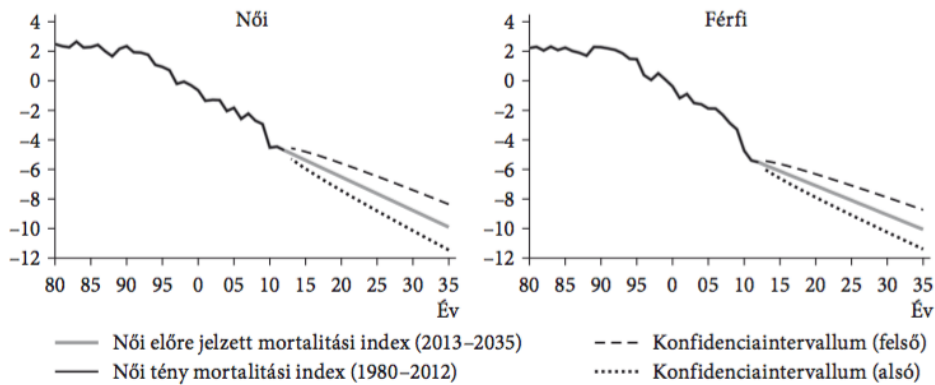
5.1. Demográfiai előrejelzés

A Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] tanulmányában bemutatott halandósági és termékenységi modell központi célja a korévenként várható magyarországi férfi és női népesség alakulásának minél pontosabb előrejelzése. A folyamat főbb lépéseit értekezésemben az áttekinthetőség kedvéért szakaszokra bontva ismertetem.

5.1.1. A halandóság modellezése

A halandóság modellezésére a szerzők a KSH 1950–2012. naptári évekre vonatkozó, nemenkénti néphalandósági tábláiból nyert adatokat hasz-

nálták fel.¹ Az előrejelzés alapjául használt bázisidőszak kiválasztása érdekében először az 1960–2000, 1970–2000, 1980–2000 és 1989–2000 tanuló időszakok alapján felépített Lee–Carter modellek segítségével előrejelezték a 2001–2012 tesztelő időszakra vonatkozó, naptári évenkénti halandósági táblákat, majd a 3.3.5. szakaszban bemutatott χ^2 -próba segítségével megvizsgálták a tényleges és az előrejelzett értékek egyezését. A halandósági táblák egyezésének tesztelését az 1–24 éves korosztályon végezték, mivel várhatóan ez a generáció fogja meghatározni a nyugdíjrendszert a későbbiekben vizsgált periódusban. A teszt eredményei alapján az 1980–2012 közötti időszakot választották bázisidőszaknak, melynek alapján a modell paramétereit becsülték. A szerzők a nemenkénti mortalitási indexek idősoraira ARIMA folyamatokat illesztettek, és a Box–Jenkins módszertan alapján az ARIMA(1, 1, 1) specifikációk mellett döntöttek. A mortalitási index múltbeli, számított és jövőbeli, előrejelzett értékeit az 5.1. ábra szemlélteti.

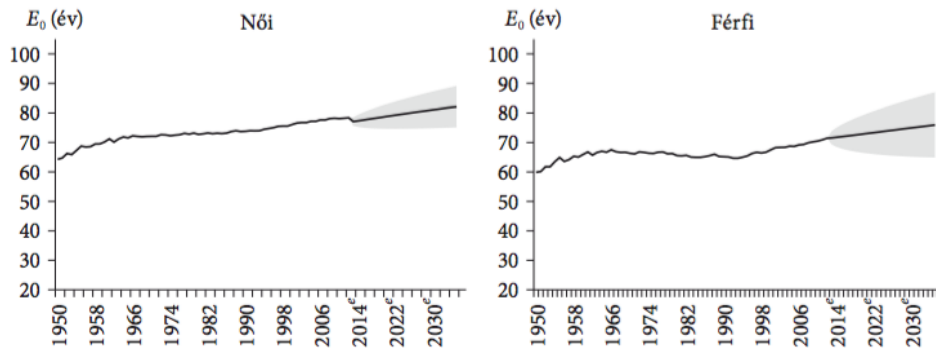


5.1. ábra. Becsült és előrejelzett k_t mortalitási indexek
(1980–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

¹ Az 1950–2009. évi adatok közvetlen forrása a Human Mortality Database adatbázis (University of California, Berkeley & Max Planck Institute for Demographic Research, Rostock, www.mortality.org, letöltés dátuma: 2016.02.11.).

Az ábra arról árulkodik, hogy Magyarországon a vizsgált időszakban a halandóság trendje igen változékonyan alakult, sőt, volt olyan időszak is – főként az 1990-es elején –, amikor általánosan növekedett a halandóság. A nők esetében a romlás mértéke kisebb volt, s a javulás üteme gyorsnak mondható, összevetve a férfi halandóság dinamikájával, ahol a javulás a romlás mértékével arányosan lassabb ütemű.

Az 5.2. ábra a születéskor várható élettartam múltban megfigyelt és jövőre vonatkozó, előre vetített értékeit mutatja be:



5.2. ábra. Múltbeli és előrejelzett születéskor várható élettartamok (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

A 2035. évre előrejelzett értékek: nők esetén 82,12 év, férfiak esetén pedig 75,95 év, a KSH 2014. évi halandósági tábláiban szereplő 78,91, illetve 72,13 évvel szemben.

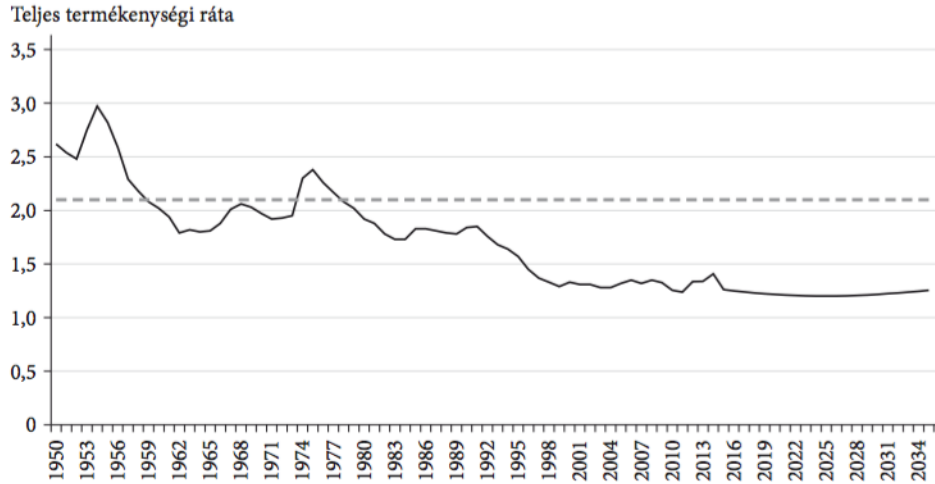
5.1.2. A termékenység modellezése

A termékenységi arányszám a halandósággal együtt nagyban meghatározza az állami nyugdíjrendszer jövőbeli fenntarthatóságát. Az úgynevezett *teljes termékenységi ráta* az egy nőre a teljes élethossza során jutó gyermekek várható számát adja meg, feltéve, hogy a gyermekszülés életkor-specifikus valószínűségei időben változatlanok. A mutató

képlete (Berde–Németh [2015a] és [2015b]):

$$TTR = \sum_{x=x_{min}}^{x_{max}} f_x,$$

ahol x_{min} és x_{max} a feltételezett legalacsonyabb és legmagasabb szülési életkorok, az f_x ($x = x_{min}, x_{min} + 1, \dots, x_{max}$) értékek pedig az életkor-specifikus termékenységi ráták. A teljes termékenységi ráta kritikus értéke (Espenshade és szerzőtársai [2003]) fejlett országokban 2,1 körül alakul: ha ezen érték alá esik a ráta értéke, akkor a vizsgált népesség létszáma általában csökkenő trendet követ.²

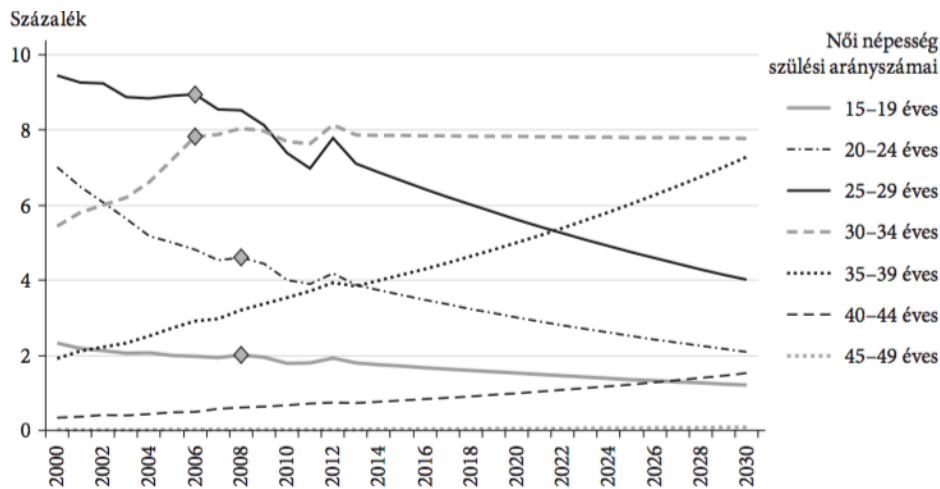


5.3. ábra. A teljes termékenységi ráta múltbeli és előrejelzett értékei (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

Az 5.3. ábra mutatja be a magyarországi teljes termékenységi ráta múltbeli és jövőben várható alakulását. Az ábra alapján a vizsgált időszakban egyértelmű negatív trend jellemezte a magyar népesség ter-

² Ennek heurisztikus indoklása: mivel a férfiak és nők létszáma közel azonos, ezért egy nőnek átlagosan körül-belül két, saját anyaságát vagy apaságát megérő gyermeket kell szülnie ahhoz, hogy a népesség létszáma egyensúlyban legyen. Mivel nem minden gyermek éri meg ezt a kort, ezért valamivel két gyermek felett húzódik a kritikus érték. Magas gyermekhalandósággal rendelkező, fejlődő országokban a kritikus érték a 3,5 gyermeket is elérheti (Espenshade és szerzőtársai [2003]).

mékenységét, leszámítva az úgynevezett Ratkó-korszakot, amikor az abortusztilalom miatt növekedett a termékenység értéke, valamint az úgynevezett Ratkó-visszhangot (a Ratkó-unokák megszületését) és az azzal egybeeső újabb abortuszszigorítás időszakát. Ezt a két kiugrást leszámítva azonban a teljes termékenységi ráta folyamatosan csökkent. Értéke 1978 óta folyamatosan az elméleti egyensúlyi ráta alatt volt, és az 1,3-as szint körül ingadozik az elmúlt kicsivel több mint tíz évben. A születések számát a szerzők Hyndman [2007] nyomán a – halandóság előrejelzésére szintén alkalmazott – Lee–Carter modell segítségével jelezték előre a KSH 2000–2012. évi korcsoportos női termékenységi adatai alapján.³ A projekcióhoz szükséges bázisidőszakot minden korcsoportra egyedileg határozták meg, hogy az utóbbi években esetlegesen kibontakozó új trendet nagyobb súllyal vehessék figyelembe.



5.4. ábra. A korcsoportos termékenységi ráta múltbeli és előrejelzett értékei (2000–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

Az 5.4. ábrán⁴ jól látszik, hogy a vizsgált időszakban a szülések idő-

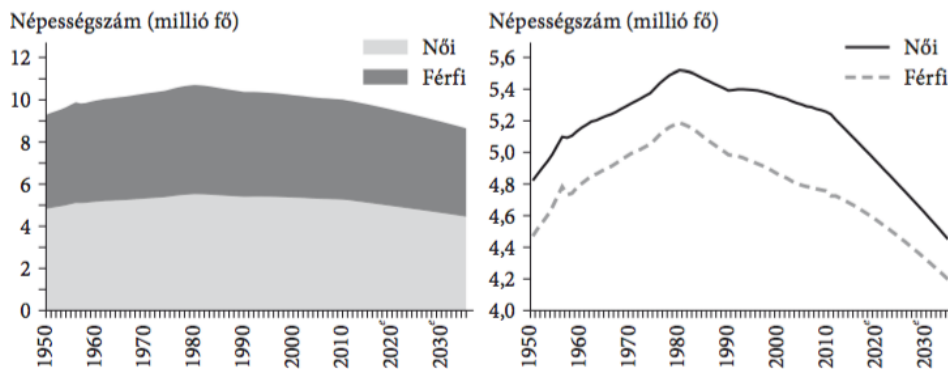
³ Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] cikkével szemben a termékenységet endogénnek tekinti például Simonovits [2014] tanulmánya.

⁴ Az ábrán látható kis négyzetek adnak további információt a projekció során választott bázisidőszakok kezdőpontjairól. Ahol ez nincs külön jelölve, ott a 2000. év a bázisidőszak kezdőpontja.

pontja jellemzően a magasabb életkorok felé tolódott. A születésszámok előrejelzése során a szerzők azzal a további, a KSH adatai alapján alátámasztott feltételezéssel éltek, hogy a születendő gyermekek 55%-a lesz fiú a jövőben.

5.1.3. Lakosságszám és időskori függőségi ráta

A szerzők az előző két szakaszban ismertetett halandósági és termékenységi előrejelzések alapján egyszerű rekurzióval számították ki a népességszám várható alakulását. Az 5.5 ábrán látható előrejelzés alapján 2035-ben hozzávetőlegesen 8 647 505 fős lakossággal lehet számolni, amelynek 51,5 százaléka, azaz 4 450 507 fő lesz nő, míg a fennmaradó 4 196 998 fő lesz a férfiak létszáma. Fontos megjegyezni, hogy ezek az eredmények nem veszik figyelembe a migráció hatását.



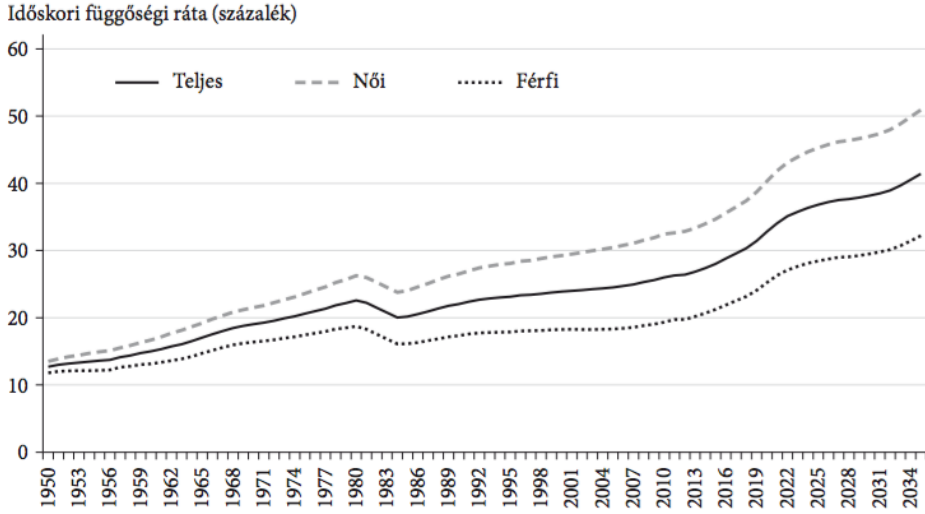
5.5. ábra. A népességszám múltbeli és előrejelzett értékei nemenként (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

A populáció létszámának meghatározása mellett a felosztó-kirovó nyugdíjrendszerek finanszírozhatósága szempontjából lényeges mutató az *időskori függőségi ráta*, amely a nyugdíjas korú (65 éves vagy annál idősebb) és az elméletileg aktív korú (19–64 éves) népesség létszámai-

nak egymáshoz viszonyított arányát adja meg. A mutató képlete:

$$IFR = \frac{\sum_{x=65}^{\omega} E_x^0}{\sum_{x=19}^{64} E_x^0}.$$

Az 5.6. ábra alapján megállapítható, hogy az időskori függőségi rá-



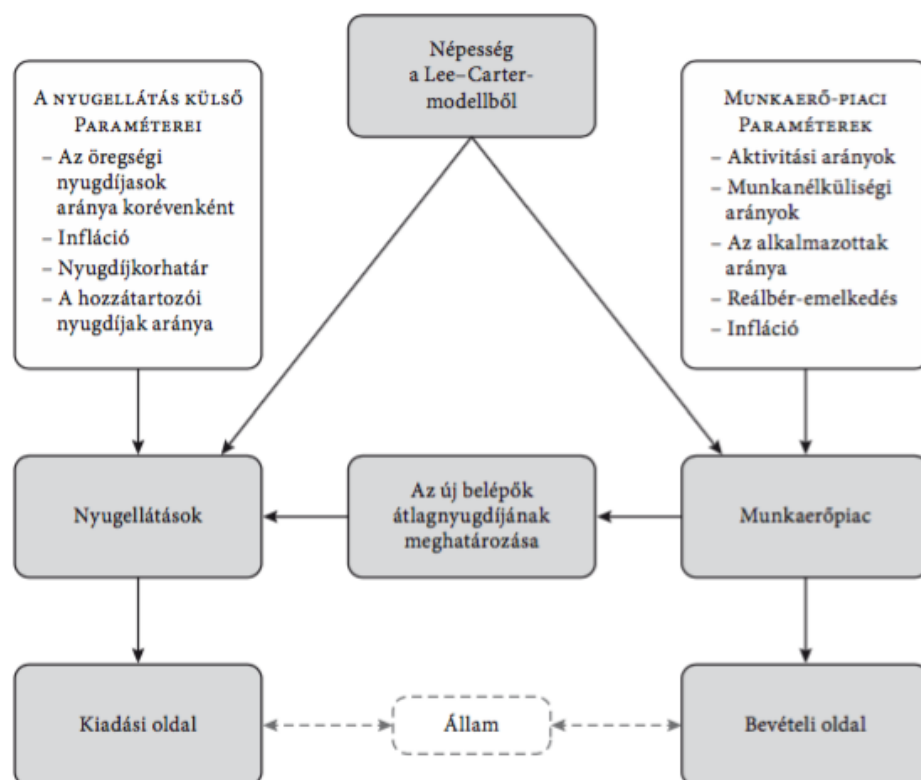
5.6. ábra. Az időskori függőségi ráta múltbeli és előrejelzett értékei (1950–2035, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

ta gyorsuló ütemben emelkedik, így egy aktív egyénre (járulékfizetőre) mind több passzív (nyugdíjas) jut, ami komoly kihívást jelent a felosztó-kirovó elven működő állami nyugdíjrendszer fenntarthatóságára nézve.

5.2. A bevételek és kiadások modellezése

A korábbiakban bemutatott demográfiai modell eredményeinek felhasználásával Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] egy kohorszalapú nyugdíjmodellt építettek fel a Nyugdíjbiztosítási Alap várható bevételeinek és kiadásainak előrejelzésére. A modell célja a fenntarthatóság elemzése, illetve az exogén paraméterek – például reálbér-emelkedés, foglalkoztatottsági arány, nyugdíjkorhatár – hatásának vizsgálata. A kohorszalapú

megközelítés választásának oka, hogy – az egyénekre épülő mikroszimuláció, illetve a pusztán aggregátumokat felhasználó makromodellek között félúton – ez a legegyszerűbb olyan modelltípus, amelybe beépíthetők a demográfiai előrejelzés eredményei. A nyugdíjmodell szerkezetét az 5.7. ábra szemlélteti.



5.7. ábra. A nyugdíjmodell felépítése
(forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

A járulékbévételek modellezése érdekében szükség volt az egyes kohorszokban a foglalkoztatottak létszámának előrejelzésére. Ehhez a szerzők minden kohorsz esetében kiszámították a nem és korcsoport szerinti aktivitási és munkanélküliségi rátákat, majd a foglalkoztatottakat alkalmazotti jogviszonyban és egyéb jogviszonyban (például vállalkozói tevékenység, rövid idejű alkalmi munkavégzés stb.) foglalkoztatottakra bontották ketté. Erre a felbontásra azért volt szükség, mert a brut-

tó átlagkereseti adatok közvetlenül csak az alkalmazásban állókra érhetők el. Az egyéb jogviszonyban állók (a foglalkoztatottak körülbelül 30 százaléka) átlagos bruttó jövedelmére (pontosabban járulékalapjára) csak a nyugdíjkassza elmúlt évekbeli járulékbevételeiből lehetett következtetni. Végül a várható éves átlagos bruttó jövedelmek segítségével meghatározták az egyes évek során kifizetett teljes bruttó bértömeget, amelyre a nyugdíjkassza bevételeinek meghatározása épül.

A nyugdíjrendszer bevételeinek két fő forrása a munkaadó által befizetett szociális hozzájárulási adónak (27 százalék) a központi költségvetésről szóló törvényben (Országgyűlés [2014]) meghatározott része (jelenleg 85,46 százaléka), valamint a munkavállaló által fizetett nyugdíjjárulék (10 százalék). Ez a kettő együtt adja a nyugdíjrendszer összes bevételeinek több mint 90 százalékát. A nyugdíjkassza bevételeinek előrejelzése során a szerzők figyelembe vették, hogy az elmúlt években az egyéni nyugdíjjárulékokból érkező bevételnek a szociális hozzájárulási adóból befolyt összeghez viszonyított aránya rendre nagyobb volt a törvényben meghatározott százalékos mértékek alapján várható aránynál, melynek hátterében feltehetően a szociális hozzájárulási adóból a munkaadók által igénybe vehető kedvezmények állnak. Az elmúlt három év adatai alapján Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] feltételezték, hogy a kedvezmények a szociális hozzájárulási adóból befolyt bevételeket 8 százalékkal csökkentik.

A szerzők a nyugdíjrendszer további bevételeinek (például késedelmi pótlékok, bírságok, költségvetési hozzájárulások) modellezésétől eltekintettek, mivel azok mértéke – a modellben nem szereplő okokból – az elmúlt időszakban évről évre jelentősen ingadozott.

Az 5.7 ábrán látható, hogy a modellben a munkaerőpiaci előrejelzést az

új belépők átlagos nyugdíjának meghatározása követi a nyugellátások kiszámítása érdekében. A modellben az átlagos nyugdíj értéke férfiakra és nőkre egy olyan személy öregségi nyugdíjának felel meg, aki a nyugdíjkorhatár betöltésekor a nemének megfelelő átlagos szolgálati idővel rendelkezik, és életpályája során keresete végig átlagos volt, figyelembe véve az átlagos szolgálati idő 2022-ig várható emelkedését is a folyamatosan emelkedő nyugdíjkorhatár miatt.⁵ A modell az életkoronkénti és nemenkénti átlagos nyugdíjakat évente a tárgyévire feltételezett infláció mértékével indexálja.

Tapasztalati adatok alapján a nyugdíjkorhatárt újonnan elérő férfiak 99 százaléka és a nők 97 százaléka jogosult a modellben öregségi nyugdíjra, míg a már korábban nyugdíjazott kohorszokban a szerzők a tényleges arányok figyelembe vételével állapították meg a nyugdíjasok létszámát, illetve a nőknek 40 év jogosultsági idő után, életkortól függetlenül járó öregségi nyugdíjat igénybe vevők arányát és ezen ellátások átlagos szintjét a tapasztalati értékek kivetítése alapján közelítették.

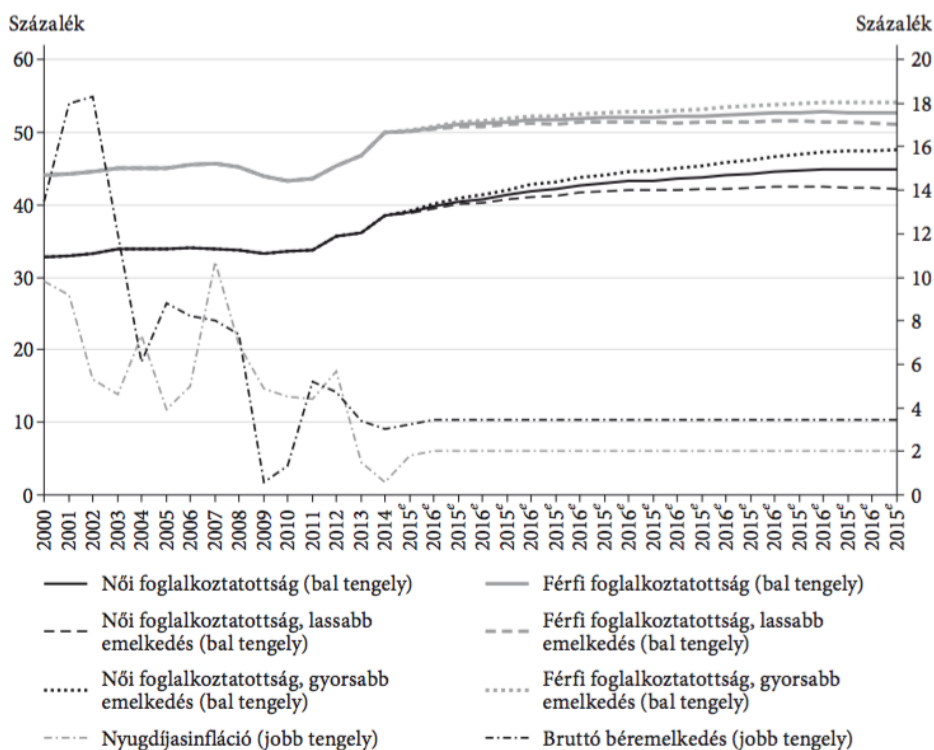
A modell utolsó lépése a Nyugdíjbiztosítási Alap kiadási oldalának meghatározása. Ezek a kiadások az öregségi, valamint a hozzátartozói nyugdíjakból és egyéb költségekből (például méltányossági kifizetések) állnak. A szerzők a hozzátartozói nyugdíjakról azt feltételezték, hogy azok öregségi nyugdíjakhoz viszonyított aránya állandó.

5.3. Gazdasági feltételezések

A modell szempontjából releváns makrogazdasági mutatók Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] által feltételezett alakulása az 5.8. ábrán

⁵ Tapasztalati adatok hiányában az átlagos szolgálati idő feltételezett növekménye a korhatáremelés 60 százaléka (az aktivitási ráta alapján).

látható. A foglalkoztatás előrejelzése érdekében a szerzők a korcs-



5.8. ábra. Az alkalmazott makrogazdasági feltételezések
(forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

portos aktivitási, valamint munkanélküliségi ráták 1998–2014 közötti értékeire illesztettek logaritmikus vagy hatvány típusú trendvonalakat. Az előrejelzés alapján az aktivitási ráta a legfiatalabb (15–19 éves) korosztály esetében csökken, a 25–29 éves férfiak, valamint a legidősebb (65 feletti) korosztályok esetén stagnál, a többi korosztály esetén pedig folyamatosan emelkedik az időszak végéig. A leírt korcsoportos trendekkel összhangban az 5.8. ábrán látható, hogy a férfiak esetén enyhén, a nők esetén pedig erősebben emelkedik a foglalkoztatottsági ráta, amely az időszak végére várhatóan a nők esetében 6,2 százalékponttal, a férfiaknál pedig 2,7 százalékponttal lesz magasabb, mint 2014-ben volt.

A nyugdíjak indexáláshoz használt nyugdíjasok fogyasztói árindexére a

szerzők a már ismert évekre a tényadatokat alkalmazták, 2016-tól pedig a jelenleginél magasabb, 2 százalékos szinten állandósuló árszínvonal-emelkedését tételeztek fel. Ehhez az inflációs szinthez képest 2015-től kezdve 1,43 százalékos állandó reálbér-emelkedéssel számoltak az 1992–2014 közti nettó reálbér-emelkedés átlagos üteme alapján.

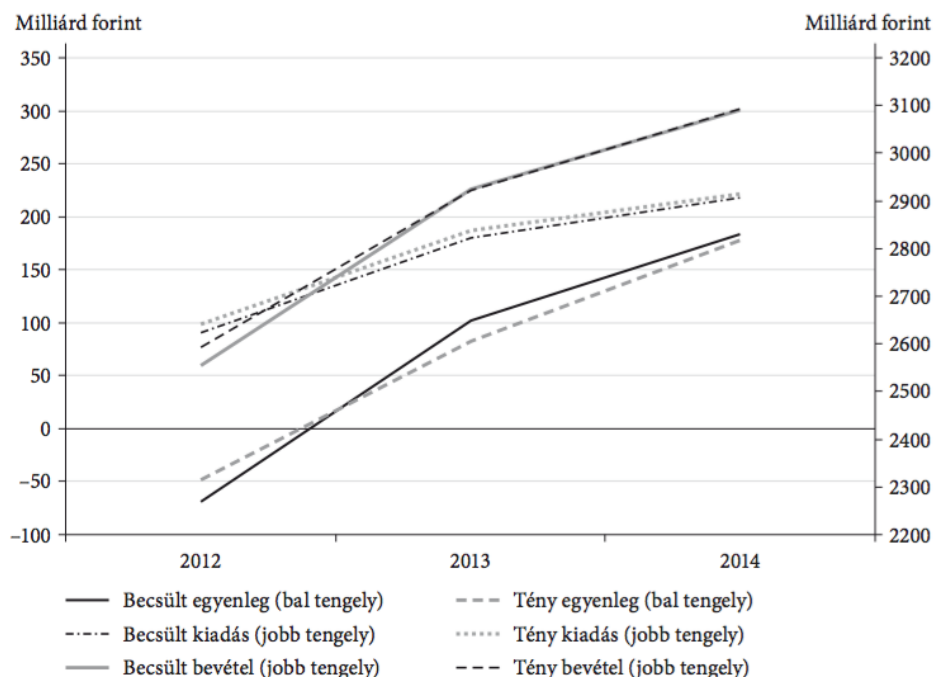
Az itt bemutatott alapfeltételezések mellett a szerzők a következő alternatív forgatókönyvek hatásait is megvizsgálták:

- a alaphelyzethez képest éves szinten 0,5 százalékponttal alacsonyabb, illetve magasabb átlagos reálbér-emelkedés;
- az alaphelyzethez képest a foglalkoztatási arányok intenzívebb, illetve alacsonyabb ütemű javulása (lásd az 5.8. ábrán);
- a nyugdíjkorhatár 2022 utáni további emelése, úgy, hogy az ne változtasson a nyugdíjkorhatár betöltésekor várható átlagos hátralévő élettartamon.⁶

5.4. A modell validációja

A modell validációja érdekében Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] a 2012. évi adatokból kiindulva előrejelezték a 2012–2014. évek mutatóit, melyeket összehasonlítottak az ONYF tényadataival. Az 5.9. ábrán látható, hogy mind a bevételek, mind a kiadások becsült értéke igen közel áll a valós adatokhoz. A legnagyobb eltérés sem haladja meg az adott tényadat 1,5 százalékát. Az egyenleg esetében jelentősebbnek tűnő eltérést az okozza, hogy a nyugdíjrendszer egyenlege legalább egy nagyságrenddel kisebb a bevételeknél/kiadásoknál.

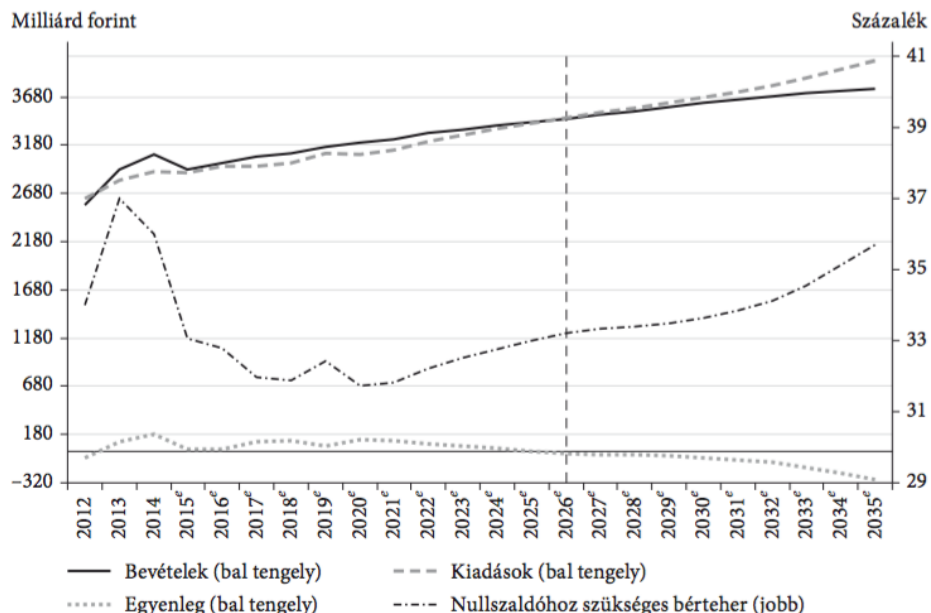
⁶ Ez nagyjából évi két hónap emelést jelent, amelyet a szerzők három évenként fél év emeléssel közelítettek, 67 évig emelve a nyugdíjkorhatárt az 1969–1971 közt születettek esetén.



5.9. ábra. A modell eredményeinek összehasonlítása az ONYF adataival (forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

5.5. Eredmények

Az 5.3. alfejezetben bemutatott alapfeltételezések mellett, 2014-es árakon számolva a modell alapján várhatóan az 5.10. ábrán látható módon alakulnak a nyugdírendszer bevételei és kiadásai a jövőben. A 2015–2030 közötti időszakban a rendszer bevételei és kiadásai várhatóan igen közel lesznek egymáshoz. A kiadások először várhatóan 2026-ban haladják meg a bevételeket, és ettől az évtől kezdve az előrejelzési időszak végéig a nyugdírendszer egyenlege folyamatosan negatív is marad. Az első deficités évben a hiány 13,4 milliárd forintról indul, majd ezt követően egyre gyorsuló ütemben növekedve a vizsgált időszak végére várhatóan már a 300 milliárd forintot is megközelíti (2014. évi árakon), ami az összes bevétel közel 8 százaléka. Ahogy az 5.10. ábrán is látható, ennek a gyorsuló ütemben növekvő hiánynak



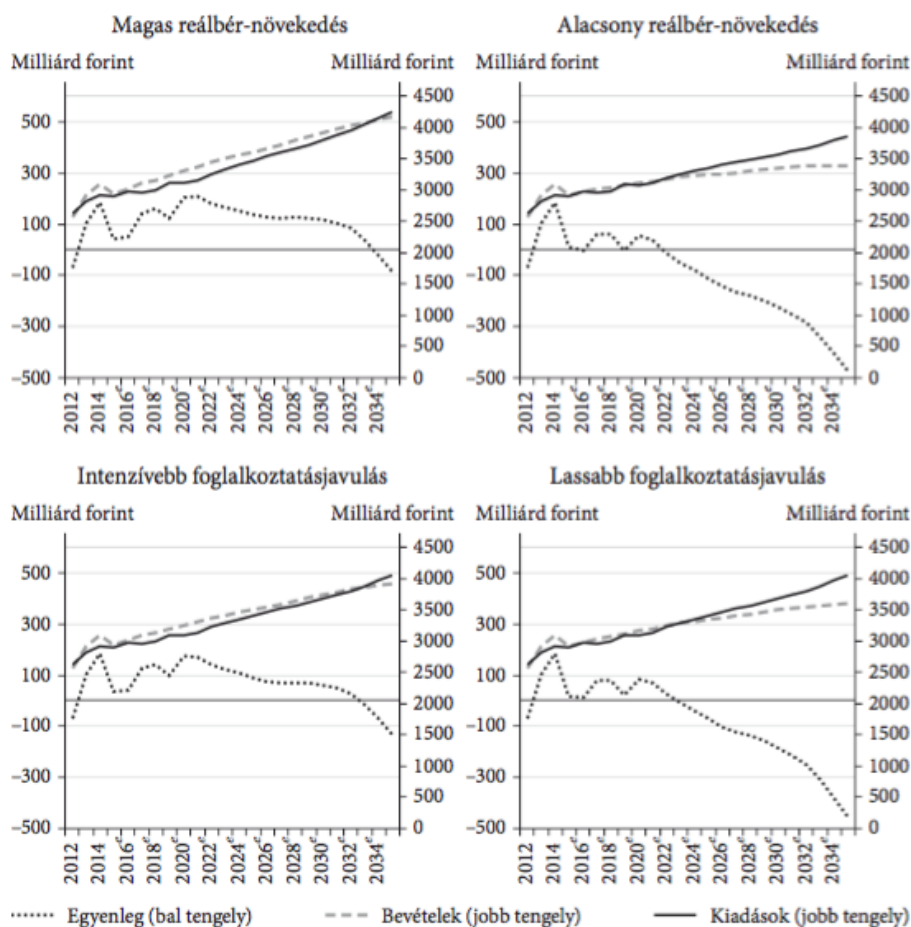
5.10. ábra. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása az alapforgatókönyv esetén (2014. évi árakon, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

az oka a bevételek emelkedési ütemének csökkenése. Ez az úgynevezett Ratkó-unokák munkaerő-piaci aktivitásának csökkenésével van összefüggésben, ugyanis ezek a kohorszok a 2030-as évekre már az ötvenes éveik közepén lesznek, amikor az aktivitási arány már számottevően csökken az alacsonyabb életkorokban megfigyelhetőkhez képest.

Az 5.10. ábrán szerepel még a kiadások és bevételek egyensúlyát biztosító bérterhek (a szociális hozzájárulási adó nyugdíjalapba kerülő része és az egyéni nyugdíjjárulék összege kifejezve a bruttó bér százalékában) görbéje is. A modell alapján az időszak végére várhatóan 35,7 százalékos bérteher lesz szükséges ahhoz, hogy a bevételek fedezzék a kiadásokat, ami a járulékkulcsok emelése nélkül csak a szociális hozzájárulási adóbevételek Egészségbiztosítási Alap kárára történő átcsoportosításával valósítható meg.

Az 5.3. alfejezetben bemutatott, foglalkoztatásra és reálbér-emelkedésre

vonatkozó alternatív forgatókönyvek hatása az 5.11. ábrán látható.

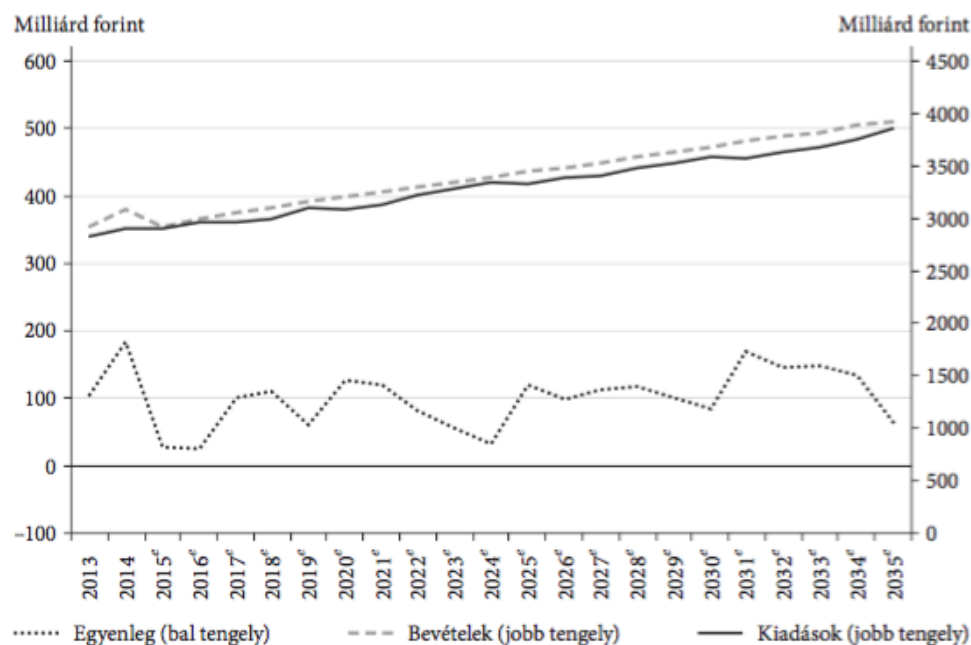


5.11. ábra. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása a makrogazdasági paraméterekre vonatkozó alternatív forgatókönyvek esetén (2014. évi árakon, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

Az ábra alapján a nyugdíjrendszer egyenlege még magas reálbér-emelkedés esetében is negatívvá válik a vizsgált periódus vége előtt, azonban az első deficités év az alapesethez képest csak nyolc évvel később, 2034-ben következik be, és egészen 2031-ig a rendszer 100 milliárd forint feletti bevételi többlettel rendelkezik. Ha azonban az alacsony reálbér-emelkedés valósulna meg, akkor a rendszer az alapesethez képest négy évvel korábban, már 2022-től folyamatosan negatív egyenleggel zárna, ez a hiány pedig évről évre növekedve az időszak végére

már a 470 milliárd forintot is elérné (2014. évi árakon). A foglalkoztatottság intenzívebb javulása mintegy hét évvel képes késleltetni az egyenleg negatívvá válását a normál esethez képest, az időszak végén jelentkező éves hiány pedig 160 milliárd forinttal lenne kevesebb, mint az alapesetben. Ezzel szemben lassabb javulás esetén az alapesethez képest már három évvel korábban, 2022-től negatívvá válna az egyenleg, 2035-re pedig a hiány már elérné a 450 milliárd forintot.

A nyugdíjkorhatár betöltésekor várható hátralévő élettartamhoz igazított korhatáremelés hatását az 5.12. ábra szemlélteti:



5.12. ábra. A Nyugdíjbiztosítási Alap főbb mutatóinak várható alakulása a nyugdíjkorhatár várható élettartamhoz igazított folyamatos emelése esetén (2014. évi árakon, forrás: Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015])

Az ábrán látható, hogy ez esetben a rendszer egyenlege várhatóan a vizsgált időszak végéig pozitív maradna.⁷

Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] az itt bemutatott eredmények

⁷ Az egyenleg látványos ingadozását a korhatáremelés kezelésére vonatkozó egyszerűsítés (három évenként fél év emelés) okozza a modellben.

alapján amellet érvelnek, hogy bár a jelenleg folyamatban lévő nyugdíjkorhatár-emelés az elkövetkező tíz évre biztosítja a nyugdíjrendszer fenntarthatóságát, azonban a kedvezőtlen demográfiai folyamatok a 2020-as évek második felétől kezdődően egyre súlyosabb terhet rónak a nyugdíjrendszerre, amelyet önmagában sem a bemutatott mértékű reálbér-emelkedés, sem pedig a foglalkoztatottság feltételezett javulása nem képes ellensúlyozni. Így arra a következtetésre jutnak, hogy a rendszer fenntarthatósága érdekében érdemes megvizsgálni a nyugdíjkorhatár 2022 utáni további emelését, a korhatár betöltésekor várható átlagos hátralévő élettartam emelkedésének megfelelően.

A szerzők hosszabb távú megoldásnak a demográfiai helyzet – a Ratkó-unokák 2040-es évekbeli nyugdíjba vonulása miatti – várható további romlása miatt egy olyan átfogó intézkedéscsomagot tekintenek, amely a gyermekvállalás ösztönzésére koncentrálna. Mivel azonban ez leghamarabb csak 20-30 év múlva kezdené érzékelteni hatását, így amellet érvelnek, hogy addig közép- és rövid távú intézkedésekkel szükséges fenntartani a nyugdíjrendszer egyensúlyát. Úgy vélik, hogy ilyen, középtávon hatásos intézkedés a munkaerőpiac élénkítése lehet, melynek fontos része az Ratkó-unokák munkaerőpiacon tartása és munkaképességük minél hosszabb fenntartása (például egészségmegőrzéssel, képzésekkel). A fenntarthatóság érdekében javasolják továbbá, hogy a jövőben a nyugdíjak indexálása kizárólag azok reálértékének megőrzését szolgálja, rámutatva olyan múltbeli esetekre, amikor az infláció felülbecslése miatt a nyugdíjak reálértéke emelkedett.

5.6. Mikroszimulációs modellek

Ez a szakasz Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] 5.2. alfejezetben ismertett kohorszmodelljén túllépve, annak jövőbeli kívánatos kiterjesztéseként a mikroszimulációs megközelítést ismerteti röviden Vékás [2015] és Kovács–Rétallér–Vékás [2015] cikkei alapján, a hazai gyakorlat bemutatására fókuszálva, kimondottan a teljesség igénye nélkül.

A nyugdíjmodellezésben az ezredforduló óta eltelt években teret nyert úgynevezett *sztochasztikus-dinamikus mikroszimulációs modellek* (Li–O’Donoghue [2013]) a nyugdíjrendszerek makro- és kohorszmodelleknél precízebb vizsgálatát teszik lehetővé. E módszerek a vizsgált makrogazdasági aggregátumok vagy születési év szerinti kohorszok modellezése helyett a rendszer által érintett járulékfizetők és járadékszolgáltatásban részesülők viselkedését és döntéseit egyéni szinten írják le és jelzik előre. A mikroszimulációs módszerek előnye, hogy a modellezni kívánt aggregátumok várható értékei mellett azok eloszlását is megfelelően képesek előre vetíteni, és az aggregátumokon belül végbemenő összetételváltozások más változókra gyakorolt hatását is statisztikai szempontból adekvát módon képesek kezelni. Segítségükkel elemezhetők például olyan jövedelem-újraelosztási hatások, amelyeket a makromodellek nem képesek megragadni. E modellek az egyéni döntéshozók viselkedését statisztikai-ökonometriai eljárások felhasználásával becsült viselkedési egyenletekkel, intertemporális várhatóhasznossági függvények maximalizálásával vagy e két módszer családjának ötvöztetésével is leírhatják.

Magyarországon – a Nemzetgazdasági Minisztérium és elődintézményei, valamint a Magyar Nemzeti Bank által korábban alkalmazott makro- és kohorszmodelleket kiegészítendő – a Nyugdíj és Időskor Kerekasztal ho-

zott döntést egy átfogó mikroszimulációs modellkeret, illetve azon belül több mikroszimulációs nyugdíjmodell létrehozásáról (Holtzer [2010]). Az első, részleges modelleket követően az Országos Nyugdíjbiztosítási Főigazgatóság (ONYF) a 2012–2015 közötti időszakban készítette el a Belgiumban alkalmazott MIDAS (*Microsimulation for the Development of Adequacy and Sustainability*, lásd Dekkers–Belloni [2009] és Dekkers [2010]) nagy méretű sztochasztikus-dinamikus mikroszimulációs modell hazai adaptációját (ONYF [2015]) egy közel fél évszázadra kiterjedő, nagy részletességű, egyéni szintű adatokat tartalmazó informatikai adatbázis alapján.

A MIDAS modell számos egymással kölcsönhatásban álló modulból és almodulból (például munkaerőpiac, foglalkoztatás, jövedelmek, születések, halálozások, házasságok stb.) áll, és az egyéni döntéseket többváltozós statisztikai eljárások segítségével becsült viselkedési egyenletek felhasználásával írja le. A modell az egyéb előrejelzésekkel való konzisztencia érdekében számos ponton uniós intézmények aggregált előrejelzéseihez történő exogén kiigazításokat tartalmaz, így az egyéni szintű és eloszlás-jellegű eredmények adják fő hozzájárulását a már ismert predikciókhoz.

A modell kulcsfontosságú része a munkaerő-piaci aktivitás modellezése, amelyet Vékás [2015] tanulmánya ismertet. A cikkben bemutatott becslés statisztikai viselkedési egyenletekre épül az egyének múltbeli munkaerő-piaci aktivitására, születési évére, nemére, foglalkozására és lakóhelyére vonatkozó információk felhasználásával. A hiányzó adatok pótlását, az egyének foglalkoztatás-történet szerinti szegmentálását és az utolsó ismert évre vonatkozó egyéni jogosultságszerzési idők alapján kialakított, aktivitásra vonatkozó bináris eredményváltozó ki-

alakítását követően Vékás [2015] bináris logisztikus regressziós becslést alkalmaz, figyelembe véve a módszer más eljárásokkal szembeni előnyeit és a MIDAS modellek szerkezetéből adódó korlátokat. A tanulmány nagy hangsúlyt fektet a becslés körütekintő validálására. A modell az osztott mintás validáció céljából kialakított tesztelő állományon magas, 80 százalék körüli találati pontossággal rendelkezik.

A tanulmányban alkalmazott statisztikai megközelítés korlátja, hogy bár az egyéni foglalkoztatás tényét kielégítő pontossággal képes legalább rövid távon előre jelezni, a munkaerőpiac keresleti és kínálati oldalán jelentkező hatásokat nem képes elválasztani egymástól, és explicit módon nem jelenik meg benne a kereslet és kínálat között jelentkező mennyiségi eltérés. Továbbá optimalizáló viselkedés hiányában az exogén paraméterek (például nyugdíjkorhatár) változása esetén nem veszi figyelembe az egyéni viselkedés esetleges változásait. Fontos megjegyezni, hogy a felhasznált adminisztratív adatállomány természeténél fogva nem terjed ki a feketegazdaságban foglalkoztatottakra. Ez a probléma ugyanakkor az ONYF számára lényeges nyugdíjjárulék-befizetések és nyugdíjkifizetések modellezése során kevésbé releváns.

A Vékás [2015] tanulmányában szereplő becslést évről évre szekvenciálisan alkalmazva, az exogén uniós előrejelzésekhez történő kiigazítás figyelembe vételével egyénenként becsülhető a modellben a jövőbeli évekre vonatkozó munkaerő-piaci aktivitás, amely a MIDAS modell többi moduljával kölcsönhatásban együttesen előrevehetheti például a nyugdíjassza jövőbeli bevételeinek és kiadásainak egyénenkénti alakulását, egyes társadalmi csoportok anyagi helyzetének jövőbeli változásait stb. Mivel a tanulmány elkészültének időpontjában a teljes mikroszimulációs modell még nem készült el, így a tanulmányban szereplő ered-

mények szükségszerűen részlegesek: a modulok közötti kölcsönhatások miatt a félkész modell teljeskörű nyugdíj-hatásvizsgálat elvégzésére és munkaerő-piaci forgatókönyvek, illetve paraméteres nyugdíjreformok vizsgálatára nem volt alkalmas. Azonban a jövőben a becsült munkaerő-piaci egyenletek a MIDAS modell keretein belül lehetővé teszik az eddigieknél alaposabb nyugdíj-hatásvizsgálatok készítését.

A modell az élettartam-kockázat és a nyugdíjrendszer fenntarthatóságának pontosabb modellezéséhez is hozzájárulhat azzal, hogy a bevételeknél figyelembe vett aggregált járulékalap számítása során az aggregált foglalkoztatottság változásán túl a foglalkoztatottság összetételének változását is képes figyelembe venni.

Érdemes szót ejteni még a a MIDAS modellhez hasonló mikroszimulációs módszerek összetettségéből fakadó nehézségekről. Az ilyen modellek egyéb megközelítésekhez képest jóval jelentősebb számítási kapacitásigényei, implementációs és személyi költségei, valamint az adatokkal szemben támasztott minőségi elvárásai (Kovács–Rétallér–Vékás [2015]) kívánatosá tesznek bizonyos strukturális egyszerűsítéseket. Az aktuáriusi gyakorlatban elterjedt egyszerűsítő eljárás az úgynevezett *modellpontok* létrehozása: ebben az esetben a szimulációs számításokat – vagy azok egy részét – a modell az egyének helyett azok homogén csoportja-ira hajtja végre. A csoportosítás elkészítése során a minél egyszerűbb modellszerkezet (azaz minél kevesebb modellpont) és az egyszerűsítés során elkövetett minél kisebb hiba iránti igényeket – mint két egymásnak ellentmondó szempontot – egyszerre szükséges figyelembe venni. Kovács–Rétallér–Vékás [2015] tanulmányukban módszertani megfontolásokból a mintavételes, klaszterező és definícióval adott, többdimenziós kategóriakombinációkat képző csoportosítások közül Holtzer [2010]

nyomán a harmadik módszer családot választják, melynek segítségével a magyar felnőtt népességet demográfiai, jövedelmi és nyugdíjjogosultsági jellemzők alapján hozzávetőleg 93 ezer modellpontra osztják fel, a KSH adatai alapján kiküszöbölve az esetleges adathiányokat, és teljes körűvé téve a csoportosítást. A szerzők tanulmányában bemutatott csoportosítás nagyban megkönnyíti a mikroszimulációs megközelítés gyakorlati alkalmazását.

III. rész

Újabb halandóság-előrejelző módszerek és alkalmazásuk

6. fejezet

Az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modelles család

Ebben a fejezetben a Hunt–Blake [2014], Currie [2016] és Villegas és szerzőtársai [2016] által a közelmúltban javasolt, számos széles körben elterjedt halandóság-előrejelző módszert felölelő általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modelles család elméletét ismertetem. A fejezetben az m_{xt} jelölés az $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ korcsoporthoz és $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ időszakhoz tartozó általános, m^0 kezdeti vagy m^c központi halandósági rátákra vonatkozik, és az $1, 2, \dots, T$ indexek továbbra is minden esetben egymást követő naptári éveket jelölnek majd.

6.1. A modell felírása

A GAPC modelles család alkalmazása feltételezi, hogy minden egyes $x \in \{1, 2, \dots, X\}$ korcsoportban és $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ időszakban is-

mert a bekövetkezett halálesetek $D_{xt} \in \mathbb{N}$ száma, valamint az $E_{xt}^c > 0$ központi vagy az $E_{xt}^0 \in \mathbb{N}_{>0}$ kezdeti kitettség értéke.¹

A korcsoport- és időszakspecifikus halálozások D_{xt} számait a modell a \tilde{D}_{xt} valószínűségi változók megvalósult értékeinek tekinti, melyek peremeloszlására vonatkozó feltevés – a rendelkezésre álló kitettségi adatok típusától függően – a Poisson vagy a binomiális eloszlás:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{xt} &\sim \text{Poisson}(E_{xt}^c m_{xt}^c) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T) \\ \text{vagy} \quad \tilde{D}_{xt} &\sim \text{Bin}(E_{xt}^0, m_{xt}^0) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \end{aligned} \quad (6.1)$$

A GAPC modellkeret feltételezi továbbá, hogy a (6.1) egyenletbeli \tilde{D}_{xt} ($x = 1, 2, \dots, X, t = 1, 2, \dots, T$) valószínűségi változók függetlenek.² A (6.1) összefüggésben szereplő központi vagy kezdeti halandósági ráták becslőegyenletei a következők:

$$g(m_{xt}) = \eta_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \quad (6.2)$$

ahol η_{xt} a modell úgynevezett szisztematikus komponense, $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növekvő függvény (az úgynevezett *kapocsfüggvény* vagy angolul *link function*). Hunt–Blake [2014] az általánosított lineáris modell szakirodalmára építve központi kitettségek és Poisson-eloszlás használata esetén a $g(y) = \ln y$ ($y > 0$) logaritmikus, kezdeti kitettségek és binomiális eloszlás alkalmazása esetén pedig a $g(y) = \ln \left(\frac{y}{1-y} \right)$ ($0 < y < 1$) logit kapocsfüggvényt javasolják. Értekezésemben a továbbiakban ezt a konvenciót követem.

¹ Precízebben: minden korcsoport-időszak kombinációra a kitettség azonos változata ismert.

² Pontosabban fogalmazva: adott halandósági ráták mellett feltételeesen függetlenek.

A GAPC modelles család (6.2) egyenletbeli szisztematikus komponense a korcsoport, időszak és kohorsz függvényében így írható fel:

$$\eta_{xt} = a_x + \sum_{i=1}^N b_x^{(i)} k_t^{(i)} + b_x^{(0)} c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \quad (6.3)$$

ahol $N \in \mathbb{N}$ a modellezett korcsoport-időszak interakciók száma, valamint a_x és $\{b_x^{(i)}\}_{i=0}^N$ korcsoporttól, $\{k_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ időszaktól, c_{t-x} pedig kohorsztól függő, valós értékű paraméterek.

Mivel a modellbeli kohorszok lehetséges száma $T + X - 1$, ezért belátható, hogy a (6.3) egyenlet paramétereinek száma $(N + 1)(X + T) + 2X - 1$, melyek elegendően nagy X és T értékek esetén képesek lehetnek kellően tömören leírni a megadott XT darab halandósági rátát.

A becsült paraméterek egyértelműsége érdekében a (6.3) egyenletet a Lee–Carter modellbeli identifikációs megkötésekkel analóg korlátozó feltételekkel szükséges kiegészíteni, melyek konkrét modellspecifikációnként eltérnek.

6.2. Interpretáció

A (6.3) egyenlet paramétereinek értelmezése szükségszerűen bonyolultabb a Lee–Carter modell interpretációjánál:

- *Korcsoport-hatás:* Az a_x ($x = 1, 2, \dots, X$) paraméterek a mortalitási görbe általános alakját írják le.
- *Kohorszhatás:* A c_{t-x} ($x = 1, 2, \dots, X$, $t = 1, 2, \dots, T$) paraméterek a $t - x$ időszakban született kohorsz mortalitásának a tipikus mortalitási pályához képesti eltérését reprezentálják a modellben.

- *Mortalitási indexek:* A $k_t^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$, $t = 1, 2, \dots, T$) paraméterek az általános mortalitási szint időbeli alakulását N darab idősor formájában modellezzik.
- *Életkorfüggő érzékenységek:* A mortalitási indexek $b_x^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, N$, $x = 1, 2, \dots, X$) együtthatói a transzformált halandósági ráta érzékenységét adják meg $i = 0$ esetén a kohorszhatás, egyéb esetben pedig az i -edik mortalitási index megváltozására nézve. Ha az adott i indexhez tartozó kohorszhatás vagy mortalitási index értéke ceteris paribus egységnivel nő, akkor a modell szerint a $g(m_{xt})$ transzformált halandósági ráta értéke $b_x^{(i)}$ egységgel növekszik, vagyis speciálisan logaritmikus kapocsfüggvény mellett a m_{xt}^c központi halandósági ráta, logit kapocsfüggvény mellett pedig a $\frac{m_{xt}^0}{1-m_{xt}^0}$ esélyhányados értéke $e^{b_x^{(i)}}$ -szeresére változik.

6.3. A GAPC modelles család nevezetes tagjai

Alkalmasan választott paraméterezés mellett a GAPC modelles család számos széles körben használatos mortalitás-előrejelző módszert tartalmaz. Ebben a szakaszban a legnevezetesebb ilyen módszereket és azok GAPC modelles családhoz fűződő viszonyát ismertetem. A módszerek bemutatása során a korcsoportok minden esetben egymást követő koréveket jelentenek majd.

6.3.1. A Poisson Lee–Carter (LC) modell

A Brouhns és szerzőtársai [2002a] által bevezetett és azóta széles körben elterjedt modellkeretben a mortalitást leíró szisztematikus komponens a

Lee–Carter modell (4.1) alapegyenletének hibatagok nélküli változata:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (6.4)$$

Brouhns és szerzőtársai [2002a] cikkükben központi kitettségeket és logaritmikus kapocsfüggvényt feltételeznek, így a (6.2) összefüggés következtében a (6.4) egyenlet bal oldalán a (4.1) egyenlethez hasonlóan az $\ln m_{xt}^c$ központi logaritmikus halandósági ráták állnak.

A (6.4) egyenletben a normális eloszlású ε_{xt} hibatagok hiányát az indokolja, hogy a modell ezen változatában a mortalitás becsült értékek körüli véletlen ingadozását a halálesetek számát leíró \tilde{D}_{xt} valószínűségi változók varianciája ragadja meg.

A (6.4) egyenlet paramétereinek értelmezése egyébként azonos a 4.2 szakaszban korábban már leírtakkal. Identifikációs megfontolásból a

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^X b_x &= 1, \\ \sum_{t=1}^T k_t &= 0 \end{aligned}$$

paramétermegkötések a modell e változatában is érvényesek.

A (6.4) összefüggésbeli modell nyilvánvalóan a GAPC modellcsalád tagja a (6.2) egyenlet alábbi paraméterezése mellett:

$$\begin{aligned} N &= 1, \\ b_x^{(1)} &= b_x \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\ k_t^{(1)} &= k_t \quad (t = 1, 2, \dots, T), \\ b_x^{(0)} &= 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X), \end{aligned}$$

$$c_{t-x} = 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

A modell nem tartalmaz kohorszhatást, illetve a mortalitás alakulását egyetlen időtől függő mortalitási index segítségével modellezi.

Ebben a modellváltozatban a paraméterek becslését követően nincs szükség a mortalitási index 4.4. szakaszban ismertetett kiigazítására, mivel a Poisson Lee–Carter modell a korcsoportok létszámait a kitettségek és halálesi gyakoriságok révén explicit módon figyelembe veszi. Érdemes megjegyezni, hogy a Lee–Carter modell 4. fejezetben ismertetett alapváltozata nem illeszkedik a GAPC modellcsaládba.

6.3.2. A Renshaw–Haberman (RH) modell

Renshaw–Haberman [2006] a kohorszhatás figyelembe vételére a Poisson Lee–Carter modell (6.4) egyenletének alábbi módon bővített változatát javasolják:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x^{(1)} k_t^{(1)} + b_x^{(0)} c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

amely a GAPC modellcsalád (6.3) egyenletének speciális esete $N = 1$ mellett. Cikkükben Renshaw–Haberman [2006] központi kitettségeket és logaritmikus kapocsfüggvényt feltételeznek.

Mivel a modell kritikusi rámutattak a becslési eljárás numerikus instabilitására, ezért újabb cikkükben Haberman–Renshaw [2011] modelljük egyszerűsítése érdekében a $b_x^{(0)} = 1$ ($x = 1, 2, \dots, X$) megkötést ajánlják, mely – lemondva a kohorszhatás életkor szerinti differenciálásáról – megoldja az eredetileg javasolt modell numerikus problémáit. Az így

módosított Renshaw-Haberman modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t + c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (6.5)$$

A szerzők a paraméterbecslés egyértelműsége érdekében a következő identifikációs megkötéseket javasolják:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^X b_x &= 1, \\ \sum_{t=1}^T k_t &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} c_i &= 0. \end{aligned}$$

Értekezésemben a továbbiakban a Renshaw–Haberman modell (6.5) egyenlet szerinti változatát alkalmazom.

6.3.3. A korcsoport–időszak–kohorsz (APC) modell

A Carstensen [2007] által ismertett korcsoport–időszak–kohorsz (angolul Age–Period–Cohort vagy röviden APC) modell a (6.5) egyenlet szerinti módosított Renshaw–Haberman modell speciális esete $b_x = 1$ ($x = 1, 2, \dots, X$) mellett. A modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + k_t + c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

Tehát az APC modell $N = 1$ mortalitási indexet tartalmaz, továbbá a korcsoport, időszak és kohorsz mortalitásra gyakorolt hatásait nem módosítják korcsoportfüggő érzékenységi együtthatók.

Az APC modellben a központi kitettségek és a logaritmikus kapocs-

függvény használata, valamint az alábbi identifikációs megkötések alkalmazása elterjedt:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^T k_t &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} c_i &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} i c_i &= 0.\end{aligned}$$

6.3.4. A Cairns–Blake–Dowd (CBD) modell

Az időskori halandóság előrejelzésére javasolt Cairns–Blake–Dowd [2006] modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \quad (6.6)$$

ahol $\bar{x} = \frac{1+X}{2}$ az előforduló korcsoport-indexek számtani átlaga.

A módszer alkalmazását a szerzők $x_0 = 60$ évesnél magasabb életkorok esetén javasolják, azzal a kiegészítéssel, hogy a (6.6) egyenletbeli η_{xt} szisztematikus komponens az $x_0 + x$ éves egyének mortalitását írja le. Cairns–Blake–Dowd [2006] cikkükben kezdeti kitettségeket és logit kapcsolfüggvényt tételeznek fel.

A CBD modell (6.6) egyenlete a GAPC modellcsalád (6.3) egyenletének speciális esete az alábbi paraméterezés mellett:

$$\begin{aligned}N &= 2, \\ a_x &= 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X) \\ b_x^{(1)} &= 1 \quad (x = 1, 2, \dots, X),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_x^{(2)} &= x - \bar{x} \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\ b_x^{(0)} &= 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\ c_{t-x} &= 0 \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \end{aligned}$$

A CBD modellben nem szerepel additív életkorhatás és kohorszhatás³, és a mortalitás alakulását két mortalitási index írja le, melyek együtthatói adottak. E modellben nincs szükség identifikációs megkötésekre.

6.3.5. A Plat modell

A Plat [2009] modell szisztematikus komponense:

$$\begin{aligned} \eta_{xt} &= a_x + k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ k_t^{(3)} + c_{t-x} \\ &\quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T), \end{aligned} \quad (6.7)$$

ahol $\bar{x} = \frac{1+X}{2}$ az előforduló korcsoport-indexek számtani átlaga, valamint $(\bar{x} - x)^+ = \max\{\bar{x} - x; 0\}$.

A szerző az időskori mortalitás vizsgálata esetén a (6.7) egyenletbeli $k_t^{(3)}$ harmadik mortalitási index elhagyását javasolja (mivel ekkor $x > \bar{x}$), melynek következtében a (6.7) egyenlet így egyszerűsödik:

$$\eta_{xt} = a_x + k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} + c_{t-x} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (6.8)$$

A (6.8) egyenletbeli η_{xt} szisztematikus komponens az $x_0 + x$ éves egyének halandóságát írja le, ahol x_0 valamely kiinduló életkor (például $x_0 = 60$). Értekezésemben a Plat modell (6.8) egyenlet sze-

³Érdemes megjegyezni, hogy a CBD modell bővítéseként Cairns és szerzőtársai [2009] kohorszhatás bevezetését javasolják. E modellváltozatot értekezésemben nem tárgyalom.

rinti változatát alkalmazom majd, amely a GAPC modellcsalád (6.3) egyenletének speciális esete az alábbi paraméterezés mellett:

$$\begin{aligned} N &= 2, \\ b_x^{(0)} &= 1 \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\ b_x^{(1)} &= 1 \quad (x = 1, 2, \dots, X), \\ b_x^{(2)} &= x - \bar{x} \quad (x = 1, 2, \dots, X). \end{aligned}$$

Plat [2009] cikkében központi kitettségeket és logaritimikus kapocsfüggvényt feltételez, és az alábbi identifikációs megkötéseket javasolja:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T k_t^{(1)} &= 0, \\ \sum_{t=1}^T k_t^{(2)} &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} c_i &= 0, \\ \sum_{i=1-X}^{T-1} i c_i &= 0. \end{aligned}$$

6.3.6. Áttekintés és csoportosítás

A GAPC modellcsalág tagjai számos szempontrendszer szerint csoportosíthatók. Néhány lényeges csoportosítás:

- A modellezett mortalitási indexek száma (az N paraméter).
- Korcsoport-hatás (a_x paraméterek) jelenléte.
- Kohorszhatás (c_{t-x} paraméterek) jelenléte.
- Az érzékenységi együtthatók ($b_x^{(i)}$) jellege:

- Nemparaméteres: például a Poisson Lee–Carter modell (6.4) egyenletbeli együtthatói.
- Képlettel adott: például a Cairns–Blake–Dowd modell (6.6) egyenletbeli együtthatói.
- A kitettségek, halandósági ráták, az eloszlásfeltevés és a kapocsfüggvény típusa szerint két fő aleset különíthető el:
 - központi kitettségek, központi halandósági ráták, Poisson-eloszlás és logaritmikus kapocsfüggvény,
 - kezdeti kitettségek, kezdeti halandósági ráták, binomiális eloszlás és logit kapocsfüggvény.

A GAPC modellcsaládhoz tartozó, jelen fejezetben bemutatott nevezetes modellek e szempontok szerinti csoportosítását a 6.1. ábrán és a 6.1. táblázatban szemléltetem.⁴

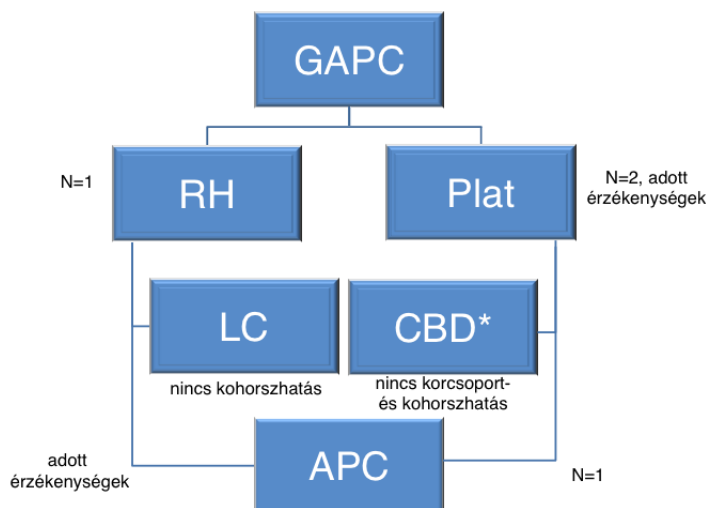
Eljárás	Korcsoport	Kohorsz	N	Érzékenység	Kitettség	Kapocs
APC	van	van	1	egységnyi	központi	log
CBD	nincs	nincs	2	képlettel adott	kezdeti	logit
LC	van	nincs	1	nemparaméteres	központi	log
Plat	van	van	2	képlettel adott	központi	log
RH	van	van	1	nemparaméteres	központi	log

6.1. táblázat. Néhány nevezetes GAPC modell jellemzői
(forrás: saját szerkesztés)

A 6.1. ábrán látható, hogy a GAPC modellcsalád két nevezetes ágát a Renshaw–Haberman és Plat modellek⁵ adják. Az RH modell neveze-

⁴ A 6.1. táblázatban *-gal jelölt CBD modell kezdeti kitettségeket és logit kapocsfüggvényt feltételez. A többi modell esetén a központi kitettségek és a logaritmikus kapocsfüggvény alkalmazása általános.

⁵ Pontosabban: az RH modell Haberman–Renshaw [2011] cikkében bemutatott, egyszerűsített, valamint a Plat modell (6.8) egyenlet szerinti, időskori halandóság modellezésére javasolt változata.



6.1. ábra. A GAPC modelcsalád néhány nevezetes tagja és a közöttük fennálló hierarchia (forrás: saját szerkesztés)

tes almodelljei a kohorszhatást nem tartalmazó Poisson Lee–Carter és az egységnyi érzékenységi együttthatókkal rendelkező APC modellek, a Plat modell nevezetes alosztói pedig a korcsoport- és kohorszhatást nem tartalmazó Cairns–Blake–Dowd és az egyetlen mortalitási indexet feltételező APC modellek. Az APC modell tehát – mint a legegyszerűbb, korcsoport- és kohorszhatást egyaránt tartalmazó modell – a GAPC modelcsalád mindkét ágának speciális esete, így a modelcsalád nevéhez hűen bizonyos értelemben ezt a modellt általánosítja.

Az általános, illetve az időskori halandóság modellezésére ebben a sorrendben a 6.1. ábra bal oldali, illetve mindkét ágán szereplő modellek alkalmazhatók. Természetesen számos további halandóság-előrejelző eljárás előállítható a GAPC modelcsalád megfelelő paraméterezésével.

6.4. A paraméterek becslése

A GAPC családba tartozó modellek paramétereinek becslése a maximum likelihood elv alkalmazásával végezhető. A jelölés egyszerűsítése érdekében érdemes az ismeretlen paramétereket a

$$\begin{aligned}
 \zeta^T = & (a_1, a_2, \dots, a_X, \\
 & b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \dots, b_X^{(0)}, \\
 & b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_X^{(1)}, \\
 & b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \dots, b_X^{(2)}, \\
 & \vdots \\
 & b_1^{(N)}, b_2^{(N)}, \dots, b_X^{(N)}, \\
 & k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \dots, k_T^{(1)}, \\
 & k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots, k_T^{(2)}, \\
 & \vdots \\
 & k_1^{(N)}, k_2^{(N)}, \dots, k_T^{(N)}, \\
 & c_{1-X}, c_{1-X+1}, \dots, c_{T-1}) \in \mathbb{R}^{(N+1)(X+T)+2X-1}
 \end{aligned}$$

vektorba⁶ foglalni. A különböző korcsoport-időszak kombinációkhoz tartozó elméleti halálesi gyakoriságok függetlenségéből és a (6.1) összefüggésből adódóan a modell log-likelihood függvénye⁷ Poisson-

⁶ A sortörések csupán az áttekinthetőséget szolgálják, valamint az N paramétert adottnak kell tekinteni.

⁷ A (6.9) és (6.10) egyenletekben szereplő χ_{xt} ($x = 1, 2, \dots, X$, $t = 1, 2, \dots, T$) bináris változók értéke 0, ha az adott korcsoport-időszak kombinációra nem áll rendelkezésre elegendő adat, és 1 egyébként. Cairns és szerzőtársai [2009] nyomán az elegendő adat kritériuma lehet, hogy az adott kohorszra legalább öt halálesi ismert legyen.

eloszlású halálesi gyakoriságok esetén

$$\ell(\zeta) = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt} \left(-E_{xt}^c m_{xt}^c + D_{xt} (\ln E_{xt}^c + \ln m_{xt}^c) - \ln(D_{xt}!) \right), \quad (6.9)$$

ahol a (6.2) egyenlet alapján logaritmikus kapocsfüggvény mellett

$$m_{xt}^c = g^{-1}(\eta_{xt}) = e^{\eta_{xt}} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

binomiális eloszlású halálesi gyakoriságok esetén pedig

$$\ell(\zeta) = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt} \left(\ln \left(\frac{E_{xt}^0}{D_{xt}} \right) + D_{xt} \ln m_{xt}^0 + (E_{xt}^0 - D_{xt}) \ln(1 - m_{xt}^0) \right), \quad (6.10)$$

ahol a (6.2) egyenlet alapján logit kapocsfüggvény esetén

$$m_{xt}^0 = g^{-1}(\eta_{xt}) = \frac{1}{1 + e^{-\eta_{xt}}} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T).$$

A kiválasztott modellspecifikációban elhagyandó paraméterek nulla értékére vonatkozó feltételeknek és az alkalmazott identifikációs megkötéseknek egyaránt eleget tevő, megengedett ζ paramétervektorok halmazára olvashatósági szempontból hasznos bevezetni a $Z \subseteq R^{(N+1)(X+T)+2X-1}$ jelölést. Ekkor az ismeretlen paramétervektor maximum likelihood becslőfüggvénye a

$$\hat{\zeta} = \arg \max_{\zeta \in Z} \ell(\zeta). \quad (6.11)$$

optimalizálási feladat megoldásaként nyerhető, melynek előállítása érdekében célszerű először elhagyni a (6.9) vagy a (6.10) log-likelihood függvényből a ζ paramétervektortól nem függő tagokat. A (6.11) feladat egy speciális esetének megoldására Brouhns és szerzőtársai [2002a] a Newton-módszert alkalmazzák, amely a log-lineáris modellek paramétereinek becslésére is általánosan használatos, Villegas és szerzőtársai [2016] pedig az általánosított lineáris modell (GLM) illesztésére alkalmazható, számos statisztikai programcsomagba beépített optimalizáló algoritmusokat javasolják.

6.5. Modellválasztás és illeszkedés

6.5.1. Egymásba ágyazott modellek közötti választás

Két egymásba ágyazott modell esetén – vagyis amennyiben a két modell közül az egyik a másikból paramétermegkötések segítségével származtatható – a modellek közötti választást elősegítő, a statisztikában közismert likelihood-arány tesztstatisztika képlete:

$$\chi^2 = 2(\ell(\hat{\zeta}_1) - \ell(\hat{\zeta}_0)), \quad (6.12)$$

ahol $\hat{\zeta}_1$ és $\hat{\zeta}_0$ a ζ paramétervektor (6.11) összefüggés szerinti maximum likelihood becslőfüggvénye a bővebb, illetve a szűkebb modellben. A (6.12) tesztstatisztika aszimptotikusan χ^2 -eloszlású $\nu = K_1 - K_0$ szabadságfokkal, ahol $K_1 \in \mathbb{N}$ és $K_0 \in \mathbb{N}$ a bővebb, illetve a szűkebb modell effektív paramétereinek száma, azaz az adott modell paramétereinek száma és a paraméter-megkötések száma közötti különbség, valamint

$K_1 > K_0$. Ha fennáll a

$$\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2(\nu)$$

összefüggés, ahol $0 < \alpha < 1$ az alkalmazott szignifikanciaszint, valamint $\chi_{1-\alpha}^2(\nu)$ a ν szabadságfokú χ^2 -eloszlás $1 - \alpha$ valószínűségi szinthez tartozó kvantilise, akkor a teszt alapján a bővebb modell alkalmazása javasolt a szűkebb modellel szemben.

Külön figyelmet érdemel az úgynevezett telített modell, amelyben a halálesetek számának elméleti várható értéke minden egyes korcsoport-időszak kombinációra megegyezik a tapasztalt értékkel:

$$\mathbb{E}(\hat{D}_{xt}) = D_{xt} \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \quad (6.13)$$

E modell effektív paramétereinek száma a (6.9) vagy (6.10) képletben a becslés során figyelembe vett korcsoport-időszak kombinációk száma. Tehát ha az egymásba ágyazott modellek közül a bővebb modell a telített modell, akkor

$$K_1 = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt}.$$

6.5.2. Egyedi, teljes és skálázott deviancia

Az egyes korcsoport-időszak kombinációkra egyenként egy adott GAPC modell illeszkedése az általánosított lineáris modellkeretben (GLM) használatos *egyedi deviancia* (angolul *deviance residual*) fogalmával mérhető. Az egyedi devianciák az adott modell és a (6.13) egyenlet által definiált telített modell közötti választást elősegítő likelihood-

arány teszt keretében értelmezhetők, és ebben az esetben megegyeznek az egyes korcsoport-időszak kombinációk (6.12) tesztstatisztikához való hozzájárulásával.

Poisson-eloszlású halálesi gyakoriságok esetén az egyedi devianciák képlete a fentiek alapján a (6.9), (a 6.12) és (6.13) összefüggésekből származtatható:

$$\begin{aligned} dev_{xt} &= 2 \left(D_{xt} \ln \frac{D_{xt}}{E_{xt}^c m_{xt}} + E_{xt}^c m_{xt} - D_{xt} \right) \\ (x &= 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Binomiális eloszlású halálesi gyakoriságok esetén a megfelelő képlet:

$$\begin{aligned} dev_{xt} &= 2 \left(D_{xt} \ln \frac{D_{xt}}{E_{xt}^0 q_{xt}} + (E_{xt}^0 - D_{xt}) \ln \frac{E_{xt}^0 - D_{xt}}{E_{xt}^0 (1 - q_{xt})} \right) \\ (x &= 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T). \end{aligned} \quad (6.15)$$

A (6.14) vagy (6.15) összefüggésekben szereplő egyedi devianciák indikátorváltozókkal súlyozott összege adja a *teljes deviancia* (angolul *total deviance*) értékét, amely megegyezik az adott modell és a (6.13) egyenlet által definiált telített modell közötti választásra alkalmazható likelihood-arány tesztstatisztika értékével:

$$Dev = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt} dev_{xt}. \quad (6.16)$$

Az egyedi devianciák ismeretében a következő képlet alapján számíthatók ki az úgynevezett *skálázott egyedi devianciák* (angolul *scaled deviance residuals*):

$$sdev_{xt} = \text{sgn}(D_{xt} - \mathbb{E}(\tilde{D}_{xt})) \sqrt{\frac{dev_{xt}}{Dev}} \nu \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

ahol $\nu = K_1 - K_0$ a (6.16) összefüggésbeli tesztstatisztika szabadságfokainak száma, továbbá K_0 az illesztett modell, $K_1 = \sum_{x=1}^X \sum_{t=1}^T \chi_{xt}$ pedig a telített modell effektív paramétereinek száma. Az egyedi devianciákkal ellentétben a skálázott devianciák a megfigyelt és becsült halálesi gyakoriságok közötti eltérés irányát és a paraméterek számát is figyelembe veszik.

6.5.3. Információs kritériumok

A parszimónia elve jegyében a modellválasztás során két azonos illeszkedést biztosító modell közül a kevesebb paramétert tartalmazó, a valóságot egyszerűbben leíró modellt célszerű előnyben részesíteni. Cairns és szerzőtársai [2009] a paraméterek számának indokolatlan emelkedését elkerülendő az egyéb statisztikai alkalmazásokban is népszerű, információelméletből származó Akaike (AIC) és bayes-i (BIC) *információs kritériumok* (angolul *information criteria*) használatát javasolják, melyek képletei:

$$AIC = 2K_0 - 2\ell(\hat{\xi}),$$

$$BIC = K_0 \ln K_1 - 2\ell(\hat{\xi}),$$

ahol az eddigieknek megfelelően K_0 az illesztett modell, K_1 pedig a telített modell effektív paramétereinek száma.

Az AIC és BIC kritériumok konstrukciójából látható, hogy két illesztett modell közül az alacsonyabb információs kritériummal rendelkező változat használata célszerűbb. Fontos megjegyezni azonban, hogy e kritériumok segítségével az illesztett modellek illeszkedése abszolút értelemben nem tesztelhető: elképzelhető, hogy a fenti kritériumok által

legjobbnek minősített modell illeszkedése is elfogadhatatlan. A 6.5.1 szakaszban bemutatott likelihood-arány tesztstatisztikával ellentétben az itt ismertetett információs kritériumok nem egymásba ágyazott modellek közötti választásra is használhatók.

6.6. A mortalitási indexek és a kohorszhatás időbeli alakulása

A 4.5. szakaszban bemutatott kerethez hasonlóan a (6.3) egyenlet időtől függő paramétereinek alakulása idősoros modellek segítségével írható le.

6.6.1. Modellspecifikáció

A (6.3) egyenletbeli $k_t^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$, $t = 1, 2, \dots, T$) mortalitási indexek becsült értékeinek együttes alakulását Cairns–Blake–Dowd [2006], Haberman–Renshaw [2011], valamint Villegas és szerzőtársai [2016] *többdimenziós eltolásos véletlen bolyongásként* (angolul *multivariate random walk with drift*) modellezzik.

A jelölés egyszerűsítése érdekében célszerű az N darab becsült mortalitási indexet időtől függő vektor formájában felírni:

$$\hat{\mathbf{k}}_t = \begin{bmatrix} \hat{k}_t^{(1)} \\ \hat{k}_t^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{k}_t^{(N)} \end{bmatrix}.$$

Ezzel a jelöléssel a többdimenziós eltolásos véletlen bolyongás alapján a becsült mortalitási indexek dinamikáját definiáló egyenlet:

$$\hat{\mathbf{k}}_t = \hat{\mathbf{k}}_{t-1} + \mathbf{s} + \boldsymbol{\phi}_t \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (6.17)$$

ahol $\hat{\mathbf{k}}_1 \in \mathbb{R}^N$ adott kezdőérték, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$ az eltolás mértékét megadó trendparaméter, valamint $\boldsymbol{\phi}_t$ a folyamat véletlen hibatagjait jelöli, melyek független, $\mathbf{0}$ várható értékű, adott $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ pozitív definit kovarianciamátrixú, többdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorok:

$$\boldsymbol{\phi}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (t = 2, 3, \dots, T), \quad (6.18)$$

továbbá függetlenek a (6.1) egyenletben szereplő elméleti halálesi gyakoriságoktól is.

A (6.3) egyenletben szereplő c_j ($j = 1-X, 2-X, \dots, T-1$) kohorszhatás becsült értékeinek alakulását szintén ARIMA modellek segítségével szokás modellezni. Renshaw–Haberman [2006] az eltolásos ARIMA(1, 1, 0) modellt javasolják, mely így írható fel:⁸

$$\hat{c}_j = (1 + \gamma)\hat{c}_{j-1} - \gamma\hat{c}_{j-2} + s_c + \phi_j^{(c)} \quad (j = 3 - X, 4 - X, \dots, T - 1), \quad (6.19)$$

ahol \hat{c}_{1-X} és \hat{c}_{2-X} adott kezdőértékek, $\gamma \in \mathbb{R}$ és $s_c \in \mathbb{R}$ adott paraméterek, a $\phi_j^{(c)}$ hibatagok pedig független, 0 várható értékű, azonos $\sigma_c^2 > 0$

⁸ Plat [2009] javaslata a hasonló, de általánosabb eltolásos ARIMA(2,2,0) modell, amelyben a c_{j-1} és c_{j-2} tagok együtthatói egymástól függetlenül megválaszthatók.

varianciájú, normális eloszlású valószínűségi változók:

$$\phi_j^{(c)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_c^2) \quad (j = 3 - X, 4 - X, \dots, T - 1), \quad (6.20)$$

melyek függetlenek a (6.18) egyenletbeli hibavektoroktól és a (6.1) egyenletben szereplő elméleti halálesi gyakoriságoktól is.

6.6.2. A paraméterek becslése

A (6.17) egyenletet átrendezve a (6.18) összefüggésből adódik, hogy a becsült mortalitási indexvektor idősorának elsőrendű differenciái független, azonos paraméterű, többdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorok:

$$\hat{\mathbf{k}}_t - \hat{\mathbf{k}}_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{s}, \Sigma) \quad (t = 2, 3, \dots, T). \quad (6.21)$$

Így közös eloszlásuk várhatóérték-vektorának és kovarianciamátrixának maximum likelihood becslőfüggvényei a koordinátánkénti mintaátlagok vektorával és a mintából becsült kovarianciamátrixszal egyenlők:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{\mathbf{k}}_t - \hat{\mathbf{k}}_{t-1}) = \frac{1}{T-1} (\hat{\mathbf{k}}_T - \hat{\mathbf{k}}_1), \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T (\hat{\mathbf{k}}_t - \hat{\mathbf{k}}_{t-1} - \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}_t - \hat{\mathbf{k}}_{t-1} - \hat{\mathbf{s}})^T. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Továbbá a kohorszhatás alakulását leíró (6.19) és (6.20) összefüggésekből átrendezéssel és sztenderdizálással következik az alábbi reláció:

$$\hat{c}_j - \hat{c}_{j-1} - \gamma(\hat{c}_{j-1} - \hat{c}_{j-2}) \sim \mathcal{N}(s_c, \sigma_c) \quad (j = 3 - X, 4 - X, \dots, T - 1),$$

amelyből a $\boldsymbol{\theta}_c^T = (\gamma, s_c, \sigma_c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} = \Theta_c$ paramétervektor függvényében felírható a kohorszhatás modelljének log-likelihood függvénye:

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\theta}_c) = & \alpha - (X + T - 3) \ln \sigma_c \\ & - \frac{1}{2\sigma_c^2} \sum_{j=3-X}^{T-1} (\hat{c}_j - \hat{c}_{j-1} - \gamma(\hat{c}_{j-1} - \hat{c}_{j-2}) - s_c)^2, \end{aligned} \quad (6.23)$$

ahol $\alpha = -\frac{X+T-3}{2} \ln(2\pi)$ konstans. A kohorszhatás paramétereinek maximum likelihood becslőfüggvényét ekkor a következő optimalizálási feladat megoldása szolgáltatja:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_c = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_c \in \Theta_c} \ell_c(\boldsymbol{\theta}_c).$$

Mivel a (6.23) egyenlet jobb oldalán szereplő összeg regressziós eltérés-négyzetösszegként is felfogható, ezért a becslési feladat a a közönséges legkisebb négyzetek módszerével is megoldható. Így a $\hat{c}_j - \hat{c}_{j-1}$ elsőrendű differenciákat egy lineáris regressziós modellben saját elsőrendű késleltetett értékekkel és egy konstannsal magyarázva a paraméterek maximum likelihood becslése a következő lesz: $\hat{\gamma}$ a regressziós együtt-ható, \hat{s}_c a regressziós konstans, $\hat{\sigma}_c^2$ pedig a regresszió átlagos négyzetes hibája. Alternatív megoldásként a paraméterek becsült értékei a Yule–Walker egyenletek (lásd például Asteriou–Hall [2015]) segítségével is kiszámíthatók.

6.7. Előrejelzés

Az előző szakaszban ismertetett idősoros modellek felépítésének célja a GAPC modell időtől függő paramétereinek előrejelzése, melynek segítségével a jövőbeli halandósági ráták előrejelezhetők. Az áttekinthetőség

kedvéért érdemes a pontbecslést és a bizonytalanságot is magába foglaló bootstrap becslést két külön szakaszban tárgyalni.

6.7.1. Pontbecslés

A mortalitási indexvektor jövőbeli értékeinek pontbecslései a már ismert értékeket adottnak tekintve a (6.21) összefüggés extrapolálásával nyerhetők:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\mathbf{k}}_{T+j}) &= \mathbb{E}\left(\hat{\mathbf{k}}_T + \sum_{i=1}^j (\hat{\mathbf{k}}_{T+i} - \hat{\mathbf{k}}_{T+i-1})\right) = \\ &= \hat{\mathbf{k}}_T + \sum_{i=1}^j \mathbb{E}(\hat{\mathbf{k}}_{T+i} - \hat{\mathbf{k}}_{T+i-1}) = \hat{\mathbf{k}}_T + j\mathbf{s} \quad (j = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

Mivel a maximum likelihood becslés invariáns a paraméterek függvénytranszformációjára, ezért a (6.22) egyenlet behelyettesítésével adódik az alábbi maximum likelihood becslés a jövőbeli mortalitási indexvektorok várható értékére:

$$\hat{\mathbb{E}}(\hat{\mathbf{k}}_{T+j}) = \hat{\mathbf{k}}_T + j\hat{\mathbf{s}} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (6.24)$$

A kohorszhatás jövőbeli várható értékeinek pontbecslései a már ismert értékeket adottnak tekintve a (6.19) egyenlet rekurzív extrapolálásával számíthatók ki:

$$\hat{\mathbb{E}}(\hat{c}_{T-1+j}) = (1 + \hat{\gamma})\hat{\mathbb{E}}(\hat{c}_{T-2+j}) - \hat{\gamma}\hat{\mathbb{E}}(\hat{c}_{T-3+j}) + \hat{s}_c \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (6.25)$$

ahol $\hat{\gamma}$ és \hat{s}_c a (6.23) log-likelihood függvény maximalizálása során nyert értékek.

A (6.24) és (6.25) egyenletek alapján nyert becsléseket a (6.3) összefüggésbe behelyettesítve jelezhető előre a GAPC modellcsalád szisztematikus komponense:

$$\hat{\eta}_{x,T+j} = \hat{a}_x + \sum_{i=1}^N \hat{b}_x^{(i)} \hat{\mathbb{E}}(\hat{k}_{T+j}^{(i)}) + \hat{b}_x^{(0)} \hat{\mathbb{E}}(\hat{c}_{T+j-x}) \quad (6.26)$$

$$(x = 1, 2, \dots, X, \quad j = 1, 2, \dots).$$

Végül a (6.2) és (6.26) egyenletek alapján nyerhetők a jövőbeli központi vagy kezdeti halandósági ráták pontbecslései:

$$\hat{m}_{x,T+j} = g^{-1}(\hat{\eta}_{x,T+j}) \quad (x = 1, 2, \dots, X, \quad j = 1, 2, \dots).$$

6.7.2. A bizonytalanság modellezése

A halandóság-előrejelző módszerek alkalmazásával járó *előrejelzési bizonytalanság* modellezésére Lee–Carter [1992] óta szokásos eljárás a 6.7.1. szakaszban bemutatott pontbecslések alkalmazása helyett az időtől függő paraméterek hibatagjainak Monte Carlo szimulációja (Deák [1990]) segítségével előrejelzéseket készíteni. A GAPC modell keretében könnyedén készíthetők ilyen előrejelzések a (6.18) és (6.20) összefüggésekben szereplő hibatagok szimulációjával, a szimulált hibatagokat behelyettesítve az időtől függő paraméterek jövőbeli alakulását leíró egyenletekbe. Ez az eljárás ugyanakkor meglehetősen félrevezető eredményeket produkál, mivel a (6.3) egyenlet paramétereit implicit módon azok mintából becsült értékeivel azonosítja, figyelmen kívül hagyva ezáltal a paraméter-becslési eljárásból fakadó úgynevezett *paraméterbizonytalanságot*.

A GAPC modellcsalád keretében az előrejelzési bizonytalanság és a pa-

raméterbizonytalanság *együttesen* a Brouhns és szerzőtársai [2005], valamint Villegas és szerzőtársai [2016] által javasolt *félparaméteres bootstrap* (angolul *semiparametric bootstrap*) eljárás segítségével vehető figyelembe⁹, mivel analitikus módszerekkel a bizonytalanság két forrása nehezen kezelhető együttesen. Koissi és szerzőtársai [2006] alternatív megközelítésként a skálázott egyedi devianciákból vett mintavételezésen alapuló reziduális bootstrap módszert javasolják.

A Brouhns és szerzőtársai [2005] által javasolt félparaméteres bootstrap eljárás keretében a $B \in \mathbb{N}_{>0}$ darab bootstrap mintában először a D_{xt} ($x = 1, 2, \dots, X$, $t = 1, 2, \dots, T$) ismert halálesi gyakoriságokat újra szükséges generálni a megfigyelt értékekkel azonos várható értékű Poisson vagy binomiális eloszlásokból, majd a modellillesztést és az előrejelzést minden egyes D_{xt}^b ($b = 1, 2, \dots, B$, $x = 1, 2, \dots, X$, $t = 1, 2, \dots, T$) bootstrap mintára el kell végezni, a modellválasztási lépés nélkül, minden egyes mintára az eredetileg javasolt modellváltozatot alkalmazva. A vizsgálni kívánt véletlen mennyiségek (például halandósági ráták vagy várható élettartamok) elméleti eloszlása a mintaméret növelésével határértékben azok bootstrap mintákban megfigyelt empirikus eloszlásával közelíthető.

⁹ A bootstrap módszert Efron [1979] javasolta először általánosabb kontextusban.

7. fejezet

Esettanulmány:

Élettartam-kockázat a nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában

A 7. fejezetben bemutatandó esettanulmány motivációja elsősorban Májer–Kovács [2011] az élettartam-kockázat szerepét vizsgáló cikkének módszertani továbbfejlesztése és aktualizálása. Elemzésemben a Májer–Kovács [2011] tanulmányában alkalmazott Lee–Carter [1992] modell keretein túllépve az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellcsalád (Hunt–Blake [2014], Currie [2016], valamint Villegas és szerzőtársai [2016]) segítségével vizsgálom a nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában jelentkező élettartam-kockázatot.

Számításaimat az 1975–2014. naptári évek halandósági adataira alapozom, ezáltal a Májer–Kovács [2011] által alkalmazott, 1970–2006. éveket felölelő bázisidőszak alapján számított értékekhez képest jelentősen ma-

gasabb várható élettartamokat és nettó díjakat állapítok meg. A relatív alulárázottság emelkedésének bemutatása révén alátámasztom, hogy a járadékok díjszámításában nőtt az élettartam-kockázat szerepe, illetve az annak figyelmen kívül hagyásával elkövetethető hiba nagysága.

Öt nevezetes modell mintán kívül becsült előrejelzési pontossága alapján a nyugdíjcélú életjáradékokkal kapcsolatos elemzésemet a Cairns–Blake–Dowd [2006] modellre építem. Májer–Kovács [2011] cikke a Lee–Carter [1992] modell keretében figyelembe vette a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterére vonatkozó bizonytalanságot. Ehhez képest lényeges módszertani újítás, hogy az itt bemutatandó elemzés a becslés során fellépő paraméter-bizonytalanságot *valamennyi* paraméter kapcsán figyelembe veszi a bootstrap (Efron [1979]) eljárás segítségével, ezáltal pontosabb képet adva az aktuáriusi szempontból igen lényeges kockázat mértékéről.

A probléma aktualitását az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékokra vonatkozó szabályok módosítása (Országgyűlés [2015]) adja, melynek következtében a vizsgált téma gyakorlati jelentősége az elmúlt évben jelentősen emelkedett.

7.1. A kérdés aktualitása

Az önkéntes nyugdíjpénztárakra vonatkozó korábbi szabályozás súlyos hiányossága volt, hogy a nyugdíjkorhatár betöltésekor a pénztárak nem voltak kötelesek a felhalmozott vagyon ellenében életjáradékot szolgáltatni a pénztártagok részére, még az ügyfél kifejezett kérésére sem. Így a pénztártagok nyugdíjas éveik biztosítására csupán *banktechnikai járadékot* igényelhettek. E konstrukció keretében a pénztártagok vagy örö-

kösek egy határozott tartam erejéig részesültek rendszeres járadékban. A banktechnikai járadék valójában nyugdíjcélra teljességgel alkalmatlan, mivel egyrészt a határozott tartam letelte után az ügyfelek anyagi biztonságát már nem garantálja, másrészt szolgáltatása a tartam végéig a pénztártag esetleges halála esetén is fennmarad, melynek következtében díja jóval magasabb annál, mint amit a nyugdíjcélu felhasználás indokolna.

Ezt a helyzetet orvosolja a 2015 decemberében elfogadott új pénztári szabályozás (Országgyűlés [2015]), melynek értelmében a legalább ezer tagot számláló önkéntes nyugdíjpénztárok – a tagok erre vonatkozó nyilatkozata esetén, a felhalmozott pénztári vagyonért cserébe – a nyugdíjkorhatár betöltésétől kezdve kötelesek valamely életbiztosító társaságnál *életjáradékot* vásárolni a tagok részére. Az életjáradék a banktechnikai járadékkal ellentétben a tulajdonosa élete végéig biztosít rendszeres kifizetéseket. Az intézkedés új lendületet adhat az életjáradékok pangó hazai piacának. Ezzel párhuzamosan várhatóan előtérbe kerül az – életjáradékok esetén kiemelt jelentőségű – élettartam-kockázat problémája, amely a életkorfüggő halandósági ráták időbeli csökkenéséből fakad.

Az életjáradékok díjszámítása során az aktuáriusi szakma hagyományosan az egy bizonyos naptári évre vonatkozó, a KSH által naptári évenként közzétett halandósági táblákra támaszkodik, feltételezve, hogy az életkorfüggő halálozási valószínűségek a jövőben változatlanok maradnak. A halandósági ráták időbeli csökkenése következtében így az életjáradékok tulajdonosai a kalkuláltnál nagyobb valószínűséggel érik meg a járadékfizetési időpontokat, ami előre nem kalkulált veszteséget jelent a járadékszolgáltatóknak. A probléma többek között a jövőbeli naptá-

ri évekre vonatkozó koréves halálozási valószínűségek minél pontosabb előrejelzésével orvosolható.

7.2. Adatok és módszerek

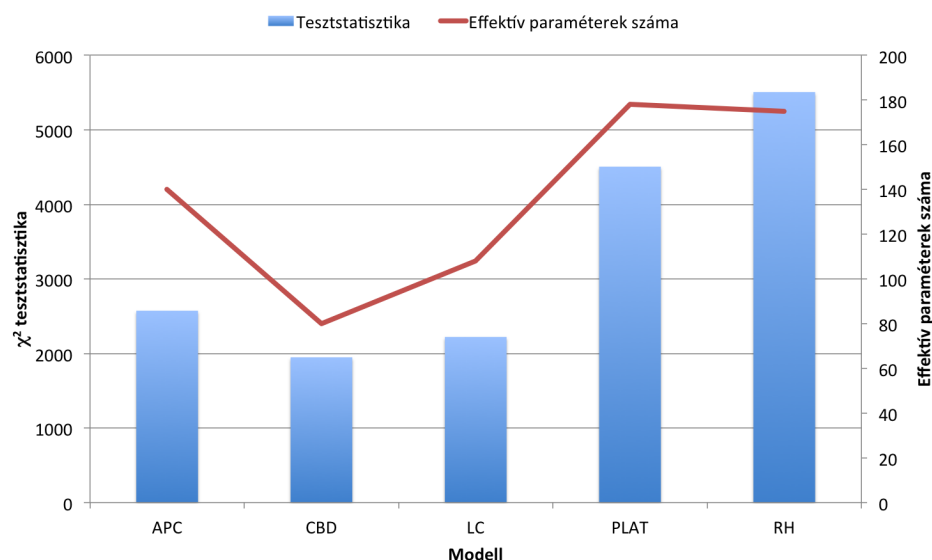
A nyugdíjas korú egyének halandósági rátáinak előrejelzése érdekében a KSH 1979–2013. naptári évekre és 65–99 korévekre vonatkozó, naptári és korévek szerint bontott létszám- és halálozási adatait használtam fel.¹ Mivel az Európai Unió erre vonatkozó irányelve (EU [2004]) értelmében a járadékbiztosítások díjkalkulációjában tilos a nemek szerinti megkülönböztetés, ezért a nemenkénti adatokat aggregáltam, és a számításokat a nemtől független (uniszex) korévenkénti létszámok és halálesi gyakoriságok alapján végeztem el.

A halandósági ráták előrejelzésére a GAPC model családba tartozó, a 6.1. ábrán korábban szemléltetett korcsoport–időszak–kohorsz (APC, Carstensen [2007]), Cairns–Blake–Dowd [2006](CBD), Poisson Lee–Carter (LC, Brouhns és szerzőtársai [2002a]) és időskori Plat [2009] modelleket, valamint a Renshaw–Haberman [2006] (RH) modell Haberman–Renshaw [2011] cikkében szereplő, egyszerűsített változatát alkalmaztam. A számításokat az R statisztikai programcsomag (R [2008] és Villegas és szerzőtársai [2016]) segítségével végeztem el.

A legjobb mintán kívüli előrejelzési teljesítményt nyújtó modell kiválasztása és a túlillesztés elkerülése érdekében az 1975–2014. naptári éveket az 1975–2004. naptári éveket magába foglaló *tanuló* és az 2005–2014. naptári éveket felölelő *tesztelő időszakra* osztottam fel. A felsorolt öt

¹ Banyár [2012] műve részletesen foglalkozik a járadékok díjszámításához használható halandósági tábla kiválasztásának kérdésével. Járadékszolgáltatók egyedi halandósági adatai híján itt kénytelen vagyok a néphalandósági adatokból kiindulni.

modell paramétereinek becslését a tanuló időszakon, illeszkedésük vizsgálatát pedig – a 3.3.5. szakaszban bemutatott módszertan segítségével – a tesztelő időszakon végeztem el. A tesztelés során az első húsz korévet (vagyis a 65–84 évesek adatait) vettem figyelembe, mivel a későbbi korévek már kevésbé relevánsak a hozzájuk tartozó alacsonyabb túlélési valószínűségek és a járadékok díjszámítása során alkalmazott diszkontálás miatt. A tesztek eredményeit és az illesztett modellek effektív paramétereinek számát a 7.1. ábra szemlélteti.²



7.1. ábra. GAPC modellek illeszkedése a tesztidőszakon és a modellek effektív paraméterek száma (2005–2014, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés)

A 7.1. ábra alapján a tesztelő időszakon a legjobb előrejelzési teljesítményt a kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére kifejlesztett Cairns–Blake–Dowd modell nyújtja, melyet illeszkedés szerinti sorrend-

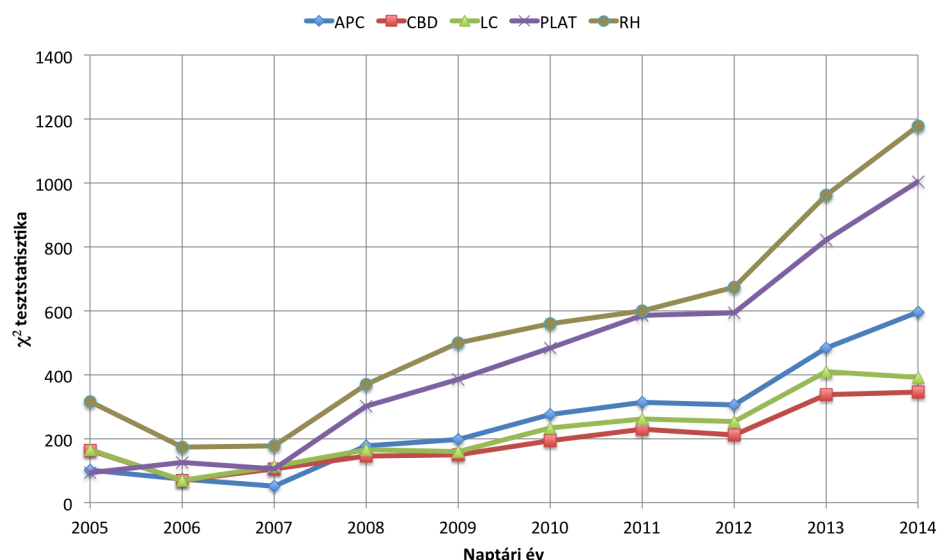
² Az alacsonyabb χ^2 tesztstatisztikák utalnak jobb illeszkedésre. Az országos létszámadatok használatából adódó nagy mintaméret miatt az illeszkedésre vonatkozó nullhipotézis valamennyi modell esetén határozottan elutasítható. Effektív paraméterszám alatt a többi paraméter által az identifikációs megkötések révén nem meghatározott paraméterek száma értendő.

ben a Poisson Lee–Carter és a korcsoport–időszak–kohorsz modellek követnek. Az illeszkedés alapján felállított rangsort az első három modelttől leszakadva a Plat és Renshaw–Haberman modellek zárják.

A Cairns–Blake–Dowd modell jó teljesítménye annál is figyelemre méltóbb, hogy ez az eljárás a vizsgált öt modell közül a legkevesebb effektív paraméterrel rendelkezik. A 7.1. ábrán megfigyelhető, hogy a magasabb effektív paraméterszámú modellek gyengébb előrejelzési pontosságot nyújtanak. A látszólagos ellentmondás oka, hogy a bonyolultabb modellek használata esetén a *túlillesztés* jelensége lép fel: ezek a modellek a kevesebb paramétert tartalmazó modelleknél szükségerően jobban illeszkednek a tanuló időszakon, ugyanakkor a tesztelő időszak éveire már gyengébb előrejelzést eredményeznek, hasonlóan ahhoz, mint amikor egy tapasztalatlan elemző a tanuló időszakon mért illeszkedéstől félrevezetve egy időben közel lineáris egyváltozós idősort magas fokszámú polinommal jelez előre.

Érdemes megjegyezni, hogy a vizsgált adatokon a 6.5.3. szakaszban bemutatott Akaike és bayes-i információs kritériumok alapján – a mintán kívüli teljesítmény alapján felállított rangsorral ellentétesen – a magasabb effektív paraméterszámú modellek használata lenne indokolt, ami arra enged következtetni, hogy e mutatók nem büntetik elég szigorúan a paraméterszám indokolatlan növekedését, így használatuk túlillesztéshez vezet.

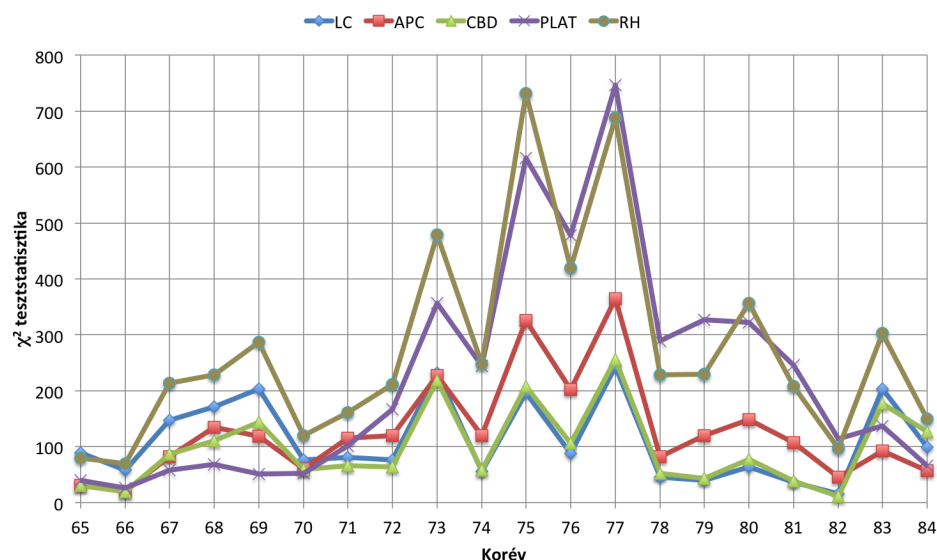
Hogy fényt derítsek az egyes modellek előrejelzési hibáinak természetére, az illeszkedés vizsgálatát a 65–84 éves életkorokban korévenként és az előrejelzési időszak éveire naptári évenként bontva is elvégeztem. Az eredményeket a 7.2. és 7.3. ábrák szemléltetik.



7.2. ábra. GAPC modellek illeszkedése a tesztidőszakon naptári évenként (2004–2013, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés)

A 7.2. ábra alapján az előrejelzési időtáv növekedésével jellemzően valamennyi vizsgált modell előrejelzési pontossága csökken. A pontosság romlása üteme a magas effektív paraméterszámú Plat és Renshaw–Haberman modellek esetén a legszembetűnőbb, illetve ezekkel szemben a legjobb illeszkedést nyújtó Cairns–Blake–Dowd és Poisson Lee–Carter modellek esetén a legmérsékeltebb. A naptári évenkénti elemzés megerősíti a Cairns–Blake–Dowd modell alkalmazhatóságát, annál is inkább, mivel a továbbiakban az életjáradékok díjszámítása az itt bemutatottnál jóval hosszabb, 35 éves előrejelzési horizont használatát teszi majd szükségessé.

A 7.3. ábra alapján egyik vizsgált modell esetén sem figyelhető meg életkor szerint monoton trend az előrejelzési pontosságban. A legpontosabbnak ítélt Cairns–Blake–Dowd és Poisson Lee–Carter modellek közötti fő különbség e tekintetben a 65–70 év közötti életkorokban figyelhető meg: itt a Cairns–Blake–Dowd modell érezhetően pontosabb



7.3. ábra. GAPC modellek illeszkedésének összehasonlítása a teszt-időszakon korévenként (2004–2013, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés)

előrejelzést szolgáltat. 72 éves kortól kezdve a két modell pontossága közel azonos. A 73–77 év közötti életkorokban valamennyi modell a többi vizsgált életkorhoz képest viszonylag gyengén teljesít.

Az eredmények alapján összességében megállapítható, hogy a vizsgált adatsoron a hazai időskori halandóság előrejelzésére az öt kiválasztott GAPC modell közül a Cairns–Blake–Dowd modell használata javasolt. E modell mellett szól, hogy a legalacsonyabb mintán kívüli előrejelzési hibával és emellett a legkevesebb effektív paraméterrel rendelkezik, előrejelzési hibája a legalacsonyabb ütemben emelkedik az időhorizont növelésével, valamint az életjáradékok díjszámításánál leglényegesebb, 65–70 év közötti életkorok halandóságát a Poisson Lee–Carter modellhez képest jóval alacsonyabb hibával jelzi előre a tesztelő időszakon. Nem mellékes szempont az sem, hogy Cairns–Blake–Dowd [2006] cikkükben a modellt kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére javasolják a Lee–Carter modell alternatívájaként.

7.3. Az életjáradékok díjszámítása statikus és dinamikus halandósági ráták alapján

Az x éves korú biztosított azonnal induló, élethosszig tartó, évi egy forint összegű életjáradékának egyszeri nettó díjképlete az aktuáriusi ekvivalenciaelv (Banyár [2003]) alapján:³

$$\ddot{a}_x = \sum_{i=0}^{\omega-x} \left(v^i \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}) \right) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega), \quad (7.1)$$

ahol a 3.2.2. szakasz jelöléseivel összhangban ω a feltételezett legmagasabb elérhető életkor (a KSH gyakorlata alapján $\omega = 100$ év), v a technikai kamatláb alapján számított éves diszkonttényező⁴, a q_x ($x = 0, 1, \dots, \omega$) értékek pedig a koréves halálozási valószínűségek.

A (7.1) összefüggés szerinti nettó díj azt az életjáradékért cserébe nyújtandó egyösszegű befizetést adja meg, amely mellett a járadékszolgáltató a technikai kamatlábnak megfelelő, rögzített éves befektetési hozam feltételezése mellett, a járadékfizetésen kívüli egyéb költségek figyelembe vétele nélkül nulla profitot realizál. Az életjáradék bruttó díja (Banyár [2003]) a (7.1) összefüggés szerinti nettó díj és a tényleges éves életjáradék összegének szorzata, növelve a költségek és a szolgáltatói profit fedezetével.⁵

A 7.1. összefüggés a klasszikus aktuáriusi díjszámításban érvényes statikus halandósági ráták feltételezése mellett helytálló. Ezzel szemben a

³ A képletben az üres szorzat értéke definíció szerint egynek tekintendő.

⁴ A technikai kamatláb a befektetett életbiztosítási díjtartalékon garantált éves hozamráta, melynek segítségével az aktuárius az életbiztosítások klasszikus díjkalkulációja során meghatározza a jövőbeli pénzáramlások jelenértékét (Banyár [2003]).

⁵ Az életjáradékok kifizetései általában évesnél sűrűbb (például havi) gyakoriságúak. Ennek hatása az életjáradék nettó díjára jellemzően csekély, illetve a nettó díjjal közelítőleg arányos.

halandóság-előrejelző módszerek segítségével előállítható időben változó, dinamikus halandósági tábla használata esetén a számítások során az életkor növekedésével a naptári idő múlását is figyelembe kell venni. Ekkor a 7.1. összefüggés a következőképpen módosul:

$$\ddot{a}_x = \sum_{i=0}^{\omega-x} \left(v^i \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j, T+j}) \right) \quad (x = 0, 1, \dots, \omega),$$

ahol q_{xt} ($x = 0, 1, \dots, \omega$, $t = T, T+1, T+2, \dots$) az x éves egyének koréves halálozási valószínűsége a t -edik naptári évben, valamint T az aktuális naptári év a díjszámítás pillanatában.

Az x éves korban várható hátralévő élettartamot statikus halandóság mellett megadó (3.11) összefüggés így is felírható:

$$e_x = \sum_{i=1}^{\omega-x} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}) + \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1, \dots, \omega).$$

A megfelelő összefüggés dinamikus halandóság esetén:

$$e_x = \sum_{i=1}^{\omega-x} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j, T+j}) + \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1, \dots, \omega).$$

7.4. Eredmények

Az élettartam-kockázat szerepének számszerűsítése érdekében elsőként a 65-99 éves egyének életkorfüggő halandósági rátáit a GAPC modellcsaládba tartozó, korábban már bemutatott öt nevezetes halandóság-előrejelző modell felhasználásával előrejeleztem a 2016–2050. naptári évekre, majd az előrejelzést a Villegas és szerzőtársai [2016] tanulmányában javasolt félparaméteres bootstrap (Efron [1979]) eljárás segít-

ségével egyenként 5000 replikációból⁶ álló bootstrap mintákon is megismételtem. A nyugdíjkorhatár betöltésekor várható e_{65} hátralévő élettartam és \ddot{a}_{65} egyszeri nettó díj értékeket a halandósági ráták várható értéinek megfelelő pontbecslések alapján, illetve valamennyi szimulált bootstrap mintában egyenként is meghatároztam. Az összehasonlítás kedvéért a legfrissebb ismert, 2014. évi néphalandósági tábla alapján – a klasszikus aktuáriusi gyakorlattal összhangban időben változatlan, statikus halandósági rátákat feltételezve – is elvégeztem a számításokat. Mivel a technikai kamatláb maximális mértéke az azt szabályozó MNB rendelet (MNB [2015]) alapján forintban fennálló kötelezettségek esetén 2016. július 1-étől évi 2,3%, ezért a számítások során az $v = \frac{1}{1,023}$ diszkonttényezőt alkalmaztam. További összehasonlításra adtak lehetőséget a Májer–Kovács [2011] tanulmányában bemutatott eredmények, melyek a Lee–Carter [1992] modell és az 1970–2006 bázisidőszak alapján, 3%-os technikai kamatláb feltételezésével készültek.

A Cairns–Blake–Dowd modell alapján nyert számítási eredményeimet és a Májer–Kovács [2011] cikkében szereplő megfelelő mutatószámokat ebben a sorrendben a 7.1. táblázat felső és alsó része foglalja össze. A táblázat második oszlopában a legutolsó ismert halandósági tábla alapján számított keresztmetszeti értékek, harmadik oszlopában a halandóság-előrejelzés segítségével nyert dinamikus, kohorszszemléletű várható értékek és bootstrap konfidenciaintervallumok, negyedik oszlopában pedig a statikus, keresztmetszeti szemléletben a dinamikus várható értékekhez képest elkövetett százalékos hibák nagyságai láthatók.

A 7.1. táblázat alapján megállapítható, hogy a statikus, keresztmetszeti szemléletben számított 65 éves korban várható hátralévő élettart-

⁶ A bootstrap minták számának növelése 5000 replikáció felett már csak elhanyagolható mértékben változtatta meg a számított konfidenciaintervallumok határait.

Saját számítás (bázisidőszak: 1975–2014):

Mennyiség	Keresztmetszeti	Várható érték (konf.int.)	Statikus hiba
e_{65} (év)	16,47	18,21 (16,61; 19,80)	-9,51%
\ddot{a}_{65} (Ft)	13,72	14,78 (13,83; 15,72)	-6,43%

Májér–Kovács [2011] (bázisidőszak: 1970–2006):

Mennyiség	Keresztmetszeti	Várható érték (konf.int.)	Statikus hiba
e_{65} (év)	15,39	16,43 (15,12; 17,83)	-6,33%
\ddot{a}_{65} (Ft)	11,87	12,43 (11,70; 13,17)	-4,50%

7.1. táblázat. Összehasonlítás: a 65 éves korban várható hátralévő élettartam és az életjáradék egyszeri nettó díja (forrás: saját számítás és Májér–Kovács [2011])

tam 2006–2014 között 1,08 évvel, a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díja pedig 1,85 Ft-tal emelkedett. Ez utóbbi hatás részben a várható élettartam növekedésének, részben pedig a technikai kamatláb csökkenésének tudható be.⁷ Az újabb számításaim alapján már az élettartam-kockázatot figyelmen kívül hagyó, keresztmetszeti értékek is meghaladják a Májér–Kovács [2011] által közölt kohorszszemléletű, dinamikus várható értékeket. Az új számítás alapján a dinamikus értékek konfidenciaintervallumai jóval szélesebbek a Májér–Kovács [2011] tanulmányában szereplő megfelelőikhez képest, mivel az utóbbiak – az új számítás során alkalmazott bootstrap eljárással szemben – a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterét leszámítva nem tartalmazzák a paraméterbecslésből fakadó bizonytalanságot. A naiv, statikus szemlélet alkalmazásával elkövetett százalékos hiba nagysága mind a várható hátralévő élettartam, mind az életjáradék nettó díja esetén közel másfélszerese a Májér–Kovács [2011] eredményei alapján számított százalékos hibának, ami a módszertani különbségeken túl is arra enged

⁷ Érdemes megjegyezni, hogy a Lee–Carter [1992] modell használata az újabb adatokon minimális eltéréssel a Cairns–Blake–Dowd [2006] modellel közel azonos eredményt ad, így a különbség nem a módszerválasztásból adódik.

következtetni, hogy az élettartam-kockázat jelentősége nőtt az utóbbi években. A statikus szemlélet alkalmazása a nyugdíjazáskor várható hátralévő élettartamot közel két évvel alábecsüli, és a nyugdíjcélú életjáradékok esetén 6,43%-os alulárázottsághoz vezet, ami például évi 1 millió Ft összegű havi járadék esetén a szerződés megkötésekor 1 millió 60 ezer Ft⁸ tartalékhiányt, és ezáltal ugyanekkora nagyságú azonnali veszteséget jelent a járadékszolgáltató számára. Ez a veszteség a biztosítási gyakorlatban is igen jelentős, így a statikus szemlélet egyre kevésbé megengedhető, és egyre nagyobb hangsúlyt szükséges fordítani az élettartam-kockázat megfelelő modellezésére, hogy a biztosítók és nyugdíjpénztárak megfelelően készülhessenek fel az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékok nyújtására és a Szolvencia II keretrendszer alkalmazására. A járadékszolgáltatók számára a halandóság-előrejelző módszereket minden eddiginél egységesebben és áttekinthetőbben magába foglaló GAPC modellcsalád alkalmazása és az előrejelzési bizonytalanság módszertani szempontból adekvát figyelembe vétele elősegítheti ezt a munkát.

⁸ A veszteség a megfelelő nettó díjak eltérése és az éves járadéktag szorzataként kapható meg (Banyár [2003]).

8. fejezet

Összefoglalás

Bár az 1.4. alfejezetben feltett kutatási kérdésekre adott válaszok megtalálhatók értekezésem 5. és 7. fejezeteiben, azokat az áttekinthetőség mégis célszerűnek tartom röviden összefoglalni:

- Várhatóan hogyan alakulnak 2035-ig a következő mutatószámok: a magyarországi férfiak és nők halandósági rátái, a termékenységi ráták, az ország népessége, a születéskor várható élettartam és a nyugdíjrendszer szempontjából lényeges időskori függőségi ráta?

Válasz: A Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] cikkét bemutató 5. fejezet alapján a Lee–Carter [1992] modell segítségével készített halandósági előrejelzés szerint mind a férfiak, mind a nők halandósági rátáinak jelentős csökkenése várható 2035-ig, enyhén emelkedő, de a 2,1-es kritikus értéktől az időszak végén is jelentősen elmaradó teljes termékenységi ráta mellett. E folyamatok eredményeképpen Magyarország népessége 2035-ben várhatóan a 8 648 000 főt sem fogja elérni, miközben a népesség életkor szerinti összetétele jelentősen megváltozik. A születéskor várható élettartamok 2035-ig a férfiak esetén várhatóan eléri majd a 76, nők esetén pe-

dig a 82 évet, miközben az időskori függőségi ráta értéke a jelenlegi érték másfélszeresére, 40 százalék fölé emelkedik, komoly kihívások elé állítva az állami nyugdíjrendszert.

- Mennyi ideig tartható fenn a magyar állami nyugdíjrendszer bevételeinek és kiadásainak egyensúlya a jelenlegi foglalkoztatási, halandósági, gyermekvállalási és reálbér-növekedési trendek és nyugdíjkorhatár mellett, illetve az idő múlásával hogyan alakul várhatóan a rendszer egyenlege? Ceteris paribus milyen paraméter-változások és mennyi ideig képesek meghosszabbítani a rendszer hozzávetőleges egyensúlyi állapotát?

Válasz: A Bajkó–Maknics–Tóth–Vékás [2015] cikkét bemutató 5. fejezetben ismertetett kohorszalapú nyugdíjmodell alapján az alapfeltételezések mellett várhatóan 2026-tól válik negatívvá a nyugdíjkassza egyenlege, a deficit mértéke pedig gyorsuló ütemben emelkedve 2035-re megközelíti a nyugdíjcélú adó- és járulékbételek 8 százalékát. A probléma 2035-ig várhatóan a bruttó bér százalékpontjaiban kifejezve ceteris paribus 4 százalékpontos bérteher-emeléssel vagy a Nyugdíjbiztosítási Alap szociális hozzájárulási adóból való részesedésének a 2015-ben érvényes 85,46 százalékos szintről a 2014-ben érvényes 96,3 százalékos szint közelébe való visszaállításával orvosolható. Ceteris paribus az alapforgatókönyvél alacsonyabb reálbér-növekedési ütem feltételezése esetén 2022-től, a foglalkoztatás alacsony javulási üteme mellett 2023-tól, az alapforgatókönyvnél magasabb reálbér-növekedési ütem mellett 2035-től, gyorsabb foglalkoztatás-javulás esetén pedig 2034-től jelentkezik deficit a modell alapján. Ha 2022 után ceteris paribus a nyugdíjkorhatár a nyugdíjazáskor várható hátralévő élettartam

várt emelkedését követi, akkor a vizsgált időszak végéig biztosított az egyensúly a modellben.

- Melyik széles körben elterjedt halandóság-előrejelző modell írja le legmegfelelőbben a hazai időskori halandóság alakulását a mintán kívüli előrejelzési pontosság kritériuma alapján?

Válasz: A 7. fejezetben vizsgált öt népszerű halandóság-előrejelző módszer közül a kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére kifejlesztett Cairns–Blake–Dowd [2006] modell mintán kívüli előrejelző képessége a legpontosabb a 65–84 éves életkorokban a 2005–2014. évekből álló tesztelő időszakon. Az időhorizont növelésével e modell használata esetén növekszik a legalacsonyabb ütemben az előrejelzési hiba, amely a nyugdíjszámítások szempontjából legfontosabb 65–70 éves korcsoportban e modell esetén jóval alacsonyabb az egyébként összességében második legpontosabb előrejelzést nyújtó Poisson Lee–Carter modellhez (Brouhns és szerzőtársai [2002a]) képest. A jóval több paraméterrel rendelkező Plat [2009] és Renshaw–Haberman [2006] modellek használata túlillesztéshez vezet, amelyre a tanuló időszakon mért kiváló illeszkedésük és ezzel párhuzamosan a tesztelő időszakon mért gyenge – és az időhorizont növelésével gyors ütemben romló – előrejelzési pontosságuk enged következtetni.

- Várhatóan mekkora tévedést, illetve pénzügyi veszteséget eredményez, ha a járadékszolgáltató a klasszikus aktuáriusi módszertan alapján, dinamikus helyett statikus halandósági feltételezések mellett számítja ki a nyugdíjkorhatáron várható hátralévő élettartamot és a nyugdíjcélú életjáradékok egyszeri nettó díját? *Válasz:*

A 7. fejezetben bemutatott számítás alapján a Cairns–Blake–Dowd [2006] modell segítségével előrejelzett, dinamikus uniszex néphalandósági tábla használata esetén a nyugdíjkorhatáron várható hátralévő élettartam majdnem két évvel felülmúlja a statikus halandóság alapján számított értéket. A statikus számítás a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díját 6,43%-kal alábecsüli, ami például évi 1 millió Ft összegű életjáradék esetén 1 millió 60 ezer Ft körüli, a biztosítási gyakorlatban igen jelentős mértékű azonnali tartalékhiányt és veszteséget okoz a járadékszolgáltatónak.

- Vajon jelentősen változott-e az életjáradékok díjszámítása során az élettartam-kockázat figyelmen kívül hagyásával elkövetett díjszámítási hiba nagysága 2006 és 2014 között?

Válasz: Igen, a statikus halandóság feltételezése miatt jelentkező alulárázottság mértéke a Májer–Kovács [2011] tanulmányában szereplő 4,51%-ról 6,43%-ra nőtt a 2006 és 2014 közötti időszakban. A változás az aktuáriusi gyakorlat szempontjából rendkívül jelentős, továbbá a néphalandóság vizsgálatából adódó hatalmas mintaméret miatt formális teszt alkalmazása nélkül is kijelenthető, hogy statisztikai értelemben is szignifikáns.

A kutatási kérdéseimre adott válaszok alapján az 1.4. alfejezetben megfogalmazott kutatási hipotéziseimmel kapcsolatban a következők állapíthatók meg:

1. hipotézis: A hazai halandóság javulása a termékenységi és munkaerő-piaci trendekkel együttesen az állami nyugdíjrendszer jelenlegi paraméterei mellett középtávon a kiadások túlsúlyához és a rendszer fenntarthatatlanságához vezet.

Következtetés: Igen, az 5. fejezetben bemutatott modell alapján az állami nyugdíjrendszer egyenlege – a feltételezett tendenciák mellett, a rendszer paramétereinek változtatása nélkül – 2026-tól gyorsuló ütemben növekvő deficitet mutat majd várhatóan.

2. hipotézis: A hazai időskori halandóság előrejelzésére a klasszikus Lee–Carter [1992] modellnél alkalmasabb valamely az ezredfordulót követően elterjedt újabb eljárás.

Következtetés: Igen, a 7. fejezetben bemutatott esettanulmány alapján a hazai uniszex időskori halandósági rátákat a választott tesztelő időszakon a Cairns–Blake–Dowd [2006] modell jelzi előre legmegfelelőbben.

3. hipotézis: 2006 és 2014 között országos szinten emelkedett az élettartam-kockázat jelentősége a nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában.

Következtetés: Igen, a 7. fejezetben bemutatott esettanulmány következtetése alapján a statikus halandóság feltételezésével a nyolc évvel ezelőttinél gyakorlati és statisztikai értelemben is jelentősen nagyobb mértékű hibát követ el a járadékszolgáltató. A változás arra enged következtetni, hogy a vizsgált időszakban az élettartam-kockázat szerepe nőtt az életjáradékok díjszámításában. Továbbá mivel a biztosítási ügyfelek halandósága jellemzően alacsonyabb a néphalandóságnál, és – részben tudatos antiszelekció következtében – a járadéktermékeket a biztosítási ügyfelek közül is jellemzően az alacsonyabb halandóságú ügyfelek vásárolják (Banyár [2003]), ezért a járadéktermékek állományaiiban feltehetően a 7. fejezetben kimutatott árazási hibánál még jelentősebb tévedésre lehet számí-

tani a biztosítási gyakorlatban. A kérdés fontosságát tovább növeli, hogy az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékokra vonatkozó új szabályozás (Országgyűlés [2015]) eredményeképpen a közeljövőben jelentős bővülés várható a hazai életjáradékok piacán.

Az értekezésemben bemutatott eredményeket természetesen több irányban lehetséges és kívánatos továbbfejleszteni, melyek közül dolgozatom lezárásaként három lehetséges jövőbeli kutatási témát említek meg. A hazai állami nyugdíjrendszer vizsgálatát érdemes kibővíteni az élettartam-kockázat által szintén erősen érintett állami egészségbiztosítási rendszer bevételeinek és kiadásainak előrejelzésével. Ez a téma jelentős szakmai kihívásokat tartogat, mivel a megbetegedésekre és egészségügyi kiadásokra vonatkozó előrejelzések módszertana jelentősen eltér a halandóság vizsgálatára alkalmazott eljárásoktól, illetve jóval szélesebb körű és részletezettségű adatforrásokat igényel. További ígéretes fejlesztési iránynak tartom az 5.6. alfejezetben röviden ismertetett mikroszimulációs nyugdíjmodellezési megközelítés alkalmazását, melynek segítségével – az összetétel-hatások figyelembe vételén keresztül – várhatóan tovább javítható az előrejelzések pontossága. Végezetül az életjáradékok piacán kívánatosnak tartom az antiszelekció integrált statisztikai és mikroökonómiai modellezését, mivel még a legpontosabb előrejelzések alkalmazhatóságát is jelentősen rontja, ha a tényleges és a számítások során feltételezett biztosított állományok összetételei különböznek egymástól. Egy széles adathalmazra épülő, körültekintően validált antiszelekciós modell így a hazai aktuáriusoknak és tudományos kutatóknak egyaránt hasznos támpontot nyújthat az életjáradékok piacának jelenleginél pontosabb elemzéséhez.

Irodalomjegyzék

Ágoston, K. Cs. (2001). Comparison of estimators for probability of death used in actuarial science. *Statisztikai Szemle*, 79(különszám):150–160. http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2001/2001_K6/2001_K6_150.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Ágoston, K. Cs. (2003). Halálozási valószínűségek, illetve becslésük. In *Banyár, J.: Életbiztosítás (Függelék, pp. 377–390.)*. Aula Kiadó, Budapest. ISBN 9789639478381.

Ágoston, K. Cs. & Kovács, E. (2000). *Halandósági modellek*. Aktuárius jegyzetek, 3. kötet, Budapest. http://www.uni-corvinus.hu/fileadmin/user_upload/hu/tanszekek/kozgazdasagtudomanyi/tsz-opkut/files/opkut/files/halandosagi_modellek.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Alai, D.H., Arnold-Gaille, S. & Sherris, M. (2015). Modelling cause-of-death mortality and the impact of cause-elimination. *Annals of Actuarial Science*, 9(1):167–186. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2233693>.

Andreozzi, L., Blaconá, M.T. & Arnesi, N. (2011). The Lee Carter method for estimating and forecasting mortality: an application for Argentina. *Working Paper, School of Statistics, National*

- University of Rosario*. <http://www.forecasters.org/submissions/andreoazziluciaisf2011.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Arató, M., Bozsó, D., Elek, P. & Zempléni, A. (2009). Forecasting and Simulating Mortality Tables. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(3–4):805–813. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2008.01.012>.
- Arató, M., Dryden, I.L. & Taylor, C.C. (2006). Hierarchical Bayesian modelling of spatial age-dependent mortality. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2):1347–1363. <http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2006.02.007>.
- Arnold-Gaille, S. & Sherris, M. (2016). International Cause-Specific Mortality Rates: New Insights from a Cointegration Analysis. *ASTIN Bulletin*, 46(1):9–38. <http://dx.doi.org/10.1017/asb.2015.24>.
- Asteriou, D. & Hall, S. G. (2015). *Applied Econometrics (3rd edition, Part V, Chapter 13: ARIMA Models and the Box–Jenkins Methodology)*. Palgrave MacMillan, London. ISBN 9781137415479.
- Babel, B., Bomsdorf, E. & Schmidt, R. (2008). Forecasting German mortality using panel data procedures. *Journal of Population Economics*, 21(3):541–555. <http://dx.doi.org/10.1007/s00148-006-0097-4>.
- Bajkó, A., Maknics, A., Tóth, K. & Vékás, P. (2015). A magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságáról. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1229–1257. <http://dx.doi.org/10.18414/kszo.2015.12.1229>.
- Banyár, J. (2003). *Életbiztosítás*. Aula Kiadó, Budapest. ISBN 9789639478381.

- Banyár, J. (2012). *A kötelező öregségi életjáradékok lehetséges modelljei*. Társadalombiztosítási könyvtár. Gondolat Kiadó, Budapest. ISBN 9789636934224.
- Banyár, J. & Vékás, P. (2015). A pénzügyi termékek ára. *Corvinus Kutatások*, 2091. <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2091/>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Baran, S., Gáll, J., Ispány, M. & Pap, G. (2007). Forecasting Hungarian mortality rates using the Lee–Carter method. *Acta Oeconomica*, 57:21–34. <http://dx.doi.org/10.1556/aoecon.57.2007.1.3>.
- Bauer, D., Börger, M. & Russ, J. (2010). On the pricing of longevity-linked securities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46:139–149. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.06.005>.
- Benjamin, B. & Pollard, J.H. (1993). *The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics (3rd edition)*. Institute and Faculty of Actuaries, Oxford. ISBN 978-0901066268.
- Berde, É. & Németh, P. (2015a). A termékenységi arányszám kiszámításának különböző módszerei. *Köz-gazdaság*, 10(2):121–137. <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2039/>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Berde, É. & Németh, P. (2015b). Adjusted Czech, Hungarian and Slovak Fertility Rates Compared with the Traditional Total Fertility Rate. *Statisztikai Szemle*, 93:(különszám):87–107. http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2015/2015_K19/2015_K19_087.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Blake, D., Cairns, A., Dowd, K. & MacMinn, R. (2006). Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation, and Hedging. *Journal*

- of Risk and Insurance*, 73:647–672. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00193.x>.
- Booth, H. & Tickle, L. (2008). Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *ADSRI Working Paper No. 3, Australian Demographic & Social Research Institute, Canberra*. <http://demography.anu.edu.au/sites/default/files/publications/adsri-papers/ADSRIwp-03.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Booth, H., Hyndman, R.J., Tickle, L. & De Jong, P. (2006). Lee–Carter mortality forecasting: A multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research*, 15(9):289–310. <http://dx.doi.org/10.4054/demres.2006.15.9>.
- Booth, H., Maindonald J. & Smith, L. (2002). Applying Lee–Carter under Conditions of Variable Mortality Decline. *Population Studies*, 56(3):325–336. <http://dx.doi.org/10.1080/00324720215935>.
- Börger, M. (2010). Deterministic shock vs. stochastic value-at-risk – an analysis of the Solvency II standard model approach to longevity risk. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik*, 31(2):225–259. <http://dx.doi.org/10.1007/s11857-010-0125-z>.
- Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. & Nesbitt, C.J. (1997). *Actuarial Mathematics (2nd edition)*. Society of Actuaries, Itasca, Illinois. ISBN 978-0938959465.
- Brouhns, N., Denuit, M. & Van Keilegom, I. (2005). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting. *Scandinavian*

Actuarial Journal, 2005(3):212–224. <http://dx.doi.org/10.1080/03461230510009754>.

Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J.K. (2002a). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31:373–393. [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6687\(02\)00185-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6687(02)00185-3).

Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J.K. (2002b). Measuring the Longevity Risk in Mortality Projections. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, 2:105–130. <https://pure.uvt.nl/ws/files/510433/brouhns2002.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Cairns, A. J. G., Blake, D. & Dowd, K. (2006). A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration. *Journal of Risk and Insurance*, 73(4):687–718. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x>.

Cairns, A. J. G., Blake, D. & Dowd, K. (2008). The Birth of the Life Market. *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 3:6–36. <http://dx.doi.org/10.2202/2153-3792.1027>.

Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A. & Balevich, I. (2009). A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data From England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, 13(1):1–35. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2009.10597538>.

Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D. & Khalaf-Allah, M. (2011). Bayesian Stochastic Mortality Modelling for Two Popu-

- lations. *ASTIN Bulletin*, 41(1):29–59. <http://www.macs.hw.ac.uk/~andrewc/papers/astin2011.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Carnes, B.A. & Olshansky, S.J. (2007). A Realist View of Aging, Mortality, and Future Longevity. *Population and Development Review*, 33(2):367–381. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1728-4457.2007.00172.x>.
- Carstensen, B. (2007). Age–period–cohort models for the Lexis diagram. *Statistics in Medicine*, 26:3018–3045. <http://dx.doi.org/10.1002/sim.2764>.
- Coelho, E. (2001). The Lee–Carter Method for Forecasting Mortality – The Portuguese experience. *Working paper of the Portuguese National Statistical Institute, Lisbon*. https://www.researchgate.net/publication/239545896_The_Portuguese_experience, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Currie, I. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(4):356–383. <http://dx.doi.org/10.1080/03461238.2014.928230>.
- Currie, I.D., Durban, M. & Eilers, P.H.C. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates. *Statistical Modelling*, 4:279–298. <http://dx.doi.org/10.1191/1471082x04st080oa>.
- de Moivre, A. (1752). *Annuities on Lives: With Several Tables, Exhibiting at One View, the Values of Lives, for Different Rates of Interest. Fourth Edition, in which are Added, Tables for Three and Three and a Half Per Cent.* A. Millar, Oxford. https://books.google.hu/books/about/Annuities_

on_Lives.html?id=id5bAAAAQAAJ&redir_esc=y, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Deák, I. (1990). *Random Number Generators and Simulation*, volume 4 of *Mathematical methods of operations research*. Akadémiai Kiadó, Budapest. ISBN 963-05-5316-3.

Deaton, A. & Paxson, C. (2001). Mortality, Income, and Income Inequality Over Time in Britain and the United States. *NBER Working Paper No. 8534*, Cambridge. <http://dx.doi.org/10.3386/w8534>.

Dekkers, G. (2010). The long-term adequacy of the Belgian public pension system: An analysis based on the MIDAS model. *Working Paper 10-10 of the Federal Planning Bureau, Brüsszel*. <http://www.plan.be/admin/uploaded/201005110837500.wp201010.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Dekkers, G. & Belloni, M. (2009). Micro simulation, pension adequacy and the dynamic model MIDAS: an introduction. *Project AIM-Deliverable Working Paper*. http://www.ief.es/documentos/investigacion/seminarios/economia_publica/2009_21Enero.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Di Cesare, M. & Murphy, M. (2009). Forecasting Mortality, Different Approaches for Different Cause of Deaths? The Cases of Lung Cancer; Influenza, Pneumonia, and Bronchitis; and Motor Vehicle Accidents. *British Actuarial Journal*, 15(Supplement):185–211. <http://dx.doi.org/10.1017/s1357321700005560>.

Dimitrova, D.S., Haberman, S. & Kaishev, V.K. (2013). Dependent competing risks: cause elimination and its impact on survi-

- val. *Insurance: Mathematics and Economics*, 53(2):464–477. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.07.008>.
- Dowd, K., Blake, D., Cairns, A.J.G. & Dawson, P. (2006). Survivor Swaps. *Journal of Risk and Insurance*, 73:1–17. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00163.x>.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):1–26. <http://dx.doi.org/10.1214/aos/1176344552>.
- EIOPA (2012). *Revised technical specifications for the Solvency II valuation and Solvency Capital Requirements calculations*. European Insurance and Occupational Pensions Authority, Frankfurt. https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/A_-_Revised_Technical_Specifications_for_the_Solvency_II_valuation_and_Solvency_Capital_Requirements_calculations__Par.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Espenshade, T.J., Guzman, J.C. & Westoff, C.F. (2003). The surprising global variation in replacement fertility. *Population Research and Policy Review*, 22(5):575–583. <http://dx.doi.org/10.1023/b:popu.0000020882.29684.8e>.
- EU (2004). *Council Directive 2004/113/EC of 13 December 2004 implementing the principle of equal treatment between men and women in the access to and supply of goods and services*. <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32004L0113&from=EN>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- EU (2009). *Directive 2009/138/EC of the European Parliament*

and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance.

[http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=](http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=EN)

CELEX:32009L0138&from=EN, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Fáy, A. (1854). *Adatok Magyarország bővebb ismertetésére*. Beimel és Kozma, Pest.

Forfar, D.O. & Smith, D. (1985). The changing shape of English life tables. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 40:98–134. <http://dx.doi.org/10.1017/s0071368600009137>.

Gassmann, H., Deák, I. & Szántai, T. (2002). Computing multivariate normal probabilities: a new look. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 11(4):920–949. <http://dx.doi.org/10.1198/106186002385>.

Gavrilov, L.A. & Gavrilova, N. (2011). Mortality Measurement at Advanced Ages: A Study of the Social Security Administration Death Master File. *North American Actuarial Journal*, 115:432–447. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2011.10597629>.

Gompertz, B. (1825). On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Series A)*, 115:513–585. <http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1825.0026>.

Gray, R. & Kovács, E. (2001). Az általánosított lineáris modell és biztosítási alkalmazásai. *Statisztikai Szemle*, 8:689–

702. http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2001/2001_08/2001_08_689.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Haberman, S. & Renshaw, A. (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48(1):35–55. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2010.09.003>.
- Hablicsek, L. & Kovács, K. (2007). *Az életkilátások differenciálódása iskolázottság szerint, 1986–2005*. KSH Népeségtudományi Kutatóintézet, Budapest. <http://www.demografia.hu/kiadvanyokonline/index.php/kutatasijelentesek/article/view/384/138>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Hablicsekné Richter, M. & Hollósné Marosi, J. (2008). A nyugdíjban, nyugdíjszerű ellátásban részesülők halandósága 2004-ben. *Statisztikai Szemle*, 86(9):875–898. http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2008/2008_09/2008_09_875.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Halley, E. (1693). An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 17:596–610. <http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1693.0007>.
- Hanewald, K. (2009). Mortality modeling: Lee–Carter and the macroeconomy. *SFB 649 Discussion Paper 2009-008*. <http://edoc.hu-berlin.de/series/sfb-649-papers/2009-8/PDF/8.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Hári, N., De Waegenare, A., Melenberg, B. & Nijman, T.E. (2008).

- Longevity Risk in Portfolios of Pension Annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2):505–519. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.01.012>.
- Harville, D. (1997). *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. Springer–Verlag, New York, Inc. ISBN 978-0387949789.
- Heligman, L. & Pollard, J. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107(1):49–80. <http://dx.doi.org/10.1017/s0020268100040257>.
- Hobcraft, J., Menken, J. & Preston, S. (1982). Age, Period, and Cohort Effects in Demography: A Review. *Population Index*, 48(1):4–43. <http://dx.doi.org/10.2307/2736356>.
- Holtzer, P. (szerk.) (2010). *Jelentés a Nyugdíj és Időskor Kerekasztal tevékenységéről*. Miniszterelnöki Hivatal, Budapest. ISBN 9789639682047.
- Hunt, A. & Villegas, A. (2015). Robustness and convergence in the Lee–Carter model with cohort effects. *Insurance: Mathematics and Economics*, 64:186–202. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.05.004>.
- Hunt, A. & Blake, D. (2014). A general procedure for constructing mortality models. *North American Actuarial Journal*, 18(1):116–138. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2013.852963>.
- Hyndman, R.J. & Ullah, M. (2007). Robust forecasting of mortality and fertility rates: a functional data approach. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(10):4942–4956. <http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2006.07.028>.

IMF (2012). *Global Financial Stability Report. Chapter 4: The financial impact of longevity risk*. International Monetary Fund, Washington D.C. <http://www.imf.org/external/pubs/ft/gfsr/2012/01/pdf/text.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Ispány, M., Michaletzky, Gy., Reiczigel, J., Tusnány, G., Tusnady, P. & Varga, K. (2010). Approximation of non-negative integer-valued matrices with application to Hungarian mortality data. *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 5–9 July, 2010, Budapest, Hungary*. <http://www.renyi.hu/~tusnady/gtpapers/gt169.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Keilman, N. (1998). How Accurate Are the United Nations World Population Projections? *Population and Development Review*, 24(supplement):15–41. <http://dx.doi.org/10.2307/2808049>.

Keilman, N. (2008). European Demographic Forecasts Have Not Become More Accurate Over the Past 25 Years. *Population and Development Review*, 34(1):137–153. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1728-4457.2008.00209.x>.

Koissi, M., Shapiro, A. & Hognas, G. (2006). Evaluating and extending the Lee–Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1):1–20. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.06.008>.

Kovács, E. (2011). *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése (IV. bővített kiadás)*. Tanszék Kft., Budapest. ISBN 978-963-88777-2-7.

- Kovács, K. (2012). *Az ok-specifikus halálozás trendjei*. KSH Népeségtudományi Kutatóintézet, Budapest. <http://demografia.hu/kiadvanyokonline/index.php/demografiaiportre/article/view/652/220>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Kovács, E. & Szüle B. (2005). *Pension Schemes and Mortality Reduction in Hungary*. The Impact of European Integration on the National Economy, 2005. október 27–30., Kolozsvár.
- Kovács, E. & Szüle B. (2006). *Early retired pensioners and longevity: factors affecting pension schemes in Hungary*. 6th European Conference on Health Economics, 2006. július 6–9., Budapest.
- Kovács, E., Rétallér, O. & Vékás, P. (2015). Modellpontok szerepe a nyugdíj-hatásvizsgálatban. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1328–1342. <http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1328>.
- Krutov, A. (2006). Insurance-Linked Securities: An Emerging Class of Financial Instruments. *Financial Engineering News*, 48:7–16.
- Lee, R. D. & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87:659–671. <http://dx.doi.org/10.2307/2290201>.
- Lee, R. (2000). The Lee–Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications. *North American Actuarial Journal*, 4(1):80–93. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2000.10595882>.
- Lee, R. & Miller, T. (2001). Evaluating the performance of the Lee–Carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38(4):537–549. <http://dx.doi.org/10.1353/dem.2001.0036>.

- Li, J. & O'Donoghue, C. (2013). A survey of dynamic microsimulation models: uses, model structure and methodology. *International Journal of Microsimulation*, 6(2):3–55. http://www.microsimulation.org/IJM/V6_2/2_IJM_6_2_2013_Li_Odonoghue.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Li, N. & Lee, R. (2005). Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the Lee–Carter method. *Demography*, 42(3):575–594. <http://dx.doi.org/10.1353/dem.2005.0021>.
- Lovász, E. (2011). Analysis of Finnish and Swedish mortality data with stochastic mortality models. *European Actuarial Journal*, 1(2):259–289. <http://dx.doi.org/10.1007/s13385-011-0039-8>.
- Májér, I. & Kovács, E. (2011). Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher. *Statisztikai Szemle*, 7–8:790–812. http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2011/2011_07-08/2011_07-08_790.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Májér, I.M., Nusselder, W.J., Mackenbach, J. P, Klijs, B. & van Baal, P.H.M. (2011). Mortality Risk Associated With Disability: A Population-Based Record Linkage Study. *American Journal of Public Health*, 101(12):e9–15. <http://dx.doi.org/10.2105/ajph.2011.300361>.
- Májér, I.M., Stevens, R., Nusselder, W.J., Mackenbach, J. P & van Baal, P.H.M. (2013). Modeling and Forecasting Health Expectancy: Theoretical Framework and Application. *Demography*, 50(2):673–97. <http://dx.doi.org/10.1007/s13524-012-0156-2>.
- Major, K. & Varga, G. (2013). Parametrikus nyugdíjreformok

- és életciklus munkakínálat. *Közgazdasági Szemle*, 60(11):1169–1207. http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1377/1/Kszemle_CIKK_1431.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Makeham, W. (1867). On the law of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 13(6):325–358. <http://www.jstor.org/stable/41134517>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Markovsky, I. (2012). *Low-Rank Approximation: Algorithms, Implementation, Applications*. Springer–Verlag, New York, Inc. ISBN 978-1-4471-2227-2.
- McCullagh, P. & Nelder, J. (1989). *Generalized Linear Models (2nd edition)*. Chapman & Hall, London. ISBN 978-0412317606.
- MNB (2015). 54/2015. (XII. 21.) MNB rendelet a technikai kamatláb maximális mértékéről. http://net.jogtar.hu/jr/gen/hjegy_doc.cgi?docid=A1500054.MNB, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Molnár D., L. & Hollósné Marosi, J. (2015). Az öregségi nyugdíjasok halandósága. A nyugellátási összeg, a nyugdíjazási életkor és a halandóság összefüggései Magyarországon, 2004–2012. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1258–1290. <http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1258>.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer–Verlag, New York, Inc. ISBN 978-0-387-28659-4.
- ONYF (2015). MIDAS-HU Microsimulation Pension Model Manual. http://mikroszimulacio.onyf.hu/attachments/article/35/Midas_HU%20manual_final_ENG.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.

- Orbán, G. & Palotai, D. (2006). Gazdaságpolitikai és demográfiai kihívások a magyar nyugdíjrendszerben. *Közgazdasági Szemle*, 53(7–8):583–603. <http://epa.oszk.hu/00000/00017/00128/pdf/02orban-palotai.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Országgyűlés (2014). 2014. évi C. törvény Magyarország 2015. évi központi költségvetéséről. <http://kozlonyok.hu/nkonline/MKPDF/hiteles/MK14184.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Országgyűlés (2015). 2015. évi CCXV. törvény a pénzügyi közvetítőrendszer egyes szereplőit érintő törvények jogharmonizációs célú módosításáról. <http://mkogy.jogtar.hu/?page=show&docid=A1500215.TV>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Pallós, E. (1971). *Magyarország halandósági táblái 1900/01-től 1967/68-ig*. KSH Népeségtudományi Kutatóintézet, Budapest. <http://demografia.hu/kiadvanyokonline/index.php/kozlemenyek/issue/view/444>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Panjer, H. (2006). *Operational Risk: Modeling Analytics*. John Wiley & Sons, New York. ISBN 978-0-471-76089-4.
- Perks, W. (1932). On some experiments in the graduation of mortality statistics. *Journal of the Institute of Actuaries*, 63(1):12–40. <http://www.jstor.org/stable/41137425>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Plat, R. (2009). On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3):393–404. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.08.006>.
- R Development Core Team (2008). *R: A Language and Environment*

- for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.
- Radnóti, L. (2003). Az élettartamok statisztikája. *Statisztikai Szemle*, 81(7):559–570. http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2003/2003_07/2003_07_559.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Renshaw, A. & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3):556–570. <http://dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.12.001>.
- Richards, S. & Currie, I. (2009). Longevity Risk and Annuity Pricing with the Lee–Carter Model. *British Actuarial Journal*, 15(2):317–343. <http://dx.doi.org/10.1017/s1357321700005675>.
- Simonovits, A. (2003). *Modeling Pension Systems*. Palgrave Macmillan, London. ISBN 978-1-4039-1524-5.
- Simonovits, A. (2009). Népeségöregedés, tb-nyugdíj és megtakarítás – parametrikus nyugdíjreformok. *Közgazdasági Szemle*, 46(4):297–321. <http://epa.oszk.hu/00000/00017/00158/pdf/01simonovits.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Simonovits, A. (2014). Gyermektámogatás, nyugdíj és endogén/heterogén termékenység – egy modell. *Közgazdasági Szemle*, 61(6):672–692. http://real.mtak.hu/13507/1/Kszemle_CIKK_1486.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Szepesváry, L. (2015). Dinamikus modellek alkalmazása életbiztosítások cash-flow előrejelzésére. In *Keresztes, G. (szerk.): Tavaszi Szél*

- 2015 konferenciakötet (pp. 581-600.). Doktoranduszok Országos Szövetsége, Budapest. ISBN 978-615-5250-03-3.
- Tuljapurkar, S., Li, N. & Boe, C. (2000). A Universal Pattern of Mortality Change in the G7 Countries. *Nature*, 405(6788):789–792. https://www.researchgate.net/publication/12453012_A_Universal_Pattern_of_Mortality_Change_in_the_G7_Countries, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Varga, G. (2014). Demográfiai átmenet, gazdasági növekedés és a nyugdíjrendszer fenntarthatósága. *Közgazdasági Szemle*, 61(11):1279–1318. <http://real.mtak.hu/18270/>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Vékás, P. (2009). Harry H. Panjer: Operational Risk: Modeling Analytics. *Közgazdasági Szemle*, 56(4):387–389. http://epa.oszk.hu/00000/00017/00158/pdf/07konyvism_panjer.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Vékás, P. (2011). Túlélési modellek. In Kovács, E. (2011): *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése (IV. bővített kiadás, 9. fejezet, pp. 173–194.)*. Tanszék Kft., Budapest. ISBN 978-963-88777-2-7.
- Vékás, P. (2012). Összefüggő biztosítási kockázatok modellezése. *Corvinus Kutatások*, 2093. <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2093/>, letöltés dátuma: 2016.02.11.
- Vékás, P. (2015). Az egyéni munkaerő-piaci aktivitás becslése mikroszimulációs modellkeretben. *Közgazdasági Szemle*, 62(12):1291–1308. <http://dx.doi.org/10.18414/ksz.2015.12.1291>.
- Villegas, A. M., Kaishev, V. & Millossovich, P. (2016). *StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling*.

<https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Wang, J. Z. (2007). Fitting and Forecasting Mortality for Sweden: Applying the Lee–Carter Model. *Working Paper, Stockholm University, Stockholm*. <http://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2007/rep1/report.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Weibull, W. (1951). A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18:293–297. http://www.barringer1.com/wa_files/Weibull-ASME-Paper-1951.pdf, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Wilmoth, J. (1993). Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee–Carter Model of Mortality Change. *Technical report. Department of Demography, University of California, Berkeley, California*. <http://demog.berkeley.edu/~jrw/Papers/LCtech.pdf>, letöltés dátuma: 2016.02.11.

Wilmoth, J. (1995). Are mortality projections always more pessimistic when disaggregated by cause of death? *Mathematical Population Studies*, 5(4):293–319. <http://dx.doi.org/10.1080/08898489509525409>.

Wiśniowski, A. , Smith, P.W.F., Bijak, J., Raymer, J. & Forster, J.J. (2015). Bayesian Population Forecasting: Extending the Lee–Carter Method. *Demography*, 52(3):1035–1059. <http://dx.doi.org/10.1007/s13524-015-0389-y>.

Wong-Fupuy, C. & Haberman, S. (2004). Projecting Mortality Trends: Recent Developments in the U.S. and U.K. *North Ame-*

rican Actuarial Journal, 8(2):56–83. <http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2004.10596137>.