Vékás Péter[1]

Nyugdíjcélú életjáradékok élettartam-kockázata az általánosított korcsoport−időszak−kohorsz modellkeretben

Tanulmányom módszertani részében a halandóság statisztikai előrejelzésére alkalmazható egyre népszerűbb eljárásokat Magyarországon elsőként egységes tárgyalásban, az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellcsalád mint új paradigma keretében mutatom be. Ezt követően egy empirikus elemzés keretében öt nevezetes modellt illesztek a hazai 65 éves és idősebb egyének 1975–2014. naptári évekbeli halandósági adataira, és a mintán kívüli előrejelzési pontosság kritériuma alapján az időskori halandóság modellezésére széleskörűen alkalmazott Cairns–Blake–Dowd modell alkalmazása mellett döntök. A kiválasztott modell segítségével Májer–Kovács [2011] cikke nyomán elvégzem a nyugdíjkorhatáron várható hátralévő élettartam és a nyugdíjcélú életjáradékok egyszeri nettó díjának becslését. A kérdés aktualitását az önkéntes nyugdíjpénztári járadékszolgáltatásra vonatkozó szabályok friss változásai adják, amelyek felértékelik a halandóság-előrejelző módszertan szerepét. Elemzésemben nagy hangsúlyt fektetek a paraméter-bizonytalanság megfelelő modellezésére. Az elvégzett számítások alapján megállapítom, hogy a közelmúltban az élettartam-kockázat szerepe jelentősen felértékelődött. Célom, hogy eredményeimet a tudományos kutatók, statisztikai és társadalombiztosítási szakemberek és gyakorló aktuáriusok egyaránt eredményesen használhassák fel a jövőben az olyan modellek készítése során, amelyekben lényeges szempont az élettartam-kockázat módszertani szempontból megfelelő figyelembe vétele.

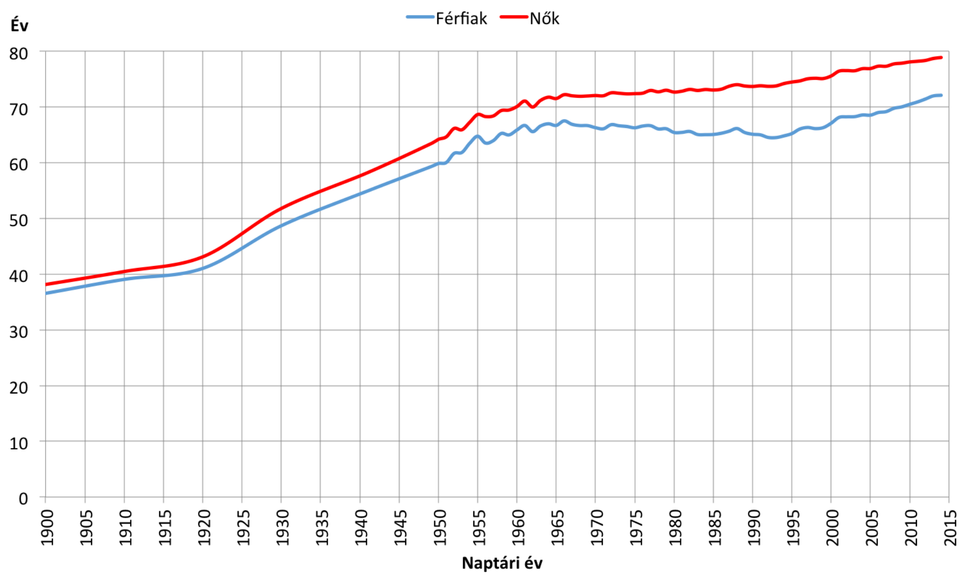
TÁRGYSZÓ: előrejelzés, várható élettartam, nyugdíjmodellezés, ökonometriai modell.

1. Az élettartam-kockázat problémája

1.1. Az élettartam-kockázat fogalma és gyakorlati jelentősége

Empirikus tény, hogy az emberi élettartam átlagos hossza a XX. század folyamán a világ legtöbb részén rendkívül gyorsan, rövid időtávon is érzékelhető módon növekedett. A jelenség szemléltetése kedvéért az 1. ábrán látható a magyarországi nemenkénti, években mért születéskor várható élettartamok alakulása 1900 és 2014 között. Az ábra alapján megállapítható, hogy a születéskor várható élettartam Magyarországon mind a férfiak, mind a nők esetén közel kétszeresére emelkedett az utóbbi valamivel több mint egy évszázadban.

[1] E-mail: peter.vekas@uni-corvinus.hu, tanársegéd, Budapesti Corvinus Egyetem, tudományos segédmunkatárs, MTA-BCE „Lendület" Stratégiai Interakciók Kutatócsoport.



1. ábra: Nemenkénti születéskor várható élettartamok Magyarországon (1900–2014, forrás: saját szerkesztés a KSH adatai alapján)

Egyértelműen kedvező és örvendetes jellege ellenére e folyamat jelentős technikai nehézségek elé állítja a nyugdíj- és életbiztosítási területen működő vállalatokat és intézményeket: a felosztó-kirovó elven működő állami nyugdíjrendszerek, a nyugdíjpénztárak és a járadéktermékeket értékesítő életbiztosítók ugyanis egy adott pillanatban a múlt- és jelenbeli halandósági statisztikák alapján csupán meglehetősen pontatlanul jelezhetik előre az intézmény jövőbeli bevételeit és kiadásait, így komoly tervezési hibát követnek el, és jelentős veszteségre számíthatnak a jövőben. Az angol nyelvű szakirodalomban a probléma *"longevity risk"* néven ismert, egy lehetséges és általam preferált magyar nyelvű elnevezése pedig a Májer–Kovács [2011] cikkében bevezetett *"élettartam-kockázat"*. E jelenség szükségessé teszi a kifinomult, modern halandóság-előrejelző módszerek alkalmazását.

1.2. A probléma aktualitása

Aktuáriusi számításokban betöltött szerepe mellett az élettartam-kockázat aktualitását az adja, hogy 2016. január 1-étől, a Szolvencia II EU keretirányelv (EU [2009]) előírásainak gyakorlati hatályba lépésétől immár hatályos jogszabály is rendelkezik annak modellezéséről és kiemelt kezeléséről. A probléma aktualitását tovább növeli az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékokra vonatkozó szabályok módosítása (Országgyűlés [2015]). A korábbi szabályozás súlyos hiányossága volt, hogy a nyugdíjkorhatár betöltésekor a pénztárak nem voltak kötelesek a felhalmozott vagyon ellenében életjáradékot szolgáltatni a pénztártagok részére, még az ügyfél kifejezett kérésére sem. Így a pénztártagok nyugdíjas éveik biztosítására csupán *banktechnikai járadékot* igényelhettek. E konstrukció keretében a pénztártagok vagy örököseik egy határozott tartam erejéig részesültek rendszeres járadékban. A banktechnikai járadék valójában nyugdíjcélra teljességgel alkalmatlan, mivel egyrészt a határozott tartam letelte után az ügyfelek anyagi biztonságát már nem garantálja, másrészt szolgáltatása a tartam végéig a pénztártag esetleges halála esetén is fennmarad, melynek következtében díja jóval magasabb annál, mint amit a nyugdíjcélú felhasználás indokolna.

Ezt a helyzetet orvosolja a 2015 decemberében elfogadott új pénztári szabályozás, melynek értelmében a legalább ezer tagot számláló önkéntes nyugdíjpénztárak – a tagok erre vonatkozó nyilatkozata esetén, a felhalmozott pénztári vagyonért cserébe – a nyugdíjkorhatár betöltésétől kezdve kötelesek valamely életbiztosító társaságnál *életjáradékot* vásárolni a tagok részére. Az életjáradék a banktechnikai járadékkal ellentétben a tulajdonosa élete végéig biztosít rendszeres kifizetéseket. Az intézkedés új lendületet adhat az életjáradékok pangó hazai piacának. Ezzel párhuzamosan várhatóan előtérbe kerül az – életjáradékok esetén kiemelt jelentőségű – élettartam-kockázat problémája.

Az életjáradékok díjszámítása során az aktuáriusi szakma hagyományosan az egy bizonyos naptári évre vonatkozó, a KSH által naptári évenként közzétett halandósági táblákra támaszkodik, feltételezve, hogy az abban szereplő koréves halálozási valószínűségek a jövőben változatlanok maradnak. Ezzel szemben a valóságban az élettartam-kockázat következtében az életjáradékok tulajdonosai a kalkuláltnál nagyobb valószínűséggel érik meg a járadékfizetési időpontokat, ami előre nem kalkulált veszteséget jelent a járadékszolgáltatónak

2. Szakirodalmi áttekintés és az elemzés célja

2.1. Halandóság-előrejelző módszerek

A modern statisztikai halandóság-előrejelző módszertan kialakulása Lee–Carter [1992] cikkének megjelenésétől számítható, amelyben a szerzők a életkorfüggő halandósági rátákra egy viszonylag egyszerű, naptári időszaktól és életkortól függő paramétekkel rendelkező log-bilineáris modell illesztését javasolják, amely meglepően jól írja le az Egyesült Államok 1900–1989. évi életkorfüggő halandósági rátáinak alakulását. A szerzők a paraméterek becslését követően a pontosság érdekében a naptári évtől függő paraméterek (az úgynevezett mortalitási index) újrabecslését javasolják, előírva a modell alapján várt és a ténylegesen megfigyelt halálesetek számainak egyezését. Az újrabecsült mortalitási index idősorát autoregresszív integrált mozgóátlagolású (ARIMA[2], angolul *Autoregressive Integrated Moving Average*) folyamatnak tekintik, és az adatok alapján az eltolásos véletlen bolyongás modellspecifikációját találják megfelelőnek. A folyamat előrejelzése alapján a modellben az újrabecsült mortalitási index idősora várhatóan lineárisan csökken, és az előrejelzett halandósági ráták csökkenése exponenciális. Az azóta Lee–Carter modell néven elterjedt eljárás Deaton–Paxson [2001] szerint az ezredfordulóra a világ vezető halandóság-előrejelző módszerévé vált.

Fontos megjegyezni, hogy a Lee–Carter modell – a továbbiakban ismertetendő egyéb módszerekhez hasonlóan – statisztikai alapú, úgynevezett extrapolatív eljárás, amely a múltban megfigyelt trendek meghosszabbítására épül, figyelmen kívül hagyva a változások hátterében álló mögöttes (például orvostudományi, életmódbeli stb.) okokat. A halandósági folyamatok háttérben rejlő jelenségeket leíró strukturális modellekről például Booth–Tickle [2008] tanulmánya nyújt rövid összegzést, amelynek szerzői megállapítják, hogy ez a megközelítés jelentős kívánni valókat hagy maga után az oksági kapcsolatok elégtelen ismerete miatt.

Keilman ([1998] és [2008]) tanulmányaiban amellett érvel, hogy a nemzeti és nemzetközi statisztikai szolgálatok által készített, gyakran szubjektív szakértői véleményekre alapozott hivatalos demográfiai projekciók pontossága erősen megkérdőjelezhető, mivel azok a múltban szisztematikusan és jelentősen alábecsülték az emberi élettartam javulási ütemét és ezáltal az élettartam-kockázat nagyságát. Lee–Miller [2001] és Wong-Fupuy–Haberman [2004]

[2] Az ARIMA modellekről és az azokhoz szorosan kapcsolódó Box–Jenkins módszertanról részletesebben lásd például Asteriou–Hall [2015] könyvét.

megállapítják, hogy a Lee–Carter modellt visszemenőleg alkalmazva a hivatalos projekcióknál jóval megbízhatóbb előrejelzések készíthetők.

Nincs egyetértés azzal kapcsolatban, hogy vajon az emberi élettartam múltban tapasztalt, gyors ütemű növekedése a jövőben is folytatódik-e. Míg Wong-Fupuy–Haberman [2004] a pesszimista szakértői becslések pontatlansága és a Lee–Carter modell meglepően jó teljesítménye alapján arra következtet, hogy a növekedés fenntartható, addig a vitában szkeptikus álláspontra helyezkedők (például a maguk álláspontját „realistaként" aposztrofáló Carnes–Olshansky [2007]) megkérdőjelezik az extrapolatív halandóság-előrejelző eljárások hosszú távú alkalmazhatóságát, és elképzelhetőnek tartják, hogy a fejlett országokban a születéskor várható élettartamok előbb-utóbb egyfajta plafonba ütköznek, sőt, akár csökkenőbe fordulnak majd.

Brouhns és szerzőtársai [2002] a Lee–Carter modell normális eloszlású hibatagjainak alkalmazása helyett az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó halálesetek számainak Poisson-eloszlását feltételezik. Az általuk javasolt – Poisson Lee–Carter modell néven is ismert – modellváltozat számos előnnyel rendelkezik Lee–Carter [1992] eredeti modelljéhez képest: többek között nem él a homoszkediszticitásra vonatkozó irreális feltevéssel, a maximum likelihood becslés révén figyelembe veszi az egyes korcsoport-naptári év kombinációkhoz tartozó létszámokat, szükségtelenné teszi a mortalitási index erősen heurisztikus, a sztochasztikus modellkeretbe nem illeszkedő újrabecslését, valamint könnyedén beágyazható aktuáriusi alkalmazásokba. Brouhns és szerzőtársai [2005] megmutatják, hogy a Brouhns és szerzőtársai [2002] által javasolt Poisson Lee–Carter modellváltozatban az előrejelzett halandósági ráták konfidenciaintervallumaiba a paraméterbizonytalanság is beépíthető a statisztikai becsléselméletben Efron [1979] óta ismert bootstrap eljárás segítségével.

A Lee–Carter [1992] modellel és annak Poisson-változatával szemben egyaránt felmerülő kritika, hogy az életkortól függő (keresztmetszeti) és naptári évtől függő (hosszmetszeti) hatásokon túl nem veszi figyelembe az azonos naptári időszakban született egyének halandóságának a születés időpontjától függő – a szakirodalomban kohorszhatás néven ismert – jellegzetességeit. A Lee–Carter modell legismertebb, kohorszhatást tartalmazó kiterjesztése a Renshaw–Haberman [2006] modell. Mivel ez az eljárás a gyakorlatban numerikusan instabilnak bizonyult, ezért Haberman–Renshaw [2011] újabb tanulmányukban modelljüket úgy egyszerűsítik, hogy az eredeti modellben életkortól függő kohorszhatást életkortól függetlennek tekintik.[3]

A halandóság-előrejelző modellek további bővítési iránya a halandóság hosszmetszeti változását leíró egydimenziós idősorok számának növelése, amelyekből az eddig ismertetett modellek csupán egyet tartalmaznak. Az ilyen irányban bővített modelleket a szakirodalom többtényezős eljárásoknak nevezi. A Lee–Carter [1992] modell – bizonyos szempontból természetes – többtényezős kiterjesztését mutatja be Booth–MainDonald–Smith [2002] tanulmánya. Figyelembe véve, hogy a klasszikus Lee–Carter modellben a keresztmetszeti és hosszmetszeti hatások paraméterei a soronként centralizált logaritmikus mortalitási ráták mátrixának szingulárisérték-felbontásával, majd a legnagyobb szingulárisértéknél kisebb szingulárisértékek elhagyásával nyerhetők, Booth–MainDonald–Smith [2002] – a főkomponenselemzés (Kovács [2011]) analógiájára – a további szingulárisértékek közül is megtartanak néhányat, így téve többtényezőssé a modellt. A szerzők ausztrál adatok felhasználásával megállapítják, hogy az így nyert további tényezők nehezen építhetők be az előrejelzésekbe. Booth–MainDonald–Smith

[3] Sajnos még az egyszerűsített modell illesztése is gyakran komoly numerikus problémákkal jár. A témát bővebben Hunt–Villegas [2015] tanulmánya tárgyalja.

[2002] továbbá ajánlásokat fogalmaznak meg a mortalitási index kiigazításával és a becslési időszak kiválasztásával kapcsolatban. Booth és szerzőtársai [2006] a Lee–Miller [2001] és Booth–MainDonald–Smith [2002] modellváltozatok, valamint az eredeti Lee–Carter modell előrejelző képességét hasonlítják össze egymással, és tíz fejlett ország adatainak vizsgálatával megállapítják, hogy az újabb modellváltozatok pontossága jellemzően felülmúlja az eredeti modellét.

Haberman–Renshaw [2011] újabb modelljének nevezetes speciális esete az orvosi statisztikában már régóta alkalmazott korcsoport–időszak– kohorsz (röviden APC, vagy angolul Age–Period–Cohort) modell (Hobcraft és szerzőtársai [1982], illetve Carstensen [2007]), amelyben a kohorszhatáson kívül a hosszmetszeti hatás is – a Lee–Carter modelltől eltérően – független az életkortól.

Az aktuáriusi gyakorlatban a legelterjedtebb, újabb többtényezős halandóság-előrejelző módszerek a kéttényezős Cairns–Blake–Dowd [2006], valamint az azt általánosító, háromtényezős Plat [2009] modellek. Speciálisan az időskori halandóság modellezésére Plat [2009] modelljének olyan kéttényezős egyszerűsítését javasolja, amely a Cairns– Blake–Dowd modell kohorszhatással bővített változata. A korábban ismertetett eljárásoktól eltérően ezekben a modellekben paraméteres formában adott a halandósági ráták érzékenysége a mortalitási tényezők változására.

Lovász [2011] tanulmánya finn és svéd halandósági adatok felhasználásával számos, az eddigiekben tárgyalt halandóság-előrejelző modellt összehasonlít egymással, és az eredmények alapján aktuáriusi alkalmazások céljára a Plat [2009] modellt javasolja. Cairns és szerzőtársai [2009] nagy-britanniai adatokon a Cairns–Blake–Dowd [2006], amerikai adatokon pedig a Renshaw–Haberman [2006] modell illeszkedését találják a legmegfelelőbbnek, ugyanakkor megállapítják, hogy e modellek becsült paraméterei nem eléggé robusztusak a becslési időszak változtatására nézve. A szerzők a probléma megoldására a Cairns–Blake–Dowd modell kvadratikus életkorhatást tartalmazó bővítését javasolják.

A tudományos és gyakorlati szakmák részéről egyaránt jelentkező, természetes igény a Lee–Carter modell kritikája nyomán született, rendkívül szerteágazó halandóság-előrejelző eljárások átlátható, egységes módszertani keretbe foglalása. Erre többek között Hunt–Blake [2014], Villegas és szerzőtársai [2016], valamint Currie [2016] tettek kísérletet a közelmúltban. Az általuk javasolt – számos, már létező és széles körben alkalmazott modellt felölelő – egységes modellkeret összefoglaló neve *általánosított korcsoport–időszak–kohorsz* (angolul *Generalized Age–Period–Cohort* vagy röviden GAPC) *modell*, a statisztikában és az aktuárius-tudományokban elterjedt általánosított lineáris modell (angolul Generalized Linear Model vagy röviden GLM, lásd például McCullagh–Nelder [1989], illetve magyarul Gray–Kovács [2001]) analógiájára. A GAPC modellkeret az életkorban és időszakban log-bilineáris vagy logit-bilineáris, egy- és többtényezős, valamint kohorszhatástól mentes és azt tartalmazó eljárásokat egységesíti. Az így nyert, igen széles modellcsalád tagjai többek között a korábbiakban már ismertetett Poisson Lee–Carter (Brouhns és szerzőtársai [2002]), Renshaw–Haberman [2006], korcsoport–időszak–kohorsz (Carstensen [2007]), Cairns–Blake– Dowd [2006] és Plat [2009] modellek. A GAPC modellek keretében lehetőség nyílik többek között a paraméterbecslés, a modellválasztás és az előrejelzés egységes keretben történő tárgyalására és elvégzésére.

2.3. Az elemzés célja

Az élettartam-kockázat átfogó statisztikai és aktuáriusi elemzésére Magyarországon mindezidáig egyedül Májer–Kovács [2011] tanulmánya tett kísérletet, melyben a szerzők a 65–100. korévek 1970–2006. évi halandósági adataira a Lee–Carter [1992] modellt illesztik, és a klasszikus statikus, keresztmetszeti halandósági tábla és a halandóság előrevetítése alapján egyaránt kiszámítják a jelenlegi nyugdíjkorhatár betöltésekor, 65 évesen várható hátralévő élettartamot és a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díját. A szerzők eredményei alapján a nyugdíjazáskor várható élettartamot 6,33%-kal, az életjáradék egyszeri nettó díját pedig 4,51%-kal becsüli alá az élettartam-kockázatot figyelmen kívül hagyó keresztmetszeti számítás. A tanulmány két eltérő megközelítésben közöl konfidenciaintervallumokat a nyugdíjazáskor várható élettartamra és az életjáradék nettó díjára: az első esetben Lee–Carter [1992] nyomán csupán a mortalitási index folyamatának véletlen hibatagjait tekintik a bizonytalanság forrásának, míg a második esetben a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterét is valószínűségi változóként kezelik, így az előrejelzési hiba részeként – részben – a becslés során fellépő paraméter-bizonytalanságot is figyelembe veszik. Megmutatják továbbá, hogy élettartam-kockázat jelenlétében még nagy kockázatközösség esetén, határértékben sem válik az nyugdíjcélú életjáradék nyújtása kockázatmentessé a járadékszolgáltató számára.

Tanulmányom fő célja a halandóság-előrejelzésben új horizontokat nyitó GAPC modellkeret bemutatása, a halandósági modellezés szerepét felértékelő, megváltozott nyugdíjpénztári szabályozás rövid ismertetése, valamint Májer–Kovács [2011] tanulmányának módszertani továbbfejlesztése és aktualizálása. Elemzésemben a Lee–Carter modell keretein túllépve az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellcsalád (Hunt–Blake [2014], Currie [2016], valamint Villegas és szerzőtársai [2016]) segítségével vizsgálom a nyugdíjcélú életjáradékok díjszámításában jelentkező élettartam-kockázatot. A mintán kívüli előrejelzési pontosság vizsgálata alapján amellett érvelek, hogy öt népszerű halandóság-előrejelző modell közül a Cairns–Blake–Dowd [2006] modell segítségével jelezhetők előre legpontosabban a hazai időskori halandósági ráták. Számításaimat az 1975–2014. naptári évek halandósági adataira alapozom, ezáltal a Májer–Kovács [2011] által alkalmazott, 1970-2006. éveket felölelő bázisidőszak alapján számított értékekhez képest jelentősen magasabb várható élettartamokat és nettó díjakat állapítok meg. A relatív alulárazottság emelkedésének bemutatása révén alátámasztom, hogy a közelmúltban az életjáradékok díjszámításában nőtt az élettartam-kockázat szerepe, illetve az annak figyelmen kívül hagyásával elkövetethető hiba nagysága. További lényeges módszertani újítás, hogy elemzésemben a becslés során fellépő paraméter-bizonytalanságot a bootstrap (Efron [1979]) eljárás segítségével valamennyi paraméter kapcsán figyelembe veszem, ezáltal reálisabb képet nyújtva annak mértékéről.

3. Módszertan

3.1. Korspecifikus halandósági ráták

A halandóság számszerűsítésének legalapvetőbb leíró statisztikai eszköze a *halandósági ráta* (más néven *halálozási arányszám*), amely egy választott időszak és populáció vonatkozásában értelmezhető, és az adott időszak során az adott populációban bekövetkezett halálozások számának a populáció létszámához viszonyított arányaként számítható ki. Képlettel felírva:

$$m = \frac{D}{E},$$

ahol m a halandósági ráta, $D \in \mathbb{N}$ a vizsgált időszakban elhunytak száma, $E > 0$ pedig a vizsgált populáció valamilyen módon értelmezett létszáma. A vizsgált időszak hossza általában egy év, és tanulmányomban is ezt a konvenciót követem.

A populáció létszámát pontosabban definiálni szükséges: érthető alatta a vizsgált időszak kezdetén élő egyének száma (úgynevezett *kezdeti kitettség*, angolul *initial exposed to risk*, jelölése: E^0) vagy a vizsgált időszak alatt élő egyének átlagos létszáma (úgynevezett *központi kitettség*, angolul *central exposed to risk*, jelölése: E^c) is. Ez utóbbi a vizsgált időszak kezdetén életben lévő egyénekre a vizsgált időszakban megélt egyéni időmennyiségeket összegezve számítható ki.[4] Kezdeti kitettség alkalmazása esetén *kezdeti halandósági rátáról* (angolul *initial death rate*, jelölése: m^0), központi kitettség esetén pedig *központi halandósági rátáról* (angolul *central death rate*, jelölése: m^c) beszélhetünk.
Tanulmányomban a továbbiakban a *korcsoporttól és naptári évtől függő halandósági rátákra* (jelölésük: m_{xt}, ahol $x \in \{1, 2, \ldots, X\}$ egy adott korcsoport, $t \in \{1,2,\ldots,T\}$ pedig egy adott naptári év) koncentrálok. Ezek olyan speciális halandósági ráták, amelyeknél a vizsgált populáció a t -edik naptári év elején az x-edik korcsoportba tartozó egyének csoportja. A továbbiakban felső indexüktől függően az m_{xt} ráták kezdeti vagy központi, azok hiányában pedig e kettő közül bármely típusú halandósági rátákat jelölhetnek majd.

3.1. Az általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellcsalád

A Hunt–Blake [2014], Currie [2016] és Villegas és szerzőtársai [2016] által a közelmúltban javasolt, számos széles körben elterjedt halandóság-előrejelző módszert felölelő általánosított korcsoport–időszak–kohorsz (GAPC) modellcsalád alkalmazása feltételezi, hogy minden egyes $x \in \{1,2,\ldots,X\}$ korcsoportban és $t \in \{1,2,\ldots,T\}$ időszakban ismert a bekövetkezett halálesetek $D_{xt} \in \mathbb{N}$ száma, valamint az $E_{xt}^c > 0$ központi vagy az $E_{xt}^0 \in \mathbb{N}$ kezdeti kitettség értéke.[5]
A korcsoport- és időszakspecifikus halálozások D_{xt} számait a modell a $\widetilde{D}_{xt}$ valószínűségi változók megvalósult értékeinek tekinti, melyek peremeloszlására vonatkozó feltevés – a rendelkezésre álló kitettségi adatok típusától függően – a Poisson vagy a binomiális eloszlás:

$$\widetilde{D}_{xt} \sim Poisson(E_{xt}^c m_{xt}^c)\ (x = 1,2,\ldots,X,\ t = 1,2,\ldots,T) \text{ vagy}$$

$$\widetilde{D}_{xt} \sim Bin(E_{xt}^0, m_{xt}^c)\ (x = 1,2,\ldots,X, \quad t = 1,2,\ldots,T).$$

A GAPC modellkeret feltételezi továbbá, hogy a különböző korcsoport-időszak kombinációkhoz tartozó $\widetilde{D}_{xt}$ $(x = 1,2,\ldots,X,\ t = 1,2,\ldots,T)$ valószínűségi változók függetlenek.[6] A modellben a központi vagy kezdeti halandósági ráták becslőegyenletei a következők:

$$g(m_{xt}) = \eta_{xt}\ (x = 1,2,\ldots,X, \quad t = 1,2,\ldots,T),$$

ahol η_{xt} a modell úgynevezett szisztematikus komponense, $g : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növő függvény (az úgynevezett *kapocsfüggvény* vagy angolul *link function*). Hunt– Blake [2014] az általánosított lineáris modell szakirodalmára építve központi kitettségek és Poisson-eloszlás használata esetén a

$$g(y) = \ln y\ (y > 0)$$

logaritmikus, kezdeti kitettségek és binomiális eloszlás alkalmazása esetén pedig a

$$g(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)\ (0 < y < 1)$$

[4] A központi kitettség mértékegysége fő és év is lehet, attól függően, hogy átlagos létszámnak vagy összes megélt időmennyiségnek tekintjük.
[5] Precízebben: minden korcsoport-időszak kombinációra a kitettség azonos változata ismert.
[6] Pontosabban fogalmazva: adott halandósági ráták mellett feltételesen függetlenek.

logit kapocsfüggvényt javasolják. A továbbiakban ezt a konvenciót követem.
A GAPC modellcsalád szisztematikus komponense a korcsoport, időszak és kohorsz függvényében így írható fel:

$$\eta_{xt} = a_x + \sum_{i=1}^{N} b_x^{(i)} k_t^{(i)} + b_x^{(0)} c_{t-x} \ (x = 1,2,\dots,X, \qquad t = 1,2,\dots,T),$$

ahol $N \in \mathbb{N}$ a modellezett korcsoport-időszak interakciók száma, valamint a_x és $b_x^{(i)}$korcsoporttól, $k_t^{(i)}$ időszaktól, c_{t-x} pedig kohorsztól függő, valós értékű paraméterek.
Mivel a modellbeli kohorszok lehetséges száma $T + X - 1$, ezért belátható, hogy adott N esetén a (6.3) egyenlet paramétereinek száma $(N + 1)(X + T) + 2X - 1$, melyek elegendően nagy X és T értékek esetén képesek lehetnek kellően tömören leírni a megadott XT darab halandósági rátát. A becsült paraméterek egyértelműsége érdekében a modellt úgynevezett identifikációs megkötésekkel szükséges kiegészíteni, melyek konkrét modellspecifikációnként eltérnek.
Az a_x $(x = 1,2,\dots,X)$ *korcsoporthatás-paraméterek* a mortalitási görbe általános alakját írják le. A c_{t-x} $(x = 1,2,\dots,X,\ t = 1,2,\dots,T)$ *kohorszhatás-paraméterek* a $t-x$ időszakban született kohorsz mortalitásának a tipikus mortalitási pályához képesti eltérését reprezentálják a modellben. A $k_t^{(i)}$ $(i = 1,2,\dots,N, t = 1,2,\dots,T)$ *mortalitási indexek* az általános mortalitási szint időbeli alakulását N darab idősor formájában modellezik, a mortalitási indexek $b_x^{(i)}$ $(i = 0,1,\dots,N,\ x = 1,2,\dots,X)$ *érzékenységi együtthatói* pedig a transzformált halandósági ráták érzékenységét adják meg $i = 0$ esetén a kohorszhatás, egyéb esetben pedig az i-edik mortalitási index megváltozására nézve.

3.2. A GAPC modellcsalád nevezetes tagjai

Alkalmasan választott paraméterezés mellett a GAPC modellcsalád számos széles körben használatos halandóság-előrejelző módszert tartalmaz. Ebben a szakaszban a legnevezetesebb ilyen módszereket és azok GAPC modellcsaládhoz fűződő viszonyát ismertetem. A módszerek bemutatása során a korcsoportok minden esetben egymást követő koréveket jelentenek majd.

3.2.1. A Poisson Lee–Carter (LC) modell

A Brouhns és szerzőtársai [2002] által bevezetett és azóta széles körben elterjedt modellkeretben a mortalitást leíró szisztematikus komponens a következő:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t \ (x = 1,2,\dots,X, \qquad t = 1,2,\dots,T).$$

A szerzők központi kitettségeket és logaritmikus kapocsfüggvényt feltételeznek. Identifikációs megfontolásból szükségesek továbbá a következő paramétermegkötések:

$$\sum_{x=1}^{X} b_x = 1,$$
$$\sum_{t=1}^{T} k_t = 0,$$

A modell nem tartalmaz kohorszhatást, illetve a mortalitás alakulását egyetlen időtől függő mortalitási index segítségével modellezi. Érdemes megjegyezni, hogy a Lee–Carter [1992] modell alapváltozata nem illeszkedik a GAPC modellcsaládba.

3.2.2. A Renshaw–Haberman (RH) modell

Renshaw–Haberman [2006] a kohorszhatás figyelembe vételére a következő szisztematikus komponenst javasolják:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x^1 k_t + b_x^{(0)} c_{t-x} \quad (x = 1,2,\dots,X, \qquad t = 1,2,\dots,T),$$

Cikkükben Renshaw–Haberman [2006] központi kitettségeket és logaritmikus kapocsfüggvényt feltételeznek.

Mivel a modell kritikusai rámutattak a becslési eljárás numerikus instabilitására, ezért újabb cikkükben Haberman–Renshaw [2011] modelljük egyszerűsítése érdekében a

$$b_x^{(0)} = 1 \ \ (x = 1,2,\dots,X)$$

megkötést ajánlják, mely – lemondva a kohorszhatás életkor szerinti differenciálásáról – megoldja az eredetileg javasolt modell numerikus problémáit. Az így módosított, a továbbiakban általam is alkalmazott Renshaw–Haberman modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + b_x k_t + c_{t-x} \ \ (x = 1,2,\dots,X, \ t = 1,2,\dots,T).$$

A szerzők a paraméterbecslés egyértelműsége érdekében a következő identifikációs megkötéseket javasolják:

$$\sum_{x=1}^{X} b_x = 1,$$
$$\sum_{t=1}^{T} k_t = 0,$$
$$\sum_{i=1-X}^{T-1} c_i = 0.$$

3.2.3. A korcsoport–időszak–kohorsz (APC) modell

A Carstensen [2007] által ismertetett korcsoport–időszak–kohorsz (angolul Age–Period–Cohort vagy röviden APC) modell az egyszerűsített Renshaw–Haberman modell speciális esete a

$$b_x = 1 \ \ (x = 1,2,\dots,X)$$

megkötés mellett. A modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + k_t + c_{t-x} \ \ (x = 1,2,\dots,X, \qquad t = 1,2,\dots,T).$$

Tehát az APC modell $N = 1$ mortalitási indexet tartalmaz, továbbá a korcsoport, időszak és kohorsz mortalitásra gyakorolt hatásait nem módosítják korcsoportfüggő érzékenységi együtthatók. Az APC modellben a központi kitettségek és a logaritmikus kapocsfüggvény használata, valamint az alábbi identifikációs megkötések alkalmazása elterjedt:

$$\sum_{t=1}^{T} k_t = 0,$$
$$\sum_{i=1-X}^{T-1} c_i = 0,$$
$$\sum_{i=1-X}^{T-1} i c_i = 0.$$

3.2.4. A Cairns–Blake–Dowd (CBD) modell

A Cairns–Blake–Dowd [2006] által az időskori halandóság előrejelzésére javasolt modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = k_t^{(1)} + (x - \bar{x}) k_t^{(2)} \ \ (x = 1,2,\dots,X, \qquad t = 1,2,\dots,T),$$

ahol $\bar{x} = \frac{1+X}{2}$ az előforduló korcsoport-indexek számtani átlaga.

A módszer alkalmazását a szerzők $x_0 = 60$ évesnél magasabb életkorok esetén javasolják, azzal a kiegészítéssel, hogy az η_{xt} szisztematikus komponens az $x_0 + x$ éves egyének mortalitását írja le. Cairns–Blake–Dowd [2006] cikkükben kezdeti kitettségeket és logit kapocsfüggvényt tételeznek fel. A CBD modellben nem szerepel additív életkorhatás és kohorszhatás[7], és a mortalitás alakulását két mortalitási index írja le. E modellben nincs szükség identifikációs megkötésekre.

3.2.5. A Plat modell

Az időskori mortalitás modellezésére javasolt Plat [2009] modell szisztematikus komponense:

$$\eta_{xt} = a_x + k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} + c_{t-x} \ (x = 1,2,\dots,X, \quad t = 1,2,\dots,T),$$

amely az $x_0 + x$ éves egyének halandóságát írja le, ahol x_0 valamely kiinduló életkor (például $x_0 = 60$ év). Plat [2009] cikkében központi kitettségeket és logaritimikus kapocsfüggvényt feltételez, és az alábbi identifikációs megkötéseket javasolja:

$$\sum_{t=1}^{T} k_t^{(1)} = 0,$$

$$\sum_{t=1}^{T} k_t^{(2)} = 0,$$

$$\sum_{i=1-X}^{T-1} c_i = 0,$$

$$\sum_{i=1-X}^{T-1} ic_i = 0.$$

3.3. Áttekintés és csoportosítás

Szisztematikus komponenseik alapján a GAPC modellcsalág tagjai a korcsoport- és kohorszhatás jelenléte, a mortalitási indexek N száma és az érzékenységi együtthatók jellege (képlettel adott vagy nemparaméteres) szerint csoportosíthatók. A modellezett halandósági ráták jellege szerint elkülöníthetők továbbá központi és kezdeti halandósági rátákra épülő GAPC modellek, azzal a kiegészítéssel, hogy a halálesetek számára vonatkozó feltevés az előbbiek esetén a Poisson-, az utóbbiak esetén pedig a binomiális eloszlás. A GAPC modellcsaládhoz tartozó, jelen fejezetben bemutatott nevezetes modellek e szempontok szerinti csoportosítását az 1. táblázatban és a 2. ábrán szemléltetem.[8]

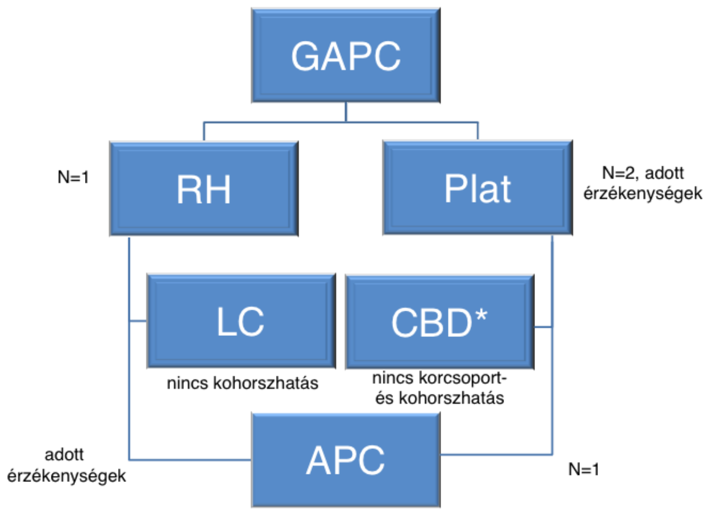
Eljárás	**Korcsoport**	**Kohorsz**	**N**	**Érzékenység**	**Kitettség**	**Kapocs**
APC	van	van	1	egységnyi	központi	log
CBD	nincs	nincs	2	képlettel adott	kezdeti	logit
LC	van	nincs	1	nemparaméteres	központi	log
Plat	van	van	2	képlettel adott	központi	log
RH	van	van	1	nemparaméteres	központi	log

1. táblázat: Néhány nevezetes GAPC modell jellemzői (forrás: saját szerkesztés)

[7] Érdemes megjegyezni, hogy a CBD modell bővítéseként Cairns és szerzőtársai [2009] kohorszhatás bevezetését javasolják. E modellváltozatot itt nem tárgyalom.

[8] A 2. ábrán *-gal jelölt CBD modell kezdeti kitettségeket és logit kapocsfüggvényt feltételez. A többi modell esetén a központi kitettségek és a logaritmikus kapocsfüggvény alkalmazása általános.

A 2. ábrán látható, hogy a GAPC modellcsalád két nevezetes ágát a Renshaw–Haberman[9] és Plat modellek adják. Az RH modell nevezetes almodelljei a kohorszhatást nem tartalmazó Poisson Lee–Carter és az egységnyi érzékenységi együtthatókkal rendelkező APC modellek, a Plat modell nevezetes alesetei pedig a korcsoport- és kohorszhatást nem tartalmazó Cairns–Blake–Dowd és az egyetlen mortalitási indexet feltételező APC modellek. Az APC modell tehát – mint a legegyszerűbb, korcsoport- és kohorszhatást egyaránt tartalmazó modell – a GAPC modellcsalád mindkét ágának speciális esete, így nevéhez hűen a modellcsalád bizonyos értelemben valóban ezt a modellt általánosítja.



2. ábra: A GAPC modellcsalád néhány nevezetes tagja és a közöttük fennálló hierarchia (forrás: saját szerkesztés)

Az általános, illetve az időskori halandóság modellezésére ebben a sorrendben a 2. ábra bal oldali, illetve mindkét ágán szereplő modellek alkalmazhatók. Természetesen számos további halandóság-előrejelző eljárás előállítható a GAPC modellcsalád megfelelő paraméterezésével.

3.4. Paraméterbecslés, modellválasztás és előrejelzés

A GAPC családba tartozó modellek paramétereinek becslése a *maximum likelihood elv* alkalmazásával végezhető.[10] A log-likelihood függvény maximalizálására Brouhns és szerzőtársai [2002] a Newton-módszert alkalmazzák, Villegas és szerzőtársai [2016] pedig az általánosított lineáris modell (GLM) illesztésére alkalmazható, számos statisztikai programcsomagba beépített optimalizáló algoritmusokat javasolják. Egymásba ágyazott modellek közötti választásra természetesen ebben az esetben is alkalmazható a statisztikában széleskörűen alkalmazott *likelihood-arány teszt*.
A paraméterbecslést követően a mortalitási indexek becsült értékeinek együttes alakulását Cairns–Blake–Dowd [2006], Haberman–Renshaw [2011], valamint Villegas és szerzőtársai [2016] *többdimenziós eltolásos véletlen bolyongásként* (angolul *multivariate random walk with drift*) modellezik. A kohorszhatás becsült értékeinek alakulását szintén ARIMA modellek segítségével szokás modellezni. Erre a célra Renshaw–Haberman [2006] az eltolásos

[9] Pontosabban: az RH modell Haberman–Renshaw [2011] cikkében bemutatott, egyszerűsített változata.
[10] A log-likelihood függvény képlete megtalálható például Villegas és szerzőtársai [2016] tanulmányában.

ARIMA(1,1,0) modellt, míg Plat [2009] az eltolásos *ARIMA(2,2,0)* modellt javasolja. A naptári időszaktól és kohorsztól függő idősoros folyamatok paraméterbecslését követően a halandósági ráták a megfelelő idősormodellek extrapolálásával jelezhetők előre.

A halandóság-előrejelző módszerek alkalmazásával járó előrejelzési bizonytalanság modellezésére Lee–Carter [1992] óta szokásos eljárás az időtől függő paraméterek hibatagjainak Monte Carlo szimulációja. Ez az eljárás ugyanakkor félrevezető eredményeket produkál, mivel a modell paramétereit implicit módon azok mintából becsült értékeivel azonosítja, figyelmen kívül hagyva ezáltal a becslési eljárásból fakadó paraméterbizonytalanságot. A GAPC modellcsalád keretében az előrejelzési bizonytalanság és a paraméter-bizonytalanság együttesen a Brouhns és szerzőtársai [2005], valamint Villegas és szerzőtársai [2016] által javasolt *félparaméteres bootstrap* (angolul *semiparametric bootstrap*) eljárás segítségével vehető figyelembe[11], mivel analitikus módszerekkel a bizonytalanság két forrása nehezen kezelhető együttesen. Koissi és szerzőtársai [2006] alternatív megközelítésként az illesztett modell hibatagjaiból vett mintavételezésen alapuló *reziduális bootstrap* módszert javasolják.

A Brouhns és szerzőtársai [2005] által javasolt félparaméteres bootstrap eljárás keretében a $B \in \mathbb{N}_{>0}$ darab bootstrap mintában először a D_{xt} $(x = 1,2,\dots,X,\ t = 1,2,\dots,T)$ ismert haláleseti gyakoriságokat újra szükséges generálni a megfigyelt értékekkel azonos várható értékű Poisson vagy binomiális eloszlásokból, majd a modellillesztést és az előrejelzést minden egyes D_{xt}^b $(b = 1,2,\dots,B,\ x = 1,2,\dots,X,\ t = 1,2,\dots,T)$ bootstrap mintára el kell végezni, a modellválasztási lépés nélkül, minden egyes mintára az eredetileg javasolt modellváltozatot alkalmazva. A vizsgálni kívánt véletlen mennyiségek (például halandósági ráták vagy várható élettartamok) elméleti eloszlása a mintaméret növelésével határértékben azok bootstrap mintákban megfigyelt empirikus eloszlásával közelíthető.

3.5. Az életjáradékok díjszámítása statikus és dinamikus halandósági ráták alapján

Az x éves korban várható hátralévő élettartamot statikus halandóság mellett megadó összefüggés (Banyár [2003]):

$$e_x = \sum_{i=1}^{\omega-x} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}) + \frac{1}{2} \quad (x = 0,1,\dots,\omega),$$

ahol a q_x $(x = 0,1,\dots,\omega)$ értékek az alkalmazott halandósági táblában szereplő úgynevezett koréves halálozási valószínűségek, ω pedig a feltételezett legmagasabb elérhető életkor (a KSH gyakorlata alapján $\omega = 100$ év). A megfelelő összefüggés a halandóság-előrejelző módszerek segítségével előrejelzett, dinamikus halandóság esetén:

$$e_{x,T} = \sum_{i=1}^{\omega-x} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j,T+j}) + \frac{1}{2} \quad (x = 0,1,\dots,\omega),$$

ahol q_{xt} $(x = 0,1,\dots,\omega,\ t = T, T+1, T+2,\dots)$ az x éves egyének koréves halálozási valószínűsége a t-edik naptári évben, T pedig az aktuális naptári év.

Az x éves korú egyének azonnal induló, élethosszig tartó, évi egy forint összegű életjáradékának egyszeri nettó díjképlete az aktuáriusi ekvivalenciaelv (Banyár [2003]) alapján:[12]

$$\ddot{a}_x = \sum_{i=0}^{\omega-x} \left[v^i \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}) \right] \quad (x = 0,1,\dots,\omega),$$

ahol v a technikai kamatláb alapján számított éves diszkonttényező[13]. Az így számított nettó díj

---

[11] A bootstrap módszert Efron [1979] javasolta először általánosabb kontextusban.

[12] A képletben az üres szorzat értéke definíció szerint egynek tekintendő.

[13] A technikai kamatláb a befektetett életbiztosítási díjtartalékon garantált éves hozamráta, melynek segítségével az aktuárius az életbiztosítások klasszikus díjkalkulációja során meghatározza a jövőbeli pénzáramlások jelenértékét (Banyár [2003]).

azt az életjáradékért cserébe nyújtandó egyösszegű befizetést adja meg, amely mellett a járadékszolgáltató a technikai kamatlábnak megfelelő, rögzített éves befektetési hozam feltételezése mellett, a járadékfizetésen kívüli egyéb költségek figyelembe vétele nélkül nulla profitot realizál. Az életjáradék ténylegesen fizetendő, bruttó díja (Banyár [2003]) a nettó díj és a tényleges éves életjáradék összegének szorzata, növelve a költségek és a szolgáltatói profit fedezetével.[14]
Dinamikus halandósági ráták használata esetén a megfelelő összefüggés:

$$\ddot{a}_{x,T} = \sum_{i=0}^{\omega-x}\left[v^i \prod_{j=0}^{i-1}\left(1 - q_{x+j,T+j}\right)\right] \quad (x = 0,1,\dots,\omega),$$

ahol T az aktuális naptári év a díjszámítás pillanatában.
A továbbiakban a q_{xt} koréves halálozási valószínűségeket Ágoston–Kovács [2000] nyomán a maximum likelihood elv alapján az m^0_{xt} kezdeti halandósági rátákkal becsülöm, és központi halálozási ráták előrejelzése esetén azokat a széles körben alkalmazott

$$m^0_{xt} = \frac{m^c_{xt} t}{1 + \frac{1}{2} m^c_{xt}}$$

közelítés (Májer–Kovács [2011]) segítségével alakítom kezdeti halandósági rátákká.

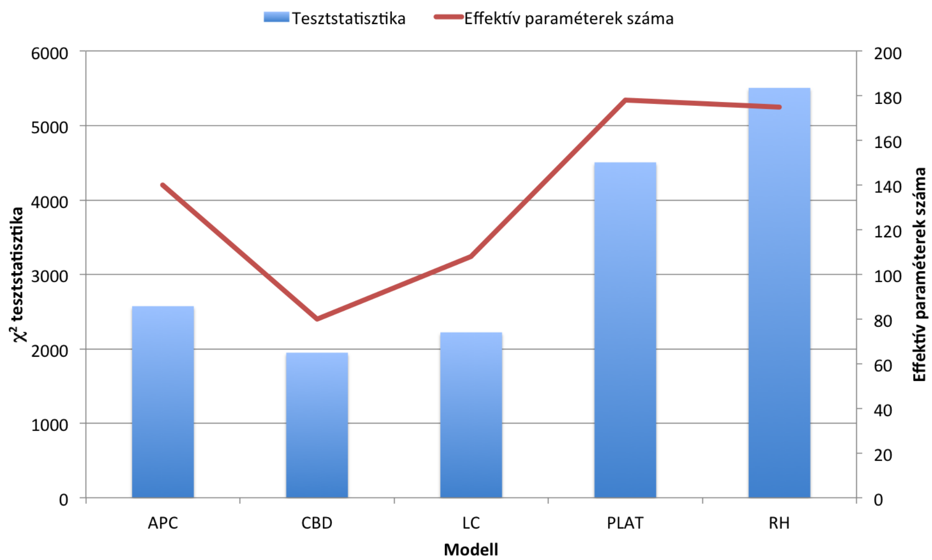
4. Empirikus elemzés

A nyugdíjas korú egyének halandósági rátáinak előrejelzése érdekében a KSH 1979–2013. naptári évekre és 65–99 korévekre vonatkozó, naptári és korévek szerint bontott létszám- és halálozási adatait használtam fel.[15] Mivel az Európai Unió erre vonatkozó irányelve (EU [2004]) értelmében a járadékbiztosítások díjkalkulációjában tilos a nemek szerinti megkülönböztetés, ezért a nemenkénti adatokat aggregáltam, és a számításokat a nemtől független (uniszex) korévenkénti létszámok és haláleseti gyakoriságok alapján végeztem el.
A halandósági ráták előrejelzésére a GAPC modellcsaládba tartozó, a 2. ábrán korábban szemléltetett korcsoport–időszak–kohorsz (APC, Carstensen [2007]), Cairns–Blake–Dowd [2006](CBD), Poisson Lee–Carter (LC, Brouhns és szerzőtársai [2002]) és időskori Plat [2009] modelleket, valamint a Renshaw–Haberman [2006] (RH) modell Haberman–Renshaw [2011] cikkében szereplő, egyszerűsített változatát alkalmaztam. A számításokat az R statisztikai programcsomag (R [2008] és Villegas és szerzőtársai [2016]) segítségével végeztem el.
A legjobb mintán kívüli előrejelzési teljesítményt nyújtó modell kiválasztása és a túlillesztés elkerülése érdekében az 1975–2014. naptári éveket az 1975–2004. naptári éveket magába foglaló tanuló és az 2005–2014. naptári éveket felölelő tesztelő időszakra osztottam fel. A felsorolt öt modell paramétereinek becslését a tanuló időszakon, illeszkedésük vizsgálatát pedig a széles körben alkalmazott χ^2 tesztstatisztika (Benjamin–Pollard [1993]) alapján a tesztelő időszakon végeztem el. A tesztelés során az első húsz korévet (vagyis a 65–84 évesek adatait) vettem figyelembe, mivel a későbbi korévek már kevésbé relevánsak a hozzájuk tartozó alacsonyabb túlélési valószínűségek és a járadékok díjszámítása során alkalmazott diszkontálás miatt. A tesztek eredményeit és az illesztett modellek effektív paramétereinek számát a 3. ábra

[14] Az életjáradékok kifizetései általában évesnél sűrűbb (például havi) gyakoriságúak. Ennek hatása az életjáradék nettó díjára jellemzően csekély, illetve a nettó díjjal közelítőleg arányos.

[15] Banyár [2012] részletesen foglalkozik a járadékok díjszámításához használható halandósági tábla kiválasztásának kérdésével. Járadékszolgáltatók egyedi halandósági adatai híján itt kénytelen vagyok a néphalandósági adatokból kiindulni.

szemlélteti.[16]

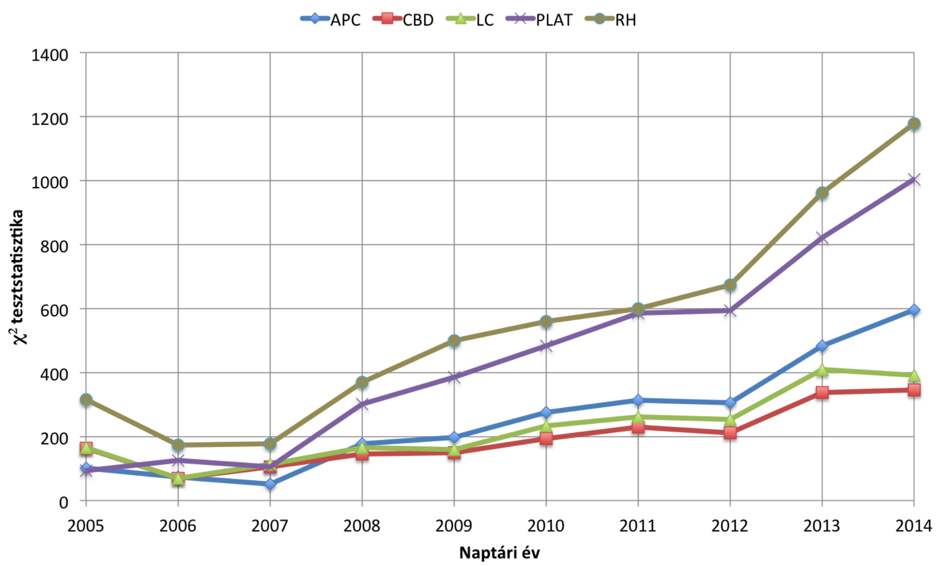


3. ábra: GAPC modellek illeszkedése a tesztidőszakon és a modellek effektív paraméterek száma (2005–2014, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés)

A 3. ábra alapján a tesztelő időszakon a legjobb előrejelzési teljesítményt a kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére kifejlesztett Cairns–Blake–Dowd modell nyújtja, melyet illeszkedés szerinti sorrendben a Poisson Lee–Carter és a korcsoport–időszak–kohorsz modellek követnek. A rangsort az első három modelltől leszakadva a Plat és Renshaw–Haberman modellek zárják. A Cairns–Blake–Dowd modell jó teljesítménye annál is inkább figyelemre méltó, hogy ez az eljárás rendelkezik a vizsgált öt modell közül a legkevesebb effektív paraméterrel. A magasabb effektív paraméterszámú modellek gyengébb előrejelzési pontosságának oka a túlillesztésben keresendő: ezek a modellek a kevesebb paramétert tartalmazó modelleknél szükségerűen jobban illeszkednek a tanuló időszakon, ugyanakkor a tesztelő időszak éveire már gyengébb előrejelzést eredményeznek, hasonlóan ahhoz a tankönyvi példához, amelyet egy közel lineáris egyváltozós idősor magas fokszámú polinom segítségével történő előrejelzése esetén tapasztalunk.

A 4. ábra alapján az előrejelzési időtáv növekedésével jellemzően valamennyi vizsgált modell előrejelzési pontossága csökken. A pontosság romlási üteme a magas effektív paraméterszámú Plat és Renshaw– Haberman modellek esetén a legszembetűnőbb, illetve ezekkel szemben a legjobb illeszkedést nyújtó Cairns–Blake–Dowd és Poisson Lee– Carter modellek esetén a legmérsékeltebb. A naptári évenkénti elemzés megerősíti a Cairns–Blake–Dowd modell alkalmazhatóságát, annál is inkább, mivel a továbbiakban az életjáradékok díjszámítása az itt bemutatottnál jóval hosszabb, 35 éves előrejelzési horizont használatát teszi majd szükségessé.

[16] Az alacsonyabb χ^2 tesztstatisztikák utalnak jobb illeszkedésre. Az országos létszámadatok használatából adódó nagy mintaméret miatt az illeszkedésre vonatkozó nullhipotézis valamennyi modell esetén határozottan elutasítható. Effektív paraméterszám alatt a többi paraméter által az identifikációs megkötések révén nem meghatározott paraméterek száma értendő.



4. ábra: GAPC modellek illeszkedése a tesztidőszakon naptári évenként (2004–2013, 65–84 éves korokban, forrás: saját szerkesztés)

Életkor szerint egyébként egyik vizsgált modell esetén sem figyelhető meg életkor szerint monoton trend az előrejelzési pontosságban. A legpontosabbnak ítélt Cairns–Blake–Dowd és Poisson Lee–Carter modellek közötti fő különbség e tekintetben a 65–70 év közötti életkorokban figyelhető meg: itt a Cairns–Blake–Dowd modell érezhetően pontosabb előrejelzést szolgáltat. 72 éves kortól kezdve a két modell pontossága közel azonos.

Az eredmények alapján összességében megállapítható, hogy a vizsgált adatsoron a hazai időskori halandóság előrejelzésére az öt kiválasztott GAPC modell közül a Cairns–Blake–Dowd modell használata javasolt. E modell mellett szól, hogy a legalacsonyabb mintán kívüli előrejelzési hibával és emellett a legkevesebb effektív paraméterrel rendelkezik, előrejelzési hibája a legalacsonyabb ütemben emelkedik az időhorizont növelésével, valamint az életjáradékok díjszámításánál leglényegesebb, 65–70 év közötti életkorok halandóságát a Poisson Lee–Carter modellhez képest jóval alacsonyabb hibával jelzi előre a tesztelő időszakon. Nem mellékes szempont az sem, hogy Cairns–Blake–Dowd [2006] cikkükben a modellt kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére javasolják a Lee–Carter modell alternatívájaként.

5. Életjáradékokkal kapcsolatos eredmények

Az élettartam-kockázat szerepének számszerűsítése érdekében elsőként a 65-99 éves egyének életkorfüggő halandósági rátáit a GAPC modellcsaládba tartozó, korábban már bemutatott öt nevezetes halandóságelőrejelző modell felhasználásával előrejeleztem a 2016–2050. naptári évekre, majd az előrejelzést a Villegas és szerzőtársai [2016] tanulmányában javasolt félparaméteres bootstrap eljárás segítségével egyenként 5000 replikációból[17] álló bootstrap mintákon is megismételtem. A nyugdíjkorhatár betöltésekor várható e_{65} hátralévő élettartam és $\ddot{a}_{65}$ egyszeri nettó díj értékeket a halandósági ráták várható értéinek megfelelő pontbecslések alapján, illetve valamennyi szimulált bootstrap mintában egyenként is meghatároztam.

[17] A bootstrap minták számának növelése 5000 replikáció felett már csak elhanyagolható mértékben változtatta meg a számított konfidenciaintervallumok határait.

Az összehasonlítás kedvéért a legfrissebb ismert, 2014. évi néphalandósági tábla alapján – a klasszikus aktuáriusi gyakorlattal összhangban időben változatlan, statikus halandósági rátákat feltételezve – is elvégeztem a számításokat. Mivel a technikai kamatláb maximális mértéke a vonatkozó MNB rendelet (MNB [2015]) alapján forintban fennálló kötelezettségek esetén 2016. július 1-étől évi 2,3%, ezért a számítások során a $v = 1/1{,}023$ diszkonttényezőt alkalmaztam. További összehasonlításra adtak lehetőséget a Májer–Kovács [2011] tanulmányában bemutatott eredmények, melyek a Lee–Carter [1992] modell és az 1970–2006 bázisidőszak alapján, 3%-os technikai kamatláb feltételezésével készültek.
A Cairns–Blake–Dowd modell alapján nyert számítási eredményeimet és a Májer–Kovács [2011] cikkében szereplő megfelelő mutatószámokat ebben a sorrendben a 2. táblázat felső és alsó része foglalja össze. A táblázat második oszlopában a legutolsó ismert halandósági tábla alapján számított keresztmetszeti értékek, harmadik oszlopában a halandóság-előrejelzés segítségével nyert dinamikus, kohorszszemléletű várható értékek és bootstrap konfidencia-intervallumok, negyedik oszlopában pedig a statikus, keresztmetszeti szemléletben a dinamikus várható értékekhez képest elkövetett százalékos hibák nagyságai láthatók.

Saját számítás (bázisidőszak: 1975–2014):

Mennyiség	**Keresztmetszeti**	**Várható érték (konf.int.)**	**Statikus hiba**
e_{65} (év)	16,47	18,21 (16,61; 19,80)	−9,51%
$\ddot{a}_{65}$ (év)	13,72	14,78 (13,83;15,72)	−6,43%

Májer–Kovács [2011] (bázisidőszak: 1970–2006):

Mennyiség	**Keresztmetszeti**	**Várható érték (konf.int.)**	**Statikus hiba**
e_{65} (év)	15,39	16,43 (15,12; 17,83)	−6,33%
$\ddot{a}_{65}$ (év)	11,87	12,43 (11,70; 13,17)	−4,50%

4. táblázat: Összehasonlítás: a 65 éves korban várható hátralévő élettartam és az életjáradék egyszeri nettó díja (forrás: saját számítás és Májer–Kovács [2011])

A 4. táblázat alapján megállapítható, hogy a statikus, keresztmetszeti szemléletben számított, 65 éves korban várható hátralévő élettartam 2006–2014 között 1,08 évvel, a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díja pedig 1,85 Ft-tal emelkedett. Ez utóbbi hatás részben a várható élettartam növekedésének, részben pedig a technikai kamatláb csökkenésének tudható be.[18] Az újabb számításaim alapján már az élettartam-kockázatot figyelmen kívül hagyó, keresztmetszeti értékek is meghaladják a Májer–Kovács [2011] által közölt kohorszszemléletű, dinamikus várható értékeket, és a dinamikus értékek konfidenciaintervallumai jóval szélesebbek a Májer–Kovács [2011] tanulmányában szereplő megfelelőikhez képest, mivel az utóbbiak – az új számítás során alkalmazott bootstrap eljárással szemben – a mortalitási index sztochasztikus trendparaméterét leszámítva nem tartalmazzák a paraméterbecslésből fakadó bizonytalanságot. A naiv, statikus szemlélet alkalmazásával elkövetett százalékos hiba nagysága mind a várható hátralévő élettartam, mind az életjáradék nettó díja esetén közel másfélszerese a Májer–Kovács [2011] eredményei alapján számított százalékos hibának, ami a módszertani különbségeken túl is

[18] Érdemes megjegyezni, hogy a Lee–Carter [1992] modell használata az újabb adatokon minimális eltéréssel a Cairns–Blake–Dowd [2006] modellel közel azonos eredményt ad, így a különbség nem a módszerválasztásból adódik.

arra enged következtetni, hogy az élettartam-kockázat jelentősége nőtt az utóbbi években. A statikus szemlélet alkalmazása a nyugdíjazáskor várható hátralévő élettartamot közel két évvel alábecsüli, és a nyugdíjcélú életjáradékok esetén 6,43%-os alulárazottsághoz vezet, ami például évi 1 millió Ft összegű havi járadék esetén a szerződés megkötésekor 1 millió 60 ezer Ft tartalékhiányt, és ezáltal ugyanekkora nagyságú, a biztosítási gyakorlatban is igen jelentős azonnali veszteséget jelent a járadékszolgáltató számára.

6. Összefoglalás

Eredményeim alapján megállapítható, hogy a hazai időskori uniszex halandósági rátákat a 2005–2014. évekből álló tesztelő időszakon öt népszerű halandóság-előrejelző módszer közül a kifejezetten az időskori halandóság előrejelzésére kifejlesztett Cairns–Blake–Dowd [2006] modell jelzi előre a legmegfelelőbben a mintán kívüli előrejelzési pontosság kritériuma alapján az életjáradékok szempontjából legfontosabb 65–84 éves életkorokban. Továbbá az időhorizont növelésével az előrejelzési hiba e modell használata esetén növekszik a legalacsonyabb ütemben, és a nyugdíjszámítások szempontjából legfontosabb 65–70 éves korcsoportban e modell esetén jóval alacsonyabb az egyébként összességében második legpontosabb előrejelzést nyújtó Poisson Lee–Carter modellhez (Brouhns és szerzőtársai [2002]) képest. A jóval több paraméterrel rendelkező Plat [2009] és Renshaw–Haberman [2006] modellek használata túlillesztéshez vezet, amelyre a tanuló időszakon mért kiváló illeszkedésük és ezzel párhuzamosan a tesztelő időszakon mért gyenge – és az időhorizont növelésével gyors ütemben romló – előrejelzési pontosságuk enged következtetni.

A Cairns–Blake–Dowd modell segítségével előrejelzett, dinamikus uniszex néphalandósági tábla használata esetén a nyugdíjkorhatáron várható hátralévő élettartam majdnem két évvel felülmúlja a klasszikus módszertan alapján, statikus halandóság feltételezésével számított értéket. A statikus számítás a nyugdíjcélú életjáradék egyszeri nettó díját 6,43%-kal alábecsüli, ami például évi 1 millió Ft összegű életjáradék esetén 1 millió 60 ezer Ft körüli, a biztosítási gyakorlatban igen jelentős mértékű azonnali tartalékhiányt és veszteséget okoz a járadékszolgáltatónak. A statikus halandóság feltételezése miatt jelentkező alulárazottság mértéke a Májer–Kovács [2011] tanulmányában szereplő 4,51%-ról 6,43%-ra nőtt a 2006 és 2014 közötti időszakban. A változás az aktuáriusi gyakorlat szempontjából rendkívül jelentős, továbbá a néphalandóság vizsgálatából adódó hatalmas mintaméret miatt formális teszt alkalmazása nélkül is kijelenthető, hogy statisztikai értelemben is szignifikáns.

Mindezek alapján levonható az a következtetés, hogy Magyarországon a nyugdíjcélú életjáradékok esetén 2006 és 2014 között jelentősen emelkedett a statikus halandóság feltételezésével elkövetett díjszámítási hiba nagysága, ami arra enged következtetni, hogy a vizsgált időszakban nőtt az élettartam-kockázat szerepe a vizsgált piacon. Továbbá mivel a biztosítási ügyfelek halandósága jellemzően alacsonyabb a néphalandóságnál, és – részben tudatos antiszelekció következtében – a járadéktermékeket a biztosítási ügyfelek közül is jellemzően az alacsonyabb halandóságú ügyfelek vásárolják (Banyár [2003]), ezért a járadéktermékek állományaiban feltehetően a kimutatott árazási hibánál még jelentősebb tévedésre lehet számítani a biztosítási gyakorlatban.

A kérdés fontosságát tovább növeli, hogy az önkéntes nyugdíjpénztári életjáradékokra vonatkozó új szabályozás (Országgyűlés [2015]) eredményeképpen a közeljövőben remélhetőleg jelentős bővülés várható a hazai életjáradékok piacán.

Irodalom

Ágoston, K. Cs. & Kovács, E. (2000). *Halandósági modellek*. Aktuárius jegyzetek, 3. kötet, Budapest. http://www.uni-corvinus.hu/fileadmin/user_upload/hu/tanszekek/kozgazdasagtudomanyi/ tsz-opkut/files/opkut/files/halandosagi_modellek.pdf, letöltés dátuma: 2016.06.25.

Asteriou, D. & Hall, S. G. (2015). *Applied Econometrics (3rd edition).* Part V, Chapter 13: ARIMA Models and the Box–Jenkins Methodology). Palgrave MacMillan, London. ISBN 9781137415479.

Banyár, J. (2003). *Életbiztosítás*. Aula Kiadó, Budapest. ISBN 9789639478381.

Banyár, J. (2012). *A kötelező öregségi életjáradékok lehetséges modelljei*. Társadalombiztosítási könyvtár. Gondolat Kiadó, Budapest. ISBN 9789636934224.

Benjamin, B. & Pollard, J.H. (1993). *The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics (3rd edition)*. Institute and Faculty of Actuaries, Oxford. ISBN 978-0901066268.

Booth, H., Hyndman, R.J., Tickle, L. & De Jong, P. (2006). Lee–Carter mortality forecasting: A multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research*, 15(9):289–310. http: //dx.doi.org/10.4054/demres.2006.15.9.

Booth, H., Maindonald J. & Smith, L. (2002). Applying Lee–Carter under Conditions of Variable Mortality Decline. *Population Studies*, 56(3):325–336. http://dx.doi.org/10.1080/00324720215935.

Booth, H. & Tickle, L. (2008). Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *ADSRI Working Paper* No. 3, Australian Demographic & Social Research Institute, Canberra. http://demography.anu.edu.au/sites/default/files/ publications/adsri-papers/ADSRIwp-03.pdf, letöltés dátuma: 2016.06.25.

Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J.K. (2002). A Poisson log- bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31:373–393. http: //dx.doi.org/10.1016/s0167-6687(02)00185-3.

Brouhns, N., Denuit, M. & Van Keilegom, I. (2005). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(3):212–224. http://dx.doi.org/10.1080/ 03461230510009754.

Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A. & Balevich, I. (2009). A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data From England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal*, 13(1):1–35. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2009.10597538.

Carnes, B.A. & Olshansky, S.J. (2007). A Realist View of Aging, Mortality, and Future *Longevity. Population and Development Review*, 33(2):367–381. http://dx.doi.org/10.1111/j.1728- 4457.2007.00172.x.

Carstensen, B. (2007). Age–period–cohort models for the Lexis diagram. *Statistics in Medicine*, 26:3018–3045. http://dx.doi.org/ 10.1002/sim.2764.

Currie, I. (2016). On fitting generalized linear and non-linear models of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(4):356–383. http: //dx.doi.org/10.1080/03461238.2014.928230.

Deaton, A. & Paxson, C. (2001). Mortality, Income, and Income Inequality Over Time in Britain and the United States. *NBER Working Paper* No. 8534, Cambridge. http://dx.doi.org/10.3386/w8534.

Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):1–26. http://dx.doi.org/10.1214/ aos/1176344552.

EU (2004). Council Directive 2004/113/EC of 13 December 2004 implementing the principle of equal treatment between men and women in the access to and supply of goods and services. http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri= CELEX:32004L0113&from=EN, letöltés dátuma: 2016.06.25.

EU (2009). Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance. http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/uri= CELEX:32009L0138&from=EN, letöltés dátuma: 2016.06.25.

Gray, R. & Kovács, E. (2001). Az általánosított lineáris modell és biztosítási alkalmazásai. *Statisztikai Szemle*, 8:689–702. http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2001/2001_08/ 2001_08_689.pdf, letöltés dátuma: 2016.06.25.

Haberman, S. & Renshaw, A. (2011). A comparative study of parametric mortality projection models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48(1):35–55. http://dx.doi.org/10.1016/ j.insmatheco.2010.09.003.

Hobcraft, J., Menken, J. & Preston, S. (1982). Age, Period, and Cohort Effects in Demography: A Review. *Population Index*, 48(1):4–43. http://dx.doi.org/10.2307/2736356.

Hunt, A. & Blake, D. (2014). A general procedure for constructing mortality models. *North American Actuarial Journal*, 18(1):116–138. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2013.852963.

Hunt, A. & Villegas, A. (2015). Robustness and convergence in the Lee–Carter model with cohort effects. *Insurance: Mathematics and Economics*, 64:186–202. http://dx.doi.org/10.1016/ j.insmatheco.2015.05.004.

Keilman, N. (1998). How Accurate Are the United Nations World Population Projections? *Population and Development Review*, 24(supplement):15–41. http://dx.doi.org/10.2307/2808049.

Keilman, N. (2008). European Demographic Forecasts Have Not Become More Accurate Over the Past 25 Years. *Population and Development Review*, 34(1):137–153. http://dx.doi.org/10.1111/j.1728- 4457.2008.00209.x.

Koissi, M., Shapiro, A. & Hognas, G. (2006). Evaluating and extending the Lee–Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1):1–20. http: //dx.doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.06.008.

Kovács, E. (2011). *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése (IV. bővített kiadás)*. Tanszék Kft., Budapest. ISBN 978-963-88777-2-7.

Lee, R. D. & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87:659– 671. http://dx.doi.org/10.2307/2290201.

Lee, R. & Miller, T. (2001). Evaluating the performance of the Lee–Carter method for forecasting mortality. *Demography*, 38(4):537–549. http://dx.doi.org/10.1353/dem.2001.0036.

Lovász, E. (2011). Analysis of Finnish and Swedish mortality data with stochastic mortality models. *European Actuarial Journal*, 1(2):259– 289. http://dx.doi.org/10.1007/s13385-011-0039-8.

Májer, I. & Kovács, E. (2011). Élettartam-kockázat – a nyugdíjrendszerre nehezedő egyik teher. *Statisztikai Szemle*, 7–8:790– 812. http://www.ksh.hu/statszemle_archive/2011/2011_07-08/2011_07-08_790.pdf, letöltés dátuma: 2016.06.25.

McCullagh, P. & Nelder, J. (1989). *Generalized Linear Models (2nd edition)*. Chapman & Hall, London. ISBN 978-0412317606.

MNB (2015). 54/2015. (XII. 21.) MNB rendelet a technikai kamatláb maximális mértékéről. http://net.jogtar.hu/jr/gen/hjegy_ doc.cgi?docid=A1500054.MNB, letöltés dátuma: 2016.06.25.

Országgyűlés (2015). 2015. évi CCXV. törvény a pénzügyi közvetítőrendszer egyes szereplőit érintő törvények jogharmonizációs célú módosításáról. http://mkogy.jogtar.hu/?page=show&docid= A1500215.TV, letöltés dátuma: 2016.06.25.

Plat, R. (2009). On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(3):393–404. http://dx.doi.org/10.1016/ j.insmatheco.2009.08.006.

R Development Core Team (2008). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.

Renshaw, A. & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3):556–570. http://dx.doi.org/ 10.1016/j.insmatheco.2005.12.001.

Villegas, A. M., Kaishev, V. & Millossovich, P. (2016). *StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling*. https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/vignettes/StMoMoVignette.pdf, letöltés dátuma: 2016.06.25.

Wong-Fupuy, C. & Haberman, S. (2004). Projecting Mortality Trends: Recent Developments in the U.S. and U.K. *North American Actuarial Journal*, 8(2):56–83. http://dx.doi.org/10.1080/10920277.2004.10596137.