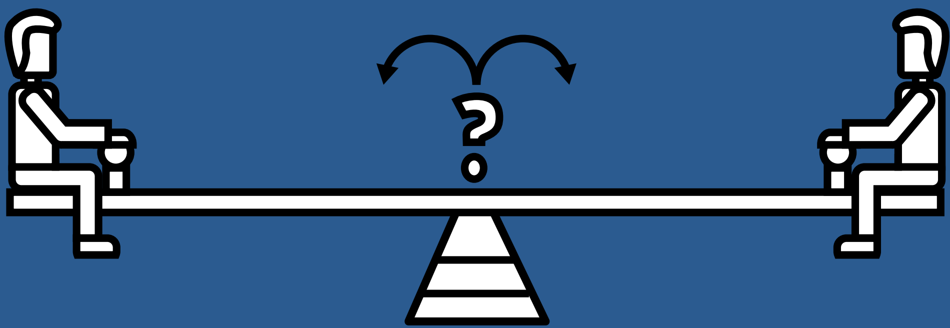
Olvass és tanulj !

#04

Közösségi döntések, gazdasági mechanizmus, általános egyensúly

Az együttműködés a verseny egy formája!



Szerző: Csekő Imre

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

MAGYAR NEMZETI BANK

Csekő Imre

Közösségi döntések, gazdasági mechanizmus, általános egyensúly

Közgazdaságtudományi Kar
Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar
Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék

Cím:
Közösségi döntések, gazdasági mechanizmus, általános egyensúly
Szerző:

A szöveget gondozta:
Szilágyi Ágnes

Kiadó:
Budapesti Corvinus Egyetem | 1093, Budapest, Fővám tér 8.

Nyomdai előkészítés és kivitelezés:
CC Printing Kft.

ISBN 978-963-503-634-9
Budapest | 2016

A TANKÖNYV A MAGYAR NEMZETI BANK ÉS A BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM KÖZÖTTI EGYÜTTMŰKÖDÉSI MEGÁLLAPODÁS KERETÉBEN KERÜLT KIADÁSRA.

Tartalom

Előszó

Ez a könyv egy valamikor háromrészesre tervezett sorozat harmadik kötetének indult. A sorozat első két része a sztenderd neoklasszikus mikroökonómia nyelvén és az általános egyensúlyelmélet keretei között tárgyalta volna az *elkülönült gazdasági aktorok* döntéseinek alapvonásait, illetve e döntések *interakció*jának eredményeit. Ez a harmadik kötet eredetileg arra lett volna hivatott, hogy rámutasson a korábbi részek egyes feltevéseinek inkompatibilitására, és – megtartva az általános egyensúly-elmélet eredményeinek pozitív vonásait – feloldja a feltevései közül azokat, amelyek az említett elméleti gazdasági rendszer önellentmondásait okozzák.

A sorozat teljes egészében – a szerzőnek bőven felróható és némely esetben tőle valamelyest független okok miatt – sohasem készült el. Most azonban váratlan lehetőségem nyílt arra, hogy szűkös határidővel belőle két kötetet a mai állapotukban az olvasó elé tárjak. Ha lett volna időm, energiám és elég motivációm ahhoz, hogy e két részt összegyúrjam, és kiegészítsem a bennük foglaltakat, akkor egy egészen különböző és reményeim szerint minden bizonnyal jobb könyvvel állhattam volna elő.

Ezzel a munkával közel egyidőben jelenik meg a valaha tervezett sorozat második része *Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe* címmel. Ez a cím nem ígér zsákbamacskát, az anyag ténylegesen rövid, és nem lép túl egy bevezetés keretein. E kötetünk szempontjából legfontosabb benne az, hogy remélhetőleg elég hangsúlyt helyez az elkülönült szereplők árelfogadó voltára, és ennek következményeként mutatja be az elmélet legfontosabb eredményeit: a *walrasi* vagy más néven versenyzői egyensúly létezését egy (idealisztikus) magángazdaságban, illetve az egyensúlyi allokációk hatékonyságát tárgyaló jóléti tételeket. Ugyancsak tárgyalja a gazdaság magjának mint az egyensúly egy általánosításának fogalmát és a közjavas gazdaság problematikáját, ahol a jóléti tételek eredeti formájukban nem bizonyulnak igaznak.

E kötet címe – *Közösségi döntések, gazdasági mechanizmus, általános egyensúly* – azonban némi magyarázatra szorul. Nem áltatom magam azzal, hogy tömegek fogják kézbe venni és alaposan átolvasni a könyvet, de talán az esetlegesen félrevezető cím miatt olyanok is belepillantanak, akik mást gondolnak ezekről a területekről mint én. Társadalomtudósok, akik elsősorban a közösségi döntések elmélete vagy gazdaságpolitikusok, akik a gazdasági mechanizmusok iránt érdeklődnek, egyaránt érezhetnek némi – ha nem is elsöprő erejű – kíváncsiságot a cím láttán. Előre látom csalódottságukat, hogy a könyvben szinte semmi nem lesz abból, amire számítottak. Elnézésüket kérem, ha becsaptam volna őket a címadással. Ez egyáltalán nem állt szándékomban, csak arra törekedtem, hogy ez a cím, akárcsak az előző, utaljon arra, miről szól is ez a könyv.

A probléma, noha már csak a pontos megfogalmazása is igen sok előzetes és egyáltalán nem könnyen megszerezhető ismeretet igényel, viszonylag egyszerűen összefoglalható. Az általános egyensúlyelmélettel a maga gondosan felépített és letisztult formájában „komoly baj van". Az *Adam Smith*től származó alapgondolat, miszerint a piac „láthatatlan keze" elrendezi a dolgokat, a gazdasági aktorok önérdekkövető döntéseinek összessége nem kaotikus állapothoz, hanem valamiféle egyensúlyhoz vezet (amely egyensúlyi állapotról ráadásul később kimutatták, hogy *Pareto*-értelemben hatékony), bizony csak roppant restriktív feltételek mellett igaz.

E helyütt igazán nincs mód részletesen bemutatni, hogy melyek ezek a feltevések, csak egyet emelek ki közülük: a gazdasági aktorok árelfogadó voltát. Ez, mint említettük korábban, alapvető szerepet játszik az egyensúly létezésének és a jóléti tételeknek a bizonyításában. Ha ez a feltevés nem igaz, akkor – talán nem is kis túlzással – az egyensúlyelmélet építménye kártyavárként omlik össze. Az előző század utolsó harmadában azonban, ahogy ezt a könyvben bemutatom, több eredmény is alátámasztja azt az állítást, hogy az árelfogadás feltevése és az önérdekkövető gazdasági aktorok szerepeltetése ellentmondásokhoz vezet, ha az aktorok száma nem végtelen. Ilyen esetekben a jóléti tételek kényelmes világa eltűnik, és állításuk megnyugtató pozitivitása ködbe vész. E jelenség triviális, jól ismert példája a monopóliumok, illetve az oligopóliumok léte. Ez általában zavarja a közgazdászokat, de sokszor talán nincsenek tudatában annak a ténynek, hogy a probléma sokkal súlyosabb, sokszereplős esetekben is fennáll ez a helyzet.

Ez a kis kötet arra tesz kísérletet, hogy bemutasson olyan modelleket, amelyekben ez a kérdés, ha nem is megkerülhető, de legalább kezelhető. Miután a vázolt problémát elsősorban az okozza, hogy az árelfogadás feltevése megszabadítja a gazdasági aktorokat a stratégiai gondolkodás és problémamegoldás roppant nehéz és bonyolult feladatától, a feltevés elvetése automatikusan maga után vonja a probléma stratégiai és ezáltal játékelméleti aspektusainak szerepeltetését.

Olyan eljárást, mechanizmust kell ugyanis szerkesztenünk, helyettesítendő az általános egyensúlyelmélet gazdasági döntéshozatali szabályrendszerét, a versenyzői mechanizmust, amely explicite épít arra, hogy a döntéshozók cselekedetei egymásra hatással vannak, és e hatást ők maguk is figyelembe veszik a döntéseik meghozatalakor, nem úgy, mint a versenyzői mechanizmus esetében, ahol ezt a hatást az általuk elfogadott és megváltoztatni nem kívánt árrendszer közvetíti. Egyszerűen fogalmazva, a stratégiai lépésektől megfosztott versenyzői magatartás helyett olyan döntéshozatali mechanizmust kívánunk szerkeszteni, amely ugyanahhoz az eredményhez vezet, mint a versenyzői mechanizmus. Ha ugyanis az eredmény ugyanaz, akkor a versenyzői egyensúly jó tulajdonságai, elsősorban a *Pareto*-hatékonyság, megmaradnak, csak az egész eljárás elméletileg jobban megalapozott és emiatt kevésbé támadható. Ez a probléma egy *par excellence* mechanizmustervezési kérdés, más szóval egy valódi implementációs feladat. E gondolatmenettel indokolható a *gazdasági mechanizmus* és az *általános egyensúly* kifejezések használata a címben.

Azt hiszem, hogy az eddigiek alapján az is sejthető, hogy egy gazdasági állapot elérésének kérdése felfogható egy *közösségi döntés*ként. A gazdasági aktorok a döntéshozók, és együttes cselekvésük – jó esetben – egy megfelelő kívánalmaknak eleget tevő állapothoz vezet, azaz például egy általános egyensúlyi állapot egy közösségi döntési probléma megoldásaként adódik. Pusztán emiatt azonban még nem kellene feltétlenül a közösségi döntések elméletének alapjait tárgyalni egy ilyen munkában. Azért kezdem mégis e terület rövid bevezetésével a mondanivalómat, mert a második részben tárgyalt mechanizmustervezési, implementációelméleti állítások az itt bemutatott eredményeken alapulnak. Arra törekedtem, hogy leszámítva az általános egyensúlyelméleti eredményeket, amelyeket az említett másik kötet ismertet, az itt található állítások és bizonyítások túlnyomó részének megértéséhez ne kelljen más könyveket elővennie az olvasónak. Remélem, e törekvésem nem vall kudarcot.

Az ilyen előszavak többségét köszönetnyilvánítások zárják. Én is köszönök minden türelmet, megértést, támogatást és segítséget mindenkinek, akinek szerepe van e kötet létrejöttében, elsősorban családomnak, tanáraimnak, kollégáimnak, diákjaimnak. Meg sem próbálom felsorolni őket, mert nagyon nem szeretném, ha véletlenül kifelejtenék valakit. Biztos vannak jó páran, akik azt gondolják, hogy hálás lehetek nekik, és igazuk is van.

Budapest, 2016. szeptember.

Csekő Imre

I.

A KÖZÖSSÉGI DÖNTÉS

1.A. A közösségi döntés általános modellje

Csábító gondolat az egyéni és közösségi döntések közötti egyezőségek és különbözőségek részletes és pontos tárgyalásával kezdeni. Sajnos ellen kell állnunk e kísértésnek, mert ha minden olyan területet, amelynek csak valamennyire is szoros kapcsolódása van az általunk leginkább vizsgálni kívánt kérdéskörhöz, ilyen módon vennénk górcső alá, könyvünk kezelhetetlenül nagy méretet öltene. Ezért most csak a közösségi döntésre és annak tulajdonságaira fordítjuk figyelmünket.

A legáltalánosabb modellel kezdünk. Egyelőre szinte semmit nem specifikálunk, hanem egy olyan általános döntési problémát vázolunk, amelybe minden, a továbbiakban tárgyalandó modellünk belefér. A konkrét gazdasági interpretációkra később természetesen visszatérünk.

A modellnek öt fő alkotórésze van:

- a döntéshozók halmaza,
- a választási (döntési) lehetőségek halmaza,
- a „világállapotok” halmaza,
- az egyéni preferenciarendezések és az ezekből képzett profilok halmaza,
- a döntési szabály.

Ez az öt komponens természetesen nem teljesen független egymástól, például a döntési szabálynak valamilyen módon támaszkodnia kell az előző négy alkotórészre, ha másra nem is, azok számosságára. Kimondhatunk ugyan egy elvet, ami látszólag a függetlenséget támasztaná alá, de az alaposabb vizsgálat megmutatja, hogy csalnánk, valamilyen módon utalnánk a másik négy komponensre.

A döntéshozók $\mathcal{I}$ halmazáról, másszóval a társadalomról, a továbbiakban feltesszük, hogy véges[1] és – miután közösségi, kollektív döntési problémáról beszélünk – a trivialitások elkerülése érdekében azt is, hogy legalább kételemű. A halmaz elemeit, a döntéshozókat a továbbiakban az i futóindexszel különböztetjük meg egymástól.

A választási lehetőségek, vagy másképpen a döntési alternatívák halmazáról csupán annyit teszünk most fel, hogy legalább kételemű, hogy legyen miből választani. Jele a továbbiakban az X szimbólum lesz. Az egyes alternatívákat általában kis latin betűkkel – x, a, b stb. – jelöljük majd.

A „világállapotok” nemüres

$$\Theta = (\Theta_0 \times \Theta_1 \times \Theta_2 \times \ldots \times \Theta_i \times \ldots \times \Theta_I)$$

halmazának definiálása egy kicsit bonyolultabb dolog. A Θ_0 halmazban a világállapotra vonatkozó összes olyan jel van, amelyek egyformán vonatkoznak minden döntéshozóra. A $\Theta_i, i = 1, 2, \ldots, I$ halmazok azokat a lehetséges jeleket tartalmazzák, amelyek révén az egyéni döntéshozók a világállapotot azonosítják. A Θ halmaz általános eleme θ lesz, ahol

$$\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i, \ldots \theta_I),$$

azaz a θ állapotban minden $i \in \mathcal{I}$ döntéshozóra *közvetlenül* a $\theta_i \in \Theta_i$ szimbólum vonatkozik majd. Ez nem jelenti azt, hogy a világállapot többi komponenséről ne lenne tudomása. Lehet is, meg nem is.

Egy θ világállapot minden, a döntés szempontjából lényeges információt megad. Később a most ismertetendő szerkezetnél lényegesen összetettebb struktúrájú világállapotokkal is foglalkozunk,

[1] Sajnos, a dolgozatban – terjedelmi okokból – nincs módunk taglalni a végtelen szereplős esetet, bármilyen érdekes is. E helyütt még csak a hivatkozásokat sem adhatjuk meg, ezekre majd az egyes konkrét modellek tárgyalásakor sort kerítünk.

egyelőre a θ_i, $i \in \mathcal{I}$ szimbólumok csak a döntéshozók preferenciáit specifikálják a következő módon.

Jelöljük az X alternatívahalmaz felett értelmezett összes *reflexív, tranzitív és teljes* bináris relációt, azaz *preferenciarendezést* az $\mathcal{R}(X)$ szimbólummal. Feltesszük, hogy minden döntéshozó rendelkezik az alternatívahalmaz fölött egy, az aktuális θ világállapot θ_i komponensétől függő $R_i(X,\theta_i) \in \mathcal{R}(X)$ preferenciarendezéssel. Az i-edik döntéshozó összes, a Θ halmazbeli világállapotokhoz tartozó preferenciarendezéseinek halmazát az $\mathcal{R}_i(X,\Theta)$ szimbólummal jelöljük. Az $R_i(X,\theta_i)$ szimbólumot bizonyos esetekben a szakirodalomban megszokott jelölés használatának érdekében a $\succcurlyeq_i (X,\theta_i)$ jellel helyettesítjük. A közösségi döntés majd a döntéshozók (a világállapottól függő) *együttes preferenciarendezésé*n alapszik. Ezt az együttest *profil*nak hívjuk és az

$$R(X,\theta) = (R_1(X,\theta_1), R_2(X,\theta_2), \ldots, R_I(X,\theta_I))$$

szimbólummal jelöljük. A Θ világállapot-halmazhoz tartozó profilok halmazát a továbbiakban a $\mathcal{D}(\Theta) \triangleq \times_i^I \mathcal{R}_i(X,\Theta)$ szimbólummal jelöljük. A továbbiakban, ha ez nem okozhat félreértést, az alaphalmazra és a világállapotra vonatkozó utalást elhagyjuk, és csak az $\mathcal{R}$, illetve R szimbólumokat használjuk. Ezekből az $R_i, i = 1,2,\ldots,I$ gyenge preferenciarendezésekből a szokásos módon származtathatjuk a megfelelő $P_i, i = 1,2,\ldots,I$ szigorú (aszimmetrikus) preferenciarendezéseket, illetve az $I_i, i = 1,2,\ldots,I$ közömbösségi (indifferencia) relációkat[2]. Ennek megfelelően, ha egy profilt csak szigorú preferenciák alkothatnak, akkor jele P lesz. Nyilván $P \in \times_{i=1}^I \mathcal{P}(X)$, ahol $\mathcal{P}(X)$ az X halmaz felett értelmezett összes tranzitív, aszimmetrikus, teljes reláció.

A közösségi döntést is a világállapotra vezetjük vissza, attól tesszük függővé. Kétféle típusú – egymással esetlegesen kapcsolatban álló – döntést tárgyalunk. Az első típust csak azért említjük ebben a dolgozatban, mert a rá vonatkozó állításokat felhasználjuk

[2]Ezek alternatív jelölései: $\succ_i$, illetve $\sim_i$.

a későbbiekben, a második típusnak azonban döntő szerepe lesz. Az első döntési eljárásban a társadalom minden θ világállapothoz (illetve az attól függő egyéni preferenciákból származtatott profilhoz) egy $R_0(X,\theta) \in \mathcal{R}(X)$ *társadalmi preferenciarendezést* rendel. Az ilyen döntést megvalósító eszközt *Arrow* [1963] nyomán *társadalmi jóléti függvény*nek *(TJF)* hívjuk, és az F szimbólummal jelöljük. A másik döntési típus közelebb áll a döntés szó általánosan elfogadott értelmezéséhez: egy világállapot által indukált preferenciaprofilhoz egy vagy több alternatívát rendel. Ezt a típust egy választott alternatíva esetén *társadalmi választási függvény*nek *(TVF),* ha több alternatívát is választhatunk, akkor *társadalmi választási szabály*nak *(TVSz)* hívjuk, és rendre az f_f, illetve az f szimbólummal jelöljük. Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a *TVF* a *TVSz* speciális esete, ezért a megkülönböztetett jelölést csak akkor használjuk majd, ha mondandónk csak erre a speciális esetre vonatkozik.

Az eddigieket a közösségi választás alapmodelljének hívjuk, és kompakt formában az alábbi definícióban foglaljuk össze.

1.A.1. Definíció. *A* közösségi döntési probléma (KDP) alapmodell*je a következő lista:*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, (F \text{ } vagy \text{ } f)\},$$

ahol

- $\mathcal{I} = (1, 2, \ldots, i, \ldots I)$ a döntéshozók véges halmaza, amire feltesszük, hogy $2 \leqq I < \infty$;
- X az alternatívák halmaza, $|X| \geqq 2$;
- $\Theta = (\Theta_0 \times \Theta_1 \times \Theta_2 \times \ldots \times \Theta_I)$ halmaz: a lehetséges

  $$\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_I)$$

  világállapotok halmaza;

- $\mathcal{D}(\Theta)$ a világállapotok által indukált profilok halmaza:

$$\mathcal{D} : \Theta \to \times_{i=1}^{I} \mathcal{R}(X),$$

ahol $\mathcal{R}(X)$ az összes, az X halmazon értelmezett *reflexív, tranzitív és teljes* bináris reláció. Más jelöléssel :

$$\mathcal{D}(\theta) \in \mathcal{D}(\Theta) \subseteq \times_{i=1}^{I} \mathcal{R}(X),$$

ahol

$$\mathcal{D}(\theta) \triangleq R(X,\theta) \triangleq (R_1(X,\theta_1), R_2(X,\theta_2), \ldots, R_I(X,\theta_I)),$$
$$R_i(X,\theta_i) \in \mathcal{R}_i(X,\Theta) \subseteq \mathcal{R}(X) \quad \forall i \in \mathcal{I}\text{-re és } \forall\theta_i \in \Theta_i\text{-re.}$$

- F a társadalmi jóléti függvény *(TJF)*:

$$F \triangleq \Phi \circ \mathcal{D} : \Theta \to \mathcal{R}(X),$$
$$F(\theta) \triangleq \Phi(R(X,\theta)) \triangleq R_0(X,\theta) \in \mathcal{R}(X) \quad \forall\theta \in \Theta\text{-ra;}$$

- f a társadalmi választási szabály *(TVSz)*,

$$f \triangleq \phi \circ \mathcal{D} : \Theta \rightrightarrows X, \quad f(\theta) \triangleq \phi(R(X,\theta)) \subseteq X \quad \forall\theta \in \Theta\text{-ra.}$$

1.A.2. Megjegyzés. *Látható, hogy a társadalmi választási szabály nem a szokásos értelemben használt függvény, hanem úgynevezett* pont–halmaz leképezés. *Természetesen a* TVF *is az, de a képhalmaz minden esetben egyelemű, az f_f tehát egy* pont–pont leképezés, *azaz függvény.*

1.A.3. Megjegyzés. *A fenti definícióban adott alapmodell kicsit általánosabb, mint a társadalmi választás elmélet (*Social Choice Theory*) megszokott kiindulási modellje. Ez utóbbiban általában nem szerepel a „világállapot” fogalma, a profilok $\mathcal{D}$ halmazát egyszerűen a $\times_{i=1}^{I} R(X)$ szorzathalmaz részhalmazaként definiálják. Ez a tartalmazás nálunk is fennáll, számunkra azonban – később* *részletezendő okok miatt – fontos a világállapottól való függés. Éppen emiatt a* TJF *és a* TVSz *fogalma is kicsit eltér a megszokottól. Mi ezeket a világállapotok halmazán definiáljuk, nem a profilokén. Ugyanakkor nyilvánvalóan ugyanarról a konstrukcióról van szó, mert egy világállapothoz egy egyértelműen meghatározott profil tartozik, és ehhez a profilhoz rendeljük a közösségi preferenciarendezést vagy a közösség által választott alternatívá(ka)t.*

Vegyük észre, a modell definiálása során sehol sem tettünk fel semmit arra vonatkozólag, hogy az egyéni preferenciák miként alakuljanak. Csak annyit jeleztünk, hogy a világállapotoktól függenek. Most azonban a lehető legáltalánosabb keretben mozgunk, ezért teljesen természetesnek tűnik, hogy ne korlátozzuk eleve az egyéni preferenciák tetszőleges alakulását. Más megfogalmazásban: megköveteljük, a világállapotok halmaza olyan legyen, hogy minden logikailag elképzelhető preferenciaprofilt implikáljon legalább egy világállapot. Ha ugyanis egy olyan szabályt, preferencia-aggregálási vagy alternatívakiválasztási eljárást keresünk, amely minél szélesebb körben alkalmazható, nem lenne szerencsés eleve leszűkíteni az alkalmazhatósági kört.

1.A.4. Definíció (Az (U) feltétel). *Egy* KDP *eleget tesz az* első univerzális értelmezési tartomány *feltételnek, ha*

$$\mathcal{D}(\Theta) = \times_{i=1}^{I} \mathcal{R}(X).$$

1.A.5. Definíció (Az (U') feltétel). *Egy* KDP *eleget tesz a* második univerzális értelmezési tartomány *feltételnek, ha*

$$\mathcal{D}(\Theta) = \times_{i=1}^{I} \mathcal{P}(X).$$

Vezessük be a következő fogalmat is.

1.A.6. Definíció (Független preferenciahalmazok). *Ha egy* KDP*-ban szereplő Θ világállapot-halmaz és $\mathcal{D}$ profilleképezés olyan,* *hogy* $\forall i$*-re az* i*-edik döntéshozó preferenciarendezéseinek lehetséges* $\mathcal{R}_i\left(X, \Theta_{(i)}\right)$ *halmaza rögzített, nem függ az aktuális* θ *világállapot többiekre vonatkozó komponenseitől, akkor a* KDP*-ben fennáll a* független preferenciahalmazok *feltétele.*[3]

1.A.7. Megjegyzés. *Vegyük észre, az* (U) *és* (U') *feltételt kielégítő közösségi döntési problémákban a független preferenciák feltétele triviálisan fennáll.*

A továbbiakban ilyen, a preferenciák függetlenségét kielégítő, közösségi döntési problémákkal foglalkozunk.

1.B. A közösségi döntés tulajdonságai

Próbáljuk meggondolni, hogy a fenti modell általánosságát amennyire csak lehet megtartva, melyek lennének egy társadalmi döntés „jó" tulajdonságai. Ne feledjük, a döntés szó itt két értelemmel bír. Vonatkozik a társadalmi jóléti, illetve társadalmi választási függvényre egyaránt. Természetesen e két fogalmat elég nehezen és mesterségesen lehet csak szétválasztani. Mi e helyütt először a társadalmi jóléti, majd a társadalmi választási függvényt vesszük sorra. Mindenekelőtt azonban egy megjegyzést kell tennünk. E dolgozatban nem térünk ki se a *TJF,* se a *TVF* olyan tulajdonságaira, amelyek *nyilvánvalóan* nem teljesülhetnek majd a később tárgyalandó fő modellünkben. Beérjük azoknak a tulajdonságoknak a tárgyalásával, amelyek e modell szempontjából fontosnak tekinthetők.

1.B.1. A társadalmi jóléti függvény

A társadalmi jóléti függvény tulajdonságait két csoportra osztjuk. Az elsőbe kerülnek azok, amelyek a *TJF* működőképességével és

[3] Látható, ezt az esetet jelölésben is megkülönböztetjük. Erre utal az alsó indexben a zárójelbe tett i szimbólum.

racionalitásával foglalkoznak, a másodikba pedig azok, amelyeket valamilyen etikai vagy morális „értékítéletek” indokolnak. Tekintsük először az első csoportot! Szeretnénk – amennyiben ez lehetséges –, ha a társadalmi preferenciarendezés minél jobban hasonlítana, persze *mutatis mutandis,* az egyéni preferenciarendezésekre. Ennek a definícióban már félig-meddig eleget tettünk: az előbbi éppen úgy teljes előrendezés, mint az utóbbiak.[4] Rögtön felmerülhet a kérdés, vajon miért fontos ez, miért kellene a társadalomnak preferenciarendezéssel rendelkeznie. Erre most nem térünk ki, mert – mint már említettük – a TJF fogalmát csak segítségül használjuk e dolgozatban, és így nem szükséges részletesen indokolnunk a konstrukció jogosultságát. Hasonló módon kerüljük el azt is, hogy a társadalmi jóléti függvény következő tulajdonságáról szóló vitában részt vegyünk. Nem az lesz fontos számunkra, hogy értelmes dolog-e megkövetelni egy TJF-től az elmondandókat, hanem az, hogy mi később olyan társadalmi jóléti függvényekkel fogunk dolgozni, amelyek teljesítik e feltételt is. Azt mondjuk, egy TJF-re igaz az *irreleváns alternatíváktól való függetlenség* feltevése, ha tetszőleges két alternatívának a társadalmi preferenciarendezésbeli egymáshoz való viszonya csak ugyanennek a két alternatívának az egyéni preferenciarendezésekbeli viszonyától függ.

Legyen $Y \subset X$ tetszőleges. Jelölje az $R(X|Y,\theta)$ szimbólum az $R(X,\theta)$ preferenciaprofilnak az Y halmazra történő szűkítését, azaz tetszőleges két $x, y \in Y$ elemnek ugyanaz a viszonya az előbbiben, mint az utóbbiban.

1.B.1. Definíció (Az (I) feltétel). *Egy* $F : \Theta \to \mathcal{R}(X)$ TJF *kielégíti az irreleváns alternatíváktól való függetlenség feltételét, ha bármely tetszőleges* $x, y \in X$ *alternatívapárra és*

$$R(X,\theta), R'(X,\theta') \in \mathcal{D}(\Theta)$$

profilokra, amelyekre

$$R(X|\{x,y\},\theta) = R'(X|\{x,y\},\theta'),$$

[4] Azaz $R \in \mathcal{R}(X)$, akárcsak $R_i \in \mathcal{R}(X)$ minden $i \in \mathcal{I}$-re.

következik, hogy

$$\Phi(R(X|\{x,y\},\theta)) \triangleq R_0(X|\{x,y\},\theta) =$$
$$= R_0'(X|\{x,y\},\theta') \triangleq \Phi(R'(X|\{x,y\},\theta')),$$

azaz

$$F_{\{x,y\}}(\theta) = F_{\{x,y\}}(\theta'),$$

ahol nyilván $F_{\{x,y\}}(\theta) \triangleq R_0(X|\{x,y\},\theta)$.

1.B.2. Példa (Az abszolút többség I.). *Definiáljuk a következő* TJF*-t! Legyen* Θ *olyan, hogy a definiálandó* TJF *létezzen.*[5] *Ekkor tetszőleges* $\theta \in \Theta$*, és* $\{x,y\} \subset X$ *esetén*

$$xR_0^{maj}(X,\theta)y \Longleftrightarrow N(xRy) \geqq N(yRx),$$

ahol $N(xRy)$ *azoknak az* i *döntéshozóknak a száma, akikre* xR_iy*. Az így definiált*

$$F(\theta) \triangleq \Phi(R(X,\theta)) \triangleq R_0^{maj}(X,\theta)$$

társadalmi jóléti függvény triviálisan kielégíti az (I) feltételt.

A kívánalmak második csoportjára térve az első, amit nyilván elvárunk egy döntéstől, hogy a döntéshozók értékítéletétől ne legyen független, azaz fennálljon az *állampolgárok szuverenitása* feltétel. Ez azt jelenti, hogy a döntéshozók elvileg bármilyen társadalmi preferenciarendezést képesek létrehozni.

1.B.3. Definíció (Az (ÁSZ) feltétel). *Egy* $F : \Theta \to \mathcal{R}(X)$ TJF *kielégíti az állampolgárok szuverenitása feltételét, ha bármely tetszőleges* $\{x,y\} \subset X$ *alternatívapárra létezik olyan* $\theta \in \Theta$ *világállapot, hogy az* $F(\theta) \triangleq R_0(X,\theta)$ *társadalmi relációra:*

$$xP_0(X,\theta)y.$$

[5] Erről később kicsit bővebben szólunk.

1.B.4. Példa (A rangsoros szavazás I.). *Tekintsük az következő* TJF-*t! Tételezzük fel, hogy* $|X| = X_{num} < \infty$ *és a* KDP *kielégíti az* (U') feltételt. *A* θ *világállapot esetén egy* $x \in X$ *alternatívához rendeljük a*

$$c(x,\theta) = \sum_{i=1}^{I} c_i(x,\theta_i)$$

számot, ahol

$$c_i(x,\theta_i) = X_{num} - b_i(x,\theta_i), \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$b_i(x,\theta_i)$ *pedig azt mutatja meg, hogy az* i*-edik döntéshozó preferenciái által adott (egyértelmű) sorrendben hányadik helyen áll az* x *alternatíva. Legyen most* $x, y \in X$*, valamint* $\theta \in \Theta$ *tetszőleges és*

$$xR_0(X,\theta)y \Longleftrightarrow c(x,\theta) \geqq c(y,\theta).$$

Az így képzett TJF *nyilván kielégíti az* (ÁSZ) feltétel*t. Vegyük észre ugyanakkor azt is, hogy az* (I) feltétel*t nem.*

Ugyancsak elvárhatjuk a társadalmi jóléti függvénytől, hogy ne mondjon ellent az emberek akaratának. Hogy értelmezhetnénk ezt? Többféleképpen. Annyit azonban bizonyára megkövetelhetünk, hogy ha a társadalom minden tagja, vagyis az összes döntéshozó egyformán vélekedik, a társadalmi vélemény ne legyen ezzel ellentétes. Ennek az úgynevezett *Pareto-elv*nek két formáját is megadjuk, mert a későbbiekben szükség lesz rájuk. Ez az elv egyike a közgazdaságtan legfontosabb és leghasznosabb fogalmainak. Egy alternatíva egy profil esetén akkor erősen *Pareto*-optimális (vagy – teljesen azonos értelemben – *Pareto-hatékony*), ha nem létezik olyan másik alternatíva, amelyiket mindenki legalább annyira kedvel, és legalább egy döntéshozó kifejezetten jobban szeret. A gyenge optimalitásnál pedig az a kívánalom, hogy a másik alternatívát ne szeresse mindenki jobban.

1.B.5. Definíció (Pareto-optimalitás). *Egy $x \in X$ alternatíva a $\theta \in \Theta$ világállapothoz tartozó $R(X, \theta)$ profil esetén* gyengén Pareto-optimális, *ha $\nexists\ y \in X$, amire $yP_i(X, \theta_i)x\ \forall i \in \mathcal{I}$-re. Az $x \in X$ alternatíva az $R(X, \theta)$ profil esetén* erősen Pareto-optimális, *ha $\nexists\ y \in X$ és $i' \in \mathcal{I}$, amire $yR_i(X, \theta_i)x\ \forall i \in \mathcal{I}$-re és $yP_{i'}(X, \theta_{i'})x$. Egy $\theta \in \Theta$ világállapotban a gyengén* Pareto-*optimális alternatívák halmazát a $PO(\theta)$, az erősen* Pareto-*optimális alternatívák halmazát a $PO_s(\theta)$ szimbólumokkal jelöljük.*

A célból, hogy ne követeljünk túl sokat, a fenti gyenge optimalitási elvre támaszkodva definiálhatjuk egy *TJF Pareto* típusú tulajdonságát.

1.B.6. Definíció (A (P) feltétel). *Egy $F : \Theta \to \mathcal{R}(X)$ társadalmi jóléti függvény* Pareto típusú, *ha bármely $\theta \in \Theta$ világállapotra és $\{x, y\} \subset X$ alternatívapárra az*

$$xP_i(X, \theta_i)y \quad \forall i\text{-re}$$

relációkból az

$$xP_0(X, \theta)y$$

reláció következik, ahol, mint tudjuk,

$$P_0(X, \theta) \triangleq \Phi(R(X, \theta)) \triangleq F(\theta).$$

1.B.7. Megjegyzés. *Könnyű ellenőrizni, hogy amennyiben az X alternatívahalmaz szerkezete olyan, hogy minden állapotban, minden profil mellett létezik a társadalmi rendezés szerinti legjobb elem, azaz olyan, amelyiknél nincs jobb*[6]*, akkor egy* Pareto *típusú* TJF *esetén egy adott θ világállapotban ez a legjobb elem a Pareto-optimális pontok halmazához tartozik.*

[6] Ez egyáltalán nem biztos, hogy teljesül, ha az X halmaz számossága végtelen. Véges esetben azonban a *TJF* definíciója biztosítja ezt a tulajdonságot.

1.B.8. Segédtétel. *Egy, az* (U) feltétel*t kielégítő* KDP-*ban, ha az F társadalmi jóléti függvény* Pareto típusú, *akkor fennáll rá az* (ÁSZ) feltétel *is.*

BIZONYÍTÁS. Miután a *KDP* kielégíti az *(U) feltétel*t, bármely $\{x, y\} \subset X$ alternatívapárhoz létezik olyan $\theta \in \Theta$ világállapot, amelyben $\forall i \in \mathcal{I}$-re $xP_i(X, \theta)y$. Ebből a *TJF gyenge Pareto-tulajdonság*ával az $xP_0(X, \theta)y$ társadalmi reláció következik. Miután az alternatívapár tetszőleges volt, ezért az *(ÁSZ) feltétel* fennállása nyilvánvaló. □

Vajon szerencsénk van-e, és megfordíthatjuk-e az 1.B.8. Segédtételben megfogalmazott állítást? Ha a *KDP* kielégíti az *(U)* és az *(ÁSZ) feltétel*eket, akkor az F társadalmi jóléti függvény vajon *Pareto típusú*-e? Sajnos nem. Kicsit pozitívabb eredményre jutunk, ha az *(I) feltétel* teljesülését is feltesszük. Mielőtt ezt az eredményt ismertetnénk, bevezetünk egy, a *(P)*-vel rokon feltételt.

1.B.9. Definíció (Az (AP) feltétel). *Egy $F : \Theta \to \mathcal{R}(X)$ társadalmi jóléti függvény* anti-Pareto típusú, *ha bármely $\theta \in \Theta$ világállapotra és $\{x, y\} \subset X$ alternatívapárra, az*

$$xP_i(X, \theta_i)y \quad \forall i\text{-re}$$

relációkból az

$$yP_0(X, \theta)x.$$

1.B.10. Segédtétel. *Legyen egy, az* (U) feltétel*t kielégítő* KDP-*ban*

$$|X| \geqq 3.$$

Ha az F társadalmi jóléti függvényre fennállnak az (I) és (ÁSZ) feltételek, *akkor F vagy* Pareto, *vagy* anti-Pareto típusú.[7]

[7]Vesd össze a *Malawski–Lin* [1994] cikkben szereplő első állítással!

Bizonyítás: A bizonyítás három egyszerű lépésből áll, amelyek közül az első kettő lényegét tekintve azonos.

Tegyük fel először, hogy egy θ világállapotban az $\{x, y\} \subset X$ alternatívapárra igaz, hogy $xP_i(X, \theta_i)y \quad \forall i$-re és $xP_0(X, \theta))y$. Megmutatjuk, hogy ez esetben F *Pareto típusú.* Tekintsünk ekkor egy teszőleges z, az x és y alternatíváktól különböző alternatívát. Ilyen biztos létezik a számosságra tett feltevésünk miatt. Miután a TJF kielégíti az *(ÁSZ) feltétel*t, szükségképpen létezik olyan θ' világállapot, amiben $yP'_0(X, \theta')z$. Tekintsünk most egy olyan θ'' világállapotot, amiben

$$\forall i\text{-re} \quad xP''_i(X, \theta''_i)y \quad \text{és} \quad xP''_i(X, \theta''_i)z,$$

valamint

$$R''(X|\{y, z\}, \theta'') = R'(X|\{y, z\}, \theta'),$$

ilyen az *(U) feltétel* értelmében biztos létezik. Az *(I) feltétel* teljesülése miatt

$$xP''_0(X, \theta'')y \quad \text{és} \quad yP''_0(X, \theta'')z,$$

így a TJF tranzitivitásával

$$xP''_0(X, \theta'')z.$$

Összefoglalva: létezik egy olyan θ'' világállapot, amiben

$$\forall i\text{-re} \quad xP''_i(X, \theta''_i)z \Rightarrow xP''_0(X, \theta'')z.$$

Teljesen hasonló módon tudjuk megmutatni, hogy létezik egy olyan másik θ^* világ-állapot, amiben

$$\forall i\text{-re} \quad zP^*_i(X, \theta^*_i)y \Rightarrow zP^*_0(X, \theta^*)y.$$

Miután a választott három alternatíva tetszőleges volt, ez pont azt jelenti, hogy bármely két, az X halmazbeli alternatívára igaz, hogy található hozzájuk egy olyan világállapot, amelyben az összes döntéshozónak a két alternatívára vonatkozó, azonos irányú szigorú preferenciája a társadalmi értékítéletben is megjelenik: a társadalmi jóléti függvény is ugyanolyan irányú szigorú relációt eredményez. Mindez az *(I) feltétel*lel párosulva az F társadalmi jóléti függvény *Pareto típusú* voltát is bizonyítja.

Második lépésben tegyük most azt fel, hogy egy θ világállapotban az $\{x, y\} \subset X$ alternatívapárra igaz, hogy $xP_i(X, \theta_i)y \quad \forall i$-re és $yP_0(X, \theta))x$. Az első lépésben követett módon – értelemszerűen megváltoztatva a megváltoztatandókat – beláthatjuk, hogy ebben az esetben az F társadalmi jóléti függvény *anti-Pareto típusú.*

Nem maradt más hátra, mint hogy a harmadik lépésben megmutassuk, az első két lépésben alkalmazott, a világállapotra, illetve alternatívapárra vonatkozó kezdeti feltevésegyüttesek közül az egyik biztosan teljesül. Legyen θ' olyan világállapot, amelyben $xP'_0(X, \theta'))y$ valamely $\{x, y\} \subset X$ alternatívapárra. Ilyen az *(ÁSZ) feltétel* teljesülése miatt biztosan létezik. Tekintsünk most egy olyan θ világállapotot, amiben egy $z \notin \{x, y\}$ alternatíva esetén legyen

$$\forall i\text{-re} \quad xP_i(X, \theta_i)z \quad \text{és} \quad yP_i(X, \theta_i)z,$$

valamint teljesüljön a

$$R(X|\,\{x, y\}\,, \theta) = R'(X|\,\{x, y\}\,, \theta')$$

egyezőség is. Az *(U) feltétel* biztosítja ennek létezését. Vegyük észre, hogy ekkor az

$$xI_0(X, \theta))z \quad \text{és} \quad yI_0(X, \theta))z$$

relációk nem lehetnek egyszerre igazak, hiszen ekkor $xI_0(X, \theta))y$, és ez az F TJF tranzitivitása miatt ellentmondana az *(I) feltétel*nek. Így tehát találtunk a kellő tulajdonsággal bíró alternatívapárt és világállapotot. □

1.B.11. Megjegyzés. *Érdemes megfigyelnünk a bizonyítás alapgondolatát. Nem teszünk mást, mint kijátsszuk egymás ellen az* *egyik oldalról az* (U) *és* (ÁSZ) feltételek, *másik oldalról az* (I) feltétel *„erejét". E három, pusztán logikai, működőképességi feltétel drámai módon meghatározza a társadalmi jóléti függvény etikai jellegét, mégpedig úgy, hogy ha a döntéshozók értékítéletének egybeesése egy tetszőleges alternatívapáron bizonyos irányú szigorú társadalmi értékítéletet eredményez, akkor ez a meghatározottság kivétel nélkül minden alternatívapárra igaz lesz. Másképpen megfogalmazva: az egybehangzó egyéni értékítéletek társadalmi érvényesülési képessége független a szóban forgó alternatíváktól.*

A következő – demokratikus lelkünknek természetesnek tűnő – elvárásunk a társadalmi jóléti függvénnyel szemben az, hogy ne csak a döntéshozók egyikének akaratát tükrözze.

1.B.12. Definíció (F-(anti)diktátor). *Egy $i \in \mathcal{I}$ döntéshozót egy* KDP*-ban* F-diktátornak *hívunk, ha minden $\theta \in \Theta$ világállapot és $\{x, y\} \subset X$ alternatívapár esetén az $xP_i(X, \theta_i)y$ relációból az $xP_0(X, \theta)y$ társadalmi preferencia következik. Egy $i \in \mathcal{I}$ döntéshozót* F-antidiktátornak *hívunk, ha egy* KDP*-ban minden $\theta \in \Theta$ világ-állapot és $\{x, y\} \subset X$ alternatívapár esetén az $xP_i(X, \theta_i)y$ relációból az $yP_0(X, \theta)x$ társadalmi preferencia következik.*

1.B.13. Példa (Az abszolút többség II.). *Legyen $|X| = 2$ és a* KDP *elégítse ki az* (U) feltétel*t. Ebben az esetben a 1.B.2. Példában definiált* TJF *kielégíti az* (I)*, az* (ÁSZ) *és a* (P) feltétel*t, valamint az is nyilvánvaló, hogy ebben a* KDP*-ban nincs sem F-diktátor, sem F-antidiktátor. Ismert azonban az úgynevezett* Condorcet-paradoxon*, ami szerint az $|X| \geqq 3$ esetben az abszolút többség által definiált* TJF *nem is létezik, mert bizonyos világállapotokban, amelyek úgynevezett „latinnégyzet"-szerű preferencia-profilokhoz vezetnek, a páronkénti összehasonlítás körkörösséget eredményez, ami ellenmond a* TJF *posztulált tranzitivitásának.*

Eszerint a *Condorcet-paradoxon* oka abban *is* keresendő, hogy „sok" – legalább három – döntéshozónk és alternatívánk van. Van-e reményünk arra, hogy ez a probléma csak a többségi szavazás speciális struktúrájából fakad? Más *TJF*-ek esetén talán nem kell beletörődnünk ebbe a negatív jelenségbe? Könnyen megmutatható, hogy léteznek olyan, az *(U) feltétel*t kielégítő *KDP*-ban definiált társadalmi jóléti függvények, amelyek az *(I)* és az *(ÁSZ)* feltételeknek legalább három döntéshozó és alternatíva mellett is megfelelnek, mégsem lehetünk azonban felhőtlenül boldogok. Mindjárt meglátjuk, miért nem.

Első tételünket az eredetinél egy kicsit kevésbé általánosan mondjuk ki. Ennek ellenére látható, ez egyike a közgazdaságtan legkülönösebb – és legkellemetlenebb – eredményeinek.

1.B.14. Tétel (Wilson). *Legyen egy, az* (U) feltétel*t kielégítő* KDP-*ban*

$$|X| \geqq 3.$$

Ha az F társadalmi jóléti függvényre fennáll az (I) és (ÁSZ) feltétel, *akkor létezik egy olyan $i \in \mathcal{I}$ döntéshozó, aki vagy (i)* F-diktátor, *vagy (ii)* F-antidiktátor.

Bizonyítás. Lásd *Wilson* [1972]. □

A második tétel ma már klasszikusnak számít a közösségi döntések elméletében. Fontosságát nem lehet túlbecsülni, mind a közgazdaságtudományban, mind más társadalomtudományokban alapvető jelentőséggel bír. Ahhoz, hogy legismertebb formájában fogalmazhassuk meg, vezessünk be egy újabb feltételt. Mint már említettük, egy társadalmi jóléti függvénytől azt is nyugodt lelkiismerettel megkövetelhetjük, hogy ne csak egy döntéshozó akaratát tükrözze, azaz a döntési problémában ne legyen F-diktátor. Ezt formalizálja a következő – elég gyenge – diktatúramentességi feltétel.

1.B.15. Definíció (A (D) feltétel). *Egy $F : \Theta \to \mathcal{R}(X)$ társadalmi jóléti függvényre teljesül a (gyenge)* diktatúramentességi feltétel, *ha a KDP-ban nincs* F–diktátor.

1.B.16. Tétel (Arrow). *Legyen egy, az* (U) feltétel*t kielégítő* KDP-*ban*

$$|X| \geqq 3.$$

Ekkor nem létezik olyan TJF*, amelyre az* (I), *a* (P) *és a* (D) feltételek *egyidejűleg fennállnának.*

Bizonyítás.[8] Ha az *(U)* és *(P)* feltételek egyidejűleg fennállnak, akkor az 1.B.8. Segédtétel értelmében a társadalmi jóléti függvényre az *(ÁSZ)* feltétel is igaz, ugyanakkor a *TJF Pareto* típusú volta miatt a *KDP*-ban nyilvánvalóan nem létezhet *F-antidiktátor*. Miután az *(I)* feltétel is fennáll, ezért az 1.B.14. Tételből kapjuk, hogy a *KDP*-ban szükségképpen létezik *F-diktátor*. Ez azonban ellentmond a *(D)* feltételnek. □

1.B.17. Megjegyzés. *Ha alaposan megvizsgáljuk az* Arrow-tétel *itt adott vagy a hivatkozott bizonyítását, akkor nyilvánvaló, hogy amennyiben a* (P) feltétel *helyébe az* (AP) feltételt *illesztjük, akkor – értelemszerű változtatások mellett – nem az* F-diktátor, *hanem az* F-antidiktátor *létezését bizonyíthatjuk.*

1.B.18. Megjegyzés. *Az* Arrow-tétel *bizonyításából úgy tűnik, a* Wilson-tétel *erősebb, hiszen ez utóbbi nyilvánvaló módon implikálja a másik igazságát. Ha azonban az* Arrow-tétel *állítását összevetjük az 1.B.10. Segédtételben kimondottakkal, láthatjuk, hogy ez is implikálja a másikat. Emiatt a* Wilson-tétel *úgy is tekinthető, mint az* Arrow-tétel *finomítása.*

Az *Arrow-tétel*ből nyert eredményt mi is többször hasznosítjuk majd a továbbiakban. Nincs módunk e helyütt ismertetni az irodalomban fellelhető, könyvtárnyi kísérletet arra vonatkozóan, hogy a feltételek feloldásával kimeneküljünk a közösségi döntés e

[8] Egy önálló – más tételre nem hivatkozó – magyar nyelvű bizonyítás található *Zalai Ernő* [1989]-ban a 153–155. oldalakon.

zavaró tehetetlensége okozta csapdából. Néhány további megjegyzést azonban tennünk kell.

1.B.19. Megjegyzés. *A tétel akkor is igaz, ha a* KDP*-ra az* (U') *feltételt alkalmazzuk, és a* TJF *képe csak szigorú preferenciaprofil lehet.*[9]

1.B.20. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy az* Arrow–tétel *negativitásának egyaránt feltétele az alternatívahalmaz, illetve a döntéshozók halmazának számosságára tett kikötésünk. Ugyancsak döntő szerepe van az univerzális értelmezési tartomány feltételének is. A későbbiekben tárgyalandó gazdasági modelljeink egyrészt triviálisan kielégítik a számossági feltételeket, másrészt megengedik majd az* (U) feltétel *lazítását. Ez az engedékenység azonban kényszer szülte tulajdonság, az* (U) feltétel *fennállása nem csak e közösségi döntési szempontból kellemetlen. Erről később bővebben szólunk.*

1.B.21. Megjegyzés. *Az* Arrow-tétel *negativitása nem tűnik túl zavarónak, ha arra gondolunk, a társadalom (a döntéshozók közössége) általában nem kényszerül arra, hogy az összes alternatívát sorba rendezze. Legtöbbször bőven elegendő, ha az alternatívák közül kiválaszt egyet. Persze, e választás teljesen természetes módjának tűnik a következő: először sorba rendezzük az alternatívákat, majd kiválasztjuk azt, amelyiknél a sorrendben nincs magasabban elhelyezkedő. Úgy tűnik, ezt az eljárást az* Arrow-tétel *mintha akadályozná. Nosza, vessük akkor el, de mit javasoljunk helyette? A válasz korántsem egyszerű, mint erre a következő pont rá is mutat.*

1.B.2. A társadalmi választási szabály

A *társadalmi választási szabályt* úgy definiáltuk, mint egy olyan leképezést, amely egy világállapothoz egy vagy több alternatívát

[9] Az előző lábjegyzetben említett bizonyítás minimális módosítással igazolásul szolgálhat.

rendel. Próbáljuk meg erre a fogalomra átszabni a *TJF* esetében használt tulajdonságokat.

1.B.22. Definíció (Az (ász) feltétel). *Egy* $f : \Theta \rightrightarrows X$ társadalmi választási szabály *kielégíti az* állampolgárok szuverenitása feltételt, *ha*

$$f(\Theta) = X,$$

azaz a TVSz *ráképezés. Másképpen: egy alternatívát sem tekintünk eleve annyira rossznak, hogy a döntéshozók – megfelelő világállapotban – ne választhatnák.*

A továbbiakban alapvető fontosságot tulajdonítunk a *Pareto-optimalitás* vagy másképpen a *Pareto-hatékonyság* fogalmának.[10] Miután azonban maga a döntésfogalmunk is más (társadalmi *választási* és nem *jóléti* függvényről, szabályról beszélünk), az eddigiekhez képest át kell fogalmaznunk ezt is. A lényeges különbséget abban ragadhatjuk meg, hogy döntő módon különbözik a véges, illetve végtelen alternatívahalmaz esete.

1.B.23. Definíció (A (p) feltétel). *Egy* $f : \Theta \rightrightarrows X$ *társadalmi választási szabály* Pareto-hatékony, *ha bármely* $\theta \in \Theta$ *világállapotra és* $\{x, y\} \subset X' \triangleq f(\Theta)$ *alternatívapárra az*

$$xP_i(X, \theta_i)y \quad \forall i\text{-re}$$

relációkból

$$y \notin f(\theta)$$

következik.

1.B.24. Megjegyzés. *Vegyük észre, itt csak annyit követelünk, hogy az adott világállapotban a választott alternatíva a* TVSz *képhalmazán legyen* Pareto-optimális.

[10] Hogy miért, az a következő fejezetekből nyilvánvaló lesz.

Az 1.B.8. Segédtételben láttuk, hogy az univerzális értelmezési tartomány feltevése mellett egy *Pareto* típusú társadalmi jóléti függvényre szükségképpen fennáll az állampolgárok szuverenitása. Sajnos, bizonyos esetekben a társadalmi választási szabályra ez ebben a formában nem lehet igaz, mint arra a következő segédtételből következtethetünk.

1.B.25. Segédtétel. *Egy, az* (U) *feltételt kielégítő* KDP-*ban az* $f : \Theta \rightrightarrows X$ Pareto-hatékony *társadalmi választási szabály*

$$X' \triangleq f(\Theta) \subset X$$

képhalmaza véges.

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk, feltesszük, hogy X' nem véges. Ekkor – az *(U) feltétel* fennállása miatt – szükségképpen létezik olyan $\theta \in \Theta$ világállapot és ez által indukált $R(X, \theta)$ preferenciaprofil, amelyben tetszőleges $y \in X'$ alternatívához létezik olyan $x \in X'$ alternatíva, hogy

$$xP_i(X, \theta_i)y \quad \forall i \in \mathcal{I}\text{-re.}$$

Miután y a $TVSz$ képének tetszőleges eleme volt, és maga a társadalmi választási szabály minden $\theta \in \Theta$ világállapotban értelmezett, ezért nyilván nem tehetne eleget a *(p) feltétel*nek. Ellentmondásra jutottunk, azaz az X' halmaz szükségképpen véges. □

1.B.26. Következmény. *Ha egy, az* (U) *feltételt kielégítő* KDP-*ban az* X *alternatívahalmaz számossága végtelen, akkor az* $f : \Theta \rightrightarrows X$ Pareto-hatékony *társadalmi választási szabály nem elégítheti ki az* állampolgárok szuverenitása *feltételt.*

Bizonyítás. Az állítás triviális a definíciókból és az 1.B.25. Segédtételből. □

Az 1.B.25. Segédtétel bizonyításában alkalmazott gondolatmenetből az is nyilvánvaló, hogy érdemes vigyáznunk a diktatúra fogalmának meghatározásakor is.

1.B.27. Definíció (f-diktátor). *Egy* KDP-*ban egy $i \in \mathcal{I}$ döntéshozót* f-diktátornak *hívunk, ha minden $\theta \in \Theta$ világállapotra és minden $x \in X' \triangleq f(\Theta)$ alternatívára*

$$aR_i(X, \theta_i)x \qquad \forall a \in f(\theta)\text{-re.}$$

1.B.28. Definíció (Diktatorikus TVSz). *Az $f : \Theta \rightrightarrows X$ társadalmi választási szabály* diktatórikus, *ha a* KDP-*ban létezik* f-diktátor.

1.B.29. Megjegyzés. *Hasonlóan az 1.B.24. Megjegyzésben elmondottakhoz, itt is csak az eleve a választásból nem kizárt alternatívákra vonatkoztatjuk a diktátor „hatalmát”.*

1.B.30. Megjegyzés. *Könnyen látható, hogy egy diktatórikus* TVSz *egyben* Pareto-hatékony *is.*

A következő, a $TVSz$-ra vonatkozó definiálandó fogalom is azt a kívánalmat tükrözi, hogy a $TVSz$ „ne mondjon ellent” az egyéni preferenciáknak, azaz – pongyolán fogalmazva – egy alternatíva egyéni megítélésének javulása ne rontson annak kiválasztási esélyén. Előbb azonban egy hasznos konstrukcióval ismerkedünk meg.

1.B.31. Definíció. *Egy $\theta \in \Theta$ világállapotban és egy $x \in X$ alternatíva esetén legyen*

$$L\left(x, R_i(X, \theta_i)\right) \triangleq \left\{y \in X \,|xR_i(X, \theta_i)y\right\}.$$

1.B.32. Definíció (TVSz monotonitás). *Az $f : \Theta \rightrightarrows X$ társadalmi választási szabály* monoton, *ha tetszőleges $\theta, \theta' \in \Theta$ világállapotokra és $x \in X$ alternatívára, amelyekre*

$$x \in f(\theta) \text{ és } L\left(x, R_i(X, \theta_i)\right) \subseteq L\left(x, R_i'(X, \theta_i')\right), \qquad \forall i \in \mathcal{I}\text{-re}$$

következik, hogy

$$x \in f\left(\theta'\right).$$

Szavakkal: ha egy világállapotban kiválasztott alternatíva egy másik világállapotban senki értékítéletében nem kerül hátrébb egy másik alternatívával szemben sem, akkor szükségképpen társadalmi választás marad ebben az új világállapotban is.

Ennek a tulajdonságnak a későbbiekben alapvető fontosságú szerepe lesz, éppen ezért itt most nem foglalkozunk azzal, hogy mennyire erős vagy gyenge feltételezés a $TVSz$-ra vonatkozóan. Sajnos, következményeiben azonban igen kellemetlen hatású is lehet, amit a most kimondandó segédtétel is jelez.

1.B.33. Segédtétel. *Legyen egy, az* (U) feltétel*t kielégítő* KDP-*ban* $3 \leqq |X'|$, *valamint az* f_f *társadalmi választási függvény* Pareto-hatékony *és* monoton. *Ekkor szükségképpen* diktatórikus *is egyben.*

1.B.34. Megjegyzés. *Feltétlenül vegyük észre, hogy a segédtétel állítása társadalmi választási* függvényre *vonatkozik.*

Bizonyítás. A bizonyítást lépésekre bontjuk.

1. Először azt látjuk be, hogy ha két egymástól különböző θ és θ' világállapotban a preferenciaprofilok egybeesnek a TVF képhalmazán, akkor a társadalmi választás is ugyanaz, azaz $\theta, \theta' \in \Theta$ és

$$R(X|X', \theta) = R'(X|X', \theta'), \tag{1.B–1}$$

esetén

$$f_f(\theta) = f_f(\theta').$$

Tegyük fel, hogy

$$a = f_f(\theta) \neq f_f(\theta') = b.$$

Az ellentmondás kicsikarásához definiáljuk a következő leképezést az X alternatívahalmaz részhalmazainak 2^X, valamint a világállapotok Θ halmazán:

1.B.35. Definíció. *Legyen* $\mu : 2^X \times \Theta \to \times_{i=1}^{I} \mathcal{R}(X)$ *a következő. A*

$$\mu(Y, \theta) \triangleq R^{\mu,Y}(X, \theta)$$

preferenciaprofilban $\forall i \in \mathcal{I}$*-re*

$$\begin{aligned} xP_i^{\mu,Y}(X, \theta_i)y, &\quad \textit{ha } x \in Y \textit{ és } y \notin Y, \\ xR_i^{\mu,Y}(X, \theta_i)y \Leftrightarrow xR_i(X, \theta_i)y, &\quad \textit{ha } x, y \in Y, \\ xR_i^{\mu,Y}(X, \theta_i)y \Leftrightarrow xR_i(X, \theta_i)y, &\quad \textit{ha } x, y \notin Y. \end{aligned}$$

Az f_f függvényről feltételeztük az univerzális értelmezési tartományt és a monotonitást, ezért

$$f_f^{\mu,X'}(\theta) \triangleq \phi(\mu\left(X', \theta\right)) = a, \tag{1.B–2}$$

$$f_f^{\mu,X'}\left(\theta'\right) \triangleq \phi(\mu\left(X', \theta'\right)) = b. \tag{1.B–3}$$

Ha most ismét figyelembe vesszük az f_f függvény monotonitását, az (1.B–1) és (1.B–2) egyenlőségekből kapjuk, hogy

$$f_f^{\mu,X'}\left(\theta'\right) \triangleq \phi(\mu\left(X', \theta'\right)) = a,$$

ami az f_f függvény egyértékűsége miatt közvetlenül ellentmond az (1.B–3) egyenlőségnek. Az elmondottak értelmében elegendő a továbbiakban olyan társadalmi választási függvényeket vizsgálnunk, amelyek ráképezések, azaz amelyekre $f_f(\Theta) = X$.

2. A következő lépésben egy olyan módosított KDP-t vizsgálunk, amelyben a fenti μ leképezés segítségével létrehozunk egy, a TVF-ből származtatott társadalmi *jóléti* függvényt. Erre a problémára majd alkalmazni tudjuk az *Arrow*-tételt. Első lépésként veszünk egy $\theta \in \Theta$ világállapotot, és definiáljuk a következő bináris relációt. Legyen x és y két teszőleges, egymástól különböző, X halmazbeli alternatíva és legyen

$$\begin{aligned} xF^*(\theta)\, y &\triangleq xP_0^f(X\,|\{x, y\}, \theta)y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = f_f^{\mu,\{x,y\}}(\theta) \triangleq \phi\left(\mu(\{x, y\}, \theta)\right), \end{aligned}$$

azaz ebben az új relációban az x alternatívát akkor tekintjük jobbnak az y alternatívánál, ha mindkettőt – változatlan sorrendben – „felcipelve” az eredeti preferenciaprofil tetejére, az f_f *TVF* képe pont x. Vizsgáljuk meg, vajon ily módon tényleg társadalmi jóléti függvényt nyerünk-e? Ehhez azt kell belátnunk, hogy minden világállapothoz vajon teljes és tranzitív reláció tartozik-e.[11] Először is vegyük észre, hogy a *KDP*-ra vonatkozó *(U)* feltétel miatt a kapott bináris reláció minden világállapotra jól definiált. A teljesség nyilvánvaló, hiszen az f_f függvény *Pareto-hatékonyságából*

$$f_f^{\mu,\{x,y\}}(\theta) \in \{x, y\}.$$

A tranzitivitás bizonyítása sem túl nehéz. Tegyük fel, x, y, z egyaránt eleme az X halmaznak, valamint $xF^*(\theta)\,y$ és $yF^*(\theta)\,z$. Azt kell belátnunk, hogy $xF^*(\theta)\,z$. Tegyük fel, hogy

$$f_f^{\mu,\{x,y,z\}}(\theta) = y.$$

Ekkor azonban az f_f függvény feltételezett monotonitásából az

$$f_f^{\mu,\{x,y\}}(\theta) = y$$

egyenlőség következne, ami ellentmond a feltételezett $xF^*(\theta)\,y$ relációnak. Hasonlóképpen nem állhat fenn az

$$f_f^{\mu,\{x,y,z\}}(\theta) = z$$

egyenlőség sem, ezért nyilván

$$f_f^{\mu,\{x,y,z\}}(\theta) = x.$$

Ekkor a monotonitással

$$f_f^{\mu,\{x,z\}}(\theta) = x,$$

[11] Vegyük észre, hogy a *TJF* definíciója miatt a kapott társadalmi preferenciarendezés szükségképpen szigorú (aszimmetrikus), így a reflexivitás nem lehet kérdés.

amiből már kapjuk az $xF^*(\theta)\,z$ relációt. Ezek szerint $F^*(\theta) \in \mathcal{P}(X)$, azaz az $F^* : \Phi \circ \mathcal{D} \to \mathcal{P}(X)$ függvény tényleg *TJF*.

Vajon milyen tulajdonságai vannak ennek a társadalmi jóléti függvénynek? Miután az előbb láttuk, hogy elegendő ráképezéseket vizsgálnunk, tudjuk, hogy az alternatívahalmaz számossága legalább három. Az eredeti *KDP*-ra vonatkozó *(U)* feltétel miatt $\mathcal{D}(\Theta) = \times_{i=1}^{I}\mathcal{R}(X)$, azaz erre az új, módosított *KDP*-ra is fennáll az *(U)* feltétel. Az f_f függvény monotonitásából az F^* leképezésre nyilvánvalóan fennáll az *(I)* feltétel is (x és y viszonya csak a világállapot által indukált preferenciaprofilban szereplő, egymáshoz viszonyított helyzetüktől függ, hiszen bármely profilból „felcipelhetjük” őket a profil tetejére, majd a többi elemet tetszőleges sorrendbe állíthatjuk). Erre támaszkodva, hasonló gondolatmenet alapján a *Pareto-hatékonyság*ból és a monotonitásból fennáll F^*-ra a *(P)* feltétel is. Az *Arrow-tétel* értelmében tudjuk, hogy az F^* társadalmi jóléti függvényre vonatkozó *KDP*-ban létezik F-diktátor, jelöljük őt az $1 \leqq d \leqq I$ szimbólummal.

3. Annyit kell már csak belátnunk, hogy ez az F-diktátor egyben f-diktátor is az eredeti *KDP*-ban.

Először is vegyük észre, hogy minden $\theta \in \Theta$-ra

$$f_f(\theta)\, F^*(\theta)x, \quad \forall\, x \in X',\ x \neq f_f(\theta). \tag{1.B–4}$$

Ez a monotonitásból nyilvánvaló, hiszen $\forall i$-re

$$\begin{aligned} L\left(f_f(\theta), R_i(X,\theta_i)\right) \;&\subseteq\; L\left(f_f(\theta), \mu_i\left(\{f_f(\theta), x\}, \theta_i\right)\right), \\ \forall\, x \;&\in\; X',\ x \neq f_f(\theta), \end{aligned}$$

így

$$f_f(\theta) = f_f^{\mu,\{f_f(\theta),x\}}(\theta).$$

Másrészt szintén minden $\theta \in \Theta$-ra a d döntéshozó F-diktátorsága miatt nem létezhet egyetlen olyan $x \in X'$ alternatíva sem, amire $xP_d(X,\theta_d)f_f(\theta)$, mert ez ellentmondana az (1.B–4) relációknak. Ebből következik, hogy $\forall\theta \in \Theta$ esetén

$$f_f(\theta)\, R_d(X,\theta_d)x, \quad \forall\, x \in X',$$

ami nem jelent mást, mint hogy d – ahogy abban reménykedtünk – egyben f-diktátor is. $\square$

1.B.36. Megjegyzés. *Ha figyelmesen megvizsgáljuk a bizonyítást, észrevehetjük, hogy az* (U) *feltételt helyettesíthetjük az* (U') *feltétellel, az állítás igazságán ez nem változtat.*

1.B.37. Megjegyzés. *Az 1.B.33. Segédtételnek az állítás negativitásán túl van egy, számunkra a későbbiekben lényeges tulajdonsága: igencsak érzékeny a feltételekre. Ha az előző Megjegyzésben említett feltételen kívül csak egy másik nem teljesül is, azonnal tudunk olyan nem diktatórikus eljárást szerkeszteni, amely a többit kielégíti. Ezt a tényt alaposan ki is fogjuk használni a továbbiakban. Csak egy példa ennek az érzékenységnek az igazolására:*

1.B.38. Példa (Pareto TVSz). *Legyen f a következő* TVSz*:*

$$f : \Theta \rightrightarrows X, \qquad f(\theta) \triangleq PO(\theta) \quad \forall\theta \in \Theta,$$

azaz $\forall\theta \in \Theta$ világállapotban

$$f(\theta) \triangleq \left\{ x \in X \,\middle|\, \nexists x' \in X', \text{ amire } x' P_i(X, \theta_i)\, x \quad \forall i\text{-re} \right\}.$$

Erről a Pareto-leképezés*nek nevezett társadalmi választási szabályról könnyű belátni, hogy monoton, nyilvánvalóan* Pareto-hatékony,[12] *de ugyanakkor az* (U) feltétel*t kielégítő* KDP*-ban triviálisan nem diktatórikus.*

Kielégíti ugyanakkor a következő definícióban adandó feltételt is, ami a diktatúramentességnek egy enyhébb változata.

[12] Ha azonban a definícióban az erősen *Pareto*-optimális(hatékony) alternatívák $PO_s(\theta)$ halmazát szerepeltetnénk, akkor az állítás nem lenne igaz. Egy ellenpéldát találhatunk például *Palfrey–Srivastava* [1991]-ban.

1.B.39. Definíció (A (VM) feltétel). *Az $f : \Theta \rightrightarrows X$ társadalmi választási szabály* vétómentes, *ha $\forall i \in \mathcal{I}$-re, $\forall x \in X'$-re és olyan $\theta \in \Theta$-ra, amelyre*

$$L\left(x, R_j(X, \theta_j)\right) = X \qquad \forall j \neq i\text{-re,}$$

az $x \in f(\theta)$ tartalmazás következik.

A közösségi döntés tulajdonságainak tárgyalását végül egy, a *TVSz*-re vonatkozó olyan fogalommal zárjuk, amely definiálásához szükségünk lesz az eddig használt világállapot fogalmának tágítására. Eddig csak annyit tudtunk a világállapotokról, hogy azok egyértelműen meghatározzák a preferenciaprofilokat. Már korábban utaltunk arra, hogy ennél bonyolultabb szerkezetű világállapotokkal is találkozunk majd. Tegyük most fel, hogy létezik olyan $\bar{x} : \Theta \to X$ függvény, amely $\forall \theta \in \Theta$ világállapothoz egyértelműen hozzárendel egy $\bar{x}(\theta) \in X$ alternatívát, amit egyfajta status quóként értelmezhetünk.

1.B.40. Definíció. *Az $f : \Theta \rightrightarrows X$ társadalmi választási szabály* individuálisan racionális, *ha $\forall \theta \in \Theta$-ra, amennyiben $x \in f(\theta)$, akkor*

$$xR_i\left(X, \theta_i\right)\bar{x}(\theta) \quad \forall i\text{-re.}$$

1.B.41. Megjegyzés. *Nyilvánvaló: ha a világállapotok halmaza nem túl speciális szerkezetű, egy individuálisan racionális* TVSz *nem lehet sem diktatórikus, sem vétómentes. Ez így igencsak pongyola megállapítás, szerencsésebb lenne, ha jellemeznénk azt a Θ' világállapothalmazt, amelyre igaz. E helyütt nem célunk ezt megtenni, csak utalunk arra, hogy amennyiben a* KDP *kielégíti az* (U) *feltételt, állításunk triviálisan teljesül.*

1.C. Szavazási modellek

Ebben az alfejezetben egy speciális szerkezetű közösségi döntési problémával foglalkozunk, az úgynevezett szavazási modellel. Célunk természetesen nem az, hogy a szavazási modelleket általában ismertessük, jellemezzük vagy tárgyaljuk, hanem az, hogy a lehető legegyszerűbb és a legkönnyebben átlátható modellben vizsgáljuk a problémát. Emiatt az sem célunk, hogy konkrét példákkal illusztráljuk a mondanivalónkat, ilyeneket bárki könnyen konstruálhat.

1.C.1. A szavazási modellek tulajdonságai

A szavazási modell pillanatok alatt beilleszthető a *KDP*-k általános szerkezetébe. A modellben véges sok szavazó, véges sok alternatíva közül választ pontosan egyet. Egyelőre nem specifikáljuk precízen ezt a választási eljárást, ennél általánosabb a megközelítésünk. A választásról – mivel nem ismerjük még az eljárást – még semmit sem tudunk, de elvárásaink lehetnek. Első elvárásunk, hogy a választás az egyének értékítéletétől függjön, másszóval: az egyéni preferenciák és csakis azok befolyásolják a választást. Ennek értelmében a világállapotok és a profilok között egy–egy értelmű kapcsolat van, emiatt – a jelölés egyszerűsítése érdekében az alternatívahalmazra és a világállapotra történő utalást el is hagyjuk. A második: olyan általános legyen, hogy minden világállapotban alkalmazni lehessen. A harmadik: minden alternatíva legyen ténylegesen választható, azaz ne legyen olyan alternatíva, amit eleve kizárunk.

1.C.1. Definíció (Szavazási modell). *Az alábbi feltételeknek eleget tevő* KDP-*t* szavazási modell*nek* (SzM) *hívjuk:*

- A döntéshozók $\mathcal{I} = (1, 2, \ldots, i, \ldots I)$ halmaza véges, azaz $2 \leqq I < \infty$;
- Az alternatívák X halmaza véges, azaz $2 \leqq |X| < \infty$;
- A $\mathcal{D}$ leképezés bijektív, azaz a *KDP*-beli világállapotok Θ halmaza és az alternatívahalmaz feletti összes, logikailag elképzelhető preferenciaprofilok halmaza közötti megfeleltetés egy–egy értelmű;

- A ϕ szavazási eljárás *(SzE)* a következő *TVF*,

$$\phi : \times_{i=1}^{I} \mathcal{R}(X) \triangleq \mathcal{R}(X)^{I} \to X,$$
$$\phi(R) \triangleq \phi(R_1, \ldots, R_I) \in X, \quad \forall R \in \mathcal{R}(X)^{I}$$
$$\phi\left(\mathcal{R}(X)^{I}\right) = X.$$

1.C.2. Megjegyzés. *Könnyen látható:* a szavazási modell *kielégíti az* (U) *feltételt, azaz* $\mathcal{D}(\Theta) = \times_{i=1}^{I} \mathcal{R}(X)$ *és a definícióból következően az* állampolgárok szuverenitása *feltételt is.*

A fenti definíció alapján értelemszerűen definiálhatjuk a szavazási eljárás tulajdonságait, nem kell mást tennünk, csak a *TVF* tulajdonságait átfogalmazni oly módon, hogy kihagyjuk a világállapot fogalmát. Lássuk például, hogy a *Pareto-hatékonyság* és a diktatórikusság fogalmát miként adhatjuk meg a szavazási eljárásokra nézve:

1.C.3. Definíció. *Egy* $\phi : \mathcal{R}(X)^{I} \to X$ *szavazási eljárás* Pareto-hatékony, *ha bármely* $R \in \mathcal{R}(X)^{I}$ *preferenciaprofilra és* $\{x, y\} \subset X$ *alternatívapárra az*

$$xP_iy \quad \forall i\text{-re}$$

relációkból az

$$y \neq \phi(R)$$

egyenlőtlenség következik.

1.C.4. Definíció. *Egy* $\phi : \mathcal{R}(X)^{I} \to X$ *szavazási eljárás* diktatórikus, *ha létezik olyan* $i \in \mathcal{I}$ *döntéshozó, hogy* $\forall R \in \mathcal{R}(X)^{I}$ *és* $\forall x \in X$ *esetén*

$$\phi(R)\, R_i x.$$

Maga a szavazási modell azonban – minden egyszerűsége és jó tulajdonsága ellenére – önmagában hordoz egy olyan ellentmondást, amelynek feloldása igencsak komoly erőfeszítést igényel, sőt bizonyos esetekben, nem is lehetséges. Mire gondolunk? Mint azt megköveteltük, minden szavazási modellben a szavazási eljárás kimenetele mindig az egyéni preferenciáktól függ. Az egyéni preferenciák azonban természetükből fakadóan privát információk, aktuális alakulásukat csak a döntéshozók maguk ismerik. Mégpedig minden döntéshozó csak a saját preferenciájáról rendelkezik információval, a többiekéről nem vagy csak nagyon korlátozott formában. Miután minden döntéshozó csak a szavazási eljárás által szolgáltatott kimenet számára kedvező voltában érdekelt, nem pedig abban, hogy valós értékítéletét a többiek számára felfedje, ezért mindent elkövet annak érdekében, hogy e kimenetet a maga javára befolyásolja. Ennek megfelelően olyan preferenciát fed fel, mint sajátját, amelyről úgy véli, a legkedvezőbb kimenetet biztosítja saját maga számára. Éppen ezek miatt az, aki megfelelő szavazási eljárást kíván szerkeszteni, eleve ellentmondásos helyzetbe kerül. Egyrészt tisztában van azzal, hogy a számára felfedett információk (preferenciaprofilok) egyaránt lehetnek valóságosak vagy hamisak, másrészt azt szeretné, az általa szerkesztett eljárás a *valóságos* preferenciákon rendelkezzen azokkal a jó tulajdonságokkal, amelyekkel ellátni kívánja. Ebből az következik, hogy olyan eljárásra van szüksége, amely biztosítja, hogy a döntéshozók *biztosan* a valódi preferenciáikat tárják fel számára. Olyan módszert kell létrehoznia, ami *minden esetben, azaz minden preferenciaprofil mellett* arra készteti a döntéshozókat, hogy az „igazat vallják”. Az ilyen szavazási eljárásokat *csalásbiztos*nak hívjuk. Ellenkező esetben, azaz ha a *SzE* nem csalásbiztos, olyan eredményt hozhat, amely a valós preferenciákon nem felel meg a megkívánt követelményeknek. A csalásbiztos eljárásoknak még egy nagy előnye van. Mint említettük, a döntéshozók rendelkezhetnek valamennyi információval a többiek preferenciáiról. Ezek alapján tehetik meg stratégiai lépéseiket, azaz ezek alapján döntik el, hazudnak-e vagy sem, és ha igen, akkor mit. Miután az eljárást szerkesztő ezekről az információkról sem tud semmit, igencsak nehéz, ha nem reménytelen dolga van, ha ezeket a stratégiai lépéseket előre be akarja kalkulálni. Ha viszont csalásbiztos eljárást szerkeszt, nem kell törődnie ezzel a problémával. Ekkor ugyanis a döntéshozóknak nem áll érdekükben hazudniuk, mindig a valós preferenciákat jelentik be. A csalásbiztos *SzE* „megszabadít" minket a problémának ettől a stratégiai vetületétől.[13] Kérdésünk ezek után az: vajon tudunk-e egyéb jó tulajdonságokkal rendelkező, csalásbiztos eljárást szerkeszteni, és ha igen, melyek ezek a jó tulajdonságok? Mielőtt azonban e kérdést megválaszolnánk, formalizáljuk a csalásbiztosság fogalmát!

Először egy jelölést vezetünk be. Jelölje az $R|R'$ szimbólum a következő profilokat:

$$R|R'_i \triangleq \left(R_1, \ldots, R_{i-1}, R'_i, R_{i+1}, \ldots, R_I\right),$$

$$R|R'_i, R'_j \triangleq \left(R_1, \ldots, R'_i, \ldots, R'_j, \ldots, R_I\right),$$

és így tovább.

1.C.5. Definíció (Manipulálhatóság). *Egy $\phi : \mathcal{R}(X)^I \to X$ szavazási eljárás az $R \in \mathcal{R}(X)^I$ profilban az i-edik döntéshozó által* manipulálható, *ha $\exists R'_i \in \mathcal{R}(X)$ preferenciarendezés, hogy*

$$\phi\left(R|R'_i\right) P_i \phi(R).$$

1.C.6. Definíció (Csalásbiztosság). *Egy $\phi : \mathcal{R}(X)^I \to X$ szavazási eljárás* csalásbiztos, *ha egy preferenciaprofilban sem manipulálható.*

1.C.2. A Gibbard–Satterthwaite-tétel

Ebben a pontban bevezetjük a *korlátozott szavazási modell (KSzM)* fogalmát, amely csak abban különbözik az általános szavazási modelltől, hogy csak *szigorú preferenciákat* engedünk meg benne.

[13] Ezt a megjegyzést, csakúgy mint az egész gondolatmenetet, később precízebbé tesszük.

1.C.7. Definíció (Korlátozott szavazási modell). *Az alábbi feltételeknek eleget tevő* KDP-*t* korlátozott szavazási modell*nek* (KSzM) *hívjuk:*

- A döntéshozók $\mathcal{I} = (1, 2, \ldots, i, \ldots I)$ halmaza véges, azaz $2 \leqq I < \infty$;
- Az alternatívák X halmaza véges, azaz $2 \leqq |X| < \infty$;
- A $\mathcal{D}$ leképezés bijektív, azaz a *KDP*-beli világállapotok Θ halmaza és az alternatívahalmaz feletti összes, logikailag elképzelhető *szigorú* preferenciaprofilok halmaza közötti megfeleltetés egy–egy értelmű;
- A ϕ *korlátozott* szavazási eljárás *(KSzE)* a következő *TVF*,

$$\phi : \times_{i=1}^{I} \mathcal{P}(X) \triangleq \mathcal{P}(X)^I \to X,$$
$$\phi(P) \triangleq \phi(P_1, \ldots, P_I) \in X, \quad \forall P \in \mathcal{P}(X)^I$$
$$\phi\left(\mathcal{P}(X)^I\right) = X.$$

A csalásbiztos *KSzM* definíciója nyilvánvaló módosításokkal kapható. Most néhány segédtétellel jellemezzük a csalásbiztos korlátozott szavazási eljárásokat.

1.C.8. Segédtétel. *Legyen* $\phi : \mathcal{P}(X)^I \to X$ *egy csalásbiztos* KSzE. *Ekkor nem léteznek olyan* $x, y \in X$ *alternatívák, valamint olyan*

$$\left(i \in \mathcal{I}, P \in \mathcal{P}(X)^I, P_i' \in \mathcal{P}(X)\right)$$

hármas, hogy $x = \phi(P) \neq \phi(P|P_i') = y$ *és*

$$xP_iy \Longleftrightarrow xP_i'y.$$

Bizonyítás: A szigorú preferenciarendezés teljessége miatt vagy xP_iy, vagy yP_ix. Az általánosság megsértése nélkül tekintsük az első esetet! Ekkor a feltétel miatt $xP_i'y$ is fennáll, de ez azt jelenti, hogy az i-edik döntéshozó manipulálhatja ϕ-t a $P|P_i'$ profilban. Ellenkező esetben ugyanő manipulálhatna a P profilban. Mindez ellentmondásban van a feltételezett csalásbiztossággal. □

1.C.9. Segédtétel. *Legyen $\phi : \mathcal{P}(X)^I \to X$ csalásbiztos. Ekkor monoton is egyben.*

Bizonyítás: A *TVSz*-ra vonatkozó 1.B.32. Definíciót a ϕ *KSzE*-re alkalmazva tegyük fel, hogy $\phi(P) = x$ és

$$L(x, P_i) \subseteq L\left(x, P_i'\right) \qquad \forall i\text{-re},$$

ahol $P_i, P_i' \in \mathcal{P}(X)$. Azt kell belátnunk, hogy $x = \phi(P')$ egyben.

Legyen $\phi(P|P_1') = z \neq x$. Tegyük fel, hogy xP_1z. Ez azonban az alsó nívóhalmazokra tett feltétel miatt, az 1.C.8. Segédtétel alapján ellentmond a feltételezett csalásbiztosságnak. A zP_1x reláció sem állhat fenn, mert ez közvetlenül azt jelentené, az első döntéshozó manipulálhatja ϕ-t a P profilban. Tehát $\phi(P|P_1') = x$. Hasonló módon láthatjuk be, hogy $\phi(P|P_1', P_2') = x$, és így tovább. Miután véges sok döntéshozónk van, nyilvánvalóan adódik a segédtétel állítása. □

1.C.10. Segédtétel. *Legyen $\phi : \mathcal{P}(X)^I \to X$ csalásbiztos, valamint $P \in \mathcal{P}(X)^I$és $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq X$ olyan, hogy $\forall i \in \mathcal{I}$ és $\forall b \in \mathcal{B}$ esetén*

$$bP_ic \quad \forall c \in X \backslash \mathcal{B}.$$

Ekkor $\phi(P) \in \mathcal{B}$.

Bizonyítás: A *KSzM*-re vonatkozó *(U')* feltétel miatt létezik olyan $P' \in \mathcal{P}(X)^I$, amire $\phi(P') = b \in \mathcal{B}$. Ekkor nyilván $\phi(P'|P_1) \in \mathcal{B}$, ellenkező esetben ϕ manipulálható lenne ebben a profilban az első döntéshozó által. Hasonló módon, miután véges sok döntéshozó van, egyik sem tudja „kivinni” a társadalmi választást a

$\mathcal{B}$ halmazból azáltal, hogy a P_i preferenciarendezést mondja be. Emiatt

$$\phi(P) \in \mathcal{B}.$$

□

1.C.11. Következmény. *Egy csalásbiztos* ϕ KSzE Pareto-*hatékony is egyben.*

Bizonyítás: Tegyük fel, nem. Ekkor létezik olyan $P \in \mathcal{P}(X)^I$ profil és $x \neq \phi(P)$ alternatíva, hogy $\forall i$-re

$$\begin{aligned} &xP_i\phi(P), \quad \text{valamint} \\ &xP_iy \quad \forall y \in X, \text{ amire } y \neq x. \end{aligned}$$

Legyen az előző segédtételben szereplő $\mathcal{B}$ halmaz egyenlő ezzel az x alternatívával. Ellentmondásra jutottunk. □

Ennyi előkészület után már be tudjuk látni a csalásbiztos szavazási eljárásokra vonatkozó alapvető tételünket, ami – sajnos – pont olyan negatív tartalmú, mint az *Arrow-tétel.* Ezt a tételt egymástól függetlenül fogalmazta meg *A. Gibbard* és *M. Satterthwaite*[14].

1.C.12. Tétel (G–S tétel SzM-re). *Ha egy* szavazási model*lben* $|X| \geqq 3$ *és a* szavazási eljárás *csalásbiztos, akkor diktatórikus is egyben.*

Bizonyítás: A bizonyítást két lépésben végezzük el. Az elsőben az állítást egy *KSzM*-ben látjuk be, majd kiterjesztjük az általánosabb modellre is[15].

[14] Lásd *Gibbard* [1973] és *Satterthwaite* [1975].

[15] Ez a kiterjesztés *Schmeidler–Sonnenschein* [1978] cikkben szerepel.

1. Az 1.C.9. Segédtétel és az 1.C.11. Következmény értelmében egy csalásbiztos *KSzM* monoton és *Pareto* -hatékony társadalmi választási függvény, és mivel képhalmaza maga az X alternatívahalmaz – aminek a számossága legalább három –, ezért, figyelembe véve az 1.B.36. Megjegyzést, az 1.B.33. Segédtételből kapjuk az állítást.

2. Először vegyük észre, hogy ha egy ϕ szavazási eljárás csalásbiztos egy *SzM*-ben, akkor az marad a modell korlátozott változatában is. Azt is vegyük észre, hogy az 1.C.10. Segédtétel módosítható úgy, hogy igaz marad egy általános *SzM*-ben is. Ezek alapján tudjuk, hogy továbbra is van diktátorunk a szigorú preferencia-profilokon, a $\mathcal{P}^I$ halmazon. Az általánosság megsértése nélkül legyen ez „1". Azt kell megmutatnunk, hogy $\forall R \in \mathcal{R}^I$-re $\phi(R) \in \mathcal{B}$, ahol $\mathcal{B} = \max(R_1)$, azaz $\phi(R)$ az első döntéshozó (a diktátor) preferenciarendezése szerinti legjobb elemekhez tartozik.[16] Legyen $P \in \mathcal{P}^I$ olyan, hogy minden $y \in \mathcal{B}$-re és minden $z \in X \backslash \mathcal{B}$ az yP_1z és $zP_iy \quad \forall i \neq 1$-re. Ilyen szigorú preferenciaprofil a feltételezett univerzális értelmezési tartomány miatt biztos létezik. Nyilván $\phi(P) \in \mathcal{B}$.

Legyen most

$$w_i = \phi(P_1, \ldots, P_i, R_{i+1}, \ldots R_I)$$

és legyen

$$0 \leqq j = \min\{i \,|w_i \in \mathcal{B}\} \leqq I.$$

Ha $j = 1$, akkor az ϕ szavazási eljárást „1" manipulálhatja az R profilban, ha $j > 1$, akkor j döntéshozó manipulálhatja a

$$(P_1, \ldots, P_{j-1}, R_j, \ldots, R_I)$$

profilban. Emiatt $j = 0$ szükségképpen, azaz $w_0 \in \mathcal{B}$. Pontosan ezt kellett bizonyítanunk. □

[16] Ilyen legjobb elem X végessége miatt biztos van, azaz $\mathcal{B}$ biztos nem üres.

1.C.13. Megjegyzés. *A* Gibbard–Satterthwaite-*tétel jelentőségét nehéz túlbecsülni. Sajnos, pont olyan alapvető, mint az* Arrow-*tétel. Ebben semmi meglepő nincs, ugyanannak a logikai jelenségnek két oldaláról van szó. Megmutatható, hogy a két állítás egymásból bizonytható.*[17] *Van azonban némi esély arra, hogy kiszabaduljunk ebből a reménytelennek tűnő csapdahelyzetből. Bizonyos helyzetekben ugyanis a tétel feltételei túl erőseknek tűnnek. Ha csak két alternatívánk van például, a tétel negativitása semmivé foszlik. Hasonló a helyzet, ha okunk van feltételezni, hogy az univerzális értelmezési tartomány feltétele nem áll fenn. Szerencsére a legtöbb gazdasági modellünk ilyen. Enyhíthetünk esetleg a csalásbiztosság túl szigorú feltételén, ez is hozhat pozitív eredményt. Mégsem volt azonban teljesen felesleges megismerkednünk ezzel tétellel, egyrészt, mert később többször hivatkozunk rá, másrészt meg kell értenünk, negativitása miből fakad, ha túl akarunk lépni rajta. Ez a továbblépés több irányban történhet. Először, a következő fejezetben, a csalásbiztosságot próbáljuk meg enyhíteni.*

[17] Lásd például *Blin–Satterthwaite* [1978] és *Muller–Satterthwaite* [1985].

II.

AZ IMPLEMENTÁCIÓ

2.A. Az implementáció fogalma

Az előzőekben ismertetett szavazási modell jó példát szolgáltat egy általánosabb problémára, amely többé-kevésbé minden közösségi döntési problémát jellemez. Ez a probléma nem más, mint egyfajta információhiány. Az aktuális világállapot felismerhetősége mindig kétséges, ezért legtöbbször nem lehetünk biztosak abban, hogy a ténylegesen megvalósuló alternatíva vajon megfelelő tulajdonságú-e. Fejtsük ki ezt egy kicsit részletesebben egy példán keresztül, mielőtt formalizálnánk gondolatainkat.

Egy klub alapszabályának azt a részét kellene rögzítenünk, hogy a tagok szavazatai milyen módon befolyásolják a döntést. Miután az alapszabályt előre kell megadnunk, természetesen *ex ante* nem támaszkodhatunk a majd kialakuló világállapotra, csak a döntéshozók személyére, az alternatívahalmazra és az összes szóba jöhető világállapotra. Ezek alapján előre kell meghatároznunk olyan eljárást, amely később, *ex post,* az aktuálisan fellépő világállapotnak megfelelő alternatívát vagy esetleg alternatívákat eredményezi. Az eddigi szóhasználatunkkal: adott számunkra a közösségi döntési probléma első négy komponense, meg kell adnunk a társadalmi választási szabályt. Ez a feladat megoldható,[18] ha a tagok előre – a *tudatlanság fátyla* alatt – képesek kellő kompromisszumot kötni, mielőtt tudomásuk lenne a majdan kialakuló világállapotról. Feltételezzük tehát, hogy sikerült megszerkesztenünk és elfogadtatnunk a megfelelő tulajdonságokkal[19] bíró társadalmi választási szabályt. Az igazi probléma az, hogy a megvalósult világállapotot – én mint döntőbíró a tagok közötti vitás kérdésekben – megfigyelni nem tudom, akkor sem, ha már kialakult. Ezért nem köthetem hozzá a kimenetet, abban az értelemben, hogy vita esetén ennek az alapján döntök. A legfontosabb

[18] Természetesen ez sem olyan egyszerű, amint azt az első fejezet alapján sejthetjük is.

[19] *Pareto*-hatékonyság, állampolgárok szuverenitása, diktatúramentesség stb.

kérdés tehát az, hogy tudok-e olyan információt szerezni, amely alapján következtetni tudok majd a világállapotra. Hiába szerkesztem meg ugyanis a legjobb tulajdonságokkal bíró eljárást, ha nem tudom alkalmazni a későbbiekben. Honnan szerezhetem be a szükséges információt? Csakis attól, aki rendelkezik vele, tehát azoktól, akik képesek megfigyelni a világállapotot, vagyis a döntéshozóktól. Itt rögtön két probléma is felmerül. Az első: vajon a döntéshozók valóban képesek-e megfigyelni a világállapotot, vagy csak annak a saját magukra vonatkozó komponensét? A második: vajon megosztják-e mással is az információt? Az elsőre adandó választ egy kicsit elhalasztjuk, nemsokára azonban részletesen viszatérünk rá. A másodikra könnyebb a válasz: igen, de csak akkor, ha érdekükben áll, azaz, ha ezáltal előnyhöz jutnak. Ügyes módon kell tehát rávennünk őket arra, hogy cselekedeteikkel feltárják számunkra az igazságot. Ezzel tehát mintegy *decentralizál*nunk kell a döntést. A *megfigyelhető* egyéni cselekedetek fogják meghatározni a kimenetet, de oly módon, hogy ezzel az előre elfogadott szabály meg ne sérüljön. Az az eljárás, *mechanizmus,* amit megszerkesztünk, ez úton *implementálja* a társadalmi választási szabályt. Ennek a mechanizmusnak tehát az egyéni haszonra, érdekre törekvő cselekedeteket kell összhangba hozni, koordinálni. Mit értünk itt az egyéni érdekre való törekvésen? Azt, hogy a döntéshozók a számukra adott cselekvési lehetőségek közül azt választják, ami – esetlegesen figyelembe véve a többiek cselekedetét is – a számukra lehető legjobb alternatívát eredményezi. Látható, ez egy tipikus játékelméleti szituáció, a döntéshozókat olyan játékban való részvételre vesszük rá, amely játék végül egy megvalósuló világállapotban olyan alternatívát eredményez, ami kompatibilis a társadalmi választási szabályunkkal. De miután előre nem ismerjük a megvalósuló világállapotot[20], ezért e mechanizmusnak minden világállapoton működnie kell. Ez a példa elég jól illusztrálja az implementációelmélet alapproblémáját, és arra is rávilágít,

[20] A döntéshozók sem!

hogyan kapcsolódik itt össze a társadalmi választási elmélet és a játékelmélet. Próbáljuk meg most az elmondottakat formalizálni!

Tekinstünk egy $\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f\}$ közösségi döntési problémát, ahogy azt az 1.A.1. Definícióban megadtuk! Definiáljuk a következő mechanizmust: minden $i \in \mathcal{I}$ döntéshozóhoz rendeljünk hozzá egy S_i *stratégiahalmaz*t, amely az i-edik játékos által megjátszható stratégiákat tartalmazza.[21] Legyen

$$S \triangleq \times_{i=1}^{I} S_i$$

az úgynevezett stratégiaegyüttesek halmaza. Ezen a halmazon értelmezünk egy

$$g : S \to X$$

függvényt, amit *kimeneti függvény*nek nevezünk majd. A kimeneti függvény minden stratégiaegyütteshez tehát pontosan egy kimenetet, alternatívát rendel. Ezeket a kimeneteket a játékosok, döntéshozók értékelik. Szemben a játékelméletben szokásosan alkalmazott kifizetési függvény fogalommal, amit az S együttes stratégiahalmazon értelmezünk, itt az értékelés csak közvetve, a kimeneti függvényen keresztül függ a stratégiaegyüttesektől. Ugyancsak nem azonos a helyzet abban a tekintetben, hogy itt az értékelést nem pénzben vagy más intervallumskálán végezzük, hanem az aktuális világállapottól függő egyéni preferenciákat hívjuk segítségül. Ezek a preferenciák, mint tudjuk, az alternatívahalmazon vannak értelmezve, így a különböző stratégiaegyüttesekhez tartozó kimenetek összehasonlítása megoldott. Vegyük észre azt is, hogy mivel minden világállapothoz tartozik preferenciarendezés, így stratégiaértékelési rendszer is. Ha tehát elfogadjuk, hogy a kifizetési függvényeket a preferenciákkal helyettesítve is egy játékot kapunk, akkor minden világállapothoz tartozik egy játék. Ennek

[21] E stratégiák konkrét formája most egyáltalán nem érdekes, ezért nem mondunk semmit arról, hogy az S_i halmazokat honnan vesszük. Természetesen később, az egyes elemezendő döntési problémák ismertetésekor, e halmazokat sokkal pontosabban definiáljuk majd.

az alapján definiálhatjuk egy közösségi döntési problémához tartozó játékcsaládot a következő módon.

2.A.1. Definíció (Mechanizmus). *Egy* $\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, \ f\}$ KDP--hoz *tartozó* γ mechanizmus *a következő:*

$$\gamma \triangleq \{S_1, \ldots, S_I; g; \Theta\},$$

ahol $\forall \theta \in \Theta$*-ra*

$$\{S_1, \ldots, S_I; g; \theta\}$$

egy játék.

Ezekhez a játékokhoz, attól függően, hogy mit feltételezünk a döntéshozók világállapothoz való kapcsolatáról, vagyis arról, hogy mennyire képesek felismerni az aktuális világállapotot, különböző egyensúlyfogalmakat társíthatunk. Előbb azonban általánosan tesszük meg ezt. A lényeg azonban az, hogy minden, később definiálandó konkrét egyensúlyfogalom valamilyen módon tükrözze majd az egyének érdekkövető magatartását.

2.A.2. Definíció (Egyensúlyfogalom). *Egy adott*

$$\gamma = \{S_1, \ldots, S_I; g; \Theta\}$$

mechanizmusra vonatkozó $E_\gamma : \Theta \rightrightarrows S$ *egyensúlyfogalom a mechanizmusbeli* g *kimeneti függvényhez és egy megvalósuló* θ *világállapothoz egy valamilyen szempontból kívánatos tulajdonságokkal rendelkező stratégiaegyütteseket rendel. Az aktuális (megvalósult)* θ *világállapothoz tartozó* $\{S_1, \ldots, S_I; g; \theta\}$ *játékban az* E_γ *egyensúlyfogalomhoz tartozó* egyensúlyi stratégiák halmazá*t az* $E(S, g, \theta) \subseteq S$ *szimbólummal jelöljük*[22]*. Ha egy* $\theta \in \Theta$ *világállapotban az* $E(S, g, \theta)$ *nem üres, az egyenúlyi stratégiákhoz*

[22] Világos, hogy az $E_\gamma(\theta)$ jelölés ökonomikusabb és logikusabb lenne, de szerencsésnek tartjuk, ha az egyensúlyi stratégiákra vonatkozó szimbólumunk explicite tartalmazza az együttes stratégia-halmazra és a kimeneti függvényre történő utalást.

tartozó egyensúlyi kimenetek *halmaza:*

$$g\left(E\left(S,g,\theta\right)\right)\triangleq\left\{g\left(s\right)\in X\left|s\in E\left(S,g,\theta\right)\right.\right\}.$$

Most már készen állunk arra, hogy megadjuk az implementáció definícióját!

2.A.3. Definíció (Implementáció). *Tekintsünk egy*

$$\{\mathcal{I},X,\Theta,\mathcal{D},\ f\}$$

KDP-*t! Egy hozzá tartozó* $\gamma\triangleq\{S_1,\ldots,S_I;g;\Theta\}$ *mechanizmus az* E_γ *egyensúlyfogalomban implementálja az* $f:\Theta\rightrightarrows X$ TVSz-*t, ha* $\forall\theta\in\Theta$*-ra*

(i) $E\left(S,g,\theta\right)\neq\varnothing$;

(ii) $g\left(E\left(S,g,\theta\right)\right)=f(\theta)$.

2.A.4. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy az implementáció azt jelenti, hogy* minden *világállapotban létezik legalább egy egyensúlyi stratégiaegyüttes, és ezek mind-egyikének képe társadalmi választás az adott világállapotban. Sőt ennél többet követelünk meg: minden társadalmilag választott alternatíva álljon elő, mint egy egyensúlyi stratégiaegyütteshez tartozó kimenet. Ez pont azt jelenti, hogy bármely világállapot következik is be, a megfigyelhető, ellenőrizhető és adott esetben büntethető egyéni cselekedetek egyensúlyának eredményeképpen a társadalmilag kívánatos állapotok valósulnak meg, és ezek közül egy sincs eleve kizárva.*

2.B. Igazsághű implementáció és a revelációs elv

Az implementáció fogalmának definiálásakor nem specifikáltuk pontosan, milyenek is lehetnek az egyéni stratégiahalmazok. Ez azt jelenti, hogy ezek szerkezete a lehető legegyszerűbb esettől, amikor egy stratégiát egy valós szám bemondása jelent, az igen komplex, több komponensű stratégiákból álló halmazig terjedhet. Ezért, amikor egy társadalmi választási függvény implementálásra teszünk kísérletet, elvileg végtelen sok vizsgálatot kell elvégeznünk, végtelen sok lehetőséget kell végigzongoráznunk. Rögtön felmerül tehát a kérdés: miként egyszerűsíthetnénk ezt a feladatot? Nem lehetne-e a stratégiahalmazokat eleve leszűkített módon, speciális szerkezetűknek feltételeznünk? Ha ezt megtehetjük, azonnal adódik a lehető legkézenfekvőbb lehetőség: a döntéshozók cselekedeteit a rájuk vonatkozó, általuk nyilvánvalóan észlelt világállapot-komponens bejelentésére korlátozzuk. Természetesen ez nem azt jelenti, hogy teljesen biztosak lehetünk abban, hogy a ténylegesen megvalósult világállapotot jelentik be, hanem csak annyit, hogy a megjátszott stratégiaegyüttes egy világállapot, és nem valami más. Ezek mellett kell arról gondoskodnunk, hogy a megjátszott stratégiaegyüttesből következtethessünk a ténylegesen megvalósult világállapotra. Ez persze akkor a legkönnyebb, ha többé-kevésbé biztosak lehetünk abban, hogy a játékosok tényleg a valós világállapot-komponenseket jelentik be. Ezt az esetet nevezzük *igazsághű* implementációnak. A formális definíció előtt meg kell ismerkednünk a *direkt*, illetve *indirekt mechanizmusok* fogalmával.

2.B.1. Definíció. *Ha egy* KDP-hoz *tartozó γ mechanizmus esetén*

$$\forall i\text{-re} \quad S_i = \Theta_i,$$

akkor a mechanizmust direkt *mechanizmusnak hívjuk. A direkt mechanizmusokat általában az η, a hozzájuk tartozó kimeneti függvényt a h szimbólummal jelöljük.*
Ha egy mechanizmus nem direkt, akkor indirek*tnek mondjuk.*

2.B.2. Definíció (Igazsághű implementáció). *Tekintsünk a*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D},\ f\}$$

KDP-*t! A hozzá tartozó*

$$\eta \triangleq \left\{\Theta_{-0} \triangleq (\Theta_1, \ldots, \Theta_I)\,; h; \Theta\right\}$$

direkt mechanizmus az E_η egyensúlyfogalomban igazsághűen implementálja *a szóban forgó $f : \Theta \rightrightarrows X$* TVSz-*t, ha a*

$$\theta_{-0} \triangleq (\theta_1, \ldots, \theta_I)$$

jelölés mellett $\forall\theta \in \Theta$ -ra

(i) $\theta_{-0} \in E\,(\Theta_{-0}, h, \theta)\,;$

(ii) $h\,(\theta_{-0}) \in f\,(\theta)\,.$

Vegyük észre, az implementácó megismert két koncepciója lényegesen különbözik egymástól. Nemcsak az a különbség, hogy az egyikben korlátozzuk a stratégia-halmazokat, hanem annál sokkal több. Tekintsünk ugyanis egy *KDP-hoz* tartozó η direkt mechanizmust, és tegyük fel, az E_η egyensúlyfogalomban implementálja az f társadalmi választási szabályt! Ebből azonban egyáltalán nem következik, hogy ugyanabban az egyensúlykoncepcióban igazsághűen is implementálja. Nincs ugyanis garancia arra, hogy minden világállapotban a valós világállapot bejelentése egyensúlyi stratégiaegyüttes lenne, csak arra, létezik ilyen. Visszafelé sem igaz az implikáció. Ha egy η direkt mechanizmus az E_η egyensúlyfogalomban igazsághűen implementálja a társadalmi választási szabályt, nem lehetünk biztosak abban, hogy $h\,(E\,(\Theta_{-0}, h, \theta)) = f\,(\theta)$. Később látni fogjuk, az igazi problémát nem az okozza, hogy egy θ világállapotban az $f\,(\theta)$ halmaznak lehetnek olyan pontjai, amelyek nem elemei a $h\,(E\,(\Theta_{-0}, h, \theta))$ halmaznak, hanem az, hogy ez utóbbinak lehetnek $f\,(\theta)$ kívüli elemei is. Mégis van valamilyen kapcsolat a két implementációs fogalom között. Ezt a kapcsolatot az úgynevezett revelációs elvben fogalmazhatjuk meg.

A *revelációs elv*nek számtalan alakja van. Ezek mind ugyanazt a gondolatot testesítik meg: ha egy közösségi döntési problémában a társadalmi választási függvényt egy mechanizmus valamilyen egyensúlykoncepcióban implementál, akkor találhatunk hozzá olyan direkt mechanizmust is, amely igazsághűen implementálja. Eszerint – ha úgy véljük, amennyiben az igazság bevallása nem sérti az érdekeket, akkor az emberek be is vallják – nincs szükség komplikált mechanizmusok szerkesztésére, célunknak bőségesen megfelel egy egyszerű direkt mechanizmus is. Ha nem fogadjuk is el az előző érvelést, a revelációs elv, mint azt nemsokára látni fogjuk, hasznos eszköz lesz számunkra.

Ahogy az előbb említettük, a revelációs elv több alakjával kell megismerkednünk. Ezt a következő alpontban tesszük meg.

2.B.1. Implementáció domináns egyensúlyban

Legelőször azt vizsgáljuk meg, mit jelent az implementáció fogalma a legegyszerűbb és legtermészetesebb egyensúlyi koncepcióban: a domináns egyensúlyban. Ha alaposan végiggondoljuk azt a példát, amit az implementáció fogalmának bevezetésekor ismertünk meg, észrevehetjük, egyáltalán nem mindegy, mit is tételezünk fel azzal kapcsolatban, hogy az egyes döntéshozók mennyit érzékelnek a megvalósuló világ-állapotból. Azt biztosra vesszük, hogy a saját magukra vonatkozó komponenssel tisztában vannak, hiszen ez vezérli a cselekedeteiket. Ha ismerik a többiekre vonatkozó komponenseket is, akkor ezt a többletinformációt is felhasználhatják. Miután – feltevéseink szerint – mások a világállapotot megfigyelni nem képesek, ezért az információnak stratégiai jelentősége van. A játékosok közül legalább egynek, esetleg többnek, a közösségi döntési probléma vagy a hozzá tartozó mechanizmus alapján lehetősége van a végeredmény számára kedvező befolyásolásában. Ezek a végeredményt alakítani képes játékosok lejátsszák (esetleg csak gondolatban) az előttük álló játékot, így – a hozzájuk csatlakozó, stratégiai megfontolásokkal nem rendelkező döntéshozókkal együtt – meghatározzák a kimenetet. Ez a játék annál bonyolultabb, minél komplexebb feltevésekkel élünk arra vonatkozóan, mennyit is érzékelnek a játékosok a többiekre vonatkozó világállapot-komponensekről. A legegyszerűbb az az eset, amikor mindegy, mit is tudnak, a többletinformáció nem jelent előnyt a számukra. Más szóval: egy játékos számára egy adott világállapotban – bármelyik stratégiát követik is a többiek – mindig ugyanannak a stratégiának a megjátszása a legjobb. Ez a játékos *domináns stratégiája.* Ha a döntéshozó rendelkezik ilyen domináns stratégiával, akkor nyilván érdektelen, ismeri-e a többiek értékítéletét, illetve szándékait. Nyilvánvaló, azt is feltételezhetjük, sosem játszik nem domináns stratégiát. Emiatt, ha mindegyik játékosnak van domináns stratégiája, biztonsággal megjósolható a játék kimenete: mindegyik döntéshozó ezt játssza, ehhez a domináns egyensúlyi stratégiaegyütteshez tartozó kimenet lesz a játék végeredménye. A továbbiakban egy *KDP*-hoz tartozó, azt domináns egyensúlyban implementáló mechanizmust definiálunk. Vezessük be a következő jelölést is:[23]

$$\begin{aligned}(S_i, S_{-i}) &\triangleq S \quad \text{és} \quad (s_i, s_{i-1}) \triangleq s, \quad \text{ahol}\\ S_{-i} &\triangleq \{S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_I\} \quad \text{és}\\ s_{-i} &\triangleq \{s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_I\}.\end{aligned}$$

2.B.3. Definíció (Domináns egyensúly). *Egy*

$$\gamma = \{S_1, \ldots, S_I; g; \Theta\}$$

mechanizmushoz és egy $\theta = (\theta_0, \theta_1 \ldots, \theta_I) \in \Theta$ *világállapothoz tartozó*

$$\gamma_\theta \triangleq \{S_1, \ldots, S_I; g; \theta\}$$

játékban az i-edik játékos $s_i^* \in S_i$ *stratégiája* domináns, *ha* $\forall s_i \in S_i$ *és* $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ *esetén*

$$g(s_i^*, s_{-i})\, R_i(X, \theta_i)\, g(s_i, s_{-i}).$$

[23] Noha e helyütt csak a stratégiahalmazokra és stratégiákra adjuk meg, értelemszerű módosításokkal használni fogjuk egyéb fogalmakra is. Vegyük észre, hogy a világállapotoknál ezek szerint $(\theta_i, \theta_{-i}) = \theta_{-0}$, illetve $(\Theta_i, \Theta_{-i}) = \Theta_{-0}$.

Ugyanitt egy $s^* \in S$ domináns stratégiaegyüttes, ha $\forall i$-re s_i^* domináns stratégia. A domináns stratégiaegyüttesek halmazát jelöljük a $DE\,(S, g, \theta)$ szimbólummal.

2.B.4. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy miután az i-edik játékos $R_i\,(X, \theta_i)$ preferenciarendezése az eddigiek értelmében csak a $\theta \in \Theta$ világállapot $\theta_i \in \Theta_i$ komponensétől függ, ezért a*

$$(\theta_0, \theta_i, \theta_{-i}) \in (\Theta_0, \Theta_i, \Theta_{-i}) \quad \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}$$

világállapotokban az i-edik játékos domináns stratégiája ugyanaz.

2.B.5. Megjegyzés (Domináns implementálás). *Ezek után a közösségi döntési problémában a társadalmi választási szabályt domináns egyensúlyban implementáló, illetve igazsághűen implementáló mechanizmusokat triviális módon definiálhatjuk, ha a 2.A.3., illetve 2.B.2. Definícióban az E_γ egyensúlyfogalom helyén a domináns egyensúlyi koncepciót szerepeltetjük.*

Most már kimondhatjuk a revelációs elv eredeti, a domináns egyensúlyra vonatkozó alakját.[24]

2.B.6. Tétel (Revelációs elv I.). *Tekintsünk a* $\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D},\ f\}$ KDP-*t! Ha a hozzá tartozó* $f : \Theta \rightrightarrows X$ TVSz-*t a*

$$\gamma \triangleq \{S_1, \ldots, S_I; g; \Theta\}$$

mechanizmus domináns egyensúlyban implementálja, akkor létezik olyan

$$\eta \triangleq \{\Theta_1, \ldots, \Theta_I; h; \Theta\}$$

direkt mechanizmus, amely domináns egyensúlyban igazsághűen implementálja.

[24] Legjobb tudomásom szerint először *Gibbard* [1973] tartalmazza, bár e hivatkozásban a szakirodalom nem egységes.

Bizonyítás: Miután a γ mechanizmus domináns egyensúlyban implementálja az f $TVSz$-t, ezért $\forall\theta \in \Theta$ világállapothoz létezik legalább egy $s^*(\theta) \in DE(S, g, \theta)$ stratégiaegyüttes, amihez definíció szerint $g(s^*(\theta)) \in g(DE(S, g, \theta))$ egyensúlyi kimenet tartozik. Definiáljuk az η direkt mechanizmust most úgy, hogy a mechanizmusbeli h kimeneti függvény

$$\forall\theta \in \Theta$$

világállapotbeli stratégiaegyütteshez a

$$h(\theta_{-0}) \triangleq g(s^*(\theta)) \in g(DE(S, g, \theta)) = f(\theta) \tag{2.B–1}$$

alternatívát rendelje. De γ domináns implementáló mechanizmus lévén, igaz az is, hogy

$$\forall i\text{-re}, \quad \forall\theta_i' \in \Theta_i\text{-re}, \quad \textit{és} \quad \forall\theta_{-i}' \in \Theta_{-i}\text{-re}$$

$$g\left(s_i^*(\theta), s_{-i}^*\left(\theta'\right)\right) R_i(X, \theta_i)\, g\left(s_i^*\left(\theta'\right), s_{-i}^*\left(\theta_{-i}'\right)\right),$$

így

$$h\left(\theta_i, \theta_{-i}'\right) R_i(X, \theta_i)\, h\left(\theta_i', \theta_{-i}'\right)$$

azaz

$$\theta_{-0} \in DE(\Theta_{-0}, h, \theta). \tag{2.B–2}$$

A (2.B–2) és (2.B–1) tartalmazások pedig pont az igazsághű domináns implementáció két követelményét adják. $\square$

2.B.2. Implementáció Nash-egyensúlyban

A domináns egyensúlyi implementációnak – minden jó tulajdonsága mellett – van egy komoly problémája: a valóságban igen ritka. Tudjuk, egy tetszőleges játékban, amely nem feltétlenül egy közösségi döntési problémához tartozó mechanizmus része, a legritkább esetben létezik domináns egyensúly. Annak, hogy a játékelméleti irodalomban viszonylag gyakran találkozhatunk olyan példajátékkal, amelyben létezik domináns egyensúly, az az oka, hogy az ilyen játékok a legkönnyebben elemezhetők. Ezek miatt igazán nem várhatjuk el, hogy a közösségi döntési problémák nagy részében reményünk legyen a domináns implementációra, annak ellenére, hogy információs szempontból messze ez a legrealisztikusabb implementációs koncepció. Nézzük meg tehát, miként léphetünk tovább.

A játékelméletben természetesen adódna a lépés, enyhítsük egyensúlyfogalmunkat a *Nash-egyensúly*ra. Egy közösségi problémában igen nehéz azonban interpretálnunk ezt a fogalmat. A *Nash*-egyensúlyban, ahol mindenki a legjobb választ adja a többiek megjátszott stratégiáira, azt kell feltételeznünk ugyanis, hogy minden döntéshozó a teljes aktuális világállapotot ismeri, azaz nemcsak a saját magára vonatkozó komponenst, hanem az összeset. A *Nash*-egyensúly fogalma ugyanis teljes információs koncepció. Ez most konkrétan azt jelenti, hogy mindenki tisztában van a többiek preferenciáival is, ami enyhén szólva erős feltételezés. Később erről sokkal bővebben lesz még szó, ezért halasszuk el most a vitát, és tételezzük fel tehát, hogy a világállapot minden játékos előtt ismert. Annyit azonban meg kell jegyeznünk, hogy ez nem vonatkozik arra a külső szereplőre, akinek feladata a társadalmi választási függvény megadása, fenti példánkban tehát arra, aki a klub alapszabályát megfogalmazni köteles. Az előző alpontban használt gondolatmenetet ismételjük meg, először definiáljuk a *Nash-implementáció*t, majd megnézzük a revelációs elvnek erre az egyensúlyfogalomra vonatkozó alakját.

2.B.7. Definíció. *Egy*

$$\gamma = \{S_1, \ldots, S_I; g; \Theta\}$$

mechanizmushoz és egy $\theta = (\theta_0, \theta_1 \ldots, \theta_I) \in \Theta$ *világállapothoz tartozó*

$$\{S_1, \ldots, S_I; g; \theta\}$$

játékban egy $s^* \in S$ stratégiája Nash-egyensúlyi, *ha* $\forall i$*-re és* $\forall s_i \in S_i$*-re*

$$g\left(s^*\right) R_i\left(X, \theta_i\right) g\left(s_i, s_{-i}^*\right).$$

A Nash-egyensúlyi *stratégiaegyüttesek halmazát pedig jelöljük az* $NE\left(S, g, \theta\right)$ *szimbólummal.*

Most következne a revelációs elv *Nash*-egyensúlyra vonatkozó változatlan alakja, amikor nem csinálnánk mást, mint a 2.B.6. Tételben a megfelelő szimbólumokban a domináns voltra utaló jeleket kicserélnénk a *Nash*-tulajdonságra utalókkal. Ennek azonban semmi hozadéka nem lenne a későbbiekben, ahogy azt a következő egyszerű tételből is láthatjuk.

2.B.8. Tétel. *Tekintsünk egy* $\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f\}$ KDP*-t! A hozzá tartozó* $f : \Theta \rightrightarrows X$ TVSz*-t a* $\eta \triangleq \{\Theta_1, \ldots, \Theta_I; h; \Theta\}$ *direkt mechanizmus akkor és csak akkor implementálja igazsághűen* Nash*-egyensúlyban, ha domináns egyensúlyban is igazsághűen implementálja.*

Bizonyítás: Az elégségesség triviálisan igaz, hiszen a domináns mechanizmus definíció szerint *Nash*-egyensúly is egyben. A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy az η mechanizmusban az igazmondás minden $\theta \in \Theta$ világállapotban *Nash*-egyensúly, azaz θ_i mindenki számára *Nash*-egyensúlyi stratégia:

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall \theta_i' \in \Theta_i$$

esetén

$$h\left(\theta_{-0}\right) R_i\left(X, \theta_i\right) h\left(\theta_i', \theta_{-i}\right).$$

Miután ez minden játékosra igaz, a 2.B.4. Megjegyzés alapján az igazság, azaz a θ_i világállapot-komponens mindenki számára domináns stratégia, hiszen ha figyelembe vesszük, hogy az előző reláció minden világállapotra igaz volt, akkor felírható egy kicsit kibontva is

$$\forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}, \quad \forall \theta_i' \in \Theta_i$$

$$h(\theta_i, \theta_{-i})\, R_i(X, \theta_i)\, h\left(\theta_i', \theta_{-i}\right).$$

Ez utóbbiból pedig azonnal adódik az igazsághű domináns implementáció két követelménye, hiszen $h(\theta_{-0}) \in f(\theta)$ tartalmazás az η mechanizmus feltételezett *Nash*-implementáló tulajdonságából következik. □

2.B.9. Megjegyzés. *A 2.B.8. Tétel állítása meglehetősen zavaró, mert az következik belőle, hogy hiába enyhítjük az egyensúlyfogalmunkat, az igazsághű implementálás* Nash-*egyensúlyban pont olyan ritka, mint domináns egyensúlyban. Másképpen: úgy tűnik, hiába rendelkeznek – feltevés szerint – a döntéshozók sokkal több információval, éppen úgy nem tudjuk biztosítani a kedvező kimenetet egy revelációs mechanizmussal, mint információhiány esetén. Ez az utóbbi megállapítás azonban nem igaz, hibás gondolkodáson alapul. Ugyanis nem számol azzal, hogy lehet olyan mechanizmust szerkeszteni, amely noha nem direkt és így az igazsághű implementálás definíciója közvetlenül nem alkalmazható, mégis egyszerű szerkezetű és rendelkezik a direkt mechanizmusok szinte minden jó tulajdonságával.*

Mint már említettük, a *Nash*-egyensúly fogalma feltételezi, hogy teljes információs játékot játszunk, azaz a játékosok minden világállapotban a teljes világállapotot és így a teljes preferenciaprofilt ismerik. Ebből következik, hogy ha olyan revelációs mechanizmust alkalmazunk, amelyben mindenki stratégiahalmaza az egész Θ világállapothalmaz és egy lehetséges stratégiája egy világállapot bemondása, akkor felhasználhatjuk a rendelkezésükre álló információt. Természetesen ebben a játékban a játékosok akkor mondanak igazat, akkor fedik fel ténylegesen a rendelkezésükre álló „privát” információt, ha a megvalósult és általuk tökéletesen észlelt világállapotot jelentik be.

Az ilyen játékban nyilván az „igazsághű implementáció” csak annyit jelent, hogy ha mindenki a valós világállapotot jelenti be, az a játékban *Nash*-egyensúlyi stratégiaegyüttes, és a hozzárendelt kép benne van a társadalmi választási halmazban.

Szerencsére, mint azt a következő tételben belátjuk, ha egy *TVSz* egyáltalán implementálható *Nash*-egyensúlyban, akkor létezik ilyen revelációsnak tekinthető mechanizmus is, ami az elmondott értelemben véve „igazsághűen" implementálja. Ennek gyakorlati jelentősége éppen olyan nagy, mint a revelációs elv domináns egyensúlyra vonatkozó alakjának, mert azt implikálja, hogy az indirekt mechanizmusok között sem kell végtelen sokat kipróbálnunk, elég csak egy „kanonikus alakot" vizsgálnunk.

2.B.10. Tétel (Revelációs elv II.). *Tekintsünk egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D},\ f\}$$

KDP-*t! Ha a hozzá tartozó* $f : \Theta \rightrightarrows X$ TVSz-*t a*

$$\gamma \triangleq \{S_1, \ldots, S_I; g; \Theta\}$$

mechanizmus Nash-*egyensúlyban implementálja, akkor létezik olyan*

$$\eta \triangleq \left\{\Theta_{-0}^I \triangleq \Theta_{-0} \times \ldots \times \Theta_{-0}; h; \Theta\right\}$$

mechanizmus, amelyben $\forall\theta \in \Theta$*-ra*

(i) $(\theta_{-0}, \theta_{-0}, \ldots, \theta_{-0}) \in NE\left(\Theta_{-0}^I, h, \theta\right) \subseteq \Theta^I$;

(ii) $h\left(\theta_{-0}, \theta_{-0}, \ldots, \theta_{-0}\right) \in f\left(\theta\right)$.

Bizonyítás: Miután a γ mechanizmus *Nash*-egyensúlyban implementálja f-et, ezért $\forall\theta \in \Theta$ világállapothoz tartozik legalább egy

$$s^*\left(\theta\right) \triangleq \left(s_1^*\left(\theta\right), s_2^*\left(\theta\right), \ldots, s_I^*\left(\theta\right)\right) \in NE\left(S, g, \theta\right)$$

egyensúlyi stratégiaegyüttes. Definiáljuk az η mechanizmust ezek segítségével a következő módon. Jelöljük a $\theta^{(i)}$ szimbólummal az

i-edik játékos által megjátszott stratégiát, és legyen

$$\begin{aligned} & h\left(\theta_{-0}^{(1)}, \theta_{-0}^{(2)}, \ldots, \theta_{-0}^{(I)}\right) \triangleq \\ \triangleq \quad & g\left(s_1^*\left(\theta_0, \theta_{-0}^{(1)}\right), s_2^*\left(\theta_0, \theta_{-0}^{(2)}\right), \ldots, s_I^*\left(\theta_0, \theta_{-0}^{(I)}\right)\right). \end{aligned}$$

Azonnal látszik, hogy $\forall\theta \in \Theta$ esetén θ_{-0} a legjobb válasz mindegyik játékos számára, ha a többiek is ezt játsszák, mert az ettől való egyoldalú eltérés nem eredményezhet számára határozottan jobb kimenetet. Ugyanis $\forall\theta' \in \Theta^{(i)}$-re

$$g\left(s^*\left(\theta\right)\right) R_i(X, \theta_i) g\left(s_1^*\left(\theta\right), s_2^*\left(\theta\right), \ldots, s_i^*\left(\theta'\right), \ldots, s_I^*\left(\theta\right)\right),$$

hiszen γ *Nash*-implementálta f-et. Ugyanakkor a második követelmény teljesülése is nyilvánvaló, mert

$$\begin{aligned} h\left(\theta_{-0}, \theta_{-0}, \ldots, \theta_{-0}\right) \quad & \triangleq \quad g\left(s_1^*\left(\theta\right), s_2^*\left(\theta\right), \ldots, s_I^*\left(\theta\right)\right) = \\ g\left(s^*\left(\theta\right)\right) \quad & \in \quad g\left(NE\left(S, g, \theta\right)\right) = f\left(\theta\right). \end{aligned}$$

□

Végül vizsgáljuk meg, miként jellemezhetnénk az implementálható társadalmi választási szabályokat! Vajon létezik-e az implementálhatóságnak olyan általános szükséges feltétele, amelyet könnyű ellenőrizni? Ha ugyanis a *TVSz* nem teljesíti az esetlegesen létező ilyen feltételt, akkor nem kellene belebonyolódnunk *Nash*-implementáló mechanizmusok keresgélésébe. Szerencsére, mint azt *Maskin* [1977] először megmutatta, ilyen feltétel létezik, és nem más, mint a már ismert monotonitás.[25]

2.B.11. Tétel. *Ha egy* $\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D},\ f\}$ KDP-*hoz tartozó* $f : \Theta \rightrightarrows X$ TVSz-*t egy* $\gamma \triangleq \{S_1, \ldots, S_I; g; \Theta\}$ *mechanizmus* Nash-*egyensúlyban implementálja, akkor* f *monoton.*

[25] Lásd az 1.B.32. Definíciót!

BIZONYÍTÁS: Először egy kis észrevételt teszünk, amit a későbbiekben felhasználunk majd. Egy $\{S, g, \theta\}$ játékban $s \in NE(S, g, \theta)$ akkor és csak akkor, ha $\forall i$-re

$$g(s\,|S_i) \triangleq \cup_{s_i \in S_i} g(s\,|s_i) \subseteq L(g(s), R_i(X, \theta_i)). \qquad (2.\text{B–}3)$$

Most tegyük fel, hogy adott két, $\theta, \theta' \in \Theta$ világállapot és $x \in f(\theta)$ alternatíva, amelyekre

$$L(x, R_i(X, \theta_i)) \subseteq L\left(x, R_i'\left(X, \theta_i'\right)\right) \qquad \forall i\text{-re}.$$

Legyen most $s \in NE(S, g, \theta)$ olyan, amire $g(s) = x$. Ekkor az előző észrevételünkkel $\forall i$-re

$$g(s\,|S_i) \subseteq L(x, R_i(X, \theta_i)) \subseteq L\left(x, R_i'\left(X, \theta_i'\right)\right),$$

amiből kapjuk, hogy

$$s \in NE\left(S, g, \theta'\right),$$

tehát

$$x = g(s) \in f\left(\theta'\right),$$

mivel a γ mechanizmus *Nash*-implementálta az f társadalmi választási függvényt. □

2.B.12. Megjegyzés. *Két dolgot érdemes észrevennünk. Az első: semmit nem tettünk fel a Θ halmazzal és a $\mathcal{D}$ leképezéssel kapcsolatban, azaz a tétel állítása minden értelmezési tartományon érvényes. A másik: miután a monotonitás tisztán a preferenciák ordinális voltához kötődik, ezért a* Nash-*implementálhatóság szükséges feltétele alapvetően ordinális jellegű kívánalom.*

2.B.3. Implementáció *Bayes*-egyensúlyban

Az előző pontokban azokat az eseteket vizsgáltuk, amikor egy *KDP*-ban a döntéshozók a többiekre vonatkozó világállapot-komponenseket vagy egyáltalán nem voltak képesek megfigyelni, vagy tökéletesen ismerték azokat. Most azt tételezzük fel, hogy – noha megfigyelni továbbra sem tudják őket – valamilyen elképzelésük mégis van róluk. Ezeket az elképzeléseket minden játékos egy – a megfigyelt saját világállapot-komponensétől függő – π_i valószínűségeloszlásban foglalja össze, és ennek alapján választja ki a megjátszandó stratégiáját, azt, amelyik a várható hasznát maximalizálja, feltéve, hogy a többiek nem változtatják meg stratégiájukat. A várható haszon kifejezés egyben rávilágít arra, hogy a játékosoknak nem egyszerűen a világállapot által meghatározott preferenciarendezése, hanem az alternatívahalmazon értelmezett, a preferenciákat reprezentáló u_i hasznossági függvénye is van. Egyensúlyba akkor kerülünk, ha ezek a választott egyéni stratégiák kompatibilisek abban az értelemben, hogy mindenki a legjobb választ adja a többiek megjátszott stratégiájára. Ez nyilván *Nash* típusú viselkedés, de nem teljes információs játékban. Az ilyen egyensúlyt *bayesi Nash*-egyensúlynak vagy csak egyszerűen *Bayes*-egyensúlynak hívjuk. Próbáljuk az elmondottakat formalizálni! Ehhez először a közösségi döntési probléma szerkezetét változtatjuk meg.

2.B.13. Definíció. *A* bayesi közösségi döntési probléma (BKDP) modell*je a következő lista:*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \Pi, \mathcal{D}_u, f_u\},$$

ahol

- $\mathcal{I} = (1, 2, \ldots, i, \ldots I)$ a döntéshozók egy véges halmaza, ahol $2 \leqq I < \infty$;
- X az alternatívák halmaza, $|X| \geqq 2$;
- $\Theta = (\Theta_1 \times \Theta_2 \times \ldots \times \Theta_I)$ halmaz a lehetséges világállapotok halmaza;[26]

[26] Ebben a pontban a probléma, de főleg a jelölések egyszerűsítése érdekében kicsit engedünk az általánosságból, és feltesszük, hogy $\Theta_0 = \emptyset$, azaz nincs közös világállapot-komponens.

- $\Pi(\Theta)$ a döntéshozók világállapotra vonatkozó lehetséges *sejtése*inek *(valószínűségeloszlásainak)* halmaza, amelynek egy eleme
$$\pi : \Theta \to \times_{i=1}^{I} \Pi(\Theta_{-i}),$$
ahol $\Pi(\Theta_{-i})$ a Θ_{-i} halmazon értelmezett π_{-i} valószínűségeloszlások halmaza. Más jelöléssel:
$$\pi(\theta) \triangleq (\pi_1(\cdot\,|\theta_1), \pi_2(\cdot\,|\theta_2), \ldots, \pi_I(\cdot\,|\theta_I)), \quad \forall\theta \in \Theta,$$
ahol
$$\pi_i(\cdot\,|\theta_i) : \Theta_i \to \Pi(\Theta_{-i});$$

- $\mathcal{D}_u(\Theta)$ a világállapotok által indukált hasznossági profilok halmaza:
$$\mathcal{D}_u : \Theta \to \times_{i=1}^{I} \mathcal{U}(X),$$
ahol $\mathcal{U}(X)$ az összes, az X halmazon értelmezett *Bernoulli (Neumann–Morgenstern)* hasznossági függvény. Más jelöléssel :
$$\mathcal{D}_u(\theta) \in \mathcal{D}_u(\Theta) \subset \times_{i=1}^{I} \mathcal{U}(X),$$
ahol[27]
$$\begin{aligned} \mathcal{D}_u(\theta) &\triangleq U(\cdot,\theta) \triangleq (u_1(\cdot,\theta_1), u_2(\cdot,\theta_2), \ldots, u_I(\cdot,\theta_I)) \\ u_i(\cdot,\theta_i) &\in \mathcal{U}(X) \quad \forall i \in \mathcal{I} - re\ és\ \forall\theta_i \in \Theta_i\text{-re}; \end{aligned}$$

- f a társadalmi választási szabály *(TVSz)*,
$$f_u \triangleq \phi_u \circ \mathcal{D}_u : \Theta \rightrightarrows X, \quad f_u(\theta) \triangleq \phi_u(U(\cdot,\theta)) \subseteq X \quad \forall\theta \in \Theta\text{-ra}.$$

Tekintsük most a fenti problémához rendelt
$$\gamma = \{S_1, \ldots, S_I; g; \Theta\}$$

[27] Vegyük észre, itt a hasznossági függvényeket csak a megfelelő világállapot--komponenstől tesszük függővé.

mechanizmust. Ez a mechanizmus, a Θ világállapot-halmazzal, egy konkrét $\pi(\cdot)$ valószínűségeloszlással és $\mathcal{D}_u(\cdot)$ halmazzal egy úgynevezett nem teljes információs *bayesi* játékot definiál. Ebben nyilván az i-edik játékos által megjátszott stratégia attól függ, milyen világállapotban vagyunk. De miután ő csak a saját magára vonatkozó θ_i komponenst tudja megfigyelni, és a többiekre csak sejtései vannak $(\pi_i(\cdot|\theta_i))$, ezért stratégiája végső soron csak θ_i függvénye: $s_i(\theta_i)$. Jelöljük az $E_{\theta_{-i}}(u_i(g(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i)|\theta_i)$ szimbólummal az i-edik játékos várható hasznát, ha a θ_i világállapot-komponenst figyeli meg. Ahhoz persze, hogy ezt a várható hasznot ki tudja számítani, ismernie kellene az $s_{-i}(\theta_{-i})$ stratégiákat is. Ehhez az kell, hogy ismerje egyrészt a teljes $\pi(\Theta)$ valószínűségeloszlást (*prior*t), másrészt az $u_{-i}(\cdot|\cdot)$ hasznossági függvényeket, harmadrészt az S_{-i} stratégiahalmazokat, tehát gyakorlatilag mindent, csak az aktuális világállapotot nem.

Ezek után definiálhatjuk ebben a játékban a *bayesi egyensúly* fogalmát.

2.B.14. Definíció (*Bayesi* egyensúly). *Az*

$$(S_1, \ldots, S_I; g; \Theta; \pi(\cdot); \mathcal{D}_u(\cdot))$$

listával definiált bayesi *játékban az*

$$s^*(\cdot) \triangleq (s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \ldots, s_I^*(\cdot)), \quad s_i(\cdot) : \Theta_i \to S_i \quad \forall i\text{-re}$$

együttes Bayes-egyensúlyi, *ha* $\forall i$*-re,* $\forall \theta_i \in \Theta_i$*-re,* $\forall s_i' \in S_i$*-re*

$$E_{\theta_{-i}}\left(u_i\left(g\left(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i})\right), \theta_i\right)|\theta_i\right) \geqq$$
$$E_{\theta_{-i}}\left(u_i\left(g\left(s_i', s_{-i}^*(\theta_{-i})\right), \theta_i\right)|\theta_i\right)$$

A Bayes-*egyensúlyi együttesekhez tartozó stratégiaegyüttesek halmazát a*

$$BE(S, g, \Theta, \pi, \mathcal{D}_u(\cdot))$$

szimbólummal jelöljük.

2.B.15. Megjegyzés. *A fenti defininícióból látszik, hogy az* $s_i(\cdot)$ *leképezések nem lehetnek akármilyenek. Minden* $s_i(\cdot) : \Theta_i \to S_i$ *nem más, mint egy döntési szabály, ami egyrészt az adott* θ_i *világállapot-komponenshez rendel megjátszandó konkrét stratégiát, másrészt olyan leképezés, hogy a definícióban szereplő várható értékeknek létezniük kell.*

Az implementálhatóság fogalmát érdemes egy kicsit módosítanunk ebben a modellben. Nem érdemes arra törekednünk, mint arra majd a következő triviális kis tétel rá is mutat, hogy egy mechanizmus minden π prior és $\mathcal{D}_u(\cdot)$ hasznossági függvénycsalád mellett implementálja a *BKDP*-hoz tartozó társadalmi választási szabályt, hanem többnyire az is elég, ha egy π mellett implementálja a következő definíció szerint:

2.B.16. Definíció (*Bayesi* implementáció). *A*

$$\gamma = (S_1, \ldots, S_I; g; \Theta)$$

mechanizmus egy adott π *prior mellett* Bayes-*implementálja a* BKDP-*hoz tartozó* f_u TVSz-*t, ha*

(i) $BE\,(S, g, \Theta, \pi, \mathcal{D}_u(\cdot)) \neq \varnothing$;

(ii) $g\,(BE\,(S, g, \Theta, \pi, \mathcal{D}_u(\cdot))) = f_u\,(\theta) \quad \forall\theta \in \Theta$-ra.

2.B.17. Definíció (Igazsághű *bayesi* impl.). *Az*

$$\eta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_I; h; \Theta)$$

direkt mechanizmus egy adott π *mellett igazsághűen* Bayes-*implementálja a* BKDP-*hoz tartozó* f_u TVSz-*t, ha az*

$$s_i^*\,(\theta_i) = \theta_i, \quad \forall i\text{-re, } \forall\theta_i \in \Theta_i\text{-re}$$

szabály esetén

(i) $\theta \in BE\left(\Theta, h, \Theta, \pi, \mathcal{D}_u(\cdot)\right);$

(ii) $h(\theta) \in f_u(\theta) \quad \forall\theta \in \Theta$-ra.

A következő tételben a domináns igazsághű implemenetálhatóság fogalma értelemszerű, csak abban tér el az eddig adottól, hogy az értékelés nem preferenciákkal, hanem hasznossági függvényekkel történik.

2.B.18. Tétel. *Tekintsük az*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \Pi, \mathcal{D}_u, f_u\}$$

bayesi közösségi döntési problémát*! Az f_u társadalmi választási függvény akkor és csak akkor* Bayes-*implementálható igazsághűen $\forall\pi \in \Pi$ mellett, ha igazsághűen implementálható domináns stratégiákban.*

Bizonyítás: Az elégségesség triviális.
A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy f_u nem implementálható igazsághűen domináns stratégiákban. Ekkor létezik olyan $i \in \mathcal{I}$ és $\bar{\theta} \in \Theta$, hogy az adott $\bar{\theta}_{-i} \in \Theta_{-i}$ mellett $\bar{\theta}_i$ nem *Nash*-egyensúlyi stratégia.[28] Válasszuk ekkor $\pi \in \Pi$-t oly módon, hogy $\pi_i\left(\bar{\theta}_{-i} \middle| \bar{\theta}_i\right) = 1$. Ekkor e mellett a π prior mellett az igazság nem *Bayes*-egyensúly. □

A fenti tétel csak akkor jelentene igazán komoly problémát a *bayesi* implementálásra vonatkozóan, ha ebből az következne, hogy egy prior mellett sem lehetne *bayesi* értelemben implementálni egy *TVSz-t*, ha nem implementálható igazsághűen domináns egyensúlyban. Ez azonban nincs így, létezhetnek olyan priorok, amely mellett f_u *bayes*-implementálható annak ellenére, hogy nem implementálható domináns stratégiákban. Ezek a priorok azonban nagy mértékben függnek a $\mathcal{D}_u$ hasznossági függvénycsaládtól,

[28] Vö. a 2.B.4. Megjegyzéssel.

és emiatt az implementáló γ mechanizmus rendkívüli módon függ mindkettőtől. Másképpen fogalmazva: különböző $(\pi, \mathcal{D}_u(\cdot))$ párokhoz más és más implementáló mechanizmus tartozhat. Szerencsére azonban itt is érvényes a revelációs elv megfelelő alakja, ezért elég, ha figyelmünket a direkt mechanizmusokra koncentráljuk.

2.B.19. Tétel (Revelációs elv III.). *Tekintsük az*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \Pi, \mathcal{D}_u, f_u\}$$

bayesi közösségi döntési problémát*! Ha a hozzá tartozó* f_u TVSz-*t az adott* π *prior mellett a* $\gamma = (S_1, \ldots, S_I; g; \Theta)$ *mechanizmus* Bayes-*implementálja, akkor létezik olyan* $\eta = (\Theta, h, \Theta)$ *direkt mechanizmus, amelyik igazsághűen implementálja* bayesi *stratégiákban.*

Bizonyítás: Definiáljuk a következő direkt mechanizmust:

$$\eta = (\Theta, h, \Theta), \quad h(\theta) \triangleq g(s^*(\theta)), \quad \forall \theta \in \Theta\text{-ra},$$

ahol s^* a γ mechanizmushoz tartozó *Bayes*-egyensúlyi együttes. Ebből tudjuk, hogy $\forall i$-re, $\forall \theta_i \in \Theta_i$-re és $\forall \theta_i' \in \Theta_i$-re

$$\begin{aligned} & E_{\theta_{-i}}\left(u_i\left(g\left(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i})\right), \theta_i\right) | \theta_i\right) \geqq \\ \geqq\ & E_{\theta_{-i}}\left(u_i\left(g\left(s_i^*\left(\theta'\right), s_{-i}^*(\theta_{-i})\right), \theta_i\right) | \theta_i\right). \end{aligned}$$

Ebből a h kimeneti függvény definíciójával kapjuk, hogy $\forall i$-re, $\forall \theta_i \in \Theta_i$-re és $\forall \theta_i' \in \Theta_i$-re

$$E_{\theta_{-i}}\left(u_i\left(h\left(\theta_i, \theta_{-i}\right), \theta_i\right) | \theta_i\right) \geqq E_{\theta_{-i}}\left(u_i\left(h\left(\theta', \theta_{-i}\right), \theta_i\right) | \theta_i\right).$$

Ez pedig pont azt jelenti, hogy $\forall \theta \in \Theta$-ra egyrészt

$$\theta \in BE\left(\Theta, h, \Theta, \pi, \mathcal{D}_u\right),$$

másrészt – mivel $h(\theta) = g(s^*(\theta))$, ezért $\theta \in f_u(\theta)$. □

2.B.20. Megjegyzés. *Vegyük észre, a tétel állításából egyáltalán nem következik az, hogy a h mechanizmus implementálná a társadalmi választási függvényt. Nagyon könnyen elképzelhető, hogy a $BE(\Theta, h, \Theta, \pi, \mathcal{D}_u)$ halmaznak léteznek olyan θ^* elemei, amelyekre $h(\theta^*) \notin h(BE(\Theta, h, \Theta, \pi, \mathcal{D}_u))$.*

Végezetül foglaljuk össze, mi szól a *bayesi* implementációs fogalom mellett, illetve ellene. A mellette szóló legfontosabb érv az, hogy szemben a *Nash*-egyensúly fogalommal, nem követeli meg, hogy minden döntéshozó ismerje a teljes világállapotot. Emellett, mivel csak annyit követel, hogy minden játékos esetén egy adott θ_i világállapot-komponens mellett az átlagos várható haszon legyen maximális, ezért nem annyira valószínűtlen a megvalósíthatósága, mint a domináns egyensúlyé. Harmadszor, a revelációs elv alapján itt is elég direkt mechanizmusokat vizsgálnunk. Szinte minden „pro” érv mellé felsorakoztatható egy „kontra” is. Igaz, a világállapotot nem kell ismernünk, de az adott priort igen. Ez majdnem ugyanolyan erős követelmény. Másrészt, ahogy arra már utaltunk is, a *bayesi* implementáció rendkívül érzékeny a $(\pi, \mathcal{D}_u)$ párokra, ami például minden prior mellett új mechanizmus megkeresését teheti szükségessé. A revelációs elv használata pedig csak az igazsághű implementációt biztosítja, ami nem biztos, hogy kielégítő.

2.C. Társadalmi választási függvények implementálása

Ebben a pontban először a szavazási modellre vonatkozó feltevésünket oldjuk fel, megengedjük, hogy az alternatíva halmaz számossága végtelen legyen, és belátjuk a *Gibbard–Satterthwaite*-tétel lehető legáltalánosabb alakját. Tudjuk, a szavazási modell egy speciális szekezetű közösségi döntési probléma. Az általános modellben is értelemszerűen definiálható a csalásbiztosság fogalma a TVF-re vonatkozóan. Ezt használjuk ki a következőkben.

Jelölje a $\theta|\theta'_i$ szimbólum a következő világállapotot:

$$\theta|\theta'_i \triangleq \left(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta'_i, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_I\right),$$

hasonlóan

$$\theta|\theta'_i, \theta'_j \triangleq \left(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta'_i, \ldots, \theta'_j, \ldots, \theta_I\right),$$

és így tovább.

2.C.1. Definíció (Manipulálhatóság). *Egy* $f_f : \Theta \to X$ TVF *az* $\theta \in \Theta$ *világ-állapotban az i-edik döntéshozó által* manipulálható, *ha létezik olyan* $\theta'_i \in \Theta_i$ *világállapot-komponens, hogy*

$$f_f\left(\theta|\theta'_i\right) P_i f_f(\theta).$$

2.C.2. Definíció (Csalásbiztosság). *Egy* $f_f : \Theta \to X$ TVF csalásbiztos, *ha egy világállapotban sem manipulálható.*

2.C.3. Következmény (Gibbard–Satterthwaite-tétel). *Ha egy, az* (U) *feltételt kielégítő* KDP-*ben* $|X'| \geqq 3$, *valamint az* f_f TVF *domináns egyensúlyban implementálható, akkor diktatórikus is.*

Bizonyítás: Először annyit bizonyítunk, hogy a *TVF* csalásbiztossága elegendő arra, hogy minden olyan két egymástól különböző világállapotban, amelyekre a szigorú preferenciaprofilok egybeesnek a *TVF* képhalmazán, a társadalmi választás is ugyanaz legyen. Formálisan: $\theta, \theta' \in \Theta$ és

$$P(X|X', \theta) = P'(X|X', \theta') \tag{2.C–1}$$

esetén

$$f_f(\theta) = f_f(\theta').$$

Ekkor ugyanis könnyen belátható az 1.C.11. Következmény és az 1.B.25. Segédtétel alapján, hogy X' véges. Erre a képhalmazra közvetlenül alkalmazható a szavazási modellekre vonatkozó *Gibbard–Satterthwaite*-tétel.

Legyen tehát $x = f_f(\theta)$. Tekintsük most az $f_f(\theta|\theta_1')$ alternatívát, és az általánosság megsértése nélkül tételezzük fel, hogy

$$f_f(\theta)P_1(X, \theta_1)f_f(\theta|\theta_1').$$

De a feltételünk értelmében ebből az is következik, hogy

$$f_f(\theta)P_1(X, \left(\theta|\theta_1'\right)_1)f_f(\theta|\theta_1'),$$

ami az 1.C.8. Segédtétel értelmében ellentmond a csalásbiztosságnak. Hasonlóan járhatunk el az ellenkező irányú preferencia esetén is, azaz

$$f_f(\theta) = f_f(\theta|\theta_1').$$

Mivel a *KDP*-ben is véges a döntéshozók száma, ezért az eljárást most a második, majd a harmadik stb. döntéshozóra megismételve kapjuk a választott alternatívák egyezőségét.

Most már csak a csalásbiztosságot kell belátnunk. Feltettük, az f_f társadalmi választási függvény domináns egyensúlyban implementálható. Ebből a revelációs elvvel[29] kapjuk, hogy domináns stratégiákban igazsághűen is implementálható. Miután f_f társadalmi választási függvény, tehát képe minden világállapotban egyelemű, ez a csalásbiztossággal ekvivalens. $\square$

Az eddigiek alapján nyilvánvaló, az implementálhatóságot igen nagy mértékben korlátozza az univerzális értelmezési tartomány feltevése. Eddig úgy érveltünk, szavazási szituációk esetén, amikor az alternatívahalmaz számossága véges, nincs igazi okunk arra, hogy akárcsak egy preferenciaprofilt kizárjunk a lehetőségek közül. Ez az érvelés sokkal kevésbé meggyőző végtelen számosságú alternatívahalmaz esetén. Nem beszélve arról, hogy a később tárgyalandó gazdasági modelleinkben – egyéb okokból – nem is alkalmazhatjuk az univerzális értelmezési tartomány feltevését. Ezért

[29] Lásd a 2.B.6. Tételt.

ebben a pontban ezt feloldjuk, és megengedünk e tulajdonsággal nem bíró Θ világállapot-halmazt és ehhez tartozó $\mathcal{D}$ leképezést is. Megtartjuk azonban a $TVSz$ egyértelműségére alkalmazott feltevésünket, azaz továbbra is társadalmi választási függvényeket vizsgálunk. Ez annál is inkább érthető, mert a valóságos alkalmazásokban is többnyire a TVF az általánosan elfogadott.

Először megismerkedünk három új fogalommal, amelyek közül az első két alternatíva megítélésével, második a Θ világállapot-halmazzal, a harmadik az f_f társadalmi választási függvénnyel kapcsolatos.

2.C.4. Definíció. *Ha két x és y alternatívára igaz, hogy*

$$xR_i\left(X,\theta_i\right)y \quad \textit{és} \quad yR_i\left(X,\xi_i\right)x,$$

valamint a két reláció küzül legalább az egyik szigorú, akkor azt mondjuk, hogy az i-edik döntéshozó megítélésében az y alternatíva feljavul *az x alternatívához képest, ahogy a világállapot-komponens θ_i-ről ξ_i-re változik.*

2.C.5. Definíció („Gazdag" világállapot-halmaz). *Egy*

$$\{\mathcal{I},X,\Theta,\mathcal{D},f_f\}$$

közösségi döntési problémában a Θ világállapot-halmaz „gazdag” *akkor és csak akkor, ha igaz rá a következő:*

$$\forall\left\{\theta,\xi\right\}\subseteq\Theta \quad \textit{és} \quad \forall\left\{x,y\right\}\subset X$$

esetén, ha egy döntéshozó megítélésében sem javul fel az y alternatíva az x alternatívához képest, ahogy a világállapot θ-ról ξ-re változik, akkor létezik olyan $\exists\zeta\in\Theta$, amire $\forall i\in\mathcal{I}$-re

$$L_i\left(x,R_i\left(X,\theta_i\right)\right)\subseteq L_i\left(x,R_i\left(X,\zeta_i\right)\right)$$

és

$$L_i\left(y,R_i\left(X,\xi_i\right)\right)\subseteq L_i\left(y,R_i\left(X,\zeta_i\right)\right).$$

2.C.6. Megjegyzés. *Vegyük észre, az* (U) *és* (U') *feltételt kielégítő közösségi döntési problémákban a gazdag* Θ *világállapot-halmaz feltétele triviálisan fennáll.*

2.C.7. Definíció (Egyénenkénti monotonitás). *Egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_f\}$$

közösségi döntési problémában az f_f *társadalmi választási függvény akkor és csak akkor elégíti ki az* egyénenkénti monotonitás *feltételét, ha*

$$\forall i \in \mathcal{I}, \quad \forall \theta \in \Theta, \quad \forall \xi_i \in \Theta_i$$

esetén az

$$f_f(\theta_0, \xi_i, \theta_{-i}) \in L_i(f_f(\theta), R_i(X, \theta_i))$$

és

$$f_f(\theta) \in L_i(f_f(\theta_0, \xi_i, \theta_{-i}), R_i(X, \xi_i)).$$

A következő két segédtétel a közönséges és egyenkénti monotonitás közötti kapcsolatot vizsgálja. Ezekre támaszkodva jellemezzük a későbbiekben a domináns, illetve *Nash*-implementálható társadalmi választási szabályokat.

2.C.8. Segédtétel. *Ha egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_f\}$$

KDP-*ban a* Θ *világállapot-halmaz gazdag és az* f_f TVF *monoton, akkor ez utóbbi kielégíti az egyenkénti monotonitás feltételét is.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy tetszőleges $\theta \in \Theta$ világállapotot és egy szintén tetszőleges $\xi_i \in \Theta_i$ világállapot-komponenst. Legyen

$$x = f_f(\theta) \quad \textit{és} \quad f_f(\theta_0, \xi_i, \theta_{-i}) = y.$$

Ha

$$x = y$$

akkor, készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy $x \neq y$. Belátjuk, hogy ebben az esetben az y alternatíva feljavul az x alternatívához képest az i-edik döntéshozó megítélésében, ahogy a világállapot θ-ról $(\theta_0, \xi_i, \theta_{-i})$-re változik. Miután a többiek világállapot-komponense változatlan, ha ez utóbbi állítás nem lenne igaz, akkor a világállapot-halmaz gazdagsága miatt létezne olyan $\zeta \in \Theta$ világállapot, amiben $\forall i \in \mathcal{I}$-re

$$L_i\left(x, R_i\left(X, \theta_i\right)\right) \subseteq L_i\left(x, R_i\left(X, \zeta_i\right)\right)$$

és

$$L_i\left(y, R_i\left(X, (\theta_0, \xi_i, \theta_{-i})_i\right)\right) \subseteq L_i\left(y, R_i\left(X, \zeta_i\right)\right).$$

Az f_f *TVF* feltételezett monotonitásából az első tartalmazásból azt kapjuk, hogy

$$x = f_f\left(\zeta\right),$$

míg a másodikból azt, hogy

$$y = f_f\left(\zeta\right).$$

Ez azonban ellentmond a *TVF* egyértékűségének.

Ha azonban az y alternatíva feljavul az x alternatívához képest az i-edik döntéshozó megítélésében, ahogy a világállapot θ-ról $(\theta_0, \xi_i, \theta_{-i})$-re változik, akkor ez pontosan azt jelenti, hogy

$$y = f_f\left(\theta_0, \xi_i, \theta_{-i}\right) \in L_i\left(x = f_f\left(\theta\right), R_i\left(X, \theta_i\right)\right)$$

és

$$x = f_f\left(\theta\right) \in L_i\left(y = f_f\left(\theta_0, \xi_i, \theta_{-i}\right), R_i\left(X, \xi_i\right)\right),$$

azaz az f_f egyénenként monoton, hiszen $\theta \in \Theta$ és $\xi_i \in \Theta_i$ tetszőleges volt. $\square$

2.C.9. Segédtétel. *Legyen egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_f\}$$

KDP-*ban* $|\Theta_0| = 1$ *és* $\mathcal{D}$ *olyan, hogy* $\forall i \in \mathcal{I}$*-re az* $\mathcal{R}_i\,(X, \Theta_i)$ *halmaz csak szigorú preferenciarendezéseket tartalmaz, és az* f_f TVF *elégítse ki az egyénenkénti monotonitás feltételét. Ekkor* f_f *monoton.*

Bizonyítás: A monotonitás definíciójában szereplő feltételeknek megfelelően legyen $\{\theta, \xi\} \subseteq \Theta$ és $x \in X$ olyan, hogy $x = f_f\,(\theta)$, valamint $\forall i \in \mathcal{I}$-re:

$$L\,(x, P_i\,(X, \theta_i)) \subseteq L\,(x, P_i\,(X, \xi_i))\,.$$

Tegyük most fel, hogy $x \neq z = f_f\,(\theta_0, \xi_1, \theta_{-1})$. Ez utóbbi egyenlőség a feltételezett egyénenkénti monotonitás miatt csak akkor állhatna fenn, ha igazak lennének a következő relációk:

$$xP_1\,(X, \theta_1)\,z \quad \textit{és} \quad zP_1\,(X, \xi_1)\,x.$$

De ez ellentmond a fenti, alsó nívóhalmazokra vonatkozó tartalmazásnak. Tehát $z = x$ szükségképpen. Hasonló okoskodással belátható, hogy

$$x = f_f\left(\theta_0, \xi_1, \xi_2, \theta_{-(1,2)}\right),$$

és így tovább. Mivel véges sok döntéshozónk van, ezért

$$x = f_f\,(\theta_0, \xi)\,,$$

azaz f_f tényleg monoton. □

2.C.10. Következmény. *Legyen egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_f\}$$

KDP-*ban* $|\Theta_0| = 1$ *és* $\mathcal{D}$ *olyan, hogy* $\forall i \in \mathcal{I}$*-re az* $\mathcal{R}_i\,(X, \Theta_i)$ *halmaz csak szigorú preferenciarendezéseket tartalmaz, valamint legyen a* Θ *világállapot-halmaz gazdag. Ekkor az* f_f TVF*-re a monotonitás és egyénenkénti monotonitás ekvivalens fogalmak.*

Bizonyítás: Az előző két segédtétel közvetlen folyománya. □

Ha figyelmesen megvizsgáljuk a 2.C.9. Segédtétel bizonyítását, meglepő hasonlóságot tapasztalunk az 1.C.9. Segédtétel bizonyításával. Tudjuk, ott csalásbiztos társadalmi választási függvényt vizsgáltunk, szintén szigorú preferenciákon, itt egyéneknénti monoton *TVF* szerepelt. Vajon ez a hasonlóság nem annak a jele-e, hogy a csalásbiztosság és egyénenkénti monotonitási fogalmak közeli rokonságban vannak egymással? Mint azt hamarosan látni fogjuk, ez a sejtésünk igaz. Vajon mit mondhatunk róluk, és hogyan köthetjük mindezt a domináns implementálhatósághoz? Erre ad választ a következő segédtétel és következmény.

2.C.11. Segédtétel. *Egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_f\}$$

KDP-*ban az* f_f TVF *akkor és csak akkor implementálható igazsághűen domináns stratégiákban, ha egyénenként monoton.*[30]

Bizonyítás: Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy f_f egyénenként monoton. Definiáljuk a következő

$$\eta \triangleq \{\Theta_{-0}; h, \Theta\}$$

direkt mechanizmust. Legyen $h(\theta_{-0}) = f_f(\theta)$ $\forall\theta \in \Theta$-ra. Ha η nem implementálná igazsághűen (domináns stratégiákban) az f_f társadalmi választási függvényt, akkor ez azt jelentené, hogy legalább egy $\theta \in \Theta$ világállapotban az igazság nem lenne domináns stratégia valaki számára. Ekkor tehát létezik olyan $i \in \mathcal{I}$

[30] A már többször említett gondolatmenet érvényes itt is: miután f_f társadalmi választási *függvény*, az igazsághű implementáció (domináns stratégiákban) a csalásbiztosságot jelenti. Azért fogalmaztuk meg az állítást ebben a formában, mert az implementációs aspektust kívántuk hangsúlyozni.

döntéshozó, $\theta \in \Theta$ világállapot, $\theta_i' \in \Theta_i$ stratégia, és léteznek olyan $x, y \in X$ alternatívák, amelyekre

$$x = h(\theta_{-0}), \quad y = h\left(\theta_i', \theta_{-i}\right) \quad \textit{és} \quad yP_i(X, \theta_i)\, x.$$

De az $y = h\left(\theta_i', \theta_{-i}\right)$ egyenlőségből az következik, hogy

$$y = f_f\left(\theta_0, \theta_i', \theta_{-i}\right).$$

Ez és a fenti preferenciareláció ellentmond a feltételezett egyénenkénti monotonitásnak.

Most a szükségességet látjuk be. Tekintsük a következő $\theta \in \Theta$ világállapotot, és bármely $i \in \mathcal{I}$-re a $\theta_i' \in \Theta_i$ egy tetszőleges világállapot-komponenest. Legyen

$$x = f_f(\theta) \quad \textit{és} \quad y = f_f\left(\theta_0, \theta_i', \theta_{-i}\right).$$

Mivel f_f igazsághűen implementálható (domináns stratégiákban) $xR_i(X, \theta_i)\, y$, ellenkező esetben i hazudna: a θ_i' állapotkomponenst jelentené be. Hasonló okoskodással kapjuk, hogy $yR_i'\left(X, \theta_i'\right) x$. Ez pedig pontosan az egyénenkénti monotonitást adja.

□

2.C.12. Következmény. *Ha egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_f\}$$

KDP-*ban az* f_f TVF *domináns stratégiákban implementálható, akkor szükségképpen kielégíti az egyénenkénti monotonitás feltételét. Ha ugyanakkor a* $\mathcal{D}(\Theta)$ *halmazban minden preferenciaprofil szigorú, ez a feltétel elégséges is.*

Bizonyítás: A revelációs elvből tudjuk, f_f igazsághűen is implementálható domináns egyensúlyban. Innen az előző segédtételből kapjuk az állítás első felét. Az elégségesség bizonyításához csak annyit kell belátnunk, hogy a szigorú preferencia-profilok esetén az igazsághű implementálás(domináns egyensúlyban) maga után vonja a domináns implementálhatóságot is. Ehhez tekintsük azt az

$$\eta \triangleq \{\times_{-0}; h, \Theta\}$$

direkt mechanizmust, amely igazsághűen implementálja. Annyit kell belátnunk, hogy minden világállapotban, ha az igazságon kívül is van $\theta_{-0} \neq \theta^*_{-0}$ egyensúlyi stratégiaprofil, akkor az ahhoz tartozó $h\left(\theta^*_{-0}\right)$ kimenet megegyezik $h\left(\theta_{-0}\right)$-val. Tegyük fel, nem. Ha azonban a két alternatíva különböző, akkor a szigorú preferenciaprofilok feltevése miatt a döntéshozók nem értékelhetik egyformán őket. Ez azonban ellentmond annak, hogy mindkét stratégiaegyüttes domináns volt. □

2.C.13. Megjegyzés. *Két megjegyzést kell fűznünk az előző segédtételhez és következményéhez. Először is vegyük észre, egyikük bizonyításában sem szerepel az univerzális értelmezési tartomány feltétele, az alternatívahalmaz végessége, és a preferenciákra vonatkozó megszorítás is csak az elégségesség bizonyításához kellett.*[31] *Másrészt a domináns implementálhatóságnak szükséges feltétele nagyon emlékeztet a* Nash-*implementálhatóság szükséges feltételére, a monotonitásra. A* Nash-*implementálás esetében sem volt semmilyen megkötés, a számosságra, az értelmezési tartományra és preferenciákra a monotonitáson kívül.*

Fordítsuk figyelmünket a *Nash*-implementálhatóságra! Tudjuk, hogy szükséges feltétele a monotonitás. Elégséges feltételét a következő pontban adjuk. Abban az esetben azonban, ha a Θ világállapot-halmaz gazdag, az eddigi elemzések segítenek a *Nash*-implementálható társadalmi választási függvények jellemzésében.

[31] Érdemes ismét alaposan megnézni a revelációs elv domináns egyensúlyra vonatkozó alakját a 2.B.6 Tételben.

2.C.14. Segédtétel. *Ha egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_f\}$$

KDP-*ban a* Θ *világállapothalmaz gazdag és az* f_f TVF Nash-*implementálható, akkor* f_f *igazsághűen implementálható domináns egyensúlyban. Ha ugyanakkor a* $\mathcal{D}(\Theta)$ *halmazban minden preferenciaprofil szigorú, akkor domináns egyensúlyban is implementálható.*

Bizonyítás: Ha f_f *Nash*-implementálható, akkor biztos monoton (2.B.11. Tétel). Miután Θ gazdag, ezért egyénenként is monoton (2.C.8. Segédtétel), így igazsághűen implementálható domináns egyensúlyban (2.C.11. Segédtétel). A preferenciaprofilokra tett feltevés pedig a domináns implementálhatóságot biztosítja, amint azt a 2.C.12. Következmény bizonyításában láttuk. □

2.C.15. Megjegyzés. *Ismét két megjegyzés.*
(1) *A segédtétel nem állítja azt, hogy ebben a modellben a domináns implementálhatóság az adott feltételek mellett elégséges lenne a* Nash-*implementáláshoz.*
(2) *Vegyük észre, hogy gazdag világállapot-halmaz és szigorú preferenciaprofilok mellett implementációs aspektusból nem nyerünk semmit, ha az egyensúlyfogalmunkat dominánsról* Nashre *cseréljük.*

Az a kérdés, hogy az értelmezési tartomány értelmes, megfelelő szűkítése segít-e a problémán. Vagy esetleg a társadalmi jóléti függvényre tett pótlólagos feltevések válhatnak hasznunkra?

2.D. Társadalmi választási szabályok implementálása

Kezdjük most is a domináns implementálhatósággal. Sajnos, ebben az esetben az, hogy megengedjük, a társadalmi választás több elemet is tartalmazzon, viszonylag keveset javít a helyzetünkön. Ez a megállapítás nemcsak azért igaz, mert a tényleges választás általában egyértelmű, hanem egyéb okokból is. Ha például a megengedett preferenciaprofilok csak szigorú rendezéseket tartalmaznak, akkor csak egyelemű képhalmazok implementálhatók domináns egyensúlyban. Ha pedig megengedjük az indifferenciát is, akkor is szükségünk lesz egy egyénenkénti monoton társadalmi választási függvény létezésére. Ezeket a gondolatokat formalizálják a következő segédtételek.

2.D.1. Segédtétel. *Legyen egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f\}$$

KDP-*ban* Θ *és* $\mathcal{D}$ *olyan, hogy* $\forall i \in \mathcal{I}$-*re az* $\mathcal{R}_i\left(X, \Theta_{(i)}\right)$ *halmaz csak szigorú preferenciarendezéseket tartalmaz. Ha az* f TVSZ *domináns egyensúlyban implementálható, akkor* $\forall\theta \in \Theta$ *világállapotra az* $f(\theta)$ *képhalmaz szükségképpen egyelemű, azaz* f TVF.

Bizonyítás: Tegyük fel az ellenkezőjét! Legyen $\theta \in \Theta$, $\{x, y\} \subseteq f(\theta) \subseteq X$. Ha egy

$$\gamma \triangleq \{S, g, \Theta\}$$

mechanizmus domináns egyensúlyban implementálja az f társadalmi választási szabályt, akkor léteznek olyan

$$\left\{s, s'\right\} \subseteq DE(S, g, \theta) \subseteq S$$

domináns stratégiaegyüttesek, amelyekre

$$g(s) = x \quad \textit{és} \quad g\left(s'\right) = y.$$

Miután s_1 és s_1' egyaránt domináns stratégia az első döntéshozó számára és $R_1(X, \theta_1)$ szigorú, ezért

$$g\left(s_1', s_2, \ldots, s_I\right) = g\left(s_1, s_2, \ldots, s_I\right) = x.$$

Hasonlóképpen

$$g\left(s_1', s_2', \ldots, s_I\right) = g\left(s_1', s_2, \ldots, s_I\right) = x.$$

Miután a döntéshozók száma véges, ebből azt kapjuk, hogy $g\left(s'\right) = x$. Ellentmondásra jutottunk. □

2.D.2. Segédtétel. *Ha egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f\}$$

KDP-*ban az* f TVSz *implementálható domináns stratégiákban, akkor létezik egy olyan egyénenként monoton* $f_f : \Theta \to X$ *társadalmi választási* függvény, *amelyre* $\forall\theta \in \Theta$ *esetén*

$$f_f\left(\theta\right) \in f\left(\theta\right).$$

Bizonyítás: Legyen

$$\gamma = \{S, g, \Theta\}$$

olyan mechanizmus, amely domináns stratégiákban implementálja az f társadalmi választási szabályt. Ekkor a revelációs elvből tudjuk, hogy létezik olyan

$$\eta = \{\Theta_{-0}, h, \Theta\}$$

direkt mechanizmus, amely igazsághűen implementálja. Definiáljuk az f_f társadalmi választási függvényt a következőképpen:

$$\forall\theta \in \Theta\text{-ra} \quad f_f\left(\theta\right) \triangleq h\left(\theta_{-0}\right) \in f\left(\theta\right).$$

Ebből következik, hogy az η mechanizmus az f_f TVF-t is igazsághűen implementálja, így a 2.C.11. Segédtétellel f_f egyénenként monoton. □

A fenti két segédtétel arra világít rá, hogy igencsak kevés társadalmi választási szabályt tudunk domináns stratégiákban implementálni, hacsak a Θ világállapot-halmaz és a $\mathcal{D}$ profilleképezés nem rendelkezik speciális, az implementációt lehetővé tevő struktúrával. Enélkül általános elégséges feltételt adni nem tudunk.

Forduljunk tehát a *Nash*-implementálhatóság felé. Ebben az esetben az értelmezési tartományra tett egyéb feltevés nélkül elégséges feltételt tudunk adni. Igaz, a közösségi döntési probléma egyéb összetevőjét korlátoznunk kell egy kicsit. Feltételt szabunk a döntéshozók számára és a társadalmi választási függvényre vonatkozóan. Az alább adandó általános implementációs tétel *Eric Maskin* nevéhez fűződik[32], de e helyütt egy módosított bizonyítást adunk.[33]

2.D.3. Tétel (Maskin). *Legyen egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f\}$$

KDP-*ban az* f TVSz *monoton és vétómentes*[34]*, valamint legyen* $I \geqq 3$*. Ekkor* f Nash-*egyensúlyban implementálható.*

2.D.4. Megjegyzés. *Vegyük észre, a 2.B.11. Tétel szerint a monotonitás szükséges is volt. Ezenkívül ne feledjük azt se, hogy itt társadalmi választási* szabály*okról beszélünk, nem ragaszkodunk* f *képhalmazának egyelemű voltához.*[35]

Bizonyítás: Bizonyításunk konstruktív lesz, nemcsak belátjuk az állítást, hanem adunk egy γ mechanizmust is, amely az adott tulajdonságú társadalmi választási szabályokat implementálja. Legyen a

$$\gamma \triangleq \{S, g, \Theta\},$$

[32] Lásd *Maskin* [1977] és *Maskin* [1985].

[33] Vesd össze a *Repullo* [1987] cikkben található bizonyítással!

[34] Lásd az 1.B.39. Definíciót!

[35] Így a monotonitás feltétele könnyebben teljesül.

mechanizmusban $\forall i \in \mathcal{I}$-re

$$S_i \triangleq (\Theta \times X \times \mathcal{N}),$$

ahol $\mathcal{N}$ a természetes számok halmaza. A $g : \times_{i=1}^{I} S_i \to X$ kimeneti függvény kicsit bonyolult, az alábbi szabállyal adjuk meg.

(i) Ha $\forall i$-re $s_i = (\theta, x, k)$ és $x \in f(\theta)$, akkor $g(s) \triangleq x$.
(ii) Ha $\forall i, i \neq j$-re $s_i = (\theta, x, k)$ és $x \in f(\theta)$ és $s_j = \left(\theta^j, x^j, k^j\right) \neq s_i$, akkor

$$g(s) \triangleq \begin{cases} x^j, & ha\ x^j \in L(x, R_j(X, \theta_j)) \\ x, & egyébként. \end{cases}$$

(iii) Minden más esetben $g(s) \triangleq x^i$, ahol i a legkisebb egész, amire $k^i = \max_j k^j$.

A g kimeneti függvény konstrukciója alapján könnyen beláthatók a következők:

(i') Ha az s stratégiaegyüttes az (i) tulajdonságú, akkor $\forall i$-re

$$g(s\,|S_i) \triangleq \cup_{s_i \in S_i} g(s\,|s_i) = L(x, R_i(X, \theta_i)).$$

(ii') Ha az s stratégiaegyüttes az (ii) tulajdonságú, akkor $\forall i, i \neq j$-re

$$g(s\,|S_i) = X \quad és \quad g(s\,|S_j) = L(x, R_j(X, \theta_j)).$$

(iii') Ha az s stratégiaegyüttes az (iii) tulajdonságú, akkor $\forall i$-re

$$g(s\,|S_i) = X.$$

Azt kell belátnunk, ez a γ mechanizmus *Nash*-implementálja az f társadalmi választási szabályt. Ehhez két dolgot kell bizonyítanunk. Egyrészt azt, hogy a *Nash*-egyensúlyi stratégiák halmaza egy $\theta \in \Theta$ világállapotban sem üres, másrészt, hogy a hozzá tartozó kimenetek halmaza minden világállapotban megegyezik a $TVSz$ képével. A két dolog bizonyítását összevonjuk. Először azt látjuk be, hogy $\forall\theta \in \Theta$ esetén

$$f(\theta) \subseteq g(NE(S, g, \theta)),$$

amivel az egyensúlyi stratégiahalmazok nem üres voltát is bizonyítjuk egyben, hisz $f(\theta)$ egy világállapotra sem üres. Ehhez $\forall\theta \in \Theta$-ra vegyünk egy tetszőleges $x \in f(\theta)$ alternatívát, és definiáljuk a döntéshozók stratégiáit úgy, hogy $\forall i$-re

$$s_i \triangleq (\theta, x, 1).$$

Amikor megmutattuk, hogy a monotonitás a *Nash*-implementálhatóság szükséges feltétele, akkor tettünk egy észrevételt. Miután erre többször támaszkodunk most is, másoljuk ide:

Egy $\{S, g, \theta\}$ játékban $s \in NE(S, g, \theta) \Longleftrightarrow ha \quad \forall i$-re

$$g(s\,|S_i) \subseteq L(g(s), R_i(X, \theta_i)). \tag{2.D–1}$$

Miután a definiált s stratégiaegyüttes (i) tulajdonságú, ezért a (i') megállapításból és az (2.D–1) tartalmazásból kapjuk, hogy $s \in NE(S, g, \theta)$ és $g(s) = x$. Miután x tetszőleges, az $f(\theta)$ halmazhoz tartozó alternatíva volt, ezzel az ez irányú tartalmazást beláttuk.

Most mutassuk meg, hogy $\forall\theta \in \Theta$ esetén

$$g(NE(S, g, \theta)) \subseteq f(\theta).$$

(i") Legyen $s \in NE(S, g, \theta)$ és legyen (i) típusú, ahol minden i-re $s_i = (\theta', x', k)$ és $x' \in f(\theta')$. Ekkor az (i') megállapítással és a (2.D–1) tartalmazással $\forall i$-re kapjuk, hogy

$$L(x', R_i'(X, \theta_i')) = g(s\,|S_i) \subseteq L((x' = g(s)), R_i(X, \theta_i)).$$

Ekkor a monotonitással kapjuk, hogy $x' = g(s) \in f(\theta)$.

(ii”) Legyen $s \in NE(S, g, \theta)$ és legyen (ii) típusú, ahol $\forall i, i \neq j$-re $s_i = \left(\theta', x', k\right)$ és $x' \in f\left(\theta'\right)$. Ekkor az ($ii'$) megállapítással és a (2.D–1) tartalmazással $\forall i, i \neq j$-re kapjuk, hogy

$$X = g\left(s\,|S_i\right) \subseteq L\left(g\left(s\right), R_i\left(X, \theta_i\right)\right).$$

Ez azt jelenti, hogy a θ világállapotban j-edik döntéshozó kivételével mindenki a $g(s)$ alternatívát tekinti legjobbnak. A *vétómentesség* miatt ez társadalmi választás is lesz, azaz $g(s) \in f(\theta)$.[36]

(iii”) Legyen $s \in NE(S, g, \theta)$ és legyen (iii) típusú. Ekkor az (iii') megállapítással és a (2.D–1) tartalmazással $\forall i$-re

$$X = g\left(s\,|S_i\right) \subseteq L\left(g\left(s\right), R_i\left(X, \theta_i\right)\right).$$

Ez azt jelenti, hogy a θ világállapotban mindenki a $g(s)$ alternatívát tekinti legjobbnak. A *vétómentesség* miatt ez ismét társadalmi választás is lesz, azaz $g(s) \in f(\theta)$ most is.[37] □

A tétel olyan alapvető jelentőségű, hogy több megjegyzést is kell fűznünk hozzá. Ezekre a későbbiekben utalunk majd.

2.D.5. Megjegyzés. *Az első megjegyzésünk a mechanizmus szerkezetével kapcsolatos. Vegyük észre, hogy mivel a* Nash-*egyensúly fogalma teljes információs játékhoz kötődik, itt is feltesszük, hogy a döntéshozók ismerik egymás aktuális világállapotkomponensét és emiatt a preferenciaprofilt is. Éppen ezért lehetséges a játékot olyan stratégiákon játszatni, amelyek része egy preferenciaprofil bejelentése. A játék emiatt kvázi revelációs jelleget ölt. Hasonló módon, miután a játékosok feltevés szerint ismerik a társadalmi választási függvényt is, a választott, a bejelentett világállapottal kompatibilis alternatíva is értelemszerűen lehet a stratégia része. A stratégiák harmadik komponense, egy tetszőleges természetes*

[36] Lásd a bizonyítást követő 2.D.6. Megjegyzést!

[37] Lásd ismét a bizonyítást követő 2.D.6. Megjegyzést!

szám, pedig azért kap szerepet, hogy a játékosok még nagyobb befolyással bírjanak a mechanizmus által kijelölt alternatíva meghatározásában. Miért fontos ez? Azért, mert mint arra már korábban utaltunk, a Nash-*implementáció legnagyobb problémája éppen az, hogy „túl sok” az egyensúlyi stratégiegyüttes. Ha több lehetőségem van a választott alternatíva befolyásolására, akkor ezzel csökkenthető a lehetséges egyensúlyi stratégiaegyüttesek száma, mert kevesebb „legjobb válaszom” lesz. Erre az aspektusra még visszatérünk.*

2.D.6. Megjegyzés. *Az első pillantásra nem látszik, a bizonyításban hol játszik szerepet az $I \geqq 3$ feltétel. Ez annál is inkább érdekes, mert minden eddigi problémánkban az alternatívahalmaz számosságára tettünk ilyen típusú feltételt, a döntéshozók számára csak a közösségi problémákban triviális $I \geqq 2$ feltétel és a végesség szerepel. Egyáltalán szükség van-e erre a pótlólagos megkötésre? Sajnos igen. Mint azt a* Maskin *[1977] és* Hurwicz–Schmeidler *[1978] cikkekben megtalálhatjuk, ha csak két döntéshozónk van, az egyetlen olyan, az univerzális értelmezési tartományon értelmezett,* Pareto-*hatékony társadalmi választási szabály, ami* Nash-*implementálható, a diktatórikus. Anélkül, hogy bizonyítanánk ezt az állítást, a pótlólagos feltétel szerepének bemutatása révén némi utalást teszünk az alapgondolatára. Először is vegyük észre, hogy a bizonyítás során említett (ii) tulajdonságú stratégiaegyüttesek mellett, két döntéshozó esetén, a mechanizmus bizonyos esetekben nem értelmezhető. Ugyanis, ha e két döntéshozó mindegyike bejelent egy érvényes világállapotot és a hozzá tartozó képhalmazbeli elemet, valamint egy tetszőleges természetes számot, akkor elképzelhető, hogy a megfelelő feltételek fennállása esetén a mechanizmus két különböző alternatívát jelölne ki, ami ellentmond egyértelműségének. Hagyjuk akkor el gondolatban ezt a pontot, és definiáljuk úgy a mechanizmust, hogy két lehetőség legyen csak, az (i) és az (iii). Ebben az esetben az egyértelműség biztosított. Sajnos, ez sem jelent megoldást a prob-*

lémára. Tegyük fel ugyanis, hogy egy $\theta \in \Theta$ világállapotban a két döntéshozó két, különböző alternatívát tekint a legjobbnak. Ekkor – mint az azonnal látható – ebben a világállapotban nincs Nash-*egyensúlyi stratégiegyüttes, hiszen a döntéshozók „egymásra licitálnak”, azaz egyre nagyobb és nagyobb természetes számot jelentenek be. Nyilvánvaló, egyiküknek sincs legjobb válasza a másik által megjátszott stratégiára. Ez egyben azt is jelenti, hogy az f társadalmi választási szabály nem implementálható* Nash-*egyensúlyban. Ha viszont legalább hárman vannak és a* TVSz *vétómentes, akkor ez a probléma, mint láttuk, nem merül fel, mert $I-1$ döntéshozó megállapodása megakadályozza a megállapodásból kimaradót a kimenet befolyásolásában.*

2.D.7. Megjegyzés. *A dolgozat során a* Maskin-*tétel tűnik az első pozitív tartalmú eredménynek. Ennek ellenére korai még az öröm. Hiába adtunk elégséges feltételt a* Nash-*implementálhatóságra általános értelmezési tartományon, az a konstruktív mechanizmus, amit a bizonyítás során szerkesztettünk, nem túl meggyőző. Mi a fanyalgás alapja? Két dolgot kell említenünk. Az első: a mechanizmus, különösképpen a stratégiahalmazok felépítése miatt annyira bonyolult, hogy a gyakorlati alkalmazásokban szinte hasznavehetetlen. Ehhez kapcsolódik a második gond is: a stratégiákban a játékosok, amellett, hogy egy kvázi revelációs mechanizmust működtetnek, egy úgynevezett* integer játék*ot játszanak, ami stratégiahalmazukat akkor is végtelenné teszi, ha egyébként az alternatívák száma és emiatt az értelmes preferenciaprofilok halmaza véges lenne. Egy ilyen nem korlátos stratégiahalmaz – annak ellenére, hogy a nem korlátosság éppen a nem kívánatos egyensúlyi stratégiaegyüttesek kiszűrésének igényéből fakad – pedig különböző nehézségeket szül.*[38] *Mindezek miatt, szerintem, a* Maskin-*tétel nem annyira pozitív. Természetesen egész más a helyzet, ha a Θ világállapot-halmaz szerkezete olyan, hogy egyszerűbb mechanizmusokat is lehetővé tesz. Mindjárt látni fogunk*

[38] Erről bővebben lásd *Moore* [1992] and *Jackson* [1992].

példát erre is. Annyit azonban e helyütt kell megjegyeznünk, hogy léteznek olyan közösségi döntési problémák, amelyekben a társadalmi választási szabály egyszerű revelációs mechanizmussal nem implementálható Nash-*egyensúlyban.*[39]

2.D.8. Megjegyzés. *A* Maskin-*tétel, miután csak elégséges feltételeket ad az implementálhatóságra, nem jellemzi az összes* Nash-*implementálható társadalmi választási szabályt. Léteznek olyan teljesen természetes társadalmi választási szabályok, amelyek megsértik a tétel feltételeit*[40]*, mégis implementálhatóak* Nash-egyen*súlyban. Egy ilyen példát adunk a következőkben.*

Vezessünk be egy új leképezést, amelyben minden világállapothoz az *individuálisan racionális alternatívák* halmazát rendeljük.[41]

2.D.9. Definíció (Az IR leképezés). *Egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_{IR}\}$$

KDP-*ban, amelyben létezik egy kitüntetett* $\bar{x} \in X$ „status quo”-*ként értelmezhető alternatíva, az* f_{IR} *társadalmi választási szabályt az* IR-*leképezésnek hívjuk akkor és csak akkor, ha* $\forall\theta \in \Theta$ *világállapothoz az individuálisan racionális alternatívák*

$$IR(\theta) \triangleq \{x \in X \,|xR_i(X, \theta_i)\,\bar{x} \quad \forall i \in \mathcal{I}\}$$

halmazát rendeli.[42]

[39] Egy ilyen mechanizmusra hoz példát *Maskin* [1977]. Érdemes mindezt összevetni avval, amit a revelációs elv *Nash*-egyensúlyra vonatkozó alakjáról mondtunk.

[40] Nyilván nem a monotonitást.

[41] Ne tévesszük össze ezt a leképezést az individuálisan racionális társadalmi szabály fogalmával, amit az 1.B.40. Definícióban adtunk meg.

[42] Vegyük észre, hogy miután az f_{IR} leképezést társadalmi választási szabálynak tekintjük, ezért implicite feltételezzük, hogy egyetlen $\theta \in \Theta$ világállapotra sem üres az $f_{IR}(\theta)$ halmaz.

2.D.10. Segédtétel. *Egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_{IR}\}$$

KDP-*ban (amelyben létezik egy kitüntetett* $\bar{x} \in X$ „status quo”-*ként értelmezhető alternatíva) az* f_{IR} IR-*leképezés* Nash-*implementálható.*

Bizonyítás: Elegendő megadnunk egy olyan mechanizmust, amely implementálja. Legyen

$$\gamma_{IR} \triangleq \{S, g_{IR}, \Theta\},$$

ahol

$$\forall i \in \mathcal{I}\text{-re} \quad S_i \triangleq X$$

és $\forall \theta \in \Theta$-ra

$$g_{IR}(x_1, x_2, \ldots, x_I) \triangleq \begin{cases} x, & \textit{ha}\, x = x_1 = x_2 = \ldots = x_I \\ \bar{x}, & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

Könnyű belátni, hogy ez a mechanizmus *Nash*-implementálja az f_{IR} társadalmi választási szabályt. □

Végezetül, az illusztráció kedvéért, lássunk be egy kis állítást, amit a *Maskin*-tétel alapján könnyen bizonyíthatunk, és amelynek később még fontos szerepe lesz.

2.D.11. Következmény. *Ha egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f\}$$

KDP-*ban* $I \geqq 3$, *és az* f TVSz a Pareto-*leképezés,*[43] *azaz* $\forall \theta \in \Theta$-*ra*

$$f(\theta) \triangleq PO(\theta),$$

akkor Nash-*implementálható.*

[43] Lásd az 1.B.38. Példát!

Bizonyítás: Mint említettük, a *Pareto*-leképezésről könnyű belátni, hogy monoton és vétómentes, így az állítás a *Maskin*-tételből azonnal következik. □

2.D.12. Megjegyzés. *Amint arra már a 2.B.12. Megjegyzésben utaltunk, a* Nash-*implementálhatóság szorosan kötődik a preferenciák ordinális voltához. Vegyük észre, hogy nemcsak a szükséges feltétel ordinális jellegű, hanem az előzőekben adott két, az elégségességet biztosító feltételcsoport is az.*

III.

KLASSZIKUS GAZDASÁGOK

3.A. A klasszikus gazdaságok szerkezete

Ebben a fejezetben megkíséreljük az eddig elmondottakat általános gazdasági példákra alkalmazni. Ehhez segítségül hívjuk az általános egyensúlyelmélet alapmodelljét, illetve ennek a közjavakra vonatkozó módosítását. Azt mutatjuk majd meg, hogy ezek a modellek közösségi döntési problémaként értelmezhetők. Ezt az interpretációt kihasználva pedig rövid és korántsem teljes bevezetőt adunk az erőforrás-allokációs mechanizmusok elméletébe.

Modellünk alapvető fogalma a *jószág*. Jószág az asztal, a színházjegy, a hajnyírás, a honvédelem stb., azaz minden olyan dolog, amit a később definiálandó gazdasági szereplők esetleg létrehoznak, cserélnek, felhasználnak, fogyasztanak. A jószágokat egymástól fizikai tulajdonságaik alapján különböztetjük meg. Az egyes jószágokat természetes mértékegységekkel látjuk el, az asztal mértékegysége a darab, a széné, mondjuk, a tonna, a tejé a liter és így tovább. Feltételezzük azt, hogy bármelyik jószágból tetszőleges kis mennyiség is értelmezhető, azaz a jószágok rendelkeznek majd a folytonos oszthatóság tulajdonságával, valamint azt, hogy tetszőleges jószágmennyiséget meg tudunk mérni. Egy jószág egységeit egymástól megkülönböztetni természetesen nem tudjuk, azaz a jószágok homogének. A jószágokat két csoportra osztjuk, tiszta köz-, illetve magánjavakra. Az előbbiekre az általánosan elfogadott definíciót használjuk: a belőlük történő fogyasztásra vonatkozóan nincs kizárás és nincs rivalizálás, mindenki ugyanannyit fogyaszt. Feltesszük, hogy a gazdaságban véges sok jószág van, és rendelkezésünkre áll ezek listája és így egyértelmű sorrendjük. E sorrend szerint indexeljük a jószágokat; a közjószágok indexváltozója m, a magánjószágoké n lesz. A közjószágok (véges) száma M, a magánjószágoké N.

A következő fogalom a *jószágkosár*. A jószágkosár egy olyan $M+N$ elemű lista, amelynek első M eleme a közjószágokra vonatkozik, és ami megmondja nekünk, hogy az egyes jószágokból mekkora mennyiségről „van szó”. A jószágkosárnak mint listának az elemei valós számok, előjelük pozitív, ha a jószág (fogyasztásra) rendelkezésre áll, negatív, ha a jószágot a fogyasztásból kivonjuk. Egy jószágkosarat ezek szerint megfeleltethetünk az $M+N$ dimenziós euklideszi tér egy pontjának, és emiatt ezt az $\Re^{M+N}$-nel jelölt teret *jószágtér*nek hívjuk.

A gazdasági szereplőket, a döntéshozókat, *fogyasztók*nak hívjuk. A fogyasztókat i-vel indexeljük, halmazuk jele $\mathcal{I}$, e halmaz számossága I. Az i-edik fogyasztót három objektum jellemzi:

- Az $X_i \subset \Re_+^{M+N}$ fogyasztási halmaz, amelynek elemei a (q_i, x_i) szimbólummal jelölt fogyasztási vektorok.
- A fogyasztási halmazon értelmezett $\succcurlyeq_i$ teljes, reflexív és tranzitív bináris reláció, azaz preferenciarendezés[44].
- A fogyasztó számára a javakból eredetileg rendelkezésre álló $(0, \omega_i) \in \Re^{M+N}$ készletvektor.

A gazdaságban a fogyasztás mellett termelés is folyik, azaz javakat nem csak kivonunk a rendelkezésre állás alól, hanem a javak – más javakból, transzformáció útján – előállíthatók is. Ezt a termelést csak az $Y \in \Re^{M+N}$ termelési halmaz jellemzi, amelynek elemei a (q, y) szimbólummal jelölt termelési vektorok. A termelési vektor egy komponense pozitív, ha azt a jószágot végső soron (nettó módon) termeljük, negatív, ha a termelésben felhasználjuk.

Egy ilyen gazdaság megadható az

$$e = \left\{ M, N, I, \{X_i\}_{i=1}^{I}, \{\succcurlyeq_i\}_{i=1}^{I}, \{0, \omega_i\}_{i=1}^{I}, Y \right\}$$

listával.

A továbbiakban megkülönböztetjük az úgynevezett klasszikus[45]

[44] Ebből a gyenge relációból az ismert módon származtatható a $\succ_i$ erős, illetve a $\sim_i$ közömbösségi reláció.

[45] Talán helyesebb lenne neoklasszikus gazdaságoknak hívni ezeket, mert az adandó feltételrendszer tipikusan neoklasszikus. Mégis megmaradunk a klasszikus gazdaság kifejezésnél, mert egyrészt ez az általánosan elfogadott az implementációelméleti irodalomban, másrészt rövidebb.

gazdaságok $\mathcal{E}_{kl}$ családját. Az ehhez a családhoz tartozó gazdaságok kielégítik a következő feltételeket.

3.A.1. Definíció (Klasszikus gazdaságok). *Egy*

$$e = \left\{M, N, I, \{X_i\}_{i=1}^I, \{\succcurlyeq_i\}_{i=1}^I, \{0, \omega_i\}_{i=1}^I, Y\right\}$$

gazdaság akkor és csak akkor klasszikus, *ha igazak a következők:*

- $Y \subset \Re^{M+N}$ zárt, konvex kúp;
- $0 \in Y$;
- ha $0 \neq (q, y) \in Y$, akkor létezik n', hogy $y^{n'} < 0$ (nincsen rózsa tövis nélkül);
- $\forall m$-re $\exists$ $(q, y) \in Y$, hogy $q^m > 0$, (minden közjószág termelhető);
- ha $(q, y) \in Y$, és

  $$\{r^m = q^m, \text{ha } q^m \geqq 0, \text{de } r^m = 0, \text{ha } q^m < 0\},$$

  akkor $(r, y) \in Y$ (közjószágból nincs ráfordításszükséglet);

valamint $\forall i$*-re, azaz* $i = 1, \ldots I$ *esetén*

- $X_i = \Re_+^{M+N}$;
- $\succcurlyeq_i$ *folytonos,* azaz az

  $$\left\{x_i \in X_i \,\middle|\, x_i \succcurlyeq_i x_i', \right\} \quad \forall x_i' \in X_i\text{-re}$$

  és az

  $$\left\{x_i \in X_i \,\middle|\, x_i' \succcurlyeq_i x_i, \right\} \quad \forall x_i' \in X_i\text{-re}$$

  halmazok zártak;

- $\succsim_i$ *konvex*, azaz $x_i^1 \in X_i$, $x_i^2 \in X_i$, és $x_i^1 \succ_i x_i^2$, valamint $\lambda \in (0,1)$ esetén

$$\lambda x_i^1 + (1-\lambda) x_i^2 \succ_i x_i^2;$$

- $\succsim$ *félig szigorúan monoton növekvő*, azaz x_i^1, $x_i^2 \in X_i$, és $x_i^1 \geqq (\neq)\, x_i^2$ esetén $x_i^1 \succsim_i x_i^2$, de ha $x_i^1 \in int\, X_i$, akkor $x_i^1 \succ_i x_i^2$;
- $\omega_i > 0$.

3.A.2. Megjegyzés. *Az összes, a fenti feltételeknek megfelelő termelési halmazok családját az $\mathcal{Y}$ szimbólummal jelöljük. Ha a javak számára is utalni akarunk, akkor az $\mathcal{Y}(M,N)$ szimbólumot használjuk.*
A preferenciákra tett feltevések biztosítják, hogy reprezentálhatók folytonos

$$U_i : X_i \to \Re, \forall i \in \mathcal{I}$$

hasznossági függvényekkel.[46] *Ezzel a lehetőséggel bizonyos esetekben – kényelmi szempontból – élni is fogunk. Az összes ilyen preferenciarendezés halmazát az $\mathcal{R}_{kl}\left(\Re_+^{M+N}\right)$ szimbólummal jelöljük.*

3.A.3. Megjegyzés. *Meg kell jegyeznünk, hogy a klasszikus gazdaságok* terminus technicust *sokan mások más feltételeknek eleget tevő gazdaságokra használják. Az irodalomban nincs egységes, elfogadott álláspont ebben a kérdésben. Nekünk is elég sok gondot okozott, hogy az eltérő feltevésekkel operáló modelleket össze tudjuk hasonlítani. Sokszor csak kis apróságoknak tűnő különbségek komoly eltéréseket okoznak. Éppen ezért – miután teljesen általános modellel senki sem dolgozik – használjuk ezt a fenti feltételegyüttest, ez az, amiben az eredményeket közös nevezőre tudtuk hozni. Természetesen tudatában vagyunk annak, hogy a*

[46] Lásd például *Debreu* (1964) és *Zalai Ernő* [1989] 170–173. o.

később ismertetendő eredmények közül nem is egy talán általánosabb modellben is igaz, de azt hisszük, olyan ennél általánosabb modell, amiben ezek mind igazak lennének, nincs. Az általunk adott klasszikus gazdaság modellje a leginkább Foley [1970] *modelljével rokon. Ennél valamivel általánosabb modellt találhatunk Milleron* [1972] *tanulmányában.*

3.A.4. Megjegyzés. *A későbbiekben fontos lesz, hogy olyan gazdaságok családját tekintsük, amelyhez tartozó minden gazdaságban a közjavak, a magánjavak és a fogyasztók száma ugyanannyi. Az ilyet a továbbiakban az*

$$\mathcal{E}\left(M, N, I\right)$$

szimbólummal jelöljük. Ha e paraméterek közül valamelyik változhat, akkor arra nem utalunk külön. Például az $\mathcal{E}\left(M, N, \cdot\right)$ szimbólum az összes olyan gazdaság családját jelenti, amelyben M köz- és N magánjószág szerepel. Itt a döntéshozók száma változhat. (Nyilván $2 \leqq I < \infty$.)

A következő definíciók alapvető fontosságúak lesznek a továbbiakban.

3.A.5. Definíció (Allokáció). *Egy $e \in \mathcal{E}_{kl}$ gazdaságban az*

$$a = \left(q, x_1, \ldots x_I\right) \in \Re_+^M \times \prod_{i=1}^{I} \Re_+^N$$

pontot allokációnak *mondjuk. Az allokációk halmazát az $\mathcal{A}\left(e\right)$ szimbólummal jelöljük. Az $\mathcal{E}\left(M, N, I\right) \subseteq \mathcal{E}_{kl}$ azonos méretű*[47] *gazdaságokhoz tartozó allokációkhalmaza*

$$\mathcal{A}\left(\mathcal{E}\left(M, N, I\right)\right) \triangleq \Re_+^M \times \prod_{i=1}^{I} \Re_+^N.$$

[47] Azaz amelyekben a fogyasztók száma, valamint a köz- és magánjavak száma azonos.

Ha

$$\forall i\text{-re } (q, x_i) \in \Re_+^{M+N} \quad \text{és} \quad \left(q, \sum_{i=1}^{I}(x_i - \omega_i)\right) \in Y,$$

akkor az allokáció megvalósítható. *A megvalósítható allokációk halmazát az* $\mathcal{A}_{ok}(e)$ *szimbólummal jelöljük.*

3.A.6. Megjegyzés. *Két dolgot észre kell vennünk. Az egyik az, hogy az allokáció fogalmának meghatározása során figyelembe vettük a közjószág tulajdonságot, vagyis azt, hogy a közjószágokból minden fogyasztónak ugyanannyit kell fogyasztania. Ezért csökkenthettük az allokációk halmazának dimenzióját. A másik észrevételünk, hogy a megvalósíthatóság – mint láthatjuk – kettős: egyrészt az allokációban az* i*-edik fogyasztó által megkapott* (q, x_i) *fogyasztói kosár benne van a fogyasztási halmazban, másrészt a közjószágok megtermelhetők az el nem fogyasztott magánjószágokból.*

3.A.7. Definíció (Pareto-optimális allokáció.). *Egy megvalósítható* $a \in \mathcal{A}_{ok}(e)$ *allokáció* erősen Pareto-hatékony, *ha nem létezik olyan másik megvalósítható* $a' \in \mathcal{A}_{ok}(e)$ *allokáció, hogy*

$$\begin{array}{rcl} (q', x_i') & \succsim & {}_i\,(q, x_i) \quad \forall i\text{-re, és} \\ \exists i' \quad \text{hogy} \quad (q', x_{i'}') & \succ & {}_{i'}\,(q, x_{i'})\,. \end{array}$$

Az $e \in \mathcal{E}_{kl}$ *gazdaságbeli erősen Pareto-hatékony allokációk halmazát a* $PO_s(e)$ *szimbólummal jelöljük.*
Az $a \in \mathcal{A}_{ok}(e)$ *megvalósítható allokáció* (gyengén) Pareto-hatékony, *ha nem létezik olyan másik megvalósítható* $a' \in \mathcal{A}_{ok}(e)$ *allokáció, hogy*

$$\left(q', x_i'\right) \succ_i (q, x_i) \quad \forall i\text{-re.}$$

Az $e \in \mathcal{E}_{kl}$ *gazdaságbeli (gyengén)* Pareto-*hatékony allokációk halmazát a* $PO(e)$ *szimbólummal jelöljük.*

3.A.8. Segédtétel. *Egy $e \in \mathcal{E}_{kl}$ klasszikus gazdaságban, ha nincsenek közjavak, azaz $M = 0$, akkor*

$$PO_s(e) = PO(e).$$

Ha azonban $M > 0$, akkor

$$PO_s(e) \subseteq PO(e).$$

Bizonyítás: A $PO_s(e) \subset PO(e)$ tartalmazás triviális. A másik irány – $M = 0$ esetben az indirekt bizonyítás elvét követve – a fogyasztási és termelési halmazok kúp tulajdonságából, valamint a preferenciák folytonosságából, konvexitásából és félig szigorú monotonitásából azonnal következik. Ha azonban $M > 0$, akkor tudunk mutatni egy olyan gazdaságot, amiben egy gyengén *Pareto*-hatékony allokáció nem erősen *Pareto*-hatékony.[48] Legyen ez a gazdaság a következő:

$$e = \left\{ \begin{array}{c} 1;1;3;\left\{\Re^2_+\right\}_{i=1}^3; \\ u_1(q,x_1) = x_1 + q, \left\{u_i(q,x_i) = 2q + x_i\right\}_{i=2}^3; \\ \{0,1\}_{i=1}^3; \left\{(q,-q)\,|q \in \Re_+\right\} \end{array} \right\}$$

Ebben a gazdaságban az $a = (2{,}5;\ 0{,}5;\ 0;\ 0)$ allokáció gyengén hatékony, de például az $a' = (3;0;0;0)$ allokáció megvalósíthatósága miatt erős értelemben nem *Pareto*-hatékony. □

3.A.9. Definíció (Individuálisan rac. all.). *Egy megvalósítható $a \in \mathcal{A}_{ok}(e)$ allokáció* individuálisan racionális *akkor és csak akkor, ha*

$$(q, x_i) \succsim_i (0, \omega_i) \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Az $e \in \mathcal{E}_{kl}$ gazdaságbeli indiviálisan racionális allokációk halmazát az $IR(e)$ szimbólummal jelöljük.

[48] Lásd *Tian* [1988].

Mind a gyengén *Pareto*-hatékony, mind az individuálisan racionális allokációk halmaza nyilvánvalóan nem üres. Később az lesz az egyik legfontosabb kérdés, hogy metszetük üres-e. Nemsokára belátjuk, egy klasszikus gazdaságban biztosan nem.

3.B. Speciális klasszikus gazdaságok

Noha a továbbiakban is törekszünk arra, hogy minél általánosabb keretek között fejtsük ki a mondandónkat, elméleti és történeti fontosságuk miatt külön kell foglalkoznunk két, speciális szerkezetű klasszikus gazdasággal. Az egyiknek önmagában is óriási a jelentősége, a másik inkább csak illusztratív szerepet szokott betölteni, de mert az elmélet fejlődésében nem elhanyagolható lépcsőfokok köthetők ehhez az egyszerűbb modellhez, e helyütt is külön foglalkozunk vele.

3.B.1. A tiszta cseregazdaság

A tiszta cseregazdaság modellje általában az a kiindulási pont, amelyből az általános egyensúlyelmélettel való ismerkedést kezdeni szoktuk. Az ebben a dolgozatban később bevezetendő versenyzői gazdaság legegyszerűbb formájában ebben a modellben fogalmazható meg úgy, hogy az elmélet minden lényeges vonását szem előtt tarthassuk. A tiszta cseregazdaságban a hangsúly azon a tényen van, hogy az elkülönült gazdasági szereplők meglevő készleteiket egymás között elcserélhetik annak érdekében, hogy minél jobban járjanak, azaz olyan allokáció jöjjön létre, amely egyéni szempontjukból a lehető legjobb. Eközben azonban figyelemmel kell lenniük a többiekre is, abban az értelemben, hogy egymástól függetlenül meghozott döntéseiknek mégis konzisztenseknek kell lenniük. Erre a cserefolyamatra később még bővebben visszatérünk. A másik lényeges szempont, hogy e készletek nem növelhetők, vagyis a gazdaságban nem folyik termelés. Ebből a tényből fakad az, hogy a tiszta cseregazdaságban minden jószág értelemszerűen magánjószág. Minden látszólagos egyszerűsége ellenére a tiszta cseregazdaságra vonatkozó állítások ugyanazokat a mélységű matematikai tételeket igénylik, amelyeket a komplikáltabb modellek. Ezek után adjuk meg a tiszta cseregazdaság definícióját!

3.B.1. Definíció (Tiszta cseregazdaság). *Az*

$$e = \left\{ M, N, I, \{X_i\}_{i=1}^{I}, \{\succcurlyeq_i\}_{i=1}^{I}, \{0, \omega_i\}_{i=1}^{I}, Y \right\} \in \mathcal{E}_{kl}$$

gazdaságot tiszta cseregazdaság*nak hívjuk akkor és csak akkor, ha*

$$M = 0; \quad Y = \{0\}.$$

A tiszta cseregazdaságok családját az $\mathcal{E}_{cs}$ szimbólummal fogjuk jelölni.

3.B.2. A Samuelson-gazdaság

A *Samuelson*-gazdaság elnevezést csak azért használjuk, hogy egy rövid, jól definiált fogalommal tudjunk utalni az olyan típusú klasszikus gazdaságra, amelyet rögtön definiálunk. Az elnevezés nem igazán korrekt, mert a nevezett *Nobel*-díjas tudós két alapvető jelentőségű cikkében[49] kicsit általánosabb modellel foglalkozott, mint amit rögtön bemutatunk. Ez a modell – szemben a tiszta cseregazdasággal – pont azért ilyen egyszerű, hogy a vizsgálandó közjószág-problémának csak azokra az aspektusaira mutasson rá, amelyek a legfontosabbak. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ezek az egyszerűsítések milyen hatalmas mértékben könnyítik meg a dolgunkat. Eltekinthetünk számos matematikai regularitási kérdéstől, amelyekbe az általános modell keretei között lépten-nyomon beleütközünk. Ezekre természetesen az adott pillanatban felhívjuk a figyelmet.

A *Samuelson*-gazdaságban csak két jószágot, egy köz- és egy magánjószágot szerepeltetünk. Ebből az Y technológiára (termelési halmazra) olyan tulajdonságok következnek, amelyek egyrészt

[49] *Samuelson* [1954] és *Samuelson* [1955].

alapvetően megkönnyítik az elemzést, másrészt fölöslegessé tesznek bizonyos megfontolásokat, amelyeket az általános modellben meg kell majd tennünk. Az Y technológia ekkor egy olyan zárt, konvex kúp lesz, amely teljes egészében a negyedik síknegyedben található. Ebből következően a hatékony termelési tevékenységek halmaza egy félegyenes[50], így minden közjószágszinthez egyértelműen hozzárendelhető egy, az adott közjószágmennyiséget előállítani képes magánjószág-mennyiség. Ez az egyértelmű megfeleltetés lesz az oka annak, hogy a későbbiekben nagymértékben egyszerűsödnek az eredményeink. Vegyük ugyanakkor észre, hogy ebben az egyszerű modellben is fennállnak majd ugyanazok az úgynevezett potyázási problémák, amelyek a közjavakat is tartalmazó gazdaságok sajátjai.

3.B.2. Definíció (Samuelson-gazdaság). *Az*

$$e = \left\{M, N, I, \{X_i\}_{i=1}^{I}, \{\succcurlyeq_i\}_{i=1}^{I}, \{0, \omega_i\}_{i=1}^{I}, Y\right\} \in \mathcal{E}_{kl}$$

gazdaságot Samuelson-gazdaság*nak hívjuk akkor és csak akkor, ha*

$$M = 1; \quad N = 1.$$

A Samuelson-*gazdaságok családját az $\mathcal{E}_S$ szimbólummal fogjuk jelölni. Az állandó mérethozadék feltételezéséből az is következik, hogy a közjószág egységét alkalmasan megválaszthatjuk oly módon, hogy a transzformációs ráta éppen egységnyi legyen. A továbbiakban ezzel a feltevéssel élünk a* Samuelson-*gazdaságokra vonatkozóan.*

[50] Ebből a lineáris kapcsolatból a konstans mérethozadék azonnal látszik. Természetesen ez utóbbi nem a javak számosságára tett feltevésből, hanem az Y halmaz kúp voltából következik.

3.C. A gazdasági program és a közösségi döntési probléma

Ebben a pontban azt mutatjuk meg, hogy a klaszikus gazdaságok és a hozzájuk rendelhető, bizonyos allokációkat bizonyos elvek alapján kiválasztó *gazdasági programok* miként írhatók fel egy közösségi döntési problémaként. A pontos megfeleltetés előtt vázoljuk a kapcsolatot, illusztrációként a *Samuelson*-gazdaságot használva.

A közösségi döntési problémának – ahogy azt az 1.A.1. Definícióban megadtuk – öt komponense van, ezeket kellene kapcsolatba hoznunk a klasszikus gazdaságokkal. Egy komponenst természetes módon azonosíthatunk, ez a döntéshozók halmaza. A klasszikus gazdaságban a szereplők a fogyasztók, és láttuk, hogy ők is döntéshozók: mérlegelve a rendelkezésükre álló információkat és céljaikat, megfelelő lépéseket tesznek annak érdekében, hogy e célokat minél teljesebb módon kielégíthessék.[51] Melyek ezek az információk és célok? A kérdés első felét egyelőre átfogalmazzuk. Melyek lehetnek általában ezek az információk? Nyilván az adott $e \in \mathcal{E}$ gazdaság jellemzői, azaz az a lista, amellyel a gazdaságot definiáljuk. Külön feltevést igényel annak az eldöntése, hogy ebből a listából mit is ismer ténylegesen a fogyasztó. Ebben a pillanatban tegyük félre ezt az aspektust, csak annyit szögezzünk le, *elvileg* nem kizárt, hogy minden listaelem azonosítható számára, de *gyakorlatilag* csak azokat ismerheti, amelyek közvetlenül rá vagy mindenkire vonatkoznak. Ez utóbbi megfogalmazás azt sejteti, hogy egy klasszikus gazdaságra mint egy világállapotra tekinthetünk, amelynek komponensei a fogyasztókra mint döntéshozókra vonat-

[51] Vegyük észre, mennyire homályosan fogalmaztunk. Ez szándékos, ebben a pillanatban nem akartunk speciális döntési mechanizmusokra hivatkozni. Az előző pontban példaként idézett árelfogadás egy ilyen speciális döntési eljárás; ott egészen pontosan megadtuk, miként cselekednek a fogyasztók. Ezeknek az *elkülönült, decentralizált* cselekedeteknek eredőjeként alakult ki egy gazdasági állapot.

koznak. Attól függően, hogy később miről is tételezzük fel, hogy privát információ, a közös θ_0 komponens tartalmazza mindazokat az információkat, amelyekről mindenki értesül. A *Samuelson*-gazdaságban ilyen például az Y termelési halmaz. A többi θ_i komponensbe pedig az ω_i készleteket és a $\succsim_i$ preferenciákat foglalhatjuk. Nyilván a világállapotok halmaza nem lesz más, mint az összes, az adott feltételeknek megfelelő[52] klasszikus gazdaság. Ha azonban a kezdeti készleteloszlás is közismert, akkor ez is a θ_0 komponensbe kerülhet. Ekkor θ_i csak a megfelelő preferenciarendezést tartalmazza.

Egy világállapotból, azaz most már egy gazdaságból, könnyen kaphatnánk a hozzárendelt $R(X, \theta)$ profilt, ha az X alternatívahalmazt már azonosítottuk volna. Tegyük meg most ezt! Itt azonban egy kis problémába ütközünk. Ha egy gazdaságot úgy vizsgálunk, ahogy azt az előző pontban tettük, akkor tudjuk, a fogyasztó preferenciái *saját* fogyasztási kosaraira vonatkoznak. A *Samuelson*-gazdaság példájánál maradva minden fogyasztó egy $(q, x_i) \in X_i$ párt hasonlít össze egy másik $(q', x_i') \in X_i$ párral. A gazdaságban azonban nem egy ilyen fogyasztási vektor az alternatíva, hanem egy allokáció. Miként lehetne feloldani ezt az ellentmondást?

Az általánosan elfogadott megoldás az, hogy – összhangban a klasszikus gazdaság felfogásával – a fogyasztókról feltételezzük, hogy *önző*k, azaz csak az érdekli őket, hogy saját maguk mihez jutnak hozzá. Ebben a felfogásban a szomszéd kertje sohasem zöldebb. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a fogyasztó két olyan allokációt, amelyben a neki jutó fogyasztási vektor ugyanaz, ugyanolyan „jónak” tekint. Az ilyen preferenciákat *önző* preferenciáknak hívjuk. A klasszikus gazdaságban ezzel a felfogással élünk, ezért az X alternatívahalmazt az $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ allokációshalmazzal azonosítjuk[53],

[52] Ezzel a kitétetellel arra utalunk, hogy a későbbiekben olyan problémákkal is foglalkozunk, amelyek nem vonatkoztathatók az összes klasszikus gazdaságra.

[53] A θ világállapot a készleteloszláson keresztül nyilván a megvalósítható allokációk $\mathcal{A}_{ok}$ halmazát is megadja.

és az önző preferenciák felfogását beépítjük a $\mathcal{D}$ preferenciaprofil-leképezésbe.

3.C.1. Definíció (Önző preferenciák). *Az $e \in \mathcal{E}(M, N, I)$ gazdaságban az*

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}(M, N, I))$$

halmazon értelmezett preferenciák önzőek, ha $\forall i \in \mathcal{I}$-re és

$$a, a' \in \mathcal{A}(\mathcal{E}(M, N, I)) \text{-re}$$

$$\left[(q, x_i) = \left(q', x_i'\right)\right] \Rightarrow a \sim_i a'.$$

Az önző preferenciák családját az $\mathcal{R}^{ö}\left(\Re_+^M \times \prod_{i=1}^I \Re_+^N\right)$ szimbólummal jelöljük.

3.C.2. Megjegyzés. *Látható, ha egy gazdaságban a preferenciák önzőek, egy döntéshozó stratégiáját a saját fogyasztási halmazán a szokásos módon értelmezett $\succsim_i$ preferenciák vezérlik. Másképpen fogalmazva az i-edik fogyasztónak az X_i fogyasztási halmazon értelmezett $\succsim_i$ preferenciája az $\mathcal{A}(\mathcal{E}(M, N, I))$ halmazon értelmezett önző preferenciáját egyértelműen meghatározza.*

Természetesen másként kellene eljárnunk például, ha speciális problémákat, externáliákat, külső gazdasági hatásokat is modellezni szeretnénk. Vegyük azonban észre, hogy ez nem változtatna azon, hogy a gazdaság közösségi döntési problémának fogható fel, csak ügyesen kell a komponenseket megfogalmaznunk.

Most már csak annyi maradt hátra, hogy a közösségi döntési problémában szereplő társadalmi választási szabálynak adjunk klasszikus gazdaságbeli megfelelőt. Ez a megfogalmazás azonban egy kicsit félrevezető. Nincs ugyanis ilyen egyértelmű megfeleltetés. Mindig a konkrét vizsgálat dönti el, mi is legyen a társadalmi választási szabály. Egy ilyen szabály lehet az például, hogy minden gazdasághoz keressük a *Pareto*-optimális pontok halmazát. Ez egy tipikus társadalmi választási szabály: egy világállapothoz az alternatívák egy halmazát rendeli. Vegyük azonban észre: ez a *TVSz* kívülről adott, a gazdaságban önmagában nincs semmi, ami ezt indokolná. Éppen ezért merül fel majd a későbbiekben a kérdés, hogy létezik-e mechanizmus, amely megvalósítaná, implementálná. Más megfogalmazásban: rávehetők-e a fogyasztók arra, hogy saját önérdeküket követve olyan akciókat hajtsanak végre, hogy azok végül *Pareto*-optimális pontot eredményezzenek? Ezzel a kérdéssel alaposabban a következő fejezetben foglalkozunk majd. Most csak egy másik példával próbáljuk meg megvilágítani a problémát.

Legyen a társadalmi választási szabályunk egy tiszta cseregazdaságban az, amelyik a gazdasághoz mint világállapothoz a versenyzői egyensúlyi allokációk halmazát rendeli. Vegyük észre, ez *TVSz,* és nem szabad összekevernünk az előző pontban adott versenyzői (általános gazdasági) mechanizmussal. Ez utóbbiban részletesen megadtuk azt a „szabálykönyvet”, amelynek az alapján a fogyasztók cselekedtek, és eredményül versenyzői egyensúlyi allokációt nyertünk. Visszatérve az előző bekezdésben használt fogalmakhoz, a versenyzői (általános) mechanizmus implementálta a *walrasi* társadalmi választási szabályt, amit „jó” normatív tulajdonságai miatt kívülről adtunk meg, és ehhez definiáltuk a mechanizmust.[54]

A pont elején jelzett teljes és precíz megfeleltetéshez vezessük be a következő fogalmat:

3.C.3. Definíció (Gazdasági program). *Az* $\mathcal{E}(M,N,I) \subseteq \mathcal{E}_{kl}$ *gazdaságcsaládra vonatkozó* $GP : (\mathcal{E}(M,N,I)) \rightrightarrows \mathcal{A}(\mathcal{E}(M,N,I))$ gazdasági program *egy*

$$e \in \mathcal{E}(M,N,I)$$

[54] Mint azzal a későbbiekben még foglalkozni fogunk, a walrasi mechanizmus ellen több, igen komoly kifogás merül fel. Kettő közülük: (i) egyáltalán nem biztos, hogy a fogyasztóknak érdekükben áll a posztulált árelfogadás; (ii) a legtöbb esetben a mechanizmus nem ad egyértelmű kimenetet, hiszen a benne szereplő szabályok pont–halmaz leképezések és nem függvények.

gazdasághoz egy

$$GP\left(e\right) \subseteq \mathcal{A}\left(e\right)$$

halmazt rendel. Ha egy $GP\left(\mathcal{E}\left(M,N,I\right)\right)$ *esetén* $\forall e \in \mathcal{E}\left(M,N,I\right)$*-re*

$$\left|GP\left(e\right)\right| = 1,$$

akkor a program egyértelmű.

3.C.4. Definíció–Tétel. *Egy* $\mathcal{E}\left(M,N,I\right) \subseteq \mathcal{E}_{kl}$ *gazdaságcsaládból és egy*

$$GP\left(\mathcal{E}\left(M,N,I\right)\right)$$

gazdasági programból álló párhoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy közösségi döntési problémá*t.*

Bizonyítás: Nincs más dolgunk, mint a $\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D},\ f\}$ lista elemeit gazdasági fogalmakkal azonosítani:

- $\mathcal{I} \triangleq \mathcal{I}$, azaz a döntéshozók halmaza nem más, mint a fogyasztók halmaza;
- $X \triangleq \mathcal{A}\left(\mathcal{E}\left(M,N,I\right)\right) \triangleq \Re_{+}^{M+I\cdot N}$, azaz az alternatívák halmaza a lehetséges allokációk halmaza;
- $\Theta \triangleq \left(\Theta_0 \times \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I\right)$, ahol

  $$\Theta_0 \subseteq \mathcal{Y}\left(M,N\right); \quad \Theta_i \subseteq \Re_{+}^{N} \times \mathcal{R}_{kl}\left(\Re^{M+N}\right),\ i = 1,2,\ldots,I$$

  és $\forall \theta \in \Theta$-ra a

  $$\theta \triangleq \left\{Y, \left(\omega_1, \succeq_1\right), \ldots, \left(\omega_I, \succeq_I\right)\right\}$$

  világállapotban szereplő objektumok egy $e \in \mathcal{E}\left(M,N,I\right)$ gazdaság megfelelő értékei.
  Másképpen létezik egy olyan

  $$\theta : \mathcal{E}\left(M,N,I\right) \rightarrow \left\{\mathcal{Y}\left(M,N\right) \times \prod_{i=1}^{I} \Re_{+}^{N} \times \mathcal{R}_{kl}\left(\Re^{M+N}\right)\right\},$$

a gazdaságok és a világállapotok halmaza közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, amire $\forall e \in \mathcal{E}(M, N, I)$ esetén

$$\theta^{-1}(\theta(e)) = e.$$

- $\mathcal{D}(\Theta)$ a világállapotok által indukált preferenciaprofilok halmaza:

$$\mathcal{D} : \Theta \to \times_{i=1}^{I} \mathcal{R}_{kl}^{ö}\left(\Re_{+}^{M+I\cdot N}\right),$$

ahol

$$\mathcal{D}(\theta) \triangleq \succsim ((\mathcal{A}(\mathcal{E}(M, N, I)), \theta)) \triangleq$$
$$(\succsim_1 (\mathcal{A}(\mathcal{E}(M, N, I)), \theta_1), \ldots, \succsim_I (\mathcal{A}(\mathcal{E}(M, N, I)), \theta_I)).$$

- $f : \Theta \rightrightarrows X$ $TVSz$, amiben $\forall\theta \in \Theta - ra$

$$f(\theta) \triangleq GP\left(\theta^{-1}\right).$$

Másképpen: $\forall\theta \in \Theta$-ra

$$[a \in f(\theta) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}(M, N, I))] \iff \left[a \in GP(e),\ e = \theta^{-1}(\theta)\right].$$

$\square$

3.C.5. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ha pontosan definiáltunk egy GP gazdasági programot, akkor a hozzá tartozó* KDP *is adott. Emiatt talán megengedhető az a pongyola szóhasználat, amellyel gyakran találkozunk majd a következő fejezetben. Ha azt olvassuk, hogy egy gazdasági programot implementálunk, akkor ez azt jelenti majd, hogy a hozzá tartozó* KDP*-beli társadalmi választási szabályt (függvényt) implementáljuk egy mechanizmussal. Azért mutattuk meg, hogy egy gazdasági program tulajdonképpen egy közösségi döntési probléma, hogy az előző fejezetekben levezetett eredményeket hasznosítani tudjuk. A jelöléseinket – megfelelően a jelzett pongyolaságnak – is egyszerűsítjük majd: a*

Θ *világállapot-halmaz helyett a megfelelő* $\mathcal{E}$ *gazdaságcsaládot, a* θ *világállapot helyett az* e *gazdaságot és a* θ_i *világállapot-komponens helyett az aktuális* $e_i \triangleq (\omega_i, \succsim_i)$ *párost, a* $\mathcal{D}(\theta)$ *preferenciaprofil helyett a*

$$\succsim \triangleq (\succsim_1, \ldots, \succsim_I)$$

együttest jelentő szimbólumot használjuk majd.

IV.

GAZDASÁGI PROGRAMOK DOMINÁNS IMPLEMENTÁLÁSA

4.A. Mechanizmus és erőforrás-allokáció

A következő fejezetekben összekapcsoljuk mindazt, amit az eddigiekben kifejtettünk. Felhasználjuk az implementációelméletet arra, hogy megvizsgáljuk, milyen gazdasági programokat tudunk (elvileg) megvalósítani, milyen mechanizmusokat tervezhetünk implementálásukra. Figyelmet fordítunk majd arra is, hogy bizonyos, már ismert gazdasági programokat erről az oldalukról is jellemezzünk. Rögtön e fejezet elején figyelmeztetnünk kell azonban arra, hogy igazi gyakorlati útmutatást nem várhatunk el, nem fogunk a valós gazdasági életben változtatás nélkül, azonnal alkalmazható mechanizmusokat, eljárásokat szerkeszteni. Emiatt nem lenne szerencsés, ha bárki az itt elmondandókat a mindennapos gazdaságpolitikai vitákban fegyverként használná. E célra – és még sok másra – nem alkalmasak.

Ha a dolgozat terjedelmét elfogadható határok között kívánjuk tartani, akkor igen kíméletlenül válogatnunk kell a témák között. A tágabb terület szakirodalma könyvtárnyi,[55] bizonyos részterületek kidolgozattabbak, másokban még csak a kutatás elején tartunk. Nem térhetünk ki – még csak utalás szintjén sem – mindegyikre. Kevés kivétellel csak olyan modellekkel foglalkozunk majd, amelyek beilleszthetők az általános egyensúlyelméleti keretek közé, és a gazdaság egészével kapcsolatosak. Ezekben a fejezetekben rengeteg hivatkozást találunk majd, nem lesz helyünk mindent bizonyítani. Csak az alapvető fontosságú és lehetőleg rövid bizonyításokat közöljük.

Először azonban tisztázunk egy olyan problémát, amelynek a tisztázására a tanulmányok többségében nem kerül sor, és ezért elég nagy az összevisszaság ebben a kérdésben. Ha alaposan megvizsgáljuk a mechanizmus 2.A.1. Definícióban adott meghatározását, akkor láthatjuk, hogy maga a mechanizmus a hozzátartozó közösségi döntési problémának csak az első négy komponenséből

[55] Ennek ellenére magyar nyelven szinte semmi sem jelent meg belőle.

származtatható. Az ötödik összetevő, a társadalmi választási függvény csak akkor kerül a képbe, amikor az implementációról beszélünk. A mechanizmus önmagában vett fogalmához nincs rá szükség. A mechanizmus, ha adott a használandó egyensúlyfogalom, önállóan meghatároz egy leképezést, ami a világállapotok halmazának egy eleméhez hozzárendeli az egyensúlyi kimenetek halmazát. Ez a halmaz – az egyensúlyfogalomtól függően – nem feltétlenül egyelemű. Ez a $\Psi : \Theta \rightrightarrows X$ pont–halmaz leképezés tehát minden θ világállapothoz a $g\left(E\left(S, g, \theta\right)\right)$ halmazt rendeli. Egyes szerzők ezt a származtatott leképezést hívják mechanizmusnak. Mi megmaradunk az eredetileg adott meghatározásunknál, és az egyensúlyfogalomra mint a döntéshozók viselkedési szabályát meghatározó egyfajta magatartási mintára, külön hivatkozunk.[56] Ha mindezt a gazdaságok családjára vonatkoztatjuk, akkor egy mechanizmus és egy egyensúlyfogalom együttese nem más, mint egy erőforrás-allokációs eljárás.[57] Ilyen értelemben tehető fel ezután a kérdés: egy erőforrás–allokációs modell által szolgáltatott eredmény vajon megfelel-e egy gazdasági program elvárásainak? Másképpen: a szóban forgó gazdaságok családján egy gazdasági mechanizmus (egy adott egyensúlyfogalomban) implementál-e, megvalósít-e egy gazdasági programot? Erre próbálunk válaszokat adni a továbbiakban.

Még egy technikai megjegyzést kell tennünk. A következőkben, miután feltételeztük, hogy a világállapotok közös komponensét mindenki ismeri, jelölésbeli egyszerűsítést engedünk meg. Ha egy, az $\mathcal{E}_{kl}$ gazdaságok családjához rendelt direkt mechanizmusról beszélünk, akkor a stratégiaegyüttesek halmazát az $\mathcal{E}$ szimbólummal fogjuk jelölni, annak ellenére, hogy a konzekvens jelölés az $\mathcal{E}_{-0}$ lenne. Hasonlóképpen járunk el az egyes stratégiaegyütteseknél is. Ha figyelembe vesszük ezt a megjegyzést, nem tévedhetünk az interpretációban, de nagyban egyszerűsítjük a jelölésrendszerünket.

[56] Vesd össze *Groves–Ledyard* [1987].

[57] *Hurwicz* [1960], *Hurwicz* [1974] stb.

Ebben a fejezetben a mechanizmusokhoz a domináns egyensúly fogalmát társítjuk. Egyaránt foglakozunk egyértelmű, illetve nem egyértelmű gazdasági programokkal, valamint tiszta cseregazdasággal és *Samuelson*-gazdasággal.Előbb azonban definiáljuk a mechanizmusok két olyan alapvető fontosságú tulajdonságát, amelyeket a továbbiakban végig használunk majd.

4.A.1. Definíció. *Egy*

$$\{\mathcal{I}, X, \Theta, \mathcal{D}, f_{IR}\}$$

KDP-*hoz rendelt*

$$\gamma \triangleq \{S, g, \Theta\}$$

mechanizmus Pareto-hatékony, *ha* $\forall\ \theta \in \Theta$ *esetén*

$$g\left(s\right) \in PO\left(\theta\right), \quad \forall s \in S\text{-re.}$$

A γ *mechanizmus* individuálisan racionális, *ha* $\forall\ \theta \in \Theta$ *esetén*

$$g\left(s\right) \in IR\left(\theta\right), \quad \forall s \in S\text{-re.}$$

4.B. Tiszta cseregazdaság

4.B.1. Mechanizmusok érdekbarátsága

Az első, talán máig is legfontosabb lépést *Leonid Hurwicz* tette a területen. Híres tanulmányában (*Hurwicz* [1972]) először azt a kérdést vizsgálta, hogy egy olyan tiszta cseregazdaságban, ahol a *kezdeti készletelosztás mindenki előtt ismert*, vajon a versenyzői mechanizmus és legfontosabb összetevője, az árelfogadás elfogadható munkahipotézis-e. Arra volt kíváncsi, vajon a gazdaság szereplőinek ténylegesen érdekükben áll-e ebben a mechanizmusban részt venni, azaz a fogyasztók tényleg elfogadják-e az árakat. Intuitíve is megadható a válasz: ha a szereplők száma kicsi, nem. Mit tehetünk ekkor, milyen mechanizmussal helyettesíthetjük a walrasi szabályokat, ha továbbra is azt szeretnénk, a gazdasági allokáció *Pareto*-hatékony és individuálisan racionális legyen, ugyanakkor a fogyasztók is elfogadják. Először ez utóbbi fogalmat tesszük világosabbá és formalizáljuk. Akkor lehetünk biztosak abban, hogy a fogyasztók egy mechanizmust hajlandók követni, ha annak szabályai nem hátrányosak számukra, ha nem mondanak ellent érdekeiknek. Más szóval: ha a mechanizmus érdekbarát. A fogalmat *Hurwicz* a tiszta cseregazdaságok családjához tartozó direkt mechanizmusokra vezette be. Mi egy kicsit módosított és általánosabb gazdaságokra is érvényes formáját használjuk.

4.B.1. Definíció (Érdekbarát mechanizmusok). *Az $\mathcal{E}$ gazdaságok családjához, mint* KDP*-hoz rendelt*

$$\eta \triangleq \{\mathcal{E}, h, \mathcal{E}\}$$

direkt mechanizmus érdekbarát *akkor és csak akkor, ha $\forall e \in \mathcal{E}$-re*

$$e \in DE\left(\mathcal{E}, h, e\right),$$

másképpen $\forall e \in \mathcal{E}$-re és $\forall i \in \mathcal{I}$-re

$$h\left(e_i, e'_{-i}\right) \succsim_i h\left(e'_i, e'_{-i}\right) \quad \forall e'_i \in \mathcal{E}_i, \quad \forall e'_{-i} \in \mathcal{E}_{-i},$$

ahol $\mathcal{E}_i$ az $\mathcal{E}$ gazdaságcsaládban az i-edik fogyasztó összes lehetséges $(\omega_i, \succsim_i)$ párosa.[58] *Másképpen megfogalmazva: az igazmondás mindenki számára domináns stratégia.*[59]

A mechanizmus érdekbarátságából egyszerűen származtathatjuk egy gazdasági program érdekbarátságát.

---

[58] A $-i$ index jelentése értelemszerű.

[59] *Hurwicz* ennél gyengébb tulajdonságot követelt meg az érdekbarátságtól. Nála egy érdekbarát mechanizmusban az igazság *Nash*-egyensúlyi.

4.B.2. Definíció (Érdekbarát gazdasági program). *Egy egyértelmű*

$$GP_f : \mathcal{E} \to \mathcal{A}_{ok}(\mathcal{E})$$

gazdasági program érdekbarát, *ha domináns stratégiákban (igazsághűen) implementálható egy érdekbarát mechanizmussal.*

4.B.3. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ez pontosan az a fogalom, amit a társadalmi választási függvényekre csalásbiztosságnak hívtunk. Ennek ellenére a gazdasági programokkal kapcsolatban ezzel a szóhasználattal élünk.*

Ennyi előkészítés után kimondhatunk egy segédtételt:

4.B.4. Segédtétel (Hurwicz). *Az $\mathcal{E}_{cs}(0, 2, 2)$ tiszta cseregazdaságok családjához nem rendelhető olyan érdekbarát*

$$\eta \triangleq \{\mathcal{E}, h, \mathcal{E}\}$$

direkt mechanizmus, amely esetében $\forall e \in \mathcal{E}_{cs}(0, 2, 2)$-re

$$h(e) \in Cc(e) \triangleq PO(e) \cap IR(e).$$

Más szóval: ezen a gazdaságcsaládon nincs érdekbarát, Pareto-*hatékony és individuálisan racionális mechanizmus*[60]*.*

Bizonyítás: A bizonyításban mutatunk egy olyan $e \in \mathcal{E}_{cs}(0, 2, 2)$ gazdaságot, amelyben nem lesz érdekbarát, *Pareto*-hatékony és individuálisan racionális mechanizmus. Először azt látjuk be, hogy speciálisan a versenyzői mechanizmus nem érdekbarát, aztán ezt általánosítjuk tetszőleges *Pareto*-hatékony és individuálisan racionális mechanizmusra. Az általunk adott gazdaság némileg eltér az

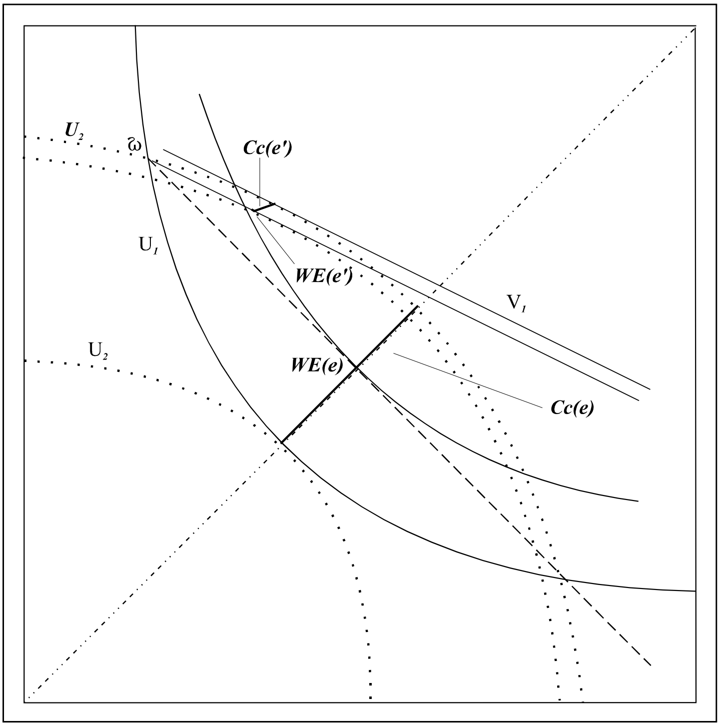
[60] A $Cc(e)$ *szerződési görbe* (contract curve) fogalmát abban az értelemben használom, ahogy *Mas-Colell és mások* [1995] az 523. oldalon, azaz a *Pareto*-optimális és individuálisan racionális pontok halmazának metszeteként.

eredeti cikkben szereplőtől, egyrészt egyszerűbb, mint az, másrészt abban a kezdeti készletelosztás nem volt belső pont.

Legyen

$$e = \left\{ \begin{array}{c} 0; 2; 2; \Re^2_+, \Re^2_+; \\ U_i\left(x_i^1, x_i^2\right) = x_i^1 \cdot x_i^2, i = 1, 2; \\ \omega_1 = (0{,}25;\ 0{,}75)\,, \omega_2 = (0{,}75;\ 0{,}25)\,; \{0\} \end{array} \right\}.$$

Ezt a gazdaságot ábrázolja a 4.B.1. ábra.



4.B.1. ábra: A tiszta cseregazdaság manipulálhatósága

Látható, hogy ez a gazdaság mindenben kielégíti a klasszikus cseregazdaság feltételeit. Könnyen kiszámítható, hogy ebben a gazdaságban pontosan egy versenyzői egyensúlyi állapot van. Ebben az állapotban az árszimplexbeli egyensúlyi árvektor: $p^* = (0{,}5;\ 0{,}5)$, és az egyensúlyi allokáció:

$$WE(e) = x^* = (x_1^*, x_2^*) = ((0{,}5;\ 0{,}5), (0{,}5;\ 0{,}5)).$$

Az egyensúlyban a két fogyasztó által realizált hasznosság pedig:

$$U_i(0{,}5;\ 0{,}5) = 0{,}25;\ i = 1, 2.$$

A gazdaságban a *Pareto*-optimális allokációk halmaza:

$$PO(e) = \{(a; b), (1-a; 1-b) \,|\, 0 \leqq a \leqq 1; a = b\}. \tag{4.B–1}$$

Az individuálisan racionális allokációk halmaza:

$$IR(e) = \left\{ ((a; b), (1-a; 1-b)) \left| \begin{array}{c} 0 \leqq a, b \leqq 1; \quad a \cdot b \geqq \frac{3}{16}; \\ (1-a) \cdot (1-b) \geqq \frac{3}{16} \end{array} \right. \right\}. \tag{4.B–2}$$

A walrasi mechanizmus tulajdonságaiból eddig is tudtuk, és a konkrét példában is azt kaptuk, hogy

$$WE(e) \in Cc(e) = PO(e) \cap IR(e).$$

Most megmutatjuk, hogy az első játékosnak nem áll érdekében az igazi preferenciái szerinti egyensúlyi árakhoz alkalmazkodnia. Jobban jár, ha hamis preferenciákat „jelent be". Legyen az általa bejelentett vagy tettetett preferenciarendezés a következő:

$$V_1\left(x_1^1, x_1^2\right) = x_1^1 + 2x_1^2,$$

és ez az új $e' \in \mathcal{E}_{cs}(0, 2, 2)$ gazdaság csak ebben különbözik az eredeti e gazdaságtól. Hasonlóan könnyű számolásokkal belátni, hogy az új egyensúlyi árvektor $(1/3; 2/3)$, az új egyensúlyi allokáció pedig

$$WE(e') = \left(\left(\frac{6}{16}; \frac{11}{16}\right), \left(\frac{10}{16}; \frac{5}{16}\right)\right).$$

Ebben az allokációban pedig az első fogyasztó igazi preferenciákon értékelt haszna

$$U_1\left(\frac{6}{16};\frac{11}{16}\right)=\frac{66}{256}>0{,}25,$$

azaz az első fogyasztónak határozottan érdekében áll hamis preferenciákat tettetni.

Eddig csak a walrasi mechanizmusról mutattuk be, hogy nem érdekbarát. Tekintsünk most egy tetszőleges *Pareto*-hatékony és individuálisan racionális

$$\eta \triangleq \{\mathcal{E},h,\mathcal{E}\}$$

mechanizmust. Erről tudjuk, hogy

$$h\left(e\right)\in Cc\left(e\right),$$

azaz a $h\left(e\right)$ allokáció kielégíti a (4.B–1) és (4.B–2) egyenlőségek szabta feltételeket. Tegyük fel most, hogy

$$h\left(e\right)\in\left\{\left(\left(a;b\right),\left(1-a;1-b\right)\right)\middle|\sqrt{\frac{3}{16}}\leqq a=b\leqq 0{,}5;\right\}.$$

Ekkor – függetlenül attól, hogy e szakasz melyik pontja is $h\left(e\right)$ – a walrasi mechanizmus eseténél alkalmazott „csalás” az első fogyasztó számára most is megteszi. Ugyanis az e' gazdaságban a $Cc\left(e'\right)$ szerződési görbe egyenlete

$$Cc\left(e'\right)\triangleq PO\left(e'\right)\cap IR\left(e'\right)=$$
$$\left\{\left(a;b\right),\left(1-a;1-b\right)\middle|\frac{6}{16}\leqq a\leqq 1-\sqrt{\frac{3}{8}};1-a=2\left(1-b\right)\right\}.$$

Ezek közül láthatóan a kapott $WE\left(e'\right)$ allokáció jelenti a legkisebb hasznot az első fogyasztó számára, ugyanakkor az igazi e gazdaságban a $h\left(e\right)$ allokáció által számára biztosított haszon pedig nem haladhatja meg azt, amit a $WE\left(e\right)$ allokációban szerez.

Ha viszont

$$h(e) \in \left\{ ((a;b), (1-a;1-b)) \middle| 0,5 \leqq a = b \leqq 1 - \sqrt{\frac{3}{16}}; \right\},$$

akkor a második fogyasztó hazudhatja a

$$V_2\left(x_2^1, x_2^2\right) = x_2^1 + 2x_2^2$$

preferenciarendezést. □

4.B.5. Megjegyzés. *Néhány nagyon fontos megjegyzés kívánkozik ide.*

(1) *Mint arra már utaltunk, a* Hurwicz *által adott eredeti gazdaság kicsit különbözött ettől. Ez is arra a tényre mutat rá, hogy az a jelenség, miszerint a játékosoknak érdekükben áll „hazudni”, nem csak erre a speciális gazdaságra érvényes. Az alkalmazott* Cobb–Douglas *típusú és lineáris preferenciák önmagukban nem okai az érdekbarátság hiányának, csak illusztrációként szolgáltak egy általánosabb jelenséghez. Inkább úgy fogalmazhatnánk, az a speciális, ha egy gazdaságban nem áll fenn ez a csalásra késztetés.* Hurwicz *azt is megmutatta, általában milyen technikával találhatunk „majdnem minden” gazdasághoz olyan másikat, amelyet az előzőből a „kegyes csalás” révén nyerünk.*

(2) *Nem állítottuk, hogy az első fogyasztó által alkalmazott hazug preferenciák optimális csalást jelentettek volna számára. Ahhoz egyébként, hogy az optimális csalást kiszámítsa, ismernie kellene a másik fogyasztó hasznossági függvényét. Pont ez az azonban, amiről feltételeztük, hogy privát információ, csak a fogyasztó maga tud róla. Emiatt kell(ene) használnunk a domináns egyensúly koncepcióját.*

(3) *Ha alaposan megvizsgáljuk a bizonyítást, észrevehetjük, kicsivel többet láttunk be, mint amire vállalkoztunk. Azt láttuk be ugyanis, hogy az igazság „bejelentése” nem a legjobb válasz a másik stratégiájára, azaz azt, hogy az igazság nem* Nash-egyensúly.

Ebből nyilvánvalóan következik, hogy domináns egyensúly sem lehet. Mint arra már utaltunk, Hurwicz *pont így definiálta az érdekbarátság fogalmát: az igazság mindig* Nash-egyensúly *az adott direkt mechanizmusban.*
(4) *Utolsó megjegyzésnek hagytuk messze a legfontosabbat. Vegyük észre, az e és az e' gazdaságokban a szerződési görbe* nem esik egybe, *még csak közös pontjuk sincs. A hazuság tehát nem pusztán „erkölcsileg rossz", hanem hozzájárul a hatékonyság összeomlásához is. Ebben semmi igazán meglepő nincs, mondhatnánk, hiszen ebben a gazdaságban a szereplők kvázi monopol pozícióban vannak, nyilván nem fogadják el az árakat. A monopólium, vagy akár csak a piaci erőfölény, szinte törvényszerűen vezet a hatékonyság megszűnéséhez. Ebben az érvelésben van némi igazság, csak azt nem veszi észre, hogy pont ezt* bizonyítottuk. *Az árelfogadás, mint láttuk, nem* érdekbarát, *sőt egyetlen más mechanizmus sincs, ami az érdekbarátsága mellett szimultán garantálná a hatékonyságot és az individuális racionalitást.*

A *Hurwicz*-tétel az implementációról szóló második fejezetünk alapján jóval erősebbé tehető.

4.B.6. Tétel. *Az $\mathcal{E}_{cs}(0,2,2)$ tiszta cseregazdaságok családján egy* Pareto-*hatékony GP gazdasági programot domináns stratégiákban implementáló mechanizmus szükségképpen nem individuálisan racionális, azaz ezen a gazdaságcsaládon nem létezik érdekbarát,* Pareto-*hatékony és individuálisan racionális gazdasági program.*

Bizonyítás: Ha a gazdasági program domináns egyensúlyban implementálható, akkor a gazdaságcsaládhoz rendelt KDP-ban a 2.B.6. (revelációs) Tétel szerint igazsághűen is implementálható domináns stratégiákban. A 2.D.2. Segédtétel értelmében ekkor létezik egy olyan egyénenként monoton

$$GP_f : \mathcal{E}_{cs}(0,2,2) \to \mathcal{A}(\mathcal{E}_{cs}(0,2,2))$$

egyértelmű gazdasági program, amire $\forall e \in \mathcal{E}_{cs}(0,2,2)$ esetén

$$GP_f(e) \in GP(e).$$

Erről a 2.C.11. Segédtétel révén tudjuk, hogy domináns stratégiákban implementálható, akár igazsághűen is, azaz érdekbarát. Ez viszont ellentmond a *Hurwicz*-tételnek, mert GP_f nyilvánvalóan egy *Pareto*-hatékony és individuálisan racionális gazdasági mechanizmus is egyben. □

A 4.B.6. Tétel állítása igen zavaró. Annyit jelent-e vajon, hogy a fogyasztók viselkedésére csak egyfajta racionalitást, az érdekbarátságot feltéve, sutba kell dobnunk az eddig általánosan elfogadott gazdasági értékeket, mert ezek úgysem teljesülhetnek? Szerencsére, nem egészen. Némi reményt adhat az a tudat, hogy a *Hurwicz*-tétel ebben a formájában csak olyan gazdaságokra érvényes, amelyekben két döntéshozó van. Vajon a szereplők száma mennyiben oka ennek a negativitásnak? Erre a kérdésre a pontos választ még nem ismerjük. Az elmúlt két évtizedben azonban született néhány olyan eredmény, amely nem sok helyet hagy az optimizmusnak. Ezek közül egyet említünk, amil *Ledyard* nevéhez fűződik. Ez közvetlenül kötődik a fogyasztók számához. Vegyük észre, hogy egy olyan tiszta cseregazdaságban, amelyben két fogyasztó szerepel, a gazdaság magja[61] egybeesik a szerződési görbével. Ennek az az oka, hogy e két fogyasztó csak két fajta koalíciót alkothat: vagy egyszemélyest, vagy teljeset. Az egyszemélyes koalíciók azokat az allokációkat ellenzik, amelyek nem biztosítanak nekik a készleteiknek megfelelő hasznosságot (individuális racionalitás), a teljes a nem *Pareto*-hatékonyakat. Belátható a következő

4.B.7. Tétel (Ledyard). *A $3 \leqq I \leqq \infty$ esetben a tiszta cseregazdaságok*

$$\mathcal{E}_{cs}(0,N,I)$$

[61] Lásd például *Varian* [1993] a 388. oldalon. Kicsit pongyolán: a mag azoknak az allokációknak a halmaza, amelyekből egy koalíció sem akar „újraszerződni”.

családján nem létezik olyan mechanizmus, amely a gazdaság magját mint gazdasági programot domináns stratégiákban implementálná.

Bizonyítás: Lásd *Ledyard* [1977]. □

Ledyard valójában ennél többet bizonyít. Azt látja be, hogy tetszőleges klasszikus cseregazdaságban, ha a kezdeti készlet nem *Pareto*-hatékony és a gazdaság magja nem egyelemű,[62] akkor ebben a gazdaságban nincs olyan mechanizmus, amelynek létezne domináns egyensúlya. Ez is alátámasztja azt a korábbi megjegyzésünket, miszerint a *Hurwicz*-tételben szereplő tulajdonságok csak speciális gazdaságokban teljesülhetnek. Ez az eredmény mintha ellentmondásban lenne a híres, *Aumann*tól származó tétellel, miszerint egy olyan atommentes gazdaságban, ahol a fogyasztók halmaza kontinuum számosságú, a gazdaság magja egybeesik a *walrasi* allokációk halmazával.[63] Ez ugyanis pont azt jelenti, hogy egy ilyen végtelen szereplős gazdaságban a versenyzői mechanizmus érdekbarát. Az ellentmondás persze csak látszólagos. Hasonlóan ahhoz, ahogy *Debreu* és *Scarf* megmutatta[64], hogy az eredeti edgeworth-i gondolat, miszerint a szereplők számának növekedésével a mag ráhúzódik a walrasi egyensúlyi allokációk halmazára, igaz, *Postlewaite* és *Roberts* belátta[65], hogy – ismét a szereplők számának növekedésével – a „csalásból” származó haszon zérushoz tart. (Erre a gondolatra később, a vegyes gazdaságok tárgyalásánál még visszatérünk.)

Előbb azonban arra a kérdésre keresünk választ, hogy miképpen módosulnak az elmondottak vegyes gazdaságok esetén.

[62] Ez a tulajdonság csak szükséges feltétel, önmagában nem garantálja a domináns egyensúlyú mechanizmust.

[63] Lásd *Aumann* [1964].

[64] *Debreu–Scarf* (1963).

[65] *Postlewaite–Roberts* [1976].

4.C. A vegyes gazdaság

Ebben az alfejezetben a vegyes gazdaságokkal foglalkozunk, amelyekben egyaránt találhatunk köz- és magánjószágokat. Bizonyos tekintetben az ilyen típusú gazdaságok szolgáltatják az implementációelmélet egyik legkidolgozottabb részterületét.[66] Mivel azonban e munkák jó részében csak egy köz- és egy magánjószágot szerepeltetnek, mi is megmaradunk a *Samuelson*-gazdaság feltételezése mellett.

4.C.1. Érdekbarátság a Samuelson-gazdaságokban

Az első lépések után, amelyek *Eric Lindahl* és természetesen *Paul Samuelson* nevéhez fűződnek, a közgazdászok között többé-kevésbé elfogadott volt az a nézet, hogy a *potyázás lehetősége* miatt a vegyes gazdaság alapvetően különbözik a tiszta cseregazdaságtól. Az utóbbiban érvényes az első jóléti tétel, a versenyzői egyensúly hatékony. A vegyes gazdaságban ez nem igaz, az árelfogadó magatartás és *egyéni érdekkövetés* potyázáshoz vezet, emiatt a hatékonyság eltűnik, az első jóléti tétel itt nem igaz. Noha ez a legutóbbi megállapítás természetesen helytálló, az érvelés[67] hamisnak bizonyult. Mint azt a *Hurwicz*-tételben láttuk, az egyéni érdekkövetés éppen az árelfogadást, tehát a versenyzői magatartás alapját teszi elfogadhatatlanná egy véges szereplős gazdaságban. Pontosan ez *Samuelson* állítása is a vegyes gazdaságokra vonatkozóan: az egyéni érdekkövetés, individuális racionalitás és *Pareto*-hatékonyság együttese ellentmondásos, ha az árelfogadást feltételezzük. A következő lépés annak megmutatása, hogy ez minden

[66] Csak néhány alapvető, összefoglaló jellegű munkát említünk a könyvtárnyi irodalomból, olyanokat, amelyek a domináns implementálhatósággal is részletesebben foglalkoznak: *Green–Laffont* [1979a], *Groves* [1982], *Hurwicz* [1986a], *Laffont–Maskin* [1982], *Radner* [1986]. Mint azt a következő alfejezetben látni fogjuk, a *Nash*-implementálhatóságot még többen vizsgálták.

[67] *Nota bene*, nem *Samuelson*é.

mechanizmusra igaz. Ezt a lépést *John Ledyard* és *John Roberts* tette meg.[68] Először azt a kérdést vizsgálták, hogy egy olyan *Samuelson*-gazdaságban, ahol a *kezdeti készletelosztás mindenki előtt ismert*, a *Lindahl*-féle szabályok[69] érdekbarátok-e. Arra voltak kíváncsiak, vajon a gazdaság szereplőinek ténylegesen érdekükben áll-e ebben a mechanizmusban részt venni, azaz a fogyasztók tényleg elfogadják-e az egyéniesített árakat. Intuitíve is megadható a válasz: nem. Mit tehetünk ekkor, milyen mechanizmussal helyettesíthetjük e szabályokat, ha továbbra is azt szeretnénk, a gazdasági allokáció *Pareto*-hatékony, individuálisan racionális és érdekbarát legyen? Eredményük tökéletesen megfelel a tiszta cseregazdaságoknál tapasztalt negatív következtetésnek: a vegyes gazdaságokban sincs ilyen mechanizmus.

4.C.1. Segédtétel (Ledyard–Roberts). *Az* $\mathcal{E}_S\,(1,1,2)$ Samuelson-*gazdaságok családjához nem rendelhető olyan érdekbarát*

$$\eta \triangleq \{\mathcal{E}, h, \mathcal{E}\}$$

direkt mechanizmus, amely esetében $\forall e \in \mathcal{E}_S\,(1,1,2)$*-re*

$$h\,(e) \in Cc\,(e) \triangleq PO\,(e) \cap IR\,(e)\,.$$

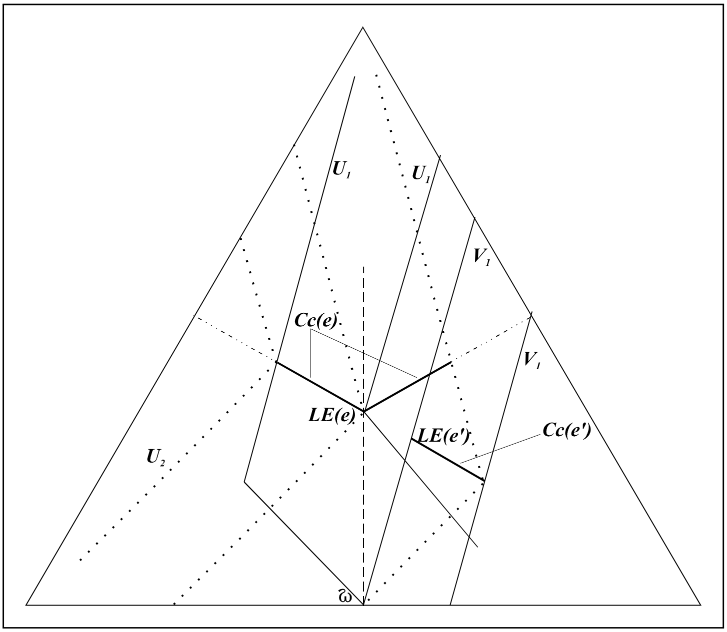
Más szóval: ezen a gazdaságcsaládon nincs érdekbarát, Pareto-*hatékony és individuálisan racionális mechanizmus.*

Bizonyítás: A bizonyítás gondolatmenete pontosan megegyezik a *Hurwicz*-tételnél tapasztalttal. Az igazi trükk most az, hogy a szerzők a *Malinvaud* [1971] cikkben *Kolm*nak tulajdonított *Kolm*-háromszöget használják a bizonyításban az *Edgeworth*-négyszög helyett. Ennek geometriája tökéletesen lehetővé teszi az ott alkalmazott gondolatmenet követését. A *Kolm*-háromszögben, amely

[68] Az eredeti 1974-es kiadatlan kézirat hozzáférhetetlen, így az eredményt és a bizonyítást *Groves–Ledyard* [1987] alapján ismertetjük.

[69] Ahogy azokat a *Lindahl* [1919] cikkben találhatjuk, és amelyek az ismert *Lindahl*-egyensúlyi allokációk fogalmához vezetnek.

egy szabályos háromszög, minden pont kölcsönösen és egyértelműen megfeleltethető egy olyan kétszemélyes *Samuelson*-gazdaságbeli megvalósítható allokációnak, amelyben mindkét fogyasztónak egy egységnyi magánjószág készlete van. A pontnak a háromszög egyik oldalától vett távolsága adja meg a gazdaságbeli közjószágmennyiséget, a másik két oldalától vett távolsága pedig az egyes fogyasztóknak jutó magánjószág mennyiségét. Miután egy szabályos háromszögbeli pont oldalaktól vett távolságösszege állandó, ezért ez egyben az állandó mérethozadékú termelés feltételezésének is megfelel. Egy ilyen gazdaságot ábrázol a 4.C.1. ábra.



4.C.1. ábra: A Samuelson-gazdaság manipulálása

A gazdaságban a fogyasztók preferenciái azonosak, lineáris szakaszokból állnak. Ha a közjószág szintje meghaladja a magánjószág mennyiségét, akkor a helyettesítési határ-arány -3, ellenkező esetben -1. Vegyük észre, hogy ebben a *Kolm*-háromszögben a *Lindahl*-egyensúlyi allokáció tulajdonságai[70] ugyanúgy tükröződnek, mint a *walrasi* allokációé az *Edgeworth*-négyszögben. A gazdaság szerződési görbéje a V alakú, megvastagított vonal. Ennek az oldalakra szimmetrikus pontja a gazdaság egyetlen *Lindahl*-egyensúlyi pontja. Tegyük fel azonban, hogy az első fogyasztó, akinek preferenciáit a másik – feltevés szerint – nem ismeri, az igazi U_1 preferenciái helyett a hamis V_1 preferenciákat jelenti be. Ebben a helyettesítési határarány mindenütt egyformán -3. Ekkor az új, hipotetikus e' gazdaságban az új szerződési görbe az ábrán látható $Cc\,(e')$ szakasz lesz. Ennek minden pontja az *eredeti* preferenciák szerint jobb az első fogyasztó számára, mint $LE(e)$. A *Lindahl*-mechanizmus tehát nem érdekbarát. Más mechanizmus sem az, mint azt rögtön látni fogjuk. Tegyük fel, egy *Pareto*-hatékony és individuálisan racionális mechanizmus az e gazdaságban a szerződési görbének az $LE\,(e)$ ponttól balra eső részén levő pontot eredményez. Ekkor az előzőekben elmondottak szó szerint megismételhetők. Ha ez a mechanizmus a szerződési görbének egyéb pontját választja, akkor a probléma szimmetricitása miatt a második fogyasztó manipulálhatja a mechanizmust az ismertetett módon. □

Hasonlóan a *Hurwicz*-tételhez, ez az állítás is erősíthető.

4.C.2. Tétel. *Az $\mathcal{E}_S\,(1,1,2)$* Samuelson-*gazdaságok családján egy* Pareto-*hatékony GP gazdasági programot domináns stratégiákban implementáló mechanizmus szükségképpen nem individuálisan racionális, azaz ezen a gazdaságcsaládon nem létezik érdekbarát,* Pareto-*hatékony és individuálisan racionális gazdasági program.*

[70] Az áregyenes áthalad az egyensúlyi allokáción és szeparál, hiszen a *Pareto*-hatékony pontokban a közömbösségi görbék érintik egymást; az allokáció individuálisan racionális, valamint megvalósítható.

Bizonyítás: A 4.B.6. Tétel bizonyítása szinte szó szerint ismételhető, csak a *Hurwicz*-tételre való hivatkozást kell kicserélnünk a *Ledyard–Roberts*-tételre. □

Ez az eredmény még inkább elkeserítőnek tűnik, mint első pillantásra hinnénk, ugyanis a vegyes gazdaságokban nem érvényesül az a gondolatmenet, amit a tiszta cseregazdaságoknál a szereplők számának növekedése esetére vázoltunk. Hasonlóan a *Lindahl*-egyensúlyi allokációk halmazának és a gazdaság magjának kapcsolatához, miszerint a vegyes gazdaságokban a szereplők számának növekedésével a mag nem húzódik rá az egyensúlyi allokációk halmazára, itt is azt tapasztaljuk, hogy a szereplők számának növekedése nem csökkenti a fogyasztó csalásra való ösztönzöttségét.[71]

4.C.2. Samuelson-gazdaságok kvázilineáris peferenciákkal

Ebben a pontban végre pozitív(?) eredményt is felmutatunk. A *Ledyard–Roberts*-tétel kimondásakor megengedtük, hogy a fogyasztók preferenciái a klasszikus gazdaságon belül tetszőlegesen alakuljanak. Van azonban egy olyan preferenciaosztály, amelyen található érdekbarát mechanizmus, nem is egy. Az erre vonatkozó eredmények eléggé közismertek, de viszonylag kevessen vannak tisztában érvényességi körükkel és hátrányaikkal. Ha úgy tetszik, nehéz észrevenni, hogy a domináns implementálhatóság sem „fenékig tejfel”. Az ismertetendő modellek többsége nem teljesen felel meg a *Samuelson*-gazdaságtól megkövetelt feltételeknek. Bizonyos szempontból általánosabbak, más aspektusból pedig jóval restriktívebbek. E helyütt nem lehet célunk, hogy ezt a témakört kimerítően tárgyaljuk, kiváló összefoglalást találhatunk a *Green–Laffont* [1979a] könyvben. Most csak a legfontosabb, a *Samuelson*-gazdaságokra vonatkoztatott eredményeket vázoljuk,

[71] Lásd *Muench* [1972] és *Roberts* [1976].

többnyire csak hivatkozással, bizonyítás nélkül. Vezessünk be egy gazdaságcsaládot annak érdekében, hogy a továbbiakban könnyebben hivatkozhassunk az ebbe a családba tartozó gazdaságokra.

4.C.3. Definíció (VCG-gazdaságok). *Egy*

$$e \in \mathcal{E}_S(1, 1, I)$$

gazdaság Vickrey–Clarke–Groves-*gazdaság (*VCG-*gazdaság), ha* $\forall i \in \mathcal{I}$*-re a* $\succsim_i(e)$ *(kvázilineáris) preferenciák olyan*

$$U_i(q, x_i; e_i) \triangleq u_i(q; e_i) + x_i = u_i(q; e_i) - \sigma_i q + \omega_i$$

alakú hasznossági függvényekkel reprezentálhatóak, ahol $u_i(\cdot; e_i) : \Re_+ \to \Re$ *konkáv, és az egyes fogyasztókra vonatkozó*

$$\sigma_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{I} \sigma_i = 1$$

súlyok megadják, hogy a megvalósítandó közjószágszint mekkora hányadát kell fedezniük a magánjószágkészletükből. Ezek a súlyok nem függnek az egyéni preferenciáktól. A jelölés egyszerűbbé tétele érdekében a hasznossági függvényük közjószágra vonatkozó részét $\forall i \in \mathcal{I}$*-re a*

$$v_i(q; e_i) \triangleq u_i(q; e_i) - \sigma_i q, \quad \forall q \in \Re_+$$

szabállyal definiáljuk. Az összes ilyen konkáv és egyváltozós v *függvény családját a* $\mathcal{V}$*, a* VCG-*gazdaságok családját pedig az* $\mathcal{E}_{VCG}$ *szimbólum jelzi majd.*

4.C.4. Megjegyzés. *Mint az köztudott, az ilyen preferenciák konvexek,*[72] *a közömbösségi görbék egymás párhuzamos eltoltjai, de ami a legfontosabb, egy árváltozás jövedelmi hatása egy fogyasztó*

[72] Egyébként nem is beszélhetnénk *Samuelson*-gazdaságról.

optimális döntésében zérus, hiszen a magánjószág (az árm érce-jószág) határhaszna konstans, sőt minden fogyasztóra mindenhol egységnyi. Ennek következtében a Pareto-*hatékony allokációkban a közjószág szintje egyértelműen meghatározott és azonos.*

A *Vickrey–Clarke–Groves*-gazdaságokban a készletek korlátos volta miatt a közjószág szintje egy kompakt

$$\mathcal{Q} \triangleq \left\{ q \,\middle|\, 0 \leqq q \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i \right\}$$

intervallumból veheti értékét. Figyelembe véve a 4.C.4. Megjegyzést, nyilvánvaló, hogy ha az $\mathcal{E}_{VCG}$ gazdaságok családjához mint közösségi problémához egy egyértelmű GP_f gazdasági programot, illetve egy azt domináns stratégiákban igazsághűen implementáló

$$\eta = \{\mathcal{E}_{VCG}, h, \mathcal{E}_{VCG}\}$$

direkt mechanizmust rendelünk, akkor ezek csak akkor lehetnek *Pareto*-hatékonyak, ha $\forall e \in \mathcal{E}_{VCG}$-re a

$$(q\,(e)\,, x_1\,(e)\,, \ldots, x_I\,(e)) \triangleq h\,(e)$$

allokációra

$$q\,(e) \in \arg\max_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{i=1}^{I} v_i\,(q; e_i)\,. \qquad \text{(4.C–1)}$$

Mielőtt rátérnénk az $\mathcal{E}_{VCG}$ gazdaságcsaládon érdekbarát, hatékony és individuálisan racionális mechanizmusok létezésének kérdésére, előbb egy másik problémát vizsgálunk meg. Ebben, megtartva minden egyéb *Samuelson*-gazdaságbeli feltevést, feltesszük, hogy az alternatívahalmaz egy kicsit módosul:

$$X = \Re_+ \times_{i=1}^{I} \Re,$$

amelynek egy tetszőleges elemét jelöljük a $(q, t_1, \ldots t_I)$ szimbólummal, ahol t_i az i-edik fogyasztónak juttatott magánjószágbeli *transzfert* jelenti. Ez a transzfer tetszőleges előjelű lehet.[73] Most ehhez az új, módosított *KDP*-hoz rendeljünk egy GP_f gazdasági programot, illetve egy azt domináns stratégiákban implementáló, azaz érdekbarát

$$\eta = \{\mathcal{E}_{VCG}, h, \mathcal{E}_{VCG}\}$$

mechanizmust. E mechanizmus tehát minden gazdasághoz egy $(q, t_1, \dots t_I)$ alternatívát rendelne, másképpen $\forall e \in \mathcal{E}_S\,(1,1,I)$-re

$$h\,(e) \triangleq (q\,(e)\,, t_1\,(e)\,, \dots, t_I\,(e))\,.$$

Az a kérdés, van-e, és ha igen, milyen lehet ez az η mechanizmus? Először megmutatjuk, hogy ilyen létezik.[74]

4.C.5. Segédtétel (Groves). *Legyen az*

$$\eta = \{\mathcal{E}_{VCG}, h, \mathcal{E}_{VCG}\}$$

mechanizmus olyan, hogy a $h : \mathcal{E}_{VCG} \to \left(\mathcal{Q} \times \Re^I\right)$ *kimeneti függvény által adott*

$$q\,(e) : \mathcal{E}_{VCG} \to \mathcal{Q}$$

függvény kielégítse a (4.C–1) feltételt. Ha a $\forall i \in \mathcal{I}$*-re*

$$t_i\,(e) \triangleq \sum_{j \neq i} v_j\,(q\,(e)\,; e_j) + k_i\,(e_{-i})\,, \qquad (4.C\text{–}2)$$

ahol k_i *tetszőleges függvénye* e_{-i}*-nek, akkor* η *érdekbarát.*

---

[73] Egy ilyen alternatíva esetén az eredeti problémában a fogyasztó haszna nyilván

$$U_i\,(q, x_i; e_i) = v_i\,(q; e_i) + \omega_i + t_i.$$

Az ω_i készlet adott lévén ez ugyanakkor maximális, amikor a $v_i\,(q; e_i) + t_i$ érték. Ez azt jelenti, hogy egy ilyen $(q, t_1, \dots t_I)$ alternatíva csak akkor lehet *Pareto*-optimális, ha q maximálizálja a $\sum_{i=1}^{I} v_i\,(q; e_i)$ kifejezést a $\mathcal{Q}$ halmazon.

[74] Az első megfogalmazást lásd *Groves* [1973].

Bizonyítás: Tegyük fel, η nem érdekbarát. Ekkor létezik egy olyan $e \in \mathcal{E}_S(1,1,I)$ és $e_i' =_{\precsim_i'}, \omega_i$, amelyekre

$$v_i\left(q\left(e_i', e_{-i}\right); e_i\right) + t_i\left(e_i', e_{-i}\right) > v_i\left(q\left(e\right); e_i\right) + t_i\left(e\right).$$

Ha most a transzferek helyébe beírjuk a (4.C–2) összefüggéseket, akkor ebből az következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{I} v_j\left(q\left(e_i', e_{-i}\right), e_j\right) > \sum_{j=1}^{I} v_j\left(q\left(e\right), e_j\right).$$

Ez az egyenlőtlenség azonban ellentmond a (4.C–1) feltételnek. □

4.C.6. Definíció (Groves-mechanizmusok). *Azokat a mechanizmusokat, amelyek a fenti (4.C–1) és (4.C–2) feltételeket kielégítik,* Groves-mechanizmusok*nak hívjuk.*

Egy speciális, jól ismert *Groves*-mechanizmus, az úgynevezett *kulcsszereplős* vagy *Clarke*-féle mechanizmus. Első megfogalmazását a *Clarke* [1973] cikkben találhatjuk, igaz nem *Samuelson*-gazdaságra, hanem annál egyszerűbb struktúrára, ahol a közjószág lehetséges szintje adott, és azt vagy megvalósítják, vagy sem. Egyébként is a kapcsolódó irodalom legnagyobb hányada ezzel a bináris esettel foglalkozik.[75] A *Clarke*-mechanizmusban a k_i függvények $\forall i \in \mathcal{I}$-re a következő alakúak. Legyen

$$q_{-i}\left(e_{-i}\right) \quad \forall e_{-i} \in \mathcal{E}_{-i}\text{-re}$$

az a közjószágszint, amely akkor valósulna meg, ha az i-edik fogyasztó nem lenne a *KDP* döntéshozója, azaz

$$q_{-i}\left(e_{-i}\right) \in \arg\max_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{j \neq i} v_j\left(q, e_j\right).$$

[75] A *Clarke*-mechanizmus vagy ismertebb nevén *Clarke*-adó magyar nyelven megtalálható részletes ismertetését lásd a *Varian* [1991] könyvben. Ennek egy magánjószágokra vonatkozó, híres változata az úgynevezett másodáras vagy *Vickrey*-aukció. Lásd *Vickrey* [1961].

A *Clarke*-mechanizmusban

$$k_i(e_{-i}) \triangleq -\sum_{j\neq i} v_j(q_{-i}(e_{-i}), e_j).$$

Ekkor az i-edik fogyasztó transzfere

$$t_i(e) = \sum_{j\neq i} v_j(q(e); e_j) - \sum_{j\neq i} v_j(q_{-i}(e_{-i}), e_j).$$

Érdemes megfigyelni, hogy az i-edik fogyasztó csak akkor jut transzferhez, ha döntése megváltoztatja a közjószág szintjét, azaz, ha kulcsszereplő. Ekkor a transzfer mértéke pontosan megegyezik azzal a hasznosságkülönbséggel, amit létével a többieknek okoz. Még egy megfigyelésre érdemes tény: a kulcsszereplő transzfere mindig negatív, azaz fizetnie kell[76], ezért az össztranszfer mindig nempozitív, azaz

$$\sum_{i=1}^{I} t_i(e) \leqq 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_S(1,1,I).$$

A *Groves*-mechanizmusoknak két jó tulajdonságát ismertük meg eddig: érdekbarátok és kimeneti függvényük *Pareto*-hatékony közjószágszintet eredményez. Az a következő lényeges kérdésünk, hogy léteznek-e esetleg más típusú mechanizmusok is ezekkel a jó tulajdonsággal. Kezdjük az érdekbarátsággal. Ha megengedjük, hogy a v_i függvények tetszőlegesek legyenek, tehát nem ragaszkodunk konkavitásukhoz,[77] akkor megmutatható[78], hogy minden a (4.C–1) feltételeket kielégítő, érdekbarát mechanizmus szükségképpen *Groves*-mechanizmus. Ezt az állítást kicsit élesítette *Mark Walker,* majd tőle függetlenül *Bengt Holmström,* akik megmutatták, hogy ez a kizárólagosság (szigorúan) konvex preferenciák, azaz (szigorúan) konkáv v_i függvények mellett, tehát a *VCG*-

[76] Innen a *Clarke*-adó kifejezés.

[77] Azaz kilépünk a klasszikus gazdaságok családjából.

[78] Lásd először *Green–Laffont* [1977].

gazdaságok családján is igaz.[79] További vizsgálatainkat ezek szerint a *Groves*-mechanizmusok családjára korlátozhatjuk. Ezzel, sajnos, pozitív eredményeink sorát le is zárhatjuk, mert a következőkben csak e mechanizmusok rossz tulajdonságairól tudunk beszámolni.

Mint arra korábban rámutattunk, a *Clarke*-mechanizmus nem deficites költségvetést eredményez, legalábbis abban az értelemben, hogy a közjószágszint finanszírozásához nem kell külső forrást figyelembe vennünk. Semmi nem biztosítja ugyanakkor azt, hogy a beszedett adókat, azaz a

$$\sum_{i=1}^{I} t_i\left(e\right) \leqq 0,$$

transzferösszeget fel is használják. Miután $\forall e$-re

$$q\left(e\right) \in \arg\max_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{i=1}^{I} v_i\left(q; e_i\right),$$

azt is tudjuk, hogy a v_i függvények definíciója miatt a fogyasztók már „állták" a közjószág *Pareto*-hatékony $q\left(e\right)$ szintjének költségét, a kiválasztott

$$\left(q\left(e\right), t_1\left(e\right), \ldots, t_I\left(e\right)\right)$$

alternatíva csak akkor lehet *Pareto*-hatékony, ha

$$\sum_{i=1}^{I} t_i\left(e\right) = 0.^{80}$$

[79] *Walker* [1978] és *Holmström* [1979].

[80] Könnyen belátható, hogy differenciálható v_i függvények és $0 < q\left(e\right) < \mathcal{Q}$ esetén a technológiában érvényesülő állandó mérethozadék miatt ez pont a közismert $\sum_{i=1}^{I} MRS_i = MRT$ feltételnek felel meg. Ugyanis ekkor $\sum_{i=1}^{I} v_i\left(q\left(e\right); e_i\right)$ maximalitása miatt $\sum_{i=1}^{I} v_i'\left(q\left(e\right); e_i\right) = 0$, amiből $\sum_{i=1}^{I} u_i'\left(q\left(e\right); e_i\right) = 1$.

Ez azonban általában nem garantálható. Megmutatható ugyanis, hogy a *VCG*–gazdaságok családjából származtatható, fenti struktúrájú problémában bármelyik *Groves*-mechanizmus megsérti ezt a *kiegyensúlyozott költségvetés*i feltételt[81]. Más szóval, a *Groves*-mechanizmusok nem *Pareto*-hatékonyak.[82]

Térjünk most vissza az eredeti modellünkhöz, a *VCG*-gazdaságokhoz, és vizsgáljuk meg, milyen pótlólagos tulajdonságokkal rendelkeznek itt e mechanizmusok. A vizsgált mechanizmusok sajnálatos gyengesége az, hogy nem garantálható individuális racionalitásuk[83]. Hiába *Pareto*-hatékony a közjószág szintje, esetleg az egész allokáció, létezhet olyan fogyasztó, aki rosszul jár a kezdeti készletéhez képest. Sőt ennél komolyabb probléma is fellép. Annak ellenére, hogy a $q(e)$ közjószágszintnek megfelelő magánjószág biztos rendelkezésre áll a gazdaságban, hiszen e szintet éppen úgy állapítottuk meg, hogy e költséget figyelembe vettük, nem biztos, hogy minden fogyasztóra nézve fennáll az *egyéni megvalósíthatóság* feltétele. Elképzelhető, hogy

$$\sigma_i q(e) - t_i(e) \geqq \omega_i,$$

ami azt jelenti, hogy készletéből nem képes fedezni azokat a költségeket, amelyek a közjószág létrehozása során rá hárulnak. Ahogy *Green* és *Laffont* bebizonyították,[84] ha a közjószágnak több mint két lehetséges szintje van – és a *VCG*-gazdaságokban nyilvánvalóan ez a helyzet –, nincs olyan *Groves*-mechanizmus, amely *Pareto*-hatékony közjószágszintet eredményez és egyénileg megvaló-

[81] Lásd *Walker* [1980]. Megjegyzendő, ha a gazdaságok családját olyan gazdaságokra szűkítjük, ahol a v_i fügvények kvadratikusak, akkor található olyan *Groves*-mechanizmus, amely kiegyensúlyozott költségvetést eredményez. Lásd *Groves–Loeb* [1975].

[82] Az is megmutatható (lásd például *Green–Laffont* [1979b]), hogy koalíciók formálódása esetén ezek számára nem érdekbarát ez az eljáráscsalád.

[83] *Green–Laffont* [1979a], 6. fejezet.

[84] Többek között *Green–Laffont* [1979a] 5.4 alfejezet.

sítható. (Az egyéni megvalósíthatóság precíz definícióját a következő fejezetben adjuk meg.)

Próbáljuk meg röviden összefoglalni, a *Groves*-mechanizmusok előnyeit és hátrányait annak érdekében, hogy tiszta képet alkothassunk erről a területről.

Előnyök: a *VCG*-gazdaságok családján

- érdekbarát, azaz „rákényszerít” a preferenciák igaz bevallására;
- a közjószág *Pareto*-hatékony szintjét eredményezi;[85]

Hátrányok:

- nem feltétlenül eredményez kiegyensúlyozott költségvetést, így nem *Pareto*-hatékony;
- nem feltétlenül individuálisan racionális;
- egyénileg nem feltétetlenül megvalósítható;
- (nem érdekbarát koalíciók esetén).

Végül még két megjegyzést teszünk. Ezek a mechanizmusok kizárólag kvázilineáris preferenciák esetén működnek, ami nagyon restriktív feltevés. Igen-igen valószínűtlen, hogy egy fogyasztó tetszőleges készletnagyság esetén ugyanazt a közjószágszintet preferálja. Feltételezhető, a valós életben meglehetősen sok az olyan fogyasztó, aki a jövedelmének csökkenése esetén egyre kevésbé tartja fontosnak például az autópályaépítést. Ugyanakkor – kegyelemdöfésként – *Hurwicz* és *Walker* megmutatták, hogy még a *VCG*-gazdaságok családján is az az *általános*, hogy a *Groves*-mechanizmusok nem hatékonyak. Pozitívnak induló eredményeink, enyhén szólva, nem váltják be a hozzájuk fűzött reményeket.

[85] Ennyiben és csak ennyiben válasz a *Samuelson* által vizsgált potyázási problémára.

4.D. Készletkompatibilitás

Már az előbbiekben utaltunk arra, hogy az a feltevésünk, miszerint az összes szereplő – beleértve a mechanizmus megtervezőjét – ismeri a készleteloszlást, igen erős. Ha viszont ezt nem alkalmazzuk, akkor újabb, az eddigiektől eltérő elven működő, manipulálási lehetőséget nyitunk meg az egyes fogyasztó számára. Ekkor ugyanis nemcsak a preferenciáinak hamis bejelentése, hanem a készleteinek letagadása is lehetővé válik számára. Feltételezzük, miután a preferenciái monotonak, hogy a *visszatartott* készleteket saját fogyasztásában hasznosítja. Tőbbet, mint a valós készlete, azonban nem jelenthet be. Ennek az a fő oka, hogy a megtervezendő mechanizmusnak minden esetben működőképesnek és a feltételezett tulajdonságokat teljesíteni képesnek kell lennie. Ha azonban a fogyasztók a valóságosnál több készletet jelentenek be, akkor az így kapott gazdaságbeli allokáció nem feltétlenül megvalósítható az eredeti, valós gazdaságban. A fogyasztó ezzel a felkínált lehetőséggel természetesen csak akkor él, ha ez érdekében áll. Az érdekbarátságnak tehát erre az esetre is ki kellene terjednie. Mi azonban megtartjuk az eddigi definíciónkat, és egy újabbat vezetünk be arra az esetre, amikor egy fogyasztó sem tudja kihasználni azt az előnyét, hogy készleteit csak saját maga ismeri. A továbbiakban, az elemzés egyszerűbbé tétele érdekében, és mert ez bizonyíthatóan nem sérti az általánosságot, tegyük fel, hogy a fogyasztók most ismerik egymás preferenciáit.

4.D.1. Definíció (Készletkompatibilitás). *A tiszta cseregazdaságok* $\mathcal{E}_{cs}(0, N, I)$ *családjához mint* KDP*-hoz rendelt*

$$\eta \triangleq \{\mathcal{E}, h, \mathcal{E}\}$$

direkt mechanizmus egy $e \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I)$ *gazdaságban* készletmanipulálható, *ha létezik olyan* $e' \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I)$ *gazdaság és* $j \in \mathcal{I}$ *fogyasztó, amelyekre*

$$\forall i \in \mathcal{I}, \quad \succsim_i = \succsim_i',$$

$$\begin{aligned}
&\forall i \neq j\text{-re}, \quad \omega_i = \omega_i', \\
&\omega_j \geqq (\neq)\, \omega_j', \\
&\left(h_j\left(e_j', e_{-j}\right) + \left(\omega_j - \omega_j'\right)\right) \succ_j h_j(e),
\end{aligned}$$

ahol $h_j(e)$ a $h(e)$ allokációban a j-edik fogyasztónak jutó jószágkosár. Ha egy mechanizmus egy $e \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I)$ gazdaságon sem készletmanipulálható, akkor készletkompatibilis.

A következő, a *Hurwicz*-tétellel párhuzamos eredmény *Postlewaite* nevéhez fűződik.[86]

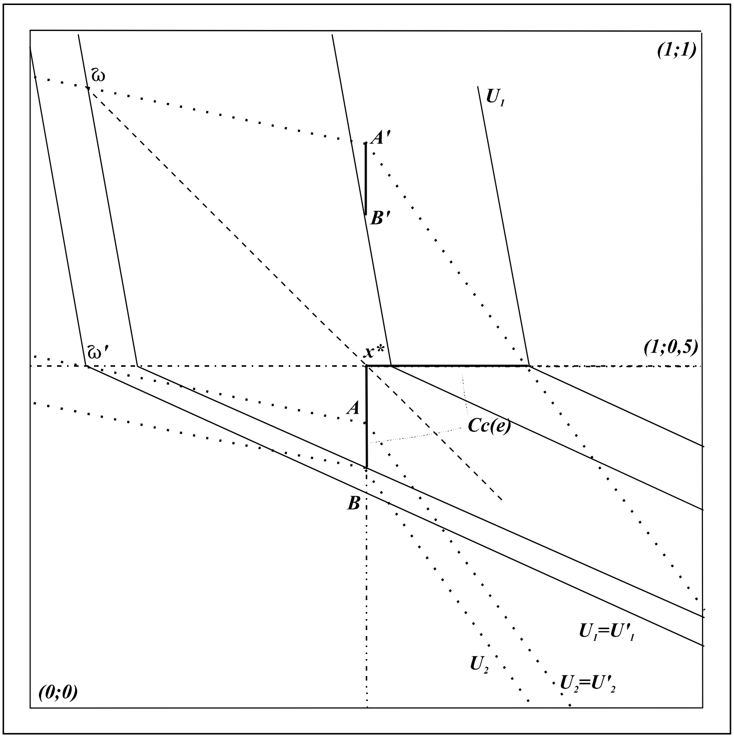
4.D.2. Tétel (Postlewaite). *Az $\mathcal{E}_{cs}(0, 2, 2)$ tiszta cseregazdaságok családján nincs* Pareto-*hatékony, individuálisan racionális és készletkompatibilis mechanizmus.*

Bizonyítás: A bizonyítás gondolatmenete követi a *Hurwicz*-tétel esetében alkalmazottat. Tekintsük a 4.D.1. ábrát! Ebben, egy olyan gazdaságot szerepeltetünk, amelyben a két fogyasztó birtokában összesen egy-egy egység van mind a két jószágból. A tényleges készletpontot az ω szimbólummal jelöltük. Közömbösségi görbéik olyan lineáris szakaszokból állnak, amelyek az első fogyasztóra az $x^2 = 0,5$, a másodikra az $x^1 = 0,5$ tengely mentén alkotnak szöget egymással. E preferenciák nyilván folytonosak, konvexek és (szigorúan) monotonak. Ez az e gazdaság nyilván kielégíti a klasszikus tiszta cseregazdaságok minden feltételét, azaz $e \in \mathcal{E}_{cs}(0, 2, 2)$.

Ebben a gazdaságban egy tetszőleges, a feltételeket kielégítő mechanizmus a $Cc(e)$ szerződési görbe pontjai közül választ pontosan egyet. Legyen ez – az általánosság megsértése nélkük – az $x^*\,(\in WE(e))$ alatti függőleges részén. Ekkor az első fogyasztónak érdekében áll készleteiből

$$\omega_1^2 - \left(\omega_1^2\right)' = \frac{1}{2}$$

[86] Lásd *Postlewaite* [1979] és az ennek következményeit tartalmazó *Hurwicz és mások* [1984] tanulmányt!



4.D.1. ábra: A tiszta cseregazdaság készletmanipulálása

értéket visszatartani, és az így kapott gazdaságban a mechanizmus által neki juttatott allokációval elfogyasztani. Ebben az új, hipotetikus gazdaságban, amelyben az összkészlet (1; 0,5), ugyanis a készletpont ω', a $Cc\,(e')$ szerződési görbe pedig az $[A, B]$ szakasz. A mechanizmus ennek egy pontját választja, így végül az első fogyasztónak az $[A', B']$ szakasz megfelelő pontja jut. Ez láthatóan jobb, mint ha nem tartott volna vissza a készletéből saját fogyasztásra, a mechanizmus tehát ebben a gazdaságban készletkompatibilis. □

4.D.3. Megjegyzés. *A* Hurwicz-*tétel után tett megjegyzéseinket,* mutatis mutandis, *e helyütt is meg kell tennünk.*
(1) *A lineáris szakaszokból álló közömbösségi görbék esetét csak a könnyebb illusztráció kedvéért tételeztük fel. Hasonló jelenség igaz, ha a preferenciák szigorúan konvexek. Itt is állíthatjuk: inkább azok a gazdaságok számítanak kivételnek, amelyeken egy mechanizmus sem készletmanipulálható.*
(2) *Nem állítottuk, hogy a bemutatott készletvisszatartás optimális „csalás" lenne. Ehhez a fogyasztónak ismernie kellene a másik készletét. Erről azonban feltettük, hogy számára nem megfigyelhető.*
(3) *A készletmanipuláció révén létrejött hipotetikus gazdaság szerződési görbéjének most van közös pontja az eredeti* $Cc\,(e)$ *görbével. A ténylegesen létrejött allokáció azonban nem* Pareto-*hatékony. A készletmanipulálás legfájóbb következménye pont ez, a hatékonyság összeomlása.*

Postlewaite azt az esetet is megvizsgálta, ha a fogyasztó a visszatartott készleteket nem fogyasztja el, hanem megsemmisíti. Könnyen megmutatható, hogy ez a viselkedés bizonyos mechanizmusokban, például pont a *walras*iban, még szigorúan monoton preferenciák mellett sem irracionális. Található azonban olyan mechanizmus, amely készletkompatibilis ebben az esetben. Ehhez, sajnos, nem elegendőek a preferenciákra tett eddigi feltevéseink. Kardinális, és egyének között összevethető hasznossági reprezentációra van hozzá szükség, méghozzá olyanokra, amelyeket mindenki biztosan ismer, és így nem manipulálhatóak. Noha a preferenciákra vonatkozó feltevéseink most restriktívebbek, vizsgáljuk meg ezt az esetet is!

4.D.4. Definíció. *Az* $\mathcal{E}_{cs}\,(0, N, I)$ *tiszta cseregazdaságok családjához mint* KDP-*hoz rendelt*

$$\eta \triangleq \{\mathcal{E}, h, \mathcal{E}\}$$

direkt mechanizmus egy $e \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I)$ gazdaságon erősen *kész*letmanipulálható, *ha létezik olyan $e' \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I)$ gazdaság és $j \in \mathcal{I}$ fogyasztó, amelyekre*

$$\begin{array}{rcl} \forall i & \in & \mathcal{I}, \quad \succsim_i = \succsim_i', \\ \forall i & \neq & j\text{-re}, \quad \omega_i = \omega_i', \\ \omega_j & \geqq & \omega_j', \\ h_j\left(e_j', e_{-j}\right) & \succ & {}_j h_j(e), \end{array}$$

ahol $h_j(e)$ a $h(e)$ allokációban a j-edik fogyasztónak jutó jószágkosár[87]. *Ha egy mechanizmus erősen nem készletmanipulálható, akkor* erősen készletkompatibilis.

Jelöljük most az U_i szimbólummal az i-edik fogyasztó preferenciáinak egy reprezentáló hasznossági függvényét, ami a klasszikus gazdaságokra tett feltevéseinkből következően mindig létezik. Egy adott e gazdaságban egy x allokáció és egy ω készletpont esetén legyen

$$V(x, \omega) = \min_i \{U_i(x_i) - U_i(\omega_i)\}.$$

4.D.5. Segédtétel. *Ha egy $e \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I)$ gazdaságban az öszes fogyasztó preferenciái szigorúan konvexek, akkor ebben a gazdaságban létezik olyan*

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_I) \in PO(e) \cap IR(e) \subset \mathcal{A}_{ok}(e)$$

allokáció, amire

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_I) \in \arg\max \{V(x, \omega) \,|\, x \in \mathcal{A}_{ok}(e)\}$$

és ebben a pontban az

$$U_i(\bar{x}_i) - U_i(\omega_i) = V(\bar{x}, \omega) \quad \forall i \in \mathcal{I}\text{-re.}$$

[87] Érdemes – és nem nehéz – olyan példát konstruálni, amiből látszik, hogy az a direkt mechanizmus, amelynek kimeneti függvénye mindig versenyzői egyensúlyi allokáció, erősen készletmanipulálható.

Bizonyítás: Először is vegyük észre, hogy a készletek végessége miatt az $\mathcal{A}_{ok}(e)$ halmaz kompakt. Az U_i hasznossági függvények folytonosak lévén a $V(x,\omega)$ függvény felveszi maximumát ezen a halmazon. Egy ilyen $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_I)$ maximumpontban az $U_i(\bar{x}_i) - U_i(\omega_i)$ érték szükségképpen egyenlő minden fogyasztóra, mert ha nem lenne az, akkor a preferenciák tulajdonságai (monotonitás, folytonosság) miatt a legnagyobb hasznú fogyasztótól elvéve némi jószágmennyiséget, a legkisebb hasznú fogyasztó hasznosságát növelni tudnánk.

Ebből látszik, hogy az $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_I)$ allokáció *Pareto*-hatékony, hiszen senkinek nem tudjuk növelni a hasznát anélkül, hogy legalább egy másikét ne csökkentenénk. Az allokáció individuális racionalitása triviálisan adódik. □

Most belátjuk a következő állítást:

4.D.6. Tétel. *Az $\mathcal{E}_{cs}(0,N,I)$ tiszta cseregazdaságok családjához mint* KDP-*hoz rendeljük a következő*

$$\bar{\eta} \triangleq \{\mathcal{E}_{cs}(0,N,I), h, \mathcal{E}_{cs}(0,N,I)\}$$

direkt mechanizmust: $\forall e \in \mathcal{E}_{cs}(0,N,I)$*-re*

$$h(e) = \bar{x}(e),$$

ahol $\bar{x}(e)$ a 4.D.5. Segédtételben szereplő allokáció. Ez az η mechanizmus erősen nem készletmanipulálható, azaz a klasszikus gazdaságok családján létezik Pareto-*hatékony, individuálisan racionális, erősen készletkompatibilis direkt mechanizmus.*

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy a mechanizmus erősen készletmanipulálható. Ekkor létezik két $e, e' \in \mathcal{E}_{cs}(0,N,I)$ gazdaság és $j \in \mathcal{I}$ fogyasztó, amelyekre

$$\begin{array}{rcl} \succsim_i' & = & \succsim_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ \omega_i & = & \omega_i' \quad \forall i \neq j\text{-re}, \quad \omega_j \geqq\neq \omega_j' \end{array}$$

és

$$U_j\left(\bar{x}_j\left(e_j', e_{-j}\right)\right) > U_j\left(\bar{x}_j\left(e\right)\right).$$

A preferenciák félig szigorú monotonitásából tudjuk, hogy

$$U_j\left(\omega_j\right) > U_j\left(\omega_j'\right),$$

így

$$U_j\left(\bar{x}_j\left(e_j', e_{-j}\right)\right) - U_j\left(\omega_j'\right) > U_j\left(\bar{x}_j\left(e\right)\right) - U_j\left(\omega_j\right).$$

Emiatt a $h(e) = \bar{x}(e)$ kimeneti függvény tulajdonsága miatt $\forall i \in \mathcal{I}$-re

$$U_i\left(\bar{x}_i\left(e'\right)\right) - U_i\left(\omega_i'\right) = U_i\left(\bar{x}_i\left(e'\right)\right) - U_i\left(\omega_i\right) > U_i\left(\bar{x}_i\left(e\right)\right) - U_i\left(\omega_i\right),$$

amiből az következne, hogy

$$U_i\left(\bar{x}_i\left(e'\right)\right) > U_i\left(\bar{x}_i\left(e\right)\right), \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Ez azonban nem lehetséges, hiszen a mechanizmus *Pareto*-hatékony és a hasznossági függvények szigorúan növekvőek. □

V.

GGAZDASÁGI PROGRAMOK NASH-IMPLEMENTÁLÁSA

5.A. Technikai megjegyzések

Mielőtt részletesebben ismertetnénk a konkrét eredményeket, néhány technikai jellegű megjegyzést kell tennünk. Ezekben tisztázunk egypár olyan joggal felmerülő problémát, amelyek elsősorban a *Nash*-implementálhatóság információs, illetve matematikai követelményeivel kapcsolatosak. Ezt követően a tiszta cseregazdaságokra, majd a *Samuelson*-gazdaságokra fordítjuk figyelmünket, ezek egyensúlyi allokációs halmazainak *Nash*-implementálhatóságával foglalkozunk.

Először azt vegyük észre, hogy nem érdemes egyértelmű gazdasági problémák *Nash*-implementálhatóságával bíbelődnünk. *Dasgupta* és társai ugyanis megmutatták[88], hogy amennyiben az egyéni preferenciák klasszikusak, abban az értelemben, ahogy azt a harmadik fejezetben definiáltuk, akkor a világállapotok halmaza gazdag. Ekkor azonban a 2.C.14. Segédtétel értelmében, ha egy egyértelmű gazdasági program *Nash*-implementálható, akkor domináns stratégiákban igazsághűen is implementálható. Az előző fejezetben azonban láttuk, hogy ez az érdekbarátság vagy a *Pareto*-hatékonyság, vagy az individuális racionalitás követelményének szükséges feladásához vezet mind a tiszta cseregazdaság, mind a vegyes gazdaság esetében. Emiatt a továbbiakban csak olyan gazdasági programokkal fogunk foglalkozni, amelyek egy gazdasághoz az allokációk egy nemüres részhalmazát rendeli. Ezek között kitüntetett elméleti és gyakorlati jelentőséggel bírnak azok a programok, amelyek a gazdasághoz a *walrasi* vagy a *Lindahl*-egyensúlyi allokációkat párosítják.[89]

[88] Lásd *Dasgupta és mások* [1979], 3.1.2. példa.

[89] E gazdasági programok jelentőségét nem csak egyensúlyelméleti fontosságuk támasztja alá, hanem az a tény is, hogy bizonyos folytonossági és konvexitási feltevések mellett ez a két leképezés az egyedüli *Nash*-implementálható *Pareto*-hatékony és individuálisan racionális program. Lásd erről *Hurwicz* [1979b].

5.A.1. A Nash-egyensúlyi koncepció alkalmazhatósága

Ha az a feladatunk, hogy olyan mechanizmust szerkesszünk, ami a klasszikus magángazdaságok egy családján a *walrasi,* közjószágos gazdaságban a *Lindahl*-egyensúlyi allokációk halmazát implementálja, akkor azonnal és joggal merül fel a kérdés, hogy milyen játékelméleti megfontlások alapján használhatjuk a *Nash*-egyensúlyi koncepciót. Hiszen ez egy teljes információs egyensúlyfogalom, tehát azt követeli meg, hogy minden játékos, döntéshozó, fogyasztó pontosan ismerje a világállapotot, azaz mindenki preferenciáit és készletét. Ez nyilvánvalóan olyan erős feltételezés, ami nehezen tartható. Éppen ezért szerencsés lenne, ha néhány olyan érvet sorakoztatnánk fel, amelyek indokolják ennek a fogalomnak a használatát. Előrebocsátjuk, ezek az érvek – véleményünk szerint – nem igazán állják meg a helyüket.

- Elsőként *Postlewaite* és *Wettstein* érvelését ismertetjük. Ők azzal magyarázzák a teljes információs egyensúlykoncepció használatát, hogy ez az, ami ténylegesen megfelel a *walrasi* egyensúly szemléletének.[90] Ha ugyanis az információ nem teljes, aszimmetrikus, akkor a versenyzői egyensúly esetleg nem is létezik. Ebben az okoskodásban van némi csúsztatás. Ugyanis az általános egyensúlyelméletben a jószágokra vonatkozóan szoktunk élni a teljes informáltság feltételezésével.

- A második érv a *Nash*-egyensúlyi koncepció mellett az, hogy abban az esetben, ha a döntéshozók száma nem túl nagy (oligopol szituációk, nemzetközi kereskedelmi modellek), akkor feltételezhetjük, hogy a döntéshozók *egymást* meg tudják figyelni, de erre kívülálló nem képes. Ebben az esetben számukra a világállapot megismerhető, de mások által

[90] Lásd *Postlewaite–Wettstein* [1989].

nem verifikálható. Ilyenkor joggal élhetünk teljes információs egyensúlyfogalommal.

- A harmadik lehetőség rokon az előzővel. Ebben az esetben azt tételezzük fel, hogy a fogyasztók számára a világállapot-komponensek teljesen korreláltak[91]. Ekkor, ha egymást megfigyelni nem is képesek, de a saját maguk által észlelt jelekből pontosan következtethetnek a világállapotra.

- A negyedik gondolatmenet a *Nash*-egyensúlyi fogalmat egy iterációs folyamat eredményeként értelmezi.[92] A fogyasztók üzeneteket küldenek egymásnak, ezekre (rövidlátó módon) reagálnak, végül, ha az üzenetek nem változnak, a megfelelő allokáció valósul meg. Ez a gondolatmenet egyáltalán nem idegen a klasszikus közgazdasági gondolkodástól, elég, ha csak a *walrasi tătonnement* eljárásra vagy a *Cournot*-egyensúly szokásos értelmezésére utalunk. *Eric Maskin* azonban, aki talán a legtöbb eredményt érte el a *Nash*-implemetálhatóság vizsgálatában, nem tartja ezt a magyarázatot igazán elfogadhatónak. Érvelése szerint semmi nem indokolja a rövidlátó viselkedést, inkább *Stackelberg*-magatartás lenne az igazán indokolható. Két esetben azonban nem ez a helyzet. Ha a fogyasztók mindig azt hiszik, az adott forduló az utolsó, akkor nem áll érdekükben a stratégiai gondolkodás. Ugyanez a helyzet akkor, ha a fogyasztók száma nagy. Az előző eset meglehetősen rossz fényben tünteti fel a fogyasztót, a második azonban pont azokban a szituációkban áll fenn, amikor a teljes informáltság feltételezése nem szerencsés.

[91] Lásd *Mas-Colell és mások* [1995], 23. fejezet.

[92] Ez az elképzelés az eredeti, *Hurwicz*től származó ötlet. Lásd *Hurwicz* [1960], *Hurwicz* [1974] és *Hurwicz* [1986a].

- Az ötödik érv *Maskin*tól származik.[93] Szerinte abban a szituációban jogos a *Nash*-egyensúlyi koncepció használata, amikor a mechanizmus szabályait *ex ante*, még a „tudatlanság fátyla" alatt kell meghatároznunk. Ha a világállapot bekövetkezett, akkor a döntéshozók *ex post* már ismerik a létrejött állapotot, azaz jogos a teljes informáltság feltételezése. Noha ez az érvelés játékelméleti szempontból elfogadható, a gazdaságra alkalmazva igencsak gyenge lábakon áll.

- Végül megemlítjük *Postlewaite* érvelését, aki előzetes *locsogást (cheap talk)* feltételez, majd az ott elért eredményt önmegvalósító erejűnek tekinti.[94] Úgy érvel, ha a döntéshozók az előzetes locsogás alapján *Nash*-egyensúlyi pontba jutnak, onnan egyiküknek sem áll érdekében kimozdulnia. Erősen kétséges azonban, hogy egy gazdaságban ilyen előzetes locsogás lejátszódhat-e.

Az a benyomásunk, hogy a fenti érveknél találhatunk egy sokkal erősebbet is, amit azonban a szerzők igen szemérmesen általában elhallgatnak. Ez pedig az, hogy a teljes informáltság feltevése sokkal kezelhetőbb problémát eredményez, mint a nem teljes információs *bayes*i játék.

5.A.2. Folytonos és teljesen megvalósítható mechanizmusok

Bármelyik fenti érvelést fogadjuk is el, bármilyen indok alapján döntünk is a *Nash*-implementálhatóság vizsgálata mellett, mindig szem előtt kell tartanunk azt a tényt, hogy a teljes informáltság feltevése egy gazdaság esetén inkább tekinthető absztrakciónak, mint tényleges, valós helyzetnek. Éppen ezért gondoskodnunk kell

[93] *Maskin* [1985].

[94] *Postlewaite* [1985].

arról, hogy értelmes eredményt kapjunk akkor is, ha a döntéshozók információi nem pontosak. Azt is szeretnénk, hogy ha a fogyasztók csak egy kicsit "tévednek", a mechanizmus se hibázzon nagyot. E célból bizonyos pótlólagos feltételeket szabunk ahhoz, hogy egy mechanizmust elfogadhatónak tekintsünk. Nézzük, melyek ezek a feltételek.

Először azt biztosítjuk, hogy a mechanizmus által szolgáltatott allokáció ne legyen „badarság". Ehhez az kell, hogy az eredményül kapott allokáció megvalósítható legyen.[95] A megvalósíthatóságnak két összetevője van. Egyrészt a gazdaságbeli összkészletnek fedeznie kell az összfogyasztást és termelőfelhasználást, ezt mérlegfeltételnek hívjuk. Másrészt az allokációban a fogyasztó számára biztosított jószágkosárnak a fogyasztási halmazba kell esnie. Mivel a következőkben a tiszta cseregazdaságokkal és a *Samuelson*-gazdaságokkal foglalkozunk majd, az ezekhez a gazdaságcsaládokhoz tartozó mechanizmusokra definiáljuk a fenti fogalmakat.

5.A.1. Definíció. *Tekintsük a tiszta cseregazdaságok $\mathcal{E}_{cs}(0, N, I)$ családját! Az ehhez tartozó*

$$\gamma = \{S, g, \mathcal{E}_{cs}(0, N, I)\}$$

mechanizmus kiegyensúlyozott, *ha eleget tesz a mérlegfeltételnek, azaz*

$$\forall e \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I) \text{ gazdaságra és } s \in S$$

stratégiaegyüttesre a g kimeneti függvény által adott

$$g(s) \triangleq (x_1(s), x_2(s), \ldots, x_I(s))$$

allokációra igaz, hogy

$$\sum_{i=1}^{I} x_i(s) \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i(e) \triangleq \omega(e). \qquad (5.\text{A–}1)$$

[95] Lásd a a 3.A.5. Definíciót!

A mechanizmus szigorúan kiegyensúlyozott, *ha az (5.A–1) egyenlőtlenség egyenlőségre teljesül.*[96]
A γ mechanizmus egyénileg megvalósítható, *ha* $\forall s \in S$*-re*

$$g_i(s) \triangleq x_i(s) \in X_i \triangleq \Re_+^N \quad \forall i \in \mathcal{I}\text{-re.}$$

Ha a mechanizmus szigorúan kiegyensúlyozott és egyénileg megvalósítható, akkor teljesen megvalósítható.

Ugyanezeket a fogalmakat *Samuelson*-gazdaságokra egy kicsit módosított formában mondjuk ki.

5.A.2. Definíció. *Tekintsük a* Samuelson-*gazdaságok* $\mathcal{E}_S(1,1,I)$ *családját! Az ehhez tartozó*

$$\gamma = \{S, g, \mathcal{E}_S(1,1,I)\}$$

mechanizmus kiegyensúlyozott, *ha eleget tesz a mérlegfeltételnek, azaz*

$$\forall e \in \mathcal{E}_S(1,1,I) - re \quad és \quad s \in S$$

stratégiaegyütesre a g kimeneti függvény által adott

$$g(s) \triangleq (q(s), x_1(s), x_2(s), \ldots, x_I(s))$$

allokációra igaz, hogy

$$\sum_{i=1}^{I} x_i(s) + q(s) \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i(e) \triangleq \omega(e). \tag{5.A–2}$$

A mechanizmus szigorúan kiegyensúlyozott, *ha az (5.A–2) egyenlőtlenség egyenlőségre teljesül.*
A γ mechnizmus egyénileg megvalósítható, *ha* $\forall s \in S$*-re*

$$g_i(s) \triangleq (q(s), x_i(s)) \in X_i \triangleq \Re_+^2 \quad \forall i \in \mathcal{I}\text{-re.}$$

Ha a mechanizmus szigorúan kiegyensúlyozott és egyénileg megvalósítható, akkor teljesen megvalósítható.

---

[96] Természetesen az $\omega_i(e)$ szimbólum az i-edik fogyasztónak az e gazdaságbeli indulókészletét jelenti. Az $\omega(e)$ szimbólum jelentése is nyilvánvaló.

A másik követelmény, amit elvárunk egy gazdasági programot implementáló, megvalósító mechanizmustól, az az, hogy amennyiben a fogyasztók tévednek, a nekik juttatott allokáció ne térjen nagyon attól, amit a ténylegesen bekövetkezett világállapotban kapnának.

5.A.3. Definíció. *Tekintsük a klasszikus gazdaságok* $\mathcal{E}_{kl}(M, N, I)$ *családját! Az ehhez tartozó*

$$\gamma = \{S, g, \mathcal{E}_{kl}(M, N, I)\}$$

mechanizmus folytonos, ha a

$$g : S \to \mathcal{A}(\mathcal{E}(M, N, I))$$

kimeneti függvény folytonos.[97]

A továbbiakban, éppen a *Nash*-implementálás használhatóságára vonatkozóan elmondottak miatt, ragaszkodni fogunk a mechanizmus (szigorú) kiegyensúlyozottságához, egyéni megvalósíthatóságához és folytonosságához. Azért tesszük ezt, mert ebben az esetben a mechanizmus – bármelyik érvelést is fogadjuk el – értelmes eredményt szolgáltat. Tegyük fel például, hogy az iterációs értelmezést elfogadhatónak tartjuk. Ekkor sem gondolhatjuk komolyan azonban azt, hogy végtelen hosszú egyeztetési folyamatot feltételezhetünk. Ebből következően, ha ez a folyamat egy előre megállapított *stop kritérium* szerint befejeződik, a mechanizmus által szolgáltatott allokáció *biztos* megvalósítható, és nem tér el nagyon a helyes eredménytől. Ha a hatékonysághoz is ragaszkodunk, akkor nyilván a mechanizmus *szigorúan kiegyensúlyozott* voltát fel kell tételeznünk.

Ezek miatt fő kérdésünk az lesz, hogy a gazdaságok egy családján létezik-e a *walrasi* vagy *Lindahl* -egyensúlyi allokációk halmazát implementáló, teljesen megvalósítható, folytonos mechanizmus.

[97] Ez a folytonossági feltétel egyben az S halmazra is korlátozásokat tartalmaz, nyilván egy megfelelő metrikával ellátott téren értelmezettnek kell lennie.

5.A.3. A korlátozott versenyzői egyensúly

Sajnos, ha ragaszkodunk a fenti tulajdonságú mechanizmushoz, akkor egy kellemetlen problémába ütközünk. Ha azt akarjuk, hogy a mechanizmusunk minden stratégia-együttesre egyénileg megvalósítható allokációkat eredményezzen, akkor a *közösségi döntési problémát* egy kicsit át kell fogalmaznunk. Először is feltétlenül tudnunk kell a gazdaságban az ω összkészlet nagyságát. Ennek segítségével határozzuk meg a KDP-beli alternatívák halmazát. Ebben az esetben nyilván a gazdaságbeli fogyasztási halmazok továbbra is az $\Re_+^N$ halmazzal egyenlőek, de a közösségi döntési problémában $\forall i \in \mathcal{I}$-re az

$$X_i \triangleq \left\{ x_i \in \Re_+^N \left| x_i \leqq \omega \right. \right\}$$

összefüggés alapján határozhatók meg. A releváns döntések, alternatívák

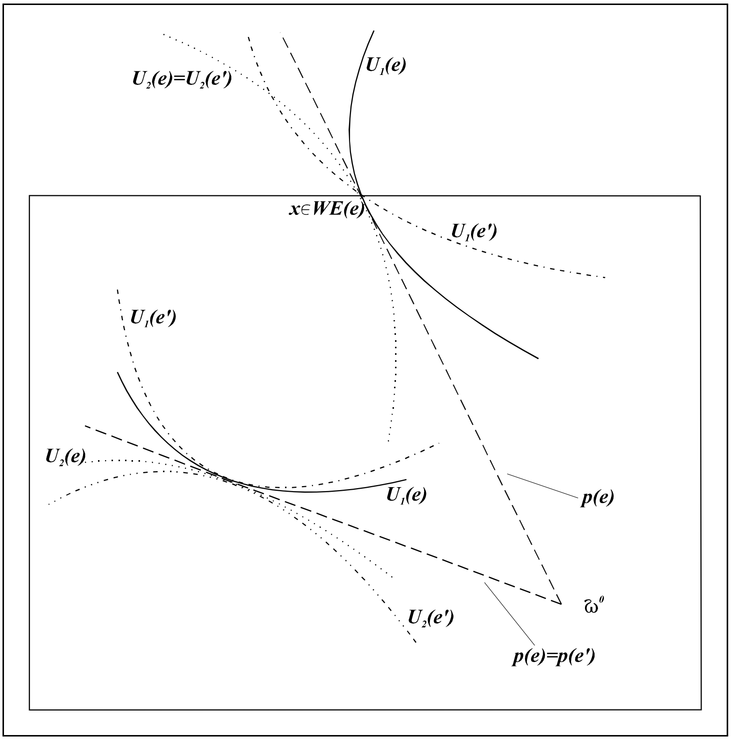
$$X \triangleq \mathcal{A}_{ok} \left(\mathcal{E} \left(0, N, I, \omega \right) \right)$$

halmazát pedig a gazdaság *Edgeworth*-négyszögével ábrázolhatjuk, ahol az

$$\mathcal{E} \left(0, N, I, \omega \right)$$

szimbólum az ω összkészletű tiszta cseregazdaságok halmazát jelenti. Ezt az *Edgeworth*-négyszöget láthatjuk az 5.A.1. ábrán.

Tegyük fel, hogy az ábrán található $e \in \mathcal{E}_{cs} \left(0, 2, 2, \omega \right)$ gazdaságban az indulókészlet pontja az ω^0 belső pont. Ebben a gazdaságban az x pont versenyzői egyensúlyi allokáció, hiszen az ω^0 készletponton áthaladó $p \left(e \right)$ áregyenes pontja, és azt is láthatjuk, hogy ez az áregyenes mindkét fogyasztóra vonatkozóan szeparálja az adott árakon megvehető és az x pontnál nem rosszabb pontok halmazát. Tételezzük fel most azt, hogy az $e' \in \mathcal{E}_{cs} \left(0, 2, 2, \omega \right)$ gazdaságban vagyunk. Az ábráról az is leolvasható, hogy ebben a gazdaságban az előzőhöz képest senki megítélésében sem romlott az x pont egy másik *megvalósítható alternatívával* szemben



5.A.1. ábra: A *Walras*-leképezés nem monoton

sem. Ebből az következik, hogy amennyiben a *Walras*-leképezés monoton lenne, akkor ennek az x pontnak továbbra is versenyzői egyensúlyi pontnak kellene lennie. Ez utóbbi állítás azonban nem igaz. Az első fogyasztónak az ezen a ponton átmenő $U_1(e')$ közömbösségi görbéjét metszi és nem érinti az ω^0 készletponton áthaladó áregyenes, ami azt jelenti, hogy a fogyasztó számára ez a fogyasztási vektor a költségvetési halmaza fölött nem lehet optimális. Más szóval az x pont nem *walrasi* egyensúlyi pont, azaz a *Walras*-leképezés nem monoton. Ebből következően biztos nem

Nash-implementálható.[98] Az ábrából az is leolvasható, hogy ez a jelenség csak a gazdaság *határán* fordulhat elő, *belső pontban nem.* Az x' pontra is igaz, hogy egy fogyasztó szerint sem „veszít a helyzetéből”, ha az e gazdaságról az e' gazdaságra váltunk, de a pont az új gazdaságban is versenyzői egyensúly marad.[99] Teljesen hasonló jelenség lép fel a vegyes gazdaságok implementálásánál: ha ragaszkodunk a mechanizmus egyéni megvalósíthatóságához, akkor a *Lindahl*-leképezés nem monoton volta miatt le kell mondanunk annak *Nash*-implementálásáról.

Két lehetőségünk is van e probléma kiküszöbölésére. Az első az, hogy a klasszikus gazdaságok egy olyan családját vizsgáljuk, amelyben egy pótlólagos feltétellel biztosítjuk, hogy a versenyzői, illetve *Lindahl*-egyensúly belső pont legyen. Később, a *Samuelson*-gazdaságok tárgyalásánál ehhez folyamodunk.[100] A másik, hogy bevezetjük a *korlátozott versenyzői egyensúly* fogalmát.

5.A.4. Definíció (Korlátozott *walrasi* egyensúly). *Az*

$$(a^*, p^*) \in \mathcal{A}_{ok}(e) \times \Re^N_{+(+)}$$

pár[101] *az* $e \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I, \omega)$ *gazdaság* korlátozott versenyzői egyensúlyi állapota*, ha* $i = 1, \ldots, I$*-re,* $x_i^* \in X_i^c(p^*)$*, ahol*

$$X_i^c(p^*) = \left\{ 0 \leqq x_i \leqq \omega \;\middle|\; \begin{array}{l} p^* x_i \leqq p^* \omega_i, \quad x_i \succsim_i x_i', \quad \forall x_i' - re\,, \\ amire \quad 0 \leqq x_i' \leqq \omega, \quad p^* x_i' \leqq p^* \omega_i \end{array} \right\},$$

[98] Lásd a 2.B.11. Tételt! Ezt a gondolatmenetet a *Hurwicz és mások* [1984] tanulmányban általánosabban találhatjuk meg.

[99] Vigyáznunk kell, ezt a jelenséget nem szabad úgy kezelnünk, mint azokat, amelyek az egyéni készleteknek nem pozitív voltából fakadnak. Közimert, ha valaki készlete csupán nemnegatív, akkor még az egyensúly egzisztenciája sem feltétlenül biztosítható. Itt erről egyáltalán nincs szó, csupán a *KDP*-beli gazdasági programot implementáló mechanizmustól megkövetelt egyéni megvalósíthatósága okozza a problémát.

[100] Ennek okát is később adjuk meg.

[101] $\Re^N_{+(+)} \triangleq \Re^N_+ \setminus \{0\}$.

azaz

$$[x_i \succ_i x_i^*, \quad 0 \leqq x_i \leqq \omega] \Rightarrow [p^* x_i > p^* x_i^* = p^* \omega_i] .$$

A korlátozott versenyzői, vagy másnéven walrasi *egyensúlyi állapotokhoz tartozó allokációk halmazát a $WE_c(e)$ szimbólummal jelöljük.*

5.A.5. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a naturális egyensúlyra vonatkozó*

$$\sum_{i=1}^{I} (x_i - \omega_i) \leqq 0$$

feltétel azért nem szerepel explicite a definícióban, mert a szükségképpen megvalósítható allokáció.*

5.A.6. Segédtétel. *Minden $e \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I, \omega)$ esetén*

$$WE(e) \subseteq WE_c(e) \subseteq Cc(e) \triangleq PO(e) \cap IR(e) ,$$

valamint a

$$WE_c : \mathcal{E}_{cs}(0, N, I, \omega) \rightrightarrows \mathcal{A}_{ok}(\mathcal{E}_{cs}(0, N, I, \omega))$$

leképezés mint gazdasági program, monoton.

Bizonyítás: Triviális a definíciókból. □

Miután a korlátozott walrasi egyensúly ugyanazokkal a lényeges jó tulajdonságokkal rendelkezik, mint a nem korlátozott párja, a tiszta cseregazdaságok vizsgálatánál ennek implementációjával foglalkozunk majd.

Közjavak esetén azonban ez az út nem igazán járható, annak ellenére, hogy több utalás is található az irodalomban arra, hogy a korlátozott *Lindahl*-leképezés monoton, *Pareto*-hatékony és individuálisan racionális.[102] *Tian* [1988] ugyanis megmutatta, hogy ez

[102] Például *Hurwicz* [1985] és *Hurwicz* [1986a].

nem igaz, a korlátozott *Lindahl*-leképezés nem monoton, és mint arra a 3.A.8. Segédtétel kimondásakor utaltunk, erősen nem *Pareto*-hatékony. Az is igaz, hogy *Samuelson*-gazdaságok esetében,

$$L(e) = L_c(e),$$

ezért a *Samuelson*-gazdaságok tárgyalásánál nem ezt az utat követjük, hanem az előbb említett pótlólagos feltételt használjuk.

5.B. Nash-implementálás tiszta cseregazdaságokban

Először is vegyük észre, hogy a *Maskin*-tétel alapján, ha a fogyasztók száma leg-alább három, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a korlátozott *Walras*-leképezés[103] *Nash*-implementálható. Azt láttuk, hogy e leképezés monoton, a preferenciák feltételezett monotonitása miatt pedig nyilvánvalóan vétómentes. Ezek után csak az kérdéses, hogy az implementáló mechanizmusnak milyen további jó tulajdonságai vannak. A másik kérdés, hogy az $I = 2$ esetben mi a helyzet. Noha a *Hurwicz* [1979a] tanulmányban egy szigorúan kiegyensúlyozott mechanizmust találunk erre az esetre, ez sajnos nem folytonos. Az is bizonyítható, hogy ilyen folytonos mechanizmus nem létezik.[104]

Visszatérve az $I \geqq 3$ esetre, a klasszikus tiszta cseregazdaságok családján a *Walras*-leképezést *Nash*-implentáló első mechanizmust *David Schmeidler* szerkesztette.[105] Ez azonban több hiányossággal bírt. Az általa adott mechanizmus kimeneti függvénye nem folytonos és nem egyénileg megvalósítható. A *Hurwicz* [1979c] cikkben

[103] Ha nem ragaszkodunk az egyéni megvalósíthatósághoz, akkor a *Walras*-leképezés.

[104] Lásd erről *Nakamura* [1990].

[105] Általában egy 1976-os kéziratára hivatkoznak. Ez nem fellelhető, de az ebben foglaltakat (állítólag) tartalmazza a *Schmeidler* [1980] tanulmány.

található mechanizmus már folytonos, de továbbra sem egyénileg megvalósítható. Mint arra már utaltunk, ha az egyéni megvalósíthatósághoz ragaszkodunk, akkor a korlátozott *Walras*-leképezést kell vizsgálnunk. Ezt implementáló folytonos és kiegyensúlyozott mechanizmust először a *Postlewaite–Wettstein* [1989] cikkben találhatunk. Ez azonban nem szigorúan kiegyensúlyozott. A továbbiakban – *Tian* [1992] nyomán – egy olyan, a korlátozott *Walras*-leképezést *Nash*-implementáló mechanizmust ismertetünk, amely az összes jelzett jó tulajdonsággal rendelkezik.

5.B.1. Tétel (Tian). *Az $\mathcal{E}_{cs}(0, N, I \geqq 3, \omega)$ tiszta cseregazdaságok családján létezik a korlátozott* Walras-*leképezést* Nash-*implementáló folytonos, teljesen megvalósítható mechanizmus.*

Bizonyítás: A bizonyítás konstruktív. Először ismertetjük a

$$\gamma = \{S, g, \mathcal{E}_{cs}(0, N, I \geqq 3, \omega)\}$$

mechanizmust, majd belátjuk, hogy implementálja a korlátozott *Walras*-leképezést. Elsőnek az egyéni stratégiahalmazokat definiáljuk:

$$S_i \triangleq \Re^N_{++} \times \Re^{I \cdot N}, \quad \forall i \in \mathcal{I}\text{-re},$$

ahol $\forall s_i \in S_i$-re

$$s_i \triangleq (p_i, x_{i1}, \ldots, x_{iI}).$$

A szimbólumok értelmezése a következő: az i-edik játékos egy p_i árvektort és e mellett a játékosoknak (beleértve saját magát) általa juttatandó $(x_{i1}, \ldots, x_{iI})$ jószágköteget javasol. Az $s_i, i = 1, 2, \ldots, I$ javaslatokhoz a mechanizmus a

$$g : S \to \mathcal{A}_{ok}(\mathcal{E}_{cs}(0, N, I \geqq 3, \omega))$$

kimeneti függvény segítségével rendel allokációkat a következő módon. Legyen a továbbiakban

$$g(s) \triangleq X(s) = (x_1(s), \ldots, x_I(s)).$$

Ugyancsak definiáljuk a $p : S \to \Re^N_{++}$ árfüggvényt:

$$p(s) = \sum_{i=1}^{I} \beta_i p_i,$$

ahol $\forall i \in \mathcal{I}$-re

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i/\alpha, & ha\ \alpha > 0 \\ 1/I, & ha\ \alpha = 0, \end{cases}$$

és

$$\alpha_i = \sum_{k,l \neq i} \|p_k - p_l\|, \quad \alpha = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i.$$

Erről az árfüggvényről könnyű belátni, hogy folytonos.[106] Ezek után definiáljuk a következő

$$B : S \rightrightarrows \Re^{I \cdot N}_{+}$$

pont–halmaz leképezést, ami a teljesen megvalósítható allokációkat rendeli a megjátszott stratégiaegyütteshez.

$$B(s) = \left\{ x \in \Re^{I \cdot N}_{+} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sum_{i=1}^{I} (x_i - \omega_i) = 0 \ \acute{e}s \\ p(s)\, x_i = p(s)\, \omega_i,\ \forall i\text{-re} \end{array} \right\}.$$

Ez a pont–halmaz leképezés nyilván folytonos, és $\forall s \in S$-re a $B(s)$ halmaz nemüres, zárt, korlátos és konvex. Vezessük be a következő jelölést:

$$\hat{x}_k(s) = \sum_{i=1}^{I} x_{ik}, \quad \acute{e}s \quad \hat{x}(s) = (\hat{x}_1(s), \ldots, \hat{x}_I(s)).$$

A mechanizmus kimeneti függvénye legyen ezek után az

$$X(s) = \arg \min_{x \in B(s)} \|x - \hat{x}(s)\|$$

[106] Annak ellenére, hogy a β_i együtthatók nem azok. Vegyük azt is észre, hogy az árfüggvény csak a javasolt áraknak függvénye, ennek ellenére – az általánosság megsértése nélkül – tekinthetjük úgy, mint az egész stratégiaegyüttes függvényét.

leképezés, tehát ez a kimeneti függvény a megjátszott stratégiaegyüttesből származó $\hat{x}(s)$ vektorhoz legközelebbi elemet választja a $B(s)$ halmazból. Ez az $X : S \to \Re_+^{I \cdot N}$ leképzés a *Berge*-féle *maximum-tétel*[107] miatt folytonos, és nyilván egyértelmű, azaz függvény.[108] Miután $\forall s \in S$-re $X(s) \in B(s)$, azért a γ teljesen megvalósítható mechanizmus is egyben. Ezután tehát csak azt kell belátnunk, hogy a *Nash*-egyensúlyi stratégiákhoz tartozó kimenetek halmaza minden, az adott családhoz tartozó gazdaságban megegyezik a *korlátozott walrasi egyensúlyi* allokációk halmazával.

5.B.2. Segédtétel. *Ha egy $e \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I \geqq 3, \omega)$ tiszta cseregazdaság esetében $s^* \in S$* Nash-*egyensúlyi stratégiaegyüttes, akkor*

$$X(s^*) \in WE_c(e),$$

másképpen

$$g(NE(S, g, e)) \subseteq WE_c(e), \quad \forall e \in \mathcal{E}_{cs}(0, N, I \geqq 3, \omega).$$

Bizonyítás: Legyen $s^* \in NE(S, g, e)$, ekkor azt kell megmutatnunk, hogy a $(p(s^*), X(s^*))$ korlátozott versenyzői egyensúlyi állapot. A γ mechanizmus definíciója miatt elég belátnunk, hogy minden fogyasztó maximalizálja a hasznát a p^* árvektor által meghatározott költségvetés mellett. Tegyük fel ennek ellenkezőjét és az általánosság megsértése nélkül tegyük fel, hogy létezik olyan $\tilde{x}_1 \in \Re_+^N$, amire $\tilde{x}_1 \leqq \omega(e)$, $p(s^*) \cdot \tilde{x}_1 \leqq p(s^*) \cdot \omega_1$ és $\tilde{x}_1 \succ_1 X_1(s^*)$. Ekkor a preferenciákra tett monotonitási feltétel miatt elegendő, ha a

$$p(s^*) \cdot \tilde{x}_1 = p(s^*) \cdot \omega_1$$

[107] Lásd *Berge* [1963] VI. fejezet és magyarul például *Csekő Imre* [2016], 3.C.10. Tétel.

[108] Lásd például *Zalai Ernő* [1989], Függelék az 1. fejezethez.

egyenlőséget vizsgáljuk. Definiáljuk most az $\tilde{x}_i, i = 2, \ldots, I$ vektorokat a következő módon:

$$\tilde{x}_i = \frac{p(s^*) \cdot \omega_i}{\sum_{k=i}^{I} p(s^*) \cdot \omega_k} \left[\sum_{k=1}^{I} \omega_k - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{x}_k \right]. \tag{5.B–1}$$

Könnyen ellenőrizhetjük (behelyettesítéssel), hogy

$$\sum_{k=1}^{I} \omega_k \geqq \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{x}_k, \quad i = 2, \ldots, I\text{-re},$$

valamint, hogy emiatt minden $l = 2, \ldots, I$-re

$$\tilde{x}_l \in \Re_+^N$$

és

$$p(s^*) \cdot \tilde{x}_l = p(s^*) \cdot \omega_l.$$

Ugyancsak, ha $i = I$, akkor

$$\sum_{k=1}^{I} \omega_k = \sum_{k=1}^{I} \tilde{x}_k.$$

Tegyük most fel, hogy az első játékos az

$$s_1 = \left(p_1^*, \tilde{x}_1 - \sum_{l \neq 1} x_{l1}^*, \ldots, \tilde{x}_I - \sum_{l \neq 1} x_{lI}^* \right)$$

stratégiát játssza. Ekkor

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_I) \in B\left(s_1, s_{-1}^*\right).$$

és

$$\tilde{x}_k = x_{1k} + \sum_{l \neq 1} x_{lk}^*, \quad k = 1, 2, \ldots, I,$$

ahol természetesen

$$x_{1k} = \tilde{x}_1 - \sum_{l \neq 1} x^*_{l1}.$$

Ezek szerint, ismét $k = 1, 2, \ldots, I$-re,

$$X_k\left(s_1, s^*_{-1}\right) = \tilde{x}_k,$$

amiből az indirekt feltételben szereplő

$$\tilde{x}_1 \succ_1 X_1\left(s^*\right)$$

relációval azt kapjuk, hogy

$$X_1\left(s_1, s^*_{-1}\right) \succ_1 X_1\left(s^*\right).$$

Ez azonban ellentmondásban van azzal, hogy

$$s^* \in NE\left(S, \gamma, e\right).$$

Így

$$X\left(s^*\right) \in WE_c\left(e\right).$$

□

Ezek után a másik irányú tartalmazást látjuk be.

5.B.3. Segédtétel. *Ha egy $e \in \mathcal{E}_{cs}\left(0, N, I \geqq 3, \omega\right)$ tiszta cseregazdaság esetében a $p^* \in \Re^N_{+(+)}$ árvektor és az*

$$x^* = \left(x^*_1, \ldots, x^*_I\right)$$

allokáció korlátozott versenyzői egyensúlyi állapot*ot alkot, akkor a fenti γ mechanizmusnak létezik olyan s^** Nash-egyensúlyi *állapota, amire*

$$p\left(s^*\right) = p^* \text{ és } X_i\left(s^*\right) = x^*_i,\ i = 1, 2, \ldots, I\text{-re.}$$

Másképpen:

$$WE_c\left(e\right) \subseteq g\left(NE\left(S, g, e\right)\right), \quad \forall e \in \mathcal{E}_{cs}\left(0, N, I \geqq 3, \omega\right).$$

Bizonyítás: A preferenciákra tett monotonitási feltevésünk miatt a korlátozott versenyzői egyensúlyhoz tartozó (x^*, p^*) párra igaz, hogy

$$p^* \in \Re^N_{++}, \sum_{i=1}^{I} (x_i^* - \omega_i) = 0,$$

valamint

$$p^* x_i^* = p^* \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

Legyen most $\forall i \in \mathcal{I}$-re

$$s_i^* = (p^*, x_{i1}^*, \dots, x_{iI}^*),$$

ahol

$$x_{ii}^* = x_i^* \quad és \quad x_{ij}^* = 0, \quad \forall j \neq i.$$

Ekkor a mechanizmus ehhez az s^* stratégiaegyütteshez a $p(s^*) = p^*$ árvektort és az

$$X(s^*) = (x_1^*, \dots, x_I^*)$$

allokációt rendeli. Azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy

$$s^* \in NE(S, g, e).$$

Először is vegyük észre, hogy az i-edik játékos egymaga nem tudja megváltoztatni a $p(s^*)$ árvektort. Ha ugyanis a p^* vektortól különböző árrendszert javasol is, az $\alpha > 0$ reláció mellett $\alpha_i = 0$ és így $\beta_i = 0$. Ez azt jelenti, hogy egy, az s_i^* stratégiától eltérő $s_i \in S_i$ másik stratégiával olyan $X\left(s_i, s_{-i}^*\right)$ allokációt tud elérni, amelyre $\forall k \in \mathcal{I}$-re

$$\begin{aligned} X_k\left(s_i, s_{-i}^*\right) &\in \Re^N_+ \quad és \\ p(s^*) \cdot X_k\left(s_i, s_{-i}^*\right) &= p(s^*) \cdot \omega_k. \end{aligned} \tag{5.B–2}$$

Tegyük most fel, hogy $s^* \notin NE(S, g, e)$. Ekkor létezik olyan $i \in \mathcal{I}$ és $s_i \in S_i$, hogy

$$X_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \succ_i X_i(s^*).$$

Mivel

$$X_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i,$$

a korlátozott versenyzői egyensúly definíciójából tudjuk, hogy

$$p\left(s^*\right) \cdot X_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) > p\left(s^*\right) \cdot \omega_i,$$

de ez ellentmond az (5.B–2) költségvetési egyenletnek. Beláttuk tehát, hogy egy játékos sem képes önállóan úgy megváltoztatni a mechanizmus adta allokációt, hogy az számára előnyös legyen. Az s^* stratégiaegyüttes tehát *Nash*-egyensúlyi. □

Ha e két segédtétel állítását egymás mellé illesztjük, akkor látható, a *Tian*-tételt beláttuk. □

5.B.4. Megjegyzés. *Ha alaposan megvizsgáljuk ezt a bizonyítást, akkor észrevehetjük, csak a preferenciák monotonitását használtuk. Az állítás bizonyításához sem a preferenciák folytonossága, sem azok konvexitása nem kell, sőt, még a tranzitivitást sem szükséges feltennünk. A* Tian*-tétel tehát az itteni formájánál sokkal általánosabb.*[109]

5.C. Nash-implementálás vegyes gazdaságokban

A vegyes gazdaságok esetében, éppen a már sokszor említett *Samuelson*-sejtés miatt sokáig úgy tűnt, reménytelen vállalkozás akárcsak *Pareto*-optimális (hatékony) mechanizmus szerkesztése, nem

[109] Az általánosítás értelmzése és haszna abban rejlik, hogy nem kell élnünk a neoklasszikus feltevésekkel. Emiatt a döntéshozók akár társadalmi csoportok, intézmények is lehetnek, amelyekről önmagukban nem tehetjük fel a racionalitást. Vesd össze a *Hurwicz* [1986b] tanulmánnyal.

is beszélve a gazdasági programok, illetve a mechanizmusok egyéb jó tulajdonságairól. Az áttörést *Theodore Groves* és *John Ledyard* méltán híres cikke hozta meg.[110] Ebben a szerzőknek először sikerült olyan mechanizmust adniuk, amelyik *Pareto*-optimális allokációt biztosít a vegyes gazdaságban. Sajnálatos módon, e mechanizmus nem tesz eleget olyan feltevéseknek, amelyeket joggal követelhetünk meg. A legfontosabb ilyen megemlítendő hiányossága az, hogy a *Nash*-egyensúlyi pontokban sem feltétlenül individuálisan racionális. Ez bizony igen kellemetlen tulajdonság, mert erősen megkérdőjelezi az egyének részvételi hajlandóságát egy ilyen mechanizmus lejátszásában. Emellett egyénileg nem megvalósítható, és a *Lindahl*-egyensúly szokásos egzisztenciabizonyításában használt feltételeknél erősebb feltevések kellenek ahhoz, hogy belássuk, a *Nash*-egyensúlyi stratégiák halmaza nem üres.[111] A következő lépés ismét *Hurwicz* nevéhez fűződik. Az általa szerkesztett mechanizmus[112] már individuálisan racionális, hiszen a *Lindahl*-leképezést implementálja, kiegyensúlyozott és folytonos. Sajnos, egyénileg nem megvalósítható és csak *Samuelson*-gazdaságokban működik, több jószágra nem általánosítható. *Mark Walker*nek a *Lindahl*-leképezést implementáló mechanizmusa[113] – az egyéni megvalósíthatóság kivételével – minden jó tulajdonsággal bír és a lehető legegyszerűbb. A játékosok stratégiahalmaza *Samuelson*-gazdaságokban ugyanis egydimenziós, mindenkinek csak egy valós számot kell bejelentenie. Igaz, ha $N \geqq 2$, akkor problémát jelentene az, hogy a kimeneti „függvény” a magánjószágokban pont–halmaz leképezés. Erre az általános vegyes gazdaság esetre a *Tian–Li* [1991] cikkben található mechanizmus rendelkezik a legtöbb jó tulajdonsággal. A klasszikus vegyes gazdaságok egy csa-

[110] *Groves–Ledyard* [1977]

[111] Lásd *Groves–Ledyard* [1980].

[112] *Hurwicz* [1979c].

[113] *Walker* [1981].

ládján a *Lindahl*-leképezést implementálja[114], folytonos, teljesen megvalósítható, egyértelmű[115]. Sajnos, elég bonyolult: az egyéni stratégiahalmazok dimenziója magas, és a szereplők számától is függ. További probléma az, hogy a termelésben – a folytonosság és a szigorú kiegyensúlyozottság egyidejű feltételezése miatt – csak olyan technológiát enged meg, amelyben a költségminimalizáló inputvektorok egyértelműek.[116] Természetesen ez semmi problémát nem jelent, ha $N = 1$.

A következőkben, visszatérve a *Samuelson*-gazdaság feltételezésére, egy olyan mechanizmust ismertetünk, ami – a már többször említett határfeltétel mellett – minden eddig definiált jó tulajdonsággal rendelkezik.[117] A mechanizmust azonban módosítjuk egy kicsit, hogy az interpretációt kissé megkönnyíthessük. Először azonban bevezetjük a határfeltételt.

5.C.1. Definíció (Határfeltétel). *Egy*

$$e \in \mathcal{E}_S\,(1, 1, I \geqq 3, \omega)$$

Samuelson-*gazdaság eleget tesz a* határfeltétel*nek, ha* $\forall i \in \mathcal{I}$*-re*

$$(q, x_i) \succ_i \left(q', x_i'\right), \quad \forall\,(q, x_i) \in \Re^2_{++} \text{ és } \forall\left(q', x_i'\right) \in \partial\Re^2_+,$$

ahol $\partial\Re^2_+$ *az* $\Re^2_+$ *halmaz határa.*[118] *A határfeltételnek eleget tevő* Samuelson-*gazdaságok családját pedig az* $\mathcal{E}^{\partial}_S\,(1, 1, I \geqq 3, \omega)$ *szimbólummal jelöljük.*

[114] Persze, a határpontokat kizáró feltétel mellett.

[115] $N \geqq 2$ esetén is.

[116] Ezzel a vizsgálatból kizárja a lineáris, illetve lineáris szakaszokból álló egyenlőtermék-görbét eredményező termelési függvényeket.

[117] *Tian* [1990].

[118] Ezt a $\partial\Re^2_+$ szimbólumot a továbbiakban használandó egyszerű jelölés érdekében vezettük be. Nyilván

$$\partial\Re^2_+ = \Re^2_+ \backslash \Re^2_{++}.$$

Ebben a kétdimenziós esetben pedig nem más, mint a két tengely.

Lássuk akkor az $e \in \mathcal{E}_S^{\partial}(1,1,I \geqq 3,\omega)$ gazdaságok családjához rendelt

$$\gamma = \left(S, g, \mathcal{E}_S^{\partial}(1,1,I \geqq 3,\omega)\right)$$

mechanizmust. Legyen

$$S_i = \Re, \quad \forall i \in \mathcal{I}\text{-re}.$$

Ennek, a fogyasztók által bejelentendő valós számnak egyszerű gazdasági inter-pretációt adunk: ez jelenti azt az adómennyiséget, amelyet az i-edik fogyasztó befizetni kíván. Az $s = (s_1, \ldots, s_I)$ bejelentések alapján a mechanizmus kiszámítja a közjószág egyéni árát, azaz a $p^{(q)}(s) \in \Re^I$ I elemű vektort a következő módon:[119] $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$p_i^{(q)}(s) = \frac{1}{I} + s_{i+2} - s_{i+1},$$

ahol az alsó indexek „modulo I" értendők, azaz $I + 1 \triangleq 1$, illetve $I + 2 \triangleq 2$. Vegyük észre, hogy az egyéni árak nem függenek a fogyasztók saját stratégiájától, így senki sem tudja befolyásolni közvetlenül azt az összeget, amit neki a közjószágért fizetnie kell. Azt is vegyük észre, hogy

$$\sum_{i=1}^{I} p_i^{(q)}(s) = 1,$$

ami nagyon hasonlít a *Samuelson*-feltételre, azaz a

$$\sum_{i=1}^{I} MRS_i = MRT$$

hatékonysági összefüggésre. Vezessük be a következő jelöléseket! Legyen

$$\mathcal{I}_+(s) = \left\{ i \in \mathcal{I} \,\middle|\, p_i^{(q)}(s) > 0 \right\}$$

[119] Ez az árképzési szabály a *Walker* [1981] tanulmányban található. A *Tian* [1990] cikkbeli szabály ennél bonyolultabb.

és
$$\alpha(s) = \min_{i \in \mathcal{I}_+} \frac{\omega_i}{p_i^{(q)}(s)}.$$

Az $\mathcal{I}_+(s)$ indexhalmaz nyilván nem üres, az $\alpha(s)$ valós szám pedig olyan felső korlátként szolgál, amely az egyéni megvalósíthatóságot garantálja majd. A mechanizmus $g : S \to \Re_+^{1+I}$ kimeneti függvénye álljon az alábbi összetevőkből. Legyen a közjószág szintjét meghatározó $Q : S \to \Re_+$ függvény a következő:

$$Q(s) = \begin{cases} \hat{s}, & ha\, 0 \leqq \hat{s} \leqq \alpha(s) \\ \alpha(s), & ha\, \alpha(s) < \hat{s} \\ 0, & ha\, \hat{s} < 0 \end{cases},$$

ahol
$$\hat{s} = \sum_{i=1}^{I} s_i.$$

Ebből a függvényből már látszik az $\alpha(s)$ korlát szerepe: senki nem fizethet többet a közjószágért, mint amennyi magánjószág a rendelkezésre áll. A magánjószágból a fogyasztóknak jutó mennyiséget meghatározó függvények a következők: $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$X_i(s) = \omega_i - p_i^{(q)}(s) \cdot Q(s).$$

A g kimeneti függvény nyilvánvalóan folytonos, a $p_i^{(q)}(s)$ árak képzési szabályából fakadóan minden fogyasztóra igaz a

$$(Q(s), X_i(s)) \in \Re_+^2$$

tartalmazás, azaz a mechanizmus egyénileg megvalósítható és a

$$Q(s) + \sum_{i=1}^{I} X_i(s) = \sum_{i=1}^{I} \omega_i$$

egyenlőség miatt szigorúan kiegyensúlyozott, azaz teljesen megvalósítható.

5.C.2. Segédtétel. *Ha* $\hat{s} \geqq 0$ *és*

$$\omega_i - p_i^{(q)}(s) \cdot \hat{s} \geqq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}\text{-re},$$

akkor

$$Q(s) = \hat{s}.$$

Bizonyítás: Triviális a definíciókból. □

5.C.3. Segédtétel. *Ha egy* $e \in \mathcal{E}_S^{\partial}(1, 1, I \geqq 3, \omega)$ *gazdaságra*

$$s^* \in NE(S, g, e),$$

akkor $\forall i \in \mathcal{I}$*-re*

$$(Q(s^*), X_i(s^*)) \in \Re^2_{++}.$$

Bizonyítás: Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a segédtétel állítása nem igaz. Ekkor létezik egy $i \in \mathcal{I}$ fogyasztó, hogy vagy $X_i(s^*) = 0$, vagy $Q(s^*) = 0$. Tekintsük a következő másodfokú egyenletet!

$$q = \frac{\omega^*}{2(q + c)},$$

ahol $\omega^* = \min_{i \in \mathcal{I}} \omega_i$ és

$$c = \frac{1}{I} + 2\sum_{i=1}^{I} |s_i^*|.$$

Könnyű belátni, hogy ennek az egyenletnek a nagyobbik gyöke pozitív valós szám. Jelöljük ezt a $\check{q}$ szimbólummal. Tegyük fel most, hogy az i-edik fogyasztó az $s_i = \check{q} - \sum_{k \neq i} s_k^*$ stratégiát játssza. Ekkor nyilván az $\left(s_i, s_{-i}^*\right)$ stratégiaegyüttesre $s_i + \sum_{k \neq i} s_k^* > 0$ és $\forall k \in \mathcal{I} \setminus \{i-1, i-2\}$-re

$$\omega_k - p_k^{(q)}\left(s_i, s_{-i}^*\right)\check{q} = \omega_k - \left(\frac{1}{I} + s_{k+2}^* - s_{k+1}^*\right)\check{q} \geqq$$

$$\geqq \ \omega_k - \left(\frac{1}{I} + 2\sum_{l=1}^{I} |s_l^*| + \check{q}\right)\check{q} = \omega_k - \frac{\omega^*}{2} \geqq \frac{\omega_k}{2} > 0.$$

Ha $k = i - 1$, akkor

$$\omega_k - p_k^{(q)}\left(s_i, s_{-i}^*\right)\check{q} = \omega_k - \left(\frac{1}{I} + s_{k+2}^* - \check{q} + \sum_{l \neq i} s_l^*\right)\check{q} \geqq$$

$$\geqq \quad \omega_k - \left(\frac{1}{I} + 2\sum_{l=1}^{I}|s_l^*| + \check{q}\right)\check{q} = \omega_k - \frac{\omega^*}{2} \geqq \frac{\omega_k}{2} > 0.$$

Ha $k = i - 2$, akkor

$$\omega_k - p_k^{(q)}\left(s_i, s_{-i}^*\right)\check{q} = \omega_k - \left(\frac{1}{I} + \check{q} - \sum_{l \neq i} s_l^* - s_{k+1}^*\right)\check{q} \geqq$$

$$\geqq \quad \omega_k - \left(\frac{1}{I} + 2\sum_{l=1}^{I}|s_l^*| + \check{q}\right)\check{q} = \omega_k - \frac{\omega^*}{2} \geqq \frac{\omega_k}{2} > 0.$$

Ezekből az 5.C.2. Segédtétellel

$$Q\left(s_i, s_{-i}^*\right) = \check{q} > 0,$$

és $\forall k \in \mathcal{I}$-re

$$X_k\left(s_i, s_{-i}^*\right) = \omega_k - p_k^{(q)}\left(s_i, s_{-i}^*\right)\check{q} > 0.$$

A határfeltétel értelmében

$$\left(Q\left(s_i, s_{-i}^*\right), X_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)\right) \succ_i \left(Q\left(s^*\right), X_i\left(s^*\right)\right),$$

ami ellentmond a kezdeti feltételünknek, azaz annak, hogy az s^* stratégiaegyüttes *Nash*-egyensúlyi. □

5.C.4. Segédtétel. *Ha egy* $e \in \mathcal{E}_S^{\partial}(1, 1, I \geqq 3, \omega)$ *gazdaságra*

$$s^* \in NE(S, g, e),$$

akkor

$$Q\left(s^*\right) \in \left(0, \alpha\left(s^*\right)\right),$$

és így

$$Q\left(s^*\right) = \sum_{i=1}^{I} s_i^*.$$

Bizonyítás: Az 5.C.3. Segédtétel értelmében $Q\left(s^*\right)$ pozitív, annyit kell tehát megmutatnunk, hogy kisebb az $\alpha\left(s^*\right)$ felső korlátnál. Tegyük fel, hogy egyenlő vele. Ekkor legalább egy $i \in \mathcal{I}$-re

$$X_i\left(s^*\right) = \omega_i - p_i^{(q)}\left(s^*\right)\alpha\left(s^*\right) = \omega_i - \omega_i = 0.$$

Ugyankkor az 5.C.3. Segédtételből tudjuk, hogy pozitívnak kellene lennie. Ellentmondásra jutottunk. □

Most már eljutottunk oda, hogy belássuk, egy *Nash*-egyensúlyi stratégiaegyütteshez tartozó allokáció *Lindahl*-egyensúlyi.

5.C.5. Segédtétel. *Egy* $e \in \mathcal{E}_S^{\partial}\left(1, 1, I \geqq 3, \omega\right)$ *gazdaságra*

$$g\left(NE\left(S, g, e\right)\right) \subseteq LE\left(e\right).$$

Bizonyítás: Legyen $s^* \in NE\left(S, g, e\right)$. Azt kívánjuk megmutatni, hogy a

$$\left(Q\left(s^*\right), X_1\left(s^*\right), \ldots, X_I\left(s^*\right)\right) \in LE\left(e\right),$$

a $p^{(q)}\left(s^*\right)$ árvektor mellett. Miután a mechanizmus – mint láttuk – teljesen megvalósítható és

$$\sum_{i=1}^{I} p_i^{(q)}\left(s^*\right) = 1,$$

azaz a profit maximális, valamint $\forall i \in \mathcal{I}$-re

$$X_i\left(s^*\right) + p_i^{(q)}\left(s^*\right) \cdot Q\left(s^*\right) = \omega_i,$$

ezért elegendő annyit belátnunk, hogy minden fogyasztó maximalizálja a hasznát a költségvetési korlátja mellett. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. A preferenciákra tett monotonitási feltétel miatt tehát létezik olyan i fogyasztó és $(q, x_i) \in \Re^2_+$ pár, hogy

$$(q, x_i) \succ_i (Q(s^*), X_i(s^*))$$

és

$$x_i + p_i^{(q)}(s^*) \cdot q = \omega_i.$$

Legyen

$$\left(q^\lambda, x_i^\lambda\right) = (\lambda q + (1-\lambda) Q(s^*), \lambda x_i + (1-\lambda) X_i(s^*)).$$

Látható, $\left(q^\lambda, x_i^\lambda\right) \in \Re^2_+$, $x_i^\lambda + p_i^{(q)}(s^*) q^\lambda = \omega_i$, valamint a preferenciák konvexitása miatt $\forall \lambda \in (0,1)$-re

$$\left(q^\lambda, x_i^\lambda\right) \succ_i (Q(s^*), X_i(s^*)).$$

Tegyük fel, hogy az i-edik fogyasztó az $s_i = q^\lambda - \sum_{k \neq i} s_k^*$ stratégiát játssza. Az 5.C.4. Segédtétel értelmében az is igaz, hogy

$$s_i = q^\lambda - Q(s^*) + s_i^*.$$

Emiatt ahogy $\lambda \to 0$, az is igaz, hogy $q^\lambda \to Q(s^*)$, valamint $s_i \to s_i^*$. Miután az 5.C.3. Segédtétel állítása szerint $k = 1, 2, \ldots, I$-re $X_j(s^*) > 0$, ezért elég kicsi pozitív λ esetén ugyancsak minden k-ra

$$\omega_k - p_k^{(q)}\left(s_i, s_{-i}^*\right) q^\lambda > 0.$$

Ebből az 5.C.2. Segédtétellel

$$Q\left(s_i, s_{-i}^*\right) = q^\lambda$$

és

$$X_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) = \omega_i - p_i^{(q)}(s^*) \cdot Q\left(s_i, s_{-i}^*\right) = x_i^\lambda.$$

Mindezekből

$$\left(Q\left(s_i, s^*_{-i}\right), X_i\left(s_i, s^*_{-i}\right)\right) \succ_i \left(Q\left(s^*\right), X_i\left(s^*\right)\right),$$

ami ellentmond annak, hogy s^* *Nash*-egyensúlyi stratégiaegyüttes. Ellentmondásra jutottunk, ezzel beláttuk az állítást. □

Most az ellenkező irányú tartalmazást látjuk be.

5.C.6. Segédtétel. *Egy* $e \in \mathcal{E}^{\partial}_{S}(1, 1, I \geqq 3, \omega)$ *gazdaságra*

$$LE(e) \subseteq g(NE(S, g, e)).$$

Bizonyítás: Legyen a $(q^*, x^*_1, \ldots, x^*_I)$ allokáció és a $p^{(q)*}$ árvektor együttese *Lindahl*-egyensúlyi állapot az $e \in \mathcal{E}^{\partial}_{S}(1, 1, I \geqq 3, \omega)$ gazdaságban. Meg kell mutatnunk, hogy létezik olyan $s^* \in S$ *Nash*-egyensúlyi stratégiaegyüttes, amelyhez ez az allokáció tartozik. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
s_1 + s_2 + \ldots + s_I &= q^* \\
-s_1 + s_2 &= -\frac{1}{I} + p^{(q)*}_I \\
-s_2 + s_3 &= -\frac{1}{I} + p^{(q)*}_1 \\
&\vdots \\
-s_{I-1} + s_I &= -\frac{1}{I} + p^{(q)*}_{I-2}
\end{aligned}$$

Látható, az együtthatómátrix rangja I, így a rendszer egyértelműen megoldható. Jelölje ezt a megoldást s^*. Ekkor behelyettesítésekkel könnyű meggyőződnünk róla, hogy $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$\begin{aligned}
p^{(q)}_i(s^*) &= p^{(q)*}_i \\
X_i(s^*) &= x^*_i,
\end{aligned}$$

valamint

$$Q(s^*) = q^*.$$

Ekkor azonban a *Lindahl*-egyensúly definíciója miatt ismét minden i-re igaz, hogy teszőleges olyan $s_i \in S_i$ stratégiára, amelyre a

$$\left(Q\left(s_i, s^*_{-i}\right), X_i\left(s_i, s^*_{-i}\right)\right) \in \Re^2_+$$

tartalmazás és a

$$X_i\left(s_i, s^*_{-i}\right) + p_i^{(q)}\left(s^*\right) Q\left(s_i, s^*_{-i}\right) = \omega_i$$

egyenlőség fennáll,

$$\left(Q\left(s^*\right), X_i\left(s^*\right)\right) \succsim_i \left(Q\left(s_i, s^*_{-i}\right), X_i\left(s_i, s^*_{-i}\right)\right),$$

azaz az így kapott s^* valóban *Nash*-egyensúlyi stratégiaegyüttes.□

Ezek után nem marad más hátra, mint hogy kimondjuk az utolsó tételünket:

5.C.7. Tétel (Tian). *Az*

$$\mathcal{E}_S^{\partial}\left(1, 1, I \geqq 3, \omega\right)$$

Samuelson-*gazdaságok családján létezik a* Lindahl-*leképezést* Nash-*implementáló folytonos, teljesen megvalósítható mechanizmus.*

Bizonyítás: A tétel állítása az 5.C.5. és az 5.C.6. Segédtételek közvetlen folyománya. □

5.C.8. Megjegyzés. *Utolsó megjegyzésként arra érdemes felhívni ismét a figyelmet, hogy ez a mechanizmus a tételben explicite kimondott jó tulajdonságok mellett a lehető leghatékonyabb információs szempontból, hiszen a játékosok stratégiahalmaza egydimenziós.*

Hivatkozott irodalom

Arrow, K. [1963]: *Social Choice and Individual Values.* 2 kiadás. John Wiley and Sons, New York.

Aumann, R. [1964]: Market with Continuum of Traders. *Econometrica*, **32**: 39–50. o.

Berge, C. [1963]: *Topological Spaces.* Macmillan, London.

Blin, J.-M.–Satterthwaite, M. [1978]: Individual Decisions and Group Decisions. The Fundamental Differences. *Journal of Public Economics*, **10**: 247–267. o.

Clarke, E. [1973]: Multipart Pricing of Public Goods. *Public Choice*, **2**: 17–33. o.

Csekő Imre [2016]: Rövid bevzetés az általános egyensúly elméletébe. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest. Megjelenés éve: 2017.

Dasgupta, P.–Hammond, P.–Maskin, E. [1979]: The Implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility. *Review of Economic Studies*, **46**: 181–216. o.

Debreu, G.–Scarf, H. (1963): A Limit Theorem on the Core of an Economy. *International Economic Review*, **4**: 235–246. o. Magyarul: A gazdaság magjának határértéktétele. Megjelent: *Debreu, G.*: *Közgazdaságtan axiomatikus módszerrel.* Közgazdasági es Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1987, 145–156. o.

Debreu, G. (1964): Continuity Properties of Paretian Utility. *International Economic Review*, **5**: 178–184. o. Magyarul: A paretoi hasznosság folytonossági tulajdonságai. Megjelent: *Debreu, G.*: *Közgazdaságtan axiomatikus módszerrel.* Közgazdasági es Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1987, 193–202. o.

Foley, D. [1970]: Lindahl's Solution and the Core of an Economy with Public Goods. *Econometrica*, **38**: 66–72. o.

Gibbard, A. [1973]: Manipulation of Voting Schemes. A General Result. *Econometrica*, **41**: 587–601. o.

Green, J.–Laffont, J.-J. [1977]: Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences. *Econometrica*, **45**: 425–438. o.

Green, J.–Laffont, J.-J. [1979a]: *Incentives in Public Decision-Making.* North-Holland, Amsterdam.

Green, J.–Laffont, J.-J. [1979b]: On Coalition Incentive Compatibility. *Review of Economic Studies*, **46**: 243–254. o.

Groves, T.–Ledyard, J. [1977]: Optimal Allocation of Public Goods: A Solution to the "Free Rider" Problem. *Econometrica*, **45**: 783–809. o.

Groves, T.–Ledyard, J. [1980]: The Existence of Efficient and Incentive Compatible Equilibrium with Public Goods. *Econometrica*, **48**: 1487–1506. o.

Groves, T.–Ledyard, J. [1987]: Incentive Compatibility Since 1972. Megjelent: *Groves, T.–Radner, R.–Reiter, S.* [szerk.]: *Information, Incentives and Economic Mechanisms. Essays in Honor of Leonid Hurwicz.* University of Minnesota Press, Minneapolis, 48–111. o.

Groves, T.–Loeb, M. [1975]: Incentives and Public Inputs. *Journal of Public Economics*, **4**: 211–226. o.

Groves, T. [1973]: Incentives in Teams. *Econometrica*, **41**: 617–631. o.

Groves, T. [1982]: On Theories of Incentive Compatible Choice with Compensation. Megjelent: *Hildebrand, W.* [szerk.]: *Advances in Economic Theory. Papers of the IVth World Congress.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1–29. o.

Holmström, B. [1979]: Groves' Scheme on Restricted Domains. *Econometrica*, **47**: 1137–1144. o.

Hurwicz, L.–Schmeidler, D. [1978]: Construction of Outcome Functions Guaranteeing Existence and Pareto Optimality of Nash Equilibria. *Econometrica*, **46**: 1447–1474. o.

Hurwicz, L.–Maskin, E.–Postlewaite, A. [1984]: Feasible Implementation of Social Choice Correspondences by Nash Equilibria. Kézirat.

Hurwicz, L. [1960]: Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processess. Megjelent: *Arrow, K.–Karlin, S.–Suppes, P.* [szerk.]: *Mathematical Methods in the Social Sciences.* Stanford University Press, Palo Alto, 27–46. o.

Hurwicz, L. [1972]: On Informationally Decentralized Systems. Megjelent: *McGuire, C.–Radner, R.* [szerk.]: *Decision and Organisation. A Volume in Honor of Jacob Marschak.* North-Holland, Amsterdam, 297–336. o.

Hurwicz, L. [1974]: The Design of Mechanisms for Resource Allocation. Megjelent: *Intriligator, M.–Kendrick, M.* [szerk.]: *Frontiers of Quantitative Economics. Volume II.* North-Holland, Amsterdam, 3–42. o.

Hurwicz, L. [1979a]: Balanced Outcome Functions Yielding Walrasian and Lindhal Allocation at Nash Equilibrium Points for Two or More Agents. Megjelent: *Green, J.–Scheinkmann,* *J.* [szerk.]: *General Equilibrium, Growth and Trade. Essays in Honor of Lionel McKenzie.* Academic Press, 125–137. o.

Hurwicz, L. [1979b]: On Allocations Attainable Through Nash Equilibria. Megjelent: *Laffont, J.-J.* [szerk.]: *Aggregation and Revelation of Preferences.* North-Holland, Amsterdam, 397–419. o.

Hurwicz, L. [1979c]: Outcome Functions Yielding Walrasian and Lindahl Allocation at Nash Equilibrium Points. *Review of Economic Studies,* **46**: 217–226. o.

Hurwicz, L. [1985]: A Perspective. Megjelent: *Hurwicz, L.–Schmeidler, D.–Sonnenschein, H.* [szerk.]: *Social Goals and Social Organization. Essays in Memory of Elisha Pazner.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1–16. o.

Hurwicz, L. [1986a]: Incentive Aspects of Decentralization. Megjelent: *Arrow, K.–Intriligator, M.* [szerk.]: *Handbook of Mathematical Economics. Volume III.* North-Holland, Amsterdam, 1441–1482. o.

Hurwicz, L. [1986b]: On the Implementation of Social Choice Rules in Irrational Societies. Megjelent: *Heller, W.–Starr, R.–Starrett, D.* [szerk.]: *Social Choice and Public Decision Making. Essays in Honor of K. J. Arrow. Volume I.* Cambridge University Press, Cambridge, 75–96. o.

Jackson, M. [1992]: Implementation in Undominated Strategies: A Look at Bound-ed Mechanisms. *Review of Economic Studies,* **59**: 757–776. o.

Laffont, J.-J.–Maskin, E. [1982]: The Theory of Incentives: an Overview. Megjelent: *Hildenbrand, W.* [szerk.]: *Advance in Economic Theory. Papers of the IVth World Congress.* Cambridge University Press, Cambridge, 31–94. o.

Ledyard, J. [1977]: Incentive Compatible Behavior in Core-Selecting Organizations. *Econometrica*, **45**: 1607–1621. o.

Lindahl, E. [1919]: Just Taxation–a Positive Solution. Megjelent: *Musgrave, R.–Peacock, A.* [szerk.]: *Classics in the Theory of Public Finance.* MacMillan, London, 168–176. o.

Malawski, M.–Lin, Z. [1994]: A Note on Social Choice Theory without the Pareto-Principle. *Social Choice and Welfare*, **11**: 103–107. o.

Malinvaud, E. [1971]: A Planning Approach to the Public Good Problem. *Swedish Journal of Economics*, **11**: 96–111. o.

Mas-Colell, A.–Whinston, M.–Green, J. [1995]: *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, Oxford.

Maskin, E. [1977]: Nash Equilibrium and Welfare Optimality. Kiadatlan kézirat.

Maskin, E. [1985]: The Theory of Implementation in Nash Equilibrium. Megjelent: *Hurwicz, L.–Schmeidler, D.–Sonnenschein, H.* [szerk.]: *Social Goals and Social Organization. Essays in Memory of Elisha Pazner.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 173–204. o.

Milleron, J.-C. [1972]: Theory of Value with Public Goods: A Survey Article. *Journal of Economic Theory*, **5**: 419–477. o.

Moore, J. [1992]: Implementation, Contracts and Renegotiation. Megjelent: *Laffont, J.-J.* [szerk.]: *Advances in Economic Theory. VIth World Congress.Vol. 1.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 182–282. o.

Muench, T. [1972]: The Core and the Lindahl Equilibrium of an Economy with Public Goods: an Example. *Journal of Economic Theory*, **4**: 241–255. o.

Muller, E.–Satterthwaite, M. [1985]: Strategy-Proofness: the Existence of Dominant-Strategy Mechanisms. Megjelent: *Hurwicz, L.–Schmeidler, D.–Sonnenschein, H.* [szerk.]: *Social Goals and Social Organization. Essays in Memory of Elisha Pazner.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 131–171. o.

Nakamura, S. [1990]: A Feasible Nash Implementation of Walrasian Equilibria in the Two Agent Economy. *Economics Letters*, **34**: 5–9. o.

Palfrey, T.–Srivastava, S. [1991]: Nash Implementation Using Undominated Strategies. *Econometrica*, **59**: 479–501. o.

Postlewaite, A.–Roberts, J. [1976]: The Incentives for Pricetaking Behavior in Large Exchange Economies. *Econometrica*, **44**: 115–127. o.

Postlewaite, A.–Wettstein, D. [1989]: Feasible and Continuous Implementation. *Journal of Economic Theory*, **56**: 603–612. o.

Postlewaite, A. [1979]: Manipulation Via Endowments. *Review of Economic Studies*, **46**: 255–262. o.

Postlewaite, A. [1985]: Implementation Via Nash Equilibria in Economic Environments. Megjelent: *Hurwicz, L.–Schmeidler, D.–Sonnenschein, H.* [szerk.]: *Social Choice and Social Organization. Essays in Memory of Elisha Pazner.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 205–228. o.

Radner, R. [1986]: Decentralizáció és érdekeltség. *Sigma*, **19**: 1–39. o.

Repullo, R. [1987]: A Simple Proof of Maskins Theorem on Nash Implementation. *Social Choice and Welfare*, **4**: 39–41. o.

Roberts, J. [1976]: The Incentives for Correct Revelation of Preferences and the Number of Consumers. *Journal of Public Economics*, **6**: 359–374. o.

Samuelson, P. [1954]: The Pure Theory of Public Expenditure. *Review of Economics and Statistics*, **36**: 387–389. o.

Samuelson, P. [1955]: Diagrammatic Ecposition of a Theory of Public Expenditure. *Review of Economics and Statistics*, **37**: 350–356. o.

Satterthwaite, M. [1975]: Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems. *Journal of Economic Theory*, **10**: 187–217. o.

Schmeidler, D.–Sonnenschein, H. [1978]: Two Proofs of the Gibbard–Satterthwaite Theorem on the Possibility of a Strategy Proof Social Choice Function. Megjelent: *Gottinger, H.–Leinfellner, W.* [szerk.]: *Decision Theory and Social Ethics. Issues in Social Choice*. Reidel, Dordrecht, 227–234. o.

Schmeidler, D. [1980]: Walrasian Analysis Via Strategic Outcome Functions. *Econometrica*, **48**: 1585–1593. o.

Tian, G.–Li, Q. [1991]: Completely Feasible and Continuous Implementation of the Lindahl Correspondence with Any Number of Goods. *Mathematical Social Sciences*, **21**: 67–79. o.

Tian, G. [1988]: On the Constrained Walrasian and Lindhal Correspondences. *Economics Letters*, **26**: 299–303. o.

Tian, G. [1990]: Completely Feasible and Continuous Implementation of the Lindhal Correspondence with a Message Space of Minimal Dimension. *Journal of Economic Theory*, **51**: 443–452. o.

Tian, G. [1992]: Implementation of the Walrasian Correspondence without Continuous, Convex and Ordered Preferences. *Social Choice and Welfare*, **9**: 117–130.o.

Varian, H. [1991]: *Mikroökonómia középfokon*. Közgazdasági és Jogi Könykiadó, Budapest.

Varian, H. [1993]: *Microeconomic Analysis.* 3 kiadás. Norton and Co., New York.

Vickrey, W. [1961]: Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders. *Journal of Finance*, **16**: 8–37. o.

Walker, M. [1978]: A Note on the Characterization of Mechanisms for the Revelation of Preferences. *Econometrica*, **46**: 147–152. o.

Walker, M. [1980]: On the Nonexistence of a Dominant Strategy Mechanism for Making Optimal Public Decisions. *Econometrica*, **48**: 1521–1539. o.

Walker, M. [1981]: A Simple Incentive Compatible Scheme for Attaining Lindahl Allocations. *Econometrica*, **49**: 65–72. o.

Wilson, R. [1972]: Social Choice Theory without the Pareto Principle. *Journal of Economic Theory*, **5**: 478–486. o.

Zalai Ernő [1989]: *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

#04

Közösségi döntések, gazdasági mechanizmus, általános egyensúly

Miért olvassam el?

A közgazdaságtan uralkodó paradigmájával, az általános egyensúlyelmélettel esetenként „komoly baj van". Az alapgondolat, miszerint a piacon egy láthatatlan kéz elrendezi a dolgokat, csak roppant restriktív feltételek mellett igaz.

Ebben a kötetben olyan eljárásokkal foglalkozunk, amelyek – szemben az általános egyensúlyelmélet versenyzői mechanizmusával – építenek arra, hogy a döntéshozók cselekedetei hatással vannak egymásra, és ezt a hatást ők maguk figyelembe is veszik. Ha ezek az eljárások ugyanahhoz az eredményhez vezetnek, mint a versenyzői mechanizmus, akkor az általános egyensúly jó tulajdonságai, elsősorban a hatékonyság, megmaradnak. Ilyen eljárások szerkesztése egy *par excellence* mechanizmustervezési feladat, amelyben az általános egyensúly egy közösségi döntési probléma megoldásaként adódik.