IGAZSÁGOS ELOSZTÁSOK

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

Tasnádi Attila

IGAZSÁGOS ELOSZTÁSOK

Budapesti Corvinus Egyetem

Typotex

2014

Lektorálta: Dr. Orosz-Kaiser Ágota

ISBN 978 963 279 261 3
Készült a Typotex Kiadó (`http://www.typotex.hu`) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gindilla Orsolya

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú, „Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638
MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: Igazságos elosztások, arányosság, irigységmentesség, játékelmélet, magyar választási rendszer, mandátumszámítás, mechanizmustervezés, stratégiai interakciók, szavazáselmélet, tortaosztozkodás.

ÖSSZEFOGLALÁS: A társadalmi problémák és konfliktusszituációk jelentős része elosztási kérdésekre vezethető vissza. A vizsgálat tárgya kiterjed például lakóközösségek közös költségének felosztására, örökösök közötti osztozkodásra, csődbement cég vagyonának értékesítéséből származó bevételek hitelezők közötti elosztására, közterhek elosztására, képviselők számának meghatározására szavazatok függvényében stb. Az említett problémákban közös, hogy a hétköznapi életben résztvevő szereplők érdekeik érvényesítése érdekében sokszor még önmaguknak is ellentmondó okfejtésekkel próbálják megnyerni a döntéshozókat. A társadalmi választások elméletében az 1950-es évektől kezdődően hódító axiomatikus módszer segítségével az egyes elosztási eljárások jellemezhetőek, és ezáltal világossá válik, hogy mely alapelvek alapján választandó egy eljárás, illetve, mely elvek egyidejű megkövetelése túlzott.

Tartalomjegyzék

Előszó

A tankönyv alapjául a szerző által a Budapesti Corvinus Egyetemen 2006 óta rendszeresen tartott igazságos elosztásokkal foglalkozó tárgyak (Elosztások normatív vizsgálata, Fair division és Osztozkodáselmélet) tananyaga szolgál. E terület – mint a társadalmi választások elméletének egy részterülete – objektív, normatív megközelítést alkalmaz, ami az axiomatikus tárgyalásmódban nyilvánul meg. Egyik alapvető és tipikus problémája egy tárgyból rendelkezésre álló szűkös mennyiség jól megfogalmazott elvek szerinti elosztása, megfelelő eljárások segítségével. Az igazságos elosztások elmélete az elosztási eljárással kapcsolatos elvárásokat (más néven tulajdonságok vagy axiómák) matematikailag formalizált alakban ragadja meg, és keresi a bizonyos elvárásoknak eleget tevő elosztási eljárásokat.

A társadalmi, illetve közösségi döntésekkel szemben valamilyen arányossági, igazságossági, méltányossági vagy hatékonysági elvárást szokás támasztani. A problémát nehezíti, hogy az igazságosság és a méltányosság nehezen definiálható matematikailag, pontosabban e fogalmak eddigi ismereteink alapján matematikailag definiálatlanok és nem is várható e téren előrelépés. A hétköznapi életben az igazságosság alatt gyakran a matematikailag jól definiált arányosságot értik, bár sokszor torzult jelentéssel. Például sokszor hallható, hogy az egykulcsos adó nem arányos. Természetesen olyan igazságossági kritériumok, mint például az egyenlők azonos elbánása definiálható egy adott problémára, de az ilyen jellegű kritériumok nem képesek az igazságosság, illetve igazságos elosztás fogalmának teljes körű megragadására, mivel jellemzően nem szűkítik le kellően a lehetséges elosztások halmazát. E téren a matematikai irodalomban Gamow–Stern (1958) és a közgazdasági irodalomban Foley (1967) által bevezetett irigységmentességi fogalom jelentett komolyabb előrelépést, a problémára azonban végső választ nem adott.

A hétköznapi életben előszeretettel használt igazságosság fogalma elkerülhetetlenül szubjektív, vitákban sokszor előnyszerzés céljából előszeretettel használt hivatkozási alap.[1] Gondolhatunk itt olyan problémákra, mint például az alkalmazandó adórendszer, egy lakóház közös költségének felosztása,

[1] Az igazságosság filozófiai meghatározásának kérdésével nem foglalkozunk.

egy örökség elosztása, vagy a kapott szavazatok alapján a pártok mandátumainak meghatározása. Az ilyen típusú problémákat vizsgálva az igazságos elosztások elmélete segítségével többek között megvizsgálhatjuk, hogy az axiomatikus tárgyalásmóddal milyen objektív válaszokat adhatunk az egyes elosztási kérdésekre.

A könyv első négy és a kilencedik fejezete az igazságos elosztások elméletének „klasszikus" területeit tartalmazza,[2] abban az értelemben, hogy a kimondottan az igazságos elosztásokkal foglalkozó könyvekben megjelenő ismereteket tárgyalják. Az ötödik és a hatodik fejezet a társadalmi választások eredményeit használja fel elosztási problémák megoldására. A hetedik és nyolcadik fejezet pedig a játékelmélet segítségével ad választ elosztási kérdésekre. Ezért az ötödiktől nyolcadik fejezetig terjedő rész, egy rövid bevezetést is tartalmaz a társadalmi választások elméletébe és a játékelméletbe.

Magyar nyelven az igazságos elosztásokat ismertető könyv még nem készült. A könyvben tárgyalt fogalmak és megközelítés egy részét Bara (1998) ismerteti magyarul megjelent áttekintő szakcikkében.[3] Az angol nyelvű szakirodalomban több neves közgazdász, matematikus és politológus írt tankönyvet, illetve monográfiát az igazságos elosztások matematikai megközelítéséről. Moulin (2003) bevezető jellegű könyve kevés bizonyítással és sok példával tárgyalja e tankönyvben az első két és az ötödiktől hetedik fejezetekben található tananyagot. Moulin (1988) monográfiája tartalmazza az előbbi könyvében nem közölt bizonyításokat. Brams–Taylor (1996) és Robertson–Webb (1998) az általunk a kilencedik fejezetben tárgyalt osztozkodási játékokat tárgyalja behatóan. Balinski–Young (2001) egy teljes könyvet szentel a negyedik fejezetben tárgyalt mandátumszámítási problémának.

Végezetül köszönetet szeretnék mondani lektoromnak, Orosz-Kaiser Ágotának és Mala Józsefnek, akik észrevételeikkel és a kézirat gondos elolvasásával minőségileg javítottak a könyvön. Köszönettel tartozom Bednay Dezsőnek, Kőrösiné Sviszt Katalinnak, Megyeri Krisztinának, Németh Bálintnak, Pintér Miklósnak és Simonovits Andrásnak a kézirat, illetve annak egyes fejezeteihez fűzött értékes megjegyzéseikért. Természetesen kizárólag a szerző felelős a könyv esetleges hiányosságaiért.

Budapest, 2013. augusztus 2.

Tasnádi Attila

[2] A nyolcadik fejezetben tárgyalt nem-kooperatív játékelmélethez való viszonya miatt tárgyaljuk csak a kilencedik fejezetben az osztozkodási játékokat.
[3] Bara (1998) az enyhébb tisztességes elosztás elnevezést használja.

1. fejezet

Az elosztási probléma

Egy jószágot, illetve az abból rendelkezésre álló mennyiséget több szempont alapján lehet elosztani az érdekelt szereplők között. A szereplőkről feltételezzük, hogy az alkalmazott elosztási szabályt adottságként fogadják el. Egyelőre kizárjuk a szereplők közötti (pl. pénzbeli) transzfereket, pontosabban csak az elosztás tárgyát képező jószággal és az abból rendelkezésre álló mennyiséggel foglalkozunk. Mivel számos elosztási szabály szóba jöhet, röviden ismertetünk néhány elosztási alapelvet, amelyek a megfelelő elosztási szabály kiválasztásában, és ezáltal a rendelkezésre álló szűkös mennyiség elosztásában segíthetnek. Az elvek illusztrálásához tekintsük a következő példát: négy barát egy autóval kíván Budapestről Keszthelyre eljutni és mindegyikük végig szeretne vezetni.

A *kompenzáció* elve az eddig hátrányosabb helyzetben lévő személyt részesíti előnyben. Mivel csak az adott jószág elosztásával foglalkozunk, a kompenzáció elve egy, az aktuális elosztási probléma megoldását megelőző időszakra vonatkozó információt használ fel. A négy barát példáját tekintve, aki eddig a legkevesebbet vezette az autót, az kapja meg a kormányt.

A *jutalmazás* elve alapján a közösségért legtöbbet tett személyt részesítjük előnyben. A jutalmazás, a kompenzációhoz hasonlóan, az aktuális elosztási problémán túli információt igényel. A négy barát problémáját tekintve például, az autót megjavító személy vezetheti az autót.

Külső jogok olyan jogi dokumentumokra utalnak, amelyek alapján valamelyik szereplő, vagy a szereplők egy csoportja elsőbbségi jogot formálhat az elosztandó mennyiségre, illetve annak egy részére. A négy barát példája esetén az autó tulajdonosa dönthet úgy, hogy ő vezeti az autót.

Rátermettség alapján a tárgyat a leghatékonyabban, illetve a közösség számára leghasznosabban alkalmazó személyt részesítjük előnyben. Esetünkben például a leggyorsabban vezető személyt választjuk vezetőnek, ha a lehető leggyorsabban szeretnénk Keszthelyre eljutni.

Mint látható, a példaként felsorolt négy szempont alapján – számunkra meglepetést nem okozva – egymástól eltérő eredményeket kaptunk. Az elosztási probléma elemzéséhez ebben a fejezetben bevezetünk egy egyszerű modellt, amely a problémát megragadó lehető legegyszerűbb modell.

1.1. Az elosztási probléma egyszerű matematikai modellje

Jelölje $\mathbb{S}$ a nemnegatív egész vagy nemnegatív valós számok halmazát, és legyen $\mathcal{N}$ a lehetséges szereplők rögzítetett, megszámlálható halmaza. A lehetséges szereplők halmaza azért lehet megszámlálhatóan végtelen, mert nem kívánjuk a szereplők számát előre korlátozni. Általában $\mathcal{N} = \mathbb{N}$. Az elosztásban résztvevő szereplők véges halmazát jelöljük N-nel, ahol $N \subset \mathcal{N}$. A szereplők lehetnek például az örökösök, akik egy örökségen osztozkodnak, vagy hitelezők, akik egy csődbement cég vagyonán osztoznak stb. Tegyük fel, hogy a szereplők egy t mennyiségben rendelkezésre álló jószágból részesednek, továbbá legyen az $i \in N$ szereplő igénye x_i. A t és x_i értékekről feltesszük, hogy nemnegatívak. Az így bevezetett jelölésekkel definiált $\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right) = (N, t, x)$ hármas egy *elosztási probléma*. A már említett hitelezői problémánál t a felszámolt vagyon értéke, míg x_i az i személy által nyújtott hitel. Általában a deficites esetre koncentrálunk, amikor is az összigények meghaladják a rendelkezésre álló mennyiséget ($\sum_{i\in N} x_i > t$). Megjegyzendő, hogy a szufficites eset hasonlóképpen kezelhető ($\sum_{i\in N} x_i < t$), míg az egyensúlyi eset ($\sum_{i\in N} x_i = t$) triviális, hiszen ekkor minden szereplő igénye pontosan kielégíthető. Tetszőleges $N \subset \mathcal{N}$, N véges, $x \in \mathbb{S}^N$ és $M \subset N$ esetén vezessük be az $x_M = \sum_{i\in M} x_i$ és az $x^M = (x_i)_{i\in M}$ jelöléseket. Az x_M skalár tehát az M-beli szereplők összigénye és az x^M vektor pedig az M-beli szereplők igényeinek együttese, illetve igényvektora. Speciálisan $x_i = x_{\{i\}} = x^{\{i\}}$ és $x = x^N$.

Megkülönböztetünk folytonos és diszkrét elosztási problémákat aszerint, hogy a rendelkezésre álló t mennyiség folytonosan osztható-e, vagy sem. Jóllehet a valóságban a pénz sem folytonosan osztható, azonban például 1 Ft értéke már oly csekély, hogy a pénzt az általánosság megszorítása nélkül folytonosan oszthatónak tekintjük. Az egyszerűség kedvéért, illetve a gyakorlatban felmerülő érdekesebb eseteknek megfelelően, a diszkrét elosztási problémáknál mind elosztandó mennyiségként, mind igényként csak nem negatív egészeket engedünk meg. Egyszerű példaként említhetjük 3 gitár elosztását 5 gyerek között, vagy a mentőcsónakbeli szűkös férőhelyek elosztását egy süllyedő hajó utasai között. Ez utóbbi két probléma segítségével arra is rámutathatunk, hogy az elosztás során milyen lehetőségekkel nem kívánunk élni. Nevezetesen nem foglalkozunk közvetlenül pénzbeli kompenzációval vagy időmegosztással az egyszerű elosztási modellünkben, amelyek segítségével megkerülhető az egészértékűség problematikája. Az eredendően diszkrét problémák a kompenzációt, az időmegosztást vagy a sorsolást megengedve folytonos problémákká transzformálhatók, így például a gitáros probléma esetén t lehetne a gitáron összesen játszható óra és x_i az i gyerek által igényelt játékidő. A sorsolás lehetőségével a 3.2. alfejezetben foglalkozunk.

1.2. Elosztási szabályok

Egy r *elosztási szabály* bármely $\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right)$ deficites elosztási problémához hozzárendel egy $(y_i)_{i\in N}$ *elosztást*, amelyről feltesszük, hogy $0 \leq y_i = r_i\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right) \leq x_i$ bármely $i \in N$ szereplő esetén és $y_N = t$. Az előbbi kikötés szerint senki se kapjon az igényénél többet, ami a deficites esetben indokolt, míg az utóbbi kikötés szerint el kell osztanunk a teljes rendelkezésre álló mennyiséget. A továbbiakban csak deficites problémákkal foglalkozunk, így a deficites jelzőt elhagyjuk. Diszkrét elosztási problémák esetén még azt is előírjuk, hogy az elosztási eljárás egész értékeket szolgáltasson.

Mivel számos elosztási szabály folytonos vagy diszkrét,[1] ezért példaként tekintsük a mindkét modellkeretben értelmezett *prioritási szabályt*, amely a szereplőket az igényüktől és a kínálattól független fontossági sorrendbe rendezi, majd az igényeket mindig ezen sorrend szerint elégíti ki. Így egy alacsonyabb fontosságú szereplő csak akkor részesülhet az elosztandó mennyiségből, ha az összes nála fontosabb szereplő igénye maradéktalanul teljesíthető. A prioritási szabály formális értelmezéséhez vegyünk egy $\sigma : N \to N$ bijekciót (1-1 értelmű leképezést), ahol $\sigma(1)$ a legmagasabb prioritású szereplő, $\sigma(2)$ a második legmagasabb prioritású szereplő, és így tovább. Ekkor r^σ az az eljárás, amelyre

$$\forall i, j \in N : \left(y_j > 0 \text{ és } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)\right) \Rightarrow x_i = y_i,$$

azaz ha i prioritása magasabb a j-énél és j-nek juttatunk a rendelkezésre álló mennyiségből, akkor i teljes igénye kielégítendő. Már a definíció alapján látható, hogy a prioritási szabály egy „igazságtalan" elosztási szabály.

1.3. Tulajdonságok

Az elosztási szabályokat különböző igazságossági, logikai és stratégiai tulajdonságokkal jellemezhetjük. Az 1. fejezetben olyan tulajdonságokat tárgyalunk, amelyek mind a folytonos, mind a diszkrét modellkeretben relevánsak.

[1] Megjegyzendő, hogy vannak vegyes elosztási szabályok is, amelyek egészértékű problémákhoz valós értékű megoldásokat rendelnek.

Egy r elosztási szabály *részrehajlásmentes*, ha a segítségével számított elosztások függetlenek a szereplők címkézésétől, vagy másképpen mondva a szereplők neveitől, és így az elosztások tulajdonképpen csak a szereplők igényeitől függnek. Tegyük fel, hogy János 5 darabot, míg Péter 7 darabot igényel a rendelkezésre álló 6 darab egyforma almából, és az elosztási szabály Jánosnak 2 darab és Péternek 4 darab almát juttat. Abban az esetben, ha János és Péter igényeit felcseréljük, a részrehajlásmentes eljárással számított mennyiségek is felcserélődnek, azaz most János kapna 4 darab almát, míg Péter 2 darabot. A részrehajlásmentesség nyilván egy igazságossági kritérium. Formálisan:

1.1. axióma. Az r elosztási szabály *részrehajlásmentes*, ha bármely $\left(N,t,(x_i)_{i\in N}\right)$ elosztási problémára, bármely $\sigma : N \to N$ permutációra és bármely $i \in N$ szereplőre

$$r_i\left(N,t,(x_i)_{i\in N}\right) = r_{\sigma(i)}\left(N,t,\left(x_{\sigma(i)}\right)_{i\in N}\right).$$

Egy másik igazságossági kritérium az úgynevezett *egyenlők azonos elbánása*, amely szerint, ha két szereplő igénye azonos, akkor azonos mennyiségekhez is kell jutniuk. Például az $(\{1{,}2{,}3\}, 10, (12{,}8{,}8))$ elosztási probléma esetén az egyenlők azonos elbánása megköveteli, hogy a 2 és 3 szereplők azonos mennyiségeket kapjanak.

1.2. axióma. Az r elosztási szabály kielégíti az *egyenlők azonos elbánásának elvét*, ha

$$x_i = x_j \Rightarrow r_i(N,t,x) = r_j(N,t,x)$$

bármely (N,t,x) elosztási problémára és bármely két $i,j \in N$ szereplőre.

Vegyük észre, hogy a részrehajlásmentesség implikálja az egyenlők azonos elbánását.

A logikai tulajdonságokra térve, az *erőforrás-monotonitás* egy természetesnek tűnő feltétel, eszerint a rendelkezésre álló („erőforrás") mennyiség növekedése esetén az igények változatlanságát feltételezve az egyes szereplőknek juttatott mennyiségek nem csökkenhetnek.

1.3. axióma. Az r elosztási szabály *erőforrás-monoton*, ha

$$t \le t' \Rightarrow r_i(N,t,x) \le r_i(N,t',x)$$

bármely két (N,t,x) és (N,t',x) elosztási problémára.

Példának okáért az erőforrás-monotonitás megköveteli, hogy ha az $(\{1{,}2{,}3\}, 9, (12{,}8{,}10))$ problémára egy r elosztási szabály a (4,2,3) elosztást szolgáltatja, akkor az $(\{1{,}2{,}3\}, 10, (12{,}8{,}10))$ elosztási probléma esetén ugyanaz az r elosztási szabály a szereplőknek rendre legalább 4, 2 és 3 mennyiségeket juttat.

Az *igénymonotonitás* kizárólag egy szereplő igényének megnövekedése esetén, változatlan elosztandó mennyiség mellett előírja, hogy a megnövekedett igényű szereplőnek juttatott mennyiség ne csökkenjen.

1.4. axióma. Az r elosztási szabály *igénymonoton*, ha bármely $i \in N$ szereplőre és bármely két $\left(N, t, \left(x^i, x^{N\setminus i}\right)\right)$, $\left(N, t, \left(\hat{x}^i, x^{N\setminus i}\right)\right)$ elosztási problémára

$$x_i \leq \hat{x}_i \Rightarrow r_i\left(N, t, \left(x^i, x^{N\setminus i}\right)\right) \leq r_i\left(N, t, \left(\hat{x}^i, x^{N\setminus i}\right)\right),$$

ahol $x^{N\setminus i} = (x_i)_{i \in N\setminus\{i\}}$ és $x = \left(x^i, x^{N\setminus i}\right)$.

Az igénymonotonitás szemléltetéséhez tekintsük a

$$\Pi_1 = (\{1{,}2{,}3\}{,}10, (12{,}8{,}10)) \text{ és a } \Pi_2 = (\{1{,}2{,}3\}{,}10, (12{,}9{,}10))$$

elosztási problémákat, továbbá szolgáltassa az r elosztási szabály a Π_1 problémára az (5,2,3) elosztást. Mivel a Π_1 elosztási problémából kiindulva a 2 szereplő igényének egy egységgel történő megnövelésével adódik a Π_2 elosztási probléma, ezért egy r igénymonoton elosztási szabálynak a Π_2 elosztási probléma esetén a megnövekedett igényű 2 szereplőnek továbbra is legalább 2 egységet kell juttatnia. E két példát tekintve az igénymonotonitás fenti definíciója semmit sem mond az 1 és 3 szereplőknek kiosztandó mennyiségek változásáról.[2]

Egyfajta skálafüggetlenséget ír elő a *homogenitás*, amely teljesülése esetén az elosztási szabály érzéketlen a megválasztott mértékegységre.

1.5. axióma. Az r elosztási szabály *homogén*, ha bármely $\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right)$ elosztási problémára és bármely $\lambda \in \mathbb{S}$ skalárra

$$\lambda r\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right) = r\left(N, \lambda t, (\lambda x_i)_{i\in N}\right).$$

Az 1.5. axiómában λ értéke, amely a mértékegységváltás együtthatója, folytonos elosztási problémák esetén egy tetszőleges nem negatív valós érték, míg diszkrét elosztási problémák esetén egy nem negatív egész. Például, ha az $(\{1{,}2{,}3\}, 1200, (600, 300, 900))$ elosztási problémában szereplő mennyiségek forintban adottak és az r elosztási szabály a (300,300,600) elosztást szolgáltatja, akkor forintról euróra áttérve az r homogén elosztási szabálynak 300 HUF/EUR árfolyam mellett az $(\{1{,}2{,}3\}, 4, (2, 1, 3))$ elosztási problémára az (1,1,2) elosztást kell adnia.

A következő négy strukturális invarianciatulajdonság az elosztási szabály igénykielégítési módtól való függetlenségét ragadja meg. *Konzisztens* eljárás esetén az elosztás független a személyek igény-kielégítési sorrendjétől. A konzisztencia formális definíciója előtt tekintsük az $(\{1{,}2{,}3\}{,}10, (12{,}8{,}10))$ problémát, amelyhez az r elosztási szabály az (5,2,3) elosztást rendeli. Ha a 3

[2] Elképzelhető volna az igénymonotonitás egy erősebb megfogalmazása is, amely szerint nem növekedhetnének a nem megnövekedett igényű szereplők kiosztott mennyiségei.

szereplőnek „előbb” odaadjuk a 3 egységet, akkor a konzisztencia megköveteli, hogy a „visszamaradó” $(\{1,2\},7,(12,8))$ problémához az r elosztási szabály az (5,2) elosztást rendelje.

1.6. axióma. Az r elosztási szabály *konzisztens*, ha bármely (N,t,x) elosztási problémára és bármely két $i,j \in N$, $i \neq j$ szereplőre

$$r_i\,(N,t,x) = r_i\left(N \setminus \{j\}, t - r_j\,(N,t,x)\,, x^{N\setminus\{j\}}\right).$$

A konzisztencia megkövetelése indokolt lehet olyan helyzetekben, amelyekben a szereplők folyamatosan jelentik be igényeiket és az igényeik teljesítése is folyamatosan történik. Érdekes példa a konzisztencia természetes megkövetelésére egy parlament mandátumainak területi egységenkénti elosztása. Ennek jobb megértése céljából gondoljunk arra, hogy az Egyesült Államokhoz az elmúlt évszázadokban folyamatosan csatlakoztak újabb és újabb államok. Az egyes államok képviselőhelyeinek száma nem függhetett az államok belépési sorrendjétől.[3] Hasonló helyzet állhat elő az Európai Unió országainak Uniós parlamentbeli mandátumainak számításakor, hiszen a jövőben is számíthatunk újabb tagfelvételekre.[4]

Az *alulról előállíthatóság* megköveteli, hogy egy kisebb mennyiség (pesszimista becslés) előzetes elosztása után egy pótlólagos mennyiség elosztása ugyanarra az eredményre vezessen, mintha egyből a teljes mennyiséget osztottuk volna el. Ekkor az elosztási folyamatra úgy tekintünk, mintha a kínálatot két lépésben osztanánk el és azt követelnénk meg, hogy azonos eredményre vezessen a kínálat két lépésben történő elosztása, és a kínálat egy lépésben történő elosztása. A két lépésben történő elosztás alatt azt értjük, hogy az első lépésben szétosztunk egy adott mennyiséget, majd a második lépésben pótlólagosan egy további mennyiséget, pusztán a fennmaradó igények ismeretében. Az alulról előállíthatóságot a konzisztenciához hasonlóan előbb egy példával illusztráljuk. Tekintsük megint az $(\{1,2,3\},10,(12,8,10))$ problémát, amelyhez az r elosztási szabály az (5,2,3) elosztást rendeli. Tegyük fel, hogy utólag még eloszthatunk két további egységet, és a szereplők fennmaradó (7,6,7) igényeit alapul véve az r elosztási szabály az $(\{1,2,3\},2,(7,6,7))$ elosztási problémához az (1,0,1) elosztást rendeli. Összegezve, két lépésben a (6,2,4) elosztást kaptuk. Alulról előállítható r esetén ugyanerre az elosztásra kell jutnunk, ha az összesen 12 egységet közvetlenül az eredeti (12,8,10) igényeket alapul véve osztjuk el r segítsével.

[3] Erről részletesebben olvashatunk Balinski–Young (2001), illetve Young (1994) könyveiben.

[4] Az Európai Unió előfutárát, az Európai Szén- és Acélközösséget még 6 ország alapította 1951-ben. Az immár 28 tagú Európai Unió legutoljára 2013-ban bővült Horvátországgal.

1.7. axióma. Az r elosztási szabály *alulról előállítható*, ha bármely (N, t, x) elosztási problémára és bármely $t' \in \mathbb{S}$ mennyiségre

$$0 \leq t' \leq t \leq x_N \Rightarrow r(N, t, x) = r(N, t', x) + r(N, t - t', x - r(N, t', x)).$$

Az alulról előállíthatóság azt jelenti, hogy a pótlólagos mennyiségek elosztása során, a múltat figyelmen kívül hagyva, ugyanahhoz az elosztáshoz jutunk. Továbbá, ha a szétosztás párhuzamosan történik – például több telephelyen keresztül – akkor az egymástól függetlenül működő egységek, ugyanazon elosztási szabállyal dolgozva, pusztán a fennmaradó igényekre vonatkozó információ folyamatos kicserélésével, az igények kielégítésének sorrendjétől függetlenül, ugyanazt az elosztást eredményezik.

A felülről előállíthatóság követelménye szerint, az első lépésben túl nagy mennyiség (optimista becslés) kiosztása után, a hiányt elvonva a szereplőktől ugyanarra az eredményre kell jutnunk, mintha egyből a valódi rendelkezésre álló mennyiséget osztottuk volna el. Mielőtt megadnánk a felülről előállíthatóságot, tekintsük a következő példát: legyen az $(\{1,2,3\}, 10, (12,8,10))$ az elosztási problémánk, amelyhez az r elosztási szabály megint az $(5,2,3)$ elosztást rendeli. Tegyük fel, hogy valójában csak 6 egységet oszthatunk el, és a már kiosztott $(5,2,3)$ mennyiségek alapján csökkentjük 6-ra az elosztott mennyiséget r felhasználásával. Ha így az $r(\{1,2,3\}, 6, (5,2,3)) = (3,1,2)$ elosztáshoz jutunk, akkor a felülről előállíthatóság megköveteli, hogy az eredeti $(12,8,10)$ igényekből kiindulva a 6 egység elosztása r segítségével közvetlenül a $(3,1,2)$ elosztást szolgáltassa.

1.8. axióma. Az r elosztási szabály *felülről előállítható*, ha bármely (N, t, x) elosztási problémára és bármely $t' \in \mathbb{S}$ mennyiségre

$$0 \leq t \leq t' \leq x_N \Rightarrow r(N, t, x) = r(N, t, r(N, t', x)).$$

Látható, hogy a jobb oldalon az optimista becslésből adódó $r(N, t', x)$ elosztás a második lépés igényvektora, ami úgy interpretálható, hogy a megkapott vagy kiutalt mennyiségekre a szereplők továbbra is igényt tartanak, és ezen módosított igények alapján kell elosztanunk a valóban rendelkezésre álló t mennyiséget.

Az utolsó strukturális invariancia tulajdonság, amellyel foglalkozni kívánunk, az öndualitás. Ennek teljesülése azt jelenti, hogy az adott eljárás alkalmazása ugyanarra az eredményre vezet, ha akár a rendelkezésre álló mennyiséget osztjuk szét, akár a hiányt (túlkeresletet) vonjuk le a szereplők igényeiből. Az öndualitás formális definiálása előtt, vezessük be az elosztási szabály duálisának fogalmát. Az r elosztási szabály *duálisa* az az $\overline{r}$ elosztási szabály, amelyre

$$\overline{r}(N, t, x) = x - r(N, x_N - t, x)$$

minden (N,t,x) elosztási problémára. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy elosztási szabály duálisának duálisa önmaga, ami nem más, mint $\overline{\overline{r}} = r$. Egy elosztási szabály önduális, ha már a duálisa megegyezik önmagával.

1.9. axióma. Az r elosztási szabály kielégíti az *önduálitás* tulajdonságát, ha bármely (N,t,x) elosztási problémára

$$r(N,t,x) = x - r(N, x_N - t, x), \quad \text{vagy másképpen} \quad r = \overline{r}.$$

Az öndualitás megkövetelése akkor indokolt, ha nem világos, hogy a nyereségek vagy a veszteségek szem előtt tartása a fontosabb.

Végül két stratégiai jellegű tulajdonságot fogalmazunk meg. Az *összefogásbiztosság* megköveteli, hogy a szereplők összefogása (azaz olyan koalíciók alkotása, amelynek szereplői az elosztási problémában egy szereplőként lépnek fel az egyéni igényeik összegeként kapott összigénnyel) nem változtat az összefogásban résztvevő szereplők által kapott összmennyiségen. Például, ha az $(\{1,2,3,4\}, 20, (10,16,2,12))$ elosztási problémához az r elosztási szabály az $(5,8,1,6)$ elosztást rendeli, akkor összefogásbiztosság esetén az $(\{1,2,4\}, 20, (10,18,12))$ elosztási problémához – amelyben 2 reprezentálja a 2 és 3 szereplők által alkotott koalíciót – r-nek az $(5,9,6)$ elosztást kell rendelnie. Rátérve az összefogásbiztosság definíciójára, legyen a szűkített probléma szereplőhalmaza $M \subset N$, akik közül valamelyik $m \in M$ szereplő képviseli az általa és az $N \setminus M$-beli szereplők által alkotott koalíciót, amelynek az összigénye $\sum_{i \in (N \setminus M) \cup \{m\}} x_i$. Fordítva, az M szereplőhalmazból kiindulva az $m \in M$ szereplőnek az $(N \setminus M) \cup \{m\}$ szereplők halmazára történő felbomlására (osztódására) is gondolhatunk.

1.10. axióma. Az r elosztási szabály *összefogásbiztos*, ha bármely (N,t,x) elosztási problémára, bármely $M \subset N$ részhalmazra és bármely $m \in M$ szereplőre

$$r_m(N,t,x) + \sum_{i \in N \setminus M} r_i(N,t,x) = r_m(M,t,x'),$$

ahol $x' \in \mathbb{S}^M$, $x'_i = x_i$ minden $i \in M \setminus \{m\}$-re és $x'_m = \sum_{i \in (N \setminus M) \cup \{m\}} x_i$.

Az adózás példáját tekintve a vállalatok fuzionálhatnak, amit egy adótörvény megelőzhet egy összefogásbiztos adószámítási eljárás előírásával.

A másik stratégiai tulajdonság a *csalásbiztosság*, amely akkor játszik szerepet, ha a szereplők x igényei nem figyelhetők meg, nem ellenőrizhetők, és így az elosztásnál csak a szereplők igénybejelentéseivel dolgozhatunk. Ekkor nyilván a szereplők érdekében állhat a valódi igényeiktől eltérő mennyiség bejelentése. Egy r elosztási szabály akkor csalásbiztos, ha a szereplők önként is valódi igényeiket jelentik be. A csalásbiztosság formális definíciójától ebben a fejezetben eltekintünk, mivel ehhez az egyes szereplőknek képesnek kell lenniük különböző kapott mennyiségek összehasonlítására. A modellkeretünk alapján csak annyit tudunk, hogy mindenki a valódi igényét szeretné megkapni. Viszont további információ hiányában nem tudhatjuk például, hogy valaki inkább egy egységgel kevesebbet szeretne kapni, vagy öt egységgel többet.[5] A csalásbiztosság definiálására visszatérünk a következő fejezetben.

Adózás esetén az adóalanyok próbálkozhatnak például a bevétel eltitkolásával, amit a gyakorlatban ellenőrzéssel és megfelelő szankciókkal próbálunk megakadályozni, azonban az adócsalást teljes mértékben csak egy csalásbiztos adószámítási eljárás előzheti meg. Megjegyzendő, hogy a szereplők számos helyzetben nem manipulálhatnak az x igényekkel, mint például egy csődbement cég hitelezői és részvényesei sem, hiszen követeléseiket hiteles dokumentumokkal kell igazolniuk. Ebből a példából is érzékelhető, hogy az egyes gyakorlati problémákra alkalmazandó elosztási szabályokkal szemben eltérő tulajdonságok követelendők meg. A folytonos elosztási problémákkal a 2. fejezetben foglalkozunk, míg a diszkrét elosztási problémákkal a 3. fejezetben.

1.4. Néhány egyszerű összefüggés

Ebben az alfejezetben az elosztási szabályokra vonatkozó tulajdonságok között fennálló összefüggéseket ismertetünk. Az itt tárgyalt összefüggések folytonos és diszkrét elosztási eljárásokra is teljesülnek. A probléma-specifikus állításokat a következő két fejezetben tárgyaljuk.

Az első állításunk az összefogásbiztos elosztási eljárás duálisára vonatkozik.

1.1. állítás. *Az r elosztási szabály pontosan akkor összefogásbiztos, ha a duálisa is az.*

Bizonyítás. Mivel $r = \overline{\overline{r}}$, elég az odafele irányt bizonyítani. Indirekte tegyük fel, hogy bár r összefogásbiztos $\overline{r}$ nem az. Ekkor van olyan (N, t, x) elosztási probléma, $M \subset N$ és $m \in M$, hogy

$$\overline{r}_m\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right) + \sum_{i\in N\setminus M} \overline{r}_i\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right) \neq \overline{r}_m\left(M, t, (x'_i)_{i\in M}\right), \quad (1.1)$$

ahol $x' \in \mathbb{S}^M$, $x'_i = x_i$ minden $i \in M \setminus \{m\}$-re és $x'_m = \sum_{i\in(N\setminus M)\cup\{m\}} x_i$. Az (1.1) egyenlőtlenségben a duális elosztási szabály definícióját figyelembe véve

$$x_m - r_m(N, x_N - t, x) + \sum_{i\in N\setminus M} \left(x_i - r_i\left(N, x_N - t, x\right)\right) \neq x'_m - r_m\left(M, x'_M - t, x'\right), \quad (1.2)$$

[5] A felesleges mennyiségtől történő megszabadulás költséges lehet.

amiből $x'_m = x_m + \sum_{i\in N\setminus M} x_i$ és $x'_M = x_N$ miatt adódik

$$r_m\left(M, x_N - t, x'\right) \neq r_m\left(N, x_N - t, x\right) + \sum_{i\in N\setminus M} r_i\left(N, x_N - t, x\right),$$

ami ellentmond r összefogásbiztosságának. $\square$

Az összfogásbiztos elosztási szabályok szinte nyilvánvaló tulajdonsága, hogy bármely szereplő elosztása közvetlenül csak a saját és a többi szereplő összigényétől függ, míg független azok megoszlásától.

1.2. állítás. *Ha r egy összefogásbiztos elosztási szabály, akkor bármely (N, t, x) elosztási probléma, bármely $i \in N$ szereplő mellett az $(\{i, k\}, t, x')$ elosztási problémát – ahol $k \in N \setminus \{i\}$, $x'_i = x_i$ és $x'_k = x_N - x_i$ – tekintve*

$$r_i(N, t, x) = r_i(\{i, k\}, t, x').$$

Bizonyítás. Legyen (N, t, x) egy elosztási probléma, $M = \{i, k\} \subset N$, $x' \in \in \mathbb{S}^M$, $x'_i = x_i$ és $x'_k = x_N - x_i$. Az összefogásbiztosság miatt $r_{N\setminus\{i\}}\left(N, t, x\right) = = r_k\left(M, t, x'\right)$, ahol az igényvektorokhoz hasonlóan $r_{N\setminus\{i\}}$ az r vektorértékű függvény $N \setminus \{i\}$-beli komponenseinek összegét jelöli. Mivel az elosztott összmennyiség mindkét elosztási problémában t, az i-nek mindkét elosztásban a fennmaradó, tehát azonos mennyiség jut. Ezért $r_i(N, t, x) = = r_i(\{i, k\}, t, x')$. $\square$

1.5. Gyakorló feladatok

1.1. feladat. Igazolja, hogy ha r alulról előállítható, akkor a duálisa felülről előállítható!

1.2. feladat. Igazolja, hogy bármely összefogásbiztos elosztási szabály esetén

$$x_i = 0 \Rightarrow r_i(N, t, x) = 0$$

bármely (N, t, x) elosztási problémára és bármely $i \in N$ szereplőre!

1.3. feladat. Igazolja, hogy bármely összefogásbiztos elosztási szabály kielégíti az egyenlők azonos elbánásának elvét!

1.4. feladat. Igazolja, hogy bármely összefogásbiztos elosztási szabály kielégíti a következő monotonitási tulajdonságot:

$$x_i < x_j \Rightarrow r_i(N, t, x) < r_j(N, t, x)$$

bármely (N, t, x) elosztási problémára és bármely két $i \neq j \in N$ szereplőre!

2. fejezet

Folytonos elosztási szabályok matematikai jellemzése

Ebben a fejezetben kizárólag folytonos elosztási problémákkal foglalkozunk. Megadjuk az arányos, az egyenletes nyereség, az egyenletes veszteség és a talmudi eljárás néhány érdekesebb jellemzését. A szabályok legérdekesebb[1] karakterizációját (jellemzését) bizonyítjuk, és ismertetünk néhány további karakterizációt is. A karakterizációk összefoglaló áttekintéseit adják Moulin (2002a) és Thomson (2003).

Mivel számos eredmény az adóztatás problémáján szemléltethető, ezért először beillesztjük az adóztatást az egyszerű modellkeretünkbe. Legyen N az adóalanyok halmaza, x_i az $i \in N$ adóalany éves adózandó jövedelme és t az alanyok adózott éves összjövedelme. Ekkor $x_N - t$ az állami feladatok ellátásához szükséges forrás összege, azaz az adóalanyok által befizetendő adó, és y_i az $i \in N$ adóalany éves adózott jövedelme. A modell elhanyagolja a dinamikus összefüggéseket, így például az adórendszer jövedelemre gyakorolt hatását. Mégis látni fogjuk, hogy ez az egyszerű statikus modell is számos tanulsággal szolgálhat.

2.1. Nevezetes folytonos elosztási szabályok

Az egyik legkézenfekvőbb elosztási szabály az arányos (proportional) elosztási szabály, amely a rendelkezésre álló mennyiséget az igényekkel arányosan osztja el.

[1] Míg ennek megítélése az arányos, az egyenletes nyereség és a talmudi szabályok esetén nagyjából egységes, mégis valamelyest a szerző szubjektív értékítéletét tükrözi.

2.1. definíció. A *pro*-val jelölt *arányos* elosztási szabály egy tetszőleges (N,t,x) elosztási problémához minden $i \in N$-re a

$$pro_i\,(N,t,x) = \begin{cases} t\frac{x_i}{x_N}, & \text{ha } x_N > 0 \text{ és} \\ 0, & \text{ha } x_N = 0 \end{cases}$$

elosztást rendeli.

Megjegyzendő, hogy bármely elosztási szabály esetén $x_N = 0$-ból szükségszerűen következik $r_N(N,t,x) = 0$. Például az európai kultúrában az arányos elosztásnak erős gyökerei vannak. A következő alfejezet rámutat az arányos elosztási szabály előnyeire és hátrányaira. Mint látni fogjuk, más kultúrákban az arányos elosztás jóval kisebb szerepet játszik. Érdemes megjegyezni, hogy diszkrét elosztási problémákra az arányos elosztási szabály korlátozottan, illetve csak közelítőleg vagy várható értékben alkalmazható. Ezekkel a megközelítésekkel a következő két fejezetben foglalkozunk.

A következő két nevezetes elosztási szabály, az egyenletes nyereség és az egyenletes veszteség elosztási szabályok, egyfajta egalitariánus (egyenlőségpárti) elosztást eredményeznek. Az egyenletes nyereség (uniform gains) mindenkinek azonos mennyiséget igyekszik juttatni, figyelembe véve, hogy a túl alacsony igényű szereplőknek fölösleges az egyenlőségi szintnek megfelelő mennyiséget juttatni, míg az egyenletes veszteség szabály mindenkitől azonos mennyiséget igyekszik elvonni. Az egyenletes nyereség szabály Maimonidész szabályaként is ismert az irodalomban.[2]

2.2. definíció. Az *ug*-vel jelölt *egyenletes nyereség* elosztási szabály az (N,t,x) elosztási problémához az

$$ug_i\,(N,t,x) = \min\{\lambda, x_i\}, \text{ ahol } \sum_{i\in N} \min\{\lambda, x_i\} = t,$$

elosztást rendeli.

Az egyenletes nyereség eljárást egy számpéldán is szemléltetjük. Legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $t = 90$ és $x_1 = 30$, $x_2 = 20$, $x_3 = 45$, $x_4 = 15$. Keressük meg a legkisebb igényű szereplőt, amely a 4. Mint látható, 15-öt az összes szereplőnek juttathatunk, ezért első lépés után legyen $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 15$. Ezzel 4 igényét maradéktalanul kielégítettük és még maradt 30 elosztandó egység. A második legalacsonyabb igényű szereplő a 2, akinek a pótlólagos igénye 5. Vegyük észre, hogy mindhárom szereplőnek még adható 5 egység, és ezért az elosztás $y_1 = y_2 = y_3 = 20$, $y_4 = 15$-re módosul, amely után még mindig marad 15 kiosztandó egység. Mivel az 1-nek a pótlólagos igénye 10 és ennyi már nem adható mindkét további igényeket támasztó szereplőnek,

[2] Maimonidész XII. századi filozófus, orvos és rabbi.

ezért a 15 egységet egyenlően osztjuk el a két szereplő között. Így megkapjuk az $y_1 = 27{,}5$, $y_2 = 20$, $y_3 = 27{,}5$, $y_4 = 15$ végső elosztást, amelyhez az egyenletes elosztást definiáló képletben szereplő $\lambda = 27{,}5$ érték tartozik.

Az egyenletes veszteség (uniform losses) elosztási szabály az egyenletes nyereség eljárástól abban különbözik, hogy az igényekből elvonandó mennyiségeket igyekszik kiegyenlíteni, a kiosztandó mennyiségekkel szemben. Ha az összes szereplőtől azonos mennyiségeket vonnánk el, akkor előfordulhatna, hogy az alacsonyabb igényű szereplőknek negatív mennyiségeket juttatnánk, ezért az egyenletes veszteség eljárás megadásakor szükségessé válik egy nemnegativitási korlát beépítése.

2.3. definíció. Az ul-lel jelölt *egyenletes veszteség* elosztási szabály az (N, t, x) elosztási problémához az

$$ul_i\,(N,t,x) = \max\{x_i - \mu{,}0\}, \quad \text{ahol} \quad \sum_{i \in N} \max\{x_i - \mu{,}0\} = t,$$

elosztást rendeli.

A μ értéke a nemnegativitási feltétel figyelembe vétele mellett a mindenkitől elvonandó mennyiség értéke. Az előző példa alapján nézzük meg, milyen megoldást eredményez az egyenletes veszteség szabály alkalmazássa. Először is határozzuk meg az elvonandó mennyiséget, amely $20 = 110 - 90$. Ha lehetséges, akkor osszuk szét az elvonandó mennyiséget a négy szereplő közt, tehát szereplőnként 5 egységet kellene elvonnunk, ami az igényeket figyelembe véve lehetséges is, így $\mu = 5$ és $y_1 = 25$, $y_2 = 15$, $y_3 = 40$, $y_4 = 10$. Az egyenletes nyereség és az egyenletes veszteség elosztási szabályok jelentősége, az egyenlőség elvén túl, számos érdekes jellemzéssel támasztható alá, amelyek közül néhányat a későbbiekben be is mutatunk. Az arányos elosztási szabályhoz hasonlóan, ez utóbbi két eljárás diszkrét elosztási problémák esetén kizárólag speciális esetekben valósítható meg pontosan.

A következő két szabály bevezetése előtt nézzük meg a Talmudban[3] található alábbi kétszemélyes elosztási problémát, amelyre definiáljuk a vitatott ruha-eljárást.

2.1. példa. Ketten osztozkodnak egy ruhadarabon, figyelembe véve, hogy az egyikük az egészet követeli, míg a másik csak a felét.

A Talmud szerint az egész ruhadarabra igényt formáló személy a ruhadarab háromnegyedét, míg a másik személy csak a ruhadarab negyedét kapja. Ez az arányosság elvéhez szokott olvasó számára meglepő megoldás. Arisztotelész[4]

[3] A Talmud a zsidó büntető-, polgári és vallásjogi döntések alapjául szolgáló gyűjtemény, amelyet az időszámításunk szerinti első öt évszázad folyamán szerkesztettek egybe.

[4] Arisztotelész i.e. IV. századi athéni folozófus és tudós.

szerint a követelések irányulhatnak a jószág jól meghatározott részeire vagy a jószág egészére. Az előbbi eset vezet a vitatott ruha, míg az utóbbi az arányos elosztási szabályhoz. A vitatott ruha-szabály szerint a kettőjük által nem vitatott részt megkapja az első szereplő, hiszen az egyik felére csak ő tart igényt. A másik felét mindketten szeretnék, és ezért ezen fele-fele arányban osztozzanak. Tehát ily módon megkapjuk a Talmud szerinti három az egyhez arányú elosztást.

A 2.1. példa talmudi megoldásaként adódó kétszemélyes elosztási eljárást a következőképpen definiálhatjuk.

2.4. definíció. Adott az $(\{1,2\}, t, (x_1, x_2))$ elosztási probléma, ahol $t \leq x_1 + x_2$. A nem vitatott rész $uc_i = (t - x_j)^+$ mindkét $i = 1{,}2$ és $j \neq i$ szereplő esetén.[5] Mindkét szereplő megkapja a nem vitatott részét és a vitatott rész felét, azaz

$$y_i = uc_i + \frac{t - uc_1 - uc_2}{2},$$

mindkét $i = 1{,}2$ szereplő esetén.

A továbbiakban a vitatott ruha-elosztási szabály alatt mindig csak az így definiált kétszereplős elosztási szabályt értjük. A vitatott ruha-szabály többszereplős elosztási problémákra értelmezett egyes kiterjesztéseire külön néven fogunk hivatkozni. Könnyen meggondolható, hogy a vitatott ruha-elosztási szabály erőforrás-monoton. Legyen ehhez $x_k = \min\{x_1, x_2\}$ és $x_l = \max\{x_1, x_2\}$. Ekkor $t \leq x_k$ mennyiségekre $y_1 = y_2 = t/2$, hiszen mindketten igényt tartanak az egész mennyiségre, ezért felezendő a rendelkezésre álló mennyiség. Az $x_k < t \leq x_l$ esetben $uc_k = 0$, $uc_l = t - x_k$, és ezért $y_k = x_k/2$ és

$$y_l = t - x_k + \frac{t - 0 - (t - x_k)}{2} = t - \frac{x_k}{2}.$$

Másképpen fogalmazva, a kisebb igényű szereplő igényén egyenlő arányban osztoznak, majd a fennmaradó mennyiség a nagyobb igényű szereplőhöz kerül. Ellenőrizhető, hogy bármely rögzített (x_1, x_2) igénypárra uc folytonos t-ben a $t = x_k$ helyen. Egy újabb töréspont akkor következik be, ha t meghaladja x_l-t, mivel ekkor a fennmaradó $t - x_l$ már nem vitatott, és ezért ezen megint egyenlő arányban osztoznak. Tehát $x_l < t$ esetén

$$\begin{aligned} y_k &= t - x_l + \frac{t - (t - x_l) - (t - x_k)}{2} = \frac{x_k}{2} + \frac{t - x_l}{2} \quad \text{és} \\ y_l &= t - x_k + \frac{t - (t - x_l) - (t - x_k)}{2} = \frac{x_l}{2} + \frac{t - x_k}{2}, \end{aligned}$$

azaz a szereplők megkapják az igényeik felét és a másik által nem igényelt mennyiség felét. Ellenőrizhető, hogy bármely rögzített (x_1, x_2) igénypárra uc

[5] Az uc a uncontested rövidítése.

folytonos t-ben a $t = x_l$ helyen. Mivel t-ben mindhárom tartományban monoton növő és a tartományhatárokon t-ben folytonos az elosztott mennyiség, a vitatott ruha-elosztási szabály erőforrás-monoton a kétszemélyes elosztási problémák halmazán.

Most rátérünk a vitatott ruha-szabály két lehetséges kiterjesztésére. Az első az úgynevezett talmudi elosztási szabály,[6] amely definíciója alapján meglepő lehet számunkra. Az eljárás eltérően jár el attól függően, hogy a rendelkezésre álló mennyiség meghaladja-e az összigény felét vagy sem. Ha nem, azaz $t \leq x_N/2$, akkor az egyes szereplők igényeinek felét alapul véve, alkalmazzuk az egyenletes nyereség eljárást. Ellenkező esetben, azaz ha $t > x_N/2$, akkor mindenki megkapja az igénye felét, a fennmaradó mennyiséget az egyenletes veszteség eljárás segítségével osztjuk el úgy, hogy megint a szereplők igényeinek felét vesszük alapul. Ezzel lényegében az összigény feléig a kisebb igényűeknek „kedvezünk", míg azon túl a nagyobb igényűeknek, ami az egyenletes nyereség és veszteség szabályok alkalmazásaiból adódik. A rövid felvezetés után megadjuk a talmudi szabály definícióját.

2.5. definíció. Az $\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right)$ elosztási problémához a cg talmudi elosztási szabály az egyes szereplőknek az

$$y_i = ug_i\left(N, t, \left(\frac{x_i}{2}\right)_{i\in N}\right), \text{ ha } 0 \leq t \leq \frac{x_N}{2} \text{ és}$$
$$y_i = \frac{x_i}{2} + ul_i\left(N, t - \frac{x_N}{2}, \left(\frac{x_i}{2}\right)_{i\in N}\right), \text{ ha } \frac{x_N}{2} < t \leq x_N.$$

mennyiségeket juttatja ($i \in N$).

A talmudi eljárás elnevezés Aumann–Maschlernek (1985) köszönhető. Az eljárás megadását a Talmudban megtalálható (lásd a 2.1. táblázatot) három elosztási probléma és a Talmud szerint hozzájuk rendelt elosztásuk motiválták. A történet szerint három hitelező rendre 100, 200 és 300 egységet kölcsönözött egy tönkrement személynek. A felosztandó vagyon értéke 100, 200 vagy 300. Ha ránézünk a 2.1. táblázat szerinti megoldásokra, akkor azt látjuk, hogy az első elosztás egyenletes, a harmadik elosztás arányos és a második elosztás pedig eléggé rejtélyesnek tűnik. Aumann–Maschler (1985) eredményei előtt a Talmudban adott megoldások megmagyarázhatatlanok voltak, egyesek már tévedésre is gondoltak, és az ismeretlen elvek alapján a talmudi ajánlás szerinti elosztás más problémákra történő kiterjesztése reménytelennek tűnt. Viszont a 2.1. táblázat elosztási problémáit a 2.5. definíció szerint megoldva pontosan a táblázatban szereplő elosztások adódnak. Arra, hogy a talmudi szabály a vitatott ruha-elosztási szabály kiterjesztése, a 2.4. alfejezetben térünk vissza.

[6] A talmudi szabály az irodalomban széles körben contested garment szabály néven is ismert, amely okból kifolyólag cg-vel rövidítjük a talmudi szabályt.

2.1. táblázat. Talmudi ajánlás (forrás: Aumann–Maschler, 1985)

Vagyon\Adósság	100	200	300
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

Az, hogy a 2.1. táblázatban megadott három elosztási problémára és megoldásaira „illeszthető" egy elosztási szabály, nem meglepő. A talmudi eljárás azonban kitüntetett szerepet játszik, mint azt a 2.4. alfejezetben meg fogjuk mutatni, majd további érveket szolgáltat a kooperatív játékelmélettel foglalkozó fejezet is. A talmudi eljárás és az utolsó bemutatásra kerülő nevezetes folytonos elosztási szabály definíciójában kulcsfontosságú a kétszereplős vitatott ruha-eljárás egy alternatív számítási módja:

(i) Aki előbb érkezik, megkapja a rendelkezésre álló mennyiség erejéig a teljes követelését. A fennmaradó összeget kapja a később érkező.

(ii) Legyen mindkét érkezési sorrend azonosan valószínű, ezért a szereplők által kapott mennyiségek a két érkezési sorrendkor kapott mennyiségek számtani átlagai.

Igazolható (lásd a 2.3. feladatot), hogy az ily módon értelmezett elosztási eljárás valóban megegyezik a 2.4. definícióval adott vitatott ruha-eljárással. Ennek ismeretében kézenfekvő a kétszereplős esetre értelmezett vitatott ruhaeljárás alábbi kiterjesztése n szereplőre:

(i) Egy rögzített érkezési sorrendet tekintve, az n szereplőt érkezésük sorrendjében szolgáljuk ki úgy, hogy amíg ezt a fennmaradó készlet lehetővé teszi, a szereplők teljes igényeit kielégítjük. Ekkor, kivételes esetektől eltekintve, egy szereplő igényét csak részben tudjuk kielégíteni, és a nála később érkező szereplőknek már nem marad semmi.

(ii) Legyen az összes lehetséges $n!$ érkezési sorrend azonosan valószínű, ezért a szereplők által kapott mennyiségek legyenek az összes lehetséges érkezési sorrendhez tartozó mennyiségek számtani átlagai.

Nyilvánvaló, hogy az ily módon definiált eljárás a vitatott ruha-eljárás egyik kiterjesztése. E kiterjesztés[7] problematikájára a következő példa mutat rá:

[7] A megadott eljárás az elosztási problémára a Shapley-értéket számolja ki. A Shapley-értéket a kooperatív játékelmélettel foglalkozó fejezetben tárgyaljuk.

2.2. példa. Tekintsük az $(\{1, 2\}, 100, (100, 200))$ és az $(\{1, 2, 3, 4\}, 200, (100, 100, 200, 200))$ problémákat.

A 2.2. példa első elosztási problémája egy kétszereplős feladat, amelyre mindkét úton az (50,50) elosztás adódik. A 2.2. példa második elosztási problémájára egy 100 igényű szereplő a teljes igényelt mennyiségét megkapja, ha elsőnek érkezik (6 eset), vagy másodiknak érkezik úgy, hogy csak a másik kis igényű szereplő előzi meg (2 eset). Különben a kis igényű szereplő semmit sem kap. Figyelembe véve, hogy a két 200 igényű szereplő azonos mennyiséget kap, az érkezési sorrendekhez tartozó elosztások átlagaként a $(33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}, 66\frac{2}{3}, 66\frac{2}{3})$ elosztás adódik. Ha összehasonlítjuk a két elosztási feladatot, akkor a másodikat az első „megduplázásának" tekinthetjük. A konzisztencia ekkor megkövetelné, hogy a négyszereplős megoldásból egy-egy 100 és 200 igényű szereplőre szorítkozva 100 egységet szétosztva az első kétszereplős elosztási problémára kapott elosztással megegyező elosztást kapjuk. A 2.2. példából látható, hogy a véletlen érkezési sorrenden alapuló eljárás a kétszereplős vitatott ruha-eljárás egyfajta inkonzisztens kiterjesztését adja. A 2.2. példára a talmudi elosztást is meghatározva megállapíthatjuk, hogy a talmudi eljárás egy, a véletlen eljárástól különböző eredményt szolgáltató eljárás. A 2.4. alfejezetben megmutatjuk, hogy a talmudi eljárás a kétszereplős vitatott ruha-eljárás egy konzisztens kiterjesztése.

Az alfejezetet a véletlen érkezési sorrendeken alapuló eljárás formális definíciójával zárjuk.

2.6. definíció. Az (N, t, x) elosztási problémához a *véletlen érkezéses elosztási szabály* az $i \in N$ szereplőnek az

$$y_i = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \min \left\{ x_i, \max \left(t - \sum_{j \in N, \pi(j) < \pi(i)} x_j, 0 \right) \right\},$$

mennyiséget juttatja, ahol $\Pi(N)$ az $N \to N$-beli permutációk halmazát jelöli.

A fizikai okfejtések iránt fogékony olvasók számára érdekes lehet, hogy az egyes elosztási szabályok hidraulikusan is definiálhatók, az egyes edények formáinak kialakításán keresztül. E téren általában lásd Kaminski (2000) és a talmudi szabály tekintetében pedig lásd Fleiner–Sziklai (2012).

2.2. Arányos elosztási szabály karakterizációja

Kezdjünk először az arányos elosztási szabály jellemzésével.

2.1. tétel (O'Neill, 1982)**.** *Tegyük fel, hogy az r elosztási szabály bármely $N \subset \mathcal{N}$ véges és nemüres halmazra (t, x)-ben folytonos. Ekkor a legalább* *háromszereplős elosztási problémák halmazán az arányos elosztási szabály az egyetlen részrehajlásmentes és összefogásbiztos elosztási szabály.*

Bizonyítás. Az arányos elosztási szabály nyilvánvalóan részrehajlásmentes, továbbá összefogásbiztos, hiszen bármely $S \subseteq N$ koalíció esetén

$$\sum_{i \in S} \frac{x_i}{x_N} t = \frac{\sum_{i \in S} x_i}{x_S + x_{N \setminus S}} t.$$

Annak igazolása, hogy a részrehajlásmentesség és az összefogásbiztosság implikálja az arányos elosztást, valamivel nehezebb. Legyen $N = \{1, \ldots, n\}$, t és x^* rögzített, ahol x^* az x_N összigény. Továbbá legyen $f(x) = r_1(\{1{,}2\}, t, (x, x^* - x))$. Vegyük észre, hogy rögzített t és x^* mellett r összefogásbiztossága miatt az 1.2. állítás alapján

$$f(x) = r_1\left(\{1{,}2\}, t, (x, x^* - x)\right) = r_1\left(N, t, (x, x_2, \ldots, x_n)\right)$$

bármely $x \in [0, x^*]$-ra.

Jelölje s az 1 és 2 szereplők koalícióját[8] és tekintsük az $(\{1{,}2{,}3\}, t, (x_1, x_2, x^* - x_1 - x_2))$ és az $(\{s{,}3\}, t, (x_1 + x_2, x^* - x_1 - x_2))$ elosztási problémákat. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x_1) &= r_1\left(\{1{,}2{,}3\}, t, (x_1, x_2, x^* - x_1 - x_2)\right) \text{ és} \\ f(x_1 + x_2) &= r_s\left(\{s{,}3\}, t, (x_1 + x_2, x^* - x_1 - x_2)\right), \text{ továbbá} \\ f(x_2) &= r_2\left(\{1{,}2{,}3\}, t, (x_1, x_2, x^* - x_1 - x_2)\right), \end{aligned}$$

mivel r részrehajlásmentes. Ezért az összefogásbiztosságából adódik az $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ Cauchy-féle függvényegyenlet, melynek – mivel r folytonossága miatt f is folytonos – megoldásai az $f(x) = cx$ alakú függvények.

Végül rögzített t és $x^* = x_N$ mellett $r_i(N, t, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(x_i) = cx_i$ bármely $i \in N$ szereplőre, és így $\sum_{i=1}^n cx_i = t$-ből adódóan $c = \frac{t}{x^*}$. □

Megjegyzendő, hogy de Frutos (1999) és Ju–Miyagawa–Sakai (2007) eredményei alapján O'Neill tételéből elhagyható a részrehajlásmentesség és a folytonossági feltétel. Terjedelmi okokból O'Neill tételének Young (1994) szerinti változatát ismertettük.

Speciálisan az adózási problémára gondolva, O'Neill tétele szerint csak az egykulcsos adórendszer semleges az alanyok összefogásával, illetve szétválásával szemben. Az egykulcsos adórendszer ilyen jellegű jó tulajdonsága nem is meglepő, de az, hogy bármely más adórendszer összefogásra, illetve szétválásra ösztönözhet, már nem ilyen nyilvánvaló. Nem meglepő, hogy a társasági adó egykulcsos, hiszen több vállalat viszonylag könnyen egyesülhet, illetve egy

[8] $s = 1$ vagy $s = 2$.

vállalat könnyen széteshet több vállalatra, ha az adózási szempontból kifizetődő. Természetesen a különféle adókedvezmények miatt valójában a társasági adó meghatározása sem az arányos elosztási szabály szerint történik, ami sokszor az O'Neill tételében szereplő részrehajlás-mentességi feltétel sérüléséhez is vezethet. A személyi jövedelemadó esetében az egyének összefogási lehetősége már erősen behatárolt. Elképzelhető ugyan, hogy rokonok, barátok stb. más javára (pl. alacsonyabb jövedelmű házastárs javára) fizetetnek ki bizonyos jövedelmeket, de bérjövedelmek esetében ez szinte elképzelhetetlen. Így O'Neill tétele a személyi jövedelemadó törvény számára kevés mondanivalóval bír.

2.3. Egyenletes nyereség elosztási szabály karakterizációja

Térjünk rá a másik stratégiai tulajdonságra, a csalásbiztosságra. Emlékeztetőül: egy eljárás csalásbiztos, ha mindenkinek érdekében áll valódi igényét kinyilvánítani. Az arányos elosztási szabály nyilván nem lesz csalásbiztos, hiszen bármely szereplő egyoldalúan inkább a valódi igényénél nagyobb igényt jelent be, ezzel megnövelve az arányos részesedését.[9] A csalásbiztos eljárások körét Sprumont (1991) határolta be.

Sprumont (1991) eredményének ismertetése előtt jegyezzük meg, hogy a hamis igények bejelentésének lehetősége miatt, a szereplők valódi igényeiknél nagyobb mennyiségekhez is juthatnak, ami fölösleges mennyiségek eltávolításának, raktározásának, megsemmisítésének költségével járhat. A kapott mennyiségek összehasonlítása érdekében Sprumont (1991) felruházta az egyes szereplőket a mennyiségek fölötti $(\succeq_i)_{i\in N}$ egycsúcsú és folytonos preferenciarendezésekkel. Az *egycsúcsúság* alatt az értendő, hogy bármely szereplő a valódi igényét szeretné leginkább megkapni, míg ennél nagyobb mennyiségek, a mennyiség növekedésével egyre kevésbé kedveltek, illetve hasonlóan, a valódi igénynél kisebb mennyiségek a mennyiség csökkenésével egyre kevésbé kedveltek. A *preferenciarendezés folytonossága* egy pusztán technikai jellegű feltétel, amely szerint bármely $x \in [0,t]$ mennyiségre zártak az $\{u \in [0,t] \mid x \succeq_i u\}$ alsó és $\{u \in [0,t] \mid u \succeq_i x\}$ felső nívóhalmazok. Hamis igények bejelentésével elképzelhető, hogy az eredendően deficites esetben is az elosztási szabály egy szufficites esettel szembesül. Ezért a szükséges *hatékonysági feltételt* a következőképpen fogalmazzuk meg: az igénybejelentések alapján deficites esetben mindenki a bejelentett igényénél kevesebbet kap, míg az igénybejelentések alapján szufficites esetben mindenki a bejelentett igényénél többet kap. Ezek után már kimondhatjuk Sprumont (1991) tételét.

[9] Ezzel egy kicsit előreszladtunk, hiszen a csalásbiztosság fogalmát formálisan ebben az alfejezetben fogjuk bevezetni.

2.2. tétel (Sprumont, 1991)**.** *Ha a szereplők preferenciái egycsúcsúak és folytonosak, akkor a hatékony, részrehajlásmentes elosztási szabályok körében az egyetlen csalásbiztos eljárás az egyenletes nyereség elosztási szabály.*

Sprumont tételét Ching (1994) tételének következményeként fogjuk megkapni. Ching jelentősen egyszerűsítette és egyben élesítette Sprumont tételét a folytonossági feltétel elhagyásával és a részrehajlásmentességi feltételnek az egyenlők azonos elbánásának feltételével való helyettesítésével.

Térjünk rá Ching eredményének ismertetésére. Tehát legyenek $\succeq_i$-k $[0,t]$ feletti egycsúcsú preferenciák. Jelölje $\succ_i$ a $\succeq_i$ szigorú részét (azaz $x \succ_i y$ akkor és csak akkor, ha $x \succeq_i y$ és nem $y \succeq_i x$), $\sim_i$ a szimmetrikus részét és $\mathcal{R}$ a $[0,t]$ feletti egycsúcsú preferenciarendezések halmazát. Továbbá az $\succeq_i \in \mathcal{R}$ preferencia csúcsát jelölje $cs(\succeq_i)$ és $\succeq = (\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$ az n szereplő *preferenciaprofilját.* Az $y \in \mathbb{R}^n_+$ elosztás *megvalósítható*, ha $\sum_{i=1}^n y_i = t$. Jelölje Y a megvalósítható elosztások halmazát.

Az eredetileg igényvektorokhoz megvalósítható elosztásokat rendelő elosztási szabályokat kiterjesztjük preferenciaprofilokhoz elosztásokat rendelő szabályokká, azaz a továbbiakban a $\varphi : \mathcal{R}^n \to Y$ típusú függvényeket is elosztási szabályoknak hívjuk. Preferenciaprofilok esetén az egyenlők azonos elbánásának, a hatékonyságnak és a csalásbiztosságnak a következő kiterjesztéseivel dolgozunk:

2.1. axióma. A $\varphi : \mathcal{R}^n \to Y$ elosztási szabály kielégíti az *egyenlők azonos elbánásának* elvét, ha bármely $\succeq \in \mathcal{R}^n$ és bármely $i, j \in N$ esetén $\succeq_i = \succeq_j$ maga után vonja $\varphi_i(\succeq) \sim_i \varphi_j(\succeq)$-t.

2.2. axióma. A $\varphi : \mathcal{R}^n \to Y$ elosztási szabály *hatékony*, ha bármely $\succeq \in \mathcal{R}^n$ esetén nem létezik olyan $y \in Y$, amelyre $y_i \succeq_i \varphi_i(\succeq)$ bármely $i \in N$-re és $y_i \succ_i \varphi_i(\succeq)$ valamely $i \in N$-re.

Megjegyzendő, hogy a hatékonyság Ching-féle megfogalmazása ekvivalens Sprumont megfogalmazásával, azaz bármely $\succeq \in \mathcal{R}^n$-re és $i \in N$-re $cs(\succeq_i) \leq$ $\leq \varphi_i(\succeq)$, ha $\sum_{j=1}^n cs(\succeq_j) \leq t$, illetve $cs(\succeq_i) \geq \varphi_i(\succeq)$, ha $\sum_{j=1}^n cs(\succeq_j) \geq$ $\geq t$. Ching tételének bizonyításakor általában a hatékonyság Sprumont-féle alakját fogjuk használni. A hatékonyság Ching-féle definíciója mellett az szól, hogy a Pareto-hatékonyság hagyományos definíciójának felel meg.

2.3. axióma. A $\varphi : \mathcal{R}^n \to Y$ elosztási szabály *csalásbiztos*, ha bármely $\succeq \in \mathcal{R}^n$-re, $i \in N$-re és $\succeq_i' \in \mathcal{R}$-re $\varphi_i(\succeq) \succeq_i \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i})$.[10]

Szükségünk lesz az egyenletes nyereség elosztási szabály preferenciaprofilokra történő alábbi kiterjesztésére, amelyet szintén ug-vel jelölünk.

[10] $\succeq_{-i}$ a $\succeq$ preferenciapofilból az $i \in N$ szereplő preferenciarendezésének elhagyásával adódó „csonka" preferenciaprofilt jelöli. A $(\succeq_i', \succeq_{-i})$ preferenciaprofilt úgy kapjuk, hogy a $\succeq$ preferenciaprofilban $\succeq_i$-t kicseréljük $\succeq_i'$-re.

2.7. definíció. Bármely $\succeq\in\mathcal{R}^n$-re és $i\in N$-re

$$ug_i(\succeq)=\begin{cases}\max\{cs(\succeq_i),\lambda\}, \text{ ha } \sum_{i=1}^n cs(\succeq_i)\le t, \text{ és}\\ \min\{cs(\succeq_i),\lambda\}, \text{ ha } \sum_{i=1}^n cs(\succeq_i)> t,\end{cases}$$

ahol $\lambda\in\mathbb{R}$ a $\sum_{i=1}^n ug_i(\succeq)=t$ megoldása.

Ezek után már kimondhatjuk Ching (1994) tételét.

2.3. tétel (Ching, 1994)**.** *Az egycsúcsú preferenciarendezések halmazán egy elosztási szabály pontosan akkor bánik azonosan az egyenlőkkel, hatékony és csalásbiztos, ha az az egyenletes nyereség elosztási szabály.*

A tétel bizonyításához szükségünk lesz még egy fogalomra és két lemmára.

2.8. definíció. A $\varphi:\mathcal{R}^n\to Y$ elosztási szabály *csúcsmonoton*, ha bármely $\succeq\in\mathcal{R}^n$-re, $i\in N$-re és $\succeq_i'\in\mathcal{R}$-re $cs(\succeq_i')\le cs(\succeq_i)$ maga után vonja a $\varphi_i(\succeq_i',\succeq_{-i})\le\varphi_i(\succeq)$ egyenlőtlenséget.

A csúcsmonotonitás szerint bármely szereplő kívánt igényének egyoldalú növekedése növeli az elosztási szabály által neki juttatott mennyiséget.

Először belátjuk, hogy a hatékonyság és csalásbiztosság implikálja a csúcsmonotonitást.

2.1. lemma. *Egycsúcsú preferenciák felett egy hatékony és csalásbiztos elosztási szabály egyben csúcsmonoton is.*

Bizonyítás. Legyen φ hatékony és csalásbiztos. Vegyünk egy olyan $\succeq\in\mathcal{R}^n$ preferenciaprofilt, egy olyan $i\in N$ szereplőt és egy olyan $\succeq_i'$ preferenciát, amelyre teljesül a csúcsmonotonitás előfeltétele, azaz $cs(\succeq_i')\le cs(\succeq_i)$.

(i) Nézzük előbb a $\sum_{j=1}^n cs(\succeq_j)\le t$ esetet. Ekkor φ hatékonysága miatt $cs\left(\succeq_i\right)\le\varphi_i\left(\succeq\right)$. Indirekte tegyük fel, hogy a csúcsmonotonitás utófeltétele sérül, azaz $\varphi_i\left(\succeq\right)<\varphi_i\left(\succeq_i',\succeq_{-i}\right)$. Ekkor

$$cs(\succeq_i')\le cs(\succeq_i)\le\varphi_i(\succeq)<\varphi_i(\succeq_i',\succeq_{-i}),$$

amely szerint $\varphi_i(\succeq)\succ_i'\varphi_i(\succeq_i',\succeq_{-i})$, mivel $\succeq_i'$ egycsúcsú. De ez utóbbi reláció azt állítja, hogy a $(\succeq_i',\succeq_{-i})$ preferenciaprofil mellett i-nek érdemes inkább a $\succeq_i$ preferenciáját megadni, azaz i manipulálhat, ami ellentmond φ csalásbiztosságának.

(ii) Térjünk rá a másik $t<\sum_{j=1}^n cs(\succeq_j)$ esetre. φ hatékonysága miatt most $\varphi_j\left(\succeq\right)\le cs\left(\succeq_j\right)$ bármely $j\in N$-re. A (ii) esetet két alesetre bontjuk.

(a) Legyen előbb $t\le cs(\succeq_i')+\sum_{j=1,j\ne i}^n cs(\succeq_j)$. Ekkor φ hatékonysága miatt $\varphi_i\left(\succeq_i',\succeq_{-i}\right)\le cs(\succeq_i')$. Ha $cs(\succeq_i')\le\varphi_i(\succeq)$, akkor készen vagyunk, hiszen az egyenlőtlenségi reláció tranzitivitása adja a csúcsmonotonitást. Vizsgálandó még a $\varphi_i(\succeq)<cs(\succeq_i')$ eset. Ekkor éljünk megint a $\varphi_i\left(\succeq\right)<\varphi_i\left(\succeq_i',\succeq_{-i}\right)$

indirekt feltevéssel. Az eddigi egyenlőtlenségeink és a csúcsmonotonitás előfeltétele alapján

$$\varphi_i(\succeq) < \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) \leq cs(\succeq_i') \leq cs(\succeq_i),$$

tehát $\varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) \succ_i \varphi_i(\succeq)$, azaz i manipulálhat, ami ellentmond a csalásbiztosságnak.

(b) Nézzük (ii) másik $cs(\succeq_i') + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} cs(\succeq_j) < t$ alesetét. Ekkor $cs(\succeq_i') < \varphi_i(\succeq)$, mert ellenkező esetben

$$t = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(\succeq) \leq cs(\succeq_i') + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} cs(\succeq_j)$$

adódna, ami nem állhat fenn a (b) alesetben. Alkalmazzuk újra a $\varphi_i(\succeq) < \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i})$ indirekt feltevést. De ekkor

$$cs(\succeq_i') < \varphi_i(\succeq) < \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}),$$

amely szerint a $\succeq_i'$ egycsúcsúságának a felhasználásával

$$\varphi_i(\succeq) \succ_i' \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}),$$

ami megint a csalásbiztosság sérülését jelentené, azaz ellentmondásra jutottunk. □

A következő lemma szerint hatékony és csalásbiztos elosztási szabályok esetén kizárólag egyetlen szereplő preferenciájának legfeljebb oly mértékű változása, amely mellett a csúcsa továbbra is kisebb, illetve nagyobb marad a kapott mennyiségénél, nem változtat az adott szereplőnek juttatott mennyiségen.

2.2. lemma. *Legyen φ hatékony és csalásbiztos. Ekkor bármely $\succeq \in \mathcal{R}^n$-re, $i \in N$-re és $\succeq_i' \in \mathcal{R}$-re:*

(i) *ha $cs(\succeq_i) < \varphi_i(\succeq)$ és $cs(\succeq_i') \leq \varphi_i(\succeq)$, akkor $\varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) = \varphi_i(\succeq)$, illetve*

(ii) *ha $cs(\succeq_i) > \varphi_i(\succeq)$ és $cs(\succeq_i') \geq \varphi_i(\succeq)$, akkor $\varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) = \varphi_i(\succeq)$.*

Bizonyítás. Csak az (i) esetet bizonyítjuk. Induljunk ki tehát olyan $\succeq \in \mathcal{R}^n$-ből, $i \in N$-ből és $\succeq_i' \in \mathcal{R}$-ből, amelyre $cs(\succeq_i) < \varphi_i(\succeq)$ és $cs(\succeq_i') \leq \varphi_i(\succeq)$ teljesül. $cs(\succeq_i) < \varphi_i(\succeq)$ és φ hatékonysága miatt $cs(\succeq_j) \leq \varphi_j(\succeq)$ bármely $j \in N$-re. Ezért $cs(\succeq_i') \leq \varphi_i(\succeq)$ felhasználásával adódik

$$cs(\succeq_i') + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} cs(\succeq_j) \leq \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\succeq) = t.$$

Ekkor φ hatékonysága miatt $cs(\succeq_i') \leq \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i})$.

Indirekte tegyük fel, hogy $\varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) \neq \varphi_i(\succeq)$. Amennyiben a $\varphi_i(\succeq) < \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i})$ eset állna fenn, akkor $cs(\succeq_i') \leq \varphi_i(\succeq) < \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i})$, és ezért $\varphi_i(\succeq) \succ_i' \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i})$, ami ellentmond φ csalásbiztosságának. Ha pedig a $\varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) < \varphi_i(\succeq)$ eset állna fenn, akkor vegyünk egy olyan $\succeq_i'' \in \mathcal{R}$ preferenciát, amelyre $cs(\succeq_i'') = cs(\succeq_i)$ és $\varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) \succ_i'' \varphi_i(\succeq)$.[11] Ekkor a 2.1. lemma kétszeri alkalmazásával adódik $\varphi_i(\succeq_i'', \succeq_{-i}) = \varphi_i(\succeq)$, amiből $\varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) \succ_i'' \varphi_i(\succeq_i'', \succeq_{-i})$. Ez utóbbi pedig megint ellentmond φ csalásbiztosságának. □

Ezek után rátérünk Ching tételének bizonyítására.

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy az egyenletes nyereség eljárás azonosan bánik az egyenlőkkel, hatékony és csalásbiztos.

Fordítva vegyünk egy φ egyenlőkkel azonosan bánó, hatékony és csalásbiztos elosztási szabályt. Legyen $\succeq \in \mathcal{R}^n$. Ha speciálisan $\sum_{i=1}^n cs(\succeq_i) = t$, akkor φ hatékonysága miatt $\varphi_i(\succeq) = cs(\succeq_i) = ug_i(\succeq)$. A továbbiakban csak a $\sum_{i=1}^n cs(\succeq_i) < t$ esetet vizsgáljuk, mivel a fennmaradó $\sum_{i=1}^n cs(\succeq_i) > t$ eset hasonlóan igazolható.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $cs(\succeq_1) \leq \ldots \leq cs(\succeq_n)$. Tegyük fel indirekte, hogy $\varphi(\succeq) \neq ug(\succeq)$. Ha $\succeq_1 = ... = \succeq_n$, akkor a megvalósíthatóság és az egyenlők azonos elbánásának elve alapján $t = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\succeq) \neq \sum_{i=1}^n ug_i(\succeq) = t$, ami lehetetlen. Tehát $\succeq$-ben kell legalább egy $\succeq_1$ preferenciától eltérő preferenciájú szereplőnek lennie ahhoz, hogy $\varphi(\succeq) \neq ug(\succeq)$ teljesülhessen.

1. lépés. Mivel $\varphi(\succeq) \neq ug(\succeq)$, a megvalósíthatóság és a hatékonyság miatt létezik olyan $j \in N$, amelyre $cs(\succeq_j) \leq \varphi_j(\succeq) < ug_j(\succeq)$. Ha $j = 1$, akkor térjünk át a 2. lépésre. Különben pedig legyen $\succeq_j' = \succeq_1$. A 2.1. lemma alapján $\varphi_j(\succeq_j', \succeq_{-j}) \leq \varphi_j(\succeq)$, és a 2.2. lemma alapján $ug_j(\succeq_j', \succeq_{-j}) = ug_j(\succeq)$. Az eddigiek alapján $\varphi_j(\succeq_j', \succeq_{-j}) < ug_j(\succeq_j', \succeq_{-j})$. Ha $(\succeq_j', \succeq_{-j}) = (\succeq_1, ..., \succeq_1)$, akkor az előző bekezdésbeli gondolatmenettel ellentmondásra jutunk és készen is volnánk. Különben pedig térjünk át a 2. lépésre.

2. lépés. $\varphi_i(\succeq_j', \succeq_{-j}) < ug_i(\succeq_j', \succeq_{-j})$ teljesül $i = j$-re az 1. lépés alapján, továbbá $i = 1$-re az egyenlők azonos elbánása miatt, ha $j > 1$. Ezért a hatékonyság és a megvalósíthatóság miatt van olyan $k \in N \setminus \{1, j\}$, melyre $cs(\succeq_k) \leq ug_k(\succeq_j', \succeq_{-j}) < \varphi_k(\succeq_j', \succeq_{-j})$. Legyen $\succeq_k' = \succeq_1$ és $\succeq_{jk}' = (\succeq_k', \succeq_k')$. A 2.2. lemma alapján $\varphi_k(\succeq_{jk}', \succeq_{-jk}) = \varphi_k(\succeq_j', \succeq_{-j})$, és a 2.1. lemma alapján $ug_k(\succeq_{jk}', \succeq_{-jk}) \leq ug_k(\succeq_j', \succeq_{-j})$. Összegezve

$$ug_k(\succeq_{jk}', \succeq_{-jk}) < \varphi_k(\succeq_{jk}', \succeq_{-jk}).$$

[11] Ilyen $\succeq_i'' \in \mathcal{R}$ preferencia létezik, mivel a $cs(\succeq_i) < \varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) < \varphi_i(\succeq)$ és a $\varphi_i(\succeq_i', \succeq_{-i}) \leq cs(\succeq_i) < \varphi_i(\succeq)$ két lehetséges esethez konstruálható alkalmas $\succeq_i'' \in \mathcal{R}$.

Ha $\left(\succeq'_{jk}, \succeq_{-jk}\right) = (\succeq_1, \ldots, \succeq_1)$, akkor készen vagyunk, hiszen ellentmondásra jutunk a két bekezdéssel korábban alkalmazott gondolatmenettel. Különben pedig alkalmazzuk az 1. lépést a $\left(\succeq'_{jk}, \succeq_{-jk}\right)$ preferenciaprofilra.

Mivel mindkét lépésben preferenciákat helyettesítünk $\succeq_1$-re, véges sok lépés után eljutunk a $(\succeq_1, \ldots, \succeq_1)$ preferenciaprofilhoz, amely a megfelelő lépés végén szolgáltatja az ellentmondást. Tehát $\varphi = ug$. □

2.4. A talmudi szabály karakterizációja

A talmudi elosztási szabály karakterizációjához bevezetünk egy, a konzisztenciánál gyengébb tulajdonságot a kétszereplős vitatott ruha-eljárásra.

2.9. definíció. Egy r elosztási szabály *páronként konzisztens*, ha bármely két szereplőt véve, a kettejük számára juttatott összmennyiségnek az újraelosztása r szerint a kétszereplős elosztási probléma esetén nem változtat az r által kettőjüknek eredetileg juttatott mennyiségeken.

Ezek után megmutatjuk, hogy a kétszereplős vitatott ruha-eljárás egyetlen konzisztens kiterjesztése a talmudi szabály.

2.4. tétel (Aumann–Maschler, 1985)**.** *A 2.5. definícióban megadott cg talmudi elosztási szabály a kétszereplős vitatott ruha-eljárás egyértelmű páronként konzisztens kiterjesztése.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_1 \leq x_2 \leq \leq \ldots \leq x_n$, ezzel egyszerűsítve az indexelést.

Először megmutatjuk, hogy csak legfeljebb egy, a kétszereplős vitatott ruha-szabállyal páronként konzisztens elosztási szabály létezhet. Indirekte tegyük fel, hogy létezik két egymástól eltérő ilyen elosztási szabály. Ekkor van olyan elosztási probléma, és ehhez két olyan $i, j \in N$ szereplő, akik az egyik szerint y_i és y_j, míg a másik szerint z_i és z_j mennyiségeket kapnak úgy, hogy $z_i > y_i$, $z_j < y_j$ és $z_i + z_j \geq y_i + y_j$. A cg-vel való páronkénti konzisztencia miatt $z_i + z_j$ elosztásakor j szereplő z_j-t, míg $y_i + y_j$ elosztásakor y_j-t kap. Mivel $z_i + z_j \geq y_i + y_j$, cg monotonitásából $z_j \geq y_j$ adódik, ami ellentmond a $z_j < y_j$ feltevésünknek.

Mint azt mindjárt látni fogjuk, az alábbi szekvenciális eljárás ekvivalens a talmudi elosztási szabállyal és páronként konzisztens a vitatott ruha-elosztási szabállyal.

1. Tegyük fel, hogy $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ és $n \geq 2$. Legyen $i = 1$ és $y = (0, \ldots, 0)$.

   Mejegyzés: mindegyik szereplő részt vesz az elosztásban és még senki sem kapott t-ből. Az aktuálisan elosztott mennyiségeket y-ban találjuk.

2. Ha $i \leq n$ és $y_N < t$, akkor az $\{i,\ldots,n\}$ szereplők kapjanak $z = \min\{x_i/2 - y_i, (t-y_N)/(n-i+1)\}$ mennyiséget, azaz $y_j = y_j + z$ bármely $j = i,\ldots,n$-re. Legyen $i = i+1$ és lépjünk vissza a 2. pont elejére.

   Megjegyzés: a még az igényük felét meg nem kapott szereplők között elosztjuk egyenletesen a még rendelkezésre álló mennyiséget, ha ez lehetséges, vagy mindegyikőjük annyit kap, hogy a legkisebb igényű szereplő igényének fele ki legyen elégítve.

3. Ha $y_N = t$, akkor készen vagyunk, különben pedig legyen $i = n$.

   Megjegyzés: készen vagyunk, ha már elosztottuk a teljes mennyiséget.

4. Ha $i \geq 2$ és $y_N < t$, akkor az $\{i,\ldots,n\}$ szereplők mindegyike kapjon további $z = \min\{(x_i - y_i) - (x_{i-1} - y_{i-1}), (t-y_N)/(n-i+1)\}$ mennyiséget, azaz $y_j = y_j + z$ bármely $j = i,\ldots,n$-re. Legyen $i = i-1$ és lépjünk vissza 4. pont elejére.

   Megjegyzés: amikor elkezdjük a 4. lépést az $\{i,\ldots,n\}$ szereplők „veszt-esége”, azaz a meg nem kapott mennyiségük azonos. Vegyük észre, hogy az előző körökben i nem kapott pótlólagos mennyiségeket, tehát egyelőre igényének felét kapta meg. Ezek után összevetjük $i-1$ és i veszteségeit, amelyek közül az i vesztesége a nagyobb, hiszen egyelőre mindketten igényeik felét kapták meg. A 4. lépésben i veszteségét $i-1$ veszteségének szintjére kívánjuk csökkenteni pótlólagos juttatással feltéve, hogy egyben az $i, i+1,\ldots,n$ szereplők veszteségszintjei továbbra is azonos szinten tarthatók. Ha ez nem lehetséges, akkor a fennmaradó veszteséget egyenletesen terítjük $i, i+1,\ldots,n$ között, amivel véget is ér az eljárás.

5. Ha $i = 1$ és $y_N < t$, akkor minden szereplő részesüljön további $z = (t-y_N)/n$ mennyiségben, azaz $y_j = y_j + z$ bármely $j = 1,\ldots,n$-re.

   Megjegyzés: az 5. lépésre akkor van szükség, ha még a legkisebb igényű szereplő is részesülhet az igénye felénél nagyobb mennyiségben úgy, hogy végül az összes szereplő vesztesége azonos mértékű lesz.

Vegyük észre, hogy ha $t > x_N/2$, akkor egyből adhatnánk minden $i \in N$ szereplőnek $x_i/2$ mennyiséget, és ugorhatnánk egyből a 4. pontra. Hasonlóan, ha $t \leq x_N/2$, akkor a 4. és 5. pontok fölöslegesek. A második pontban tulajdonképpen lépésről-lépésre elégítjük ki a szereplők igényeinek a felét, ameddig ez lehetséges, ami pontosan a talmudi szabály $ug_i\left(N, t, \left(\frac{x_i}{2}\right)_{i\in N}\right)$ értékeit adja a $t \leq x_N/2$ esetben, illetve az $x_i/2$ értéket, ha $t > x_N/2$. Ez utóbbi esetben az eljárás folyatódik a 4. és 5. pontokkal. A 4. lépés első végrehajtása előtt mindenki megkapta igényének a felét, és az i. lépés megkezdésekor $x_{i-1} - y_{i-1} = x_{i-1}/2$, továbbá az i szereplő kielégítetlen igénye $x_i/2$. Végül figyelembe véve, hogy mivel egy azonos elvonási szint kerül meghatározásra, ezért a fenti algoritmus valóban a talmudi elosztási szabállyal azonos elosztásokat szolgáltat. Az algoritmusból az is látszik, hogy a talmudi eljárás erőforrás-monoton.

Ezek után még igazolandó, hogy a fenti algoritmus páronként konzisztens a vitatott ruha-elosztási szabállyal. Vegyünk két $i, j \in N$ szereplőt, melyekre $x_i \leq x_j$. Ha t elegendően kicsi (azaz $t \leq x_N/2$ vagy a 4. pontban egyikük sem kap további mennyiséget), akkor mindketten az igényeik felét kapják. Ha t-t úgy növeljük tovább, hogy j még kap a 4. pontban, de i már nem, akkor kettőjüket tekintve, az igényeik fele felett leosztott teljes mennyiség j-nél csapódik le. Ha t-t úgy növeljük tovább, hogy mindketten részesülnek további mennyiségben a 4. és az 5. lépésekben, akkor mindketten lépésenként azonos mennyiségekben részesülnek. Mivel az algoritmust szemügyre véve i pontosan akkor részesülhet a 4. és az 5. lépésekben további juttatásokban, ha legfeljebb $x_i/2$ mennyiséget nem kapott meg, és ekkor minden további lépésben i és j azonos mennyiséget kap, ezért a vitatott ruha-elosztási szabály definícióját követő magyarázó szöveg alapján látható, hogy az i és j közötti elosztás a vitatott ruha-szabály szerint történik. □

A fejezetet Moulin (2000) az arányos, az egyenlő nyereség és az egyenlő veszteség elosztási szabályok kitüntetett szerepére rámutató tételével zárjuk. A tételt nem bizonyítjuk.

2.5. tétel (Moulin, 2000). *Ha a szereplők száma legalább három, akkor az egyenlők azonos elbánásának, a homogenitásnak, a konzisztenciának, az alulról előállíthatóságnak és a felülről előállíthatóságnak kizárólag az arányos, az egyenlő nyereség és az egyenlő veszteség elosztási szabályok tesznek eleget.*

A folytonos elosztási problémákra vonatkozó eredmények jó áttekintését adja Moulin (2002a) és Thomson (2003 és 2010). Frissebb ilyen irányú eredményeket ért el többek között Moulin (2008) és Ju–Miyagawa–Sakai (2007).

2.5. Gyakorló feladatok

2.1. feladat. Határozza meg az

(i) $(\{1,2,3,4\}, 30, (5,6,19,20))$ és a

(ii) $(\{1,2,3,4\}, 35, (8,11,16,45))$

elosztási problémák elosztását az arányos, az egyenletes nyereség és az egyenletes veszteség szabályokkal!

2.2. feladat. Határozza meg az

(i) $(\{1,2,3,4\},25,(5,10,20,25))$ és a

(ii) $(\{1,2,3,4\},40,(10,15,20,25))$

elosztási problémák megoldásait a talmudi és a véletlen érkezési sorrenden alapuló szabályokkal!

2.3. feladat. Igazolja, hogy a kétszereplős esetben a két azonos valószínűségű kiszolgálási sorrend alapján meghatározott elosztás (lásd a 2.4. definíciót követő két lépéses eljárást) a vitatott ruha-elosztási szabállyal azonos eredményt szolgáltat!

2.4. feladat. Mutassa meg, hogy az egyenletes nyereség szabály duálisa az egyenletes veszteség szabály, és fordítva!

2.5. feladat. Igazolja, hogy az arányos elosztási szabály önduális!

2.6. feladat. Mutassa meg, hogy az egyenletes nyereség, az egyenletes veszteség és a talmudi elosztási szabály nem összefogásbiztos!

2.7. feladat. Mutassa meg, hogy az arányos, az egyenletes veszteség és a talmudi elosztási szabály nem csalásbiztos!

2.8. feladat. Igazolja a hatékonyság Sprumont-féle és Ching-féle megfogalmazásainak ekvivalenciáját!

3. fejezet

Diszkrét elosztási szabályok matematikai jellemzése

Ebben a fejezetben általános egész értékű (diszkrét) elosztási problémákat vizsgálunk. A mandátumszámítási eljárásokkal, amelyek olyan speciális diszkrét elosztási szabályok, amelyek az arányos elosztást célozzák meg, a következő fejezetben foglalkozunk.

A determinisztikus modellkerettel foglalkozó első alfejezetben megmutatjuk, hogy a strukturális invariancia axiómák a prioritási szabályt implikálják. E negatív eredmény előli menekvési úttal foglalkozik a második alfejezet.

3.1. Diszkrét elosztási problémák

A strukturális invariancia axiómák és a prioritási szabály közötti kapcsolatra Moulin mutatott rá.

3.1. tétel (Moulin, 2000). *A konzisztenciának, az alulról előállíthatóságnak és a felülről előállíthatóságnak pontosan a prioritási szabályok tesznek eleget.*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy a prioritási szabályok eleget tesznek a konzisztenciának, az alulról előállíthatóságnak és a felülről előállíthatóságnak. Az állítás megfordítását négy lépésben igazoljuk.

1. lépés. Adott x_N-re jellemzünk egy adagolási szabályt a tárgyak egyenkénti és egymás utáni elosztásán keresztül, amelyre adagolási útként fogunk hivatkozni.

Mivel az alulról előállíthatóságból következik az erőforrás-monotonitás, ezért az elosztási út mentén az elosztási vektor növekménye egy egységvektor, azaz bármely $t \in \{1, \dots, x_N\}$-hez létezik olyan $i \in \{1, \dots, n\}$, hogy

$r(N,t,x)-r(N,t-1,x)=e^i$, ahol e^i az i-edik egységvektor. Tehát a $\rho(N,x)$ elosztási út a megfelelő egységvektorok sorozatához tartozó elosztásban részesülő szereplők sorozata által determinált, azaz $\rho_t(N,x)=i$ pontosan akkor, ha $r(N,t,x)-r(N,t-1,x)=e^i$. Megjegyzendő, hogy az elosztási útban az i szereplő pontosan x_i-szer szerepel. Jelölje $\rho^M(N,x)$ a $\rho(N,x)$ projekcióját M-re, azaz $\rho^M(N,x)$-ben az M-beli szereplők követik egymást a $\rho(N,x)$ által kijelölt sorrendben. Nyilván $\rho^M(N,x)$ hossza x_M.

Ezek alapján megállapítható, hogy egy elosztási szabály nyilván megfeleltethető egy $\rho(N,x)$ elosztási út családnak, ahol N befutja az összes lehetséges szereplőhalmazt és x az összes lehetséges igényvektort.

2. lépés. A tételt igazoljuk a kétszereplős esetre.

Legyen $N=\{1{,}2\}$. N rögzített volta miatt elhagyjuk N-t az r argumentumai közül. Jelölje p az utolsó darab elosztása előtti elosztást, azaz $p(x)=$ $=r(x_N-1,x)$. A felülről előállíthatóság miatt $r(t,x)=p^{(x_N-t)}(x)$, ahol $p^{(x_N-t)}$ a p-nek a x_N-t-edik iteráltját jelöli ($t=1,\ldots,x_N$). Az alulról előállíthatóság miatt

$$p(x)=r(1,x)+r(x_N-2,x-r(1,x))=r(1,x)+p(x-r(1,x)). \quad (3.1)$$

Rögzített x mellett tegyük fel, hogy $\rho(N,x)$ ugyanannak az i személynek adja az első és az utolsó elemet, azaz

$$r(1,x)=e^i \quad \text{és} \quad x-p(x)=e^i. \quad (3.2)$$

Legyen $x'=p(x)$. Ekkor a felülről előállíthatóság miatt

$$r(1,x')=r(1,r(x_N-1,x))=r(1,x),$$

ha $x_N\geq 2$. Majd x' definíciójának, a (3.2) kétszeri alkalmazásával, a (3.1) alkalmazásával és végül a (3.2) újbóli alkalmazásával

$$p(x')=p(p(x))=p\left(x-e^i\right)=p(x-r(1,x))=p(x)-r(1,x)=p(x)-e^i,$$

tehát $x'-p(x')=e^i$, kielégítve ezzel a (3.2) egyenlőségeket x'-vel. Ez utóbbi összefüggést még $t-1$-szer iterálva adódik $\rho(N,x)=(i,\ldots,i)$, azaz a (3.2) feltételezése maga után vonja, hogy mind az x_N egységet ugyanaz az i szereplő kapja.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $t\in\{2,\ldots,x_N\}$, melyre $\rho(N,x)$ első és t-edik eleme $i\in N$, azaz

$$r(1,x)=e^i \quad \text{és} \quad r(t,x)-r(t-1,x)=e^i.$$

Legyen $y=r(t,x)$, ekkor az utóbbi egyenlőségek a felülről előállíthatóság felhasználásával az alábbi alakot öltik:

$$r(1,x)=e^i \quad \text{és} \quad y-p(y)=r(t,x)-r(t-1,y)=r(t,x)-r(t-1,x)=e^i.$$

A korábbi gondolatmenetünket megismételve $\rho(N,y) = (i,\ldots,i)$, amiből következik, hogy $\rho(N,x) = (1,\ldots,1,2,\ldots,2)$ vagy $\rho(N,x) = (2,\ldots,2,1,\ldots,1)$, ahol az egymást követő egyesek száma x_1 és az egymást követő kettesek száma x_2.

A 2. lépés igazolásához még be kell látnunk, hogy a $\rho(N,x)$-ben megjelenő prioritási sorrend független x-től. Nyilván $x_1 = 0$ vagy $x_2 = 0$ esetén nincs mit bizonyítani. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a $\rho(N,x) = (1,\ldots,1,2,\ldots,2)$ esettel állunk szemben. Ekkor $p(x) = x - e^2$ és $\rho\left(N, x - e^2\right)$ a $\rho(N,x)$-ből a sorozat utolsó elemének a törlésével adódik a felülről előállíthatóság miatt, és ezért $\rho\left(N, x - e^2\right)$-ben is 1 élvezi a prioritást. Most megmutatjuk, hogy $\rho\left(N, x - e^1\right)$-ben is 1 élvezi a prioritást. Ehhez a (3.2) és a (3.1) alapján adódó

$$p\left(x - e^1\right) = p\left(x - r(1,x)\right) = p(x) - e^1 = \left(x - e^1\right) - e^2$$

összefüggésből látható, hogy a $\rho\left(N, x - e^1\right)$ elosztási út utolsó eleme 2. Ezért $\rho\left(N, x - e^1\right)$-ben is 1 élvezi az elsőbbséget. A gondolatmenet ismétlésével adódik, hogy bármely $x' \leq x$ igényvektor esetén 1-é az elsőbbség. Mivel az (1,1) igényvektor megadja a rögzített prioritási sorrendet és bármely $(x_1,x_2) \geq$ $\geq (1,1)$ igényvektorból $x_1 + x_2 - 2$ lépésben eljuthatunk a bekezdésben leírt módon az (1,1)-be, ezért az (1,1) determinálja bármely igényvektorhoz tartozó prioritási sorrendet.

Tehát valóban a kétszereplős esetben az alulról és felülről előállíthatóságból következik, hogy r egy prioritási szabály.[1]

3. lépés. Megmutatjuk, hogy r pontosan akkor konzisztens, ha

$$\forall T \subseteq N \subseteq \mathcal{N} : \forall x \in \mathbb{N}^N : \rho\left(T, x^T\right) = \rho^T(N,x). \tag{3.3}$$

Vegyük észre, hogy a (3.3) tulajdonság teljesülését elegendő csak $T = N \setminus i$ alakú halmazokra megkövetelni.

Jelölje $\pi(t,\alpha)$ az α sorozat első t elemének a részsorozatát és $O(i,\alpha)$ az α-ban található i-k számát. Könnyen meggondolható, hogy

$$O\left(i, \pi(t, \rho(N,x))\right) = r_i(N,t,x) \tag{3.4}$$

bármely (N,t,x) elosztási problémára és $i \in N$ szereplőre. (3.4), továbbá π és O értelmezése, valamint a projekciós operátor tulajdonságaiból adódóan

$$\begin{aligned}\rho\left(N \setminus i, x^{N\setminus i}\right) = [\rho(N,x)]^{N\setminus i} \Leftrightarrow [\pi(t,\rho(N,x))]^{N\setminus i} = \\ = \pi\left(t - r_i(N,t,x), \rho\left(N \setminus i, x^{N\setminus i}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

[1] A konzisztenciára egyelőre nem volt szükségünk.

minden $t = 1, \ldots, x_N$-re.

Ezen előkészületek után igazoljuk, hogy a konzisztencia ekvivalens a (3.3) összefüggésben megadott tulajdonsággal. Induljunk ki előbb abból, hogy (3.3) teljesül. Ekkor előbb (3.4), majd (3.3) és (3.5), továbbá $i \neq j$, és végül (3.4) alapján

$$\begin{aligned} r_i\Big(N \setminus j, t - r_j(N,t,x), x^{N\setminus j}\Big) &= O\left(i, \pi\left(t - r_j(N,t,x), \rho(N \setminus j, x^{N\setminus j})\right)\right) = \\ &= O\left(i, [\pi(t, \rho(N,x))]^{N\setminus j}\right) = \\ &= O\left(i, \pi(t, \rho(N,x))\right) = r_i(N,t,x), \end{aligned}$$

tehát r konzisztens.

Fordítva, ha r konzisztens, akkor $r_i(N,t,x) = r_i\big(N \setminus j, t - r_j(N,t,x), x^{N\setminus j}\big)$. Ekkor a fenti gondolatmenetet követve

$$O\left(i, [\pi(t, \rho(N,x))]^{N\setminus j}\right) = O\left(i, \pi\left(t - r_j(N,t,x), \rho(N \setminus j, x^{N\setminus j})\right)\right). \quad (3.6)$$

Mivel (3.6) minden $i \in N \setminus j$-re és minden $t \in \{1, \ldots, x_N\}$-re teljesül, indukcióval igazoljuk a

$$[\pi(t, \rho(N,x))]^{N\setminus j} = \pi\left(t - r_j(N,t,x), \rho(N \setminus j, x^{N\setminus j})\right) \quad (3.7)$$

összefüggést, amiből adódik (3.3) $T = N \setminus j$-re, ami elégséges is. Ha $t = 1$ és j-vel kezdődik $\rho(N,x)$, akkor a (3.7) egyenlőségben mindkét sorozat üres. Ha pedig $t = 1$ és $i \neq j$-vel kezdődik $\rho(N,x)$, akkor a (3.7) egyenlőségben mindkét sorozat i-vel kezdődik. Tegyük fel, hogy $t \in \{1, \ldots x_N - 1\}$-re teljesül (3.7). Ekkor igazolandó (3.7) teljesülése $t+1$-re. Ha a $\rho(N,x)$ sorozat $t+1$ eleme j, akkor egyrészt $[\pi(t, \rho(N,x))]^{N\setminus j} = [\pi(t+1, \rho(N,x))]^{N\setminus j}$, másrészt $(t+1) - r_j(N, t+1, x) = t - r_j(N,t,x)$, mert a $t+1$-edik egységet j kapja, és ezért $\pi\left(t + 1 - r_j(N, t+1, x), \rho(N \setminus j, x^{N\setminus j})\right) = \pi\left(t - r_j(N,t,x), \rho(N \setminus j, x^{N\setminus j})\right)$. Ha pedig a $\rho(N,x)$ sorozat $t+1$ eleme $i \neq j$, a (3.7) mindkét oldalán található sorozat i-vel hosszabbodik meg.

4. lépés. Megmutatjuk, hogy a prioritási sorrend független az elosztási problémától. A 2. lépés alapján a következőképpen definiálható $\mathcal{N}$ felett a $\succ$ bináris reláció: $i \succ j$ pontosan akkor, ha a 2. lépés alapján az $\{i, j\}$ kétszereplős elosztási problémákra az r elosztási szabály szerint $i \in \mathcal{N}$ prioritása magasabb a $j \in \mathcal{N}$ prioritásánál. Így $\succ$ nyilván definiált bármely $i \neq j$-re. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\succ$ antiszimmetrikus.

Indirekte igazoljuk $\succ$ tranzitivitását. Tegyük fel, hogy található három olyan szereplő, amelyekre $i \succ j$, $j \succ k$ és $k \succ i$. Tekintsük az $N = \{i, j, k\}$ szereplőhalmazhoz és az $x_i = x_j = x_k = 1$ igényvektorhoz tartozó elosztási utat. Ekkor

$$\begin{aligned}[\rho(N,x)]^{\{i,j\}} &= \rho(\{i,j\},(1{,}1)) = (i,j),\\ [\rho(N,x)]^{\{j,k\}} &= \rho(\{j,k\},(1{,}1)) = (j,k),\\ [\rho(N,x)]^{\{k,i\}} &= \rho(\{k,i\},(1{,}1)) = (k,i),\end{aligned}$$

ami lehetetlen, hiszen $\rho(N,x)$ egy sorrendet ad meg. Még azt kell meggondolnunk, hogy az $\mathcal{N}$ feletti $\succ$ rendezés egy prioritási szabályt határoz meg. Ehhez már csak azt kell figyelembe vennünk, hogy bármely rögzített $N \subset \subset \mathcal{N}$-re és bármely $x \in \mathbb{N}^N$-re a $\rho(N,x)$ elosztási utat tekintve, (3.3) alapján bármely $T = \{i,j\} \subseteq N$-re az i-k megelőzik a j-ket. Tehát bármely két személy viszonylatában igaz, hogy a magasabb prioritású szereplő teljes igényének kiszolgálása után részesülhet az elosztandó tárgyból az alacsonyabb prioritású szereplő. $\square$

A fenti tétel egy meglehetősen negatív állítás, hiszen a három strukturális invariancia tulajdonság megkövetelése szükségszerűen csak egy igazságtalan elosztási szabályt enged meg. Amennyiben mindhárom strukturális invariancia tulajdonsághoz ragaszkodunk és mégis egy igazságos elosztási szabállyal szeretnénk dolgozni, akkor ki kell lépnünk a determinisztikus elosztási szabályok köréből.

3.2. Valószínűségi elosztási szabályok

A 3.1. tétel elől egy menekvési út a modellkeretünk valószínűségi kiterjesztése. Ehhez szükségünk lesz az 1.3. alfejezetben megfogalmazott tulajdonságok valószínűségi kiterjesztéseire, amelyek megtalálhatóak Moulin (2002b) vagy Tasnádi (2004b) írásaiban.

Jelölje a lehetséges *elosztások* halmazát $\Omega_{N,t,x}$, azaz

$$\Omega_{N,t,x} = \left\{\omega \in \mathbb{N}^N \mid \omega_N = t, \forall i \in N : 0 \le \omega_i \le x_i\right\},$$

és jelölje $\mathcal{P}(\Omega_{N,t,x})$ az $\Omega_{N,t,x}$ halmaz hatványhalmazát.[2]

A ρ *valószínűségi elosztási szabály* minden egyes (N,t,x) elosztási problémához hozzárendel egy az $\Omega_{N,t,x}$ halmazon értelmezett valószínűségi mértéket, amelyet $\rho_{N,t,x}$-szel jelölünk. Továbbá jelölje ekkor $\rho^i_{N,t,x}$ az $i \in N$ szereplőnek jutatott mennyiség eloszlását, amely a $\rho_{N,t,x}$ egy peremeloszlása.

Definiáljuk a *valószínűségi arányos elosztási szabályt:* egy adott (N,t,x) elosztási probléma esetén jutassunk az $i \in N$ szereplőnek x_i darab sorsjegyet. Ezután húzzunk ki visszatevés nélkül t darab sorsjegyet az x_N darab sorsjegy

[2] Egy adott halmaz hatványhalmaza annak részhalmazainak az összesége.

közül, és végül minden egyes szereplő a kihúzott sorsjegyeivel azonos mennyiségben részesül az elosztandó tárgyból. A definíció alapján a valószínűségi arányos elosztási szabály a polihipergeometriai eloszlással írható le, tehát

$$\rho_{N,t,x}(\omega) = \frac{\prod_{i \in N} \binom{x_i}{\omega_i}}{\binom{x_N}{t}}$$

tetszőleges $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ elosztás esetén.

A valószínűségi arányos elosztási szabály jellemzéséhez két axiómára lesz szükségünk. Az első szerint, ha a rendelkezésre álló mennyiség megnövekszik, akkor azonos elosztáshoz kell jutnunk a megnövekedett mennyiség egyidejű elosztása esetén, illetve az eredeti mennyiség és a növekmény külön-külön történő elosztása esetén. Ezt a tulajdonságot ismerjük a determinisztikus modellkeretből, amelyet alulról előállíthatóságnak neveztünk. Ennek valószínűségi kiterjesztése a következő axióma.

3.1. axióma. *Alulról előállíthatóság:*

$$0 \leq t' \leq t \leq x_N \Rightarrow \rho_{N,t,x}(\omega) = \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t',x} \\ \omega' \leq \omega}} \rho_{N,t',x}(\omega')\, \rho_{N,t-t',x-\omega'}(\omega - \omega')$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$ halmazra, minden $t, t' \in \mathbb{N}$ elosztandó mennyiségre, minden $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektorra és minden $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ elosztásra.

Meg kell mutatnunk, hogy a valószínűségi elosztási szabályokra most megfogalmazott alulról előállíthatóság valóban az alulról előállíthatóság egy kiterjesztése.

3.1. lemma. *Ha ρ determinisztikus*[3] *és alulról előállítható, akkor a ρ-val ekvivalens r determinisztikus elosztási szabály alulról előállítható.*

Bizonyítás. Mivel ρ determinisztikus, ezért léteznek olyan $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ és $\omega' \in \Omega_{N,t',x}$ elosztások, amelyekre $\rho_{N,t,x}(\omega) = 1$ és $\rho_{N,t',x}(\omega') = 1$. Tehát $r(N,t,x) = \omega$ és $r(N,t',x) = \omega'$. Ezért a 3.1. axióma összegének csak egyetlen $\omega' \in \Omega_{N,t',x}$ elosztáshoz tartozó tényezője nem nulla. Erre az ω' elosztásra a 3.1. axiómából adódóan $\omega \geq \omega'$ és $\rho_{N,t-t',x-\omega'}(\omega - \omega') = 1$. Ezért $r(N, t-t', x-\omega') = \omega - \omega'$. Tehát az ω és ω' elosztások ρ által egyértelműen meghatározottak és így teljesülnek az alábbi egyenlőségek.

$$\begin{aligned} r(N,t,x) &= \omega = \omega' + \omega - \omega' = r(N,t',x) + r(N,t-t',x-\omega') = \\ &= r(N,t',x) + r(N,t-t',x-r(N,t',x)) \end{aligned}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$ halmazra, minden $t, t' \in \mathbb{N}$ elosztandó mennyiségre és minden olyan $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektorra, amelyre $0 \leq t' \leq t \leq x_N$ teljesül. $\square$

[3] A ρ valószínűségi elosztási szabály *determinisztikus*, ha 1 valószínűséggel egyetlen elosztást választ ki.

Az elemzésünk során használt második axióma egy igazságossági axióma, amely szerint a várható elosztásoknak az igényekkel arányosaknak kell lenniük.

3.2. axióma. *Arányos várható részesedés:*

$$\sum_{k=0}^{x_i} k\rho^i_{N,t,x}(k) = x_i \frac{t}{x_N}$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$ halmazra, mindegyik $i \in N$ szereplőre, minden $t \in \mathbb{N}$ elosztandó mennyiségre és minden $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektorra.

3.2. tétel (Tasnádi, 2004a)**.** *A valószínűségi arányos elosztási szabály karakterizálható az alulról előállíthatósági és az arányos várható részesedés axiómákkal.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $N = \{1, \ldots, n\}$. A továbbiakban az alábbi két azonosságot fogjuk majd használni:

$$\binom{m}{k}\binom{m-k}{l} = \binom{m}{k+l}\binom{k+l}{l}, \tag{3.8}$$

$$\sum_{k_1+\cdots+k_p=k} \prod_{i=1}^{p} \binom{m_i}{k_i} = \binom{\sum_{i=1}^p m_i}{k}. \tag{3.9}$$

Először is győződjünk meg arról, hogy a valószínűségi arányos elosztási szabály kielégíti mind az alulról előállíthatósági, mind az arányos várható részesedés axiómákat. Legyen $0 \le t - u = t' \le t \le x_N$ és vegyünk egy tetszőleges $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ elosztást. Ekkor a valószínűségi arányos elosztási szabály definíciója, (3.9), disztributivitás és (3.8) miatt a következő egyenlőségek adódnak:

$$\rho_{N,t,x}(\omega) = \rho_{N,t,x}(\omega)\frac{1}{\binom{t}{u}}\binom{t}{u} = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i}}{\binom{x_N}{t}} \frac{1}{\binom{t}{u}} \sum_{\substack{\omega'_N = t-u \\ 0 \le \omega' \le \omega}} \prod_{i=1}^{n} \binom{\omega_i}{\omega_i - \omega'_i} =$$

$$= \sum_{\substack{\omega'_N = t-u \\ 0 \le \omega' \le \omega}} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i}\binom{\omega_i}{\omega_i-\omega'_i}}{\binom{x_N}{t}\binom{t}{u}} = \sum_{\substack{\omega'_N = t-u \\ 0 \le \omega' \le \omega}} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega'_i}\binom{x_i-\omega'_i}{\omega_i-\omega'_i}}{\binom{x_N}{t-u}\binom{x_N-t+u}{u}} =$$

$$= \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t',x} \\ \omega' \le \omega}} \rho_{N,t',x}(\omega')\,\rho_{N,t-t',x-\omega'}(\omega - \omega'),$$

amelyek alapján látható az alulról előállíthatósági axióma teljesülése. Továbbá a valószínűségi arányos elosztási szabály nyilván kielégíti az arányos várható részesedés axiómáját, mivel a polihipergeometriai eloszlás egydimenziós peremeloszlásainak várható értékei tx_i/x_N.

A fordított irányt t szerinti indukcióval látjuk be. Tekintsük először a $t = 1$ esetet. Ekkor a valószínűségi arányos várható részesedés axiómája miatt bármelyik $i \in N$ szereplőnek juttatott mennyiség eloszlása

$$\begin{aligned} \rho^i_{N,1,x}(1) &= \frac{x_i}{x_N} = \frac{\binom{x_i}{1}\binom{x_N - x_i}{0}}{\binom{x_N}{1}} \quad \text{és} \\ \rho^i_{N,1,x}(0) &= \frac{x_N - x_i}{x_N} = \frac{\binom{x_i}{0}\binom{x_N - x_i}{1}}{\binom{x_N}{1}} \end{aligned}$$

tetszőleges $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektorra. Mivel $\rho^i_{N,1,x}(1) = \rho_{N,1,x}(e_i)$ és $\Omega_{N,1,x} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, ezért bármely $\omega \in \Omega_{N,1,x}$ elosztásra teljesül a következő egyenlőség

$$\rho_{N,1,x}(\omega) = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i}}{\binom{x_N}{1}}. \tag{3.10}$$

Vegyünk egy tetszőleges rögzített $x \in \mathbb{N}^N$ igényvektort. Az indukciós feltevés szerint

$$\rho_{N,t-1,x}(\omega') = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega'_i}}{\binom{x_N}{t-1}} \tag{3.11}$$

tetszőleges $\omega' \in \Omega_{N,t-1,x}$ elosztásra. Az alulról előállíthatósági axióma, (3.10), (3.11), (3.8), és (3.9) felhasználásával az alábbi egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{aligned} \rho_{N,t,x}(\omega) &= \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t-1,x} \\ \omega' \le \omega}} \rho_{N,t-1,x}(\omega')\, \rho_{N,1,x-\omega'}(\omega - \omega') = \\ &= \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t-1,x} \\ \omega' \le \omega}} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega'_i}\binom{x_i - \omega'_i}{\omega_i - \omega'_i}}{\binom{x_N}{t-1}\binom{x_N - t + 1}{1}} = \sum_{\substack{\omega'_N = t-1 \\ 0 \le \omega' \le \omega}} \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i}\binom{\omega_i}{\omega_i - \omega'_i}}{\binom{x_N}{t}\binom{t}{1}} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i}}{\binom{x_N}{t}} \frac{1}{\binom{t}{1}} \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_n = 1 \\ 0 \le k_i \le \omega_i}} \prod_{i=1}^n \binom{\omega_i}{k_i} = \frac{\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{\omega_i}}{\binom{x_N}{t}} \end{aligned}$$

tetszőleges $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ elosztásra. Tehát $\rho_{N,t,x}$ valóban egy polihipergeometriai eloszlás, azaz ρ szükségszerűen a valószínűségi arányos elosztási szabály. □

A fenti tétel megkapható Moulin (2002b) általánosabb eredményeiből, amelyek közül kiemelendő az alábbi.

3.3. tétel (Moulin, 2002). *Az egyenlők azonos elbánásának, az alulról előállíthatóságnak és a felülről előállíthatóságnak kizárólag a valószínűségi arányos elosztási szabály tesz eleget.*[4]

Ez utóbbi tétel azért is figyelemreméltó, mert a valószínűségi arányos elosztási szabály jellemzésében szereplő három tulajdonság egyike sem kötődik közvetlenül az arányosság elvéhez.

Moulin (2002b) megadja a valószínűségi modellkeretben a három strukturális invariancia axiómának (konzisztencia, alulról előállíthatóság és felülről előállíthatóság) egyidejűleg eleget tevő elosztási szabályok halmazát. Az ezen halmazba tartozó eljárások lényegében prioritási osztályokba sorolják a szereplőket, és az így adódó prioritási osztályokon belül engedik csak meg a visszatevéses mintavételen alapuló arányos elosztás alkalmazását.[5] Moulin (2002b) 2. tételének következménye szerint csak a valószínűségi arányos elosztási szabály „prioritásmentes". Ezért igazságossági megfontolásból ez utóbbi eljárás kitüntetett szerepet játszik a valószínűségi modellkereten belül.

Végezetül megemlítenénk még két további valószínűségi elosztási szabályt. A fair sorbaállási eljárás szerint az elosztandó mennyiséget több fordulóban osztjuk el úgy, hogy minden egyes fordulóban a még igényekkel rendelkező szereplőket véletlen sorrendben egy-egy egységhez juttatjuk a még el nem osztott egységekből. Ezen eljárást többféleképpen karakterizálja Moulin–Stong (2002). Tasnádi (2002) bevezeti a fair maradék elosztási szabályt, amely szerint mindenkinek garantált az igényeivel arányos részesedésének lefelé kerekített értéke, a maradékot pedig úgy osztjuk el, hogy teljesüljön az arányos várható részesedés axiómája. A fair maradék elosztási eljárás karakterizálható az aránymonotonitás és az arányos várható részesedés tulajdonságok segítségével.[6]

3.3. Gyakorló feladatok

3.1. feladat. Adja meg az egyenlők azonos elbánása, a konzisztencia és a felülről előállíthatóság kiterjesztéseit a valószínűségi modellkeretben!

3.2. feladat. Igazolja, hogy a valószínűségi arányos elosztási szabály karakterizálható a felülről előállíthatósági és az arányos várható részesedés axiómákkal!

[4] A tétel kimondásában a megfelelő tulajdonságok valószínűségi modellbeli kiterjesztéseiről van szó (lásd Moulin (2002b) vagy Tasnádi (2004b)).

[5] A pontosan két szereplőt tartalmazó prioritási osztályokon belül a valószínűségi arányos elosztási szabályon kívül másfajta elosztási eljárás is megengedhető.

[6] Az eljárás létezését, megvalósítását és jellemzését illetően lásd Tasnádi (2002).

4. fejezet

A mandátumszámítási eljárások

Ebben a fejezetben egy speciális, de központi jelentőségű diszkrét elosztási problémával foglalkozunk, amelyet elsőként vizsgáltak behatóan matematikailag. Az úgynevezett képviseleti (mandátumszámítási) probléma tárgyalása során a történelmi érdekességekre is kitérünk.

4.1. A képviseleti probléma története

A képviseleti problémában N a pártok, vagy területi egységek halmazát jelöli. Mivel a képviselőhelyek számának meghatározása körüli politikai és akadémiai vita az Egyesült Államokban tekint vissza a legnagyobb múltra, ezért a továbbiakban elsődlegesen pártok helyett államokról fogunk beszélni. Ráadásul, a tagállamok (a továbbiakban röviden államok) számának időbeli növekedése és az egyes államok népességének eltérő növekedési üteme természetes módon felfedte az egyes államokhoz rendelendő képviselőhelyek meghatározásának ellentmondásosságát. Ezért jelölje x_i az $i \in N$ állam népességét (pártok esetében az i párt szavazóinak számát) és t a képviselőház méretét.

Az Amerikai Egyesült Államok alkotmánya nem rendelkezett konkrét elosztási eljárásról, viszont rögzítette az elosztás függését a népesség számától, és tízévenként – a népszámlálásokat követően – újra meghatározta az államok képviselőszámait. Az államok népességarányos képviselete a szükséges kerekítések miatt kivitelezhetetlen, ezért az „egy ember – egy szavazat" elv sérül.[1] Ezek után a kérdés már csak az lehet, hogy milyen közel kerülhetünk az arányos képviselethez. Megjegyzendő, hogy újabb államok felvétele és a népesség gyarapodása miatt a képviselőház mérete is folyamatosan növekedett, ami – mint azt a későbbiek során látni fogjuk – két alapvető paradoxon felmerüléséhez vezetett. A történeti áttekintést Young (1994, 3. fejezet) és Balinski–Young (2001) a témával részletesen foglalkozó munkái alapján végezzük. Az európai és a magyar választási rendszer szemszögéből Mészáros–Szakadát (1993) tekinti át a különböző mandátumszámítási eljárásokat.

1791/92-ben Alexander Hamilton és Thomas Jefferson két eltérő módszerrel állt elő. Hamilton eljárása, az úgynevezett „legnagyobb maradékok módszere" első lépésben meghatározza az államok

$$q_i = \frac{x_i}{\sum_{j \in N} x_j} t$$

kvótáit, amelyek tulajdonképpen az államok arányos részesedései, majd második lépésben mindegyik államhoz hozzárendeli kvótájának $\lfloor q_i \rfloor$ (alsó) egészrészét, és végül a fennmaradó helyeket kiosztja a legnagyobb maradékú államok között. Tekintsük a 105 fős képviselőház képviselőhelyeinek elosztását az 1790-es népszámlálási adatok alapján, Hamilton eljárása szerint (lásd a 4.1. táblázatot[2]).

A kvóták alsó egészrészeinek összege 97, így Hamilton még 8 helyet oszt ki a legmagasabb maradékú államok között, ennek eredményeként 0,570 maradékkal Pennsylvania az utolsó, még további helyhez jutó állam.

Hamilton eljárásában Jefferson a közös osztót – a megcélzott egy képviselőre jutó lakosok számát – hiányolta a végső számok megállapításában, mivel a fennmaradó mandátumokat nem egy osztó segítségével határozzák meg. Hamilton eljárása Jefferson szerint ezért alkotmánysértő. Hamilton megoldásával szemben George Washington elnökként – Jefferson érvelése alapján – támogatta annak alternatív megoldását, amely egy a

$$\sum_{i \in N} \left\lfloor \frac{x_i}{d} \right\rfloor = t$$

egyenlőséget kielégítő d közös osztót választ, és ekkor az i államnak $y_i = \lfloor x_i/d \rfloor$ helyet ad. Jefferson a közös osztó meghatározásához választott egy kiindulási értéket, amely segítségével meghatározta az $y_i = \lfloor x_i/d \rfloor$ értékeket. Ha így túl sok helyet osztanánk ki ($y_N = \sum_{i \in N} y_i > t$), akkor növeljük d értékét, míg fordítva, ha túl kevés helyet osztanánk ki ($y_N < t$), akkor csökkentjük a d közös osztót. Az eljárást addig ismételjük, amíg nem találunk

[1] Megjegyzendő, hogy az „egy ember – egy szavazat" elv teljesülése a történelem során egyáltalán nem volt természetes elvárás. Például az Egyesült Államokban 1865-ig a rabszolgatartók rabszolgánként 0,6 szavazatot adhattak le.

[2] Forrás: Balinski–Young (2001) 158. oldal.

4.1. táblázat. Államok képviselőhelyeinek meghatározása 1790-es népességi adatok alapján

Államok	Népesség	Kvóta	Jefferson	Hamilton
Virginia	630 560	18,310	19	18
Massachusetts	475 327	13,803	14	14
Pennsylvania	432 879	12,570	13	13
North Calorina	353 523	10,266	10	10
New York	331 589	9,629	10	10
Maryland	278 514	8,088	8	8
Connecticut	236 841	6,877	7	7
South Carolina	206 236	5,989	6	6
New Jersey	179 570	5,214	5	5
New Hampshire	141 822	4,118	4	4
Vermont	85 533	2,484	2	2
Georgia	70 835	2,057	2	2
Kentucky	68 705	1,995	2	2
Rhode Island	68 446	1,988	2	2
Delaware	55 540	1,613	1	2
Összesen	3 615 920	105,000	105	105

egy pontos elosztást eredményező közös osztót.[3] A 4.1. táblázatban látható jeffersoni elosztás megkapható a $d = 33\,000$ közös osztóval. A táblázatból látható, hogy a két eljárás csak Virginia és Delaware államok esetében szolgáltat különböző értékeket. Jefferson eljárásának alkalmazásában (az alkotmányossági érvelésen kívül) az is szerepet játszhatott, hogy mind Washington, mind Jefferson virginiaiak voltak.

Egy, a jeffersoni megoldást szolgáltató alternatív eljárást adott Victor D'Hondt 1878-ban, így Európában az ő neve alatt szokás emlegetni a jeffersoni megoldást. D'Hondt közös osztók iteratív keresése helyett az ő nevével fémjelzett D'Hondt-mátrix segítségével határozta meg a mandátumok elosztását (pártok esetében). A két számítási mód összehasonlításához tekintsük a 4.2. táblázat mintapéldáját, amelyben 8 képviselőhelyet kívánunk elosztani. A jeffersoni megoldás megkapható például a $d = 3\,200$ közös osztóval.

A feladathoz tartozó D'Hondt-mátrix a 4.3. táblázatban látható.

[3] Ilyen közös osztó – ritka esetektől eltekintve – található. Problémát okoz például páratlan sok képviselőhely elosztása két azonos népességű állam között. Precíz tárgyalásmód esetén, az ilyen esetek miatt halmazértékű elosztási eljárásokat kell megengedni (lásd a 4.2. alfejezetet).

4.2. táblázat. Négyállamos mintapélda

Államok	Népesség	Kvóta	Jefferson
A	13 000	3,467	4,000
B	3 100	0,827	0,000
C	4 125	1,100	1,000
D	9 775	2,607	3,000
Összesen	30 000	8	8

A D'Hondt mátrixban az államok népességeit elosztjuk rendre az államok lehetséges mandátumainak számával ($i = 1,\ldots,8$). Az oszlopok i-edik számított értékei így megadják, hogy i képviselő esetén az állam egy képviselője hány lakost képviselne. E képviseleti arányokat 8 hely kiosztása mellett kívánjuk a lehető legnagyobbnak választani, ami a 4.3. táblázatban vastag számokkal jelzett megoldáshoz vezet, azaz A négy, B nulla, C egy és D három helyet kap, akárcsak a jeffersoni megoldás szerint. A táblázatból kiolvasható, hogy a jeffersoni közös osztónak bármely 3 101 − 3 250 intervallumba eső érték megfelel.

4.3. táblázat. Négyállamos D'Hondt-mátrix

Államok	A	B	C	D
Népesség	13 000	3 100	4 125	9 775
1	**13 000**	3 100	**4 125**	**9 775**
2	**6 500**	1 550	2 063	**4 888**
3	**4 333**	1 033	1 375	**3 258**
4	**3 250**	775	1 031	2 444
5	2 600	620	825	1 955
6	2 167	517	688	1 629
7	1 857	443	589	1 396
8	1 625	388	516	1 222

Jefferson eljárását az Egyesült Államokban 1840-ig alkalmazták, mivel addigra már nyilvánvalóvá vált, hogy az eljárás a nagyobb államoknak (pártok esetén a nagyobb szavazótáború pártoknak) kedvez. E tény egyszerű oka, hogy a lefelé kerekítéssel a kis államok relatíve többet vesztenek a nagy államokhoz képest. Ez a megállapítás és több alapító tagállam relatív súlyának csökkenése hosszabb vitákhoz vezetett, amelyek során Adams 1832-ben Jefferson eljárásában a lefele kerekítést felfele kerekítéssel kívánta helyettesíteni, ami viszont nyilván a kis államoknak kedvezett volna. Ezért Webster 1832-ben a lefelé vagy felfelé kerekítés helyett a hagyományos (a közelebbi egészhez történő) kerekítést javasolta, amivel átmeneti sikert aratott, ugyanis eljárását az 1840-es népszámlálást követően alkalmazták is a következő népszámlálásig. Vinton 1850-ben a tízévenkénti, az északi és déli államok közötti maradékok fölötti vitát egy tartós képviselőhely meghatározó eljárással kívánta megelőzni, és ehhez burkoltan egy, a hamiltoni eljárással ekvivalens eljárás törvényszintű előírását javasolta. Indítványával ugyan sikerrel járt, de 1850-től 1910-ig – amely időszak alatt jogilag Hamilton eljárását kellett volna alkalmazni – többször is eltértek valamelyest a hamiltoni megoldástól.

Az 1860–70-es években ugyan a megcélzott képviselőház méret mellett valóban kiszámították a hamiltoni elosztást, de utólag, az egyes államok alkudozása után, megnövelték néhány hellyel a képviselőház méretét, amely már egy hamiltoni megoldástól eltérő elosztást eredményezett. Külön érdekesség, hogy a hamiltoni megoldástól való eltérés az elnökválasztás kimenetelét is befolyásolta, így történhetett például, hogy a republikánus Hayes kb. 4 millió szavazóval legyőzte a kb. 4,3 millió szavazatot szerző demokrata elnökjelölt Tildent. Maga az a tény, hogy kevesebb szavazattal is lehetett elnökválasztást nyerni nem olyan meglepő, itt azonban a helyzet érdekessége, hogy a törvényileg előírt hamiltoni eljárás alkalmazása mellett Tilden több elektort szerzett volna, és megnyerte volna az elnökválasztást.

Hamilton eljárása sérti az 1.3. alfejezetben bevezetett erőforrás-monotonitást, ami 1881-ben jutott a képviselőház tudtára, amikor is a 275-től 350-ig terjedő lehetséges új képviselőház méretek meghatározása mellett azt tapasztalták, hogy Alabama állam képviselőinek száma 8-ról 7-re csökkenne, ha 299-ről 300-ra növelnék a ház méretét. A problémát átmenetileg úgy orvosolták, hogy a képviselőház méretét 325-re növelték. A helyzet 1901-ben súlyosbodott, ugyanis Maine állam képviselőinek a száma 3 és 4 között váltakozott a 350-től 400-ig terjedő házméretek esetén. Ezért 1911-ben újra visszatértek Webster eljárásához. Megjegyzendő, hogy az úgynevezett *osztómódszerek*, amelyek mind Jefferson módszerével azonosan egy közös osztóval dolgoznak, és csak az alkalmazott kerekítésben térnek el egymástól, mentesek az úgynevezett *Alabama-paradoxontól*, azaz erőforrás-monotonok.

Hamilton eljárásánál egy másik nevezetes paradoxon, az úgynevezett *népességparadoxon* is előfordulhat, amelynek definiálása előtt bevezetünk egy, az igénymonotonitásnál gyengébb montonitiási fogalmat.

4.1. definíció. Az r elosztási szabály *népességmonoton*, ha bármely olyan két (N, t, x) és (N, t, x') elosztási problémára, amelyre $x, x' > 0$, és i népessége nagyobb arányban növekszik j népességénél, i képviselőhelyeinek száma nem csökkenhet j képviselőhelyeinek számát növelve, azaz

$$\frac{x_i'}{x_i} \geq \frac{x_j'}{x_j} \Rightarrow y_i' \geq y_i \text{ vagy } y_j' \leq y_j$$

minden $i \neq j \in N$-re.

A népességmonotonitásnak az igénymonotonitástól eltérő értelmezése azért szükséges, mert az igénymonotonitás definíciója túl sok tényező változatlanságát tételezi fel, ami túlzottan megszorító a népesség dinamikus változása miatt. A népességmonotonitás fenti Balinski–Young-féle értelmezése inkább a relatív változásokra helyezi a hangsúlyt. A népességmonotonitás sérülését hívjuk *népességparadoxonnak.*[4] A népességparadoxont egy négyállamos példán szemlélteti a 4.4. táblázat, amelyben kizárólag az A állam lakossága változik, és amelynek következtében furcsa módon B állam képviselete növekszik eggyel D rovására, ami sérti a népességmonotonitást, hiszen B és D lakosságában sem relatív, sem abszolút értelemben nem állt be változás.

4.4. táblázat. Népességparadoxon

Államok	Népesség	Kvóta	Hamilton	Népesség'	Kvóta'	Hamilton'
A	12 820	11,642	12	13 000	11,729	12
B	1 800	1,635	1	1 800	1,624	2
C	3 400	3,088	3	3 400	3,067	3
D	9 510	8,636	9	9 510	8,580	8
Összesen	27 530	25	25	27 710	25	25

Webster módszere Európában Sainte-Laguë révén vált ismertté. Sainte-Laguë 1910-ben a képviselőhelyek számát egy optimalizációs feladat megoldásaként határozta meg, nevezetesen az egy lakosra jutó államonkénti (pártonkénti) mandátumszámok országos átlagtól való népességszámmal súlyozott négyzetes eltérését minimalizálta. Formálisan,

$$\min \sum_{i \in N} x_i \left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{t}{x_N} \right)^2, \text{ ahol } y_N = t \text{ és } y_i \in \mathbb{N} \text{ minden } i \in N\text{-re.} \tag{4.1}$$

A 4.2. alfejezetben visszatérünk erre a kérdésre, és igazoljuk, hogy a fenti optimumszámítási feladat megoldása pontosan a websteri megoldást adja.

Webster megoldása az Egyesült Államokban nem bizonyult hosszú életűnek, hiszen csupán 1940-ig volt érvényben. Eljárásának leváltását Hill 1911-es

[4] A népességparadoxonnak többféle megfogalmazása is létezik.

javaslata előzte meg, amely szerint a képviselőhelyek elosztása akkor megfelelő, ha az államokat páronként vizsgálva, egyik államtól sem lehet egy képviselőhelyet egy másik államhoz úgy átcsoportosítani, hogy közben ne növekedjen valamilyen egyenlőtlenségi mérték. Hill egyenlőtlenségi mértéknek az

$$\frac{\frac{y_i}{x_i}}{\frac{y_j}{x_j}} - 1, \text{ ahol } \frac{y_i}{x_i} > \frac{y_j}{x_j}$$

relatív képviseltségi arányt javasolta. Így például, ha i állam 5 millió fővel 25 helyet kapna, míg j állam 1 millió fővel 4 helyet kapna, akkor az i-nél az egy lakosra jutó képviselők száma 5 milliomod és j-nél ugyanez az érték 4 milliomod. Tehát Hill egyenlőtlenségi mértéke alapján i 25%-kal jobban van képviselve j-nél. Ha most i kapna 24 helyet és j kapna 5 helyet, akkor i értéke 4,8 milliomodra módosulna, míg a j-é 5 milliomodra, és így Hill egyenlőtlenségi mértéke szerint j kb. 4,17%-kal jobban van képviselve i-nél. Mivel Hill szerint csökken az egyenlőtlenség, érdemes egy képviselőhelyet elvenni i-től j javára. Megjegyzendő, hogy a relatív képviseltségi arány helyett nézhettük volna például az

$$\frac{y_i}{x_i} - \frac{y_j}{x_j}, \text{ ahol } \frac{y_i}{x_i} > \frac{y_j}{x_j}, \tag{4.2}$$

képviseltségi arányok abszolút eltérését is, amely az előbbi számpéldát tekintve a transzferrel 1 milliomodról 0,2 milliomodra csökkenne. Ezért ez utóbbi egyenlőtlenségi mérték szerint is érdemes egy képviselőhelyet elvenni i-től j javára. A 4.2. alfejezetben igazoljuk, hogy ez utóbbi egyenlőtlenségi mérték alkalmazásával pontosan a websteri megoldás adódik. Huntington 1921-ben igazolta, hogy Hill egyenlőtlenségi mértéke valóban mindig megoldást szolgáltat, azaz az egyenlőtlenségi mérték ciklizálásának esete nem fordulhat elő. Huntington eljárást is adott Hill megoldására, amely Jefferson eljárásától csak annyiban tért el, hogy a kerekítésnél a kvótához két legközelebbi egész mértani átlagától kerekít felfelé, különben pedig lefele. Huntington további érdeme, hogy meghatározta az

$$\frac{y_i}{x_i} > \frac{y_j}{x_j}$$

egyenlőtlenség különböző átrendezéseiből nyerhető 16 egyenlőtlenségi mérték (lásd a 4.3–4.6. feladatokat) közül azokat, amelyek minden esetben eredményt szolgáltatnak (ciklusmentesek). Mivel néhány egyenlőtlenségi mérték ugyanazt a megoldást szolgáltatja, így csak 5 különböző megoldás maradt. Ezek közül néggyel már találkoztunk: Jefferson, Adams, Webster és Hill megoldásai. Az ötödik megoldás az egy képviselőre jutó lakosok számát kívánja a lehető legegyenletesebbé tenni, az

$$\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j}, \text{ ahol } \frac{y_i}{x_i} > \frac{y_j}{x_j},$$

egyenlőtlenségi mértékkel. Megjegyzendő, hogy ez utóbbi eljárást Dean 1832-ben már javasolta egy Websternek írt levelében. Dean megoldása is meghatározható egy osztó módszerként, amelyben kerekítési pontnak a kvótához eső két legközelebbi egész harmonikus átlaga választandó. A harmonikus, a mértani és a számtani átlag közötti nagyságrendi viszonyból adódóan, az említett öt eljárás a következő nagyság szerinti sorrendben kedvez a nagy államoknak: Adams, Dean, Hill, Webster és Jefferson.

Huntington a tudományos közösséget (köztük Neumann Jánost is) maga mögé állítva, elérte eljárásának elfogadását, így 1941-től napjainkig az Egyesült Államokban a hilli megoldás adja a tízévente újraszámítandó mandátumszámokat. Az Amerikai Tudományos Akadémia (National Academy of Sciences) bizottsága Huntington mellett a következő okfejtéssel foglalt állást:

(1) csak népességparadoxon-mentes eljárások engedhetők meg,

(2) az öt felmerült eljárás közül Hill eljárása pontosan két-két eljárásnál kedvez jobban, illetve kevésbé a nagy államoknak.

Talán nem meglepő, hogy Huntington sikere nem feltétlenül az akadémiai közösségnek köszönhető, hanem inkább a politikai erőviszonyoknak. Az 1940-es népszámlálást követően a hilli és a websteri megoldás két állam esetében adott eltérő eredményt, nevezetesen Hill Michigan rovására Arkansasnak eggyel több képviselőhelyet adott. Mivel ekkor Arkansas biztos demokrata államnak számított – míg Michigan republikánusnak – így a michigani demokratákat leszámítva az összes demokrata képviselő Hill megoldása mellett szavazott. Megjegyzendő, hogy a Hill-Huntington eljárást kizárólag az Egyesült Államokban alkalmazzák.

4.2. A képviseleti probléma matematikai vizsgálata

Az előző pontban a képviseleti probléma Egyesült Államokbeli történelmén keresztül ismerkedtünk meg az alapvető mandátumszámítási eljárásokkal és az alkalmazásukkal párosuló problémákkal. Felvetődhet bennünk, hogy lehetne-e a már megismert eljárásoknál jobb tulajdonságú eljárást találni? Nyilván csak részrehajlásmentes és homogén eljárásokat engedünk meg. Továbbá azt is kiköthetjük még, hogy az arányos elosztás kivitelezhetősége esetén (azaz amikor az összes kvóta egész) az eljárás valóban az arányos elosztást szolgáltassa. Ez utóbbi tulajdonságnak eleget tevő elosztási eljárásokat egzaktaknak nevezik. Egy másik fontos tulajdonságuk a páronkénti konzisztencia, amely megköveteli, hogy egy elosztási eljárás bármely kapott elosztását véve, az adott eljárással a kapott helyeken újraosztozkodó bármely két állam „kettesben" ugyanahhoz az egymás közötti elosztáshoz jusson. Ezzel, és a korábban bevezetett tulajdonságok segítségével jellemezhetjük az osztómódszereket.

Definiáljuk előbb az osztómódszereket, amelyhez előbb szükségünk lesz a D-kerekítés fogalmára. Legyen adott $D : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ kerekítési pontokat megadó szigorúan monoton növekedő függvény, melyre $D(n) < D(n+1)$, $n \leq D(n) \leq$ $\leq n + 1$. Ekkor a $z \in \mathbb{R}$ valós szám *D-kerekítése* az az $n \in \mathbb{Z}$, amelyre $D(n-1) \leq z \leq D(n)$. A hagyományos kerekítést lényegében a $D(n)=n+1/2$ függvénnyel adhatjuk meg, mivel ha $n - 1/2 < z < n + 1/2$, akkor z-t n-re kerekítjük. Azért csak lényegében a hagyományos kerekítésről van szó, mert a D-kerekítés a z-t le is és fel is kerekítheti, ha z törtrésze 1/2-ed. Jelölje $[z]_D$ a $z \in \mathbb{R}$ valós szám D-kerekítését. Speciálisan, ha $z = D(n)$, akkor $[z]_D \in \{n, n+1\}$.

4.2. definíció (Balinski–Young, 2001)**.** Egy D-kerekítés által meghatározott *r osztómódszer* bármely (N, t, x) diszkrét elosztási problémához az

$$r(N,t,x) = \left\{ y \in \mathbb{N}^N \mid \exists d \in \mathbb{R}_+ : \forall i \in N : y_i \in \left[\frac{x_i}{d}\right]_D \text{ és } y_N = t \right\} \tag{4.3}$$

elosztást, illetve elosztásokat rendeli.[5]

Ha $D(0)=0$ és $0<t<|N|$, akkor a továbbiakban feltesszük, hogy a t legnagyobb állam (párt) kap egy-egy mandátumot. Mint az könnyen ellenőrizhető, $y \in r(N,t,x)$ osztómódszerek esetén azzal ekvivalens, hogy $\exists d \in \mathbb{R}_+ : \forall i \in N :$

$$y_i > 0 \Rightarrow D(y_i) \geq \frac{x_i}{d} \geq D(y_i - 1) \text{ és } y_i = 0 \Rightarrow D(y_i) \geq \frac{x_i}{d}, \tag{4.4}$$

amiből

$$r(N,t,x) = \left\{ y \in \mathbb{N}^N \mid \min_{y_i>0} \frac{x_i}{D(y_i-1)} \geq \max_{y_j \geq 0} \frac{x_j}{D(y_j)} \text{ és } y_N = t \right\} \tag{4.5}$$

következik.

A megismert nevezetes osztómódszerek kerekítési pontjait megadó $D :$ $: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényeket a 4.5. táblázatban foglaltuk össze. Könnyen ellenőrizhető, hogy Adams esetén felfelé kerekítünk, míg Jefferson esetén lefelé, továbbá Dean esetén a két legközelebbi egész harmonikus, Hill esetén a két legközelebbi egész mértani, és Webster esetén a két legközelebbi egész számtani átlaga adja meg a kerekítési pontot.

A következő állítás a (4.2) által megadott egyenlőtlenségi mérték és Webster eljárása között teremt kapcsolatot.

[5] Azzal, hogy akár két elosztást is megengedünk, általánosítottuk a korábban megismert determinisztikus elosztási szabályokat. Általánosításunk lehetővé teszi két azonos népességű állam között a páratlan számú képviselőhely elosztását.

4.5. táblázat. Nevezetes osztómódszerek

Módszer:	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson
$D(n) =$	n	$\frac{n(n+1)}{n+\frac{1}{2}}$	$\sqrt{n(n+1)}$	$n+\frac{1}{2}$	$n+1$

4.1. állítás. *Az y elosztásban a (4.2) egyenlőtlenségi mérték pontosan akkor nem csökkenthető két állam közötti képviselőhely átcsoportosítással, ha y megegyezik a websteri megoldással.*

Bizonyítás. Vegyünk két tetszőleges $i \neq j \in N$ államot, amelyek az általánosság megszorítása nélkül indexelhetők úgy, hogy

$$\frac{y_i}{x_i} > \frac{y_j}{x_j}. \tag{4.6}$$

Ha y olyan, hogy nem csökkenthető a (4.2) egyenlőtlenségi mérték, akkor a jobban képviselt i államtól egy képviselőhely j államhoz történő átcsoportosítása esetén egyrészt

$$\frac{y_i - 1}{x_i} < \frac{y_j + 1}{x_j},$$

másrészt

$$\begin{aligned} \frac{y_i}{x_i} - \frac{y_j}{x_j} &\leq \frac{y_j + 1}{x_j} - \frac{y_i - 1}{x_i} \iff \\ \iff \quad \frac{x_i}{y_i - \frac{1}{2}} &\geq \frac{x_j}{y_j + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ami (4.5) teljesülését vonja maga után a websteri kerekítési sorozattal. Mivel a következtetések fordított sorrendben is igazak, adódik az állítás. □

Ezek után megmutathatjuk, hogy Sainte-Laguë és Webster módszerei bármely problémára ugyanazt az elosztást szolgáltatják.

4.1. tétel. *Sainte-Laguë módszere ugyanarra az eredményre vezet, mint Websteré.*

Bizonyítás. Legyen y megoldása a (4.1) optimalizációs problémának, amely célfüggvénye átalakítható a következőképpen:

$$\sum_{i \in N} x_i \left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{t}{x_N} \right)^2 = \sum_{i \in N} \frac{y_i^2}{x_i} - 2\frac{t}{x_N} y_N + \frac{t^2}{x_N} = \sum_{i \in N} \frac{y_i^2}{x_i} - \frac{t^2}{x_N}, \tag{4.7}$$

azaz valójában $\sum_{i\in N}(y_i^2/x_i)$ minimalizálandó. Ekkor (4.7) figyelembe vételével bármely $i \neq j \in N$-re, ha $y_i > 0$, akkor i-től egy képviselőhely áthelyezése j-hez nem csökkenthet a célfüggvény értékén, és ezért

$$\begin{aligned} \frac{(y_i-1)^2}{x_i} + \frac{(y_j+1)^2}{x_j} &\geq \frac{y_i^2}{x_i} + \frac{y_j^2}{x_j} \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \frac{2y_j+1}{x_j} &\geq \frac{2y_i-1}{x_i} \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \frac{x_i}{y_i-\frac{1}{2}} &\geq \frac{x_j}{y_j+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

amely alapján y optimalitása implikálja a

$$\min_{y_i>0} \frac{x_i}{y_i-\frac{1}{2}} \geq \max_{y_j\geq 0} \frac{x_j}{y_j+\frac{1}{2}}$$

egyenlőtlenséget, ami a websteri megoldást jellemző minimax egyenlőtlenség.

Fordítva, tegyük fel, hogy y a websteri megoldás, és ezért kielégíti a websteri minimax egyenlőtlenséget. Ekkor

$$\frac{2y_i+1}{x_i} \geq \frac{2y_j-1}{x_j} \tag{4.8}$$

minden $i \neq j \in N$-re, minden $y_i \geq 0$-ra és minden $y_j > 0$-ra. Legyen z egy y-tól különböző elosztás. Legyen továbbá $S^+ = \{i \in N \mid z_i > y_i\}$, $S^- = \{j \in N \mid z_j < y_j\}$, $z_i = y_i + \delta_i$ minden $i \in S^+$-ra és $z_j = y_j - \lambda_j$ minden $j \in S^-$-ra. Ekkor $\delta_{S^+} = \lambda_{S^-} > 0$, és (4.8) alapján létezik olyan $c > 0$, hogy

$$\frac{2y_i+\delta_i}{x_i} \geq c \geq \frac{2y_j-\lambda_j}{x_j}$$

minden $i \in S^+$-ra és minden $j \in S^-$-ra. Ezek után a megfelelő célfüggvényértékek különbsége

$$\sum_{i\in N}\frac{z_i^2}{x_i} - \sum_{i\in N}\frac{y_i^2}{x_i} = \sum_{i\in S^+}\frac{(2y_i+\delta_i)\delta_i}{x_i} - \sum_{i\in S^-}\frac{(2y_i-\lambda_i)\lambda_i}{x_i} \geq c\delta_{S^+} - c\lambda_{S^-} = 0,$$

tehát y optimális megoldása a (4.1) problémának. □

Az osztómódszerek egy érdekes karakterizációját adja a következő tétel.

4.2. tétel (Young, 1994). *A részrehajlásmentes, páronként konzisztens, homogén és egzakt eljárások körében a népességparadoxon-mentes eljárások pontosan az osztómódszerek.*[6]

[6] A tételt ilyen formában Young (1994, 62. oldal) mondta ki. Az eredményt megalapozó tételeket Balinski–Young (2001) monográfiájának 1982-ben megjelent első kiadása már tartalmazza.

A tételt terjedelmi okokból nem bizonyítjuk. a 4.2. tétel szerint szívesen korlátoznánk magunkat osztómódszerekre – ahogy azt a 4.6. táblázat mutatja – az osztómódszerek is produkálhatnak furcsa eredményeket. Mint látható, a D állam képviselőinek száma több mint egy hellyel (a közös osztó $d = 2\,620$) haladja meg a kvótáját, azaz Jefferson eljárása sérti az úgynevezett *kvótafeltételt*, amely szerint az államoknak a kvótájuk le- vagy felkerekített értékével egyenlő számú képviselőhelyhez kell jutniuk. Hamilton eljárása viszont nyilván teljesíti a kvótafeltételt.

4.6. táblázat. Jefferson megoldása sérti a kvótafeltételt

Államok	Népesség	Kvóta	Jefferson
A	13 000	4,727	4,000
B	3 100	1,127	1,000
C	4 125	1,500	1,000
D	89 775	32,645	34,000
Összesen	110 000	40	40

4.3. tétel (Balinski–Young-tétel)**.** *Bármely népességparadoxon-mentes eljárás sérti a kvótafeltételt.*

Bizonyítás. A 4.7. táblázatban látható két probléma segítségével megmutatjuk, hogy a kvótafeltétel teljesülése szükségszerűen a népességparadoxonhoz vezet.

4.7. táblázat. Népességparadoxon vagy kvótafeltétel (forrás Young, 1994)

Államok	x	q	x'	q'
A	752	5,013	753	3,984
B	101	0,673	377	1,995
C	99	0,660	96	0,508
D	98	0,653	97	0,513
Összesen	1 050	7,000	1 323	7,0000

Az $(\{A, B, C, D\}, 7, x)$ probléma kvótafeltételt kielégítő elosztásai az (5,1, 1,0) és a (6,1,0,0), míg az $(\{A, B, C, D\}$,7,$x')$ probléma kvótafeltételt kielégítő elosztásai a (4,2,0,1), a (4,1,1,1) és a (3,2,1,1). Akárhogyan párosítjuk össze az elosztásokat, A veszít 1 vagy 2 képviselőhelyet és D nyer 1-et, pedig A relatív súlya növekedett D-hez képest. Tehát előállt a népességparadoxon. $\square$

Így az osztómódszerek szükségszerűen sértik a kvótafeltételt. Tehát az alkalmazandó eljárás megválasztásakor bele kell nyugodnunk a kvótafeltétel esetleges sérülésébe vagy a népességparadoxon felmerülésének lehetőségébe. Megjegyzendő, hogy a népességparadoxon-mentes eljárások egyben Alabama-paradoxon-mentesek is.

Sokan inkább a népességparadoxont tartják elkerülendőknek, ezért számos országban valamelyik osztómódszert alkalmazzák, bár Hamilton módszerének alkalmazása is előfordul. Az osztómódszerek közül Balinski–Young (2001) a fenti két tulajdonságot egybevetve – szimulációs eredményekre támaszkodva – Webster módszerének alkalmazását javasolja, ugyanis számításaik szerint az alkalmazott osztómódszerek közül messze ez az eljárás sérti a legritkábban a kvótafeltételt, nevezetesen az esetek 0,61 ezrelékében.

4.3. A magyar választási rendszer 1990-től 2010-ig

A rendszerváltás utáni magyar választási rendszer pontos leírását adja az országgyűlési képviselők választásáról szóló 1989. évi XXXIV. törvény, illetve egy olvasmányos, példákban és interpretációkban gazdag bemutatását tartalmazza Körösényi–Tóth–Török (2003, VII. fejezet) könyve. Röviden áttekintjük a számunkra lényeges elemeket. A magyar választási rendszer kombinálja a többségi elvet (az egyéni választókerületekben) és az arányossági elvet (a területi és az országos listákon), ezért a 4.2. alfejezetben megismert eredmények közvetlenül nem alkalmazhatók. Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy az egyéni jelöltre leadott szavazat a vesztes jelöltekre leadott szavazatokon keresztül az országos listán már az arányossági elven alapuló ággal is keveredik. Az „egy ember – egy szavazat” elv megközelítéséhez, a többségi elven alapuló elemnél közel azonos méretű választókerületek kialakítása szükséges. Mivel Magyarországon az elmúlt két választáson 60 ezer főnél nagyobb és 30 ezer főnél kisebb egyéni választókerületek is voltak, ezért a legnagyobb választókerületekben szavazók szavazata a legkisebb választókerületekben szavazókénak felét sem éri el,[7] és így különösebb elemzések nélkül is megállapítható, hogy a szavazópolgárok közel azonos képviseltségének követelménye sérül. A választókerületek időszakonkénti átméretezésének kérdésével, illetve az erre vonatkozó, az összes párt által elfogadható átszabdalást eredményező módszerek keresésével itt nem kívánunk foglalkozni. A kérdés bonyolultságát jelzi Balinski–Pukelsheim (2005) következő kijelentése: „Ma már választásokat nem a szavazók elnyerésével, hanem a választókerületek ügyes átszabdalásával

[7] Az országos listán keresztül ez az egyenlőtlenség kisebb mértékben kompenzálódik, mivel a nagyobb választókerületekből több egyéni vesztes szavazat kerül fel az országos listára.

lehet nyerni." Megjegyzendő, hogy a választókerületek megfelelő átszabdalása igazából a többségi elven alapuló választási rendszerek problematikája. Ezek után már csak választási rendszerünknek az arányosság elvén nyugvó ágát vizsgáljuk meg abból a szempontból, hogy megengedi-e a népességparadoxon előfordulását.

A teljesség kedvéért röviden tekintsük át az eddig alkalmazott magyar választási rendszert. Az összesen 386 mandátum három részre oszlik: 176 egyéni mandátumra, 152 területi listás mandátumra és 58 országos listás mandátumra, ahol az utóbbihoz a ki nem osztott területi listás mandátumok hozzáadódnak. Egy egyéni mandátum az első fordulóban abszolút többséggel, míg – eredménytelen első forduló esetén – a második fordulóban már relatív többséggel megszerezhető. Az egyéni választókerületben vesztes, de az 5%-os országos küszöböt átlépő pártok jelöltjeinek az első fordulóban megszerzett szavazatai felkerülnek az országos kompenzációs listára. Budapest és a 19 megye területi listás eredményeit külön-külön határozzák meg a Hagenbach–Bischoff-formulával, mely szerint az adott területi listán leadott összes szavazat elosztandó a területi listán kiosztható mandátumok számának eggyel növelt értékével, ezzel meghatározva az egy mandátum megszerzéséhez szükséges szavazatok számát. Ezek után az egyes pártok egyből megkapják a rájuk leadott szavazatok és az egy mandátum megszerzéséhez szükséges szavazatok hányadosának lekerekített értéknyi mandátumát. Elképzelhető, hogy ezek után a területi listán még maradnak kiosztatlan mandátumok, amelyek az úgynevezett *kétharmados szabállyal* még kioszthatók. Ez utóbbi szabály megengedi a legnagyobb maradékok elve (lásd Hamilton) szerint, a még legalább kétharmadnyi mandátumra igényt tartó pártok részére a mandátum szerzését. Ha a kiosztatlan mandátumoknál kevesebb párt éri el az egy mandátum megszerzéséhez szükséges szavazatok kétharmadát, akkor a kiosztatlan mandátumok átkerülnek az országos listára. Természetesen, ha a kiosztatlan mandátumoknál több párt is átlépi a kétharmados küszöböt, akkor a megfelelő számú kisebb maradékú pártok nem jutnak mandátumokhoz, és a területi lista összes mandátuma kiosztható. Ezek után a kétharmados szabállyal mandátumot nem eredményező szavazatokat átvezetik az országos listára, míg a kétharmados szabállyal mandátumot nyerő pártok esetén az egy mandátum szerzéséhez hiányzó szavazatok számát levonják az országos listáról. Az országos listán kiosztható mandátumok száma 58, plusz a területi listákon ki nem osztott mandátumok száma. Egy 5%-os küszöböt átlépő párt esetén az országos listára felkerülő szavazatok száma: a vesztes egyéni szavazatainak összege és a területi listák átvezetéseinek egyenlege. Az országos listán kiosztható mandátumokat az országos listára felkerült szavazatok alapján D'Hondt algoritmusával osztják ki.

Nem osztómódszerről lévén szó (a 20 területi listán és az országos listán más-más osztóval dolgozunk), a Balinski–Young-tétel alapján sejthetjük, hogy a magyar mandátumszámítási módszer megengedi a népességparadoxont. A Balinski–Young-tétel azonban nem alkalmazható a magyar rendszerre, mivel nem teljesíti sem a páronkénti konzisztencia, sem az egzaktság feltételeit. Sőt, a feltételek eredeti formájukban nem is értelmesek a magyar rendszerben, mivel mind a többségi elvű ágon, mind az arányossági elvű ágon leadott szavazatok keverednek egymással. A népességparadoxon előfordulását a még legutoljára alkalmazott magyar rendszerben egy számpéldán mutatjuk be. Annak érdekében, hogy ne egy életidegen példát adjunk, a 2006. évi választási eredményt kisebb mértékben módosítjuk.

A területi listás mandátumok meghatározásánál megjelenő kétharmados szabályban korlátozott mértékben alkalmazandó a legnagyobb maradékok elve, ami Hamilton módszerére emlékeztet. Ezért érdemes egy olyan területi listás eredményt konstruálni, amelynél a még kiosztható mandátumoknál több párt is átlépi a kétharmados határt. Tekintsük ehhez a 2006. évi Budapesti eredményeket (lásd a 4.8. táblázatot).[8] A budapesti listán 28 mandátum osztandó el.

4.8. táblázat. 2006-os budapesti választási eredmények

Párt	Szavazatok	%	HB-kvóta	Mandátumok	Kompenzáció
FIDESZ-KDNP	356 982	35,11	10,18	10	6 412
MSZP	445 059	43,77	12,70	13	-10 682
MIÉP-JOBBIK	29 506	2,90	0,84	0	0
MUNKÁSPÁRT	6 327	0,62	0,18	0	0
SZDSZ	124 887	12,28	3,56	3	19 716
MDF	53 908	5,30	1,54	1	18 851
Összesen	1 016 669	100,00	29,00	27	

A Hagenbach–Bischoff-formula szerint az egy mandátumhoz szükséges szavazatok száma 1 016 669/(28+1) egészrésze, azaz 35 057. A pártok szavazatait ez utóbbi értékkel osztva adódnak a negyedik oszlopban található kvóták. A négy 5%-os küszöböt elérő párt esetén csak az MSZP maradéka éri el a kétharmadot, így pótlólagos mandátumot csak az MSZP szerez. Látható, hogy így csak 27 mandátum osztható ki, és ezért 1 mandátum átkerül az országos listára. A FIDESZ-KDNP 6 412, az SZDSZ 19 716 és az MDF 18 851 szavazatot visz át az országos listára, míg az MSZP-től az országos listáról 10 682 szavazatot kell levonni.

Módosítsuk a 4.8. táblázatot úgy, hogy mind a négy parlamenti párt HB-maradéka legalább kétharmad legyen, a két kisebbik parlamenti párt maradé-

[8] Forrás: www.valasztas.hu

ka legyen kisebb és egymáshoz közeli, továbbá az SZDSZ-nek legyen minimális előnye (lásd a 4.9 táblázatot).

4.9. táblázat. 2006-os budapesti választási eredmények egy módosítása

Párt	Szavazatok	%	HB-kvóta	Mandátumok	Kompenzáció
FIDESZ	356 000	34,00	9,86	10	-5 060
MSZP	460 000	43,93	12,74	13	-9 378
MIÉP-JOBBIK	30 000	2,87	0,83	0	0
MUNKÁSPÁRT	6 000	0,57	0,16	0	0
SZDSZ	133 800	12,78	3,71	4	-10 624
MDF	61 300	5,85	1,70	1	25 164
	1 047 100	100,00	29,00	28	

A módosítással valamivel több mint 30 ezren szavaztak többen, és mind a négy parlamenti párt elérte a kétharmados küszöböt, de mivel csak 3 kiosztandó mandátum maradt, ezért az MDF – mint a legkisebb maradékú párt – már nem szerez mandátumot. Látható, hogy mind a 28 budapesti mandátumot kiosztottuk, így az országos listára nem kerül át mandátum. a 4.8. és a 4.9. táblázatot összevetve akár a 4.9. táblázatban látható eredmények is adódhattak volna 2006-ban. Induljunk ki a továbbiakban most már a 4.9. táblázatban látható eredményekből, és tegyük fel, hogy az MSZP képes lett volna még további 10 ezer szavazót mozgósítani (lásd a 4.10. táblázat).

4.10. táblázat. Az MSZP 10 ezerrel több szavazatot kap

Párt	Szavazatok	%	HB-kvóta	Mandátumok	Kompenzáció
FIDESZ	356 000	33,68	9,77	10	-8 510
MSZP	470 000	44,46	12,90	13	-3 863
MIÉP-JOBBIK	30 000	2,84	0,82	0	0
MUNKÁSPÁRT	6 000	0,56	0,16	0	0
SZDSZ	133 800	12,66	3,67	3	24 447
MDF	61 300	5,80	1,68	2	-11 602
	1 057 100	100,00	29,00	28	

Budapesti szinten látható a népességparadoxon megjelenése, hiszen az MDF eggyel több mandátumhoz jutna az MSZP-SZDSZ koalíció rovására, pedig csak az MSZP szavazótábora növekedett. Így az MSZP-SZDSZ koalíció 10 ezer többletszavazata mandátumveszteséghez vezetett. Természetesen arra is gondolhatnánk, hogy az országos listán keresztül az SZDSZ az MDF-től visszakapja ezt a mandátumot. A 2006-os országos adatokból kiindulva megmutatjuk, hogy az MSZP többletszavazata a koalíció mandátumvesztéséhez vezethet. A 2006-os országos listára felkerült összesített szavazatokat tartalmazza a 4.11. táblázat.

4.11. táblázat. 2006-os országos lista

Párt	Egyéni	Listás	Összesen	Listás Bp. nélkül
SZDSZ	345 962	205 543	551 505	185 827
MSZP	773 082	105 242	878 324	115 924
MDF	270 459	196 876	467 335	178 025
FIDESZ	1 220 768	111 660	1 332 428	105 248
Összesen	2 610 271	619 321	3 229 592	585 024

A 4.9. táblázatban, a 4.8. táblázatban található 2006-os budapesti eredmények egy kisebb módosítását adtuk meg. Most hasonlóan módosítjuk – a budapesti listás eredményekkel konzisztens módon – a 4.11. táblázatban szereplő országos listát. A 4.11. táblázatban azért tüntettük fel a Budapest nélküli töredékszavazatokat, hogy a budapesti listás eredményeket a 4.9. táblázatnak megfelelő töredékszavazatokra cseréljük. A módosított országos lista összeállításakor a többi 19 lista eredményeit változatlanul átvesszük, így az országos listán a listás töredékszavazatok csak a budapesti eredmények módosításán keresztül változnak. Megjegyzendő, hogy a 2006-os választásokon az országos listán 64 mandátumot kellett elosztani. Mivel a budapesti módosításunk következtében az összes budapesti listás mandátum kiosztásra került, így a módosított országos listán csak 63 mandátumot kell majd elosztani. A paradoxon produkálása érdekében, a vesztes egyéni szavazatokat kismértékben módosítjuk. Ellenőrizhető, hogy e változtatások elvégezhetőek a 176 egyéni választókerület egyéni győztesének módosulása nélkül. A 4.11. táblázat módosítását a 4.12. táblázat tartalmazza.

4.12. táblázat. 2006-os módosított országos lista

Párt	Egyéni	Listás	Összesen	Mandátum
SZDSZ	340 000	175 203	515 203	10
MSZP	777 000	106 546	883 546	18
MDF	280 000	203 219	483 219	9
FIDESZ	1 225 000	100 188	1 325 188	26
Összesen	2 622 000	579 964	3 201 964	63

A 4.12. táblázatban kapott mandátumelosztás a D'Hondt mátrixszal, vagy pl. a 49 085-ös jeffersoni közös osztóval megkapható. Nézzük most azt az esetet, amikor az MSZP Budapesten 10 ezerrel több szavazatot nyer. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez a 10 ezer többletszavazó az MSZP által megnyert egyéni választókerületekben jelenik meg, így nem kell a 4.12. táblázat vesztes egyéni szavazataihoz nyúlni. Természetesen a 4.9. táblázatban szereplő töredékszavazatok a 4.10. táblázatban szereplő töredékszavazatokkal helyettesítendők. Az így kapott új országos listás szavazatokat a 4.13. táblázat tartalmazza.

4.13. táblázat. A 10 ezer MSZP-s többletszavazat hatása

Párt	Egyéni	Listás	Összesen	Mandátum
SZDSZ	340 000	210 274	550 274	11
MSZP	777 000	112 061	889 061	17
MDF	280 000	166 423	446 423	9
FIDESZ	1 225 000	96 738	1 321 738	26
Összesen	2 622 000	576 514	3 198 514	63

A 4.13. táblázat mandátumelosztása megkapható pl. a 49 400-as jeffersoni közös osztóval. A 4.12. táblázatot a 4.13. táblázattal összevetve látható, hogy az MSZP 10 ezer fős budapesti többletszavazata az országos listán egy mandátum elvesztését eredményezte az SZDSZ javára. A budapesti területi listás és országos listás eredményeket együtt vizsgálva, az MSZP a 10 ezer fős többletszavazata révén egy mandátumot veszít az MDF javára! Tehát a kormányoldal egy mandátumot veszít az ellenzék javára.

Megállapíthatjuk, hogy a magyar választási rendszer nem volt mentes a népességparadoxontól, ami azért is aggályos, mert bizonyos helyzetekben bünteti a többletszavazatot! Természetesen arra is gondolhatunk, hogy ilyen helyzeteket az élet ritkán produkál. A példa konstruálása mindenesetre nem igényelt különösebb energiát egy táblázatkezelő program segítségével, ami arra utal, hogy könnyen előfordulhatnak ilyen paradox helyzetek.

A 2010-es választási eredmények arra is rámutatnak, hogy nem is szükséges a kiinduló adatok módosítása. Az eredményünk annyiból gyengébb, hogy nem közvetlenül a többletszavazatot kapó párt veszít mandátumot, hanem a népességparadoxon egy nem kívánt mellékhatás formájában jelenik meg. A 4.14. táblázat felső része tartalmazza a budapesti lista eredményeit.

Tegyük fel, hogy 12 828 „otthon maradt" MSZP szavazó elment volna szavazni. A 4.14. táblázat alsó felében látható ennek hatása a budapesti listán. Egyelőre annyit állapíthatunk meg, hogy az LMP ennek hatására veszít egy mandátumot és eggyel több mandátum kerül át az országos listára.

4.14. táblázat. 2010-es budapesti választási eredmények

Budapest	FIDESZ	MSZP	Jobbik	LMP	Egyéb	Összesen
Szavazat	436 442	238 672	102 138	120 714	44 265	942 231
%	46,32	25,33	10,84	12,81	4,70	100,00
HB-kvóta	13,43	7,35	3,14	3,72	-	
Mandátum	13	7	3	4	-	
Töredék	14 072	11 242	4 668	-9 246	-	
Szavazat	436 442	251 500	102 138	120 714	44 265	955 059
%	45,70	26,33	10,69	12,64	4,63	100,00
HB-kvóta	13,25	7,64	3,10	3,665	-	
Mandátum	13	7	3	3	-	
Töredék	8 313	20 969	3 339	21 915	-	

A 4.15. táblázat felső felében a 2010-es országos listás eredmények láthatók. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a pótlólagos 12 828 MSZP szavazó az MSZP által elvesztett egyéni választókerületekben jelenik meg (a 32-ből 30 volt ilyen 2010-ben), ezzel 12 828-cal növelve az MSZP szavazatait az országos listán. Az országos lista megváltozott eredményeit a 4.15. táblázat alsó felében láthatjuk.

4.15. táblázat. 2010-es országos lista

Országos	FIDESZ	MSZP	Jobbik	LMP	Összesen
Egyéni	28 577	1 066 154	836 774	259 220	2 190 725
Területi	107 015	155 369	88 478	212 085	562 947
Σ	135 592	1 221 523	925 252	471 305	2 753 672
$d = 42\,100$	3,221	29,015	21,977	11,195	-
Mandátum	3	29	21	11	64
Egyéni	28 577	1 078 982	836 774	259 220	2 190 725
Területi	101 256	165 096	87 149	243 246	596 747
Σ	129 833	1 244 078	923 923	502 466	2 800 300
$d = 41\,900$	3,099	29,692	22,051	11,992	-
Mandátum	3	29	22	11	65

Végeredményként adódik, hogy az MSZP többletszavazói egy LMP-s mandátumot tolnának át a Jobbikhoz. A másodlagos pártpreferenciákat ismerve, ez az MSZP szavazói számára nemkívánatos eredmény. Megjegyzendő, hogy sérül az igénymonotonitás, mely szerint csak az MSZP-s képviselők száma növekedhetett volna, továbbá a a népességmontonitás is, hiszen az LMP és a Jobbik támogatottsága változatlan, és mégis az egyik veszít egy képviselőhelyet a másik rovására.

Felvetődhet bennünk a kérdés, hogy a magyar választási rendszerben legfeljebb hány mandátumot lehetett volna további szavazatok szerzésével elveszíteni? Hasonló pártkonstelláció (két nagy és két kis párt) mellett Tasnádi (2008) megmutatta, hogy ilyen paradox módon a kormányoldal akár nyolc mandátumot is veszíthet az ellenzék javára.

A népességparadoxon elkerülése – a választási rendszerünk kisebb átalakításával – többféleképpen is elérhető lett volna. Ehhez az országos kompenzációs listán kizárólag az egyéni vesztes szavazatokat kellene csak szerepeltetni. Ekkor az országos listán D'Hondt módszere már garantálja a népességparadoxon-mentességet. Az összes területi listás mandátum pedig kiosztható egy úgynevezett *biproporcionális*[9] mandátumelosztási eljárással, amelyet először a zürichi önkormányzati választásokon használtak (részleteket illetően lásd Pukelsheim (2005), illetve Pukelsheim–Schuhmacher (2004)). A biproporcionális mandátumelosztás országos összesített adatok alapján valamilyen osztómódszerrel (pl. D'Hondt) meghatározza a pártok mandátumait, és ezek után választja ki – a területeken belüli arányokat leghűbben tükröző módon – a területi listákról mandátumot szerző jelölteket. A biproporcionális eljárás előnye az országos szinten közel arányos reprezentáció, míg hátránya az egyes területekről bejutó jelölteknek a területi arányoktól viszonylag jobban eltérő pártszínezete. A magyar rendszerben ez utóbbi aggály a biproporcionális mandátumelosztással szemben nem igazán merülhet fel, mivel az országos lista jelenlegi alkalmazási formája egyébként még a területek arányos képviseletét sem szolgálja.

Megjegyzendő, hogy a népességparadoxont az új magyar választási rendszer is megoldja a területi listák megszüntetésével, és az országos listás mandátumok D'Hondt mátrix segítségével történő meghatározásával. Érdemes megemlíteni, hogy az országgyűlési képviselők választásáról szóló 2011. évi CCIII. törvény 4. paragrafusa szerint, bármely választókerület választásra jogosultjainak száma az országos számtani átlagtól 15%-osnál nagyobb mértékben csak indokolt esetekben (megyehatárok miatt, vagy a választókerületek összefüggőségének biztosítása érdekében) térhet el. Biró–Sziklai–Kóczy (2012) két olyan eljárást ad a főváros és a megyék mandátumszámainak meghatározására, amely a megyék egy képviselőre és egy országos szinten „átlagos képviselőre" jutó választásra jogosultak száma közötti eltérés mértékét kívánja minimalizálni. Eljárásuk nem osztómódszer, és célfüggvényüket érdemes a

[9] Az elnevezés mind a párt-, mind a területi szintű egyidejű arányosításra utal. A biproporcionális mandátumelosztási eljárásokat Balinski–Demange (1989) találta ki. Újabb és (műveletigényét tekintve) hatékonyabb biproporcionális eljárást adott Zachariasen (2006).

nevezetes osztómódszerek célfüggvényeivel összehasonlítani (lásd a (4.1) minimalizációs feladatot és a 4.7-4.9. gyakorló feladatokat). A Dean, a Hill és a Webster-eljárások célfüggvényeiben az országos átlagtól való eltérés súlyozott négyzetösszegei szerepelnek, míg az Adams és a Jefferson-eljárások célfüggvényei olyan minimaxos alakot öltenek, amelyekben nem szerepel az országos átlag.

4.4. Gyakorló feladatok

4.1. feladat. 250 képviselőhelyet kívánunk elosztani négy állam között. A népességi adatokat az alábbi táblázat tartalmazza.

Állam	Népesség
A	5 448 000
B	8 032 000
C	3 847 000
D	2 673 000

Határozza meg az elosztást Adams, Dean, Hill, Webster és Jefferson módszerével!

4.2. feladat. 120 képviselőhelyet kívánunk elosztani öt állam között. A népességi adatokat az alábbi táblázat tartalmazza.

Állam	Népesség
A	5 448 000
B	8 032 000
C	3 847 000
D	2 661 000
E	9 512 000

Határozza meg az elosztást Hamilton módszerével!

4.3. feladat. Igazolja, hogy az y elosztásban az

$$y_i - y_j \frac{x_i}{x_j}$$

egyenlőtlenségi mérték pontosan akkor nem csökkenthető két állam közötti képviselőhely átcsoportosításával, ha y megegyezik Adams megoldásával!

4.4. feladat. Igazolja, hogy az y elosztásban az

$$y_i \frac{x_j}{x_i} - y_j$$

egyenlőtlenségi mérték pontosan akkor nem csökkenthető két állam közötti képviselőhely átcsoportosításával, ha y megegyezik Jefferson megoldásával!

4.5. feladat. Igazolja, hogy az y elosztásban az

$$\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j}$$

egyenlőtlenségi mérték pontosan akkor nem csökkenthető két állam közötti képviselőhely átcsoportosításával, ha y megegyezik Dean megoldásával!

4.6. feladat. Igazolja, hogy az y elosztásban az

$$\frac{\frac{y_i}{x_i}}{\frac{y_j}{x_j}} - 1$$

egyenlőtlenségi mérték pontosan akkor nem csökkenthető két állam közötti képviselőhely átcsoportosításával, ha y megegyezik Hill megoldásával!

4.7. feladat. Igazolja, hogy a $\min_y \max_i y_i/x_i$ optimumhelye Jefferson megoldását adja!

4.8. feladat. Igazolja, hogy a $\min_y \max_i x_i/y_i$ optimumhelye Adams megoldását adja!

4.9. feladat. Igazolja, az

$$\min \sum_{i\in N} y_i \left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_N}{t}\right)^2, \text{ ahol } y_N = t \text{ és } y_i \in \mathbb{N} \text{ minden } i \in N\text{-re}$$

optimalizációs feladat megoldása Hill megoldását adja!

5. fejezet

Kardinális jóléti megközelítés

Ebben a fejezetben közösségi döntésekkel és azok „igazságosságával” foglalkozunk. Ehhez egy központi szervezetnek, vagy más néven jóindulatú diktátornak kell begyűjteni a lehetséges kimenetelek szereplőinek értékeléseit. Az egyes kimeneteleket a szereplők kardinális, vagy ordinális skálán is értékelhetik. Az előbbi e fejezet tárgya, míg az utóbbival a szavazáselmélet foglalkozik.

A kardinális megközelítés gyengéjének tűnhet, hogy a szereplők az egyes kimenetelekhez számértéket rendelnek, ami egy meglehetősen erős feltevés. Ennek ellenére látni fogjuk, hogy a terület több érdekes minőségi állítása mélyebb mondanivalóval bír. Elgondolkodtató, hogy az aggregálási folyamattal kapcsolatosan negatív eredményeket is kapunk, még akkor is, ha a szereplők képesek értékelésük számszerűsítésére, ami azért is aggályos, mert a gazdasági mutatók többsége aggregátum. Az OECD (2008) indexek konstruálásával foglalkozó kézikönyve külön kitér a társadalmi választások elméletére, ezen belül a kardinális megközelítés eredményeire.

A számszerűsíthető egyéni értékelésekről feltesszük, hogy személyek között is *összehasonlíthatók*. Tehát az, hogy például az egyik szereplő 3-ra értékeli a csatornahálózat kiépítését, míg egy másik 6-ra, valamilyen, a későbbiek során tisztázott módon összevethető, illetve aggregálható. A kimenetelek értékelése során eltekintünk attól, hogyan állt elő egy adott kimenetel, ilyen értelemben eltekintünk például a termelési folyamattól és a szereplők a kialakult eredményt egészében értékelik.

5.1. Kardinális jóléti modellkeret

Legyen a továbbiakban adott a szereplők nemüres véges N halmaza.[1] Ekkor e szereplők értékeléseit az $u = (u_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ vagy egyes esetekben az $u = (u_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N_{++}$ *hasznossági profil* tartalmazza. Egy hasznossági profil egy kimenetel értékelésének számszerűsítése a szereplők által. A rövidség kedvéért $(u_i)_{i \in N}$ helyett sokszor csak (u_i)-t írunk.[2] Ahhoz, hogy a társadalom (a szereplők közössége) társadalmi szinten képes legyen két számszerűsített értékelés összehasonlítására, bevezetjük a társadalmi jóléti rendezést.

5.1. definíció. A $\succeq$ *társadalmi jóléti rendezés* egy teljes és tranzitív reláció (más néven preferenciarendezés) a hasznossági profilok halmaza felett.

A $\succeq$ rendezés szigorú részét $\succ$ és a szimmetrikus részét $\sim$ jelöli. Tehát bármely két u és v hasznossági profilra pontosan akkor $u \succ v$, ha $u \succeq v$ és nem $v \succeq u$, továbbá $u \sim v$ pontosan akkor, ha $u \succeq v$ és $v \succeq u$.

Példaként tekintsük a klasszikus utilitariánus, az egalitariánus és a lexikografikus társadalmi jóléti rendezéseket.

5.1. példa. A $\succeq$ *klasszikus utilitariánus* társadalmi jóléti rendezés szerint $(u_i) \succeq (u'_i)$ pontosan akkor, ha $\sum_{i \in N} u_i \geq \sum_{i \in N} u'_i$.

A klasszikus utilitariánus jóléti rendezés abból indul ki, hogy a szereplők a hasznossági szintjeiket azonos skálán képesek mérni, ezért az értékeléseik egyszerűen összegezhetőek.

Az egalitariánus társadalmi jóléti rendezés szerint két hasznossági profil összehasonlítása a legkisebb hasznosságú szereplő hasznosságai alapján történik.

5.2. példa. A $\succeq$ *egalitariánus* társadalmi jóléti rendezés szerint $(u_i) \succeq (u'_i)$ pontosan akkor, ha $\min_{i \in N} u_i \geq \min_{i \in N} u'_i$.

A leximin társadalmi jóléti rendezés a legalacsonyabb hasznossági szintű szereplők értékeléseit, továbbá azonos legkisebb hasznossági szintek esetén a második legkisebb hasznossági szintű szereplők értékeléseit hasonlítja össze, és így tovább. Például az $u = (3{,}2{,}3{,}6{,}7)$ és az $u' = (5{,}3{,}2{,}3{,}9)$ két ötszereplős

[1] N rögzíthető, mivel nem fogalmazunk meg változó populációra vonatkozó axiómákat.

[2] A modellkeret mögött egy alternatívahalmaz is meghúzódik, amit például Blackorby és társai (2002) vagy Bossert–Weymark (2004) áttekintő művei explicit módon említenek. A jelen fejezet Gevers (1979), illetve Moulin (1988 és 2003) tárgyalásmódját követi, mivel az egyes kimenetelekhez tetszőleges értékelések társíthatók. A két tárgyalásmód közötti pontos kapcsolatot Bossert–Weymark (2004) 2.2. tétele adja meg. Annyit azonban érdemes hangsúlyozni, hogy a tárgyalt eredményekhez a mögöttes alternatívahalmaznak legalább háromeleműnek kell lenni, mivel máskülönben nincs vagy nagyon egyszerű a vizsgált közösségi döntés.

hasznossági profil összehasonlításához érdemes növekvően rendezni a profilok hasznossági szintjeit, megkapva rendre a (2,3,3,6,7) és a (2,3,3,5,9) sorozatokat, amelyek alapján könnyen látható, hogy a negyedik legkisebb hasznossági szint alapján $(u_i) \succeq (u'_i)$ a leximin társadalmi jóléti rendezéssel.

5.3. példa. A $\succeq$ *leximin* társadalmi jóléti rendezés szerint $(u_i) \succeq (u'_i)$ pontosan akkor áll fenn, ha az (u_i) értékek növekvő rendezése a lexikografikus rendezés szerint nagyobb vagy egyenlő az (u'_i) értékek növekvő rendezésénél.

A leximin társadalmi jóléti rendezés nyilván az egalitariánus társadalmi rendezés finomításának tekinthető.

A társadalmi jóléti rendezések normatív elemzéséhez bevezetünk két olyan tulajdonságot, amelyet a továbbiakban alapértelmezésben elvárunk minden társadalmi jóléti rendezéstől.

5.1. axióma. A $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés *monoton*, ha legalább egy szereplő hasznossági szintjének emelkedése egy társadalmilag jobb profilhoz vezet, azaz

$$\left.\begin{array}{l} \forall i \in N : u_i \geq u'_i \\ \exists j \in N : u_j > u'_j \end{array}\right\} \Rightarrow (u_i)_{i \in N} \succ (u'_i)_{i \in N}.$$

Igazságossági szempontból a szereplők elnevezései nem számítanak, ezért az azonos hasznossági értékeket tartalmazó profilokat társadalmi szempontból egyformán jónak tekinthetjük.

5.2. axióma. A $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés *anonim*, ha bármely $(u_i)_{i \in N} \in \in \mathbb{R}^N$ és bármely $\sigma : N \to N$ permutációra

$$(u_i)_{i \in N} \sim (u_{\sigma(i)})_{i \in N}.$$

Az anonimitás szellemében emlékeztet az elosztások egyszerű matematikai modelljénél bevezetett egyenlők azonos elbánása axiómára.

5.2. Társadalmi jóléti függvény

Az előző alfejezetben definiáltuk a társadalmi jóléti rendezés fogalmát, amely feltételezte, hogy az egyének képesek a társadalmi kimenetel (például egy elosztás eredményének) jóságát számszerűsíteni. Ha már az egyének egy számot rendelnek a társadalmi kimenetelhez, akkor ugyanez a képesség elvárható társadalmi szinten is. Ez vezet el a társadalmi jóléti függvény fogalmához.

5.2. definíció. A *társadalmi jóléti függvény* bármely $u = (u_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ vagy $u = (u_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N_{++}$ hasznossági profilhoz hozzárendel egy valós értéket, amely a társadalmi jólétet számszerűsíti.

A következő fogalom a társadalmi jóléti rendezés és a társadalmi jóléti függvény közötti kapcsolatteremtés lehetőségét adja meg.

5.3. definíció. A W társadalmi jóléti függvény pontosan akkor *reprezentálja* a $\succeq$ társadalmi jóléti rendezést, ha

$$u \succeq u' \Leftrightarrow W(u) \geq W(u')$$

teljesül bármely két u és u' hasznossági profilra.

A továbbiakban csak olyan társadalmi jóléti függvényeket vizsgálunk, amelyek által reprezentált társadalmi jóléti rendezések monotonak és anonimek.

Fontos szerepet játszik a következő társadalmi jóléti függvény.

5.4. definíció. A $W_N : \mathbb{R}^N_{++} \to \mathbb{R}$ *Nash-féle társadalmi jóléti függvény*[3] bármely u pozitív elemű hasznossági profilhoz az egyéni hasznosságok szorzatát rendeli, azaz $W_N(u) = \prod_{i \in N} u_i$.

5.3. Elosztások társadalmi jóléti függvényekkel

A társadalmi jóléti függvények elosztási problémák megoldására is használhatók, mint azt a következő három példa is megmutatja.

5.4. példa (Létesítmény elhelyezése)**.** Egy létesítmény a [0,1] intervallummal reprezentált lineáris városban (vagy a város főútja mentén) helyezendő el. Az $i \in N$ szereplő lakóhelyét az $x_i \in [0{,}1]$, míg a létesítmény (pl. kórház, tűzoltóság stb.) helyét az $y \in [0{,}1]$ adja meg. Jelölje $d_i(x_i) = |y - x_i|$ az i szereplő költségét (a hasznossága ennek ellentettje), hogy lakóhelyéről eljusson a létesítménybe.

A létesítményt egy „fair kompromisszum" alapján szeretnénk elhelyezni. Keressük elsőként az egalitariánus megoldást! A legrosszabbul járó szereplők a létesítménytől legtávolabb lakó szereplők. Ha ennek az értékét szeretnénk minimalizálni, akkor

$$y_e = \frac{1}{2}\left(\max_{i \in N} x_i + \min_{i \in N} x_i\right)$$

a megoldásunk, amivel a két legtávolabbi szereplő egyforma távol kerül a létesítménytől.

A klasszikus utilitariánus megoldást az egyszerűség kedvéért csak páratlan sok szereplő esetén határozzuk meg (a páros esetet illetően lásd az 5.1. feladatot). Ekkor a megoldás – feltéve hogy mindenki máshol lakik –

$$y_u = \text{median}(x_1, \ldots, x_n),$$

[3] W_N-ben az alsó index Nash-re utal és nem a szereplők halmazára.

amelynek helyessége könnyen ellenőrizhető, mivel bármely más $y \neq y_u$ elhelyezés esetén a szereplők kevesebb mint felének csökkenthető a költsége legfeljebb $|y - y_u|$-val, míg több mint a felének növekszik a költsége $|y - y_u|$-val, ha a létesítményt áthelyezzük y-ból y_u-ba. Tehát az 5.4. példának y_u az egyértelmű klasszikus utilitariánus megoldása.

Nézzünk egy másik példát:

5.5. példa (Időelosztás)**.** Egy közös helyiségben n szereplő rádiót hallgat, amelyen k állomás közül választhatnak. Minden szereplő pontosan egy, általa kedvelt rádióállomás hallgatását élvezi. Az $i \in K = \{1, \ldots, k\}$ állomást kedvelő szereplők halmaza $N_i \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$ és a számuk $n_i = |N_i|$, ahol $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Normáljuk a közös helységben eltöltött időt egyre és legyen az i állomás $x_i \geq 0$ ideig hallható. Feltéve, hogy az időt teljesen kihasználjuk $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$. Ha a $j \in N_i$ szereplő az i állomást kedveli, akkor a hasznossága legyen $u_j = x_i$.

El kell döntenünk, hogy melyik csatorna mennyi ideig legyen hallható. Először meghatározzuk az egalitariánus megoldást. Jelölje $K^* \subseteq K$ azon csatornákat, amelyeket legalább egy szereplő kedvel. Továbbá legyen $k^* = |K^*|$. Ekkor az egalitariánus megoldás szerint minden $i \in K^*$ csatorna pontosan $x_i = 1/k^*$ ideig lesz hallható, mert akkor jár a legkisebb hasznosságú szereplő a legjobban, ugyanis máskülönben lenne olyan szereplő, akinek a hasznossága $1/k^*$-nál kisebb volna.

Térjünk rá a klasszikus utilitariánus megoldásra. Tegyük fel, hogy egyetlen csatorna élvezi a legnagyobb támogatottságot. Ekkor végig a legnagyobb támogatottságú csatorna lesz hallható, hiszen

$$\sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i,$$

ami akkor lesz a legnagyobb, ha legnagyobb n_i a lehető legnagyobb súlyt kapja. Megjegyzendő, hogy ha több legnagyobb támogatottságú csatorna is van, akkor ezek között tetszőlegesen osztható el a játékidő.

Végül határozzuk meg a megoldást a Nash-féle társadalmi jóléti függvény segítségével is. Ekkor

$$\max W_N(u) = \max \prod_{j=1}^{n} u_j = \max \prod_{i=1}^{k} \prod_{j \in N_i} x_j = \max \prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}$$

feltéve, hogy $x_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$. A feladat ekvivalens a $\max \sum_{i=1}^{k} n_i \log x_i$ feltéve, hogy $x_i > 0$ és $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$ feltételes szélsőérték számítási feladattal, mivel a határponti megoldás $W_N(u) = 0$-át adna, miközben elérhető a pozitív összhasznosság. A feltételes szélsőérték számítási feladat Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} n_i \log x_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^{k} x_i - 1 \right).$$

Megjegyzendő, hogy valójában a nemnegativitási feltételek miatt a Kuhn–Tucker-feltételeket kellene felírni, de látni fogjuk, hogy a nemnegativitási feltételek nélküli feladat megoldása a szimplex egy belső pontját adja, amely ellenőrizhetően maximumhelyet szolgáltat. Tehát írjuk fel a Lagrange-függvényhez tartozó elsőrendű feltételeket:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_k, \lambda) = \frac{n_i}{x_i} - \lambda = 0,$$

amiből $n = \sum_{i=1}^{k} \lambda x_i = \lambda$, és ezért $x_i = n_i/n$ minden $i \in K$ csatornára.

A harmadik példánk az 5.5. példa egy módosítása. Megengedjük, hogy az egyes szereplők a kedvelt csatornájuk hallgatásához eltérő élvezeti szintet (hasznosságot) tulajdoníthassanak. Tehát a $j \in N_i$ szereplő $u_j = x_i$ hasznossága helyébe az $u_j = a_j x_i$ hasznosság lép, ahol $a_j > 0$ egy szereplőspecifikus konstans. Ezen módosítás után az egalitariánus megoldás

$$\forall i \in K : x_i = \frac{c}{\min\{a_j \mid j \in N_i\}}, \quad \text{ahol } c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\min\{a_j \mid j \in N_i\}}}, \tag{5.1}$$

mivel az azonos $i \in K$ rádióadót kedvelők közül a legrosszabban járó a $j_i \in$ $\in \arg\min_{j \in N_i} a_j$ személy, akinek a hasznossága $x_i a_{j_i}$, és ezért az $x_i a_{j_i}$ értékeket kell i szerint egyenletessé tenni, mert különben ettől eltérve valamelyik j_i szereplő hasznossága növelhető volna egy másik szereplő kárára, ezzel növelve az egalitariánus társadalmi jóléti függvény értékét. Ha ránézünk az (5.1) megoldásra észrevesszük, hogy amennyiben a szereplők maguk adhatják meg a hasznossági szintjüket, akkor j a valódi a_j érték helyett egyoldalúan egy kisebb a'_j érték megadásával növelheti az általa kedvelt csatorna játékidejét, ezzel növelve a hasznosságát.

Több egyforma súlyozott támogatottságú rádióállomás esetétől eltekintve, ahol egy csatorna súlyozott támogatottsága alatt a $\sum_{j \in N_i} a_j$ érték értendő, a klasszikus utilitariánus társadalmi jóléti függvény esetén most is $x_i = 1$ adódik a legnagyobb súlyozott támogatottságú csatornára, mivel

$$\sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \in N_i} a_j x_i$$

akkor lesz a legnagyobb, ha a legnagyobb súlyozott támogatottságú csatorna a lehető legnagyobb súlyt kapja. Megjegyzendő, hogy ha több legnagyobb súlyozott támogatottságú csatorna is van, akkor ezek között tetszőlegesen osztható el a játékidő. Egy másik érdekes észrevétel, hogy a valódi a_j érték helyett egyoldalúan egy nagyobb a'_j érték megadásával j növelheti az általa kedvelt csatorna játékidejét, ha ezzel legnagyobb támogatottságú csatornává teszi.

A Nash-féle társadalmi jóléti függvényt csak felírjuk, a hozzá tartozó feladat megoldását az olvasóra bízzuk. A maximalizálandó célfüggvény

$$\log W_N(u) = \sum_i \sum_{j \in N_i} \log(x_i a_j) = \left(\sum_{j \in N} \log a_j \right) + \sum_{i \in K} n_i \log x_i.$$

Vegyük észre, hogy a maximumhely független az a_j személyes értékelésektől, tehát a Nash-féle társadalmi jóléti függvény esetében nem érdemes valótlan értékeléseket megadni a szereplőknek, ellentétben a másik két nevezetes társadalmi jóléti függvénnyel. A következő alfejezetben azt is megmutatjuk, hogy az összes társadalmi jóléti függvény közül csak a Nash-féle rendelkezik ezzel a kitüntetett tulajdonsággal.

5.4. Nevezetes társadalmi jóléti függvények karakterizációi

Mielőtt végigtárgyalnánk néhány nevezetes karakterizációt, szükségünk lesz Roberts (1980a) reprezentációs tételére, amely a gyenge reprezentáció fogalmát igényli.

5.5. definíció. A $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ társadalmi jóléti függvény *gyengén reprezentálja* a $\succeq$ társadalmi jóléti rendezést, ha bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$-re $W(x) > W(y)$-ból következik $x \succ y$.

A gyenge reprezentációból következik, hogy $y \succeq x$ implikálja $W(y) \geq$ $\geq W(x)$-et és $y \sim x$ implikálja $W(y) = W(x)$-et.

Roberts következő tétele abból a szempontból erősebb a preferenciarendezések klasszikus reprezentációs tételénél (Eilenberg, 1941, illetve Debreu, 1959), hogy nem követeli meg a rendezés folytonosságát. A tétel alábbi alakját Moulin (1988) fogalmazta meg.

5.1. tétel (Roberts, 1980). *Elégítse ki a $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés az alábbi feltételeket:*

(i) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n : u \succ v \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists u', v' \in \mathbb{R}^n : ||u - u'|| < \varepsilon$, $||v - v'|| < \varepsilon$, $u' > u$, $v' > v$ *és* $u' \succ v'$*;*

(ii) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n : u \succ v \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists u'', v'' \in \mathbb{R}^n : ||u - u''|| < \varepsilon$, $||v - v''|| <$ $< \varepsilon$, $u > u''$, $v > v''$ *és* $u'' \succ v''$*.*

Ekkor $\succeq$ gyengén reprezentálható egy folytonos társadalmi jóléti függvénnyel.

A tételt nem bizonyítjuk. Moulin (1988) könyvében megtalálható Roberts tétele a Moulin által megfogalmazott változatban, a vázlatos bizonyítással.

A klasszikus utilitariánus jóléti függvény jellemzéséhez szükségünk lesz a következő fogalomra:

5.3. axióma. A $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés *nullapont független*, ha

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n : u \succeq v \iff u + w \succeq v + w. \tag{5.2}$$

A tulajdonság elnevezését az indokolja, hogy az (5.2) feltételben bármely w vektorral történő eltolás nem változtat a két másik vektor összehasonlításának kimenetelén, ami azt eredményezi, hogy minden szereplő – egymástól függetlenül, szabadon – megválaszthatja saját mérési skálájának nullpontját anélkül, hogy változtatna a társadalmi jóléti rendezésen. Például mindegy, hogy Kelvinben vagy Celsius-fokban mérjük a hőmérsékletet. Ellenőrizhető, hogy a nullapont függetlenség (5.2) feltétele ekvivalens a

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : u \succeq v \iff u - v \succeq 0$$

feltétellel, ahol 0 az $\mathbb{R}^n$ nullvektorát jelöli.

5.2. tétel (D'Aspremont–Gevers, 1977)**.** *A klasszikus utilitariánus társadalmi jóléti függvény nullapont független. Fordítva, egy nullapont független társadalmi jóléti rendezés gyengén reprezentálható a klasszikus utilitariánus társadalmi jóléti függvénnyel.*

Bizonyítás. Az állítás első része triviális. Legyen a $\succeq$ nullapont független. Ekkor $u \succ v$ esetén $(u + \varepsilon e) \succ (v + \varepsilon e)$ és $(u - \varepsilon e) \succ (v - \varepsilon e)$, ahol $e = (1, \ldots, 1)$. Ezért Roberts tétele alapján $\succeq$ gyengén reprezentálható egy folytonos W társadalmi jóléti függvénnyel. Vegyünk egy rögzített $w \in \mathbb{R}^n$ vektort és legyen

$$A = \{u \in \mathbb{R}^n \mid W(u) > W(w)\} \text{ és } B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid W(u) < W(w)\}.$$

A és B nyílt halmazok, és belátjuk, hogy konvexek is. Legyen $x, y \in A$ és $u = (x + y)/2$. Külön vizsgáljuk az (i) $W(u) \geq W(y)$ és a (ii) $W(u) < W(y)$ eseteket. Az (i) esetben $W(u) \geq W(y) > W(w)$, és ezért $u \in A$. A (ii) esetben a gyenge reprezentálhatóság miatt $W(u) < W(y)$-ból következik $y \succ u$, amiből a nullapont függetlenség miatt $y + (u - y) \succ u + (u - y)$ adódik. Az utóbbival ekvivalens $u \succ 2u - y = x$-ből adódik $W(u) > W(x) > W(w)$, tehát $u \in A$. Hasonlóan igazolható B konvexitása.

A $\succeq$ monotonitásából adódóan a w-n átmenő G közömbösségi görbének, amely az $\mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$ halmazzal azonos, üres a belseje. A szeparációs tételekből adódóan, mivel A és B is konvex, a két halmazt elválasztó G közömbösségi görbe egy hipersík. Mivel $\succeq$ anonim, ezért G párhuzamos a szimplexszel.

Tehát W a klasszikus utilitariánus társadalmi jóléti függvénnyel azonos rendezést definiál. □

A Nash-féle társadalmi jóléti függvény jellemzése a következő fogalmat igényli.

5.4. axióma. Legyen $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés az $\mathbb{R}_{++}$ halmaz felett. Ekkor $\succeq$ *skálafüggetlen*, ha

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n_{++} : u \succeq v \iff u \bullet w \succeq v \bullet w, \tag{5.3}$$

ahol $u \bullet w = (u_1 w_1, \ldots, u_n w_n)$.

Az (5.2) feltétel szerint bármelyik szereplő külön-külön áttérhet egy másik mértékegységre. Például az egyik szereplő forintról áttérhet dollárra, miközben a többiek áttérnek forintról euróra. Ellenőrizhető, hogy a skálafüggetlenség (5.3) feltétele ekvivalens a

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n_{++} : u \succeq v \iff u \div v \succeq e = (1, \ldots, 1)$$

feltétellel, ahol $u \div v = (u_1/v_1, \ldots, u_n/v_n) \in \mathbb{R}^n$.

5.3. tétel. *A Nash-féle társadalmi jóléti függvény skálafüggetlen. Fordítva, egy skálafüggetlen $\mathbb{R}_{++}$ feletti társadalmi jóléti rendezés gyengén reprezentálható a Nash-féle társadalmi jóléti függvénnyel.*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy a Nash-féle társadalmi jóléti függvény skálafüggetlen.

Legyen a $\succeq \subseteq \mathbb{R}^{2n}_{++}$ társadalmi jóléti rendezés skálafüggetlen. Ekkor rendeljük $\succeq$-hez a következőképpen definiált $\succeq^* \subseteq \mathbb{R}^n$ társadalmi jóléti rendezést:

$$u \succeq^* v \iff (e^{u_1}, \ldots, e^{u_n}) \succeq (e^{v_1}, \ldots, e^{v_n}).$$

Először meggyőződünk arról, hogy $\succeq$ pontosan akkor skálafüggetlen, ha $\succeq^*$ nullapont független. Adott $u, v, w \in \mathbb{R}^n$-hez legyenek rendre

$$u' = (u'_1, \ldots, u'_n) = (e^{u_1}, \ldots, e^{u_n}),$$
$$v' = (v'_1, \ldots, v'_n) = (e^{v_1}, \ldots, e^{v_n})$$

és

$$w' = (w'_1, \ldots, w'_n) = (e^{w_1}, \ldots, e^{w_n}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} u' \succeq v' &\iff u \succeq^* v \iff u + w \succeq^* v + w \iff \\ &\iff (e^{u_1} e^{w_1}, \ldots, e^{u_n} e^{w_n}) \succeq (e^{v_1} e^{w_1}, \ldots, e^{v_n} e^{w_n}) \iff \\ &\iff (u'_1 w'_1, \ldots, u'_n w'_n) \succeq (v'_1 w'_1, \ldots, v'_n w'_n) \iff \\ &\iff u' \bullet w' \succeq v' \bullet w'. \end{aligned}$$

Tehát a $\succeq^*$ nullapont függetlensége implikálja a $\succeq$ skálafüggetlenségét, és a fordított irányú implikáció is adódik az ekvivalenciasorozatból, az ekvivalenciasorozat más sorrendben történő felírásával.

Ezek után ellenőrizzük, hogy $\succeq$ Nash-féle társadalmi jóléti függvénnyel való reprezentálhatósága ekvivalens $\succeq^*$-nak az utilitariánus társadalmi jóléti függvénnyel való reprezentálhatóságával:

$$u' \succeq v' \iff u \succeq^* v \iff \sum_{i=1}^{n} u_i \geq \sum_{i=1}^{n} v_i \iff e^{\sum_{i=1}^{n} u_i} \geq e^{\sum_{i=1}^{n} v_i} \iff$$

$$\iff \prod_{i=1}^{n} u_i' \geq \prod_{i=1}^{n} v_i'.$$

Végül az 5.2. tételből adódik a bizonyítandó állításunk. □

A leximin társadalmi jóléti rendezés jellemzéséhez szükségünk lesz a *Hammond-féle igazságossági elvre*, amely szerint ha egy hasznossági profilban, bármely két szereplőre korlátozódva, a kisebb hasznosságú szereplő hasznossága növekszik és a nagyobb hasznosságú szereplőé csökken a kettejük közti nagyságrendi reláció megfordulása nélkül, akkor egy társadalmilag nem rosszabb hasznossági profilt kapunk. Például az $u = (2{,}8{,}5)$ hasznossági profillal szemben előnyben részesítendő az $u' = (3{,}6{,}5)$ hasznossági profil.

5.5. axióma. A $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés kielégíti a *Hammond-féle igazságossági elvet*, ha bármely két $i, j \in N$ szereplőre, bármely $u = (u_k)_{k \in N} \in \mathbb{R}^N$ hasznossági profilra és bármely olyan két $v_i, v_j \in \mathbb{R}$ hasznossági szintre, amelyre $u_j > v_j > v_i > u_i$ teljesül

$$(v_i, v_j, u_{-ij}) \succeq u.$$

A továbbiakban azt mondjuk, hogy a fenti $u_j > v_j > v_i > u_i$ feltételnek eleget tevő $v = (v_i, v_j, u_{-ij})$ *Hammond-dominálja* u-t.

Bevezetjük a leximin$_m$ rendezéseket ($m = 2{,}3, \ldots, n$), amelyeket a leximin rendezés m-elemű szereplőhalmazokra történő alkalmas megszorítása segítségével nyerünk. Pontosabban a $\succeq$ egy $\mathbb{R}^n$ feletti leximin$_m$ rendezés, ha a szereplők bármely m elemű $M \subseteq N$ részhalmazára és bármely olyan két $u, v \in \mathbb{R}^N$ hasznossági profilra, amelyre $u_i = v_i$ az $N \setminus M$-beli szereplőkre, $u \succeq v$ azzal ekvivalens, hogy u^M az m szereplős leximin társadalmi jóléti rendezés szerint legalább olyan jó (gyengén preferált), mint v^M, ahol $u^M = (u_i)_{i \in M}$ és $v^M = (v_i)_{i \in M}$. Ellenőrizhető, hogy a leximin rendezés maga egy leximin$_m$ rendezést ad bármely $m = 2{,}3, \ldots, n$-re. Nyilván leximin$_n$ maga a leximin rendezés. A következő tétel szerint már a leximin$_2$ meghatározza a leximin rendezést.

5.4. tétel (Sen, 1977). *Ha a* $\succeq$ *egy* $\mathbb{R}^n$ *feletti leximin*$_2$ *társadalmi jóléti rendezés, akkor* $\succeq$ *bármely* $m = 3, \ldots, n$*-re a leximin társadalmi jóléti rendezés.*

Az állítás nem meglepő volta ellenére a bizonyítása meglehetősen hosszadalmas, ezért az érdeklődő olvasónak Sen (1977) cikkét ajánljuk figyelmébe.

A leximin társadalmi jóléti rendezés alábbi karakterizációs tételét Bossert–Weymark (2004) gondolatmenetét követve bizonyítjuk.

5.5. tétel (D'Aspremont–Gevers, 1977). *A leximin társadalmi jóléti rendezés kielégíti a Hammond-féle igazságossági elvet. Fordítva, egy a Hammond-féle igazságossági elvet kielégítő társadalmi jóléti rendezés szükségszerűen a leximin társadalmi jóléti rendezés.*

Bizonyítás. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a leximin kielégíti a Hammond-féle igazságossági elvet.

Legyen $\succeq$ egy, a Hammond-féle igazságossági elvet kielégítő társadalmi jóléti rendezés. Elegendő megmutatni, hogy $\succeq$ egy leximin$_2$ társadalmi jóléti rendezés bármely rögzített két szereplő esetén. Vegyünk két $i, j \in N$ szereplőt és olyan $v \in \mathbb{R}^n$ hasznossági profilt, amelyre $v_i > v_j$. Legyenek

$$\begin{aligned} X^v &= \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in N \setminus \{i,j\} : u_k = v_k\}, \\ X_> &= \{u \in X^v \mid u_i > u_j,\ u \neq v\}, \\ X_= &= \{u \in X^v \mid u_i = u_j\} \text{ és} \\ X_< &= \{u \in X^v \mid u_i < u_j\}. \end{aligned}$$

Előbb megmutatjuk, hogy $\succeq$ bármely X^v-beli vektort v-hez képest a leximin$_2$ szerint hasonlít össze. Mivel az $u = v$ eset nyilvánvaló $\succeq$ reflexivitása miatt, csak $u \neq v$-vel kell foglalkozni.

Egy $u \in X_>$ hasznossági profil esetén $u \neq v$, $u_i > u_j$ és $v_i > v_j$ miatt az (i) $u \geq v$ és $u \neq v$, a (ii) $v_i > u_i > u_j > v_j$, a (iii) $v > u$ és $v \neq u$, és a (iv) $u_i > v_i > v_j > u_j$ esetszétválasztással élhetünk. Az (i) esetben $\succeq$ monotonitása miatt $u \succ v$, míg a (ii) esetben a Hammond-dominancia miatt ugyancsak $u \succ v$. Hasonlóan adódik a (iii) és (iv) esetekben $v \succ u$.

Térjünk rá az $u \in X_=$ hasznossági profilokra, amelyekre (i) $u \geq v$ és $u \neq v$ (ii) $v \geq u$ és $u \neq v$, (iii) $v_i > u_i = u_j > v_j$. Az (i) és (ii) esetekben $\succeq$ monotonitása miatt rendre $u \succ v$ és $v \succ u$. (iii) esetén választhatunk olyan $u' \in X^v$ és $u' < u$ hasznossági profilt, amely Hammond-dominálja v-t, és ezért $u' \succ v$, továbbá a monotonitás miatt $u \succ u'$. Végül $\succeq$ tranzitivitásából adódik $u \succ v$.

Bármely $u \in X_<$ hasznossági profil az anonimitás segítségével visszajátszható egy vele indifferens (közömbös) $u' \in X_>$ hasznossági profilra, amelyet az u_i és u_j hasznosságok felcserélésével nyerünk. Az eddigieket összegezve bármely X^v-beli hasznossági profilt v-vel összevetve a leximin$_2$ rendezést kaptuk.

Végül megállapíthatjuk, hogy szerepcserével adódik az eredmény $v_j < v_i$ esetén, továbbá a fentiek alapján külön ellenőrizhető a $v_i = v_j$ eset, amely ráadásul kevesebb esetet ad. □

Az alfejezet utolsó eredményeként megadjuk az egalitariánus társadalmi jóléti rendezés karakterizációját, amelyhez két újabb tulajdonságra lesz szükségünk.

5.6. axióma. A $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés *független a szigorúan monoton transzformációktól*, ha bármely szigorúan monoton növekvő $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : u \succeq v \iff F(u) \succeq F(v)$$

teljesül, ahol $F(u) = (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n))$.

Jelölje például az u a szereplők adózás előtti és a $v = F(u)$ ugyanazon szereplők adózás utáni jövedelmeit. Ez esetben a monoton transzformációktól való függetlenség teljesülése esetén mindegy, hogy a társadalmi döntést az adózatlan, vagy az adózott jövedelmek felhasználásával hozzuk meg. Adott adószabály esetén ez indokolt is, hiszen az adózott és az adózatlan jövedelmek kiszámolhatóak egymásból.

A *Pigou–Dalton-féle transzfer elv* szerint, ha egy hasznossági profilban két szereplő közötti különbség csökken, akkor egy társadalmilag jobb hasznossági profilt kapunk. Másképpen mondva, a Pigou–Dalton-féle transzfer elv előnyben részesíti a hasznossági szintek egyenlőbb elosztását, például $u = (2{,}8{,}5)$ hasznossági profillal szemben előnyben részesítendő az $u' = (3{,}7{,}5)$ hasznossági profil.

5.7. axióma. A $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés kielégíti a *Pigou–Dalton-féle transzfer elvet*, ha bármely két $i, j \in N$ szereplőre, bármely $u = (u_k)_{k \in N} \in \mathbb{R}^N$ hasznossági profilra és bármely olyan két $u'_i, u'_j \in \mathbb{R}$ hasznossági szintre, amely kielégíti az $u_i + u_j = u'_i + u'_j$ és az $|u_i - u_j| \geq |u'_i - u'_j|$ összefüggéseket, teljesül

$$\left(u'_i, u'_j, u_{-ij}\right) \succeq u.$$

5.6. tétel. *Az egalitariánus társadalmi jóléti rendezés független a monoton transzformációktól és kielégíti a Pigou–Dalton-féle transzfer elvet. Fordítva, egy monoton transzformációktól független és a Pigou–Dalton-féle transzfer elvet kielégítő társadalmi jóléti rendezés gyengén reprezentálható az egalitariánus társadalmi jóléti függvénnyel.*

A tétel bizonyítása megtalálható Moulin (1988) monográfiájában.

5.5. Additív társadalmi jóléti függvények

Bevezetjük a társadalmi jóléti függvények egy egyszerű alosztályát, amely nyilván nagyon sok lehetséges társadalmi jóléti függvényt kizár. Azonban egy hamarosan bevezetésre kerülő tulajdonság elfogadása esetén, az általánosság megszorítása nélkül korlátozhatjuk magunkat a társadalmi jóléti függvényeknek erre az egyszerű osztályára.

5.6. definíció. A W társadalmi jóléti függvény *additív*, ha létezik olyan monoton növekedő $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amellyel $W(u) = \sum_{i \in N} g(u_i)$ bármely u hasznossági profilra.

A társadalmi jóléti függvény definíciójában szereplő g függvényre a továbbiakban *transzformációs* függvényként fogunk hivatkozni.

Az additív társadalmi jóléti függvények jellemzésében kulcsfontosságú szerepet játszik az *érintetlen szereplőktől való függetlenség*. Tegyük fel, hogy két olyan hasznossági profilpárt hasonlítunk össze, amelyekben az egy párba tartozó hasznossági profilokban az $M \subset N$-beli szereplők hasznossági szintjei azonosak, míg a többieké a párok megfelelő tagjaiban változatlanok. Egy négyszereplős példát tekintve, az egyik hasznossági profilpár $u = (6{,}3{,}9{,}1)$ és $u' = (5{,}3{,}7{,}2)$, míg a másik pár $v = (6{,}8{,}9{,}1)$ és $v' = (5{,}8{,}7{,}2)$. Ekkor a két-két hasznossági profilpár összehasonlításakor a második szereplő érintetlen szereplőnek tekinthető ($M = \{2\}$), mivel külön-külön mind az u-u', mind a v-v' párokban a 2 szereplő hasznosságai azonosak, ezért 2 indifferens a párba állított hasznossági profilokkal szemben. Továbbá látható, hogy u-ban és v-ben a többi (2-től különböző) szereplő értékelései azonosak, és hasonló igaz u' és v' viszonylatában. Ezért a 2-es szereplő „érintetlensége” miatt, ha $u \succeq u'$, akkor $v \succeq v'$ is elvárható, mivel a párok összehasonlítása 2-től független. Az érintetlen szereplőktől való függetlenség előírja a példában megfogalmazott követelmény teljesülését, a példa feltételeinek eleget tevő, tetszőleges hasznossági profilpárok összehasonlítása esetén.

5.8. axióma. A $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés *független az érintetlen szereplőktől*, ha bármely $M \subset N$ nemüres szereplőhalmazra, bármely $u_{-M} = (u_j)_{j \in N \setminus M} \in \mathbb{R}^{N \setminus M}$ és $u'_{-M} = (u'_j)_{j \in N \setminus M} \in \mathbb{R}^{N \setminus M}$ hiányos hasznossági profilokra, bármely $x, y \in \mathbb{R}^M$ hiányos hasznossági profilokra

$$(u_{-M}, x) \succeq (u'_{-M}, x) \Leftrightarrow (u_{-M}, y) \succeq (u'_{-M}, y).$$

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad az additív társadalmi jóléti függvény alkalmazhatóságára.

5.7. tétel. *A $\succeq$ folytonos*[4] *társadalmi jóléti rendezés akkor és csak akkor reprezentálható egy additív társadalmi jóléti függvénnyel, ha $\succeq$ független az érintetlen szereplőktől.*

A tétel bizonyítása meghaladja a tankönyv kereteit. A bizonyítás vázlata megtalálható Blackorby és társainak (2002) áttekintésében.

Az utolsó karakterizációs tételünkhöz szükségünk lesz a *közös mértékegységtől való függetlenség* tulajdonságára, amely alapján ha a szereplők egy közös mértékegységgel mérik a hasznosságaikat és áttérnének egy másik közös mértékegységre, az lényegében nem változtathat a társadalmi rendezésen. A közös mértékegységtől való függetlenséget homogenitásnak is szokás nevezni.

5.9. axióma. A $\succeq$ társadalmi jóléti rendezés *független a közös mértékegységtől*, ha bármely két $u = (u_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^N_+$ és $u' = (u'_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^N_+$ hasznossági profilra és bármely $\lambda \in \mathbb{R}_+$ átváltási arányra

$$u \succeq u' \Leftrightarrow \lambda u \succeq \lambda u'.$$

Ha még a közös mértékegységtől való függetlenséget is feltételezzük, akkor az additív társadalmi jóléti függvény definíciójában szereplő g transzformációs függvény csak nagyon speciális alakot ölthet.

5.8. tétel (Roberts, 1980)**.** *Ha a $W : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ additív társadalmi jóléti függvényt generáló g transzformációs függvény monoton növekedő és folytonos, továbbá a W-hez tartozó társadalmi jóléti rendezés független a közös mértékegység megválasztásától, akkor g szükségszerűen*

$$g(z) = cz^p \ (p > 0), \quad g(z) = c\log(z) \ \textit{ vagy } \ g(z) = -cz^{-q} \ (q > 0) \tag{5.4}$$

alakú, ahol $c > 0$ tetszőleges konstans.

A fenti tétel rámutat a hatvány, a logaritmus és a hiperbolikus függvények központi szerepére. A c konstanst elhagyva (azaz egynek választva) az (5.4) által adott transzformációs függvényeket rendre $W_p(u)$-val, $W_0(u)$-val és $W^q(u)$-val jelöljük. A $W_1(u) = \sum_{i\in N} u_i$ klasszikus utilitariánus társadalmi jóléti függvény. A tétel bizonyításának vázlata megtalálható Moulin (1988) monográfiájában.

Megjegyzendő, hogy

$$\log W_N(u) = \log \prod_{i\in N} u_i = \sum_{i\in N} \log u_i = W_0(u),$$

és ezért W_N és W_0 ugyanazt a társadalmi jóléti rendezést definiálja.

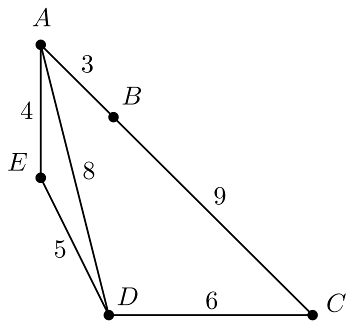
[4] A preferenciarendezések folytonossága már Sprumont-tételénél előjött a 2. fejezetben.

5.6. Gyakorló feladatok

5.1. feladat. Határozza meg a létesítmény elhelyezését az 5.4. példára a klasszikus utilitariánus társadalmi jóléti függvény segítségével páros számú szereplő esetén!

5.2. feladat. Határozza meg a létesítmény elhelyezését az 5.4. példára a Nash-féle társadalmi jóléti függvény segítségével!

5.3. feladat. Az A, B, C, D és E szereplők közötti összeköttetések az 5.1. ábra által adottak. Egy él λ részén való közlekedés költsége λx, ahol x a teljes élen való áthaladás költsége. Egy klasszikus utilitariánus tervező a szereplők összhasznosságának maximalizálásával egy létesítményt kíván elhelyezni a hálózatban (egy élen vagy egy csúcson). Hol helyezze el a létesítményt?



5.1. ábra. Létesítmény elhelyezése hálózaton

5.4. feladat. Igazolja, hogy a W additív társadalmi jótéti függvény által generált rendezés pontosan akkor elégíti ki a Pigou–Dalton-féle transzfer elvet, ha a g transzformációs függvény konkáv!

5.5. feladat. Igazolja, hogy a W^∞ a leximin társadalmi jóléti rendezést generálja, ahol W^∞ a W^q-ban q-val végtelenbe tartva adódik! A konvergencia a következőképpen értendő: ha $u, v \in \mathbb{R}^n$ olyan hasznossági profilok, amelyekre $W^q(u) \geq W^q(v)$ kellően nagy q-ra, akkor u-t preferálja a leximin társadalmi jóléti rendezés a v-vel szemben.

5.6. feladat. Igazolja, hogy a W_{0+} a Nash-féle társadalmi jóléti rendezéssel ekvivalens (azaz azonos rendezéseket generálnak), ahol W_{0+} a W_p-ben p-vel nullához tartva adódik!

5.7. feladat. Milyen logikai kapcsolat van a Hammond-féle igazságossági elv és a Pigou–Dalton-féle transzfer elv között?

6. fejezet

Elosztások meghatározása szavazással

Ebben a fejezetben közösségi döntések szavazással történő meghozásával foglalkozunk, amelyek a mi esetünkben elsősorban elosztások közötti választást jelentenek. A kardinális jóléti megközelítéssel szemben nem várjuk el, hogy a szereplők képesek legyenek az egyes kimenetelek (alternatívák) számszerű értékelésére. Viszont a szereplők legalább az alternatívák rangsorolására képesek, amelyeket begyűjtve egy központi szervezet egy előre meghatározott szavazási eljárás alapján kiválasztja a közösség alternatíváját.

Megismerkedünk néhány nevezetes szavazási eljárással, majd azok alkalmazásaként újra megoldjuk az 5. fejezetben társadalmi jóléti függvények segítségével vizsgált problémákat. A fejezetet néhány alapvető szavazáselméleti eredménnyel zárjuk.

6.1. Bevezetés a szavazáselméletbe

Adott egy legalább háromelemű véges A *alternatívahalmaz*, amely a közösségi döntések lehetséges kimeneteleinek halmaza. Itt gondolhatunk például elnökjelöltekre, lehetséges projektekre vagy elosztásokra. Jelölje L az A alternatívahalmaz feletti lineáris rendezések (sorrendek) halmazát és $N = \{1, \dots, n\}$ a szereplők, a továbbiakban a szavazók halmazát. L-re, mint a preferenciarendezések vagy rangsorok halmazára is hivatkozunk, és L^n-re pedig mint a preferenciaprofilok (röviden profilok) halmazára. Jelölje $top(\succ)$ a $\succ \in L$ rangsor legkedveltebb alternatíváját. Az összes szavazó rangsorolásának ismeretében képesnek kell lennünk az alternatívák társadalmi rangsorolására, vagy legalább egy alternatíva kiválasztására, amihez a következő fogalmak kapcsolódnak.

6.1. definíció. Az $F : L^n \to L$ egy *társadalmi választási szabály.*

6.2. definíció. Az $f : L^n \to A$ egy *társadalmi választási függvény.*

Megjegyzendő, hogy az F társadalmi választási szabályhoz természetes módon hozzárendelhető a következőképpen definiált f társadalmi választási függvény:

$$f(\succ_1, \ldots, \succ_n) = top(F(\succ_1, \ldots, \succ_n))$$

bármely $(\succ_1, \ldots, \succ_n) \in L^n$ profilra. Mivel a társadalmi választási függvénytől megköveteljük egy alternatíva kiválasztását és – mint látni fogjuk – a társadalmi választási függvény eredményének kiszámításához használt szavazási eljárások holtversenyeket eredményezhetnek, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy holtversenyek esetén a legkisebb indexű szereplő rangsorolása a döntő.[1] Hasonló módon oldjuk fel a társadalmi választási szabály kiszámítása során adódó holtversenyeket.

Nézzünk egy háromalternatívás példát:

6.1. példa. Tekintsük az alábbi három lehetséges sorrendet

$\succ$	$\succ'$	$\succ''$
b	c	a
c	b	b
a	a	c

és legyen 9, 10, 11 fő sorrendje rendre $\succ$, $\succ'$, $\succ''$.

A 6.1. példán illusztráljuk a három, általunk ismertetésre kerülő szavazási eljárást. Kezdjünk a relatív többségi szavazással, amely eredményének meghatározásához csak a szavazók legkedveltebb alternatíváinak ismerete szükséges. Ezért a relatív többségi szavazás megvalósítása során szavazónként csak egy alternatívára kell szavazni. Az $x \in A$ alternatíva társadalmilag legalább olyan jó, mint az $y \in A$ alternatíva, ha az n szavazó közül legalább annyian szavaztak x-re, mint y-ra. A társadalmi választási függvény által kiválasztott alternatíva egy legtöbb szavazatot kapó alternatíva.

6.3. definíció. A *relatív többségi szavazás* F^T társadalmi választási szabálya szerint $\forall a, b \in A : \forall(\succ_1, \ldots, \succ_n) \in L^n$:

$$a \succ^T b \iff \begin{array}{ll} |\{i \in N \mid a = top(\succ_i)\}| > |\{i \in N \mid b = top(\succ_i)\}| & \text{vagy} \\ |\{i \in N \mid a = top(\succ_i)\}| = |\{i \in N \mid b = top(\succ_i)\}| & \text{és } a \succ_1 b, \end{array}$$

ahol $\succ^T = F^T(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

[1] Ez egy a sok lehetséges úgynevezett *törési szabály* közül. A legkézenfekvőbb törési szabályok az alternatívahalmaz fölötti vagy a szereplők halmaza fölötti előre rögzített lineáris rendezés segítségével oldják fel a holtversenyeket.

Tekintsük a 6.1. példát: Stratégiai megfontolásoktól eltekintve, mindenki a legkedveltebb alternatívájára szavaz, ezért a relatív többségi szavazás F^T társadalmi választási szabálya az $a \succ^T c \succ^T b$ sorrendet adja, míg az f^T társadalmi választási függvénye az a alternatívát választja ki. Mivel a a sokak által legkevésbé kedvelt alternatíva, a relatív többségi szavazás eredménye vitatható.

Jean-Charles de Borda a XVIII. század második felében a következő eljárást javasolta a Francia Királyi Tudományos Akadémia vezető tisztségviselőinek megválasztásához.[2] Bármely személy legkedveltebb alternatívája $n-1$, második legkedveltebb $n-2$, míg legkevésbé kedvelt alternatívája 0 pontot kap. Majd a társadalmi rangsort az összpontszámok csökkenő sorrendje határozza meg, és a társadalmilag kiválasztott alternatíva egy legnagyobb össszpontszámú alternatíva. Jelölje $bp(a, \succ) = |\{b \in A \mid a \succ b\}|$ az $a \in A$ alternatíva Borda-pontszámát a $\succ \in L$ preferencia esetén.

6.4. definíció. A *Borda-szavazás* F^B társadalmi választási szabálya szerint $\forall a, b \in A : \forall(\succ_1, \dots \succ_n) \in L^n$:

$$\begin{aligned} a \succ^B b \iff & \sum_{i=1}^n bp(a, \succ_i) > \sum_{i=1}^n bp(b, \succ_i) \quad \text{vagy} \\ & \sum_{i=1}^n bp(a, \succ_i) = \sum_{i=1}^n bp(b, \succ_i) \quad \text{és } a \succ_1 b, \end{aligned}$$

ahol $\succ^B = F^B(\succ_1, \dots, \succ_n)$.

A 6.1. példában a, b és c pontszámai rendre 22, 39 és 29. Tehát $b \succ^B c \succ^B a$ és f^B a b-t választja.

Condorcet márki, Borda kortársa a Borda-szavazással szemben az alternatívák rangsorolásához képest az alternatívák páronkénti összehasonlítását részesítette előnyben. *Condorcet-győztesnek* nevezünk egy $a \in A$ alternatívát, ha az összes többi $b \in A \setminus \{a\}$ alternatívával szemben megnyeri a páronkénti összehasonlításokat, azaz $|\{i \in N \mid a \succ_i b\}| > |\{i \in N \mid b \succ_i a\}|$ minden $b \neq a$-ra. *Condorcet-konzisztens szavazási eljárás* egy olyan szavazási eljárás, amely ha van Condorcet-győztes, akkor azt választja. Több ilyen szavazási eljárás is létezik, amelyek közül a *Copeland-szavazási* eljárást ismertetjük. Vegyük az összes különböző elemű alternatívapárt és hasonlítsuk össze a párok alternatíváit, rendre 2, 1 és 0 pontot adva a szavazók több mint 50%-a, pont 50%-a és kevesebb mint 50%-a által preferált alternatívának. Mindenkit

[2] Borda-szavazással választják például a szlovén parlament két kisebbségi képviselőjét (egy-egy magyar és olasz kisebbségi képviselőt). A Borda-szavazáshoz hasonló eljárások a sportban is elterjedtek, mint például a FIFA aranylabdás labdarugójának megválasztása.

mindenkivel összehasonítva, az alternatívák rangsorolását az összpontszámaik szerinti csökkenő sorrendbe történő rendezésük adja meg. A társadalmi választási függvény által kiválasztott alternatíva egy legnagyobb összpontszámú alternatíva. Jelölje rendre $N(a,b,\succ_1,\ldots,\succ_n) = \{i \in N \mid a \succ_i b\}$, illetve $n(a,b,\succ_1,\ldots,\succ_n) = |\{i \in N \mid a \succ_i b\}|$ azon szavazók halmazát, illetve számát, akik az $a \in A$ alternatívát előnyben részesítik a $b \in A$ alternatívával szemben egy adott $(\succ_1,\ldots,\succ_n) \in L^n$ profil mellett. Legyen

$$\begin{aligned} cp(a,\succ_1,...,\succ_n) = {} & 2\,|\{b \in A \mid n(a,b,\succ_1,\ldots,\succ_n) > n(b,a,\succ_1,\ldots,\succ_n)\}| + \\ & + |\{b \in A \mid n(a,b,\succ_1,\ldots,\succ_n) = n(b,a,\succ_1,\ldots,\succ_n)\}| \end{aligned}$$

az $a \in A$ alternatíva Copeland-pontszáma a $(\succ_1,\ldots,\succ_n) \in L^n$ profil esetén.

6.5. definíció. A *Copeland-szavazás* F^C társadalmi választási szabálya szerint $\forall a,b \in A : \forall(\succ_1,\ldots,\succ_n) \in L^n$:

$$\begin{aligned} a \succ^C b \iff & \sum_{i=1}^{n} cp(a,\succ_1,\ldots,\succ_n) > \sum_{i=1}^{n} cp(b,\succ_1,\ldots,\succ_n) \ \text{ vagy} \\ & \sum_{i=1}^{n} cp(a,\succ_1,\ldots,\succ_n) = \sum_{i=1}^{n} cp(b,\succ_1,\ldots,\succ_n) \text{ és } a \succ_1 b, \end{aligned}$$

ahol $\succ^C = F^C(\succ_1,\ldots,\succ_n)$.

A 6.1. példában b veri a-t 19 a 11-hez, b veri c-t 20 a 10-hez és c veri az a-t 19 a 11-hez. Tehát a Copeland-szavazáshoz tartozó társadalmi választási szabály a $b \succ^C c \succ^C a$ sorrendet adja, és a hozzá tartozó f^C társadalmi választási függvény a b-t választja.

6.2. Elosztási problémák megoldása szavazással

Ebben az alfejezetben megvizsgálunk néhány elosztási problémát. Megoldunk először szavazással egy, az 5.4. példához hasonló problémát.

6.2. példa. Egy létesítmény a [0,1] intervallummal reprezentált lineáris városban helyezendő el. A szavazók lakóhelye $0 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq 1$, míg a létesítmény helyét az $y \in [0,1]$ adja meg. Fejezze ki $d_i(x_i) = |y - x_i|$ az i szavazó költségét, hogy lakóhelyéről eljusson a létesítménybe.[3]

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy páratlan sok szavazónk van ($n = 2k+1$), és legyen $y^* = x_{k+1}$ a medián lakhelyű szavazó. Emlékeztetőül,

[3] Ebből most a preferenciarendezés egycsúcsúsága a fontos.

az y^* adódott megoldásként a klasszikus utilitariánus társadalmi jóléti függvénnyel. A szavazási szituációt tekintve $A = [0,1]$ az alternatívák halmaza,[4] $N = \{1, \ldots, n\}$ és a szavazók preferenciái egycsúcsúak a lakhelyük körül. Szavazáskor a szavazóknak elegendő a létesítmény általuk javasolt elhelyezését megadniuk.[5] Most megmutatjuk, hogy y^* a szavazás Condorcet-győztese. Ehhez csak annyit kell megállapítanunk, hogy bármely $y \neq y^*$ alternatíva a páronkénti összehasonlítás során veszít az y^* alternatívával szemben. Az $y < y^*$ esetet tekintve az $x_{k+1}, \ldots, x_n$ összesen $(n + 1)/2$ szavazó biztosan preferálja az y^* alternatívát az y alternatívával szemben, ami azt jelenti, hogy y^* nyeri az összehasonlítást y-nal szemben. Hasonlóan igazolható $y > y^*$ esete.

A következő példában a szavazók három elosztási szabály közül választhatnak adószabályt.[6]

6.3. példa. Az adózott jövedelmük kiszámításához választ $n = 9$ szavazó a *pro*, az *ug* és az *ul* elosztási szabályok közül. A kilenc fő adózatlan és adózott jövedelmeinek értékeit, ezer forintban megadva, tartalmazza a 6.1. táblázat, ahol a beszedendő adó mértéke $x_N - t = 10\,000$ ezer forint.

6.1. táblázat. Adószabály választása

Adózó	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Bruttó jövedelme	1 000	1 500	2 500	3 000	4 500	5 000	5 000	8 500	9 000
pro	750	1 125	1 875	2 250	3 375	3 750	3 750	6 375	6 750
ug	1 000	1 500	2 500	3 000	4 400	4 400	4 400	4 400	4 400
ul	0	250	1 250	1 750	3 250	3 750	3 750	7 250	7 750

Látható, hogy a 7 legkisebb jövedelmű adózó a *ug*-t választja a *pro*-val és az *ul*-lel szemben, míg a 2 legnagyobb igényű szavazó az *ul*-t választja. A *pro* a páronkénti összehasonlításban mindkét másik elosztási szabállyal szemben alulmarad. Tehát az *ug* elosztási szabály lesz a Condorcet-győztes. Megjegyzendő, hogy más eredményeket kapnánk, ha az adózók nem ismernék

[4] Az előző alfejezettel ellentétben, itt az alternatívahalmaz végtelen, ami nem változtat a Condorcet-győztes definícióján. Bár a relatív többségi, Borda- és Copeland-szavazás nem értelmezett végtelen alternatívahalmaz esetén, a relatív többségi és a Copeland-szavazás mértékelméleti eszközökkel kiterjeszthető erre az esetre is. A Borda-szavazás kiterjesztése már problematikus.

[5] Azaz nem szükséges a teljes preferenciarendezésük megadása, ami a lakhelytől való lineárisan növekvő távolságok miatt nyilvánvaló. Általánosabban, egycsúcsú preferenciák esetén is igazolható, hogy a szavazási eljárás csak az egyének csúcsainak elhelyezkedését használja föl a közösségi döntés meghozatalakor.

[6] Adószabály szavazás útján történő választásával foglalkozott Roberts (1980b).

egymás jövedelmeit, ekkor az informáltságuktól függően eltérő eredményeket kapnánk. A másik szélsőséges esetben – esetleg az elosztási szabályok karakterizációinak ismeretében – a szavazók elvi alapon alakíthatnák preferenciarendezéseiket, és egy három alternatívás általános szavazási problémával állnánk szemben.[7]

A 6.3. példa mögött meghúzódik egy általánosabb elv, amely garantálja a Condorcet-győztes létezését. Az előző 6.2. példához hasonlóan, itt is a lehetséges rangsorolások valamilyen irányú megszorításáról van szó. Moulin (2003) egyszerű modellkeretét tekintve, a szavazók $N = \{1, \dots, n\}$ halmaza valamilyen valós értékű paraméter szerint rendezett, és legyenek a szavazók az adott paraméter $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ értékei szerint növekvően rendezettek. A 6.3. példában a kérdéses paraméter a szavazók bruttó jövedelme. Az úgynevezett *köztes preferenciák* megkövetelik, hogy az $a \in A$ alternatívát a $b \in A$ alternatívánál jobban kedvelő szavazók, „egymás melletti" szavazók legyenek, azaz léteznek olyan $j, k \in N$ szavazók, hogy $N(a, b) = \{i \in N \mid a \succ_i b\} = \{j, j+1, \dots, k-1, k\}$. Ehhez hasonlóan $N(b, a) = \{l, l+1, \dots, m-1, m\}$. Tegyük fel, hogy egyik szavazó számára sem közömbös két alternatíva, azaz szigorúan tudják rangsorolni az alternatívákat, továbbá hogy n páratlan. Ekkor mivel $N = N(a, b) \cup N(b, a)$, ezért az utóbbi két halmaz diszjunkt volta miatt, szükségszerűen $j = 1$ és $m = n$, vagy $k = n$ és $l = 1$.

Megmutatjuk, hogy köztes preferenciák esetén a többségi reláció tranzitív. Legyen $a, b, c \in A$ három olyan alternatíva, amelyekre $|N(a, b)| > n/2$ és $|N(b, c)| > n/2$. Ha $N(a, b) = \{1, \dots, k\}$ és $N(b, c) = \{1, \dots, m\}$, akkor az egyéni preferenciarelációk tranzitivitása miatt $N(a, c) = \{1, \dots, \min\{k, m\}\}$, amely a szavazók többségét jelenti. Hasonlóan járhatunk el az $N(a, b) = \{j, \dots, n\}$ és $N(b, c) = \{l, \dots, n\}$ esetben. Ha $N(a, b) = \{1, \dots, k\}$ és $N(b, c) = \{l, \dots, n\}$, akkor $p = (n + 1)/2$ mindkét halmaz eleme, és ezért $p \in N(a, c)$, továbbá $\{1, \dots, p\} \subseteq N(a, c)$ vagy $\{p, \dots, n\} \subseteq N(a, c)$. Tehát $N(a, c)$ a szavazók többségét tartalmazza. Az előbbi esethez hasonlóan igazolható a többségi reláció tranzitivitása, ha $N(a, b) = \{j, \dots, n\}$ és $N(b, c) = \{1, \dots, m\}$. A köztes preferenciákat ennél jóval általánosabban fogalmazta meg Grandmont (1978) és ilyen preferenciák esetén igazolta a többségi reláció tranzitivitását.

Következő példaként szavazással megoldjuk az 5.5. példát, amely rámutat a Condorcet-győztes hiányának problematikájára. Emlékeztetőül, a problémánk a következő:

6.4. példa (Időelosztás szavazással)**.** Egy közös helyiségben n szereplő egy rádiót hallgat, amelyen k állomás közül választhatnak. Minden szereplő pontosan egy, általa kedvelt rádióállomást szeret hallgatni. Az $i \in K = \{1, \dots, k\}$ állomást kedvelő szereplők halmaza $N_i \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ és a számuk $n_i =$

[7] Bonyolítaná a helyzetet, ha a karakterizációkban szereplő axiómák alkotnák az alternatíva halmazt.

$= |N_i|$, ahol $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Normáljuk a közös helyiségben eltöltött időt 1-re és legyen az i állomás $x_i \geq 0$ ideig hallható. Feltéve, hogy az időt teljesen kihasználjuk $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$.

Az időelosztási problémánk esetén az $k-1$-dimenziós egységszimplex az A alternatívahalmaz és N a szavazók halmaza. Két $x, y \in A$ alternatívát és a $j \in N$ szereplőt tekintve, $x \succ_j y$, ha $x_i > y_i$, és $x \sim_j y$, ha $x_i = y_i$, ahol $j \in N_i$. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy n páratlan. Ha a szavazók több mint fele támogatja az $i \in K$ rádióállomást ($n_i > n/2$), akkor az $x_i = 1$ és $x_j = 0$ minden $j \neq i$-re időelosztás az összes többi időelosztással szemben megnyeri a páronkénti összehasonlítást. Tehát az x a Condorcet-győztes. Ha $n_i < n/2$ minden $i \in K$ állomásra, akkor megmutatjuk, hogy nincsen Condorcet-győztes. Vegyünk egy tetszőleges $x \in A$ időelosztást és válasszuk bármelyik pozitív ideig játszott $i \in K$ csatornát. Ekkor $\alpha = \sum_{l=1, l\neq i}^{k} x_l < 1$ miatt az $N \setminus N_i$-beli szereplők az x időelosztással szemben előnyben részesítik az $y_i = 0$ és $y_l = x_l + (1-\alpha)/(k-1)$ minden $l \neq i$-re elosztást, és mivel ők egyszerű többséget alkotnak, leszavazzák az x időelosztást. Tehát bármelyik alternatíva alulmarad valamelyik másik alternatívával szemben.

6.3. Nevezetes lehetetlenségi tételek

Az elosztások szavazáson keresztüli meghatározása nem problémamentes, ugyanis látni fogjuk, hogy két szemléletes tulajdonság megkövetelése csak nagyon szélsőséges, számunkra elfogadhatatlan társadalmi választási szabályokat enged meg. Az első tulajdonság szerint, ha a társadalom összes szereplője egy a alternatívát előnyben részesít egy b alternatívával szemben, akkor a társadalomnak is az a alternatívát kell előnyben részesítenie a b alternatívával szemben.

6.1. axióma. Az F társadalmi választási szabály *egyhangú*, ha bármely $(\succ_1, \ldots, \succ_n) \in L^n$ preferenciaprofilra

$$\forall a, b \in A : (\forall i = 1, \ldots, n : a \succ_i b) \Rightarrow a \succ b,$$

ahol $\succ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$.

A másik általunk elvárt tulajdonság szerint, nem változik két alternatíva rangsorolása, ha egy preferenciaprofilról egy másik olyan preferenciaprofilra térünk át, amelyben a két alternatíva rangsorolása szavazónként változatlan.

6.2. axióma. Az F társadalmi választási szabály *független az irreleváns alternatíváktól*, ha bármely két $a, b \in A$ alternatívára és bármely két $(\succ_1, \ldots, \succ_n)$, $(\succ'_1, \ldots, \succ'_n) \in L$ profilra

$$(\forall i = 1, \ldots, n : a \succ_i b \Leftrightarrow a \succ'_i b) \Rightarrow (a \succ b \Leftrightarrow a \succ' b)\,,$$

ahol $\succ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ és $\succ' = F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$.

Nézzünk egy példát az irreleváns alternatíváktól való függetlenség sérülésére. Megmutatjuk, hogy a Borda-szavazás nem független az irreleváns alternatíváktól. Ehhez tekintsük a korábbi példánkat az alábbi lehetséges sorrendekkel:

$\succ$	$\succ'$	$\succ''$
b	c	a
c	b	b
a	a	c

és legyen a Π profilban 9, 0, 5 személy rangsora rendre $\succ$, $\succ'$, $\succ''$, míg a Π' profilban 7, 2, 5 személy rangsora rendre $\succ$, $\succ'$, $\succ''$. Látható, hogy $aF^B(\Pi)c$ és $cF^B(\Pi')a$, ahol Π és Π' kielégíti az irreleváns alternatíváktól való függetlenség előfeltételét.

Bizonyítástechnikailag szükségünk lesz egy önmagában is jelentéssel bíró, az irreleváns alternatíváktól való függetlenségnél erősebb fogalomra.

6.6. definíció. Az F társadalmi választási szabály *páronként semleges*, ha bármely $a, b, c, d \in A$ alternatívákra, melyekre $a \neq b$ és $c \neq d$,

$$(\forall i = 1, \ldots, n : a \succ_i b \Leftrightarrow c \succ'_i d) \Rightarrow (a \succ b \Leftrightarrow c \succ' d)\,,$$

ahol $\succ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ és $\succ' = F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$.

A páronkénti semlegesség annyiból hasonlít az irreleváns alternatíváktól való függetlenségre, hogy két preferenciaprofilban személyenként azonosan rangsorolt preferenciapárok esetén, társadalmilag is azonos rangsorolást vár el. Az irreleváns alternatíváktól való függetlenség esetén, mindkét profilban azonos alternatívapárról van szó, míg a páronkénti semlegesség esetén az alternatívapárok különbözők is lehetnek.

A következő lemma egyfajta kapcsolatot teremt az irreleváns alternatíváktól való függetlenség és a páronkénti semlegesség között.

6.1. lemma (Geanakoplos, 2005)**.** *Ha az A alternatívák halmaza legalább háromelemű, az F társadalmi választási szabály egyhangú és független az irreleváns alternatíváktól, akkor F páronként semleges.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a \succ b$, különben felcseréljük az a és b szerepét.

1. eset: tegyük fel, hogy $c \neq b$ vagy $a \neq d$. Vegyük észre, hogy az $a \neq d$ eset visszavezethető a $c \neq b$ esetre a (c, b) és (a, d) párok szerepének felcserélésével. Legyen tehát $c \neq b$. Készítsük el a Π^*-ot a páronkénti semlegesség definíciójában szereplő $\Pi = (\succ_1, \ldots, \succ_n)$ és $\Pi' = (\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$ profilokból úgy, hogy c-t pont a fölé helyezzük (hacsak nem $c = a$), d-t pont b alá helyezzük (hacsak nem $d = b$), közben az a és b, illetve a c és d közötti sorrendeket megtartva. A többi alternatíva Π^*-beli sorrendje átvehető Π-ből. A konstrukciót az a, b, c, d-t szerepeltetve két preferenciapáron szemléltetjük:

$\succ_i$	$\succ'_i$	$\succ^*_i$	$\succ_j$	$\succ'_j$	$\succ^*_j$
$\vdots$	c	$\vdots$	b	$\vdots$	$\vdots$
a	$\vdots$	c	$\vdots$	d	b
$\vdots$	d	a	a	$\vdots$	d
b	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	c	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	b	$\vdots$	$\vdots$	c
$\cdot$	$\cdot$	d	$\cdot$	$\cdot$	a

Az egyhangúságból adódik $c \succ^* a$ és $b \succ^* d$. Majd a tranzitivitás felhasználásával $c \succ^* d$. Ezek után az irreleváns alternatíváktól való függetlenségből adódik $c \succ' d$.

2. eset: $c = b$ és $d = a$. Ekkor vegyünk egy $e \notin \{a, b\}$ alternatívát. Alkalmazzuk az 1. esetnél leírtakat (megfelelő profilokat véve) előbb az $(a, b) - (a, e)$, majd az $(a, e) - (b, e)$ és végül a $(b, e) - (b, a)$ párokra. □

Most megadjuk azt, hogy mit is értünk azon negatív tulajdonságon, amelyet a két számunkra elfogadható axióma maga után von.

6.3. axióma. Az $i \in N$ szereplő az F társadalmi választási szabály *diktátora*, ha bármely $(\succ_1, \ldots, \succ_n) \in L^n$ esetén $F(\succ_1, \ldots, \succ_n) = \succ_i$. Ha az F társadalmi választási szabálynak van diktátora, akkor F *diktatórikus*.

Egy diktatórikus társadalmi választási szabály esetén, akármilyen preferenciaprofilnál a diktátor rangsora válik társadalmi rangsorrá.

Arrow (1951) tétele lényegében azt mondja, hogy a két általunk elfogadott axióma és a diktátormentesség összeegyeztethetetlen. Az általunk közölt bizonyítás Geanakoplos (2005) Arrow-tételre adott harmadik rövid bizonyításának Nisan (2007) féle változata.

6.1. tétel (Arrow, 1951). *Legyen az alternatívák száma legalább három. Ekkor ha az F egyhangú és független az irreleváns alternatíváktól, akkor F diktatórikus.*

Bizonyítás. Vegyünk két $a \neq b \in A$ alternatívát, és minden $i = 0{,}1, \ldots, n$-re készítünk egy olyan Π^i profilt, amelyben pontosan az első i szereplő preferálja a-t b-vel szemben. Az egyhangúság miatt $bF(\Pi^0)a$ és $aF(\Pi^n)b$. Ezért van olyan $k \in \{1, \ldots, n\}$, melyre $bF(\Pi^{k-1})a$ és $aF(\Pi^k)b$. Megmutatjuk, hogy k diktátor, azaz bármely $c \neq d \in A$-ra, ha $c \succ_k d$, akkor $c \succ d$. Vegyünk egy $e \in A \setminus \{c, d\}$ alternatívát és egy tetszőleges Π profilt. Mozgassuk el e-t az első $k - 1$ szereplő rangsorának tetejére, a k szereplő rangsorában c és d közé és végül a többi szereplő rangsorának legaljára. Ezáltal az irreleváns alternatíváktól való függetlenség miatt a c és d közötti társadalmi rangsor nem változik. Vegyük észre, hogy az (e,d)-t Π egyénenként ugyanúgy rangsorolja, mint (a,b)-t Π^k, továbbá az (e,c)-t Π egyénenként ugyanúgy rangsorolja, mint (a,b)-t Π^{k-1}. A 6.1. lemma alapján $e \succ d$ és $c \succ e$. Végül a $\succ$ tranzitivitása adja $c \succ d$-t. □

Az Arrow-tétel általánosításairól részletes áttekintést ad Mala (2007).

Azt gondolhatnánk, hogy amennyiben csak egy alternatíva kiválasztására szorítkozunk, javulhat a helyzet. Sajnos társadalmi választási függvények esetén is negatív eredményt kapunk, amelynek kimondásához szükségünk lesz egy új axiómára és a diktatórikusság társadalmi választási függvényre való megfogalmazására.

6.7. definíció. Az $f : L^n \to A$ társadalmi választási függvény *manipulálható az $i \in N$ által*, ha

$$\exists(\succ_1,\dots,\succ_n) \in L^n : \exists \succ_i' \in L : f(\succ_i', \succ_{-i}) \succ_i f(\succ_i, \succ_{-i}).$$

Az $f : L^n \to A$ *manipulálható*, ha van olyan $i \in N$ szavazó, aki képes manipulálni.

Az f manipulálhatósága azt jelenti, hogy egy aktuális profilt tekintve, valakinek érdekében állhat az általa megadott preferenciareláció megváltoztatása. Speciálisan, ha az aktuális profil az illető valóságos preferenciarelációját tartalmazza, akkor hazudozással javíthat a helyzetén.

A diktátor egy olyan szavazó, akinek mindig a legkedveltebb alternatívája lesz a társadalmilag kiválasztott alternatíva.

6.8. definíció. Az $i \in N$ *diktátora* az f társadalmi választási függvénynek, ha

$$\forall(\succ_1,\dots,\succ_n) \in L^n : a = top(\succ_i) \Rightarrow f(\succ_1,\dots,\succ_n) = a.$$

A diktatúra értelmezése nem okozhat meglepetést.

6.9. definíció. Az $f : L^n \to A$ társadalmi választási függvény *diktatórikus*, ha van $i \in N$ diktátora.

6.2. tétel (Gibbard–Satterthwaite-tétel)**.** *Ha $f : L^n \to A$ egy ráképezés, $|A| \geq 3$ és f nem manipulálható, akkor f diktatórikus.*

A tétel feltételei mellett vagy a hazudozással, vagy egy diktátorral kell együtt élnünk. A tételt Gibbard (1973) és Satterthwaite (1975) egymástól függetlenül bizonyította.

A Gibbard–Satterthwaite-tétel negatív eredménye elől többféle menekvési út is kínálkozik. Két, a lehetséges preferenciarendezések halmazát megszorító megközelítést említünk. Az egyik szerint, ha a szereplőknek csak egycsúcsú preferenciái lehetnek, akkor a szavazók csúcsait (azaz a legkedveltebb alternatívákat) tekintve, a medián csúcsot társadalmilag legjobb alternatívának választva egy nem diktatórikus és nem manipulálható társadalmi választási függvényt nyerünk (lásd Moulin, 1980).[8] A másik általunk említeni kívánt megközelítés szerint, amennyiben pénzben kifejezve képesek a szavazók az alternatívák hasznosságait mérni, akkor létezik olyan mechanizmus, amely igazmondásra ösztönöz és nem diktatórikus. A kérdéses mechanizmus Vickrey–Clarke–Groves-mechanizmus néven ismert az irodalomban (leírását illetően lásd például Nisan, 2007).

6.4. Gyakorló feladatok

6.1. feladat. Mutassa meg, hogy a Borda-szavazás nem Condorcet-konzisztens!

6.2. feladat. Igazolja, hogy a 6.2. példában a lineáris költségfüggvények által generált preferenciarendezéseket x_i csúcsú egycsúcsú preferenciákra cserélve, a lakóhelyek elhelyezkedésének mediánja marad a Condorcet-győzetes! Mi a helyzet páros sok szavazó esetén?

6.3. feladat. Igazolja, hogy a 6.2. példában, egycsúcsú preferenciát feltételezve, mindenkinek a valódi lakhelyét érdemes megadnia a létesítmény elhelyezkedésének helyszínéül!

6.4. feladat. A 6.3. példa alternatívahalmazát bővítsük a talmudi szabállyal és változtassuk a beszedendő adó értékét $x_N - t = 175000$ forintra. Mely elosztási szabály lesz a szavazás Condorcet-győztese?

6.5. feladat. Az $A = \{pro, ug, ul, cg\}$ az adószabály választási probléma alternatívahalmaza. Igazolja, hogy a választási probléma preferenciái köztesek!

6.6. feladat. Mutassa meg, hogy a többségi szavazás sérti az irreleváns alternatíváktól való függetlenséget!

6.7. feladat. Igazolja, hogy ha az F páronként semleges, akkor független az irreleváns alternatíváktól!

6.8. feladat. Igazolja, hogy egy társadalmi választási szabálynak legfeljebb egy diktátora lehet!

6.9. feladat. Mutassa meg, hogy a Borda-szavazás manipulálható!

[8] Moulin (1980) ennél többet is bizonyít és az egycsúcsúság többirányú általánosításai is ismertek.

7. fejezet

Elosztás kooperatív játékok segítségével

Az 1. fejezetben az elosztások egyszerű matematikai modelljénél találkoztunk már egy olyan tulajdonsággal, az összefogásbiztossággal, amely a szereplők egy csoportjának együttes kifizetését vette figyelembe. Az összefogásbiztosság azonban nem foglalkozik a csoportos együttműködések adta lehetőségékből adódó előnyök elosztásával, hanem csak megállapítja egy elosztási szabályról, hogy alkalmazása esetén megéri-e együttműködni, illetve szétválni, vagy nem. A kooperatív játékelmélet alapegységei a szereplők koalíciói (csoportjai) és a hozzájuk tartozó kifizetések, így az elmélet az összefogás hatásait is számszerűsíti.

Ebben a fejezetben elosztási feladatokat oldunk meg kooperatív játékelméleti eszközökkel, továbbá kapcsolatot létesítünk két nevezetes elosztási szabály és a kooperatív játékelméleti megoldáskoncepciók között. Ehhez ismertetjük a szükséges kooperatív játékelméleti fogalmakat – a terület iránt érdeklődő olvasó figyelmébe Solymosi (2007) elektronikus jegyzetét ajánljuk.

7.1. Költségelosztás elosztási szabályokkal

Nézzünk egy egyszerű költségelosztási példát:

7.1. példa. Vízellátását az 1 város önállóan 20 milliárd Ft-ból, míg a 2 város 80 milliárd Ft-ból tudja megvalósítani. Közösen viszont a vízellátásuk 60 milliárd Ft-ba kerülne. Ekkor meghatározandó a 40 milliárd Ft-os költségmegtakarításuk elosztása.

Oldjuk meg előbb a példát, a városokat azonos súlyúaknak tekintve,[1] a 2. fejezetben megismert elosztási szabályok segítségével. Ehhez vizsgáljuk meg a következő két elosztási problémát

1. $N = \{1{,}2\}$, $t = 60$, $x_1 = 20$ és $x_2 = 80$.
2. $N = \{1{,}2\}$, $t = 40$, $x_1 = 20$ és $x_2 = 80$.

Az első problémánál a városok közös költségét az egyénileg felmerülő költségek alapján határozzuk meg valamelyik elosztási szabállyal. Ekkor például $pro(\{1{,}2\},60,(20{,}80)) = (12{,}48)$, $ug(\{1{,}2\},60,(20{,}80)) = (20{,}40)$, $ul(\{1{,}2\},60,$ $(20{,}80)) = (0{,}60)$ és $cg(\{1{,}2\},60,\ (20{,}80)) = (10{,}50)$. Az arányos, az egyenletes veszteség és a vitatott ruha-eljárás alkalmazása esetén mindketten jobban járnak a vízellátásuk önálló megvalósításánál, míg az egyenletes nyereség az 1 várost nem teszi érdekeltté a kooperációban.

A második problémánál a költségmegtakarítás egymás közötti elosztásáról van szó. Ekkor $pro(\{1{,}2\},40,(20{,}80)) = (8{,}32)$, $ug(\{1{,}2\},40,(20{,}80)) =$ $= (20{,}20)$, $ul(\{1{,}2\},40,\ (20{,}80)) = (0{,}40)$ és $cg(\{1{,}2\},40,(20{,}80)) = (10{,}30)$.[2] Mind a négy vizsgált megoldás költségmegtakarítást eredményez a városoknál, és ilyen értelemben a kooperáció mellett szólnak. Azonban nyilván vita, illetve egyeztetések tárgya, hogy végül milyen költségelosztásban egyeznek meg.

Már háromszereplős problémákat vizsgálva is látható lesz, hogy szükségessé válik egy gazdagabb modell bevezetése. Tekintsük ehhez a következő példát, amely figyelembe veszi csak két város összefogásának speciális hatásait is.

7.2. példa. Az 1, 2 és 3 városok, kooperációtól függő, vízellátórendszerének kiépítési költségeit tartalmazza a 7.1. táblázat.

7.1. táblázat. Három város vízellátórendszere

Koalíciók	1	2	3	1,2	1,3	2,3	1,2,3
Milliárd Ft	10	15	18	20	25	22	30

Határozzuk meg a 7.2. példa költségelosztását az arányos elosztási szabállyal, amely a 7.1. példára elfogadható eredményeket szolgáltatott. Az összmegtakarítás értéke $43 - 30 = 13$, amelyet az 1, 2 és 3 városok önálló rendszerkiépítési költségei alapján arányosítva rendre a 3,02, a 4,53 és az 5,44

[1] A városok súlyozására számos más lehetőség kínálkozik, mint például a népességvagy adóbevétel-arányos súlyozásuk.

[2] Vegyük észre, hogy az arányos elosztási szabály esetén mindegy, hogy a költségeket, vagy a megtakarításokat osztjuk fel.

megtakarítások adódnak. Tehát az 1, 2 és 3 városok által fizetendő összegek rendre 6,98, 10,47 és 12,56. Vegyük észre, hogy ez a költségelosztás elfogadhatatlan a 2 és 3 városok számára, mivel kettejük vízellátórendszerének kiépítési költsége csak 22, ami kisebb $10{,}47 + 12{,}56 = 23{,}03$-nál. Ebből a példából is látszik, hogy a kooperációs lehetőségből adódó nyereségek vizsgálata az egyszerű elosztási modellünknél gazdagabb struktúrát igényel.

7.2. Kooperatív játékelméleti alapismeretek

Legyen $N = \{1,2,\dots,n\}$ a szereplők halmaza. A szereplők N halmazának tetszőleges részhalmazát *koalíciónak* nevezzük, és az összes lehetséges koalíciók halmazát $\mathcal{P}(N)$-nel jelöljük, amit az N hatványhalmazának is hívunk. Az N koalíciót *nagykoalíciónak* nevezzük. A $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ *koalíciós függvény* megadja bármely koalíció értékét (kifizetését, nyereségét stb).[3] Az (N, v) pár megad egy *koalíciós formában* adott, vagy más néven *kooperatív* játékot.[4] A továbbiakban feltesszük, hogy az üres koalíció értéke nulla, azaz $v(\emptyset) = 0$. Első lépésben megköveteljük, hogy a nagykoalíció értékét maradéktalanul osszuk szét.

7.1. definíció. Az (N, v) kooperatív játék egy *elosztása* egy olyan $y \in \mathbb{R}^N$ vektor, amelyre $\sum_{i=1}^n y_i = v(N)$.

Egy háromszereplős kooperatív játékkal találkoztunk a 7.2. példában, amelynek az arányos elosztási szabállyal meghatároztuk egy elosztását. Megállapítottuk, hogy a $\{2,3\}$ kétszereplős koalíció az így kapott elosztást nem fogadja el és inkább önállóan építi ki a vízellátórendszerét. Legyen $y = (y_1, y_2, y_3)$ egy elosztása a 7.2. példa problémának, ami azt jelenti, hogy $y_1 + y_2 + y_3 = v(\{1,2,3\}) = -30$. Az y elosztás mindegyik koalíció számára elfogadható, ha mindhármuknak érdemes részt venni a közös projektben, amit a következő lineáris egyenlőtlenségrendszer ír le

$$\begin{aligned} y_1 &\geq v(\{1\}) = -10, & y_2 &\geq v(\{2\}) = -15, \\ y_3 &\geq v(\{3\}) = -18, & y_1 + y_2 &\geq v(\{1,2\}) = -20, \\ y_1 + y_3 &\geq v(\{1,3\}) = -25, & y_2 + y_3 &\geq v(\{2,3\}) = -22. \end{aligned}$$

Ha a fenti egyenlőtlenségrendszernek van megoldása, akkor a tipikus esetben végtelen sok van, így a sok lehetséges megoldás közül egy alkalmas tulajdon-

[3] A 7.1. alfejezetben költségelosztási problémákat néztünk, amelyek úgy illeszthetők be a hagyományos és az általunk is bevezetett modellkeretbe, hogy a költségek ellentettei az értékeink. Az alternatív tárgyalási mód a költségjátékok bevezetése, mint például Young (1994) könyvében.

[4] A szakirodalomban az így definiált játékot átváltható hasznosságú kooperatív játéknak vagy röviden TU-játéknak hívják.

ságút fogunk választani. Mielőtt továbbhaladnánk, definiáljuk a lehetséges megoldásokat behatároló, fenti egyenlőtlenségrendszernek megfelelő szűrőt.

7.2. definíció. Az (N, v) kooperatív játék egy $y \in \mathbb{R}^N$ elosztása *magbeli*, ha $y_S \geq v(S)$ bármely $S \subset N$ koalícióra. A magbeli elosztások halmaza alkotja az (N, v) játék *magját*.[5]

Mint azt a példánkkal kapcsolatban már említettük, elképzelhető, hogy a magot definiáló egyenlőtlenségrendszernek, nincs lehetséges megoldása, azaz a kooperatív játék magja üres. A következő tulajdonság, amelyet a következő alfejezetben vizsgált elosztási problémákhoz rendelt kooperatív játékok kielégítenek, biztosítani fogja a mag nemürességét.

7.3. definíció. Az (N, v) kooperatív játék *konvex*, ha $\forall i \in N$:

$$\forall S, T \subseteq N \setminus \{i\} : S \subseteq T \Rightarrow v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T). \quad (7.1)$$

A konvexitás azt követeli meg, hogy bármely i szereplő hozzájárulása egy bővebb koalícióhoz nagyobb hozzájárulást eredményezzen, azaz a koalíció „méretében" növekvő hozadékot eredményezzen, ami indokolja a konvexitás elnevezést. A későbbiek során újra előjövő marginális hozzájárulás fogalmát külön definiáljuk.

7.4. definíció. Az (N, v) kooperatív játékban a $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ értéket az $i \in N \setminus S$ szereplő S koalícióhoz történő csatlakozása *marginális hozzájárulásának* nevezzük.

Térjünk rá a számunkra érdekes, a mag nemürességét garantáló tételre.[6]

7.1. tétel (Shapley, 1971)**.** *Egy konvex kooperatív játék magja nemüres.*

Bizonyítás. Tekintsük az (N, v) konvex kooperatív játékot. Legyen $i_1, \ldots, i_n$ az $1, \ldots, n$ szereplők egy permutációja. Ekkor megmutatjuk, hogy az

$$y_{i_k} = v(\{i_1, \ldots, i_k\}) - v(\{i_1, \ldots, i_{k-1}\}) \quad (7.2)$$

marginális hozzájárulások alkotta y elosztás magbeli.

Tekintsük az $S = \{i_{j_1}, \ldots, i_{j_s}\} \subseteq N$ koalíciót, ahol $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leq n$. A konvexitást definiáló (7.1) egyenlőtlenségben az $S' = \{i_{j_1}, \ldots, i_{j_{k-1}}\}$, $T' = \{i_1, i_2, \ldots, i_{j_k - 1}\}$ és $i = i_{j_k}$ választásával

$$v(\{i_{j_1}, i_{j_2}, \ldots, i_{j_k}\}) - v(\{i_{j_1}, i_{j_2}, \ldots, i_{j_{k-1}}\}) \leq$$

[5] A mag fogalma figyelmen kívül hagyja a koalíción kívüli szereplőkre gyakorolt externális hatásokat. Az externális hatásokat figyelembe vevő magkiterjesztésekkel foglalkoznak Huang–Sjöström (2003) és Kóczy (2007).

[6] A mag nemürességére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel is ismert (lásd Solymosi, 2007).

$$\leq v(\{i_1, i_2, \ldots, i_{j_k}\}) - v(\{i_1, i_2, \ldots, i_{j_k - 1}\} = y_{i_{j_k}}$$

bármely $k = 1, \ldots, s$-re. Az s egyenlőtlenséget összegezve

$$v(\{i_{j_1}, \ldots, i_{j_s}\}) = v(S) \leq \sum_{k=1}^{s} y_{i_{j_k}} = y_S,$$

és ezért az S koalíció nem gátolja meg az y elosztást. Mivel S egy tetszőlegesen választott koalíció, az y elosztás magbeli. □

Miután a mag még mindig túl sok választási lehetőséget enged meg, bemutatunk két nevezetes egyensúly koncepciót. Egy (N, v) koalíciós formában adott játék *Shapley-értéke* minden $i \in S$ szereplőhöz a várható marginális hozzájárulását rendeli, a szereplők összes lehetséges sorrendjei felett az egyenletes eloszlást véve. Határozzuk meg a 7.2. példa Shapley-értékét! A 7.2. táblázatban a városok hat lehetséges „érkezési sorrendjét" láthatjuk a sorfejlécekben. A 2,1,3 sorrend esetén a 2 város marginális hozzájárulása $-15 - 0 = -15$, majd az 1 várossé $-20 - (-15) = -5$, és végül a 3 városé $-30 - (-20) = -10$. Nézzük még meg a 3,1,2 érkezési sorrendet, amely esetén a marginális hozzájárulások sorozata $-18 - 0 = -18$, $-25 - (-18) = -7$ és $-30 - (-25) = -5$.[7] A táblázat többi sorának értékei hasonlóan számolhatók. Városonként a hat sorrend által kapott értékek számtani átlagaként megkapjuk a városoknak a Shapley-érték által juttatott értékeket.

7.2. táblázat. Shapley-érték kiszámítása

	1	2	3
1,2,3	-10	-10	-10
1,3,2	-10	-5	-15
2,1,3	-5	-15	-10
2,3,1	-8	-15	-7
3,1,2	-7	-5	-18
3,2,1	-8	-4	-18
Átlag	-8	-9	-13

[7] Mivel a 7.2. táblázatban szereplő számok költségek, a v koalíciós függvény értékei a táblázatban szereplő számok ellentettei.

A Shapley-érték szokásos formális definíciója a következő.

7.5. definíció (Shapley, 1953)**.** A Shapley-érték az (N, v) kooperatív játék $i \in N$ szereplőjének

$$y_i = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n - |S| - 1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right] \tag{7.3}$$

értéket juttat.

A definíció megegyezik a Shapley-érték véletlen sorrendek segítségével megadott korábbi számítási módjával, mivel a (7.3) kifejezés számlálójában megszámoljuk az olyan eseteket, amikor pontosan az S koalícióbeli szereplők előzik meg i-t az érkezési sorrendben. Az ilyen esetekhez mind a $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ marginális hozzájárulások tartoznak.

A 7.1. tétel bizonyítása során pontosan annak az összesen $n!$ elosztásnak a magbeliségét láttuk be, amelyeket a Shapley-érték kiszámításánál átlagolunk. Mivel a mag egy konvex halmaz, hiszen $2^n - 2$ lineáris egyenlőtlenség és 1 lineáris egyenlőség által meghatározott, ezért konvex játékok esetén a Shapley-érték is benne van a magban:

7.2. tétel (Shapley, 1971)**.** *Egy konvex kooperatív játék Shapley-értéke magbeli.*

Szükségünk lesz még néhány jelölésre és két további kooperatív játékelméleti koncepcióra. Egy (N, v) játék bármely y elosztását és bármely S koalícióját véve, jelölje $e(S, y) = v(S) - y_S$ az S koalíció *többletfizetését* azért, hogy fenntartsa az y elosztást. Ha $e(S, y) > 0$, akkor *áldozatvállaló* koalícióról beszélünk. Ha $e(S, y) < 0$, akkor az S koalíció a saját értékénél többet kap az y elosztás által, és ekkor S-et *nyereséges* koalíciónak hívjuk. Egy $i \in S$ szereplő *megtámadhatja* a $j \notin S$ szereplőt azzal a „fenyegetéssel", hogy megalkotja a j-t kizáró S nyereséges koalíciót, miközben j önmagában nyereséges, azaz $e(\{j\}, y) < 0$. A T koalíció a j-nek az i általi S-en keresztül történő támadásának az *ellentámadása*, ha $j \in T$ kizárja $i \notin T$-t és $e(T, y) \geq e(S, y)$, azaz T többet áldoz S-nél.

7.6. definíció. Az (N, v) kooperatív játék *kernelje* azon y elosztások halmaza, amelyekre $v(\{i\}) \leq y_i$ minden $i \in N$-re és amelyekben bármelyik i szereplő általi bármelyik másik j szereplőnek megtámadására van j-nek ellentámadása i-vel szemben.

A kernel definíciója szemlélteti, hogy milyen gondolatmenetek által tekinthetünk egyensúlyinak egy elosztást. A kernel alternatív definícióját illetően lásd a 7.5. feladatot. Nézzünk egy példát a kernelre.

7.3. példa (Osborne–Rubinstein, 1994)**.** Az $(\{1,2,3\}, v)$ *háromszereplős többségi játék* koalíciós függvénye $v(S) = 1$, ha $|S| \geq 2$, és $v(S) = 0$, ha $|S| \leq 1$.

A háromszereplős többségi játékra a nagykoalíció értéke alapján $x_1 + x_2 + + x_3 = 1$, és az egyéni koalíciók értékei miatt $x_i \geq 0$ minden $i = 1,2,3$-ra. Legyen $x_i \leq x_k \leq x_j$, ahol i, j, k a három különböző szereplő indexe. Ekkor $x_j > 0$ és $x_i + x_k < 1 = v(\{i, k\})$ miatt i megtámadhatja j-t az $S = = \{i, k\}$ koalícióval. Viszont j-nek pontosan akkor ellentámadása az egyedüli lehetséges $T = \{j, k\}$ koalíció, ha $x_i \geq x_j$, ami csak az $x_i = x_j = 1/3$ esetben állhat fent. Tehát a háromszereplős többségi játék kernelje egyedül az $(1/3,1/3,1/3)$ elosztásból áll.

A következő alfejezetben bizonyítástechnikailag szükségünk lesz még egy kernelhez kapcsolódó megoldáskoncepcióra. Legyen adott az (N, v) kooperatív játék. Bármely y elosztásra és bármely két $i, j \in N$ szereplőre legyen

$$s_{ij}(y) = \max\{v(S) - y_S \mid i \in S \text{ és } j \notin S\}.$$

7.7. definíció. Egy (N, v) kooperatív játék *prekernelje* azon y elosztások halmaza, amelyekre $s_{ij}(y) = s_{ji}(y)$ bármely két $i, j \in N$ szereplőre.

A kernel és a prekernel közötti kapcsolat jobban érzékelhető a kernel 7.5. feladatban található alternatív definíciója láttán. A kernel 7.6. definícióját szemléletessége miatt részesítettük előnyben.

A prekernel, mint megoldási koncepció azzal az előnyös tulajdonsággal rendelkezik, hogy sosem üres.

7.3. tétel (Davis–Maschler, 1965)**.** *Egy kooperatív játék prekernelje nemüres.*

A tételt nem bizonyítjuk, azt az eredeti forráson kívül több játékelméleti könyv is tartalmazza (például Osborne–Rubinstein, 1994).

Még megemlítünk két fontos tulajdonságot.

7.8. definíció. Egy (N, v) kooperatív játék

(i) *szuperadditív*, ha minden $S, T \subseteq N$ koalícióra $S \cap T = \emptyset$ esetén $v(S) + + v(T) \leq v(S \cup T)$;

(ii) 0-*monoton*, ha minden $S, T \subseteq N$ koalícióra $S \subseteq T$ esetén $v(S) + + \sum_{i \in T \setminus S} v(\{i\}) \leq v(T)$.

Bizonyítás nélkül kimondjuk Maschler és társai (1972) kernel és prekernel kapcsolatára vonatkozó tételét.

7.4. tétel. *Ha az (N, v) kooperatív játék 0-monoton, akkor a kernele megegyezik a prekernelével.*

7.3. Kooperatív elosztási játékok

Ebben az alfejezetben kapcsolatot létesítünk kooperatív játékelméleti egyensúly koncepciók és az elosztási szabályok között. Ehhez először is hozzárendelünk minden elosztási problémához egy kooperatív játékot. Az (N, t, x) problémát tekintve, az $S \subseteq N$ koalíció értékének meghatározásakor abból indulunk ki, hogy előbb az S-en kívüli tagok megkapják az $x^{N\setminus S}$ igényeiket és így az S koalíciónak csak $t - x_{N\setminus S}$ mennyiség jut.[8] Az így választott

$$v_{t,x}(S) = \left(t - x_{N\setminus S}\right)^{+} \tag{7.4}$$

érték esetén S-nek nem kell bírósághoz fordulni, hiszen ekkora mennyiséget az $N \setminus S$-beli szereplők vita nélkül is átengednek. Az így választott $v_{t,x}(S)$ érték S szempontjából pesszimistának tekinthető, azonban ez bármely S koalícióról elmondható, ilyen értelemben egyik S-beli koalíciónak sem kedvezünk. Az (N, t, x) problémához hozzárendeltük tehát az $(N, v_{t,x})$ koalíciós formában adott játékot, amit úgy fogunk mondani, hogy az $(N, v_{t,x})$ játékot az (N, t, x) elosztási problémából származtattuk. Igazolható, hogy a $(N, v_{t,x})$ játék konvex (lásd a 7.4. feladatot).

O'Neil (1982) teremtett kapcsolatot a véletlen érkezéses elosztási szabály és a Shapley-érték között, ami a Shapley-érték előző alfejezetben bemutatott kiszámítási módja alapján nem is meglepő. Ennek ellenére a két fogalom közötti pontos kapcsolat meghatározása megfontolás tárgya.

7.5. tétel (O'Neil, 1982)**.** *Bármely (N, t, x) elosztási problémára a véletlen érkezéses elosztási szabály ugyanazt a megoldást szolgáltatja, mint az (N, t, x) problémából származtatott $(N, v_{t,x})$ kooperatív játék Shapley-értéke.*

Bizonyítás. A 2.1. alfejezetben definiált véletlen érkezéses elosztási szabály áttekinthetőbb kiszámításához vegyük bármelyik $i \in N$ szereplőt és jelölje az $S \subset N$ az őt megelőző szereplők halmazát. Ekkor az i szereplő

$$b_i(S) = \begin{cases} x_i, & \text{ha } t - x_S > x_i, \\ t - x_S, & \text{ha } x_i \geq t - x_S > 0, \\ 0, & \text{ha } 0 \geq t - x_S \end{cases}$$

mennyiséghez jut. Az (N, t, x) probléma esetén (az összes lehetséges érkezési sorrendet aszerint összegezve, hogy kik előzik meg i-t) az $i \in N$-nek jutó átlagos mennyiség

$$y_i = \sum_{S \subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!\,(n - |S| - 1)!}{n!} b_i(S). \tag{7.5}$$

[8] Megjegyzendő, hogy a koalíciós függvényt másképpen is választhattuk volna. Ezt a hozzárendelést használta O'Neil (1982) és Aumann–Maschler (1985).

Legyen $S^c = N \setminus S$ az S komplementere. (7.4) felhasználásával, $v_{t,x}$ helyett csak v-t írva, belátjuk, hogy $v(S^c) - v(S^c \setminus \{i\}) = b_i(S)$:

$$v(S^c) - v(S^c \setminus \{i\}) = (t - x_S)^+ - (t - x_S - x_i)^+ =$$
$$= \begin{cases} t - x_S - (t - x_S - x_i) = x_i, & \text{ha } t - x_S - x_i > 0, \\ t - x_S, & \text{ha } t - x_S > 0 \geq t - x_S - x_i, \\ 0, & \text{ha } 0 \geq t - x_S, \end{cases}$$

ami nem más, mint $b_i(S)$. Ennek felhasználásával, a véletlen érkezési sorrend szerinti elosztást megadó (7.5) összefüggésnél figyelembe véve, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk, ha az i-t megelőző vagy az i-t nem megelőző koalíciók szerint összegzünk,

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{i \in S^c \subseteq N} \frac{(n - |S^c|)!\,(|S^c| - 1)!}{n!} b_i(S) = \\ &= \sum_{i \in S^c \subseteq N} \frac{(|S^c| - 1)!\,(n - |S^c|)!}{n!} \left[v(S^c) - v(S^c \setminus \{i\})\right] = \\ &= \sum_{S' \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S'|!\,(n - |S'| - 1)!}{n!} \left[v(S' \cup \{i\}) - v(S')\right], \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben az $S' = S^c \setminus \{i\}$ helyettesítést végrehajtva, adódik a Shapley-érték. □

Térjünk rá egy másik érdekes kapcsolat igazolására. Megmutatjuk, hogy a talmudi elosztási szabály ugyanazokat az elosztásokat adja, mint a kernel. Az állításunk igazolásához szükségünk lesz néhány fogalomra és lemmára. Az (N, v) kooperatív játék adott S koalíciójához és y elosztásához tartozó redukált játékot a következőképpen értelmezzük:

$$v^{S,y}(T) = \begin{cases} y_T, & \text{ha } T = S \text{ vagy } T = \emptyset, \\ \max\{v(Q \cup T) - y_Q \mid Q \subset N \setminus S\}, & \text{ha } \emptyset \subset T \subset S. \end{cases}$$

A redukált játék definíciója némi magyarázatra szorul. A redukált játékban az S koalícióbeli szereplőknek kell egymás között az y_S mennyiséget elosztaniuk úgy, hogy az S-en kívüliek mindegyike y_j-t kap ($j \in N \setminus S$). Együttesen nyilván y_S-t kapnak, míg az üres koalíció semmit. Ha T az S valódi részhalmaza, akkor meghatározzuk, hogy a T-beli szereplők mely S-en kívüli Q-beli szereplőkkel összefogva érhetik el a lehető legnagyobb értéktöbbletet, miközben a Q-beli szereplők koalícióban tartásához y_Q mennyiséget kell kifizetniük.

A következő lemma szerint a redukált játék származtatható a megfelelő redukált elosztási problémából.

7.1. lemma (Aumann–Maschler, 1985)**.** *Legyen y egy az (N,t,x) elosztási problémához tartozó elosztás. Ekkor bármely $S \subseteq N$ koalícióra*

$$v_{t,x}^{S,y} = v_{y_S,x^S}. \tag{7.6}$$

Bizonyítás. Legyen $v = v_{t,x}$ és $v^S = v_{t,x}^{S,y}$. $T = \emptyset$ és $T = S$ esetén nyilvánvalóan teljesül a (7.6) összefüggés T-re, azaz $v^S(T) = v_{y_S,x^S}(T)$. Bizonyítandó az $\emptyset \subset T \subset S$ eset. Jelölje Q egy, a v^S definíciójában szereplő célfüggvényt maximalizáló koalíciót.

Felhasználva, hogy tetszőleges két $a,b \in \mathbb{R}$-re $a^+ - b^+ \leq (a-b)^+$, adódik

$$\begin{aligned} v^S(T) &= v(T \cup Q) - y_Q = \left(t - x_{N\setminus(Q\cup T)}\right)^+ - (y_Q)^+ \leq \\ &\leq \left(y_N - x_{N\setminus(Q\cup T)} - y_Q\right)^+ = \left(y_S - x_{S\setminus T} - (x-y)_{N\setminus(S\cup Q)}\right)^+ \leq \\ &\leq \left(y_S - x_{S\setminus T}\right)^+. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Ha $Q = N \setminus S$, akkor

$$\begin{aligned} v^S(T) &\geq v\left(T \cup (N\setminus S)\right) - y_{N\setminus S} = \left(t - x_{N\setminus(T\cup(N\setminus S))}\right)^+ - (y_N - y_S) \geq \\ &\geq \left(t - x_{S\setminus T}\right) - (t - y_S) = y_S - x_{S\setminus T}, \end{aligned} \tag{7.8}$$

továbbá, ha $Q = \emptyset$, akkor

$$v^S(T) \geq v(T \cup \emptyset) - y_\emptyset = v(T) = \left(t - x_{N\setminus T}\right)^+ \geq 0. \tag{7.9}$$

A (7.8) és a (7.9) alapján

$$v^S(T) \geq \left(y_S - x_{S\setminus T}\right)^+,$$

amiből (7.7) felhasználásával

$$v^S(T) = \left(y_S - x_{S\setminus T}\right)^+ = v_{y_S,x^S}(T)$$

adódik. □

Szükségünk lesz a 2.4. alfejezetben bevezetett páronkénti konzisztencia fogalomhoz hasonló szerepet játszó fogalomra.

7.9. definíció. Egy kétszemélyes $(\{1,2\},v)$ kooperatív játék *alapmegoldása* az

$$y_i = \frac{v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})}{2} + v(\{i\}) \tag{7.10}$$

$i = 1,2$-re elosztással adott.

Az alapmegoldás szerint az önerőből elérhető értéken kívül a szereplők még megkapják a kooperációjukból adódó többlet felét. Ellenőrizhető, hogy (7.10) azzal ekvivalens, hogy $y_1 + y_2 = v(\{1{,}2\})$ és $y_1 - y_2 = v(\{1\}) - v(\{2\})$.

7.2. lemma (Aumann–Maschler, 1985)**.** *Legyen az y elosztás az (N, v) kooperatív játék egy prekernele és legyen $S \subseteq N$ egy kételemű koalíció. Ekkor y^S alapmegoldása a $v^{S,y}$ játéknak.*

Bizonyítás. Legyen $S = \{i, j\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} s_{ij}(y) &= \max\left\{v\left(Q \cup \{i\}\right) - y_{Q\cup\{i\}} \mid Q \subseteq N \setminus S\right\} = \\ &= \max\left\{v\left(Q \cup \{i\}\right) - y_Q \mid Q \subseteq N \setminus S\right\} - y_i = v^{S,y}(\{i\}) - y_i \end{aligned}$$

és hasonlóan $s_{ji}(y) = v^{S,y}(\{j\}) - y_j$. Mivel y prekernele az (N, v) kooperatív játéknak, $s_{ij}(y) = s_{ji}(y)$, és ezért $v^{S,y}(\{i\}) - y_i = v^{S,y}(\{j\}) - y_j$. Átrendezéssel adódik az első és a $v^{S,y}(\{i, j\})$ értelmezéséből a második

$$y_i - y_j = v^{S,y}(\{i\}) - v^{S,y}(\{j\}) \text{ és } y_i + y_j = y_{\{i,j\}} = v^{S,y}(\{i, j\})$$

összefüggés, ami az alapmegoldást követő megjegyzés alapján pont azt jelenti, hogy y^S alapmegoldása a $v^{S,y}$ kooperatív játéknak. □

7.3. lemma (Aumann–Maschler, 1985)**.** *Egy kétszereplős elosztási probléma vitatott ruhaelosztási szabállyal meghatározott elosztása megegyezik a származtatott kétszereplős kooperatív játék alapmegoldásával.*

Bizonyítás. Emlékeztetőül, a vitatott ruhaelosztási szabály az $(\{1, 2\}, t, (x_1, x_2))$ elosztási problémához az

$$y_i = (t - x_i)^+ + \frac{t - (t - x_1)^+ - (t - x_2)^+}{2},$$

mindkét $i = 1{,}2$-re, elosztást rendeli. A (7.4) által definiált koalíciós függvények segítségével származtatott játék elosztása

$$\begin{aligned} y_i &= v_{t,x}(\{i\}) + \frac{t - v_{t,x}(\{1\}) - v_{t,x}(\{2\})}{2} = \\ &= v_{t,x}(\{i\}) + \frac{v_{t,x}(\{1{,}2\}) - v_{t,x}(\{1\}) - v_{t,x}(\{2\})}{2}, \end{aligned}$$

ami pontosan megegyezik az alapmegoldást definiáló (7.10) egyenlőséggel. □

7.6. tétel (Aumann–Maschler, 1985)**.** *A $v_{t,x}$ származtatott játéknak egyedüli kernelbeli elosztása megegyezik az (N, t, x) elosztási probléma talmudi elosztási szabállyal kapott megoldásával.*

Bizonyítás. Legyen $v = v_{t,x}$ és az y elosztás kernelbeli. A származtatott játék (7.4) általi definíciója alapján ellenőrizhető v szuperadditivitása, ami a 7.3. feladat alapján implikálja a v játék 0-monotonitását. A 7.4. tétel alapján a kernel megegyezik a prekernellel, és ezért y prekernelbeli.

Vegyünk egy tetszőleges kételemű S koalíciót. Ekkor a 7.2. lemma szerint y^S alapmegoldása a $v^{S,y}$ játéknak, és ezért a 7.1. lemma alapján y^S alapmegoldása a v_{y_S,x^S} játéknak is. A 7.3. lemmából adódóan $y^S = cg(S, y_S, x^S)$, amiből viszont a 2. fejezet 2.4. tétele alapján megkapjuk, hogy a talmudi elosztási szabállyal is az y elosztás adódik. □

Megjegyzendő, hogy Aumann–Maschler (1985) főtételként az elosztási problémából származtatott játék egy másik játékelméleti megoldási koncepcióval (a nukleolusszal) adódó elosztás és a talmudi elosztási szabállyal történő elosztás egyezőségét mondja ki.[9] Mi ettől azért tekintünk el, mert minimalizálni kívántuk a bevezetendő kooperatív játékelméleti megoldáskoncepciók számát, jóllehet a nukleolusz egy, a kernelnél gyakrabban alkalmazott megoldási koncepció.

7.4. A Shapley-érték egyik jellemzése

Az előző alfejezetben kapcsolatot teremtettünk két elosztási szabály és két kooperatív játékelméleti megoldáskoncepció között. Mivel minket elsősorban az „igazságos" elosztások érdekelnek, illetve az elosztási szabályok közötti választás, ezért számunkra a kooperatív játékelméleti megoldáskoncepciókkal való kapcsolat azért érdekes, mert a megoldáskoncepciók több minőségi jellemzése ismert, amelyek segíthetnek minket a választásunkban. Ennek alátámasztásául itt csak röviden ismertetjük a Shapley-érték legelső karakterizációját. Jelölje $\mathcal{G}^N$ az $N \subset \mathbb{N}$ játékoshalmazzal rendelkező kooperatív játékok osztályát. A tulajdonságok ismertetése előtt formálisan megadjuk, mit is értünk egy (pontértékű) kooperatív játékelméleti megoldáskoncepción.[10]

7.10. definíció. $\varphi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ egy *kooperatív játékelméleti megoldáskoncepció*, ha bármely (N, v) kooperatív játékhoz egy elosztást rendel, azaz $\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N)$.

A Shapley-érték karakterizációjához három tulajdonságra lesz szükségünk.

7.1. axióma. A $\varphi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ megoldáskoncepció *sallangmentes*, ha bármely (N, v) kooperatív játékra és bármely $i \in N$ szereplőre

$$[\forall S \subseteq N \setminus \{i\} : v(S \cup \{i\}) = v(S)] \Rightarrow \varphi_i(N, v) = 0.$$

[9] A nukleoluszt Schmeidler (1969) vezette be.
[10] Shapley (1953) karakterizációs tétele halmazértékű megoldáskoncepciókat megengedve, is érvényes.

A sallangmentesség szerint egy olyan szereplő, akinek az összes marginális hozzájárulása nulla, nem kap semmit.

A megoldáskoncepció szimmetria tulajdonságának értelmezése előtt bevezetjük a *szimmetrikus játékospár* fogalmát.

7.11. definíció. Egy (N, v) kooperatív játék két $i \neq j \in N$ játékosa egy *szimmetrikus játékospárt* alkot, ha bármely $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ koalícióra $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Másképpen mondva, egy szimmetrikus játékospár két játékosának marginális hozzájárulásai bármely $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ koalícióhoz azonosak.

7.2. axióma. A $\varphi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ megoldáskoncepció *szimmetrikus*, ha bármely i, j szimmetrikus játékospárra

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v).$$

A szimmetria szerint a szereplők elnevezései lényegtelenek.

7.3. axióma. A $\varphi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ megoldáskoncepció *additív*, ha bármely két $(N, v), (N, w)$ kooperatív játékra $\varphi(N, v + w) = \varphi(N, v) + \varphi(N, w)$.

Tehát az additivitás szerint bármely három (N, v), (N, v_1) és (N, v_2) kooperatív játékra, melyekre $v = v_1 + v_2$, az (N, v)-hez rendelt elosztás egyenlő az (N, v_1)-hez és az (N, v_2)-höz rendelt elosztások összegével.

Térjünk rá Shapley (1953) karakterizációs tételének kimondására.

7.7. tétel (Shapley, 1953)**.** *A Shapley-érték az egyetlen sallangmentes, szimmetrikus és additív kooperatív játékelméleti megoldáskoncepció.*

A tételt nem bizonyítjuk. A Shapley-érték további és más kooperatív játékelméleti megoldáskoncepciók karakterizációi találhatók többek között Solymosi (2007) és Pintér (2009) írásaiban.

7.5. Gyakorló feladatok

7.1. feladat. Határozza meg az alábbi táblázattal adott kooperatív játék Shapley-értékét!

Koalíciók	1	2	3	1,2	1,3	2,3	1,2,3
Milliárd Ft	20	15	35	40	80	70	100

7.2. feladat. Igazolja, hogy egy (N, v) kooperatív játék pontosan akkor konvex, ha

$$\forall S, T \subseteq N : v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)!$$

7.3. feladat. Igazolja, hogy az (N, v) szuperadditivitásából következik a 0-monotonitása!

7.4. feladat. Igazolja, hogy a (7.4) segítségével az (N, t, x) elosztási problémából származtatott $(N, v_{t,x})$ játék konvex!

7.5. feladat. Igazolja, hogy az (N, v) játék *kernele* pontosan azon y elosztások halmaza, amelyekre $v(\{i\}) \leq y_i$ minden $i \in N$-re és bármely két $i, j \in N$ szereplőre

$$s_{ij}(y) > s_{ji}(y) \Rightarrow y_j = v(\{j\}).$$

7.6. feladat. Mutassa meg, hogy a háromszereplős többségi játék magja üres!

7.7. feladat. Igazolja, hogy egy kétszemélyes $(\{1{,}2\}, v)$ játéknak (y_1, y_2) pontosan akkor alapmegoldása, ha $y_1 + y_2 = v(\{1{,}2\})$ és $y_1 - y_2 = v(\{1\}) - v(\{2\})$!

8. fejezet

Költségelosztás mechanizmussal

E fejezetben egy hálózaton értelmezett költségelosztási problémán keresztül rámutatunk a mechanizmustervezésben rejlő lehetőségekre. A vizsgált problémában egy csomagot kívánunk eljuttatni egy feladótól egy címzettig egy olyan hálózaton keresztül, amelyben az egyes összeköttetéseket biztosító szolgáltatók valóságos költségeit csak az adott szolgáltatók ismerik. A célunk a minimális költségű útvonal meghatározása önérdeket követő szolgáltatók mellett, amelynek példája mechanizmustervezési környezetben Nisan–Ronen (2001) cikkében jelent meg.

A fejezetet egy rövid nemkooperatív játékelméleti bevezetővel kezdjük, és utána ismertetjük Nisan–Ronen (2001) egyik alapvető eredményét.

8.1. A nemkooperatív játékelmélet alapfogalmai

Tegyük fel, hogy egy játékban a szereplők egymástól elkülönülten hozzák meg a döntéseiket és ismerik a játék szabályait. Egy ilyen játékot megadó struktúrát stratégiai játéknak hívnak.

8.1. definíció. Az $(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ hármas egy *stratégiai játék*, ahol

- N a játékosok véges nemüres halmaza;
- S_i az $i \in N$ játékos stratégia halmaza, amely egy tetszőleges nemüres halmaz lehet;
- $u_i : \times_{i \in N} S_i \to \mathbb{R}$ az $i \in N$ játékos hasznossági függvénye.

Szükségünk lesz néhány jelölésre. Legyen $N = \{1, \ldots, n\}$. Ekkor egy $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vektor i-edik komponensét nem tartalmazó $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ vektorra vezessük be az x_{-i} jelölést. Továbbá az (x_i, x_{-i}), illetve az (x_{-i}, x_i) az eredeti x vektort jelenti. Ha $X = \times_{i=1}^{n} X_i$, akkor $X_{-i} = X_1 \times \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots X_n$.

Példaképpen tekintsük a következő játékot: tizenegyesrúgást kívánunk modellezni. A kapusnak három lehetősége van: középen marad, balra vetődik vagy jobbra vetődik. A lövő pedig középre, balra vagy jobbra rúghatja a labdát. Az $N = \{\text{kapus}, \text{rugó}\}$, $S_{\text{kapus}} = \{balra, középre, jobbra\}$, $S_{\text{lövő}} = \{balra, középre, jobbra\}$,

$$u_{\text{kapus}}(s) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ s_{\text{kapus}} = s_{\text{lövő}}, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

és

$$u_{\text{lövő}}(s) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ s_{\text{kapus}} \neq s_{\text{lövő}}, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

a leegyszerűsített tizenegyesrúgás megfogalmazása stratégiai játékként.

A stratégiai játék megadásával leírjuk a szereplők döntési helyzetét, azonban azt is meg kellene mondanunk, hogy milyen az „eredménye" a stratégiai játéknak. Ehhez szükségünk lesz valamilyen egyensúlyfogalomra. Egy rendszer egyensúlyán – nagyon általánosan és nagyvonalúan fogalmazva – olyan állapotokat értünk, amelyek bizonyos szempontból állandónak tekinthetők. Játékok esetében a játékosok stratégiahalmazát tekinthetjük állapottérnek. A játékosokról feltesszük, hogy racionálisan viselkednek, azaz hasznosságukat kívánják maximalizálni. Egyáltalán nem kézenfekvő, hogy mely állapotokat tekintsük egyensúlyinak, mivel a játékosok egyidejűleg kívánják hasznosságukat maximalizálni.

A legegyszerűbb egyensúly fogalom a domináns egyensúly. A legfőbb előnye, hogy domináns egyensúly létezése esetén egyik játékosnak sem kell a többi játékos gondolkodásmenetével és választott stratégiájával foglalkoznia.

8.2. definíció. A $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ stratégiai játék $s^* \in S$ stratégiaegyüttese a G *domináns egyensúlya*, ha

$$\forall i \in N : \forall s_i' \in S_i : \forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}),$$

ahol $S = \times_{i \in N} S_i$.

Példaként tekintsük a nevezetes fogolydilemmát, amelynek megadását a 8.1. táblázatban láthatjuk. A történet szerint két bűntársat elkülönülten hallgatnak ki, és attól függően, hogy vallanak-e vagy nem, a táblázatban feltüntetett szabadságvesztésben részesülnek, ahol a sorfejlécben az A játékos és az oszlopfejlécben a B játékos döntése szerepel. A táblázat egyes bejegyzéseiben az első számérték az A játékos szabadságvesztése, míg a második a B játékosé. Összességében akkor járnának a legjobban, ha egyikőjük sem vallana a másik ellen, mivel ekkor ketten együtt csak 2 évet ülnének a kisebb bizonyítható bűncselekményeik miatt. Mivel nem tudnak összehangoltan dönteni, ezért a társuk döntésétől függetlenül jobban járnak, ha vallanak. Másképpen mondva: a bűntett bevallása mindkettőjüknek egy domináns stratégiája. E gondolatmenet szerint tehát a játék egyetlen domináns egyensúlya a (vall,vall), amely a játék egyensúlyi kimenetele.

8.1. táblázat. Fogolydilemma

A\B	nem vall	vall
nem vall	-1, -1	-10, 0
vall	0, -10	-8, -8

Mivel a domináns egyensúly gyakran nem létezik, ezért szükségessé válik egy másik egyensúlyi koncepció, a Nash-egyensúly bevezetése. Lényege, hogy egy olyan pontot nevez egyensúlyinak, amelytől egymagában egyik játékosnak sem érdemes eltérnie.

8.3. definíció. A $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ stratégiai játék $s^* \in S$ stratégiaegyüttese *Nash-egyensúlyi*, ha

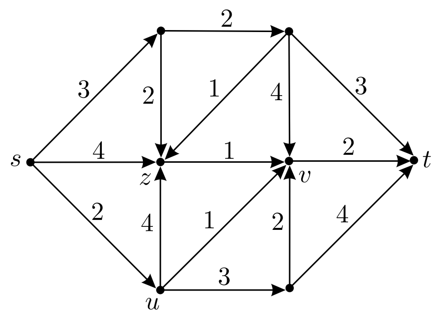
$$\forall i \in N : \forall s_i \in S_i : u_i(s_i^*, s^*{}_{-i}) \geq u_i(s_i, s^*{}_{-i}).$$

Nem minden játéknak van Nash-egyensúlya. Erre jó példa a korábban említett tizenegyesrúgás játék. A játékelmélet iránt érdeklődő olvasónak ajánljuk Forgó és társai (2005) elektronikus jegyzetét.

8.2. Mechanizmustervezés egy hálózaton

A hálózatot a $G = (V, E)$ irányított gráffal reprezentáljuk, ahol a V-beli felhasználók közötti E összeköttetéseket (azaz éleket) a játékosok (szolgáltatók) birtokolják. Egy csomag továbbításának közvetlen költségei a $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ függvénnyel adottak. Egy ilyen költségekkel adott hálózatot láthatunk a 8.1. ábrán. Feltesszük, hogy a hálózatban a csomag küldése bármelyik él kiesése esetén is elvégezhető.

Feladatunk, hogy a hálózat $s \in V$ csúcsából a $t \in V$ csúcsába egy csomagot juttassunk el, a lehető legkisebb költséggel. A 8.1. ábrán jelzett hálózatban a minimális költségű útvonal az s, u, v, t útvonal, amely összesen 5 egységnyi



8.1. ábra. Privátköltséges hálózat

költséggel jár. A két pont közötti legrövidebb útvonalat gyorsan megkapjuk például Edsger Dijkstra algoritmusával (lásd például Rónyai és társai, 1999). A problémát az okozza, hogy az élek költségei az összeköttetést biztosító szereplők privát információi, ezért Dijkstra algoritmusát csak a közölt, és nem feltétlenül valós költségekre futtathatjuk le. Ennek ellenére azt szeretnénk elérni, hogy a szereplők (az egyes élek, illetve összeköttetések birtokosai, a továbbiakban játékosok) a valós költségeiket önként közöljék egy alkalmasan konstruált játék (a továbbiakban mechanizmus) segítségével, ezáltal a csomag valóban a legkisebb költségű útvonalon jusson s-ből t-be. A játékosok tehát az élek birtokosai, és a stratégiahalmazuk az általuk birtokolt él lehetséges költségeinek halmaza, jelen esetben a nemnegatív valós számok halmaza. A közölt költségek alapján a mechanizmus meghatározza a minimális költségű útvonalat, amely a csomagot a legrövidebb útvonalon juttatja el. A mechanizmus hasznossági függvényeit úgy kívánjuk meghatározni, hogy az s-ből t-be haladó küldemény a valódi minimális összköltségű útvonalon haladjon. Nyilván nem célravezető, ha a legrövidebb útvonalon szereplő játékos megkapja a bemondott költségeit, mivel egy játékos, csak saját költségeit ismerve, késztetést érezhet arra, hogy a valóságos költsége helyett magasabb költséget közöljön profitjának növelése érdekében. A 8.1. ábra hálózatában (feltéve, hogy a többi szereplő az ábrában látható valós költségét közli) az (s, u) játékos például 3-ra emelhetné a költségét, ezzel továbbra is a minimális költségű útvonalon maradva, egyben profitot realizálva.

Megadunk egy hálózat felett értelmezett játékot, egyelőre megfeledkezve arról, hogy milyen egyensúlykoncepció (például domináns vagy Nash-egyensúly) mellett kívánjuk meghatározni a játék kimenetelét. Tegyük fel tehát, hogy a tervező azt kívánja elérni, hogy a csomag mindenképpen a valódi – de számára ismeretlen – költségek melletti minimális költségű útvonalon jusson el a feladótól a címzettig. Ha esetleg több minimális költségű útvonal is létezne, akkor ezek egyikén haladjon a csomag. A tervező céljai elérése érdekében transzferkifizetésekkel él, azaz a kinyilvánított költségek függvényében eltérő összegeket juttathat, illetve vonhat el a játékosoktól céljának elérése érdekében. Ezért a tervező értékeket rendel a hálózat egyes éleihez. Ha például a a 8.1. ábrában kiesne az (s, u) él – ami úgy is reprezentálható, hogy az (s, u) él költségét végtelenül nagyra vesszük –, akkor ezzel az s, z, v, t útvonal válna minimális költségű útvonallá, méghozzá 7 összköltséggel, ami 2-vel több az eredeti hálózat minimális összköltségénél. Tehát (s, u) a valódi 2 költségén felül legfeljebb további 2 egységet tudna elismertetni, így összesen 4 egységet kinyilvánítani úgy, hogy még továbbra is egy minimális költségű útvonalon maradjon. Ezt a 4 egységet nevezzük az (s, u) játékos marginális hozzájárulásának, amellyel a tervező honorálja az (s, u) játékos jelenlétét.

Általánosan az $e = (u, v) \in E$ játékos $MC_{\tilde{c}}(e)$ marginális hozzájárulását a $\tilde{c} : E \to \mathbb{R}_+$ kinyilvánított költségek – azaz a játékosok stratégiaprofilja – alapján úgy határozzuk meg, hogy kiszámoljuk a $\widetilde{C}_{|\tilde{c}(e)=\infty}$ minimális összköltségű útvonal költségét az e játékos hálózatból történő kiiktatása esetén a többiek kinyilvánított költségei alapján, majd kiszámoljuk a $\widetilde{C}_{|\tilde{c}(e)=0}$ minimális összköltségű útvonal költségét abban az esetben, ha az e játékos élköltsége megint nulla volna a többiek kinyilvánított költségei alapján. Így megkapjuk az e játékos által maximálisan elkérhető összeget, feltéve, hogy minimális összköltségű útvonal mentén kíván maradni, (ha ez számára egyáltalán lehetséges) a $\tilde{c} : E \to \mathbb{R}_+$ kinyilvánított költségek mellett. Végül a marginális hozzájárulás a két érték különbségeként adódik:

$$MC_{\tilde{c}}(e) = \widetilde{C}_{|\tilde{c}(e)=\infty} - \widetilde{C}_{|\tilde{c}(e)=0}.$$

Másképpen $MC_{\tilde{c}}(e)$ az a maximális összeg, amellyel e csökkenteni képes az összköltséget. Összegezve az általunk konstruált (N, S, u) játékban $N = E$, $S_i = \mathbb{R}_+$ és

$$u_e(\tilde{c}) = \begin{cases} \widetilde{C}_{|\tilde{c}(e)=\infty} - \widetilde{C}_{|\tilde{c}(e)=0} - c_e, & \text{ha } e \text{ továbbít, és} \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $c_e = c(e)$ az e játékos valóságos költsége.

A minimális összköltségű útvonalon nem szereplő játékosok marginális hozzájárulásait nullának tekintjük. A tervező – céljának érdekében – az egyes játékosoknak a kinyilvánított $\tilde{c} : E \to \mathbb{R}_+$ költségeik alapján számított marginális hozzájárulásait juttatja. Vegyük észre, hogy a tervező által kitalált mechanizmus mellett a játékosok (transzfer) bevételei nem függnek a saját költségeiktől. Egy, a minimális összköltségű útvonalon elhelyezkedő játékos nyeresége a transzferkifizetésként kapott összeg és a csomag továbbításával járó költségének különbségeként adódik. A csomag továbbításában részt nem vevő játékosok profitjai mind nullák. Tegyük fel, hogy a játékosok egymástól függetlenül, szimultán módon közlik a tervezővel a kinyilvánított költségeiket.

Feltéve, hogy a 8.1. ábrában adott kinyilvánított költségek egyben a valódi költségek is, s, u, v, t a legrövidebb út,

$$u_{su} = (7-3) - 2 = 2, \quad u_{uv} = (7-4) - 1 = 2 \quad \text{és} \quad u_{vt} = (8-3) - 2 = 3.$$

A felmerülő $2 + 1 + 2 = 5$ költségen felül a mechanizmus üzemeltetőjének, vagy a feladónak további $2 + 2 + 3 = 7$ egységet kell kifizetnie.

8.1. tétel. *A fenti játék egyetlen domináns egyensúlyában $s_e = c_e$ minden $e \in E$-re, azaz mindenki a valódi költségét közli.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy bármely $e \in E$ játékos u_e kifizetése csak annyiban függ s_e-től, amennyiben befolyásolja e minimális összköltségű útvonalra kerülését. Ráadásul a kifizetés összege független s_e-től, feltéve hogy e minimális összköltségű útvonalon marad.

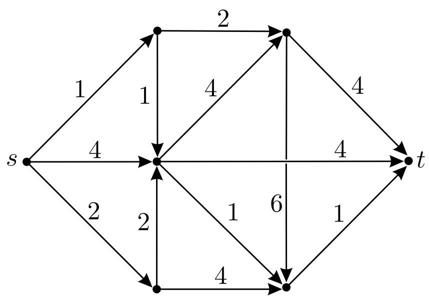
$s_e > c_e$ értelmetlen, hiszen ezzel e lekerülhet egy profitábilis útvonalról, anélkül hogy növelhetné a kifizetését. Nézzük az $s_e < c_e$ esetet. (i) Ha c_e-vel rajta van a minimális összköltségű útvonalon, akkor s_e-vel is rajta lesz, anélkül hogy változtatna kifizetésén. (ii) Ha c_e-vel nem volt rajta a minimális összköltségű úton és s_e-vel már rajta lesz, akkor a kapott $\widetilde{C}_{|\tilde{c}(e)=\infty} - \widetilde{C}_{|\tilde{c}(e)=0}$ transzfer összege kisebb lesz c_e-nél. Ennek belátásához legyen $s'_e \in [s_e, c_e)$ az a költség, amellyel e a c_e melletti minimális összköltségű úttal azonos összköltségű útra kerülhet, azaz s'_e mellett már rajta lesz egy minimális összköltségű úton. De s'_e mellett e transzfere pontosan s'_e lesz, ha e mentén haladna a csomag. Nyilván $s_e < s'_e$ esetén is s'_e transzferben részesülne. $s'_e < c_e$ miatt e veszteséges volna. (iii) Ha c_e-vel és s_e-vel sem kerül e minimális összköltségű útra, a profitja így is, úgy is nulla.

Összegezve, $s_e \neq c_e$ esetén e profitja nem lehet nagyobb, mint $s_e = c_e$-nél. Mivel bármely e esetén létezik e-t elkerülő út, $s_e \neq c_e$ esetén található olyan s_{-e}, amelynél $s_e = c_e$ választása kifizetődőbb. □

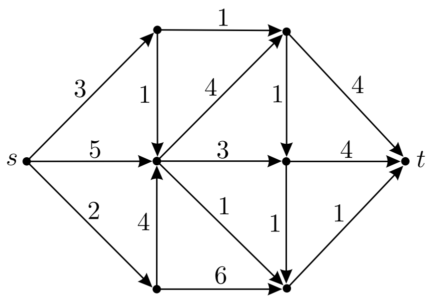
A problémára konstruált mechanizmus a valódi költségek kinyilvánítására ösztönöz, ami az internet tekintetében nagyon kedvező, mivel a hálózat nagy és egyben változó mérete miatt nem várható el, hogy a szereplők ismerjék egymás költségeit. Viszont a mechanizmus kellemetlen tulajdonsága a transzferek igénye.

8.3. Gyakorló feladatok

8.1. feladat. Az alábbi hálózatban az élek tulajdonosai a szolgáltatók, továbbá a csomagtovábbítási költségek az éleken láthatóak. A megismert mechanizmus mekkora transzferekben részesíti az egyes szereplőket, ha az éleken szereplő költségek a kinyilvánított költségek?



8.2. feladat. Az alábbi hálózatban az élek tulajdonosai a szolgáltatók, továbbá a csomagtovábbítási költségek az éleken láthatóak. A megismert mechanizmus mekkora kifizetésekben részesíti az egyes szereplőket, ha az éleken szereplő költségek a kinyilvánított költségek?



9. fejezet

Folytonos osztozkodási játékok

Egy osztozkodási játékban a szereplők egy jószágból már rendelkezésre álló mennyiséget osztanak el egymás között, meghatározott szabályok szerint. Érdekes feladat olyan osztozkodási játékok konstruálása, amelyek egy, a szereplők számára bizonyos igazságossági kritériumoknak eleget tevő elosztást biztosítanak.

Kétszereplős osztozkodási problémára egy megoldás a közismert „az egyik felez, a másik választ" eljárás, amely szerint az egyik szereplő saját értékítélete szerint két egyenlő részre osztja az elosztandó mennyiséget, majd a másik szereplő választhat egyet a két rész közül. Már Hésiodos (kb. i.e. VII. évszázad) „Theogonia" eposzában Prométheusz és Zeusz *„az egyik felez, a másik választ"* eljárással osztozkodtak a közösen elfogyasztandó húson.

Az „egyik felez, a másik választ" eljárást a mai napig használják. Kiemelendő az 1994 november 16-án életbe lépett 159 állam által aláírt Nemzetközi Tengerfenék Kiaknázási Egyezmény. Az egyezmény szerint, ha egy fejlett ország vállalata hasznosítani kívánja valahol a tengerfeneket, akkor a kiaknázni kívánt területet először két részre kell osztania. Ezek után egy, a fejlődő országok érdekeit képviselő nemzetközi szervezet kiválasztja a fejlődő országok számára azt a részt, amelyhez a fejlett ország vállalata nem nyúlhat, ezzel biztosítva a fejlődő országok számára a későbbi kiaknázás lehetőségét.

Steinhaus (1948) általánosította az eljárást három szereplőre és tanítványai, Banach és Knaster pedig tetszőleges n-re.[1] Az általuk adott eljárások egy úgynevezett arányos eredményt garantálnak, ami alatt az értendő, hogy bármely szereplő a többi szereplő cselekedeteitől függetlenül képes az arányos

[1] Steinhaus az eljárást Banach halálát követően publikálta.

részesedését biztosítani. Többszereplős osztozkodási problémákra jó példa a földosztás kérdése. Hogyan osztja el három testvér az örökölt földterületet „igazságosan” egymás között?

Egy osztozkodási játék megoldásával szembeni erősebb igazságossági elvárás az irigységmentesség, mely követelmény szerint saját értékítélete alapján mindenki úgy érzi, hogy ő járt a legjobban. Ebben az alfejezetben áttekintjük az arányos és az irigységmentes osztozkodási eljárásokat.

9.1. Osztozkodási játék

Kezdjük az általunk vizsgálandó *osztozkodási problémával.*

9.1. definíció. Az $\left(N, \Omega, \mathcal{A}, (\mu_i)_{i \in N}\right)$ matematikai struktúrát *osztozkodási problémának* nevezzük, ha

- N az osztozkodásban résztvevő szereplők egy nem üres véges halmaza;
- Ω az egész elosztandó tárgyat (területet) jelöli, amelyet a továbbiakban *tortának* fogunk hívni;
- $\mathcal{A}$ a lehetséges tortaszeletek halmaza, amely kielégíti az alábbi feltételeket
  - (i) $\Omega \in \mathcal{A}$, azaz az egész torta egy lehetséges szelet;
  - (ii) ha $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ két lehetséges szelet, akkor $A \cup B \in \mathcal{A}$;
  - (iii) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $A^c \in \mathcal{A}$;
- μ_i az $i \in N$ személy tortaszelet értékelő függvénye, melyre
  - (i) $\mu_i : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, azaz i minden lehetséges szeletet egy nem negatív számmal jellemez;
  - (ii) ha $A, B \in \mathcal{A}$ és $A \cap B = \emptyset$, akkor $\mu_i(A \cup B) = \mu_i(A) + \mu_i(B)$ (additivitás);
  - (iii) $\mu_i(\Omega) = 1$ (normáltság);
  - (iv) minden $A \in \mathcal{A}$ szeletnek van bármely $\lambda \in [0,1]$ arányú $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$ és $\mu_i(B) = \lambda \mu_i(A)$ részszelete (folytonos oszthatóság);
- a μ_i értékelő függvényt csak az $i \in N$ szereplő ismeri.

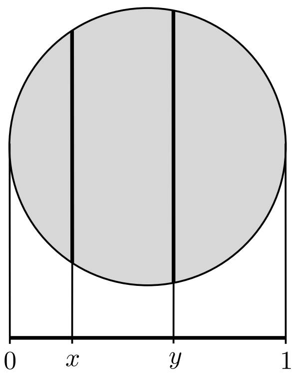
9.1. megjegyzés. Az olyan hozzárendelést, amely eleget tesz az osztozkodási problémában az $\mathcal{A}$ halmazrendszerre kirótt három feltételnek, *halmazalgebrának* nevezik.

9.2. megjegyzés. A μ_i additivitása maga után vonja μ_i véges additivitását. Egy algebrán értelmezett nem negatív és additív halmazfüggvényt *végesen additív mértéknek* hívnak.

9.3. megjegyzés. A folytonos oszthatósági feltevés maga után vonja, hogy bármely $\omega \in \Omega$ elemre, amely egyben egy lehetséges szelet is (azaz $\{\omega\} \in \mathcal{A}$), szükségszerűen $\mu_i(\{\omega\}) = 0$.

Az osztozkodási eljárásaink során az egyszerűség kedvéért a tortát a [0,1] intervallummal azonosítjuk. Ebben az esetben az $x, y \in [0,1]$ vágási pontok a tortán elvégzendő egymással párhuzamos vágások helyeit jelölik ki (lásd a 9.1. ábrát), kör alakú tortán akár sugárirányú vágásokat jelölhetnek. Megjegyzendő, hogy kör alakú torták esetén van egy kezdővágás, amely egy szabadon választható viszonyítási pontot szolgáltat. A korábban említett arányossági követelmény szempontjából ez nem okoz problémát, sőt, az általunk ismertetett irigységmentes elosztási eljárásoknál sem.[2]

Ha $\Omega = [0,1]$, akkor innentől legyen $\mathcal{A}$ a [0,1] intervallum véges sok részintervallumának uniójaként nyerhető halmazoknak az összessége. Továbbá folytonos oszthatóság esetén az $F_i(x) = \mu_i([0, x))$ *tortaszelet értékelő eloszlásfüggvény* folytonos a [0,1]-en, amelynek segítségével egy $[x, y]$ szelet értéke a $\mu_i([x, y]) = \mu_i([x, y)) = \mu_i([0, y)) - \mu_i([0, x)) = F_i(y) - F_i(x)$ összefüggéssel számolható.



9.1. ábra. $\Omega = [0,1]$

[2] Megjegyzendő, hogy irigységmentes és nem dominált (Pareto-hatékony) tortaszeletelosztás létezésének kérdését elemezve Barbanel–Brams–Stromquist (2009) rámutatott, hogy a kör alakú torták sugár menti felosztása nehezebb a párhuzamos felosztásánál. Mivel a vizsgálatuk nem algoritmikus, az eredményük nem vonatkozik osztozkodási eljárásokra, továbbá hatékonysági kérdésekkel sem foglalkozunk ebben a fejezetben.

Egy *osztozkodási eljárás* a szereplőket meghatározott szabályok szerint felszólíthatja vágások végrehajtására és tortaszeletek kiértékelésére. Az előbbi egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz megadását jelenti, míg az utóbbi a megkérdezett i szereplő $\mu_i(A)$ értékelésének megismerésére irányul. Az elvégzett vágások, illetve válaszok függvényében, az eljárás újabb vágások és értékelések elvégzésére szólítja fel a szereplőket, amíg még van elosztandó tortaszelet. Egy eljárás véges, ha az említett lépések véges sokszor történő végrehajtása után felosztja a tortát tetszőleges osztozkodási probléma esetén. Egy osztozkodási eljárás segítségével meghatározható a torta egy $(A_i)_{i\in N}$ (ahol $A_i \in \mathcal{A}$) *felosztása*, amely az Ω torta egy partíciója. Adott osztozkodási probléma mellett, egy adott osztozkodási eljárás egy olyan játékot határoz meg, amelyben a szereplők (játékosok) akciói a vágások és az értékelések, és amelynek kimenetele a torta egy partíciója a vele járó értékelésekkel.

Az osztozkodási eljárásokat számos kritérium segítségével jellemezhetjük. Mivel egy alkalmazott eljárás számára ismeretlenek az egyes szereplők tortaszelet értékelő függvényei, ezért elvárjuk, hogy az eljárások *igazmondásra ösztönözzenek*, azaz egy tortaszelet kiértékelése esetén a szereplők valódi értékítéleteiket adják meg, továbbá egy adott $\alpha \in (0,1)$ méretű vágás megkövetelése esetén a felszólított szereplő saját értékítélete szerint valóban egy α méretű szeletet vágjon le. Az igazmondásra ösztönzést azzal érheti el egy eljárás, hogy minden egyes szereplő „hazudozásával” csak önmagának árthat. Egy nagyon egyszerű igazmondásra ösztönző eljárás a „diktatórikus”, azaz amelyik az egész tortát egy előre kiszemelt személynek adja. Mi a „diktatórikus” eljárással szemben valamilyen igazságossági kritériumnak is eleget tevő eljárásokat keresünk. A legegyszerűbb igazságossági kritérium az *arányosság* kritériuma, amely megköveteli, hogy minden egyes szereplő megfelelő döntések esetén garantálni tudja önmaga számára (a többi szereplő cselekedeteitől függetlenül) saját értékítélete szerint a torta arányos részét (n szereplő esetén egy $1/n$-ed értékű részt). Ennél erősebb igazságossági kritérium az *irigységmentesség* kritériuma, amely azt követeli meg, hogy minden egyes szereplő saját értékítélete szerint a torta egyik legértékesebb részét kapja ($\forall i, j \in N :$ $: \mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j)$, ahol $(A_i)_{i\in N}$ a torta egy felosztása).

9.2. Arányos osztozkodási eljárások

Ebben a szakaszban négy arányos és véges osztozkodási eljárást; továbbá egy arányos, de nem véges eljárást ismertetünk.

9.2.1. Fink eljárása

Talán Fink (1964) eljárása áll szellemében a legközelebb „az egyik felez, a másik választ” kétszemélyes eljáráshoz. Két személy esetén „az egyik felez, a másik választ" eljárás alkalmazandó. Három személy esetén kérjük meg az 1 személyt a torta felezésére, majd 2-t a két szelet közül a nagyobbik kiválasztására. Ezek után kérjük meg külön-külön 1-t és 2-t a saját szeletük felharmadolására. Végül 3 mindkét részből választhat egy-egy harmadot. Ekkor 3, mint utolsó választó, garantálhatja magának (saját értékítélete szerint)[3] a torta 1/3-át. Ha 1 és 2 a saját felét valóban harmadolta, akkor a torta felének kétharmada garantált számukra, ehhez persze az is kell, hogy az elején 1 valóban felezzen, majd 2 a nem kisebbik felet válassza. Tehát az eljárás igazmondásra ösztönöz, arányos és véges.

Az eljárást az n szereplős esetre rekurzívan definiáljuk. Tegyük fel, hogy $n-1$ szereplő már arányosan elosztotta a tortát az $n-1$ személyes Fink-eljárással. Kérjük most az $n-1$ személyt arra, hogy az általuk legalább $1/(n-1)$-re értékelt részüket n egyenlő részre osszák. Ezek után válasszon az n-edik személy minden egyes személy részéből egy szeletet. Mint utolsó választó számára garantált az arányos része; továbbá, ha az első $n-1$ személy valóban n egyenlő részre vágta az addigi saját részét, akkor garantált számára a torta $\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$ része.

Fink eljárásának előnye – mint ez a rekurzív definícióból látható – hogy egy, az osztozkodáshoz később csatlakozó személy nem okoz problémát az eljárás számára. Megjegyzendő még, hogy Fink eljárása $n!-1$ vágást igényel, ha a már jelenlevő személyek minden egyes szeletüket i egyenlő részre osztják az i-edik személy ($i=2,\dots n$) „érkezésekor". Az eljárás vágásigénye csökkenthető azzal, hogy az i-edik személy megjelenésekor a már jelenlevő $i-1$ személy (külön-külön) az addigi egész részesedését osztja i egyenlő részre. Ekkor $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n(n-1)(2n-1)/6$ vágás szükséges, mivel az n-edik szereplő érkezésekor az első $n-1$ szereplő mindegyikének legfeljebb $n-1$ vágást kell végeznie, ha nem külön-külön osztja fel az egyes szeleteit, hanem egyszerre, azokat „egymás mellé rendezve".

Tekintsük a következő példát:

9.1. példa. Legyenek $\Omega=[0{,}1]$, $N=\{1{,}2{,}3\}$, $F_1(x)=\sqrt{x}$, $F_2(x)=x$ és $F_3(x)=x^2$ ($x\in[0{,}1]$). Határozzunk meg egy arányos elosztást Fink eljárásával!

Az 1 szereplő az $F_1(x)=\sqrt{x}=1/2$ által meghatározott $x_0=1/4$ helyen vág. A 2 szereplő a [0,1/4] és az [1/4,1] szeletek közül a másodikat választja. Tehát 1 harmadolja a számára 1/2 értékű [0,1/4] szeletet, amely az $x_1 =$ $= 1/36$ és $x_2=1/9$ vágási pontokat eredményezi. Könnyen meggyőzhetünk arról, hogy ezek közül 3 a harmadik [1/9,1/4] szeletet választja, ezzel meghagyva 1-nek a [0,1/9] intervallumot kiadó két szeletet. 2 pedig a számára 3/4 értékű [1/4,1] szeletet harmadolja. Mivel a tortaszelet értékelő eloszlás-

[3] A továbbiakban nem írjuk ki, hogy egy adott hányadot mindig az adott személy értékítélete szerint értjük.

függvénye lineáris, ezért az $x_3 = 1/2$ és $x_4 = 3/4$ helyeken vág. Az így kapott három szelet közül ellenőrizhető, hogy 3 az utolsó [3/4,1] szeletet választja, meghagyva 2-nek az [1/4,3/4] intervallumot kiadó két szeletet. Az 1, 2 és 3 szereplők által megkapott szeletek értékei rendre 1/3, 1/2 és 79/162. Az arányosság valóban teljesül, de a hasznossági szinteket tekintve 2 járt a legjobban. Más eredményre jutunk, ha a három szereplő más sorrendben vág. Azt is megállapíthatjuk, hogy 1 irigyli 2-t, mivel saját értékelése alapján az [1/4,3/4] szelet értéke $(\sqrt{3} - 1)/2 \approx 0{,}366$.

9.2.2. Rekurzív feloszt és választ eljárás

Az eljárásunkat rekurzíven adjuk meg (lásd Tasnádi, 2003). Nyilván az $n = 1$ eset nem okoz problémát, mivel ekkor az egyetlen szereplő megkapja az egész tortát. Az $n = 2$ esetben alkalmazzuk „az egyik felez, a másik választ" eljárást, amely mindkét fél számára garantálja az arányos részét.

Nézzük az $n = 3$ esetet. Szólítsuk fel az 1 személyt arra, hogy harmadolja el a tortát saját értékítélete szerint. Ezután kérjük meg a 2 és 3 személyeket egymás után arra, hogy válasszák ki a két nagyobbik részt. Ezek után két eset adódhat. Az egyik esetben 2 és 3 csak egy azonos szeletet választanak. Ekkor a közösen kiválasztott szeleten 2 és 3 „az egyik felez, a másik választ" eljárással osztozkodik, míg a másik két szeleten 2, illetve 3 osztozkodik 1-gyel „az egyik felez, a másik választ" eljárással. Gondoljuk meg, hogy miért arányos ebben az esetben az eljárásunk? 1 két 1/3 értékű szeletnek külön-külön legalább a felét tudja magának garantálni, azaz összesen $2/6 = 1/3$-ot. 2 és 3 két olyan szelet kétszemélyes osztozkodásában vesz részt, amelyek összértéke szerintük legalább 2/3. Ezek után „az egyik felez, a másik választ" eljárás biztosítja számukra az 1/3 részesedést. A másik esetben 2 és 3 ugyanazt az 1 által felvágott két szeletet választja ki. Ekkor 2 és 3 a két szeleten „az egyik felez, a másik választ" eljárással osztozkodik. Ezáltal mindketten garantálni tudják maguk számára a torta 1/3-át. 1 számára megmarad a másik kettő által kijelöletlen szelet, amely értéke 1 szerint 1/3-ad. Az n személyes eljárás leírását egyszerűsíti, ha ezt az esetet úgy képzeljük el, hogy 1 a számára megmaradt harmadon saját maga kétszeres multiplicitással osztozkodik, ami alatt az értendő, hogy 1 elfelezi a megfelelő harmadot, majd egyik énje választ egyet a kettő közül, míg a másik énje számára megmarad a másik rész.

Az 1 személyt nem tudjuk arra kötelezni, hogy valóban harmadokra vágja a tortát, hiszen μ_1-et csak 1 ismeri. Ezért ha 1 nem igazmondó, akkor megtehetné, hogy nem is harmadokra vágja a tortát. Ez nyilván mit sem változtat azon, hogy 2 és 3 garantálni tudja maga számára a torta 1/3-át. Azonban, ha 1 nem harmadol, akkor kiteszi magát annak a kockázatnak, hogy 2 és 3 a számára legértéktelenebb szeletet hagyja meg. Tehát 1-nek az első lépésben a felszólítástól függetlenül harmadolnia kell.

Általánosítsuk eljárásunkat n szereplőre. Tegyük fel, hogy $n-1$ szereplő esetében már rendelkezésünkre áll egy $n-1$ személy számára arányos részesedést biztosító eljárás. Szólítsuk fel az 1 személyt arra, hogy $n-1$ vágással n egyenlő részre ossza fel a tortát, majd egymás után kérjük fel a $2,\ldots,n$ személyeket arra, hogy válasszák ki a számukra legértékesebb $n-1$ szeletet. Az n darab szeletet $n-1$ személyes eljárással osszuk el úgy, hogy 1 belép a hiányzó helyekre, a megfelelő multiplicitásokkal. Ekkor 1 a felszólítástól függetlenül n egyenlő részre osztja a tortát, különben kiteszi magát annak, hogy a többi $n-1$ szereplő pontosan a számára legértéktelenebb szeletet hagyja meg. Mivel az $n-1$ személyes eljárás már garantálja a megfelelő rész osztozkodásában résztvevő szereplők számára az adott szelet $1/(n-1)$-ed részét, és mindenki pontosan $n-1$ szelet[4] osztozkodásában vesz részt, így mindenki számára garantált a torta $(n-1)\frac{1}{n-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$-ed része.

Határozzuk meg az eljárásunk vágásigényét a legrosszabb esetben. Nyilván két szereplő esetén $T(2)=1$. Az $n=3$ esetben 1 két vágást hajt végre, majd legrosszabb esetben 3 további vágás szükséges, azaz $T(3)=5$. Az $n=4$ esetben 1 először három vágást hajt végre, majd a négy rész elosztása különkülön legfeljebb 5 vágást igényel. Tehát $T(4)=3+4\cdot 5=23$. Általánosan $T(n)=n-1+n\cdot T(n-1)$. Az $n=1,2,3,4$ esetek alapján azt sejtjük, hogy $T(n)=n!-1$, amit teljes indukcióval igazolunk:

$$T(n)=n-1+n\cdot T(n-1)=n-1+n\,((n-1)!-1)=n!-1.$$

Tekintsük a következő illusztratív példát.

9.2. példa. Az 1,2 és 3 személyek tortaszelet értékelő eloszlásfüggvényei $F_1(x)=x$ $(x\in[0,1])$,

$$F_2(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & \text{ha } x\in[0,\frac{1}{2}],\\ \frac{3x-1}{2}, & \text{ha } x\in(\frac{1}{2},1]\end{cases} \quad \text{és} \quad F_3(x)=\begin{cases}2x, & \text{ha } x\in[0,\frac{1}{4}],\\ \frac{2x+1}{3}, & \text{ha } x\in(\frac{1}{4},1].\end{cases}$$

Határozzunk meg egy arányos elosztást az ebben az alfejezetben megismert eljárással!

Az eljárás szerint 1 a $[0,1/3]$, az $[1/3,2/3]$ és a $[2/3,1]$ szeletekre vágja a tortát. Ekkor 2 az $[1/3,2/3]$ és a $[2/3,1]$ szeletekben, míg 3 a $[0,1/3]$ és az $[1/3,2/3]$ szeletekben érdekelt. Felezze 1 az első és a harmadik szeletet, továbbá 3 a második szeletet. Ekkor 1 az $[1/6,1/3]$ és a $[2/3,5/6]$ szeleteket; 2 az $[1/2,2/3]$ és az $[5/6,1]$ szeleteket; 3 a $[0,1/6]$ és az $[1/3,1/2]$ szeleteket kapja.[5] Az 1, 2 és 3 szereplők által megkapott szeletek értékei rendre $1/3$, $1/2$ és $4/9$. Az arányos részesedést valóban mindenki elérte, de a hasznossági szinteket

[4] Kivéve az 1 személyt, aki viszont $n-1$ összmultiplicitással vesz részt az n szelet osztozkodásában.

[5] 2 közömbös a harmadik szelet két részszelete között.

tekintve 2 járt a legjobban. Az is ellenőrizhető, hogy senki sem irigyel senkit. Ettől az ismertetett eljárás még nem irigységmentes, azaz konstruálható olyan osztozkodási probléma, amely esetén legalább egy szereplő irigyli egy másik szereplőnek juttatott szeleteket (lásd a 9.14. feladatot).

9.2.3. Banach–Knaster-eljárás

Az első n személyes arányos osztozkodási eljárást Banach és Knaster (lásd Steinhaus, 1948) adta. Az $n = 2$ esetre az eljárás „az egyik felez, a másik választ" eljárást használja. Ha $n > 2$, akkor első lépésként 1 levág egy szeletet a tortából, majd továbbadja a levágott szeletet 2-nek. 2 megnézi a szeletet, és ha úgy gondolja, a szeletet egy vágással kiigazíthatja. Döntésétől függően az eredeti kiigazítatlan, vagy a kiigazított szeletet adja tovább 3-nak. Az eljárás így ismétlődik, amíg egy szelet n-hez nem ér. Ekkor n eldöntheti, hogy elfogadja-e a szeletet, vagy elutasítja. Ha n elfogadja, akkor n távozik a szelettel és $1, \ldots, n-1$ osztozkodnak az összes megmaradt részen. Ha n elutasítja a szeletet, akkor a szeletet annak kell elvinnie, aki legutoljára vágott. A legutolsó vágó távozik, míg a többi $n-1$ személy osztozkodik a megmaradt összes tortaszeleten.

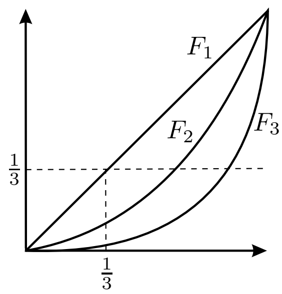
Még azt kell meggondolnunk, hogy a Banach–Knaster-eljárás valóban mindenkinek garantálja az arányos részét. Az $n = 2$ esetben ez nyilván igaz. Tegyük fel, hogy a Banach–Knaster-eljárás $n - 1$ személy esetén mindenki számára biztosítja a tortából az arányos részesedést. Az n személyes esetet vizsgálva kezdőlépésként 1-nek saját értékítélete alapján legalább a torta n-ed részét kell levágnia, mivel ha $1/n$-nél kisebb részt vág, megkockáztatja, hogy az $1/n$-nél kisebb szeletet neki kelljen elvinnie, hiszen az utolsó vágó szerepébe kerülhet. Ha pedig 1 egy $1/n$-nél nagyobb részt vág le, akkor előfordulhat, hogy az utolsó vágó vagy n egy, az 1 értékítélete szerint $1/n$-nél nagyobb szeletet visz el. Ekkor viszont 1 egy olyan $n - 1$ személyes osztozkodásban fog részt venni, amelyben számára már csak a torta $\frac{1}{n-1}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ részénél kisebb hányada biztosított. Az 1-re vonatkozó érvelést ismételve a többi szereplőnek is le kell vágnia a hozzá kerülő darabból a saját értékítélete szerinti $1/n$ értékű szeletet, ha az szerinte $1/n$-nél többet ér. Az első kör után egy személy távozik legalább $1/n$-nel, és visszamarad egy, a többiek által külön-külön legalább $(n - 1)/n$-re értékelt rész, amelyet már egy $n - 1$ személyes eljárással osztanak el egymás között.

A Banach–Knaster-eljárás első körében legfeljebb $n - 1$-en vágnak. Ezek után a második körben már csak $n-1$-en osztozkodnak a megmaradt részen, ami a legrosszabb esetben $n - 2$ vágáshoz vezethet. Most már csak $n - 2$-en vesznek részt a megmaradt részek elosztásában. Ezt a gondolatmenetet folytatva adódik, hogy legfeljebb $(n - 1)n/2$ vágás szükséges, ami nyilván kedvezőbb Fink módszerénél.

A Banach–Knaster-eljárást egy példán is szemléltetjük.

9.3. példa. Legyenek $\Omega = [0,1]$, $N = \{1,2,3\}$, $F_1(x) = x$, $F_2(x) = x^2$ és $F_3(x) = x^4$ $(x \in [0,1])$. Határozzunk meg egy arányos elosztást a Banach–Knaster-eljárással!

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy balról vágnak a személyek. Először 1 az 1/3-nál vág és ezt a [0,1/3) szeletet adja 2-nek. 2-nek ez a szelet csak $F(1/3) = 1/9$-et ér, így igazítás nélkül továbbadja 3-nak, akinek ez a szelet még kevesebbet ér. Tehát a [0,1/3) szeletet 1-nek kell elvinnie. A visszamara-



9.2. ábra. Banach–Knaster-eljárás

dó [1/3,1] szeleten 2 és 3 osztozkodik. Ha 2 felez, akkor a számára 8/9 értékű szeletet felezi el két 4/9 értékű szeletre. Ehhez megoldja az

$$x^2 - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

egyenletet, amiből $x = \sqrt{5}/3$-nál fog felezni. 3 a két szelet közül az $[x,1]$ szeletet választja, mivel $F_3(1) - F_3(x) > F_3(x) - F_3(1/3)$. Így 2-nek megmarad az $[1/3, x]$ szelet. A példából rögtön látható, hogy a Banach–Knaster-eljárás nem irigységmentes, mivel 1 irigyli 2-től az $[1/3, x]$ szeletet.

9.2.4. Even–Paz-eljárás

Az ismert véges osztozkodási eljárások közül a nagyságrendileg legkevesebb vágást igénylő eljárást Even–Paz (1984) adta meg, amely az „oszd meg és uralkodj elven” alapul. Az $n = 2$ esetben „az egyik felez és a másik választ” eljárást alkalmazza, míg az $n = 3$ esetre Banach–Knaster-eljárást.

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a tortát csak párhuzamos vágásokkal oszthatjuk föl. Képzeljünk mondjuk egy téglalap alakú tortát és térjünk rá a négyszemélyes esetre. Kérjünk fel három személyt arra, hogy párhuzamos vágásokkal külön-külön osszák fel két egyenlő részre. Nevezzük medián vágónak[6] azt a személyt, aki a középső vágást végezte el. Kérjük meg a negyedik, mondjuk az i, személyt arra, hogy jelölje meg a középső vágástól balra és jobbra lévő részek közül a számára értékesebbet. Ha i a bal oldali részt választja, akkor a bal oldali részen a medián vágótól balra vágó személlyel osztozkodik, míg a jobb oldali részen a fennmaradó két személy osztozkodik. Mindkét részen a két-két személy „az egyik felez, a másik választ" eljárással osztozkodik. Hasonlóan járhatunk el, ha i a jobboldali részt választja.

Ha mindenki igazmondó, akkor könnyen látható, hogy mind a négy személy számára biztosított a torta egynegyede. A negyedik személy nyilván igazmondó, azaz kijelöli a számára értékesebb oldalt. A három felező személy hamis felezőpont megadásával úgy kerülhet a medián vágó szerepébe, hogy ezek után egy, a számára csak a torta felénél kevesebbet érő tortarészen kelljen majd osztozkodnia. Tehát egy „hazudozó" személy megkockáztatja az arányos részesedésének elvesztését.

Az ötszemélyes eset a négyszemélyes eljárás kisebb módosítását igényli. Most négy személyt arra kérünk fel, hogy balról jobbra nézve osszák fel a tortát párhuzamos vágásokkal $2:3$ arányban. Nevezzük most medián vágónak azt a személyt, aki balról jobbra nézve a második vágást végezte el. Az ötödik, mondjuk i, személytől megkérdezzük, hogy a medián vágástól balra lévő rész ér-e számára $2/5$-öt. Ha igen, akkor a medián vágótól balra vágó személlyel osztozkodjanak a medián vágástól bal oldali részen; különben pedig a medián vágótól jobbra lévő részen osztozkodjon a medián vágótól jobbra vágó két személlyel. A fennmaradó részen a maradék három, illetve két személy osztozkodjon. A négyszemélyes esethez hasonlóan ellenőrizhető, hogy az eljárás igazmondásra ösztönöz és arányos.

A páros szereplős eset a négyszemélyes esethez hasonlóan megadható. Nevezetesen, egy szereplő kivételével mindenki felez, majd a nem felező szereplő kijelöli a medián vágás által elválasztott két rész közül az értékesebbiket. Ezek után két, fele annyi szereplős osztozkodás végzendő el. A páratlan szereplős esetet az ötszereplős esettel analóg. Ha $n = 2k + 1$, akkor $2k$ személy párhuzamos vágásokkal felosztja a tortát balról jobbra nézve $k : k + 1$ arányban. A $2k + 1$-edik személy pedig eldönti, hogy a medián vágó által meghatározott két rész melyikének osztozkodásában kíván részt venni $k - 1$, illetve k személlyel.

Bizonyítható, hogy az Even–Paz-eljárásának a vágásigénye és a teljes műveletigénye (vágások és kiértékelések száma) $n \log_2 n$ nagyságrendben növekszik. Sgall–Woeginger (2007) igazolta, hogy az olyan arányos osztozkodási eljárások körében, amelyek az egyes szereplőknek egymás melletti intervallumokat juttatnak, nem található nagyságrendileg $n \log_2 n$-nél kisebb műve-

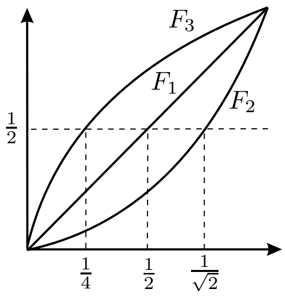
[6] Ha a medián vágó személye nem egyértelmű, akkor válasszuk ki valamelyiket.

letigényű eljárás. Edmonds–Pruhs (2011) az $n \log_2 n$-es aszimptotikus alsó korlátot a szereplőknek nem feltétlenül szomszédos szeleteket juttató arányos eljárásokra is igazolta.

Az Even–Paz-eljárást a következő példán szemléltetjük:

9.4. példa. Legyenek $\Omega = [0{,}1]$, $N = \{1{,}2{,}3{,}4\}$, $F_1(x) = x$, $F_2(x) = x^2$, $F_3(x) = \sqrt{x}$ és $F_4(x) = x$ ($x \in [0{,}1]$). Határozzunk meg egy arányos elosztást az Even–Paz-eljárással!

Az eljárás szerint 1, 2 és 3 feleznek rendre az $x_1 = 1/2$-nél, $x_2 = 1/\sqrt{2}$-nél és $x_3 = 1/4$-nél (lásd a 9.3. ábrát). Tehát 1 a medián vágó. Mivel 4 számára a $[0, x_1]$ és az $[x_1{,}1]$ szeletek azonos értékűek, így a két szelet bármelyikét választhatja. Az egyszerűbb számolás kedvéért tegyük fel, hogy 4 a $[0, x_1]$ szeletet választja. Ekkor a $[0{,}1/2]$-en 3 és 4, míg $[1/2{,}1]$-en 1 és 2 osztozkodik. Legyenek 1, illetve 4 a felezők. Ekkor a $[0{,}1/4]$, $[1/4{,}1/2]$, $[1/2{,}3/4]$ és



9.3. ábra. Even–Paz-eljárás

$[3/4{,}1]$ szeletetek adódnak, amelyek közül 2 a legutolsót, illetve 3 a legelsőt választja. 4-nek marad a második és 1-nek a harmadik szelet. Az olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy az így kapott elosztás irigységmentes-e (lásd a 9.13. feladatot).

9.2.5. Dubins–Spanier mozgókéses-eljárás

Dubins–Spanier-eljárása (1961) az eddig ismertetett eljárásokkal ellentétben egy nem véges arányos elosztási eljárás, ugyanis a szereplőknek egy, a torta fölött balról jobbra mozgókés elhelyezkedésének bármely pillanatában ki kell értékelniük a késtől balra elhelyezkedő tortaszeletet.

Kezdetben helyezzünk el egy kést a torta bal szélén, amelyet elindítunk a torta jobb széle felé. A kést az osztozkodásban résztvevő n személy bármelyike megállíthatja, és ekkor a kés levágja a torta bal szélétől a pillanatnyi elhelyezkedéséig terjedő szeletet, amelyet a kést megállító személy köteles elvinni. A visszamaradó szeleten már csak $n-1$ személy osztozkodik az eljárást ismételve, elindítva a kést a megmaradt szelet bal szélétől. Az eljárás addig ismétlődik, amíg már csak egy személy marad hátra.

A Dubins–Spanier-eljárás arra ösztönöz egy személyt, hogy pontosan akkor állítsa meg a kést, amikor eléri az arányos részesedését. Nyilván nem érdemes a kést az arányos részesedés előtt megállítani, hiszen ekkor az arányos részesedésnél kevesebb jut a kést leállító személynek. Ha az arányos részesedésénél tovább engedi egy személy a kést, akkor pedig megkockáztatja, hogy valaki más előtte megállítja a kést, és így egy $(n-1)/n$-nél kisebb szeleten kénytelen osztozkodni $n-1$ személlyel. Ezek után már könnyen látható, hogy az eljárás általában is arányos.

A Dubins–Spanier eljárás nyilván csak $n-1$ vágást igényel, ami kedvezőbb az Even–Paz eljárásnál említett $n \log_2 n$ nagyságrendnél. Ez a javulás azonban csak úgy érhető el, hogy a szereplők kontinuum sok kiértékelést végeznek.

9.3. Irigységmentes osztozkodási eljárások

Ebben az alfejezetben rátérünk az arányosságnál erősebb igazságossági kritériumra, az irigységmentességre. Ismertetünk egy háromszereplős véges és egy négyszereplős nem véges irigységmentes eljárást.

9.3.1. Selfridge–Conway-eljárás

Selfridge–Conway-eljárása (lásd pl. Brams – Taylor, 1996) háromszemélyes osztozkodási problémákra szolgáltat egy irigységmentes felosztást.

Kérjük föl 1-et arra, hogy harmadolja el a tortát. Jelöljük a három adódó I, J és K szeletet úgy, hogy $\mu_2(I) \geq \mu_2(J) \geq \mu_2(K)$, azaz 2 számára I a legértékesebb, J a második legértékesebb és K a harmadik legértékesebb szelet. Kérjük fel 2-t arra, hogy igazítsa le I-t J-vel azonos értékűre. Jelölje L a leigazított szeletet és $M = I \setminus L$ a levágott darabot.[7] Válasszon most a három személy a J, K és L szeletek közül a 3, 2, 1 sorrendben, ahol ha 3 nem L-et választja, akkor 2 köteles L-et elvinni.[8] Két esetet különböztetünk meg.

(a) Ha 2 vitte el L-et, akkor 3-at megkérjük arra, hogy ossza fel M-et három egyenlő részre. Ezek után válasszon a három személy a három szelet közül a 2, 1, 3 sorrendben.

(b) Ha 3 vitte el L-et, akkor 2-t kérjük meg arra, hogy harmadolja el M-et. Majd 3, 1 és 2 válasszanak egymás után a három szelet közül.

[7] $M = \emptyset$, ha B számára I és J azonos értékű.
[8] Az $M = \emptyset$ esetben már itt véget ér az eljárás.

Belátjuk, hogy a Selfridge–Conway-eljárás egy irigységmentes elosztást szolgáltat. Nézzük az (a) esetet. Az 1 a 2-t nem irigyelheti, hiszen 2 az I-nek csak egy részét kapta. Az 1 a 3-at sem irigyelheti, mivel az első körben 3-mal azonos értékű szelethez jutott és a második körben 3 előtt választhat. 2 senkit sem irigyelhet, mivel az első körben az egyik legnagyobb szeletet vitte el és a második körben pedig elsőnek választhatott. 3 sem irigyelhet senkit, mert az első körben először választhat és a második kör három egyenlő szeleteinek egyikét kapta. A (b) eset hasonlóan igazolható. Továbbá nem nehéz belátni, hogy az eljárás igazmondásra ösztönöz.

A Selfridge–Conway-eljárás egy véges irigységmentes eljárás, amely nem terjeszthető ki több szereplőre. Ismertek ugyan többszereplős irigységmentes véges eljárások is, ezek azonban *nem korlátosak* (lásd például Robertson – Webb, 1998), ami alatt az értendő, hogy rögzített számú szereplő esetén is konstruálhatók tetszőlegesen sok vágást igénylő osztozkodási problémák. Stromquist (2008) igazolta, hogy legalább háromszereplős osztozkodási problémákra nem létezhet olyan véges (akár nem korlátos) irigységmentes elosztási eljárás, amely minden egyes szereplőnek szomszédos szeleteket juttat. Procaccia (2009) igazolta, hogy az irigységmentes elosztás megtalálásának nehézsége aszimptotikusan legalább négyzetesen növekszik a szereplők számában. Ennek alapján megállapítható, hogy az irigységmentes elosztás megtalálása bonyolultságelméleti szempontból biztosan nehezebb feladat az arányos elosztás megtalálásánál. Mindenesetre Stromquist (1980) megmutatta, hogy n szereplő esetén mindig lézezik $n-1$ vágást igénylő irigységmentes elosztás. Mivel a bizonyítása nem konstruktív, az irigységmentes elosztások meghatározhatósága területén még számos megválaszolatlan kérdés vár megoldásra.

9.3.2. Brams–Taylor–Zwicker-eljárás

Brams–Taylor–Zwicker-eljárása (1997) egy négyszemélyes irigységmentes korlátos mozgókéses-eljárás, amely Austin (1982) kétszemélyes, mindkét fél számára pontosan 50%-ot juttató eljárására, valamint a Selfridge–Conway-eljárásban rejlő gondolatokra épít.

Austin eljárásánál az egyik szereplő, mondjuk 1, két párhuzamos kést mozgat folyamatosan balról jobbra úgy, hogy a két kés közötti terület számára mindig a torta felét érje. Induláskor a bal oldali kés a torta bal szélénél helyezkedik el, míg a jobb oldali kés 1 felezőpontja fölött.[9] Abban a pillanatban, amikor 2 megállítja a két kést, 1 elvégzi a kések által kijelölt helyeken a két vágást. Ezek után sorsolással (mondjuk érmedobással) eldöntendő, hogy melyik szereplő kapja a középső szeletet. Ekkor a másik szereplőnek megmarad a két szélső szelet. Ha 2 nem állítaná meg a késeket, még mielőtt a jobb ol-

[9] Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy nincsenek 1 és 2 számára nulla értékű tortaszeletek.

dali kés elérné a torta jobb szélét, akkor 1 a bal oldali késsel elfelezi a tortát, majd érmedobással eldöntik a szeletek sorsát. Nyilván 1-nek végig ügyelnie kell arra, hogy a két kés közötti szelet a torta felét érje számára. 2-nek akkor kell megállítania a késeket, amikor 1-gyel egyezik az értékítélete. Kérdéses még, hogy van-e ilyen pillanat? Ha 2 értékítélete, a két fél tortát illetően, induláskor megegyezik 1 értékítéletével, akkor máris találtunk egy ilyen pillanatot. Különben 2 számára a két kés közötti szelet (i) értékesebb, vagy (ii) értéktelenebb a másik szeletnél. Ha 2 elengedné a jobb oldali kést a torta jobb oldali végpontjáig, akkor a két kés közötti szelet (i) értéktelenebb, vagy (ii) értékesebb lesz a másik szeletnél. Folytonossági megfontolásból létezik egy olyan közbülső pillanat, amikor 2 számára a két kés közötti szelet azonos értékű a két szélső szelettel.

Térjünk most rá a Brams–Taylor–Zwicker-eljárásra. Először Austin eljárásának háromszori alkalmazásával 1 és 2 elnegyedeli a tortát. A kapott X_1, X_2, X_3 és X_4 részekre ekkor $\mu_1(X_i) = \mu_2(X_j)$ minden $i, j = 1{,}2{,}3{,}4$-re. Tegyük fel, hogy $\mu_3(X_1) \geq \mu_3(X_2) \geq \mu_3(X_3) \geq \mu_3(X_4)$. Ossza fel 3 az X_1 részt Y_1 és Y_2 részekre úgy, hogy $\mu_3(Y_1) = \mu_3(X_2)$. Válasszanak az Y_1, az X_2, az X_3 és az X_4 részek közül a 4,3,2,1 sorrendben, azzal a kikötéssel, hogy ha 4 nem Y_1-et választotta, akkor 3 köteles Y_1-et elvinni. Az első (választási) kör után senki sem irigyel senkit, mivel 4 az első választó, 3 az általa ítélt két legnagyobb rész egyikét vitte el és 1,2 számára maradt két 1/4 értékű rész.

Nézzük azt az esetet, amikor 4 viszi el Y_1-et. Ossza ekkor 2 és 3 az Y_2 részt az Austin-féle eljárással négy egyenlő részre. A kapott Z_1, Z_2, Z_3 és Z_4 részekre tehát $Y_2 = \cup_{i=1}^4 Z_i$, $\mu_2(Z_i) = \mu_2(Y_2)/4$ és $\mu_3(Z_i) = \mu_3(Y_2)/4$ minden $i = 1{,}2{,}3{,}4$-re. Ezek után a szereplők a 4,1,3,2 sorrendben választanak a Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 részek közül. Bármelyikük csak az előttük választót irigyelhetné, továbbá 2 és 3 senkit sem irigyel, mivel Y_2-t négy azonos értékű részre osztották. Végül 1 nem irigyli 4-et, mert 4 egy legfeljebb X_1 értékű részhez juthat.

A másik eset, amikor 3 viszi el Y_1-et, hasonló. Ossza ekkor 2 és 4 az Y_2-t az Austin-féle eljárással négy egyenlő részre. A szereplők most a 3,1,4,2 sorrendben választanak. Bármelyikük csak az előttük választót irigyelhetné, továbbá 2 és 4 senkit sem irigyel, mivel Y_2-t négy azonos értékű részre osztották. Végül 1 nem irigyli 3-at, mert 3 X_1-nek egy részszeletét kapja.

Jó egy évtizeddel Brams–Taylor–Zwicker (1997) munkája után Saberi–Wang (2009) megadott egy ötszereplős irigységmentes korlátos mozgókésesеljárást. Megjegyzendő, hogy ötnél több személyre csak $\varepsilon > 0$ közelítő vagy nem korlátos irigységmentes eljárások ismertek (lásd például Brams–Taylor, 1996 vagy Robertson–Webb, 1998).

9.4. Kitekintés

Megismerkedtünk néhány arányos és irigységmentes osztozkodási eljárással. A tárgyalt eljárásokon kívül további eljárások találhatók Brams–Taylor (1996), továbbá Robertson–Webb (1998) könyveiben. A megismert két igazságossági kritériumot teljesítő eljárással kapcsolatban fontos nyitott kérdések:

1. Található-e négyszemélyes véges és korlátos irigységmentes eljárás?
2. Található-e hatszemélyes korlátos mozgókéses irigységmentes eljárás?

A mozgókéses-eljárásokra vonatkozó további eredményeket illetően lásd Barbanel–Brams (2004).

Az osztozkodási problémák esetén enyhíthető például az azonos mértékű követelések feltétele (lásd például Robertson–Webb, 1998). Háromnál több szereplős irigységmentes véges és korlátos eljárások hiányában Lindner–Rothe (2009) a véges és korlátos arányos elosztási eljárásokat rangsorolja, az általuk bevezetett irigységmentességi mérték alapján. Egyben megadnak egy, az ismert arányos eljárásoknál „kevésbé irigy” arányos eljárást is. A tortaszelet értékelő függvények véges additivitásának gyengítésével (telítődés) foglalkozik Dall'Aglio–Maccheroni (2005) és Maccheroni–Marinacci (2003). Más igazságossági kritériumokat (*mindenki egyformán járjon jól* vagy *a legrosszabbul járó járjon a lehető legjobban*) vizsgál Cechlárová–Dobo–Pillárová (2011), Dall'Aglio (2001), Dall'Aglio–Hill (2003), továbbá Shishido–Zeng (1999). Az igazságossági kritériumon kívül fontos lehet a hatékonyság kérdése, amelyet Barbananel–Taylor (2005) részletesen tárgyal.

Az ismertetett eljárások igazmondásra ösztönöznek abban az értelemben, hogy ha valaki nem az eljárás által javasolt utasításokat követi, akkor a többiek cselekedetétől függetlenül nem biztosíthatja az arányos vagy az irigységmentes részesedését. Ez felfogható úgy, hogy a többi szereplő értékelését nem ismerve, a többiek számunkra legkedvezőtlenebb cselekedeteire felkészülve, kívánjuk magunk számára az arányos vagy az irigységmentes részünket biztosítani. Arra is gondolhatnánk, hogy a többiek irracionálisak vagy kimondottan a mi kárunkra törnek. Játékelméleti szempontból nézve az, hogy a többiek általi legkedvezőtlenebb cselekedetre készülünk fel, az úgynevezett minimax stratégia egyik részének felel meg, viszont mi nem maximalizálunk, hanem egy bizonyos hasznossági szintet kívánunk elérni. Ezért a problémát nyilván másképpen is lehet vizsgálni, például egy olyan mechanizmustervezési feladatként, amelyben a választott egyensúlyi koncepció a részjáték tökéletes Nash-egyensúly, és a tervező célja legalább egy arányos vagy pedig egy irigységmentes felosztás elérése.

Chen és társai (2013) megadnak egy olyan mechanizmust, amelyben a szereplők domináns stratégiái az igazmondás, továbbá egyensúlyban egy Pareto-hatékony, arányos és irigységmentes elosztást szolgáltat. Az arányosságot azért szükséges az irigységmentesség mellett feltüntetni, mert a mechanizmusuk nem feltétlenül osztja fel az egész tortát, ugyanis a díjmentes lomtalanítás feltétele mellett meg lehet szabadulni a ki nem osztott szeletektől. A szereplők stratégiai halmazai a megengedett tortaszelet értékelő eloszlásfüggvények, amelyek csak szakaszonként lineáris függvények lehetnek. Az általuk konstruált mechanizmus az értékelések szimultán közlése után meghatározza a vágásokat és hozzárendeli a szeleteket a szereplőkhöz. Chen és társaitól (2013) függetlenül hasonló kérdéseket vizsgált Mossel–Tamuz (2010).

9.5. Gyakorló feladatok

9.1. feladat. Igazolja, hogy ha μ egy algebrán értelmezett végesen additív halmazfüggvény, akkor $\mu(\emptyset) = 0$!

9.2. feladat. Igazolja a 9.3 megjegyzést.

9.3. feladat. Az 1,2 és 3 személyek tortaszelet értékelő eloszlásfüggvényei

$$F_1(x) = \begin{cases} 4x, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ 1, & \text{ha } x \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

$F_2(x) = x$ és $F_3(x) = x^3$ ($x \in [0,1]$). Határozzon meg egy arányos elosztást a Fink-eljárással!

9.4. feladat. Az $\Omega = [0,1]$ tortán az $N = \{1,2,3\}$ személyek osztozkodnak. A személyek tortaszelet értékelő eloszlásfüggvényei $F_1(x) = x$, $F_2(x) = x^2$ és $F_3(x) = x^4$ ($x \in [0,1]$). Határozzon meg egy arányos elosztást a rekurzív feloszt és választ eljárással!

9.5. feladat. Adottak az $\Omega = [0,1]$ tortán osztozkodó $N = \{1,2,3\}$ személyek $F_1(x) = x$, $F_2(x) = x^2$ és $F_3(x) = \sqrt{x}$ értékelő eloszlásfüggvényei ($x \in [0,1]$). Határozzon meg egy arányos elosztást a Banach–Knaster-eljárással!

9.6. feladat. Gondolja meg, hogy valóban szükséges-e az $n = 2$ esetben rekurzív feloszt és választ eljárás és a Banach–Knaster-eljárás megadásakor külön az egyik felez és a másik választ eljárásra hivatkozni! Másképpen fogalmazva, lehet-e az $n = 2$ esetet az $n = 3$ esethez hasonlóan definiálni.

9.7. feladat. Az $\Omega = [0,1]$ tortán az $N = \{1,2,3,4\}$ személyek osztozkodnak. A személyek tortaszelet értékelő eloszlásfüggvényei $F_1(x) = \min\{2x,1\}$, $F_2(x) = \min\left\{\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}(x+1)\right\}$, $F_3(x) = x$ és $F_4(x) = \max\left\{\frac{x}{2}, \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right\}$ ($x \in [0,1]$). Határozza meg az arányos elosztást a Banach–Knaster-eljárással!

9.8. feladat. Legyenek $F_1(x) = \sqrt[5]{x}$, $F_2(x) = \sqrt[3]{x}$, $F_3(x) = x^2$ és $F_4(x) = x$ az 1,2,3,4 személyek tortaszelet értékelő eloszlásfüggvényei ($x \in [0,1]$). Határozzon meg egy arányos elosztást az Even–Paz-eljárással!

9.9. feladat. Az $\Omega = [0,1]$ tortán az $N = \{1,2,3,4\}$ személyek osztozkodnak. A személyek tortaszelet értékelő eloszlásfüggvényei $F_1(x) = \min\{2x,1\}$, $F_2(x) = \min\left\{\frac{3}{2}x, \frac{1}{2}(x+1)\right\}$, $F_3(x) = x$ és $F_4(x) = \max\left\{\frac{x}{2}, \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right\}$ ($x \in [0,1]$). Határozza meg az arányos elosztást az Even–Paz-eljárással!

9.10. feladat. Az $\Omega = [0,1]$ tortán az $N = \{1,2,3,4\}$ személyek osztozkodnak. A személyek tortaszelet értékelő eloszlásfüggvényei $F_1(x) = x$, $F_2(x) = \sqrt{x}$, $F_3(x) = 2^x - 1$ és $F_4(x) = x^2$ ($x \in [0,1]$). Határozza meg az arányos elosztást az Even–Paz-eljárással!

9.11. feladat. Szükséges-e az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben az Even–Paz-eljárást külön definiálni?

9.12. feladat. Legyenek $F_1(x) = \sqrt[7]{x}$, $F_2(x) = \sqrt{x}$, $F_3(x) = x$, $F_4(x) = x^3$ és $F_5(x) = x$ az 1,2,3,4,5 személyek tortaszelet értékelő eloszlásfüggvényei ($x \in [0,1]$). Határozzon meg egy arányos elosztást az Even–Paz-eljárással!

9.13. feladat. Döntse el, hogy a 9.4. példa megoldásaként kapott elosztás irigységmentes-e!

9.14. feladat. Adjon meg egy olyan háromszereplős osztozkodási problémát, amely megmutatja, hogy a rekurzív feloszt és választ eljárás nem irigységmentes!

9.15. feladat. Az $\Omega = [0,1]$ tortán az $N = \{1,2,3\}$ személyek osztozkodnak. A személyek tortaszelet értékelő eloszlásfüggvényei $F_1(x) = \min\{2x,1\}$, $F_2(x) = x$ és $F_3(x) = \max\left\{\frac{x}{2}, \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right\}$ ($x \in [0,1]$). Határozza meg az irigységmentes elosztást a Selfridge–Conway-eljárással!

Jelölések

$\subset$	a valódi tartalmazás jele
$\subseteq$	a tartalmazás jele
$\succ$	a szigorú preferenciarendezés, illetve preferenciaprofil jele
$\succeq$	a preferenciarendezés, illetve preferenciaprofil jele
$\sim$	a közömbösségi reláció jele
$\arg\min\{f(x) \mid x \in S\}$	az f függvény S halmaz feletti minimumhelyeinek a halmaza
cg	talmudi elosztási szabály
$cs(\succeq)$	a $\succeq$ egycsúcsú preferenciarendezés csúcsa
$\mathbb{N}$	a nemnegatív egészek halmaza
$\mathcal{N}$	a lehetséges szereplők rögzítetett, megszámlálható halmaza
$N \setminus i$	az $N \setminus \{i\}$ halmaz rövidebben írva
pro	az arányos elosztási szabály
$\mathbb{R}_+$	nemnegatív valós számok halmaza
$\mathbb{R}^n_+$	nemnegatív koordinátájú valós n-vektorok halmaza
$\mathbb{R}_{++}$	pozitív valós számok halmaza
$\mathbb{R}^n_{++}$	pozitív koordinátájú valós n-vektorok halmaza
$r_M(N,t,x) =$	$\sum\limits_{i \in M} r_i(N,t,x)$, ahol (N,t,x) egy elosztási probléma és $M \subseteq N$
$r^M(N,t,x) =$	$(r_i(N,t,x))_{i \in M}$, ahol (N,t,x) egy elosztási probléma és $M \subseteq N$
$\mathbb{S}$	a nemnegatív egész vagy nemnegatív valós számok halmaza
$\mathbb{S}^N$	az $N \to \mathbb{S}$ leképezések halmaza, azaz egy nem szokásosan koordinátázott vektor, ahol $N \subset \mathcal{N}$ a szereplők véges halmaz
$x_M =$	$\sum_{i \in M} x_i$, ahol $x \in \mathbb{S}^N$ és $M \subseteq N$
$x^M =$	$(x_i)_{i \in M}$, az adott $N \to \mathbb{S}$ leképezés projekciója az M-re, ahol $x \in \mathbb{S}^N$ és $M \subseteq N$
$\left(x^i, x^{N \setminus i}\right) =$	x bármely $x \in S^N$ és $i \in N$-re
ug	az egyenletes nyereség elosztási szabály
ul	az egyenletes veszteség elosztási szabály

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[1] 1989. évi XXXIV. törvény az országgyűlési képviselők választásáról.

[2] 2011. évi CCIII. törvény az országgyűlési képviselők választásáról.

[3] Arrow, K. J.: *Social choice and individual values.* Wiley, New York, 1951.

[4] Austin, A. K.: Sharing a Cake. *Mathematical Gazette*, **66**, 212–215, 1982.

[5] Aumann, R. J. – Maschler, M.: Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, **36**, 195–213, 1985.

[6] Balinski, M. L. – Demange, G.: An axiomatic approach to proportionality between matrices. *Mathematics of Operations Research*, **14**, 700–719, 1989.

[7] Balinski, M. L. – Pukelsheim, F.: Ehrenpromotion. Universität Augsburg, 2005.[10]

[8] Balinski, M. L. – Young, H. P.: *Fair Representation: meeting the ideal of one man, one vote (second edition).* Brookings Institution Press, Washington D.C., 2001.

[9] Bara Z.: A tisztességes elosztás mikroökonómiai elmélete. *Közgazdasági Szemle*, **45**, 558–574.

[10] Barbanel, J. B. – Taylor, A. D.: *The Geometry of Efficient Fair Division.* Cambridge University Press, Cambridge UK, 2005.

[11] Barbanel, J. B. – Brams, S. J.: Cake division with minimal cuts: envy-free procedures for three persons, four persons, and beyond. *Mathematical Social Sciences*, **48**, 251–269, 2004.

[10] http://www.opus-bayern.de/uni-augsburg/volltexte/2005/103/ (hozzáférve: 2007. január 15.)

[12] Barbanel, J. B. – Brams, S. J. – Stromquist, W.: Cutting a Pie Is Not a Piece of Cake. *American Mathematical Monthly*, **116**, 496–514, 2009.

[13] Biró P. – Sziklai B. – Kóczy Á. L.: Választókörzetek igazságosan? *Közgazdasági Szemle*, **59**, 1165–1186, 2012.

[14] Blackorby, C. – Bossert, W. – Donaldson, D.: Utilitarianism and the theory of justice. In: Arrow, K. J. – Sen, A. K. – Suzumura, K. (szerk.), *Handbook of social choice and welfare, Volume 1.*, 543–596, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[15] Bossert, W. – Weymark, J. A.: Utility in social choice. In: Barber? S. – Hammond P.J. – Seidl C. (szerk.), *Handbook of utility theory, Volume 2: extensions*, 1099–1177, Kluwer Academic Publisher, Boston, 2004.

[16] Brams, S. J. – Taylor, A. D.: *Fair Division: From Cake Cutting to Dispute Resolution.* Cambridge University Press, Cambridge UK, 1996.

[17] Brams, S. J. – Taylor, A. D. – Zwicker, W. S.: A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division problem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**, 547–554, 1997.

[18] Cechlárová, K. – Doboš, J. – Pillárová, E.: On the existence of equitable cake divisions. IM Preprint, series A, no. 4/2011, Institute of Mathematics, Faculty of Science, P.J. Safárik University.

[19] Chen, Y. – Lai, J. K. – Parkes, D. C. – Procaccia, A. D.: Truth, justice, and cake cutting. *Games and Economic Behavior*, **77**, 284–297, 2013.

[20] Ching, S.: An alternative characterization of the uniform rule. *Social Choice and Welfare*, **11**, 131–136, 1994.

[21] Dall'Aglio, M.: The Dubins–Spanier optimization problem in fair division theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **130**, 17–40, 2001.

[22] Dall'Aglio, M. – Hill, T. P.: Maximin share and minimax envy in fair-division problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **281**, 346–361, 2003.

[23] Dall'Aglio, M. – Maccheroni, F.: Fair division without additivity. *American Mathematical Monthly*, **112**, 363–365, 2005.

[24] D'Aspremont, C. – Gevers, L.: Equity and the informational basis of collective choice. *Review of Economic Sudies*, **44**, 199–209, 1977.

[25] Davis, M. – Maschler, M.: The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics*, **12**, 223–259, 1965.

[26] Debreu, G.: *Theory of Value.* John Wiley & Sons, New York, 1959.

[27] De Frutos, M. A.: Coalitional manipulations in a bankrupcy problem. *Review of Economic Design*, **4**, 255-272, 1999.

[28] Dubins, L. E. – Spanier, E. H.: How to Cut a Cake Fairly. *American Mathematical Monthly*, **68**, 1-17, 1961.

[29] Edmonds, J. – Pruhs, K.: Cake cutting really is not a piece of cake. *ACM Transactions on Algorithms*, **7**, article no.: 51, 2011.

[30] Eilenberg, S.: Ordered topological spaces. *American Journal of Mathematics*, **63**, 39–45, 1941.

[31] Even, S. – Paz, A.: A Note on Cake Cutting. *Discrete Applied Mathematics*, **7**, 285–296, 1984.

[32] Fink, A. M.: A Note on the Fair Division Problem. *Mathematics Magazine*, **37**, 341–342, 1964.

[33] Fleiner, T. – Sziklai, B.: The nucleolus of the bankruptcy problem by hydraulic rationing. *International Game Theory Review*, **14**, 1250007-1–1250007-11, 2012.

[34] Foley, D.: Resource allocation and the public sector. *Yale Economics Essays*, **7**, 45–98, 1967.

[35] Forgó F. – Pintér M. – Simonovits A. – Solymosi T.: *Játékelmélet* (elektronikus jegyzet). 2005.[11]

[36] Gamov, G. – Stern, M.: *Puzzle-Math.* Viking, New York, 1958.

[37] Geanakoplos, J.: Three brief proofs of Arrow' impossibility theorem. *Economic Theory*, **26**, 211–215, 2005.

[38] Gevers, L.: On interpersonal comparability and social welfare orderings. *Econometrica*, **47**, 75–89, 1979.

[39] Gibbard, A.: Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica*, **41**, 587–601, 1973.

[40] Grandmont, J.-M.: Intermediate Preferences and the Majority Rule. *Econometrica*, **46**, 317–330, 1978.

[41] Huang, C.Y. – Sjöström, T.: Consistent solutions for cooperative games with externalities. *Games and Economic Behavior*, **43**, 196–213, 2003.

[42] Ju, B-G. – Miyagawa, E. – Sakai, T.: Non-manipulable division rules in claims problems and generalizations. *Journal of Economic Theory*, **132**, 1–26, 2007.

[11] http://web.uni-corvinus.hu/~pmiklos/Works/PDF/forgo_jatekelmelet.pdf (hozzáférve: 2013. május 11.)

[43] Kaminski, M.: Hydraulic rationing. *Mathematical Social Sciences*, **40**, 131–155, 2000.

[44] Kóczy Á. L.: A recursive core for partition function form games. *Theory and Decision*, **63**, 41–51, 2007.

[45] Körösényi A. – Tóth Cs. – Török G.: *A magyar politikai rendszer.* Osiris kiadó, Budapest, 2003.

[46] Lindner, C. – Rothe, J.: Degrees of Guaranteed Envy-Freeness in Finite Bounded Cake-Cutting Protocols. *Lecture Notes in Computer Science*, **5929**, 149–159, 2009.

[47] Maccheroni, F. – Marinacci, M.: How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations. *Social Choice and Welfare*, **20**, 457-465, 2003.

[48] Mala J.: Arrow-típusú lehetetlenségi tételek. *Szigma*, **38**, 77–110, 2007.

[49] Maschler, M. – Peleg, B. – Shapley, L. S.: The kernel and bargaining set for convex games. *International Journal of Game Theory*, **1**, 73–93, 1972.

[50] Mészáros J. – Szakadát I.: Választási eljárások, választási rendszerek. BME Szociológiai Tanszék, Budapest, 1993.

[51] Mossel, E. – Tamuz, O.: Truthful Fair Division. *Lecture Notes in Computer Science*, **6386**, 288–299, 2010.

[52] Moulin, H.: On strategy-proofness and single peakedness. *Public Choice*, **68**, 437–455, 1980.

[53] Moulin, H.: *Axioms of cooperative decision making.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[54] Moulin, H.: Priority rules and other asymmetric rationing methods. *Econometrica*, **68**, 643–684, 2000.

[55] Moulin, H.: Axiomatic cost and surplus-sharing. In: Arrow K. J. – Sen A. K. – Suzumura, K. (szerk.), *Handbook of social choice and welfare, Volume 1.*, 289–359, North-Holland, Amsterdam, 2002a.

[56] Moulin, H.: The proportional random allocation of indivisible units. *Social Choice and Welfare*, **19**, 381–413, 2002b.

[57] Moulin, H. – Stong, R.: Fair Queuing and other probabilistic allocation methods. *Mathematics of Operations Research*, **27**, 1–30, 2002.

[58] Moulin, H.: *Fair division and collective welfare.* MIT Press, Cambridge, 2003.

[59] Moulin, H.: Proportional scheduling, split-proofness, and merge-proofness. *Games and Economic Behavior*, **63**, 567–587, 2008.

[60] Nisan, N.: Introduction to mechanism design (for computer scientists). In: Nisan, N. – Roughgarden, T. – Tardos E. – Vazirani, V. (szerk.) *Algorithmic Game Theory*, 209–241, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[61] Nisan, N. – Ronen, A.: Algorithmic mechanism design. *Games and Economic Behavior*, **35**, 197–211, 2001.

[62] O'Neill, B.: A problem of rights arbitration from the talmud. *Mathematical Social Sciences*, **2**, 345–371, 1982. bibitemOsborne Osborne, M. J. – Rubinstein, A.: *A course in game theory.* MIT Press, Cambridge, 1994.

[63] OECD *Handbook on constructing composite indicators: methodology and user guide.* OECD, 2008.

[64] Pintér M. P.: A Shapley-érték axiomatizálásai. *Alkalmazott matematikai lapok*, **26**, 289–315. 2012.

[65] Procaccia, A. D.: Thou shalt covet thy neighbor's cake. In *Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, 239–244, 2009.

[66] Pukelsheim, F.: Jedem Wähler der gleiche Erfolgswert. *Neue Zürcher Zeitung Freitag*, 2. Dezember Nr. 282, **55**, 2005.

[67] Pukelsheim, F. – Schuhmacher, C.: Das neue Zürcher Zuteilungsverfahren für Parlamentswahlen. *Aktuelle Juristische Praxis - Pratique Juridique Actuelle*, **5**, 505–522, 2004.

[68] Roberts, K. W. S.: Interpersonal comparability and social choice theory. *Review of Economic Sudies*, **47**, 421–439, 1980a.

[69] Roberts, K. W. S.: Voting over income tax schedules. *Journal of Public Economics*, **8**, 329–340, 1980b.

[70] Robertson, J. – Webb, W.: *Cake-cutting algorithms: be fair if you can.* A. K. Peters, Ltd., Natick, 1998.

[71] Rónyai L. – Ivanyos G. – Szabó R.: *Algoritmusok.* TypoTex, Budapest, 1999.

[72] Saberi, A. – Wang, Y.: Cutting a cake for five people. *Lecture Notes in Computer Science*, **5564**, 292–300, 2009.

[73] Satterthwaite, M. A.: Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, **10**, 187–217, 1975.

[74] Schmeidler, D.: The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **17**, 1163–1170, 1969.

[75] Sen, A.: On Weights and Measures: Informational Constraints in Social Welfare Analysis. *Econometrica*, **45**, 1539–1572, 1977.

[76] Sgall, J. – Woeginger, G. J: On the complexity of cake-cutting. *Discrete Optimization*, **2**, 213–220, 2007.

[77] Shapley, L. S.: A Value for n-person Games. In: Kuhn, H.W. – Tucker, A.W. (szerk.), *Contributions to the Theory of Games, volume II*, by Annals of Mathematical Studies **28**, 307–317, Princeton University Press, 1953.

[78] Shapley, L. S.: Cores of convex games. *International Journal of Game Theory*, **1**, 11–26, 1971.

[79] Shishido, H. – Zeng, D.: Mark-Choose-Cut Algorithms For Fair And Strongly Fair Division. *Group Decision and Negotiation*, **8**, 125–137, 1999.

[80] Solymosi T.: *Kooperatív játékelmélet* (elektronikus jegyzet). 2007.[12]

[81] Sprumont, Y.: The division problem with single-peaked preferences. *Econometrica*, **59**, 509–519, 1991.

[82] Steinhaus, H.: The problem of fair division. *Econometrica*, **16**, 101–104, 1948.

[83] Stromquist, W.: How to cut a cake fairly. *American Mathematical Monthly*, **87**, 640–644, 1980 és Addendum, **88**, 613–614, 1981.

[84] Stromquist, W.: Envy-free cake divisions cannot be found by finite protocols. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **15**, research paper no. R11, 2008.

[85] Tasnádi A.: On probabilistic rationing methods. *Mathematical Social Sciences*, **44**, 211–221, 2002.

[86] Tasnádi A.: A new proportional procedure for the n-person cake-cutting problem. *Economics Bulletin*, 4/**33**, 1–3, 2003.

[87] Tasnádi A.: Az arányos elosztási eljárás egy karakterizációja. *Alkalmazott matematikai lapok*, **21**, 261–267, 2004a.

[88] Tasnádi A.: Determinisztikus és valószínűségi elosztási eljárások. *Szigma*, **35**, 1–12, 2004b.

[12] http://portal.uni-corvinus.hu/fileadmin/user_upload/hu/tanszekek/kozgazdasagtudomanyi/tsz-opkut/files/opkut/solymosi_tamas/Solymosi-KooperativJatekok-2007maj31.pdf (hozzáférve: 2013. július 3.)

[89] Tasnádi A.: The Extent of the Population Paradox in the Hungarian Electoral System. *Public Choice*, **134**, 293–305, 2008.

[90] Taylor, A. D.: A paradoxical Pareto frontier in the cake-cutting context. *Mathematical Social Sciences*, **50**, 227–233, 2005.

[91] Thomson, W.: Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. *Mathematical Social Sciences*, **45**, 249–297, 2003.

[92] Thomson, W.: Fair Allocation Rules. In: Arrow, K.J. – Sen, A.K. – Suzumura, K. (szerk.), *Handbook of social choice and welfare, Volume 2.*, 393–506, North-Holland, Amsterdam, 2010.

[93] Young, H. P.: Distributive Justice in Taxation. *Journal of Economic Theory*, **44**, 321–335, 1988.

[94] Young, H. P.: *Equity: in theory and praxis.* Princeton University Press, New Jersey, 1994.

[95] www.valasztas.hu, 2006.

[96] Zachariasen, M.: Algorithmic aspects of divisor-based biproportional rounding. Department of Computer Science, University of Copenhagen, Technical Report no. 06/05, 2006.