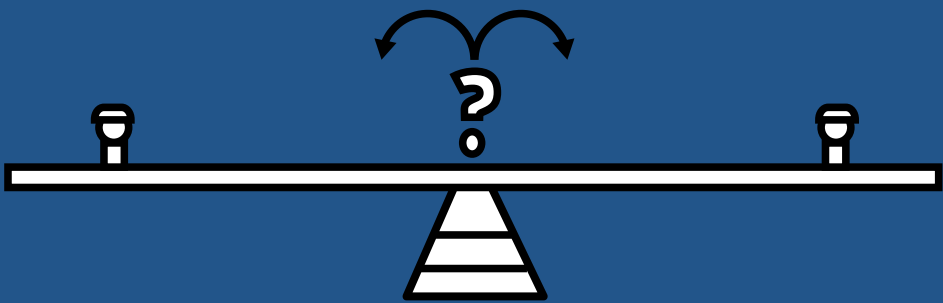
Olvass és tanulj !

#03

Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe

A verseny az együttműködés egy formája!



Szerző: Csekő Imre

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

MAGYAR NEMZETI BANK

Csekő Imre

Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe

Közgazdaságtudományi Kar
Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar
Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék

Cím:
Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe
Szerző:

A szöveget gondozta:
Szilágyi Ágnes

Kiadó:
Budapesti Corvinus Egyetem | 1093, Budapest, Fővám tér 8.

Nyomdai előkészítés és kivitelezés:
CC Printing Kft.

ISBN 978-963-503-637-0

Budapest | 2016

A TANKÖNYV A MAGYAR NEMZETI BANK ÉS A BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
KÖZÖTTI EGYÜTTMŰKÖDÉSI MEGÁLLAPODÁS KERETÉBEN KERÜLT KIADÁSRA.

Tartalom

Előszó

E könyv első, azóta számtalanszor újraírt, újraszerkesztett változata az elmúlt évtizedekben a Budapesti CORVINUS Egyetemen, illetve jogelődjein tartott, haladó mikroökonómiai és egyensúlyelméleti kurzusaim óravázlatai alapján született, meglehetősen régen. Akkoriban nem törekedtem arra, hogy olyan tananyagot írjak, amely nagyon beszédes, mindent alaposan kitárgyal. Inkább a tömörséget tartottam szem előtt és azt, hogy az általános egyensúlyelmélet alapmodelljének gondolati vázát, gondolatmenetének egészét bemutassam. Azt szerettem volna elérni, hogy ez a kötetecske az olvasóval megértesse, miért tekinthető az általános egyensúlyelmélet összefoglaló jellegű tudományterületnek. Ugyancsak reméltem, hogy ez a könyv önmagában megállja a helyét abban az értelemben, hogy szinte minden állítást bizonyítunk benne. Természetesen tisztában voltam azzal, hogy e munka elolvasása és akár a benne foglaltak megértése sem elegendő ahhoz, hogy az olvasó alaposan tájékozott legyen e tudományterület akkori állásáról. Ez a kötet ugyanis csak az elmélet vázát és klasszikusnak nevezhető eredményeit tartalmazta. Ezekből is csak annyit, amennyit egy erőltetett tempójú egyetemi kurzus keretén belül megtanítani és megtanulni lehet.[1]

Az évek során a céljaim kicsit változtak, nagyratörőbb terveken törtem a fejem. Ezt a könyvet egy háromrészesre tervezett sorozat második kötetének szántam. A sorozat első része a sztenderd neoklasszikus mikroökonómia nyelvén tárgyalta volna az *elkülönült gazdasági aktorok* döntéseinek alapvonásait, míg e második kötet e döntések *interakció*jának következményeit taglalja. A harmadik kötet eredetileg arra lett volna hivatott, hogy rámutasson a korábbi részek egyes feltevéseinek inkompatibilitására, és – megtartva az általános egyensúlyelmélet eredményeinek pozitív vonásait – feloldja a feltevései közül azokat, amelyek az említett elméleti gazdasági rendszer önellentmondásait okozzák.

Úgy vélem, indokolnom kellene, miért is szerettem volna, hogy ez a könyv egy sorozat része legyen. Már az első változat megírása során is

[1] Éppen emiatt nem foglalkoztam például az elmélet dinamizált és sztochasztikus változataival sem, bármennyire fontos lett volna is ezek tárgyalása.

úgy éreztem, nem vagyok biztos benne, hogy erre a kötetre ténylegesen szükség van. Abban az időben már léteztek e területen olyan, az enyémnél alaposabb, részletesebb és sokkal jobban megírt monográfiák[2], hogy joggal kételkedhettem az én munkám hasznában. Egy érv szólhatott mellette, az, hogy magyar nyelven íródott, és akkoriban az angol nyelvű, küldföldi kiadású munkákhoz nagyon nehéz volt hozzájutni.[3] Ezt az érvet kiegészítendő – és a kiadásra további indokokat keresve – találtam ki a sorozat ötletét. Az eredeti változatot több fejezettel bővítettem, mert ezeknek az új témáknak a tervezett harmadik kötetben komoly szerepet szántam. (A sors különös játéka folytán az a fonák helyzet állt elő, hogy amíg toldozgattam-foldozgattam az anyagot, egyre-másra jelentek meg olyan kiváló külföldi könyvek[4], amelyek ugyanabba az irányba mutattak, mint az én tapogatózásaim, csak abban nem történt változás, hogy ezek pont ugyanannyival voltak jobbak az én munkámnál, mint a korábban említettek.)

A tervezett sorozat teljes egészében sohasem készült el, és ahogy ismerem magam, talán már nem is igen van remény arra, hogy befejezzem. Most azonban váratlan lehetőségem adódott, hogy szűkös határidővel belőle azt, ami kész, a mai állapotában az olvasó elé tárjam. Miután az említett határidő igencsak sürgetett, már nem volt időm arra várni, hogy magától majd csak megszületik az eddig elkészülni nem akaró első rész, ezért úgy döntöttem, megjelentetem a második és harmadik kötetet, abban reménykedve, hogy megértésükhöz nem elengedhetetlenül fontosak azok a gondolatok, amelyeket nem vetettem papírra.

A könyv címe, *Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe,* teljes mértékben fedi a tartalmat, a kötet ténylegesen rövid, és nem lép túl egy bevezetés keretein. A szöveg talán érzékelhetővé teszi a több mint kétszáz éves gondolatkört, amely Adam Smith mindennél fontosabb fő művétől, *A nemzetek gazdagságától*[5], *Walras*, *Edgeworth* és *Wilfredo Pareto* munkáin át egészen az *Arrow–Debreu* szerzőpáros egzisztenciatételéig terjed[6]. E gondolatkör a mai közgazdaságtan meghatározó paradig-

[2] Például *Arrow–Hahn* (1971), *Cornwall* (1984).

[3] Ez az érv is elég gyenge lábakon áll, erre az előszó vége felé visszatérek.

[4] Csak néhányat említek: *Ellickson* (1993), *Starr* (1997), valamint végső döfésként *Moore* (2007).

[5] *Smith* (1776).

[6] *Walras* (1874-77), *Edgeworth* (1881), *Pareto* (1906), *Arrow–Debreu* (1954).

mája, fő állítása, alaptétele, hogy az egymástól elkülönült, önérdekkövető gazdasági szereplők cselekedetei nem káoszhoz, hanem egy ellentmondásmentes állapothoz, a versenyzői (*walrasi*) egyensúlyhoz vezetnek, és ez az egyensúly (*Pareto*-)hatékony. *Smith* válasza arra a kérdésre, hogy vajon miként lehetséges ez, nevezetesen, hogy a piacon egy „láthatatlan kéz" koordinálja és vezeti egyensúlyba a rendszert, a társadalomtudományok talán legnagyobb hatású metaforája. Kicsit misztikus ez az egész, mintha a piac szellemének tényleg az lenne a célja, hogy a piacon ne maradjanak feszültségek. (Földhözragadtabban én mindig úgy képzeltem el ezt a szituációt, hogy egy libikókán nem látszanak azok a gyerekek, akik egyébként mindent elkövetnek, hogy egyre magasabbra kerüljenek, ugyanakkor a mérleghinta magától mégis – számunkra érthetetlen módon – vízszintes helyzetbe kerül.)

A sors fintora, hogy a tervezett sorozat harmadik, az egyensúlyelmélet problémáival foglalkozó kötete[7], hacsak hetekkel is, de korábban látta meg a napvilágot, mint ez a második kötet. A címe: *Közösségi döntések, gazdasági mechanizmus, általános egyensúly*, és azt taglalja, hogy az általános egyensúlyelmélettel a maga gondosan felépített és letisztult formájában „komoly baj van", feltételei bizonyos esetekben önellentmondásosak lehetnek. A versenyzői mechanizmus fő feltételezése, az árelfogadás, szembekerülhet az önérdek követésének céljával. Emiatt a versenyzői mechanizmust olyan eljárással kell helyettesítenünk, amelyben a döntéshozók szerepe sokkal aktívabb és sokrétűbb, ők már tisztában vannak azzal, hogy cselekedeteik befolyásolják mások helyzetét, és ez természetesen fordított irányban is igaz. Ezekben a gazdasági mechnizmusokban, ha a korábbi egyensúlyi állapotokat el szeretnénk érni, akkor a szereplőknek már stratégiai játékokat kell játszaniuk, és nem a piac szelleme (és főleg nem annak „láthatatlan keze") rendezi el a dolgokat. (Az előző képet újrarajzolva: a gyerekek már látszanak a libikókán, és az ő együttes és tudatos tevékenységük vezet el az egyensúlyhoz.)

Szabadkozásképpen néhány szót szólnék a könyvben követett hivatkozási gyakorlatról. Annak ellenére, hogy *Arrow* és *Debreu* cikkei, tanulmányai közül sok[8] megjelent magyarul két igen fontos és a maguk korában úttörőnek számító gyűjteményes kötetben[9], mégis az eredeti

[7] *Csekő* (2016).

[8] Az itt idézettek közül kivételt képez *Arrow* (1951), *Debreu* (1952), valamint az utóbbi szerző egészen kivételes briliáns könyve: *Debreu* (1959).

[9] *Arrow* (1979) és *Debreu* (1987).

angol megjelenésükre hivatkozom. Teszem ezt azért, mert – természetes módon – az angol nyelvű szakirodalom is így azonosítja őket, és ezáltal a többi idézett munka hivatkozásjegyzékét olvasva az olvasónak könnyebb dolga lesz.

Végül kellemes kötelességeimnek teszek eleget. Az általános egyensúly elméletéről *Zalai Ernőtől* tanultam először, még diákéveim során. Abban az időben jelent meg *Hegedűs Miklóssal* közösen írt könyve[10], ami a 70-es években az egyetlen magyar nyelvű, ilyen témájú munka volt.[11] Ezt olvasva és az órájára járva kezdett el igazán érdekelni a terület, ilyen értelemben ő is „felelős” ezért a könyvért, amit az olvasó most a kezében tart. Köszönöm szépen a kezdeti lökést, és minden további segítségét is.

Kezdő oktató koromban, amikor az egyensúlyelméleti kurzuson tanítani kezdtem, nagyon sokat merítettem egy *Medvegyev Péter* által írt szemináriumi füzetből. Akkori óravázlataim tekintélyes részét erre alapoztam. A füzetet azóta, sajnos, elvesztettem, ezért nem tudom biztosan megmondani, pontosan mi tükrözi ebben az anyagban az ő munkáját. Az biztos, hogy sok minden. Furcsa gesztus ez egy „tolvajtól”, de azért illendő ezt is megköszönnöm. Örömmel meg is teszem.

Budapest, 2016. október

Csekő Imre

[10] *Hegedűs–Zalai* (1978).

[11] Már csak ezért sem állíthattam korábban itt az előszóban, hogy magyar nyelven egyáltalán nem ismerkedhetett meg senki az általános egyensúly elméletével. Emiatt az én akkoriban tervezett munkám szükségessége ismét csak megkérdőjelezhetővé vált.

I.

EGYENSÚLY EGY JÓSZÁG PIACÁN

1.A. Bevezetés

Ebben az első, bevezető jellegű fejezetben egymástól elkülönült, de a piac mint intézmény által összekapcsolt gazdasági szereplők döntéseit vizsgáljuk. Legelőször azt a kérdést tesszük fel és válaszoljuk meg – egyelőre – igen speciális feltevések mellett, hogy az elkülönült szereplők döntései miként hatnak egymásra. E helyütt az úgynevezett részpiaci (parciális) elemzéssel foglalkozunk, bizonyos fogalmakat – természetesen a részpiacra korlátozott formában – itt vezetünk be, majd az egész gondolatmenet általánosítására a következő fejezetekben kerül sor. Az ilyen parciális elemzés keretei *Alfred Marshall* először 1890-ben megjelent, összefoglaló nagy munkája, a *Principles of Economics*[12] óta alapvetően nem változtak, az analízis maga minden sztenderd mikroökonómiai tananyag szerves része. Ez a fejezet nagyrészt a *Mas-Colell és mások* (1995) kézikönyv megfelelő pontjainak felépítését követi.[13]

1.B. A parciális elemzés modellje

1.B.1. A gazdasági környezet

A fejezet címét ismerve talán meglepő, hogy az általunk vizsgált gazdaságban nem egy, hanem két jószág van: egy egyszerű (magán)jószág és egy összetett (magán)jószág, amit később ármércének hívunk majd. Azért van szükség e második jószágra az első piacának vizsgálata során, mert az egyszerű jószág árát, költségét valamiben mérnünk kell. Ezt a szerepet tölti be az ármércejószág, amit nyugodtan „pénzszerű" dolognak is felfoghatunk. Mind a két jószág természetes mértékegységgel rendelkezik, és feltételezzük róluk a folytonos oszthatóságot. Ennek megfelelően egy jószágkosarat a kétdimenziós euklideszi tér egy pontjaként ábrázolhatunk, ahol az első koordináta az egyszerű, a második az összetett jószágra vonatkozik. Ha az egyik jószághoz rendelt koordináta pozitív, akkor ez az érték – megállapodásunk értelmében – a jószág pozitív rendelkezésre álló mennyiségét adja. A negatív koordináták értelmezésére később visszatérünk.

[12] Egy későbbi kiadása könnyebben hozzáférhető: *Marshall* (1920).

[13] Ebben a fejezetben nem is igen közlünk további hivatkozásokat, mert az egész anyag közismert. A későbbi fejezetekben azonban a főbb fogalmak bevezetésekor utalunk a forrásokra.

Legyen például $z \in \mathbb{R}^2$ egy ilyen jószágkosár. Ha $z = (3, 2)$, akkor három egység egyszerű és két egység összetett jószágról beszélünk.

A gazdasági szereplőket két csoportba osztjuk: fogyasztókra és termelőkre. Ez a felosztás tisztán funkcionális, és nem biztos, hogy diszjunkt (egy természetes személy egyaránt lehet fogyasztó és termelő). Az egyes csoportokba tartozó szereplők száma véges. A fogyasztókat i-vel indexeljük, halmazuk jele $\mathcal{F}$, e halmaz számossága I. A termelőket j-vel indexeljük, halmazuk jele $\mathcal{T}$, a halmaz számossága J.

Az i-edik fogyasztót három objektum jellemzi: az X_i fogyasztási halmaz, ennek egy elemét az (x_i, m_i) vektorral jelöljük, a $\succcurlyeq_i$ preferenciarendezés, illetőleg az ezt reprezentáló U_i hasznossági függvény, valamint a jószágokból eredetileg rendelkezésére álló készletvektor, amelynek jelölését a következő feltevés során adjuk meg.

Feltesszük, hogy

1.B.1. Feltevés. *$\forall$ i-re, (azaz $i = 1, ..., I$)*

- $X_i = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,
- $U_i(x_i, m_i) = u_i(x_i) + m_i$, $u_i \in \mathcal{C}^2$, azaz kétszer folytonosan differenciálható, felülről korlátos, $\forall x_i \geq 0$ esetén $u_i'(x_i) > 0$ és $u_i''(x_i) < 0$, valamint $u_i(0) = 0$,
- a készletvektor $(0, \omega_i) \in (\{0\} \times \mathbb{R}_{++})$ alakú.

1.B.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, mennyire restriktívek ezek a feltételek! A hasznossági függvényre alkalmazott feltevés – a preferenciák szigorú monotonitása és kvázilinearitása – egészen speciális viselkedéshez vezet, a fogyasztó egyszerű jószág iránti keresletét nem befolyásolja a jövedelme, azaz nem lép fel jövedelmi hatás, ugyanakkor e jószágból akármennyit hajlandó fogyasztani, soha nem telítődik.*

A termelőket az Y_j termelési halmaz jellemzi. A halmaz egy elemét az (y_j, r_j) vektorral jelöljük, és termelési vektornak hívjuk. A termelésben pozitív koordinátával a kibocsátást, negatív koordinátával a felhasználást jelöljük.

1.B.3. Feltevés. *$\forall j$-re, (azaz $j = 1, ..., J$) $Y_j \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$,*

1.B.4. Megjegyzés. *Ez is nagyon restriktív feltevés. Azt jelenti, hogy az összetett jószágot csak felhasználják a termelésben, míg az egyszerű* *jószágot termelik. Ha az összetett jószágot mint a többi, nem vizsgált jószágra költött pénzt tekintjük, akkor érthető, miért is engedhetjük meg magunknak ezt a feltevést.*

1.B.5. Definíció. *Legyen* $\mathcal{X} = (X_1 \times X_2 \times ... \times X_I)$ *és* $\mathcal{Y} = (Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_J)$. *Egy*

$$a = \{(x_1, m_1), ..., (x_I, m_I), (y_1, r_1), ..., (y_J, r_J)\} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

együttest allokációnak *hívunk. Egy allokáció* megvalósítható, *ha*

$$\sum_{i=1}^{I} x_i \leqq \sum_{j=1}^{J} y_j \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{I} m_i \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i + \sum_{j=1}^{J} r_j.$$

1.B.6. Definíció. *Egy a° megvalósítható allokáció* Pareto-hatékony *vagy* Pareto-optimális, *ha nem létezik olyan másik megvalósítható a' allokáció és i' fogyasztó, hogy*

$$\begin{array}{rcll} U_i(x_i', m_i') & \geqq & U_i(x_i^\circ, m_i^\circ) & \forall i\text{-re és} \\ U_{i'}(x_{i'}', m_{i'}') & > & U_{i'}(x_{i'}^\circ, m_{i'}^\circ). & \end{array}$$

1.B.7. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a Pareto-hatékonyság csak a fogyasztókhoz kötődik. Azt jelenti, hogy egy Pareto-hatékony allokációban csak akkor javíthatunk valaki helyzetén, ha legalább egy másik fogyasztó helyzetén rontunk.*

1.B.8. Definíció. *A hasznosságok $\mathbb{R}^I$ terében az*

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{c} (U_1, ..., U_I) \in \mathbb{R}^I \ \mid \exists \text{ egy } a \text{ megvalósítható allokáció,} \\ \text{amire } U_i \leqq U_i(x_i, m_i) \quad \forall i\text{-re} \end{array} \right\}$$

halmazt haszonlehetőség-halmaz*nak hívjuk. Ennek „északkeleti” határa az $\mathcal{U}^\circ$* haszonlehetőség-határ, *ahol*

$$\mathcal{U}^\circ = \left\{ \begin{array}{c} (U_1^\circ, ..., U_I^\circ) \in \mathcal{U} \mid \ \nexists (U_1', ..., U_I') \in \mathcal{U} \text{ és } i', \\ \text{hogy } U_i' \geqq U_i^\circ \ \forall i\text{-re} \quad \text{és} \quad U_{i'}' > U_{i'}^\circ \end{array} \right\}.$$

1.B.9. Megjegyzés. *A fentiekből látható, hogy a Pareto-hatékony allokációkhoz tartozó haszonvektorok a haszonlehetőség-határ pontjai. A Pareto-hatékonyságnak semmi köze nincs egyenlőséghez, igazságossághoz, csak valamiféle „pazarlásmentességet” jelent. Később erre visszatérünk.*

1.B.2. A gazdasági mechanizmus

Legyen most az egyszerű (magán)jószág egységára $p_1 > 0$ és az összetett jószág egységára $p_2 > 0$. Ez egyben azt is jelenti, hogy mind a két jószágnak van piaca. A szereplők úgy vélik, piaci jelentőségük nincs, akcióik a piacon kialakuló árakat nem befolyásolják, és ezért nem is tesznek stratégiai lépéseket annak érdekében, hogy sikerüljön azokat módosítani. A piaci árakat elfogadják – úgy mondjuk, *árelfogadók* –, és ezek alapján csak a saját tulajdonságaikra vonatkozó információikat figyelembe véve döntenek. A termelők a profitjukat maximalizálják a termelési, a fogyasztók pedig hasznukat maximalizálják a számukra elérhető jószágkosarak halmaza, más szóval a költségvetési halmazuk felett.

1.B.10. Definíció. *$\forall j$-re a j-edik termelő profitját a p árvektor és az $(y_j, r_j) \in Y_j$ termelés esetén a $\pi_j(p_1, p_2,\ y_j, r_j) = p_1 y_j + p_2 r_j$ összefüggéssel definiáljuk. A j-edik termelő $\pi_j(\cdot) : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ profitfüggvénye a*

$$\pi_j(p_1, p_2) = \max\{p_1 y_j + p_2 r_j \mid (y_j, r_j) \in Y_j\},$$

az $Y_j(\cdot)$: $\mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ döntési szabálya az

$$Y_j(p_1, p_2) = \arg\max\{p_1 y_j + p_2 r_j \mid (y_j, r_j) \in Y_j\}$$

képlettel adott.

1.B.11. Feltevés. *Legyen $\alpha_{ij} \geqq 0$ az i-edik fogyasztó részesedése a j-edik termelő profitjából $\forall i, j$-re. Legyen továbbá $\sum_{i=1}^{I} \alpha_{ij} = 1$ $\forall j$-re, azaz a termelők profiját maradéktalanul felosztják a fogyasztók között.*

1.B.12. Definíció. *$\forall i$-re az i-edik fogyasztó jövedelme:*

$$M_i(p_1, p_2) = p_2 \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \alpha_{ij} \pi_j(p_1, p_2),$$

költségvetési halmaza:

$$B_i(p_1, p_2) = \{(x_i, m_i) \in X_i \mid\ p_1 x_i + p_2 m_i \leqq M_i(p_1, p_2)\},$$

döntési szabálya:

$$X_i(p_1, p_2) = \arg\max\{U_i(x_i, m_i) \mid (x_i, m_i) \in B_i(p_1, p_2)\}.$$

A fentiekből látható, hogy ha az árvektort egy pozitív skalárral beszorozzuk, akkor nem változik

- a j-edik termelő tevékenységei profitjának egymáshoz viszonyított relatív sorrendje ($\forall j$-re),
- az i-edik fogyasztó költségvetési halmaza ($\forall i$-re).

Éppen ezért az árvektorok normalizálhatók, azaz az árszínvonal szabadon megválasztható. A normalizálást általában két módon végezhetjük el: megválasztjuk egy jószág árát, vagy az árak összegét határozzuk meg. Mi most az előző utat követjük.

1.B.13. Feltevés. *Legyen az ármérce jószág ára mindig egységnyi, azaz* $p_2 = 1$. *Ekkor mind a profitfüggvények, mind a döntési szabályok csak* p_1 *függvényei lesznek.*

1.B.14. Megjegyzés. *Ebben a pontban a gazdasági szereplők viselkedését, más szóval a gazdasági mechanizmust adtuk meg. Figyelem, e mechanizmus megadása önkényes, nincs biztosíték arra, hogy a szereplőknek érdekében áll eszerint cselekedniük. A későbbiekben részletesen foglalkozunk majd ezzel a kérdéskörrel.*

1.C. Az egyensúly fogalma, létezése és tulajdonságai

A továbbiakban a *Leon Walras* nevéhez kötődő egyensúlyfogalommal fogunk foglalkozni, amit tiszteletére *walrasi egyensúlynak*, esetleg *versenyzői egyensúlynak* hívunk majd. E fogalom elválaszthatatlan az árelfogadó magatartás feltevésétől, a versenyzői viselkedés pont az árelfogadást jelenti. A szereplők piaci erő híján egymással versenyeznek a megszerezhető előnyökért. A verseny itt azt jelenti, hogy senkinek sincs módja az esetleges piaci erőfölényét kihasználni, mert ilyen a modellben nem is létezik.

1.C.1. Definíció. *Egy* a^* *allokáció és egy* $p^* = p_1^*$ *ár alkotta* (a^*, p^*) *rendezett pár a gazdaság egyensúlyi állapota, ha teljesülnek a következők.*

(i) Profitmaximalizálás: $\forall j$-re $(\mathrm{y}_j^*, r_j^*) \in Y_j(p^*)$;

(ii) Haszonmaximalizálás: $\forall i$-re $(\mathrm{x}_i^*, m_i^*) \in X_i(p^*)$;

(iii) Piactisztítás:

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{j=1}^{J} y_j^* \qquad \textit{és} \qquad \sum_{i=1}^{I} m_i^* = \sum_{j=1}^{J} r_j^* + \sum_{i=1}^{I} \omega_i.$$

1.C.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a *-gal jelölt allokációban mindenki csak a saját önérdekét követi, semmi másra nincs tekintettel. A korábbiakban °-val jelölt Pareto-hatékony allokációban pedig senki sem csinál semmit, az nem az egyéni viselkedésre vonatkozó kategória.*

1.C.3. Tétel (Walras-törvény). *Ha egy tetszőleges $p > 0$ ár mellett minden szereplő optimálisan cselekszik és az így kapott a allokációban az egyszerű jószág piaca kitisztul, akkor kitisztul az ármércejószág piaca is.*

Bizonyítás. A bizonyítás két lépésből áll. Először azt kell belátnunk, hogy minden fogyasztó teljesen elkölti a jövedelmét. Ez a fogyasztók preferenciáira tett feltevésekből triviálisan következik. Második lépésben írjuk fel a fogyasztók költségvetési korlátját oly módon, hogy összeadjuk ezeket. Ekkor átrendezés után kapjuk, hogy

$$p(\sum_{i=1}^{I} x_i - \sum_{j=1}^{J} y_j) = \sum_{i=1}^{I} \omega_i + \sum_{j=1}^{J} r_j - \sum_{i=1}^{I} m_i,$$

mivel $\sum_{i=1}^{I} \alpha_{ij} = 1$ minden j-re, és a szummák átrendezhetők. Az egyenlőség bal oldala zérus, így a jobb is az. □

Kicsit tovább finomítjuk a modell feltételeit.

1.C.4. Feltevés. *$\forall j$-re $Y_j = \{(y_j, r_j) \mid y_j \geqq 0, -r_j \geqq c_j(y_j)\}$, ahol $c_j(y_j)$ az y_j kibocsátáshoz minimálisan szükséges ármércejószág mennyisége. (A már ismert értelmezés mellett ez a költségfüggvény.) Tegyük fel továbbá, hogy $c_j(\cdot) \in \mathcal{C}^2$ és $\forall y_j \geqq 0$ esetén $c_j'(y_j) > 0$, $c_j''(y_j) > 0$.*

Vezessük be a $\sum_{i=1}^{I} \omega_i = \omega$, a $\sum_{i=1}^{I} x_i = x$ és a $\sum_{j=1}^{J} y_j = y$ jelöléseket! Látható, hogy egy véges ω érték a fogyasztók hasznossági függvényét felülről korlátossá teszi. Ebből következően remélhető, hogy a maximumfeladatoknak lesz megoldásuk és a gazdaságnak lesz versenyzői egyensúlya. Először ennek az egyensúlyi állapotnak a létezéséhez szükséges feltételeket vizsgáljuk, majd egy pótlólagos, regularitási feltétel teljesülése esetén belátjuk az egyensúly létezését.

Legyen p^* adott. Ekkor minden termelőre a termelési halmazra és a költségfüggvényekre vonatkozó feltevésből következik: annak szükséges és elégséges feltétele, hogy y_j^* a j-edik termelő profitmaximalizálási feladatának megoldása legyen, az az, hogy kielégítse az alábbi feltételt:

$$\forall j\text{-re} \qquad p^* \leqq c_j'(y_j^*) \qquad \text{és} = \text{teljesül, ha } y_j^* > 0. \tag{1.C–1}$$

Ugyancsak a feltevéseink miatt a fogyasztók haszonmaximalizálási feladata átírható, hiszen költségvetési korlátjuk egyenlőségre teljesül:

$$\max_{x_i \geqq 0}\{u_i(x_i) - p^* x_i + [\omega_i + \sum_{j=1}^{J} \alpha_{ij}\pi_j(p^*)]\},$$

amiből annak szükséges és elégséges feltétele, hogy x_i^* optimális megoldása legyen ennek a feladatnak, a következő:

$$\forall i\text{-re} \qquad u_i'(x_i^*) \leqq p^* \qquad \text{és} = \text{teljesül, ha } x_i^* > 0. \tag{1.C–2}$$

Ezekhez kapcsolódik a piactisztító feltétel:

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{j=1}^{J} y_j^*. \tag{1.C–3}$$

1.C.5. Megjegyzés. *Vegyük észre: ez $I + J + 1$ változó és ugyanennyi feltétel. Az eredeti $I + J + 2$ változóból egynek az értékét rögzítettük, egy feltételtől pedig a* Walras*-törvény szabadított meg minket. Azt is vegyük észre, hogy egyik feltételben sem szerepelnek a készletek és a részesedések, azaz az egyensúlyi allokáció és ár nem függ az elosztási viszonyoktól. Ez a preferenciák kvázilinearitásának következménye.*

1.C.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\forall j$-re $c_j'(y_j) \to \infty$, ha $y_j \to \infty$ és*

$$\max_i u_i'(0) > \min_j c_j'(0). \tag{1.C–4}$$

Ekkor a gazdaságban létezik pontosan egy versenyzői egyensúlyi állapot, ebben az aggregált fogyasztás és termelés pozitív.

Bizonyítás. Mivel feltevéseink szerint minden i-re u_i korlátos, szigorúan konkáv, ezért $u_i'(x_i)$ szigorúan monoton csökken, a $(0, u_i'(0)]$ félig zárt intervallumon minden értéket felvesz, így invertálható. Definiáljuk az i-edik fogyasztó *walrasi keresleti függvényét*, az $x_i(p)$ függvényt a következő módon:

$$x_i(p) = \begin{cases} 0, & ha \quad p > u_i'(0); \\ (u_i')^{-1}(p), & ha \quad 0 < p \leqq u_i'(0). \end{cases}$$

Ez a függvény nyilván nem növekvő, folytonos függvény minden pozitív p-re és szigorúan monoton csökken minden $p < u_i'(0)$ esetén. Vegyük észre azt is, hogy az így nyert függvényérték minden pozitív p-re kielégíti a 1.C–2 feltételt.

Legyen $x(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p)$ minden p-re, ezt a függvényt a gazdaság *aggregált keresleti görbé*jének hívjuk. Ez nyilván minden pozitív p-re folytonos és nem növekvő, valamint minden $p < \max_i u_i'(0)$ esetén szigorúan monoton csökken és értéke pozitív. A $p \geqq \max_i u_i'(0)$ értékekre $x(p) = 0$.

Hasonló módon származtatjuk a gazdaság aggregált kínálati függvényét. Feltevéseink szerint minden j-re a $c_j'(\cdot)$ szigorúan monoton nő és a $[c_j'(0), \infty)$ intervallumon felvesz minden értéket. Invertálható tehát, és így a j-edik termelő $y_j(p)$ kínálati függvényét definiálhatjuk a következő módon:

$$y_j(p) = \begin{cases} 0, & ha \quad p < c_j'(0); \\ (c_j')^{-1}(p), & ha \quad p \geqq c_j'(0). \end{cases}$$

Ez a függvény nyilván nem csökkenő, folytonos függvény minden pozitív p-re és szigorúan monoton nő minden $p > c_j'(0)$ esetén. Vegyük észre azt is, hogy az így nyert függvényérték minden pozitív p-re kielégíti a (1.C–1) feltételt.

Legyen $y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p)$ minden p-re, ezt a függvényt a gazdaság *aggregált kínálati függvény*ének hívjuk. Ez nyilván minden pozitív p-re folytonos és nem csökkenő, valamint minden $p > \min_j c_j'(0)$ esetén szigorúan monoton nő és értéke pozitív. A $p \leqq \min_j c_j'(0)$ értékekre $y(p) = 0$.

A tétel (1.C–4) feltételét figyelembe véve és felhasználva az $x(p)$ és az $y(p)$ függvények folytonossági, monotonitási tulajdonságait, létezik a $\big(\min_j c_j'(0), \max_i u_i'(0)\big)$ intervallumbeli olyan egyértelmű p^* érték, amire $x(p^*) > 0$ és $x(p^*) = y(p^*)$. Ehhez a p^* értékhez minden i-re és j-re egyértelműen hozzárendelhetők az $x_i(p^*)$, illetve $y_j(p^*)$ nagyságok. Az

$y_j(p^*)$ termeléshez tartozó $r_j(p^*)$ összetettjószág-felhasználás is egyértelmű a profitmaximalizálási szabály és a $c_j(y_j(p^*))$ érték adott volta miatt. A profitok egyértelműsége rögzíti az i-edik fogyasztó költségvetési korlátját meghatározó jövedelmet, így az $u_i(x_i(p^*))$ rögzített érték miatt az $m_i(p^*)$ nagyságok is egyértelműen adottak. □

1.C.7. Megjegyzés. *A fenti állításban az egyensúly egyértelműsége egyrészt a preferenciák kvázilinearitásának, másrészt a költségfüggvény szigorú konvexitásának a következménye. Ha a preferenciák nem kvázilineárisak, akkor a fellépő jövedelmi hatás elronthatja az egyéni keresleti függvények és így az aggregált keresleti függvény monotonitását (*Giffen-*jószágok esete). Ha a költségfüggvényekről csak a konvexitást tételezzük fel, például az állandó mérethozadék létét, akkor az egyéni kínálati leképezés nem függvény, hanem pont–halmaz leképezés lesz. Ez az egyensúlyi ár és így az aggregált kínálat unicitását nem rontja el, csak ez utóbbinak az egyéni kínálatokra történő egyértelmű szétosztását teszi lehetetlenné.*

A jól viselkedő aggregált kínálati és keresleti függvényeknek új értelmezést adhatunk az inverzük révén. A $C'(\cdot) = y^{-1}(\bar{y})$ inverz kínálati függvény azt az árat adja, ami mellett az aggregált kínálat éppen $\bar{y}$. Másképpen, $y^{-1}(\bar{y})$ nem más, mint a *társadalmi határköltségfüggvény*, hiszen a $\bar{p} = y^{-1}(\bar{y})$ ár mellett bármelyik termelő termel is, a minden j-re érvényes $\bar{p} = c'_j(\bar{y}_j)$ összefüggés miatt az esetleges pótlólagos kis jószágegység előállítási költsége ugyanaz: $y^{-1}(\bar{y}) = C'(\bar{y})$. A $P(\cdot) = x^{-1}(\bar{x})$ inverz keresleti függvény az $\bar{x}$ mennyiséghez szolgáltatja azt az árat, amely mellett az aggregált kereslet értéke éppen $\bar{x}$. E mellett az ár mellett mindegyik fogyasztó pontosan annyit fogyaszt az egyszerű (magán)jószágból, hogy fogyasztásuk határhozama (határhaszna) éppen $P(\bar{x}) = x^{-1}(\bar{x})$. E szerint e $P(\bar{x})$ függvény a termék *társadalmi határhozamát* adja.

1.C.8. Sejtés. *A versenyzői egyensúlyi állapot társadalmilag optimális, mivel az egyszerű (magán)jószág társadalmi határhozama megegyezik a határköltségével.*

Ezt a sejtést igazoljuk a következő szakaszban.

1.D. A jóléti gazdaságtan alapvető tételei

A versenyzői egyensúlyi és a *Pareto*-hatékony allokációk közötti szoros kapcsolatot most csak ebben az egypiacos modellben mutatjuk be. A tételek állítása sokkal általánosabb feltételek mellett is igaz. Mi azonban most messzemenően kihasználjuk az eddigi egyszerűsítő feltevéseinket, különösképpen a preferenciák kvázilinearitását. Első állításunk a gazdaság haszonlehetőség-határával kapcsolatos.

1.D.1. Állítás. *Az* 1.B.1., 1.B.13. és 1.C.4. Feltevésekben *adott feltételek mellett a gazdaság haszonlehetőség-határa egy affin felület.*

Bizonyítás. Legyen $\bar{x}_i$ és $\bar{y}_j$ adott minden i-re és j-re! Tartozzanak ezek egy megvalósítható $\bar{a}$ allokációhoz! Ekkor ebben az allokációban az ármércejószág szabadon maradó, szétosztható mennyisége a $\omega - \sum_{j=1}^{J} c_j(\bar{y}_j)$ képlettel adott. Ebből az allokációból elérhető haszonvektorok halmaza:

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_I, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_J) = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} (U_1, \ldots, U_I) \in \mathbb{R}^I \mid \\ \sum_{i=1}^{I} U_i \leqq \sum_{i=1}^{I} u_i(\bar{x}_i) + \omega - \sum_{j=1}^{J} c_j(\bar{y}_j) \end{array} \right\}, \end{aligned} \tag{1.D–1}$$

hiszen az ármércejószágot korlátlanul osztogathatjuk a fogyasztók között, ez nem befolyásolja az egyszerű jószágból nyert hasznosságukat. Ennek a halmaznak a hatékony határa egy hipersík, aminek az összegző vektor a normálisa. Ez a gondolatmenet tetszőleges megvalósítható allokációra igaz, amiből az következik, hogy a termelői és fogyasztói tevékenységeket bárhogy választjuk is, ha ezek megvalósítható allokációk részei maradnak, akkor csak ezt a hipersíkot tologatjuk párhuzamosan.□

Miután egy *Pareto*-hatékony allokáció sem eredményezhet a haszonlehetőség-halmaz *belsejében* levő haszonvektort, egy a° *Pareto*-hatékony allokációhoz csak olyan $x_i^\circ, i = 1,...,I$ fogyasztási és $y_j^\circ, j = 1,..., J$ termelési vektorok tartozhatnak, amelyek a lehető legmesszebbre tolják ki a fenti határt. Ebből következően ahhoz, hogy a *Pareto*-optimális allokációkhoz tartozó tevékenységvektorokat meghatározhassuk, elegendő, ha megoldjuk a következő feltételes szélsőérték-számítási feladatot:

$$\max_{\substack{(x_1,\ldots,x_I) \geqq 0 \\ (y_1,\ldots,y_J) \geqq 0}} \left(\sum_{i=1}^{I} u_i(x_i) + \omega - \sum_{j=1}^{J} c_j(y_j) \right) \tag{1.D–2}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_i - \sum_{j=1}^{J} y_j = 0.$$

Az előző állításban is felsorolt feltételek biztosítják, hogy e feladathoz tartozó elsőrendű feltételek teljesülése nemcsak szükséges, hanem elégséges is az optimalitáshoz. Ha λ a feltételhez rendelt duálváltozó, akkor ezek a feltételek a következők:

$$\begin{array}{lrcll} \forall j\text{-re} & \lambda & \leqq & c_j'(y_j^\circ) & \text{és = teljesül, ha } y_j^\circ > 0; \\ \forall i\text{-re} & \lambda & \geqq & u_i'(x_i^\circ) & \text{és = teljesül, ha } x_i^\circ > 0; \\ & 0 & = & \sum_{i=1}^{I} x_i^\circ - \sum_{j=1}^{J} y_j^\circ . & \end{array}$$

Ezek igen csak ismerős feltételek, nem mások, mint a versenyzői egyensúlyra vonatkozó (1.C–1)–(1.C–3) egyenlőtlenségek, ha a λ változót helyettesítjük be p^* helyébe. Ebből az észrevételből azonnal adódik az

1.D.2. Tétel (Az első jóléti tétel). *Ha* (a^*, p^*) *versenyzői egyensúlyi állapot, akkor egyben* Pareto-*optimális is.*

Bizonyítás. Láttuk, a versenyzői egyensúlyi allokációban az egyes fogyasztói és termelői tevékenységek egyértelműen meghatározottak, és kielégítik a (1.C–1)–(1.C–3) egyenlőtlenségeket, így a Pareto-optimalitási feltételeket is, ha a λ változó értékét p^*-nak választjuk. □

Miután a versenyzői egyensúlyi allokációkban, mint azt az előbb említettük, az egyes gazdasági szereplőknek az egyszerű jószágra vonatkozó tevékenységei egyértelműek, azonnal adódik az

1.D.3. Következmény. *A gazdaság* Pareto-*hatékony allokációi csak az ármércejószág szétosztásában különböznek egymástól.*

Bizonyítás. Ez az első jóléti tétel kimondását közvetlenül megelőző gondolatmenetből és a haszonlehetőség-határról elmondottakból azonnal következik. □

1.D.4. Megjegyzés. *Az (1.D–2) feladatban szereplő maximalizálandó kifejezés* $\left(\sum_{i=1}^{I} u_i(x_i) - \sum_{j=1}^{J} c_j(y_j)\right)$ *része az úgynevezett marshalli társadalmi (fogyasztói plusz termelői) többlet. Az* ω *változó adott értéke miatt ez azt jelenti, hogy az* 1.C.8. Sejtés *ebben a modellben igaz. Egy, a piacon elcserélt terméktömeghez tartozó társadalmi többlet ugyanis nyilvánvalóan nem más, mint az adott terméktömeghez tartozó, az aggregált* *keresleti és kínálati görbe által bezárt terület, ami abban a pontban maximális (optimális), ahol e két görbe éppen metszi egymást. A társadalmi többlet maximalizálása pedig a fentiek alapján a Pareto-optimalitást vonja maga után. Nem szabad azonban elfeledkeznünk arról, hogy az e megjegyzésben elmondottak igazsága a preferenciák kvázilinearitásán múlik.*

1.D.5. Megjegyzés. *Az első jóléti tétel a közgazdaságtan egyik legfontosabb állítása, az* Adam Smith-*i „láthatatlan kéz" formális megfogalmazása. Az általunk eddig tárgyalt modellnél jóval általánosabb körülmények között igaz. Ugyanakkor igencsak tudatában kell lennünk azoknak az implicit, a mechanizmusra vonatkozó feltételeknek, amelyek a tétel érvényességi körét egyértelműen megadják. Ne feledjük, minden jószágnak volt piaca, minden jószág magánjószág volt, azaz az egyéni akciókba vont mennyisége csak az akciót végző szereplőtől függött, és minden szereplő árelfogadóként viselkedett. Ha bármelyik ezek közül nem teljesül, a jóléti tétel sem lesz igaz. Ezekben az esetekben az egyéni, önérdeket követő viselkedés nem vezet el a társadalmi optimumhoz, a verseny nem tökéletes, a piac nem hatékony. E szituációkkal egy másik részben foglalkozunk majd.*

Az első jóléti tétel megnyugtató módon tisztázott egy kérdést: a decentralizált viselkedés, az egyéni információkon alapuló, önérdeket követő egyéni akciók társadalmilag jó eredményre vezetnek. Legalább ilyen érdekes a fordított kérdés: vajon egy társadalmilag jó állapot megvalósítható-e az egyéni akciók révén? Rábízhatjuk-e magunkat a piacra, ha tudjuk, mit akarunk elérni? Ezekre a kérdésekre – persze megint csak ebben a modellben – ad választ a második jóléti tétel, az első megfordítása.

1.D.6. Tétel (A második jóléti tétel). *Bármely* $(U_1^\circ, ..., U_I^\circ)$ Pareto-*hatékony hasznossági vektorhoz található olyan, az ármércejószágban mért* $(T_1, ..., T_I)$ *nettó transzfervektor, amire* $\sum_{i=1}^{I} T_i = 0$ *és a*

$$((0, \omega_1 + T_1), ..., (0, \omega_I + T_I))$$

készletekből elért versenyzői egyensúlyi allokációk révén kialakuló hasznossági szintek pont az $(U_1^\circ, ..., U_I^\circ)$ *vektort adják.*

Bizonyítás. Az (1.C–1)–(1.C–3) egyenletekből tudjuk, hogy az egyensúlyi p^* ár, x_i^*, $i = 1,...,I$ fogyasztási és $y_j^*, j = 1,...,J$ termelési tevékenységek függetlenek a fogyasztók induló készleteitől. Ebből az következik, hogy a rendelkezésre álló összkészletet (csak az árWmércéből van!) akárhogy osztjuk is szét, ezek nem változnak. Miután a *Pareto*-hatékony allokációk csak az ármérce szétosztásában különböznek egymástól és definícióból következően megvalósíthatók, ezért az $(U_1^\circ, ..., U_I^\circ)$ haszonvektor az ármércejószág megfelelő szétosztásából elérhető, hiszen az egyensúlyi allokációkban az ármércejószágból történő fogyasztás változik csak a transzfer nyomán, mégpedig pont a transzfernek megfelelően. □

1.D.7. Megjegyzés. *Ez a parciális elemzéshez használt modellünk elfedi a különbséget a két jóléti tétel érvényességével kapcsolatban. Itt mind a kettő igaz, míg általában az első sokkal általánosabb körülmények között igaz. A másodikhoz kellenek a konvexitási feltételek.*

II.

EGYENSÚLY AZ ÖSSZES PIACON.

ALAPFOGALMAK

2.A. Bevezetés

Az előző fejezetbeli modell számos, általunk eddig is említett hiányossággal bír. Az igen restriktív feltételek használata mellett az szól ellene, hogy teljesen *ad hoc* módon szerepel benne az ármércejószág. Az egyszerű jószág piacára voltunk kíváncsiak, az ott kialakuló állapot érdekelt bennünket, de ezt az állapotot csak úgy tudtuk jellemezni, ha szerepeltettük az ármércejószágot, amit még tisztességesen nem is definiáltunk. Csak a mindannyiunkban élő „pénzképzetre" hivatkoztunk, és így beszélhettünk arról, hogy az egyszerű jószág „árát" és „költségét" ebben fejezzük ki. Ezt, rossz lelkiismerettel ugyan, még azzal is tetéztük, hogy – megszabadulni kívánván az ármércejószágtól – annak szerepét életidegen feltevésekkel (lásd kvázilinearitás) próbáltuk meg minimálisra szorítani. Így sem jártunk azonban sikerrel. Gondoljuk meg: az egyszerű jószág iránti kereslet, illetve e jószág kínálata és így annak egyensúlyi ára, mennyisége a jószág ármércejószágban mért relatív árától függött. Az ármércejószágot mint összetett jószágot definiáltuk, és árát rögzítettük. Ez azt jelenti, hogy mintegy rögzítettük az őt alkotó jószágok árát. Ha kiemelünk ezek közül egyet és annak a piacát vizsgáljuk, semmi garancia nincs arra, hogy ennek egyensúlyi ára pont akkora lesz, mint amennyivel az összetett jószág részeként számbavettük. Az alma egyensúlyi ára nyilván függ a körte adott árától, ha azonban az alma árát rögzítjük az egyensúlyi szinten, nem biztos, hogy a körte egyensúlyi ára az előzőekben adottal egyező lesz. Ezekből következik, hogy célszerű lenne olyan modellt felállítani, amelynek alapján az összes jószág piacára mondhatunk valamit. Ilyen az először *Leon Walras* által megfogalmazott általános egyensúly modellje. Ezzel kezdünk foglalkozni ebben a fejezetben.

Ha bonyolítjuk a modellt, az életközelibb és egyben sokkal általánosabb feltételek segítségével az eddig vizsgált egyszerű jószág piacáról legalább ugyanannyit tudunk mondani, mint az előzőekben. Nemcsak ez azonban a bonyolítás haszna, hanem az egész gazdaságra vonatkozóan is jobban megmagyarázhatjuk, hogy az elkülönült szereplők döntései miként hatnak egymásra. Azt a meglepő – noha évezredek óta tapasztalt – tényt is indokolni tudjuk, hogy ezek a döntések konzisztensek. Továbbra sem foglalkozunk egyelőre azzal a kérdéssel, hogy miért éppen az előző fejezetben is posztulált viselkedési szabállyal látjuk el a gazdaság szereplőit. Később természetesen megpróbálunk e feltevéseken is változtatni.

E fejezet során gyakran utalunk majd az eddig elmondottakra. Ennek ellenére, az előzőek ismerete nélkül, önmagában is olvasható és megérthető lesz minden. Az esetleges ismétlések pont ezt a célt szolgálják: ha valaki nem volt kíváncsi a parciális elemzés speciális modelljére, egyből ennek általánosításával kezdhessen foglalkozni.

2.B. Az egyensúlyelmélet alapmodellje

A gazdaság leírásakor két főbb struktúrát kell megadnunk: a gazdaság naturális, természetes szerkezetét, amit gazdasági környezetnek hívunk, és az e szerkezeten belül az egyes objektumok közti viszonyokat leíró, úgynevezett gazdasági mechanizmust. A kettő együtt adja a gazdaságot. A gazdaságok családját a továbbiakban $\mathcal{E}$-vel, egy ebbe a családba tartozó gazdaságot pedig az $e \in \mathcal{E}$ szimbólummal jelöljük.

2.B.1. A gazdasági környezet

Modellünk alapvető fogalma a *jószág*. Jószág az asztal, a szék, a színházjegy, a hajnyírás, a munkaerő stb., azaz minden olyan dolog, amit a később definiálandó gazdasági szereplők esetleg létrehoznak, cserélnek, felhasználnak, fogyasztanak. A jószágokat egymástól fizikai tulajdonságaik alapján különböztetjük meg. Az egyes jószágokat természetes mértékegységekkel látjuk el, az asztal mértékegysége a darab, a széné, mondjuk, a tonna, a tejé a liter és így tovább. Feltételezzük azt, hogy bármelyik jószágból tetszőleges kis mennyiség is értelmezhető, azaz a jószágok rendelkeznek majd a folytonos oszthatóság tulajdonságával, valamint azt, hogy tetszőleges jószágmennyiséget meg tudunk mérni. Egy jószág egységeit egymástól megkülönböztetni természetesen nem tudjuk, azaz a jószágok homogének. Feltesszük, hogy a gazdaságban véges sok jószág van, és rendelkezésünkre áll ezek listája és így egyértelmű sorrendjük. E sorrend szerint indexeljük a jószágokat, az indexváltozó n lesz. A jószágok (véges) száma N.

A következő fogalom a *jószágkosár*. A jószágkosár egy olyan N elemű lista, amely megmondja nekünk, hogy az egyes jószágokból mekkora mennyiségről „van szó”. A jószágkosárnak mint listának az elemei valós számok, előjelük pozitív, ha a jószág (fogyasztásra) rendelkezésre áll, negatív, ha a jószágot a fogyasztásból kivonjuk. Egy jószágkosarat ezek szerint megfeleltethetünk az N dimenziós euklideszi tér egy pontjának, és emiatt ezt az $\mathbb{R}^N$-nel jelölt teret *jószágtér*nek hívjuk. Ezt a jószágteret tekintjük a továbbiakban tárgyalásunk keretének.

A gazdasági szereplőket, akárcsak az előző fejezetben, két csoportra osztjuk: *fogyasztók*ra és *termelők*re. Ez a felosztás, mint azt már említettük, tisztán funkcionális, és nem biztos, hogy diszjunkt. Ugyanaz a szereplő lehet fogyasztó is, termelő is. A fogyasztó a javakat végső soron szolgáltatja a gazdaság számára, vagy kivonja azokat a gazdaságból, a termelő pedig a jószágokat átalakítja más jószágokra. Például egy fogyasztó munkáját beadja a gazdaságba, dolgozik, és kenyeret von ki a gazdaságból, amikor azt megeszi. Egy termelő, a pék, munkából (és másból) kenyeret állít elő, más szóval a javak transzformációját végzi. E két csoporthoz tartozó szereplők száma véges. A fogyasztókat i-vel indexeljük, halmazuk jele $\mathcal{F}$, e halmaz számossága I. A termelőket j-vel indexeljük, halmazuk jele $\mathcal{T}$, a halmaz számossága J.

Az i-edik fogyasztót három objektum jellemzi:

- Az $X_i \subset \mathbb{R}^N$ fogyasztási halmaz, amelynek elemei az x_i-vel jelölt fogyasztási vektorok. A fogyasztási vektor n-edik komponense nyilván pozitív, ha fogyasztó azt a jószágot végső soron (nettó módon) fogyasztja, negatív, ha szolgáltatja.
- A fogyasztási halmazon értelmezett $\succcurlyeq_i$ teljes, reflexív és tranzitív bináris reláció, azaz preferenciarendezés[14].
- A fogyasztó számára a javakból eredetileg rendelkezésre álló $\omega_i \in \mathbb{R}^N$ készletvektor.

A j-edik termelőt csak az

- $Y_j \in \mathbb{R}^N$ termelési halmaz jellemzi, amelynek elemei az y_j-vel jelölt termelési vektorok. A termelési vektor n-edik komponense pozitív, ha a termelő azt a jószágot végső soron (nettó módon) termeli, negatív, ha a termelésben felhasználja.

A továbbiakban, hacsak külön nem jelezzük, az ilyen környezettel bíró gazdaságokkal foglalkozunk, és ezek családját jelöljük $\mathcal{E}$-vel! Egy ilyen gazdasági környezet megadható az

$$e_k = \left\{ N, I, J, \{X_i\}_{i=1}^{I}, \{\succcurlyeq_i\}_{i=1}^{I}, \{\omega_i\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J} \right\}$$

listával. Ha ezt kiegészítjük a gazdasági mechanizmust jellemző e^m listával, akkor kapjuk az $e = (e_k, e^m)$ gazdaságot.

[14] Ebből a gyenge relációból az ismert módon származtatható a $\succ_i$erős, illetve a $\sim_i$ közömbösségi reláció.

2.B.2. A gazdasági mechanizmus

Ebben a pontban a gazdasági szereplők feltételezett, posztulált viselkedését adjuk meg. Ez az ismertetendő viselkedés, amit általában versenyzői magatartásnak hívunk, az általános egyensúlyelmélet legjellegzetesebb vonása.

Feltesszük, hogy a gazdasági szereplők egymástól elkülönülten hozzák meg a döntéseiket, kommunikáció és kooperáció egyelőre nincs a gazdaságban. A csak saját magukra vonatkozó információkon kívül a szereplők csak egy dolgot ismernek, de ezzel mindannyian tisztában vannak. E közös információ az *árvektor*, egy $p \in \mathbb{R}^N$ vektor, amelynek n-edik koordinátája a megfelelő jószág piaci egységárát mutatja.

Az árvektor létezése a következőket jelenti. Minden jószágnak van piaca, azaz a jószágokat a szereplők egymás között elcserélhetik, de csak igen speciális módon. Egyelőre nem megengedett a közvetlen csere, csak az árak által közvetített. Az árakat minden szereplő adottnak tételezi fel. Mindannyian úgy vélik, piaci jelentőségük nincs, nem áll módjukban az adott áraktól eltérni, és így stratégiai lépéseket sem tesznek annak érdekében, hogy ezeket az árakat megváltoztassák. Pontosan ez a legfontosabb feltevésünk:

2.B.1. Feltevés (Walras). *A gazdasági szereplők árelfogadók.*

Mint azt az előző fejezetben is láttuk – többek között az árelfogadás eredményeképpen – a termelők és a fogyasztók nem az árak abszolút nagyságát, hanem azok egymáshoz viszonyított relatív mértékét tekintik fontosnak. Éppen ezért megtehetjük, hogy az árakat normáljuk, azaz az árszínvonalat megkötjük. Az előzőekben az ármércejószág árát választottuk egységnyinek, most ezt az utat nem követhetjük, hiszen nincs ilyen kitüntetett jószágunk. Ezért feltesszük, hogy a javak árainak öszszege rögzített, ezzel szabjuk meg az árszínvonalat.

2.B.2. Feltevés. $p \in P^N = \left\{ p \in R^N \middle| p \geqq 0, \sum_{n=1}^N p_n = 1 \right\}$, *azaz az árvektor az* árszimplex *eleme.*

A termelők, ismerve az árakat, olyan termelési vektort választanak a számukra adott termelési halmazból, amely számukra a maximális profitot adja.[15]

[15] Nemsokára látni fogjuk, mi értelme van a profitmaximalizálásnak.

2.B.3. Definíció. *$\forall j$-re a j-edik termelő profitját a p árvektor és az $y_j \in Y_j$ termelés esetén a $\pi_j(p, y_j) = py_j$ képlettel definiáljuk. A j-edik termelő $\pi_j(\cdot) : P^N \to \mathbb{R}$ profitfüggvénye a*

$$\pi_j(p) = \max \{py_j \,|y_j \in Y_j\},$$

az $Y_j(\cdot) : P^N \rightrightarrows Y_j$ döntési szabálya az

$$Y_j(p) = \arg\max \{py_j \,|y_j \in Y_j\}$$

összefüggéssel adott.

2.B.4. Megjegyzés. *Vegyük észre a termelő döntési szabályánál használt $\rightrightarrows$ szimbólumot. Ezzel is jelezni kívánjuk, hogy ez a döntési szabály* pont–halmaz leképezés, *egy árvektorhoz a termelési halmaz egy nemüres részhalmazát rendeli. A termelő döntése ugyanis nem feltétlenül egyértelmű. Számtalan tevékenység hozhat ugyanakkora profitot, ekkor a termelőnek mindegy, melyiket választja közülük. Ennek az esetnek a legfontosabb ismert példája az állandó mérethozadék léte, amely mellett, mint tudjuk, minden tevékenység profitja zérus.*

A termelők, akik csak a javak transzformációjával foglalkoznak, az általános egyensúlyelmélet felfogása szerint nem strukturált szereplők. A termelőnek nincsenek belső döntéshozatali szintjei, eltérő érdekeltségű összetevői, teljesen homogén entitás, aminek egyetlen célja a profit maximalizálása. Pont azért, mert e profitot, ami a javak transzformációjából származik, a termelőegység tulajdonosai használják fel. E tulajdonosok pedig nem termelők, nem a javakat transzformálják, ezért definíció szerint fogyasztók. Az i-edik fogyasztó a j-edik termelő profitjának $\alpha_{ij} \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{I} \alpha_{ij} \leqq 1$ hányadát tudhatja magáénak. Ezek az α_{ij} értékek a modell *részesedési együtthatói.* A fogyasztó jövedelme készleteinek és részesedéseinek értékéből adódik, ezt a jövedelmet fordítja a fogyasztási javak megvásárlására. Azok a jószágkosarak, amelyeket jövedelméből megfizetni képes, alkotják az úgynevezett *költségvetési halmazát.* E halmaz elemei közül választja ki végül azokat a jószágkosarakat, amelyeket az általa megfizethetők közül a legjobbnak tekint.

2.B.5. Definíció. *Az i-edik fogyasztó $M_i(\cdot) : P^N \to \mathbb{R}$ jövedelme:*

$$M_i(p) = p\omega_i + \sum_{j=1}^{J} \alpha_{ij}\pi_j(p),$$

$B_i(\cdot) : P^N \rightrightarrows X_i$ *költségvetési halmaza:*

$$B_i(p) = \{x_i \in X_i \,|px_i \leqq M_i(p)\},$$

végül $X_i(\cdot) : P^N \rightrightarrows B_i(p)$ *döntési szabálya:*

$$X_i(p) = \{x_i \in B_i(p) \,|x_i \succsim_i x'_i, \forall x'_i \in B_i(p)\}.$$

2.B.6. Megjegyzés. *Fontos, hogy mindig szem előtt tartsuk, mind a jövedelem, mind a költségvetési halmaz az árvektortól függ. Vegyük észre azt is, hogy a fogyasztók döntési szabálya bonyolultabb, mint a termelőké! Éppen emiatt az egyensúlyelmélet igazi lényege a csere elmélete, erre később egy speciális eset vizsgálata során még visszatérünk. Ugyancsak vegyük észre, hogy a költségvetési halmaz és a döntési szabály egyaránt pont–halmaz leképezés!*

Az e^m gazdasági mechanizmus elemei tehát az árak, a részesedési együtthatók, valamint az árelfogadási posztulátum és az ezen alapuló döntési szabályok. Az ilyen mechanizmusokat *walrasi* vagy *versenyzői* mechanizmusoknak nevezzük. A továbbiakban csak ilyenekkel foglalkozunk mindaddig, amíg e feltétel feloldását külön nem jelezzük.

2.B.3. A versenyzői gazdaság

Mint azt már említettük, a gazdaság a gazdasági környezet és a gazdasági mechanizmus együttese. Miután mi csak az adott szerkezetű környezettel bíró, versenyzői mechanizmussal ellátott gazdaságokkal foglalkozunk, egyszerűsíthetünk kicsit jelöléseinken. Ha figyelmesen elolvastuk az előző pontot, láthatjuk, hogy az egymástól eltérő versenyzői mechanizmusok csak a részesedési együtthatókban különböznek, ezért elegendő, ha a gazdaságot definiáló listában az e^m mechanizmusra utaló rész csak ezeket tartalmazza. Az általunk vizsgálandó gazdaságok családját az $\mathcal{E}^w$ szimbólummal jelöljük, ahol a felső index *Walras* nevére, ezáltal a versenyzői magatartásra utal.

2.B.7. Definíció. *Egy* $e \in \mathcal{E}^w$ *gazdaságon a következőt értjük:*

$$e = \left\{N, I, J, \{X_i\}_{i=1}^{I}, \{\succsim_i\}_{i=1}^{I}, \{\omega_i\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \{\alpha_{ij}\}_{i=1,\dots,I}^{j=1,\dots,J}\right\}.$$

A továbbiakban azt a jelölési konvenciót követjük, hogy a gazdaságokra vonatkozóan *a gazdasági környezetre alsó, míg a mechanizmusra felső* *index utal.*[16] *Kivételt képez ez alól a szabály alól néhány eset, amikor a mechanizmus vagy a környezet egyértelműen meghatározza a párját. Annak érdekében, hogy a túlságosan zsúfolt jelöléseket elkerüljük, csak azokat az indexeket tesszük ki, amelyek elegendőek ahhoz, hogy biztosak legyünk abban, milyen gazdaságról van szó. Természetesen, ha ez zavart okozna, akkor minden jelet kiteszünk. Ez esetben azonban több tagból álló indexeket kell majd alkalmaznunk.*

2.C. A versenyzői egyensúly és a túlkereslet fogalma

Ebben az alfejezetben további, nagyon fontos fogalmakat vezetünk be. Először a tárgyalás természetes menetét folytatjuk, majd az elmondottakat egy kicsit átfogalmazzuk a későbbi felhasználás egyszerűsítése érdekében.

2.C.1. Allokáció és egyensúlyi állapot

2.C.1. Definíció. *Legyen egy $e \in \mathcal{E}^w$ gazdaságban*

$$\mathcal{X} = (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_I) \text{ és } \mathcal{Y} = (Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_J)\,,$$

valamint

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \mathcal{A}.$$

Egy $a = \{x_1, x_2, \ldots, x_I, y_1, y_2, \ldots, y_J\} \in \mathcal{A}$ együttest allokáció*nak vagy* tevékenységegyüttes*nek hívunk. Egy allokáció* megvalósítható*, ha*

$$\sum_{i=1}^{I} x_i \leqq \sum_{j=1}^{J} y_j + \sum_{i=1}^{I} \omega_i,$$

azaz egy jószágból sem keresnek többet, mint a rendelkezésre álló mennyiség. A megvalósítható allokációk halmazát az $\mathcal{A}_{ok}$ szimbólummal jelöljük.

[16] Fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy amennyiben nem egy e gazdaságról van szó, hanem csak ahhoz tartozó bizonyos objektumokról, például fogyasztási halmazokról, akkor ez a konvenció nem érvényes.

2.C.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy egy allokáció megvalósíthatósága nem függ a készletek elosztásától, csak a gazdaságban rendelkezésre álló összkészlettől! Ennek később nagy jelentősége lesz.*

A továbbiakban a versenyzői egyensúly fogalmával foglalkozunk. E fogalom már nyilvánvaló módon kötődik a mechanizmushoz, elválaszthatatlan az árelfogadás posztulátumától. A versenyzői szó pont azt jelenti, hogy piaci erő híján a szereplők egymással azonos helyzetben versenyeznek a piacon megszerezhető előnyökért.

2.C.3. Definíció. *Az $(a, p) \in \mathcal{A} \times P^N$ együttest az $e \in \mathcal{E}^w$ gazdaság egy* állapot*ának hívjuk.*

2.C.4. Definíció. *Az (a^*, p^*) állapot az $e \in \mathcal{E}^w$ gazdaság* versenyzői egyensúlyi állapot*a, ha*

(i) Profitmaximalizálás: $j = 1, \ldots, J$-re $y_j^* \in Y_j(p^*)$;

(ii) Haszonmaximalizálás: $i = 1, \ldots, I$-re $x_i^* \in X_i(p^*)$;

(iii) Naturális egyensúly: $a^* \in \mathcal{A}_{ok}$, azaz $\sum_{i=1}^I x_i^* \leqq \sum_{j=1}^J y_j^* + \sum_{i=1}^I \omega_i$;

(iv) Szigorú értékegyensúly: $p^*(\sum_{i=1}^I x_i^* - \sum_{j=1}^J y_j^* - \sum_{i=1}^I \omega_i) = 0$.

2.C.5. Megjegyzés. *Nagyon fontos, hogy alaposan megértsük e definíciót. Először is vegyük észre, hogy az egyensúlyban is igaz, hogy minden szereplő csak saját önérdekét követi, semmi másra nincs tekintettel. Mégis olyan állapot jön létre, amelyből egyiküknek sem áll érdekében egyoldalúan kimozdulni. Másodszor: a gazdaság egésze, azaz minden piac egyensúlyban van. A kereslet egy jószágból sem haladja meg a kínálatot, azaz az állapot fizikailag megvalósítható és az esetleges túlkínálat piaci értéke zérus. A gazdaság egészében sincs az állapotból való kimozdulásra irányuló erő. Tökéletes a párhuzam a mechanika egyensúlyfogalmával. Végül azt is jegyezzük meg, hogy szemben az allokáció fogalmával, az egyensúly állapotra vonatkozik, azaz része az árrendszer.*

2.C.2. Túlkereslet és egyensúly

Vezessük be a következő jelöléseket. Ha a gazdasági szereplőkre vonakozó változókat a szereplőkre nézve összegezzük, akkor a kapott új *aggregált* változót ugyanazzal a szimbólummal, de index nélkül jelöljük.

2.C.6. Definíció. *Egy a allokációhoz tartozó*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_I, y_1, y_2, \ldots, y_J)$$

tevékenységekből nyert

$$x = \sum_{i=1}^{I} x_i \qquad \textit{és} \qquad y = \sum_{j=1}^{J} y_j$$

vektorokat rendre aggregált fogyasztási, *illetve* aggregált termelési *vektornak hívjuk. Hasonlóképpen az*

$$\omega = \sum_{i=1}^{I} \omega_i$$

vektort a gazdaság összkészletvektorának mondjuk. Ugyanígy járunk el az aggregált fogyasztási, *illetve* aggregált termelési halmaz*ok esetében is:*

$$X = \sum_{i=1}^{I} X_i \qquad \textit{és} \qquad Y = \sum_{j=1}^{J} Y_j,$$

valamint az is nyilvánvaló, hogy $x \in X$, illetve $y \in Y$. Egy $p \in P^N$ árvektorhoz rendelt aggregált keresleti *és* aggregált termelőkínálati, *végül* aggregált kínálati halmaz*okat rendre a következő pont–halmaz leképezésekkel definiáljuk:*

$$\begin{aligned}
X(\cdot) \quad &: \quad P^N \rightrightarrows X, \qquad X(p) = \sum_{i=1}^{I} X_i(p); \\
Y(\cdot) \quad &: \quad P^N \rightrightarrows Y, \qquad Y(p) = \sum_{j=1}^{J} Y_j(p); \\
\hat{Y}(\cdot) \quad &: \quad P^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N, \qquad \hat{Y}(p) = Y(p) + \omega.
\end{aligned}$$

A képhalmazok elemeit pedig az $x(p)$, $y(p)$, $\hat{y}(p)$ szimbólumokkal jelöljük.

A későbbiekben hasznos lesz, ha bevezetjük az úgynevezett túlkereslet fogalmát.

2.C.7. Definíció. *Egy a allokációhoz tartozó tevékenységekből a*

$$z = \sum_{i=1}^{I} x_i - \sum_{j=1}^{J} y_j - \sum_{i=1}^{I} \omega_i = x - y - \omega$$

szabállyal nyert $z \in \mathbb{R}^N$ vektort az allokációból származtatott túlkeresletvektor*nak hívjuk. Egy $p \in P^N$ árvektorhoz rendelt*

$$z(p) = x(p) - y(p) - \omega$$

túlkeresletvektor nyilván a

$$Z(\cdot) : P^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N, \qquad Z(p) = X(p) - Y(p) - \omega$$

túlkereslet-leképezés *által meghatározott* túlkereslethalmaz *eleme. Ennek a $z(p)$ vektornak az n-edik koordinátája pozitív, ha a jószág iránt megnyilvánuló kereslet (fogyasztási igény) meghaladja a jószágból kínált (rendelkezésre álló) mennyiséget, és negatív, ha annál kisebb.*

A túlkereslet fogalmának segítségével újrafogalmazhatjuk a versenyzői egyensúly definícióját is. Ezt a definíciót is használjuk majd a későbbiekben.

2.C.8. Definíció. *Az (a^*, p^*) állapot az $e \in \mathcal{E}^w$ gazdaság* versenyzői egyensúlyi állapota*, ha a hozzá tartozó tevékenységekre és túlkeresletre*

(i) Profitmaximalizálás: $j = 1, \ldots, J$-re $y_j^* \in Y_j(p^*)$;

(ii) Haszonmaximalizálás: $i = 1, \ldots, I$-re $x_i^* \in X_i(p^*)$;

(iii) Naturális egyensúly: $z^*(p^*) \leqq 0$;

(iv) Szigorú értékegyensúly: $p^* z^*(p^*) = 0$.

2.C.9. Megjegyzés. *Ez a módosított definíció első pillantásra csak egyszerű átfogalmazása az előzőekben adottnak. Ez a meglátás csak részben igaz. Később látni fogjuk, hogy a túlkeresletnek önálló szerepe lehet.*

2.D. Az Arrow–Debreu-modell

Az általános egyensúly eddig tárgyalt modellje túl általános ahhoz, hogy bármit is mondani tudjunk a minket igazán érdeklő kérdésekkel kapcsolatban. Nem tudhatjuk, létezik-e egyáltalán egyensúly a modellben, vagy hogy van-e egyáltalán valami önmagáért való érdeme az egyensúlynak. Az ebben a szakaszban bevezetésre kerülő feltételek azok, amelyek mellett *Kenneth Arrow* és *Gerard Debreu* először bizonyították korrekt módon az egyensúly létezését. Ezeket a feltételeket általánosan használják a neoklasszikus mikroökonómiában, annak ellenére, hogy meglehetősen restriktívek, bizonyos szempontok alapján elvetendőnek minősíthetők. Ugyanakkor döntő szerepet játszanak az egyensúly létezésének bizonyításában, és elsősorban matematikai meggondolások okolhatják szerepeltetésüket. Az évek során természetesen több ponton finomították ezeket a feltevéseket, de bátran állíthatjuk, hogy a bizonyításokban felhasznált alapvető matematikai tételek, nevezetesen a fixponttételek, változatlanok maradtak.

2.D.1. Arrow–Debreu-gazdaságok

Először a termelőkre vonatkozó feltételeket vesszük sorra. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy míg egyes feltevések az egyéni, mások az aggregált termelési halmazokra vonatkoznak.

2.D.1. Feltevés. *$\forall j$-re, azaz $j = 1, 2, \ldots, J$ esetén*

(i) $Y_j \subset \mathbb{R}^N$ *zárt, konvex halmaz;*

(ii) $0 \in Y_j$;

(iii) $Y \cap \mathbb{R}^N_+ = \{0\}$;

(iv) $Y \cap \{-Y\} = \{0\}$.

2.D.2. Megjegyzés. *Vegyük sorra a pontokat. Az első lényegében azt mondja ki, hogy a termelésben* nincs növekvő hozadék. *Ez, mint tudjuk, nagyon erős feltevés, de matematikai szempontból szükségünk van rá. Az előző fejezetben láttunk közgazdasági érvelést is arra vonatkozóan, miért is engedhető meg egyáltalán ez a feltételezés. A második pont* a tétlenség lehetségességét *biztosítja minden termelő számára. Ez is nyilvánvaló lehetetlenség, ha ténylegesen létező termelési egységeket tekintünk. De* *ha minden, egyáltalán felállítható termelési egységre vonatkoztatjuk, akkor nyilván nem olyan elvetendő. Annyit jelent csak ugyanis, hogy az az egység nem funkcionál. A következő két pont az aggregált termelési halmazra vonatkozik. A harmadik* a nincsen rózsa tövis nélkül *feltétel. Jelentése: ráfordítás nélkül nem lehet termelni a gazdaság egészében. A negyedik pont* a disznó–kolbász *feltétel, más szóval az aggregált termelési tevékenységek* irreverzibilitását *biztosító feltevés.*

A feltételcsoport a fogyasztók tevékenységeire és értékítéleteire vonatkozik.

2.D.3. Feltevés. *$\forall$ i-re, azaz $i = 1, 2, \ldots, I$ esetén*

(i) $X_i \subset \mathbb{R}^N$ *zárt, konvex, alulról korlátos halmaz;*

(ii) $\succcurlyeq_i$ *folytonos, azaz az*

$$\{x_i \in X_i \,|x_i \succcurlyeq_i x'_i, \} \qquad \forall x'_i \in X_i$$

és az

$$\{x_i \in X_i \,|x'_i \succcurlyeq_i x_i, \} \qquad \forall x'_i \in X_i$$

halmazok zártak;

(iii) $\succcurlyeq_i$ *konvex*, azaz $x_i^1 \in X_i$, $x_i^2 \in X_i$, és $x_i^1 \succ_i x_i^2$, valamint $\lambda \in (0, 1)$ esetén

$$\lambda x_i^1 + (1 - \lambda) x_i^2 \succ_i x_i^2;$$

(iv) *az i-edik fogyasztó globálisan telhetetlen, azaz $\forall x_i \in X_i$ -re $\exists\, x'_i \in X_i$, hogy $x'_i \succ_i x_i$.*

2.D.4. Megjegyzés. *Hasonlóan a termelőkre vonatkozó feltételekhez fűzött megjegyzéseinkhez, itt is rá kell mutatnunk arra, hogy e feltételek többsége is matematikai kívánalmaknak megfelelően öltötte a fenti formát. Különösképpen igaz ez a konvexitási feltevésekre vonatkozóan. Külön kell foglalkoznunk a második ponttal. A preferenciarendezésekre vonatkozó, híres reprezentációs tétel*[17] *értelmében e pont biztosítja azt, hogy a fogyasztók preferenciarendezéseinek létezik folytonos, valós*

[17] Lásd például a *Debreu* (1964) cikket.

reprezentációja, azaz a fogyasztók értékítéletét ekvivalens módon leírhatjuk hasznossági függvényekkel is. Emiatt a reprezentáció miatt kicsit változik a fogyasztó döntési szabályának formalizált alakja:

$$X_i(p) = \{x_i \in B_i(p) \,|U_i(x_i) \geqq U_i(x_i'), \forall x_i' \in B_i(p)\},$$

ahol U_i a hasznossági függvény. Ezt az utat követjük mi is a továbbiakban, így az egész feltevéscsoportot a következőkkel helyettesítjük.

2.D.5. Feltevés. *$\forall$ i-re, azaz $i = 1, 2, \ldots, I$ esetén*

(i) *$X_i \subset \mathbb{R}^N$ zárt, konvex, alulról korlátos halmaz;*

(ii) *az $U_i(x_i) : X_i \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos;*

(iii) *U_i félig szigorúan kvázikonkáv, azaz $x_i^1 \in X_i$, $x_i^2 \in X_i$, és $U_i(x_i^1) > U_i(x_i^2)$, valamint $\lambda \in (0, 1)$ esetén $U_i(\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2) > U_i(x_i^2)$;*

(iv) *az i-edik fogyasztó globálisan telhetetlen, azaz $\forall x_i \in X_i$ -re $\exists\, x_i' \in X_i$, hogy $U_i(x_i') > U_i(x_i)$.*

A következő két feltétel a fogyasztók jövedelmének összetevőit, a készleteket és a részesedéseket jellemzi. Ugyanakkor az egész gazdaságra is vonatkoznak, vagy azért, mert összekapcsolják a fogyasztókat a termelőkkel, vagy azért, mert mintegy megszabják a gazdaság „terjedelmét”.

2.D.6. Feltevés. *$\forall$ i-re, azaz $i = 1, 2, \ldots, I$ esetén*

(i) *$\exists\, b_i \in X_i$, amire $b_i < \omega_i$,*

(ii) *valamint $\forall j$ -re $(j = 1, 2, \ldots, J)$ $\alpha_{ij} \geqq 0$ és $\sum_{i=1}^{I} \alpha_{ij} = 1$.*

2.D.7. Megjegyzés. *A feltevés első pontja a szigorú önellátás feltétele. Nyilvánvalóan irreális feltételezés, éppen ezért komoly erőfeszítések születtek enyhítésére, sikerrel. Mi e helyütt ezekkel nem foglalkozunk, mert túl sokat nem nyernénk általa, és szükségtelenül bonyolítanánk a tárgyalást. A második pont arra mutat rá, hogy a termelők profitját a fogyasztók (a termelőegységek tulajdonosai) teljes mértékben felosztják egymás között.*

A 2.D.1., 2.D.5.és 2.D.6. feltételcsoportoknak eleget tevő versenyzői gazdaságokat a továbbiakban *Arrow–Debreu (A–D) gazdaságoknak hívjuk.* Az *A–D gazdaságok* családjának jele $\mathcal{E}_{A-D}$. Egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságot, mint arra utaltunk a hasznossági függvények bevezetésekor, megadhatunk úgy is, hogy a definícióban a preferenciarendezések helyett a hasznossági függvényeket szerepeltetjük.

2.D.8. Definíció. *Egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaság a következő lista:*

$$e = \left\{ N, I, J, \{X_i\}_{i=1}^{I}, \{U_i\}_{i=1}^{I}, \{\omega_i\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \{\alpha_{ij}\}_{i=1,\ldots,I}^{j=1,\ldots,J} \right\}.$$

A fenti definícióból következően nyilván $\mathcal{E}_{A-D} \subset \mathcal{E}^w$. A megadott feltételek elégségesek ahhoz, hogy az *Arrow–Debreu*-modellben az egyensúly létezését bizonyítsuk. Magára a bizonyításra a következő fejezetben kerítünk sort, előbb egy, a bizonyításhoz is szükséges, de önmagában is jelentős állítást látunk be.

2.D.2. A Walras-törvény

Amikor *Leon Walras* a múlt század második felében megfogalmazta az általános egyensúly első átfogó modelljét, úgy vélte, az egyensúly létezésének elegendő bizonyítéka az, ha olyan modellt állít fel, amiben a változók és egyenletek száma ugyanannyi. Modelljében a végső változók az árak voltak, míg az egyenletek a túlkeresletre vonatkoztak. Láttuk ugyanakkor, hogy az N darab árból csak $N-1$ darab az, ami ténylegesen változik. Egynek értékét vagy kívülről adjuk meg, vagy reziduumként adódik. Nem jelenti-e ez azt, hogy a rendszer túldeterminált? Nem több az egyenlet, mint a változó? *Walras* megmutatta, hogy nem. Modelljében az N egyenlet nem teljesen független egymástól, $N-1$ egyenlőség teljesülése esetén az utolsó egyenlőség automatikusan fennáll. Ahogy az előző pont nyelvén megfogalmazhatjuk: ha $N-1$ jószág túlkereslete *zérussá válik,* akkor az N-edik jószág piaca is szükségképpen kitisztul. Ezt a tényt hívjuk *Walras-törvény*nek. E törvény, mint arról később lesz szó, az általános egyensúlyelmélet egyik legfontosabb jellemzője.

A következő néhány lépésben ezt az önálló jelentőséggel bíró állítást látjuk be.

2.D.9. Segédtétel (lokális telhetetlenség). *Legyen $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ és $N_i(x_i)$ az $x_i \in X_i$ pont egy tetszőleges nyílt környezete. Ekkor $\forall i$-re létezik $x_i'' \in X_i \cap N_i$ pont, amire $U_i(x_i'') > U_i(x_i)$.*

Bizonyítás. Minden fogyasztó globálisan telhetetlen, azaz $\forall i$-re $\exists\, x_i' \in X_i$, amire $U_i(x_i') > U_i(x_i)$. Az X_i fogyasztási halmaz konvex, ezért $\lambda \in (0,1)$ esetén az

$$x_i^\lambda = \lambda x_i + (1-\lambda) x_i'$$

pont is az X_i halmaz eleme. Tudjuk, hogy az U_i hasznossági függvény félig szigorúan kvázikonkáv, ezért

$$U_i(x_i^\lambda) > U_i(x_i).$$

A λ változót 1-hez közel választva

$$x_i^\lambda \in X_i \cap N_i$$

hiszen N_i nyílt. Az $x_i'' = x_i^\lambda$ választással a segédtételt beláttuk. □

2.D.10. Segédtétel. *Egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságban minden fogyasztó, minden árrendszer mellett, teljesen elkölti a jövedelmét, azaz $\forall i$ és $\forall\, p \in P^N$ esetén*

$$px_i^* = M_i(p), \qquad \text{ahol } x_i^* \in X_i(p).$$

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $x_i^* \in X_i(p)$ és $px_i^* < M_i(p)$. Definiáljuk az

$$N_i = \left\{ x_i \in \mathbb{R}^N \,|px_i < M_i(p) \right\}$$

halmazt. Ez az x_i^* pont egy nyílt környezete, mert a skaláris szorzat folytonos. Az 2.D.9. Segédtétel értelmében létezik olyan $x_i'' \in X_i \cap N_i$ pont, amire $U_i(x_i'') > U_i(x_i^*)$, ami ellentmond x_i^* feltételezett $B_i(p)$-beli optimalitásának, hiszen nyilván $x_i'' \in B_i(p)$. □

2.D.11. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a fogyasztóknak mindig „égeti a pénz a zsebét". Nincs olyan árrendszer, ami mellett ne költené el teljesen a jövedelmét. Fontos, hogy megértsük: ez a tulajdonság nem csak az egyensúlyi állapothoz tartozó árrendszerre igaz.*

2.D.12. Tétel (Walras-törvény). *Legyen $e \in \mathcal{E}_{A-D}$, $p \in P^N$, $x_i^* \in X_i(p)$, $i = 1, 2, \ldots, I$, valamint $y_j^* \in Y_j(p)$, $j = 1, 2, \ldots, J$. Ekkor $pz^*(p) = 0$, azaz*

$$p \sum_{i=1}^{I} x_i^* = p \sum_{j=1}^{J} y_j^* + p \sum_{i=1}^{I} \omega_i.$$

Bizonyítás. A 2.D.10. Segédtétel értelmében $\forall i$-re

$$px_i^* = p\omega_i + \sum_{j=1}^{J} \alpha_{ij} p y_j^*.$$

Ezeket i szerint összegezve, a szummákat átrendezve és felhasználva a részesedési együtthatókra tett feltevésünket, kapjuk az állítást. □

2.D.13. Megjegyzés. *Itt is hangsúlyoznunk kell, hogy a* Walras-törvény *minden árrendszerre azonosan igaz. Ha a szereplők követik posztulált viselkedési mintáikat és optimálisan cselekszenek, akkor az aggregált túlkereslet* értéke *szükségképpen zérus, azaz teljesül a szigorú értékegyensúly.*

2.D.14. Megjegyzés. *Vezessük be a következő jelölést. Ha egy $u \in \mathbb{R}^N$ vektorral szorozzuk egy $T \subset \mathbb{R}^N$ halmaz minden t elemét, akkor ezt az uT alakba írjuk. Az uT objektum nyilván a valós számegyenes egy részhalmaza. Az $uT \leqq \rho$ jelölés azt jelenti, hogy uT egy eleme sem nagyobb ρ-nál. Az ebben a jelölésmódban átfogalmazott* Walras-törvény*: $\forall p \in P^N$-re $pZ(p) = 0$.*

III.

AZ EGYENSÚLY LÉTEZÉSE

3.A. Bevezetés

Ebben a fejezetben az általános egyensúly létezésével foglalkozunk. Ez a kérdés a 20. század közepe felé a kutatások fő problémájává vált, és az addig sikerrel nem kecsegtető feladat a *Kakutani*-tétel[18] megjelenésével egy csapásra megoldhatónak tűnt. A fáradozások jutalma nem is maradt el: az *Adam Smith*től eredeztethető, mintegy kétszáz éves sejtés – elsősorban *Kenneth Arrow*, *Gerard Debreu* és *Lionel McKenzie* munkájának[19] köszönhetően – igazolást nyert. Lássuk, miképpen!

Az eddig megismert *Arrow–Debreu*-modell első pillantásra némi kételyt ébreszt bennünk arra vonatkozóan, hogy tényleg elégségesek-e a felsorolt feltételek. A gazdasági mechanizmus ismertetése során megadtuk a termelők és fogyasztók döntési szabályait. Ezek a pont–halmaz leképezések csak akkor jól definiáltak, ha a döntő szerepet játszó feltételes szélsőérték-számítási feladatoknak létezik megoldásuk, azaz a profit-, illetve hasznossági függvények ténylegesen felveszik maximumértékeiket. Ez, látva a feltételeket, egyáltalán nem triviális, hiszen a tevékenységi halmazokról nem tételeztünk fel korlátosságot, és így nem alkalmazhatjuk közvetlen módon a *Weierstrass-tétel*t.

Ezért a továbbiakban először definiálunk egy új gazdaságot, amiben ez már nem jelent problémát, majd megmutatjuk, hogy ennek egyensúlyi állapotai szükségképpen egybeesnek az eredeti gazdaság egyensúlyi állapotaival. Ezután nem marad más hátra, minthogy az egyensúly létezését ebben az új gazdaságban belássuk.

3.B. A szűkített gazdaság

3.B.1. Releváns döntések

Egy a^* tevékenységegyüttes (allokáció) definíciószerűen csak akkor tartozhat egy (a^*, p^*) egyensúlyi állapothoz, ha naturális egyensúlyban van, azaz, ha

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* \leqq \sum_{j=1}^{J} y_j^* + \sum_{i=1}^{I} \omega_i.$$

[18] *Kakutani* (1941).

[19] *Arrow–Debreu* (1954), *Debreu* (1956), *McKenzie* (1954), *McKenzie* (1959) valamint *McKenzie* (1961).

Egy ilyen tevékenységegyüttesben szereplő fogyasztási és termelési tevékenységek az egyensúly szempontjából *releváns*ak, míg az olyanok, amelyek nem részei naturális egyensúlyban lévő allokációnak, számunkra most érdektelenek. A továbbiakban egyelőre a releváns tevékenységekre koncentrálunk.

3.B.1. Definíció. *Egy $x_i \in X_i$ fogyasztási tevékenység* releváns döntés, *ha létezik egy naturális egyensúlyban lévő $a\,(\in \mathcal{A}_{ok})$ tevékenységegyüttes, aminek x_i része. Egy $y_j \in Y_j$ termelési tevékenység* releváns döntés, *ha létezik egy naturális egyensúlyban lévő $a\,(\in \mathcal{A}_{ok})$ tevékenységegyüttes, aminek y_j része. A releváns döntések halmazait rendre az $X_i^R, (i = 1, 2, \ldots, I)$ és az $Y_j^R, (j = 1, 2, \ldots, J)$ szimbólumokkal jelöljük.*

3.B.2. Segédtétel. *Egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságban az*

$$X_i^R, (i = 1, 2, \ldots, I) \quad \text{és az} \quad Y_j^R, (j = 1, 2, \ldots, J)$$

halmazok nemüres, konvex *halmazok.*

Bizonyítás. A releváns tevékenységek halmazai triviális módon nemüresek, hiszen a *szigorú önellátás* és a *tétlenség lehetségessége* feltételek miatt a

$$\big(b_1, b_2, \ldots, b_I, 0, 0, \ldots, 0_{(J)}\big)$$

tevékenységegyüttes naturális egyensúlyban van.

A konvexitás bizonyítását X_i^R-re végezzük el, a többi teljesen hasonló. Legyen $x_i^1, x_i^2 \in X_i^R$. Ekkor léteznek olyan

$$\begin{array}{ll} \big(x_1^1, \ldots, x_{i-1}^1, x_{i+1}^1, \ldots, x_I^1, y_1^1, \ldots y_J^1\big) & \text{és} \\ \big(x_1^2, \ldots, x_{i-1}^2, x_{i+1}^2, \ldots, x_I^2, y_1^2, \ldots y_J^2\big) & \end{array}$$

tevékenység $(I + J - 1)$-esek, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^1 \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i + \sum_{j=1}^{J} y_j^1 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{I} x_i^2 \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i + \sum_{j=1}^{J} y_j^2. \tag{3.B–1}$$

Miután az $X_i, i = 1, 2, \ldots, I$ és az $Y_j, j = 1, 2, \ldots, J$ halmazok konvexek, ezért $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$\begin{aligned} \big(\lambda x_i^1 + (1-\lambda) x_i^2\big) &= x_i^\lambda \in X_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, I, \\ \big(\lambda y_j^1 + (1-\lambda) y_j^2\big) &= y_j^\lambda \in Y_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, J. \end{aligned}$$

A (3.B–1) egyenlőtlenségekből az is világos, hogy

$$\lambda \sum_{i=1}^{I} x_i^1 + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{I} x_i^2 \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^{J} y_j^1 + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{J} y_j^2,$$

azaz találtunk egy olyan a^λ tevékenységegyüttest, amelynek x_i^λ része és így

$$x_i^\lambda \in X_i^R.$$

□

3.B.3. Segédtétel. *Egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságban az*

$$X_i^R, (i = 1, 2, \ldots, I) \quad \text{és az} \quad Y_j^R, (j = 1, 2, \ldots, J)$$

halmazok korlátos *halmazok.*

Bizonyítás. Először a termelők releváns döntési halmazainak korlátosságát látjuk be. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, létezik olyan j', amire $Y_{j'}^R$ nem korlátos! A releváns döntések definíciója szerint $\forall j$-re és $\forall i$-re léteznek olyan Y_j^R-beli $\left(y_j^q\right)_{q=1}^{\infty}$ és X_i^R-beli $\left(x_i^q\right)_{q=1}^{\infty}$sorozatok, hogy

$$\sum_{j=1}^{J} y_j^q \geqq \sum_{i=1}^{I} x_i^q - \sum_{i=1}^{I} \omega_i, \qquad \forall q-ra, \text{és} \tag{3.B–2}$$

$$\lim_{q \to \infty} \left\| y_{j'}^q \right\| = \infty.$$

Definiáljuk l^q-t a következőképpen:

$$l^q = \max_j \left\| y_j^q \right\|.$$

Nyilván

$$\lim_{q \to \infty} l^q = \infty.$$

A fogyasztási halmazokra tett alulról korlátossági feltevés miatt

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^q \geqq \sum_{i=1}^{I} c_i = c,$$

ahol c_i az i-edik fogyasztó X_i fogyasztási halmazának egy alsó korlátja. Ha ezt összevetjük a (3.B–2) egyenlőtlenséggel, akkor kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{J} y_j^q \geqq c - \omega. \tag{3.B–3}$$

Láttuk, hogy l^q határértéke végtelen, ezért egy elég nagy, q°-at meghaladó q-ra l^q nyilván nagyobb lesz, mint 1. A termelőkre tett konvexitási és tétlenségi feltevések miatt az ilyen q értékekre

$$\frac{1}{l^q} y_j^q + (1 - \frac{1}{l^q})0 = \frac{1}{l^q} y_j^q \in Y_j.$$

Továbbá l^q definiciójából tudjuk, hogy

$$\forall j - re \qquad \left\| \frac{1}{l^q} y_j^q \right\| \leqq 1,$$

valamint

$$\max_j \left\| \frac{1}{l^q} y_j^q \right\| = 1. \tag{3.B–4}$$

A $\forall j$-re Y_j-beli $\left(\frac{1}{l^q} y_j^q\right)_{q>q^0}^{\infty}$ sorozatok korlátosak, tehát kiválasztható belőlük egy-egy *konvergens részsorozat.* Legyen ezeknek a határértéke rendre y_j°! A termelési halmazokra feltételeztük a zártságot, ezért mondhatjuk, hogy $y_j^\circ \in Y_j$, $\forall j$-re. Indexeljünk át vagy tegyük fel, hogy az $\frac{1}{l^q} y_j^q$ sorozatok maguk konvergensek! A (3.B–3) egyenlőtlenségből, l^q-val történő osztás után, határértékben kapjuk, hogy

$$\lim_{q \to \infty} \frac{1}{l^q} \sum_{j=1}^{J} y_j^q = \sum_{j=1}^{J} y_j^\circ \geqq 0.$$

Mivel $y_j^\circ \in Y_j$ minden j-re, ezért

$$\sum_{j=1}^{J} y_j^\circ \in Y.$$

A *nincsen rózsa tövis nélkül* feltétel értelmében

$$\sum_{j=1}^{J} y_j^\circ = 0.$$

Most megmutatjuk, hogy ebből minden j-re az $y_j^\circ = 0$ egyenlőség következik, ellenkező esetben ellentmondásba kerülünk a *disznó–kolbász* feltétellel. Tételezzük fel ugyanis, hogy $y_k^\circ \neq 0$. Ekkor

$$y_k^\circ = -\sum_{j \neq k} y_j^\circ.$$

Ha most tekintjük a *tétlenség lehetségessége* feltétel miatt értelmes

$$(0, \ldots, 0, y_k, 0, \ldots, 0) \quad \text{és az} \quad (y_1, \ldots, y_{k-1}, 0, y_{k+1}, \ldots, y_J)$$

termelési tevékenységegyütteseket, akkor látható az ellentmondás. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\forall j\text{-re} \qquad y_j^\circ = 0,$$

ami nyilvánvalóan ellentmond a (3.B–4) feltételnek, mert a folytonos normák felett a maximumképzés is folytonos.

Térjünk rá most a fogyasztók releváns tevékenységeinek korlátosságára! Tudjuk, hogy $\forall i$-re, ha $x_i \in X_i^R$, akkor

$$c_i \leqq x_i \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i + \sum_{j=1}^{J} y_j - \sum_{i \neq k} c_k.$$

A termelők Y_j^R döntési halmazainak korlátossága miatt a fenti egyenlőtlenség két szélső oldala alsó, illetve felső korlátként szolgál a fogyasztók releváns döntési halmazai számára. □

3.B.2. A gazdaság szűkítése

A releváns döntési halmazok előzőekben igazolt tulajdonságainak kihasználásával definiáljuk azt az új gazdaságot, amelynek egyensúlyi állapotai megegyeznek majd az eredeti $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságéval. A pont további részében szereplő ismerős szimbólumok mind erre az e gazdaságra vonatkoznak.

Legyen $T_e^{sz} \subset \mathbb{R}^N$ zárt, korlátos, konvex, valamint legyen $\forall i$-re $X_i^R \subset \operatorname{int} T_e^{sz}$ és $\forall j$-re $Y_j^R \subset \operatorname{int} T_e^{sz}$.[20] Az új (szűkített) gazdaságban a szereplők X_i^{sz} fogyasztási és Y_j^{sz} termelési halmazai legyenek rendre az $X_i \cap T_e^{sz}$,

[20] Az $\mathcal{R}^N$ tér tulajdonságaiból következően tehát T olyan nemüres, kompakt, konvex halmaz, amely a belsejében tartalmazza az összes releváns döntési halmazt.

illetve az $Y_j \cap T_e^{sz}$ halmazok, míg a fogyasztók hasznossági függvényei a csak a szűkített fogyasztási halmazokon értelmezett U_i függvények. A készletek és a részesedések maradjanak változatlanok.

3.B.4. Definíció. *Egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságból származtatott e_{sz} szűkített gazdaságon a következőt értjük:*

$$e_{sz} = \left\{ N, I, J, \{X_i^{sz}\}_{i=1}^{I}, \{U_i^{sz}\}_{i=1}^{I}, \{\omega_i\}_{i=1}^{I}, \left\{Y_j^{sz}\right\}_{j=1}^{J}, \{\alpha_{ij}\}_{i=1,\dots,I}^{j=1,\dots,J} \right\},$$

ahol

$$\begin{aligned} X_i^{sz} &= X_i \cap T_e^{sz}, \quad Y_j^{sz} = Y_j \cap T_e^{sz}, \quad \textit{valamint} \\ U_i^{sz} &: X_i^{sz} \to \mathbb{R}, \quad \textit{és} \quad U_i^{sz}(x_i) = U_i(x_i), \forall x_i \in X_i^{sz}. \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg, vajon ez a gazdaság *A–D gazdaság,* illetve *versenyzői gazdaság*-e! Mik lesznek ennek az e_{sz} gazdaságnak a tulajdonságai?

3.B.5. Állítás. *Az $e_{sz} \in \mathcal{E}$ gazdaságban*

(i) $j = 1, 2, \dots, J$-re az Y_j^{sz} *halmazok nemüres, kompakt, konvex halmazok;*

(ii) $j = 1, 2, \dots, J$-re $0 \in Y_j^{sz}$ és így $\pi_j(p) \geqq 0$ $\forall p \in P^N$-re;

(iii) $Y^{sz} \cap \mathbb{R}_+^N = \{0\}$;

(iv) $Y^{sz} \cap \{-Y^{sz}\} = \{0\}$;

(v) $i = 1, 2, \dots, I$-re az X_i^{sz} *halmazok nemüres, kompakt, konvex halmazok;*

(vi) $i = 1, 2, \dots, I$-re az U_i^{sz} *hasznossági függvények folytonos függvények;*

(vii) $i = 1, 2, \dots, I$-re az U_i^{sz} *hasznossági függvények félig szigorúan kvázikonkáv függvények;*

(viii) $i = 1, 2, \dots, I$-re ha $x_i \in X_i^R$, *akkor a fogyasztó ebben a pontban lokálisan telhetetlen, azaz* $\exists x_i'' \in X_i^{sz} \cap N_i(x_i)$, $U_i(x_i'') > U_i(x_i)$, *ahol* $N_i(x_i)$ *az* x_i *pont tetszőleges nyílt környezete;*

(ix) $i = 1, 2, \dots, I$-re $\exists\, b_i \in X_i^{sz}$, *amire* $b_i < \omega_i$;

(x) $i = 1, 2, \ldots, I$-re *valamint* $j = 1, 2, \ldots, J$-re $\alpha_{ij} \geqq 0$ *és* $\sum_{i=1}^{I} \alpha_{ij} = 1$;

(xi) $\forall p \in P^N$-re $pZ^{sz}(p) \leqq 0$, *továbbá, ha* $z \in Z^{sz}(p) \cap \mathbb{R}^N_-$, *akkor* $pz = 0$.

Bizonyítás. Csak azokat a pontokat bizonyítjuk, ahol az állítás nem trivialitás.

A (viii) pont a fogyasztók telhetetlenségére vonatkozik. Nem állíthatjuk, hogy a fogyasztó minden pontban akár lokálisan, akár globálisan telhetetlen lenne, mert a fogyasztási halmazok kompaktok, és egy kompakt halmaz felett a folytonos hasznossági függvény felveszi a maximumát. Ebből következően az ilyen maximumpontokban a fogyasztó telített. Ugyanakkor, az X_i^R halmazok X_i^{sz} belsejében vannak, és az $\left\{\operatorname{int} T_e^{sz} \cap N_i(x_i)\right\}$ halmaz nyílt. Innen alkalmazható a 2.D.9. Segédtétel gondolatmenete.

A (xi) pont első része a fogyasztók döntési szabályából – abból, hogy nem léphetik át költségvetési korlátjukat – triviálisan adódik. Ha $z \in Z^{sz}(p) \cap \mathbb{R}^N_-$, akkor tudjuk, hogy a túlkeresletet felépítő $x_i(p)$ fogyasztási vektorok szükségképpen releváns döntések. Az előbb belátott (viii) értelmében az $x_i(p)$, $i = 1, 2, \ldots, I$, pontokban fennáll a lokális telhetetlenség. A fogyasztók tehát elköltik jövedelmüket, így a *Walras-törvény* bizonyításában követett gondolatmenet itt is alkalmazható. □

3.B.6. Megjegyzés. *Vegyük észre, az* $e_{sz} \in \mathcal{E}$ *gazdaság* nem A–D gazdaság, *annak ellenére, hogy egy ilyen* $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ *gazdaságból származtattuk. A fogyasztók ugyanis nem telhetetlenek. Szerencsére, ez a későbbiekben semmiféle gondot nem okoz. Ugyanakkor nyilvánvalóan igaz az* $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ *tartalmazás.*

3.B.3. Az e és az e_{sz} gazdaságok ekvivalenciája

Fontos kérdés, hogy vajon az eredeti és a szűkített gazdaság milyen kapcsolatban van egymással az (általános) egyensúly szempontjából.

3.B.7. Definíció. *Legyen* $e_1 \in \mathcal{E}^w$ *és* $e_2 \in \mathcal{E}^w$ *két versenyzői gazdaság, amelyekben* $N_1 = N_2$, $I_1 = I_2$, *valamint* $J_1 = J_2$. *A két gazdaság* egyensúlyilag ekvivalens, *ha egyensúlyi állapotaik egybeesnek.*

3.B.8. Tétel. *Az* $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ *és az* $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ *gazdaságok egyensúlyilag ekvivalensek.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy ha egy (a^*, p^*) egyensúlyi állapot az $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságban, akkor a szűkítettben is az. Az a^* allokáció egyensúlyi állapot része, ezért naturális egyensúlyban van. Így az őt alkotó tevékenységek a szűkített gazdaság tevékenységi halmazainak elemei. Az (a^*, p^*) állapot tehát a szűkített gazdaságban is naturális és szigorú értékegyensúlyban van. Csak azt kell belátnunk, az egyes szereplők optimálisan cselekszenek. Az y_j^* termelések optimálisak voltak a p^* árrendszer mellett az Y_j halmazokban $\forall j$-re, ugyanakkor $Y_j^{sz} \subset Y_j$. Az y_j^* termelések tehát $\forall j$-re szükségképpen optimálisak a szűkített gazdaságban is, és így $\pi_j^{sz}(p^*) = \pi_j(p^*)$. Ebből következően $\forall i$-re $M_i^{sz}(p^*) = M_i(p^*)$ és így $x_i^* \in B_i^{sz}(p^*) \subseteq B_i(p^*)$, amiből az x_i^* fogyasztások szűkített gazdaságbeli optimalitása is adódik.

Legyen most (a^*, p^*) egyensúlyi állapot az $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ gazdaságban! Az allokációt alkotó tevékenységek nyilván az eredeti tevékenységi halmazoknak is elemei, továbbá az allokáció naturális és a p^* árrendszer mellett szigorú értékegyensúlyban van. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy $\forall j$-re $y_j^* \in Y_j(p^*)$ és $\forall i$-re $x_i^* \in X_i(p^*)$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $y_j^* \notin Y_j(p^*)$. Ekkor létezik olyan $y_j' \in Y_j$, amire $p^* y_j' > p^* y_j^*$. Ugyanakkor, mivel $y_j^* \in \operatorname{int} T_e^{sz}$, ezért elég kicsi pozitív λ-ra

$$\lambda y_j' + (1-\lambda) y_j^* = y_j^\lambda \in Y_j^{sz}.$$

Ez ellentmond az $y_j^* \in Y_j^{sz}(p^*)$ tartalmazásnak, mert

$$p^* y_j^\lambda > p^* y_j^*.$$

Ebből az következik, hogy az eredeti gazdaságban minden termelő optimális profitja ugyanakkora, mint a szűkítettben. Most csak az maradt hátra, hogy a fogyasztókra vonatkozó optimalitást is belássuk. Vegyük észre, hogy $\forall i$-re a profitok változatlansága miatt $x_i^* \in B_i(p^*)$! Tegyük fel, létezik olyan $x_i' \in B_i(p^*)$, amire $U_i(x_i') > U_i(x_i^*)$! Hasonlóan, mint ahogy a termelőre vonatkozó bizonyításban tettük, vegyük e két fogyasztási vektor

$$x_i^\lambda = \lambda x_i' + (1-\lambda) x_i^*$$

konvex kombinációját. Miután $x_i^* \in \operatorname{int} T_e^{sz}$, ezért elég kicsi pozitív λ-ra $x_i^\lambda \in X_i^{sz}$. Ez azonban az U_i^{sz} függvények folytonossága és félig szigorú kvázikonkavitása miatt ellentmond az $x_i^* \in X_i^{sz}(p^*)$ tartalmazásnak.□

Az egyensúly létezésének bizonyításában megtettünk egy kulcslépést. Ezután már csak azt kell belátnunk, a szűkített gazdaságban létezik egyensúly. Ez pedig már nem olyan meglepő, tekintve a szűkített gazdaság tevékenységi halmazainak nemüres, konvex, kompakt voltát.

3.B.9. Megjegyzés. *A továbbiakban, annak érdekében, hogy a jelölésrendszert egyszerűsítsük, az eredeti* $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ *gazdaságra vonatkozó szimbólumokat használjuk a szűkített gazdaságra is. Elhagyjuk tehát az utóbbira utaló felső indexeket. Ez – remélhetőleg – semmi problémát nem okoz.*

3.C. Pont–halmaz leképezések és döntési szabályok

3.C.1. Alapfogalmak, tételek

Ebben az alfejezetben röviden összefoglaljuk azokat a definíciókat és tételeket, amelyekre az egyensúly létezésének szempontjából szükségünk lesz. Miután ezek a fogalmak minket e helyütt kizárólag e szempontból érdekelnek, ezért a közgazdasági szakirodalomban általában szereplő alakjukat adjuk meg, nem törekszünk a teljes általánosságra. Egy alapvető állítás kivételével a bizonyításokat is megadjuk. A tárgyalásmód igen száraz, az értelmező megjegyzésektől mentes lesz. Először a megszokott függvényfogalom általánosításával foglalkozunk.

3.C.1. Definíció (Pont–halmaz leképezések). *Legyen* S *és* T *az* N *dimenziós euklideszi tér két nemüres részhalmaza, azaz* $S, T \subset \mathbb{R}^N$*. A* Φ pont–halmaz (halmazértékű) leképezés*, ha* S *minden pontjához* T *egy* nemüres részhalmazát *rendeli. Ezt többféleképpen jelölhetjük:*

$$\Phi : S \to 2^{T\setminus\emptyset}, \quad \textit{vagy} \quad \Phi : S \rightrightarrows T, \quad \textit{vagy} \quad \Phi(s) \subset T, \forall s \in S.$$

Egy Φ *pont–halmaz leképezés* G gráfja *az* $S \times T$ *szorzathalmaz egy olyan részhalmaza, amire*

$$G(\Phi) = \{(s,t) \in S \times T \,|t \in \Phi(s)\}.$$

A Φ *pont–halmaz leképezés* konvex értékű*, ha* $\forall s \in S$*-re* $\Phi(s)$ *konvex halmaz.*

3.C.2. Definíció (Folytonosság). *A Φ pont–halmaz leképezés egy $s^\circ \in S$ pontban* felülről félig folytonos (f.f.f.), *ha egy tetszőleges, az s° ponthozhoz konvergáló $s^q \in S$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatra és egy olyan, a t° ponthoz konvergáló $t^q \in T$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatra, amikre $t^q \in \Phi(s^q)$, a $t^\circ \in \Phi(s^\circ)$ tartalmazás következik, azaz:*

$$[s^q \to s^\circ,\, t^q \to t^\circ, t^q \in \Phi(s^q)] \Longrightarrow [t^\circ \in \Phi(s^\circ)]\,.$$

A Φ pont–halmaz leképezés felülről félig folytonos, *ha S minden pontjában az.*
A Φ pont–halmaz leképezés egy $s^\circ \in S$ pontban alulról félig folytonos (a.f.f.), *ha egy tetszőleges, az s°ponthoz konvergáló $s^q \in S$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatra és egy $t^\circ \in \Phi(s^\circ)$ pontra létezik egy, a t°-hoz konvergáló $t^q \in \Phi(s^q)$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozat, azaz:*

$$[s^q \to s^\circ, t^\circ \in \Phi(s^\circ)] \Longrightarrow [\exists\, t^q \to t^\circ, t^q \in \Phi(s^q)]\,.$$

A Φ pont–halmaz leképezés alulról félig folytonos, *ha S minden pontjában az.*
A Φ pont–halmaz leképezés egy $s^\circ \in S$ pontban folytonos, *ha ugyanitt egyszerre* f.f.f. *és* a.f.f, *és értelemszerűen folytonos, ha S minden pontjában az.*

3.C.3. Megjegyzés. *A definíciókból látható (vagy ha nem, triviálisan bizonyítható), hogy egy Φ pont–halmaz leképezés akkor és csak akkor* f.f.f., *ha gráfja zárt.*

3.C.4. Megjegyzés. *Ha T korlátos, akkor a hagyományos függvények folytonossága a pont–pont leképezésekre vonatkozó alulról, illetve felülről félig folytonossággal egyaránt ekvivalens. Itt kell felhívnunk a figyelmet arra, hogy a hagyományos függvényekre vonatkozó* alulról és felülről félig folytonosság *más fogalom. Ezért az utóbbiakat egy kicsit más névvel illetjük. Egy φ valós függvény az s° pontban* lentről félig folytonos (l.f.f.), *ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz $\exists$ olyan $\mathcal{U}(s^\circ)$ környezet, hogy az $s \in \mathcal{U}(s^\circ)$ tartalmazásból a $\varphi(s) \geqq \varphi(s^\circ) - \varepsilon$ reláció következik. A φ függvény* l.f.f., *ha értelmezési tartományának minden pontjában az. Ugyanakkor egy φ valós függvény az s° pontban* fentről félig folytonos (f_p.f.f.)[21], *ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz $\exists$ olyan $\mathcal{U}(s^\circ)$ környezet, hogy az $s \in \mathcal{U}(s^\circ)$ tartalmazásból a $\varphi(s) \leqq \varphi(s^\circ) + \varepsilon$ reláció következik. A φ függvény* f_p.f.f., *ha értelmezési tartományának minden pontjában az.*

[21] A p alsó index a pont–pont leképezésre utal.

A következő két, könnyen igazolható állítás a *f.f.f.* pont–halmaz leképezésekre vonatkozik.

3.C.5. Állítás. *Legyen* $\Phi : S \rightrightarrows T_1$ *és* $\Psi : S \rightrightarrows T_2$ *két* f.f.f. *pont–halmaz leképezés, valamint legyen* T_1 *és* T_2 *korlátos. Ekkor a*

$$\begin{aligned}(\Phi \times \Psi)(s) &= \Phi(s) \times \Psi(s),\\ (\Phi + \Psi)(s) &= \Phi(s) + \Psi(s)\end{aligned}$$

szorzat-, illetve összegleképezések is f.f.f.*-ak.*

Bizonyítás. Triviális, a definíciók közvetlen folyománya. □

A következő fogalom és állítás annyira fontos, hogy külön megadjuk a pont–pont leképezésekre vonatkozó alakját is.[22]

3.C.6. Definíció. *Legyen* $f : S \to S$ *egy pont–pont leképezés (függvény). Az* $s^* \in S$ *pontot az* f *leképezés fixpontjának mondjuk, ha* $f(s^*) = s^*$.

3.C.7. Tétel (Brouwer). *Legyen* $S \subset \mathbb{R}^N$ *nemüres, zárt, korlátos, konvex részhalmaza és* $f : S \to S$ *függvény folytonos. Ekkor az* f *függvénynek létezik fixpontja, azaz* $\exists\, s^* \in S$*, amire* $f(s^*) = s^*$.

3.C.8. Definíció. *Legyen* $\Phi : S \rightrightarrows S$ *egy pont–halmaz leképezés. Az* $s^* \in S$ *pontot az* Φ *leképezés fixpontjának mondjuk, ha* $s^* \in \Phi(s^*)$.

A következő tétel, ami *Brouwer* állításának általánosítása pont–halmaz leképezésekre, döntő szerepet játszott az általános egyensúlyelméleti (és játékelméleti) bizonyításokban.[23]

3.C.9. Tétel (Kakutani). *Legyen* $S \subset \mathbb{R}^N$ *nemüres, zárt, korlátos és konvex, valamint legyen* $\Phi : S \rightrightarrows S$ *egy* f.f.f.*, konvexértékű pont–halmaz leképezés. Ekkor* Φ*-nek létezik fixpontja, azaz* $\exists\, s^* \in S$*, amire* $s^* \in \Phi(s^*)$.

A következő tételt is többször használjuk majd a későbbiek során, jelentősége ennek is alapvető.[24]

[22] Ezt az állítást e helyütt nem bizonyítjuk.

[23] *Kakutani* (1941).

[24] *Berge* (1963).

3.C.10. Tétel (Berge). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^N$, valamint $T \subset \mathbb{R}^N$ korlátos, valamint $\Phi : S \rightrightarrows T$ folytonos. Legyen $f : S \times T \to \mathbb{R}$ folytonos valós függvény. Definiáljuk a $\mu : S \rightrightarrows T$ pont–halmaz leképezést a*

$$\mu(s) = \left\{ t \in \Phi(s) \middle| f(s,t) = \max_{v \in \Phi(s)} f(s,v) \right\},$$

valamint a $\phi : S \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$\phi(s) = \max_{t \in \Phi(s)} f(s,t)$$

szabállyal. Ekkor a μ pont–halmaz leképezés felülről félig folytonos, a ϕ függvény folytonos.

Bizonyítás. Tekintsünk egy az $s^\circ \in S$ ponthoz konvergáló $s^q \in S$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatot, valamint egy, a $t^\circ \in T$ ponthoz konvergáló $t^q \in T$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozatot, amelyekre $\forall q$-ra $t^q \in \mu(s^q)$. Miután $\forall q$-ra $t^q \in \Phi(s^q)$ és Φ *f.f.f.*, ezért $t^\circ \in \Phi(s^\circ)$. A másik oldalról vegyünk egy tetszőleges, $v \in \Phi(s^\circ)$ pontot. Miután Φ *a.f.f.*, ezért létezik olyan a v ponthoz tartó $v^q \in T$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozat, amire $\forall q$-ra $v^q \in \Phi(s^q)$. Így minden q-ra

$$f(s^q, t^q) \geqq f(s^q, v^q).$$

Határértéket véve:

$$f(s^\circ, t^\circ) \geqq f(s^\circ, v).$$

Miután $v \in \Phi(s^\circ)$ tetszőleges volt, ezért ebből az egyenlőtlenségből a μ pont–halmaz leképezés *f.f.f.* volta következik, hiszen nyilván $t^\circ \in \mu(s^\circ)$.

A ϕ függvény folytonosságához azt kell belátnunk, hogy ϕ egyszerre *l.f.f.* és $f_p.f.f.$

(i) Tegyük fel, hogy $s^\circ \in S$ és $t^\circ \in \Phi(s^\circ)$, amelyekre

$$f(s^\circ, t^\circ) \geqq \phi(s^\circ) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Ilyen pontok az f függvény folytonossága miatt nyilván léteznek.) Ugyancsak az f függvény folytonossága miatt létezik az s°, illetve a t° pontnak rendre olyan $\mathcal{U}(s^\circ)$, illetve $\mathcal{V}(t^\circ)$ környezete, hogy az

$$(s,t) \in \mathcal{U}(s^\circ) \times \mathcal{V}(t^\circ)$$

tartalmazásból az

$$f(s,t) \geqq f(s^\circ,t^\circ) - \frac{\varepsilon}{2} \geqq \phi(s^\circ) - \varepsilon \qquad (3.C\text{–}1)$$

egyenlőtlenségláncolat következik. De miután $s^\circ \in S$, és Φ folytonos (itt elég az *a.f.f.-ság*), ezért minden, az s° ponthoz konvergáló $s^q \in \mathcal{U}(s^\circ)$, $q = 1, 2, \ldots$ sorozathoz létezik olyan, a t° ponthoz konvergáló $t^q \in \mathcal{V}(t^\circ), q = 1, 2, \ldots$ sorozat, amire $t^q \in \Phi(s^q)$. Ezek értelmében, a (3.C–1) egyenlőtlenséggel kapjuk a

$$\phi(s^q) \geqq f(s^q,t^q) \geqq f(s^\circ,t^\circ) - \frac{\varepsilon}{2} \geqq \phi(s^\circ) - \varepsilon$$

relációt, hiszen az f függvény folytonos, azaz a ϕ fügvény *l.f.f.*

(ii) Tegyük fel, $s^\circ \in S$, ekkor minden $t \in \Phi(s^\circ)$ ponthoz létezik olyan $\mathcal{U}_t(s^\circ)$ és $\mathcal{V}(t)$ környezet, hogy az $(s,v) \in \mathcal{U}_t(s^\circ) \times \mathcal{V}(t)$ tartalmazásból, az f függvény folytonossága miatt

$$f(s,v) \leqq f(s^\circ,t) + \varepsilon.$$

A Φ pont–halmaz leképezés *f.f.f.*, ezért $\Phi(s^\circ)$ zárt és – T korlátos lévén – kompakt. Emiatt t pontjainak $\mathcal{V}(t)$ környezeteiből kiválasztható véges sok olyan $\mathcal{V}(t_1), \mathcal{V}(t_2), \ldots, \mathcal{V}(t_K)$ környezet, ami lefedi. Legyen

$$\mathcal{U}'(s^\circ) = \bigcap_{k=1}^{K} \mathcal{U}_{t_k}(s^\circ) \quad \textit{és} \quad \mathcal{V}(\Phi(s^\circ)) = \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{V}(t_k).$$

Ekkor tetszőleges $(s,t) \in \mathcal{U}'(s^\circ) \times \mathcal{V}(\Phi(s^\circ))$ párra

$$f(s,t) \leqq \max_k f(s^\circ,t_k) + \varepsilon \leqq \phi(s^\circ) + \varepsilon,$$

hiszen az f függvény folytonos. A Φ pont–halmaz leképezés *f.f.f.*, így létezik egy olyan $\mathcal{U}''(s^\circ)$ környezet, amelynek minden s pontjára $\Phi(s) \subset \mathcal{V}(\Phi(s^\circ))$.[25] Ebből az

$$\mathcal{U}(s^\circ) = \mathcal{U}'(s^\circ) \cap \mathcal{U}''(s^\circ)$$

[25] Ez indirekt módon könnyen belátható.

egyenlőséggel definiált környezetre az $s \in \mathcal{U}(s^\circ)$ tartalmazásból következik, hogy

$$\phi(s) = \max_{t \in \Phi(s)} f(s,t) \leqq \phi(s^\circ) + \varepsilon,$$

azaz a ϕ függvény $f_p.f.f.$ □

3.C.2. A gazdaságbeli döntési szabályok jellemzői

Az előző pontban tárgyalt fogalmak és tételek hathatós segítséget nyújtanak nekünk a gazdaságbeli döntési szabályok mint pont–halmaz leképezések jellemzésében. A most bemutatandó tulajdonságokat használjuk majd az egyensúly létezésének közvetlen bizonyításában. Először a termelők döntési szabályát, majd – két lépésben – a fogyasztókét vizsgáljuk.

3.C.11. Segédtétel. *Az $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ szűkített gazdaságban*

$$j = 1, 2, \ldots, J\text{-re az } Y_j(p) : P^N \rightrightarrows Y_j$$

pont–halmaz leképezés f.f.f., *a képhalmazok nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazok, valamint a $\pi_j(p) : P^N \to \mathbb{R}$ függvény folytonos.*

Bizonyítás. A megfelelő helyettesítések elvégzése után a *Berge-tétel* közvetlen alkalmazásával, valamint a lineáris függvény szinthalmazainak konvexitásából kapjuk az állítás igazságát. A helyettesítések:

$$\begin{array}{lcl} S & \triangleq & P^N; \\ T & \triangleq & Y_j; \\ \Phi & \triangleq & \Phi(p) = Y_j, \quad \forall p \in P^N; \\ \mu & \triangleq & \mu(p) = Y_j(p), \quad \forall p \in P^N; \\ \phi & \triangleq & \phi(p) = \pi_j(p), \quad \forall p \in P^N. \end{array}$$

□

3.C.12. Segédtétel. *Az $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ szűkített gazdaságban*

$$i = 1, 2, \ldots, I\text{-re a } B_i(p) : P^N \rightrightarrows X_i$$

pont–halmaz leképezés folytonos.

Bizonyítás. A segédtétel kimondásakor azt tartottuk szem előtt, hogy az közvetlenül megfeleljen az eddigiekben használt költségvetési halmaz fogalmának. Ugyanakkor később egy ennél általánosabb formára lesz szükségünk, és erre vonatkoztatjuk a bizonyítást. A segédtétel bizonyítása – legalábbis formailag – egyszerűbb.
Tegyük fel, hogy az $(y_1, y_2, \ldots, y_J)$ termelési tevékenységegyüttes a termelők p árrendszer melleti optimális döntéseit tartalmazza, azaz

$$j = 1, 2, \ldots, J\text{-re } y_j \in Y_j(p).$$

A fogyasztók $\hat{M}_i : P^N \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ jövedelmét $i = 1, 2, \ldots, I$-re az eddigieknél általánosabban fogalmazzuk meg.

$$\hat{M}_i(p, y_1, y_2, \ldots, y_J) = p\omega_i + K_i\left(p, y_1, y_2, \ldots, y_J\right),$$

ahol $K_i\left(p, y_1, y_2, \ldots, y_J\right) \geqq 0$ folytonos függvények. Ez a jövedelemfogalom nyilván általánosabb, mint az eddig használt, hiszen ha $y_j \in Y_j(p)$, akkor a *tétlenség lehetségessége* feltétel miatt a folytonos (lásd 3.C.11. Segédtétel) $\pi_j(p)$ profitfüggvény értéke nyilván nemnegatív. Definiáljuk a következő pont–halmaz leképezéseket $i = 1, 2, \ldots, I$-re: $\hat{B}_i : P^N \times \mathcal{Y} \rightrightarrows X_i$,

$$\hat{B}_i\left(p, y_1, y_2, \ldots, y_J\right) = \left\{ x_i \in X_i \,\middle|\, px_i \leqq \hat{M}_i\left(p, y_1, y_2, \ldots, y_J\right) \right\}.$$

Először belátjuk, hogy $\hat{B}_i\left(p, y_1, y_2, \ldots, y_J\right)$ *f.f.f.* Vegyünk tehát egy, a $(p^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_J^\circ)$ ponthoz konvergáló $(p^q, y_1^q, y_2^q, \ldots, y_J^q)\,, q = 1, 2, \ldots$ sorozatot, valamint egy másik, az x_i° ponthoz konvergáló olyan $x_i^q, q = 1, 2, \ldots$ sorozatot, amelyre $\forall q$-ra $x_i^q \in \hat{B}_i\left(p^q, y_1^q, y_2^q, \ldots, y_J^q\right)$. Tudjuk, az X_i halmaz zárt, az $\hat{M}_i$ függvény folytonos, valamint $\forall q$-ra

$$x_i^q \in X_i \quad \text{és} \quad p^q x_i^q \leqq \hat{M}_i\left(p^q, y_1^q, y_2^q, \ldots, y_J^q\right),$$

ezért

$$p^\circ x_i^\circ \leqq \hat{M}_i\left(p^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_J^\circ\right),$$

azaz $x_i^\circ \in \hat{B}_i\left(p^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_J^\circ\right)$.
Az *a.f.f.-ság* bizonyítása nehezebb, nem olyan magától értetődő. Vegyünk egy, a $(p^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_J^\circ)$ ponthoz konvergáló

$$(p^q, y_1^q, y_2^q, \ldots, y_J^q)\,, q = 1, 2, \ldots$$

sorozatot és legyen $x_i^\circ \in \hat{B}_i\left(p^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_J^\circ\right)$. Két eset lehetséges:

(i) $p^\circ x_i^\circ < \hat{M}_i\,(p^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_J^\circ)\,.$
Ekkor az $\hat{M}_i$ függvény folytonossága miatt, elég nagy q-ra

$$p^q x_i^\circ < \hat{M}_i\,(p^q, y_1^q, y_2^q, \ldots, y_J^q)\,.$$

Ez esetben a $q = 1, 2, \ldots$ $x_i^q \triangleq x_i^\circ$ kapjuk az *a.f.f.-ság* definíciója által megkívánt sorozatot.

(ii) $p^\circ x_i^\circ = \hat{M}_i\,(p^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_J^\circ)\,.$
A *szigorú önellátás* feltétele értelmében létezik olyan $b_i \in X_i$, amire

$$pb_i < p\omega_i + K_i\,(p, y_1, y_2, \ldots, y_J)\,.$$

Definiáljuk x_i^λ-t a következő módon: $x_i^\lambda = \lambda x_i^\circ + (1-\lambda)b_i$. Az x_i^λ pont $\forall\lambda \in [0,1]$ esetén nyilván az X_i halmaz eleme a fogyasztási halmaz feltételezett konvexitása miatt. Tekintsük a következő hányadost:

$$\beta_i^q = \frac{\hat{M}_i\,(p^q, y_1^q, y_2^q, \ldots, y_J^q) - p^q b_i}{p^q x_i^\circ - p^q b_i}.$$

Ha $\lambda^q \in [0, \beta_i^q]\,$, akkor nyilván

$$p^q x_i^{\lambda^q} = p^q\,(\lambda^q x_i^\circ + (1-\lambda^q)b_i) \leqq \hat{M}_i\,(p^q, y_1^q, y_2^q, \ldots, y_J^q)\,.$$

Legyen most $\lambda^q = \min\{1, \beta_i^q\}\,, q = 1, 2, \ldots$. Határértékben

$$\lim_{q\to\infty} \lambda^q = 1, \quad \text{amiből} \quad \lim_{q\to\infty} x_i^{\lambda^q} = x_i^\circ.$$

Az így nyert $x_i^{\lambda^q}, q = 1, 2, \ldots$ sorozat kielégíti az *a.f.f.-ság* definiciója által megkövetelt tulajdonságokat.
A segédtételben kimondott alak bizonyítása teljesen hasonló, csak a $B_i(p)$ halmazok eredeti definícióját kell használni és figyelembe venni, hogy a 3.C.12. Segédtétel értelmében a profit- és így az eredeti jövedelemfüggvények is folytonosak. □

3.C.13. Segédtétel. *Az $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ szűkített gazdaságban*

$$i = 1, 2, \ldots, I\text{-re az } X_i(p) : P^N \rightrightarrows B_i(p)$$

pont–halmaz leképezés f.f.f., *az $X_i(p)$ képhalmazok nemüres, zárt, korlátos és konvex halmazok.*

BIZONYÍTÁS. A megfelelő helyettesítések elvégzése után a 3.C.12. Segédtételből, a *Berge-tétel* közvetlen alkalmazásából, valamint az U_i hasznossági függvények félig szigorú kvázikonkavitásából kapjuk az állítás igazságát. A helyettesítések:

$$\begin{array}{lcl} S & \triangleq & P^N; \\ T & \triangleq & X_i; \\ \Phi & \triangleq & \Phi(p) = B_i\left(p\right), \quad \forall p \in P^N; \\ \mu & \triangleq & \mu(p) = X_i(p), \quad \forall p \in P^N. \end{array}$$

□

3.D. A láthatatlan kéz és a túlkereslet

Ebben az alfejezetben két bizonyítást adunk az eddig tárgyalt $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ gazdaságbeli egyensúly létezésére.[26] Az első egyben az *Adam Smith* által megfogalmazott *láthatalan kéz* fogalmat is formalizálja, és játékelméleti eszközöket használ. Ezt nevezhetjük a klasszikus bizonyításnak[27], a második a túlkereslet fogalmával és annak az árrendszerre gyakorolt hatásával operál.

3.D.1. Munkában a piac szelleme

A versenyzői egyensúly eddig vizsgált modelljében adott gazdasági környezetben – adott árrendszer mellett – minden gazdasági szereplő a számára szóba jöhető lehetőségek közül a saját szempontjából optimálisat választja. A szereplők cselekedetei egyrészt közvetlenül beszűkítik egymás mozgásterét (eleszik egymás elől a diós beiglit), másrészt közvetetten, az árakon keresztül, befolyásolják egymás lehetőségeit (drágul a dióbél). A *láthatatlan kéz* biztosítja, hogy ez a szigorúan csak az önérdeket követő, szűk látókörű, ha úgy tetszik, rövidlátó gondolkodásmód nem káoszhoz, hanem egy konzisztens állapothoz, egyensúlyhoz, sőt hatékony egyensúlyhoz vezet. A hatékonysággal a következő fejezetben foglalkozunk, most az állítás első részét látjuk be.

[26] Ugye, nem felejtettük el, hogy ez egyben az eredeti $e \in E_{A-D}$ gazdaság versenyzői egyensúlyának egzisztenciabizonyítását is jelenti? Ugyancsak e helyütt emlékeztetünk arra, hogy az eredeti gazdaság szimbólumait használjuk a szűkítettre is.

[27] Ez a bizonyítás szerepel az úttörő *Arrow–Debreu* (1954) cikkben.

A probléma a nemkooperatív játékelmélet egy korai, tipikus problémája, a bizonyítás is ilyen matematikai eszközöket használ. Először definiálunk egy játékot, ennek egyensúlypontját, majd kimondunk egy egzisztenciatételt. Végül belátjuk, hogy e játék egyensúlypontja megadja a gazdaság versenyzői egyensúlyi állapotát is.

A továbbiakban egy K személyes Γ játékon a következőket értjük. Minden $k = 1, 2, \ldots, K$ játékos rendelkezik egy $\mathrm{S}_k \subseteq \mathbb{R}^{N_k}$ *stratégiahalmazzal*, ami lehetséges cselekvési terveit tartalmazza. Legyen $S = \times_{k=1}^{K} S_k$, és jelöljük ennek egy, tetszőleges elemét, egy *stratégiaegyüttest*, az $s \in S$ szimbólummal. Ha egy játékos választ egy stratégiát, akkor ez befolyásolja a többiek által választható stratégiákat. Definiáljuk egy játékos *környezetfüggvényét* a következőképpen. Ha minden játékos választ egy $s_k \in S_k$ stratégiát, akkor k csak az S_k stratégiahalmazának egy részéből választhat. Ezt a számára adott lehetőséghalmazt a $\Phi_k : S \rightrightarrows S_k$ pont–halmaz leképezés, a környzetfüggvény jelöli ki.[28] Ha az $s \in S$ stratégiaegyüttes valósul meg, akkor ennek eredményeképpen kialakuló állapot a játékosok számára $\phi_k(s), k = 1, 2, \ldots, K$ *kifizetést* biztosít, ahol $\phi_k(s) : S \to \mathbb{R}$.

3.D.1. Definíció. *Egy K személyes Γ játék a*

$$\Gamma = \{K; S_1, S_2, \ldots, S_K; \Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_K; \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_K\}$$

együttes.

Alkalmazzuk a következő egyszerűsítő jelölést: legyen s_{-k} az a $k-1$ szereplőre vonatkozó stratégiaegyüttes, amelyben a k-adik játékos stratégiája nem szerepel. A következő fogalom a játékelmélet legfontosabb fogalma.[29]

3.D.2. Definíció. *Egy $s^* \in S$ stratégiegyüttes a Γ játék* Nash-egyensúlypont*ja, ha $k = 1, 2, \ldots, K$-ra*

(i) $s_k^* \in \Phi_k(s^*)$;

(ii) $\phi_k(s^*) \geqq \phi(s_k, s_{-k}^*)$, $\forall s_k \in \Phi_k(s^*)$.

[28] A szó szoros értelmében k lehetséges stratégiái nyilván csak a többi játékos által választott stratégiáktól függnek, de az általunk adott meghatározás matematikai szempontból ugyanaz, és egyszerűbben kezelhető.

[29] *Nash* (1950).

A következő tétel *Gerard Debreu* nevéhez fűződik, ő a társadalmi rendszerekre vonatkozó alapvető tételnek nevezi.[30] Mi csupán a fenti játékra vonatkoztatjuk.

3.D.3. Tétel (Debreu). *Ha a* Γ *játékban* $k = 1, 2, \ldots, K$*-ra*
(i) S_k *nemüres, zárt, korlátos, konvex;*
(ii) Φ_k *folytonos és konvex értékű;*
(iii) ϕ_k *folytonos és a* k*-adik komponensében kvázikonkáv,*
akkor a Γ *játéknak létezik* Nash-egyensúlypontja.

BIZONYÍTÁS. Definiáljuk $k = 1, 2, \ldots, K$-ra a következő $\mu_k(s) : S \rightrightarrows S_k$ pont–halmaz leképezéseket:

$$\mu_k(s) = \left\{ s_k \in \Phi_k(s) \,\middle|\, \phi_k(s_k, s_{-k}) = \max_{t \in \Phi_k(s)} \phi_k(t, s_{-k}) \right\}.$$

Miután S_k nemüres és kompakt, valamint ϕ_k és Φ_k folytonos, ezért a $\mu_k(s)$ halmaz nem üres. Nyilván konvex is, mert két konvex halmaz metszete, hiszen $\Phi(s)$ definícióból következően az, és a ϕ_k függvény a k-adik komponensében kvázikonkáv, ezért maximumhelyeinek halmaza konvex. Legyen most a $\mu : S \rightrightarrows S$ pont–halmaz leképezés a $\mu(s) = \times_{k=1}^{K} \mu_k(s)$ szabállyal adott. A *Berge-tételből* következik, hogy a $\mu_k, k = 1, 2, \ldots, K$ pont–halmaz leképezések *f.f.f.-ak*, így a 3.C.5. Állításból μ is az. E szerint kielégíti a *Kakutani-tétel* feltételeit, ezért létezik fixpontja: $s^* \in \mu(s^*)$. Más szóval létezik olyan

$$(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_K^*) \in S$$

stratégiaegyüttes, amire $k = 1, 2, \ldots, K$-ra

$$s_k^* \in \mu_k(s_k^*).$$

A *Nash-egyensúly* definíciójából látható, hogy pont ezt kellett bizonyítanunk. □

Térjünk most vissza a vizsgálandó $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ gazdaságunkhoz, és definiáljuk a következő játékot!

$$\Gamma_e = \left\{ \begin{array}{c} I + J + 1; X_1, X_2, \ldots, X_I, Y_1, Y_2, \ldots, Y_J, P^N; \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \ldots, \tilde{B}_I, \\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_J, P^N; \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \ldots, \tilde{U}_I, V_1, V_2, \ldots, V_J, W \end{array} \right\},$$

[30] *Debreu* (1952).

ahol az eddig ismeretlen szimbólumok jelentése $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$\tilde{U}_i : \left(\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times P^N\right) \to \mathbb{R}, \quad \tilde{U}_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_I, y_1, y_2, \ldots, y_J, p\right) = U_i(x_i),$$

és

$$\tilde{B}_i : \left(\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times P^N\right) \to X_i,$$

$$\tilde{B}_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_I, y_1, y_2, \ldots, y_J, p\right) = \hat{B}_i\left(p, y_1, y_2, \ldots, y_J\right) =$$

$$= \left\{ x_i \in X_i \,\middle|\, px_i \leqq \hat{M}\left(p, y_1, y_2, \ldots, y_J\right) \equiv p\omega_i + \max\left(0, \sum_{j=1}^{J} \alpha_{ij} p y_j\right) \right\},$$

valamint $j = 1, 2, \ldots, J$-re

$$V_j : \left(\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times P^N\right) \to \mathbb{R}, \quad V_j\left(x_1, x_2, \ldots, x_I, y_1, y_2, \ldots, y_J, p\right) = py_j,$$

végül

$$W : \left(\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times P^N\right) \to \mathbb{R}, \quad W\left(x_1, x_2, \ldots, x_I, y_1, y_2, \ldots, y_J, p\right) = pz,$$

ahol természetesen

$$z = \sum_{i=1}^{I} x_i - \sum_{j=1}^{J} y_j - \sum_{i=1}^{I} \omega_i.$$

3.D.4. Megjegyzés. *Két rövid megjegyzés kívánkozik ide. Az első: a* $I + J + 1$*-edik játékos a piac szelleme. Az ő „láthatatlan keze” vezérli a gazdaságot azáltal, hogy drágítja a túlkeresletet. A másik: figyeljük meg a fogyasztó környezetfüggvényének bonyolult definícióját. Erre azért volt szükség, hogy az általa megjátszható (a többiek által meg nem gátolt) stratégiák halmaza soha ne legyen üres. Érdemes megmutatni, hogy egyensúlyi állapotban a* $\tilde{B}_i$ *környezetfüggvény képe megegyezik a* B_i *költségvetési halmazzal.*

3.D.5. Tétel (Arrow–Debreu). *Az előzőekben definiált* Γ_e *játéknak létezik* Nash-egyensúlypontja, *és ez az* $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ *gazdaság – és így az eredeti* $e \in E_{A-D}$ *gazdaság – egyensúlyi állapotát is szolgáltatja.*

Bizonyítás. A *Debreu-tétel* feltételei nyilvánvalóan teljesülnek az e gazdaságra tett feltevések miatt. Ezért a Γ játéknak létezik egy

$$s^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_J^*, p^*\right)$$

egyensúlypontja. Erre

(i) $j = 1, 2, \ldots, J$-re $p^* y_j^* = \max \{p^* y \,| y \in Y_j\}$, azaz $y_j^* \in Y_j(p^*)$;

(ii) $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$U_i(x_i^*) = \max \left\{ U_i(x_i) \middle| x \in \hat{B}_i(p^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_J^*) \right\},$$

de miután $y_j^* \in Y_j(p^*)$, ezért

$$\hat{M}_i(p^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_J^*) = M_i(p^*),$$

azaz $x_i^* \in X_i(p^*)$;

(iii) miután $x_i^* \in X_i(p^*)$, $i = 1, 2, \ldots, I$-re, ezért szükségképpen $p^* z^* \leqq 0$. Az is triviális, hogy az $\mathbb{R}^N$-beli egységvektorok elemei a P^N ár-szimplexnek. A szűkített gazdaságra vonatkozó *Walras–törvény* (3.B.5. Állítás, (xi) pont) és e tartalmazás miatt

$$z_n^* = (0, \ldots, 0_{n-1}, 1, 0_{n+1}, \ldots 0_N)\, z^* \leqq p^* z^* \leqq 0,$$

azaz $z^* \leqq 0$, vagyis a naturális egyensúly fennáll;

(iv) miután $z^* \leqq 0$, ezért ugyancsak a 3.B.5. Állítás utolsó pontja miatt $p^* z^* = 0$, azaz fennáll a szigorú értékegyensúly. □

3.D.2. Munkában a túlkereslet

A gazdaság egyensúlya, mint azt az előző pontban láttuk, a gazdasági szereplők szándékainak, cselekedeteinek egyensúlya. Ugyanakkor a gazdaság egyensúlya egyben az összes piac kitisztulását – szokásos szóhasználattal a jószágokra vonatkozó *kereslet–kínálat egyensúly*át – is jelenti. Ebben az értelmezésben nem csupán arról van szó, hogy egy egyénnek sem áll érdekében más stratégiát megjátszani, hanem arról is, hogy a gazdaság olyan állapotba kerül, amiben a jószágok iránti túlkereslet nem pozitív.

Az előző fejezetben definiáltuk az $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságra vonatkozó

$$Z(p) : P^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N, \quad Z(p) = \sum_{i=1}^{I} X_i(p) - \sum_{j=1}^{J} Y_j(p) - \omega$$

*túlkereslet-leképezés*t. Vonatkoztassuk ezt most az $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ gazdaságra! Rögtön felmerül a kérdés, vajon milyen tulajdonságokkal rendelkezik ez a leképezés?

3.D.6. Állítás. *Az $e_{sz} \in \mathcal{E}^w$ gazdaság*

$$Z(p) : P^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N, \quad Z(p) = \sum_{i=1}^{I} X_i(p) - \sum_{j=1}^{J} Y_j(p) - \omega$$

túlkereslet-leképezése f.f.f., *valamint $\forall p \in P^N$-re a $Z(p)$ halmazok nemüres, zárt, korlátos, konvex halmazok. Ugyanakkor teljesül a (módosított)* Walras-*törvény: $\forall p \in P^N$-re $pZ(p) \leqq 0$.*

Bizonyítás. A gazdaság döntési szabályait jellemző 3.C.11. és 3.C.13. Segédtételek, a *Walras-törvény*t leszámítva, ugyanezeket mondták ki az $X_i(p), i = 1, 2, \ldots, I$ és a $Y_j(p), j = 1, 2, \ldots, J$ halmazokra. A 3.C.5. Állításból a *f.f.f.-ság* következik, a többi magától értetődő. A *Walras--törvény* az 3.B.5. Állítás (xi) pontjából adódik. □

A 3.B.5. Állítás utolsó pontjából az is következik, hogy egy $z^* \in Z(p^*) \cap \mathbb{R}^N_-$ túlkeresletvektorra az

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_J^*, p^*)$$

állapot a gazdaság egyensúlyi állapota. A kérdésünk tehát az, létezik-e olyan $p^* \in P^N$ árvektor, amihez tartozó $Z(p^*)$ túlkeresletHalmaznak van nempozitív eleme. E kérdésre ad választ az úgynevezett *Alaptétel*, aminek mi most egy *Debreu* által adott – nem a legáltalánosabb – formáját vesszük át.[31]

3.D.7. Tétel (Alaptétel). *Legyen $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^N$ nemüres, zárt, korlátos, konvex, és legyen $Z(p) : P^N \rightrightarrows \mathcal{Z}$ olyan* f.f.f. *pont–halmaz leképezés, amelyre $\forall p \in P^N$-re $Z(p)$ konvex és $pZ(p) \leqq 0$! Ekkor létezik olyan $p^* \in P^N$, amelyre $Z(p^*) \cap \mathbb{R}^N_- \neq \{\emptyset\}$.*

Bizonyítás. Definiáljunk egy $\Psi : P^N \times \mathcal{Z} \rightrightarrows P^N \times \mathcal{Z}$ pont–halmaz leképezést a következő módon. A $(p, z) \in P^N \times \mathcal{Z}$ párhoz rendeljük hozzá a $P(z) \times Z(p)$ halmazt, ahol $Z(p)$ a tétel feltételei között szereplő pont–halmaz leképezés p-hez tartozó képhalmaza és

$$P(z) = \left\{ p \in P^N \,\middle|\, pz = \max_{q \in P^N} qz \right\}.$$

[31] *Debreu* (1959). Vesd össze a *Debreu* (1956) cikkben található állítással.

A $P(z)$ halmaz $\forall z$-re nyilván nemüres, konvex és a *Berge-tétel* értelmében a $P(z) : \mathcal{Z} \rightrightarrows P^N$ pont–halmaz leképezés *f.f.f.*. A Ψ leképezés tehát kielégíti a *Kakutani-tétel* feltételeit. Emiatt létezik olyan

$$(p^*, z^*) \in (P(z^*), Z(p^*)),$$

amire $p^* z^* \leqq 0$. Az is triviális, hogy az $\mathbb{R}^N$-beli egységvektorok elemei a P^N árszimplexnek, ezért

$$z_n^* = (0, \dots, 0_{n-1}, 1, 0_{n+1}, \dots 0_N)\, z^* \leqq p^* z^* \leqq 0,$$

azaz $z^* \leqq 0$. □

A piacon közvetlenül két jelenség figyelhető meg, az árrendszer és a túlkereslet az egyes jószágokból. Ez a két rendszer egymásra hatással van, egymást alakítják. Nem kívánjuk most vizsgálni ezt a kölcsönös alkalmazkodási folyamatot, csak arra mutatunk rá, hogy egyensúlyban megszűnik a rendszerek mozgása, a mozgásnak mint leképezésnek fixpontja az egyensúly. Ez arra utal, hogy a fixpont és az egyensúly igencsak összetartozó fogalmak. Vajon tényleg így van ez?

Az eddigiekben láttuk, hogy az egyensúly létezésének bizonyításakor a fixponttételek rendkívül hasznosnak bizonyulnak. Ezek a tételek azonban matematikai szempontból roppant mélyek és nehezek, kérdés, nem túl nagy apparátust mozgatunk-e. Nem lövünk-e ágyúval verébre? A válasz: nem. Két meggondolást kell tennünk. Egyrészt belátjuk, hogy az *Alaptétel* ekvivalens a *Kakutani-tétel*lel, azaz, ha feltesszük az *Alaptétel* igazságát, abból következik a *Kakutani-tétel*. Másrészt – és ezt nem látjuk be, mert a bizonyítás meghaladja e tárgyalás kereteit – megmutatható, hogy vannak olyan gazdaságok, amelyek túlkereslet-leképezése nem rendelkezik az *Alaptétel*ben megfogalmazott feltételek mellett pótlólagos, „jó” tulajdonságokkal, így az *Alaptétel* mindenképpen szükséges az egyensúly létezésének bizonyításához.

3.D.8. Tétel (Uzawa). *Az* Alaptétel*ből következik a* Kakutani-tétel.[32]

Bizonyítás. A tétel állítását elegendő egy $\Phi(p) : P^N \rightrightarrows P^N$ halmazértékű leképezésre megmutatni. Tegyük fel, hogy $\Phi(p)$ kielégíti a

[32] Az állítás eredeti formájában az *Uzawa* (1962) cikkben található. Ez csak pont–pont leképezésekre vonatkozik, az itt kimondott formáját a *Debreu* (1982) tanulmányból vettük.

Kakutani-tétel feltételeit! Legyen minden $p \in P^N$-re $H(p) \subset \mathbb{R}^N$ a $pH(p) = 0$ egyenlőséggel definiált, a p vektorra merőleges hipersík, valamint legyen $\Psi(p) \subset H(p)$ a $\Phi(p)$ halmaz merőleges vetülete erre a hipersíkra. Legyen $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N$ olyan zárt, korlátos, konvex halmaz, amire

$$\mathcal{H} \supset \bigcup_{p \in P^N} \Psi(p) .$$

A $\Psi(p) : P^N \rightrightarrows \mathcal{H}$ pont–halmaz leképezés nyilván kielégíti az *Alaptétel* feltételeit, ezért létezik

$$p^* \in P^N, \text{ amire } \Psi(p^*) \cap \mathbb{R}^N_- \neq \{\emptyset\} .$$

Legyen $t \in \Psi(p^*) \cap \mathbb{R}^N_-$ és $s \in P^N$ az a szimplexbeli pont, amelynek t a merőleges vetülete. (A vetítés iránya nyilván p^*-gal párhuzamos.) Miután $s-t$ párhuzamos p^*-gal, ezért $t(s-t) = 0$, hiszen $t \in H(p)$. Eszerint $t \cdot s = t \cdot t$. Tudjuk azonban, hogy $t \leqq 0$, $s \geqq 0$, így $t \cdot s = t \cdot t \leqq 0$, amiből $t = 0$ következik. Eszerint $0 \in \Psi(p^*)$, így $p^* \in \Phi(p^*)$, azaz a $\Phi(p) : P^N \rightrightarrows P^N$ halmazértékű leképezésnek van fixpontja. □

A gondolatmenet második kérdése az, hogy nem létezik-e a gazdaság túlkereslet-leképezésének az *Alaptétel*ben kimondott feltételek mellett olyan további tulajdonsága, ami lehetővé tenne egy elemi bizonyítást. Megmutatható, hogy nem.[33] Többször láttuk azt a tényt, hogy amennyiben a fogyasztók telhetetlenek és a megfelelő konvexitási feltételek fennállnak, akkor a fogyasztók teljesen elköltik a jövedelmüket, és igaz lesz a $\forall p \in P^N$-re $pZ(p) = 0$ *Walras-törvény.* Belátható – noha ez korántsem egyszerű –, hogy tetszőleges folytonos és a *Walras-törvény*t kielégítő f függvényhez található olyan N fogyasztó alkotta termelés nélküli gazdaság, amelynek túlkereslet-leképezése éppen az f függvény.[34] Ebből következően az egyensúly létezésének bizonyításához az *Alaptétel* – és így a *Kakutani-tétel* – szükséges eszköz. Intuíciónk bevált: az egyensúly és a fixpont egymástól elválaszthatatlan fogalmak.

[33] Lásd például a *Sonnenschein* (1973) cikket és a *Shafer–Sonnenschein* (1982) tanulmányt.

[34] Az állítás így nem precíz, P^N relatív belsejének (szigorúan pozitív árak) bármely kompakt $\mathcal{K}$ halmazán igaz az egyezőség. Komoly problémát ez a megkötés nem jelent, szigorúan monoton preferenciák mellett az árak mindenképpen pozitívak lesznek.

IV.

EGYENSÚLY ÉS HATÉKONYSÁG

4.A. Bevezetés

Összes eddigi erőfeszítésünk arra irányult, hogy belássuk: az $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságban létezik versenyzői egyensúly. Rögtön felmerül a kérdés: miért küszködtünk ennyit, miért fontos számunkra az egyensúly létezése? Önmagáért mint az árak és allokációk mozgásának végpontjáért kerestük, vagy van valami olyan „jó” tulajdonsága, ami számunkra a gazdaságot alkotó szereplők, a *társadalom* szempontjából lényeges? Legalább ilyen fontos az ellenkező irányú kérdés: ha adott egy ilyen „jó” tulajdonsággal rendelkező állapot, elérhető-e a versenyzői mechanizmus segítségével? Ebben a fejezetben ezekre a kérdésekre keressük a választ.

4.B. A Pareto-hatékonyság fogalma

4.B.1. Pareto-gazdaságok

A megvalósítható allokációk halmazának bevezetésekor utaltunk arra, hogy a megvalósíthatóság egyáltalán nem elosztási kategória. Azt viszont tudjuk, hogy a versenyzői egyensúly fogalma, a készleteken és a részesedéseken keresztül az. Ugyanakkor az egyensúly fogalma a megvalósíthatósághoz is kötődik. Vajon csupán a megvalósíthatóság az előbb említett „jó” tulajdonság? Nem, másra is gondolunk. E gondolatkör vizsgálatához bevezetjük a *Pareto-gazdaság* fogalmát[35], amelynek definiálásakor csak az eddigiektől való eltéréseket említjük. Amiről nem szólunk, az megegyezik a versenyzői, illetve az A–D gazdaságokra mondottakkal.

A Pareto-gazdaság csak abban különbözik az eddig megismert versenyzői gazdaságtól, hogy a fogyasztókat nem látjuk el készletekkel és részesedésekkel, azaz egyelőre menekülünk az elosztási kategóriáktól. Megadjuk viszont a gazdaságban rendelkezésre álló ω összkészlet nagyságát. Megtartjuk az árelfogadási posztulátumot is, de természetesen a fogyasztók döntési szabályán változtatnunk kell. Feltételezzük, hogy a fogyasztók költségvetési halmazát a következő $B_i^P : P^N \times R \rightrightarrows X_i$ pont–halmaz

[35] Ez az elnevezés nem közkeletű a közgazdasági szakirodalomban. Csak azért használjuk, hogy a bevezetendő fogalmakat kötni tudjuk egy ismert névhez – *Wilfredo Pareto*éhoz, aki az ebben a fejezetben tárgyalt kérdéskörrel először foglalkozott alaposabban –, és ezáltal könnyebben hivatkozhassunk rájuk.

leképezéssel definiáljuk:

$$B_i^p(p, w_i) = \{x_i \in X_i \,| px_i \leqq w_i\},$$

ahol $w_i, i = 1, 2, \ldots, I$-re a fogyasztó kívülről (akár egy Központi Jóléti Hatóságtól) kapott olyan egyösszegű jövedelemtranszfere, ami nem cselekedeteinek függvénye. Ezután a fogyasztó ebből a $B_i^p(p, w_i)$ halmazból választja ki a számára legjobbat az ismert módon. Az így kapott halmazokat az $X_i^p(p, w_i)$ szimbólummal jelöljük. Nem definiáljuk tehát pontosan, hogy az egyes fogyasztó jövedelme miből származik. A gazdaságra csak azt a kikötést tesszük, hogy $\forall p \in P^N$-re

$$\sum_{i=1}^{I} w_i \leqq p\omega + p \sum_{j=1}^{J} y_j.$$

Az elmondottaknak megfelelően változik az e_k gazdasági környezet mint lista. A Pareto-gazdaságok nem térnek el egymástól a gazdasági mechanizmus szerint, így a következő definíciót adhatjuk.

4.B.1. Definíció. *A* Pareto-gazdaság*ok halmazát az $\mathcal{E}^p$ szimbólummal jelöljük. Egy $e^p \in \mathcal{E}^p$ gazdaság a következő lista:*

$$e^p = \left\{N, I, J, (X_i)_{i=1}^I, (\succeq_i)_{i=1}^I, \omega, (Y_j)_{j=1}^J\right\}.$$

*A továbbiakban olyan Pareto-gazdaságokat vizsgálunk, amelyekre fennállnak a 2.D.1. és 2.D.3. Feltevések (ezek családját $\mathcal{E}_{A-D}^p$-vel jelöljük, annak ellenére, hogy az (*A-D*) gazdaságok harmadik feltételcsoportja e helyütt nem szerepel), így a fenti lista kicsit módosul:*

$$e_{A-D}^p = \left\{N, I, J, (X_i)_{i=1}^I, (U_i)_{i=1}^I, \omega, (Y_j)_{j=1}^J\right\}.$$

4.B.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy $\mathcal{E}_{A-D}^p \subset \mathcal{E}^p$, és, ha elvégezzük a $w_i = M_i(p), i = 1, 2, \ldots, I$ beazonosításokat, akkor nyilvánvaló, hogy*

$$\mathcal{E}^w \subset \mathcal{E}^p \quad \text{és} \quad \mathcal{E}_{A-D} \subset \mathcal{E}_{A-D}^p.$$

A Pareto-gazdaságokban az összes olyan fogalmat[36], amely nem kapcsolódott az elosztási és részesedési viszonyokhoz, változatlan formában definiáljuk, ezért nem is adjuk meg őket ismét. Elengedhetetlen viszont a versenyzői egyensúlyi állapotnak az ilyen gazdaságokra vonatkozó általánosítása.

[36] Allokáció, megvalósíthatóság stb.

4.B.3. Definíció. *Az (a^*, p^*) állapot az $e^p \in \mathcal{E}^p$ gazdaság* jövedelemtranszfer melletti egyensúlyi állapota, *ha léteznek olyan $w_i, i = 1, 2, \ldots, I$ jövedelemtranszferek, amelyekre*

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = p^*\omega + p^* \sum_{j=1}^{J} y_j^*,$$

valamint

(i) Profitmaximalizálás: $j = 1, 2, \ldots, J$-re $y_j^* \in Y_j(p^*)$;

(ii) Haszonmaximalizálás: $i = 1, 2, \ldots, I$-re $x_i^* \in X_i^p(p^*, w_i)$;

(iii) Naturális egyensúly: $a^* \in \mathcal{A}_{ok}$, azaz $\sum_{i=1}^{I} x_i^* \leqq \sum_{j=1}^{J} y_j^* + \omega$;

(iv) Szigorú értékegyensúly: $p^* \left(\sum_{i=1}^{I} x_i^* - \sum_{j=1}^{J} y_j^* - \omega\right) = 0$.

4.B.4. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy egy $e \in \mathcal{E}^w \subset \mathcal{E}^p$ gazdaság versenyzői egyensúlyi állapota egyben jövedelemtranszfer melletti egyensúlyi állapot is szükségképpen, hiszen a már említett $w_i = M_i(p^*)$ helyettesítésekkel $X_i^p(p^*, w_i) = X_i(p^*)$, és így a két definíció egybeesik. Fordítva természetesen ez nem igaz, nem minden jövedelemtranszfer melletti egyensúly versenyzői egyensúly is egyben. Eszerint a versenyzői egyensúly egy speciális jövedelemtranszfer melletti egyensúly.*

A későbbi felhasználás érdekében még egy definíciót kell megadnunk[37]:

4.B.5. Definíció. *Az (a^*, p^*) állapot az $e^p \in \mathcal{E}^p$ gazdaság* jövedelemtranszfer melletti kváziegyensúlyi állapota, *ha léteznek olyan*

$$w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, I$$

jövedelemtranszferek, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = p^*\omega + p^* \sum_{j=1}^{J} y_j^*,$$

valamint

[37] Lásd *Mas-Colell és mások* (1995) 16. fejezet.

(i) Profitmaximalizálás: $j = 1, 2, \dots, J$-re $y_j^* \in Y_j(p^*)$;

(ii) Jövedelemkonform kiadás: $i = 1, 2, \dots, I$-re, ha $x_i \in X_i$, és $x_i \succ_i x_i^*$, akkor $p^* x_i \geqq w_i$;

(iii) Naturális egyensúly: $a^* \in \mathcal{A}_{ok}$, azaz $\sum_{i=1}^I x_i^* \leqq \sum_{j=1}^J y_j^* + \omega$;

(iv) Szigorú értékegyensúly: $p^* \left(\sum_{i=1}^I x_i^* - \sum_{j=1}^J y_j^* - \omega \right) = 0$.

Vessük össze ezt a definíciót a jövedelemtranszfer melletti egyensúly definíciójával. Láthatjuk, hogy a kettő csak a fogyasztókra vonatkozó feltételben különbözik egymástól. Sőt, egyszerűen megállapíthatjuk a következőket.

4.B.6. Állítás. *Egy $e \in \mathcal{E}^p$ gazdaság (a^*, p^*) jövedelemtranszfer melletti egyensúlya mindig jövedelemtranszfer melletti kváziegyensúly is egyben. Továbbá, ha ebben a gazdaságban $i = 1, 2, \dots, I$-re a fogyasztó lokálisan telhetetlen*[38]*, akkor*

$$w_i = p^* x_i^*,$$

valamint a jövedelemkonform kiadás az

$$\breve{X}_i (x_i^*) = \{x_i \in X_i \,| x_i \succsim_i x_i^* \}$$

halmaz feletti kiadásminimalizálást jelenti, azaz $i = 1, 2, \dots, I$-re

$$x_i^* \in \arg\min \{p^* x_i \,| x_i \in X_i, \ x_i \succsim_i x_i^* \} .$$

Bizonyítás. Az állítás első része trivialitás. A jövedelemkonform kiadásból a lokálisan telhetetlen fogyasztó esetében következik , hogy

$$p^* x_i^* \geqq w_i. \tag{4.B–1}$$

Ha ugyanis $p^* x_i^* < w_i$ állna fönn, akkor x_i^*-hoz tetszőlegesen közel találhatnánk olyan $x_i'' \in X_i$ pontot, amire szintén $p^* x_i'' < w_i$ és $x_i'' \succ_i x_i^*$, és ez ellentmond (*ii*)-nek. Ugyanakkor a (4.B–1) egyenlőtlenségeket a fogyasztókra összegezve és összevetve a szigorú értékegyensúly feltételével, azt kapjuk, hogy minden i-re igaz a $p^* x_i^* = w_i$ egyenlőség. Tegyük

[38] Az i-edik fogyasztó lokálisan telhetetlen, ha $\forall x_i \in X_i$ pont tetszőlegesen kis $\varepsilon > 0$ sugarú nyílt környezetében létezik olyan $x_i' \in X_i$ pont, amire $x_i' \succ_i x_i$.

fel továbbá, hogy létezik olyan $x_i' \in \breve{X}_i\left(x_i^*\right)$, amire $p^*x_i' < p^*x_i^* = w_i$. Ez vagy ellentmondásban van a fogyasztó döntési szabályával, vagy $x_i' \sim_i x_i^*$. Ekkor azonban a lokális telhetetlenség feltételéből következik, hogy x_i' tetszőlegesen kicsi, nyílt környezetében létezik $x_i'' \in X_i$ pont, amire $x_i'' \succ_i x_i' \sim_i x_i^*$. Ezt kellően közel választva x_i'-höz kapjuk, hogy $p^*x_i'' < p^*x_i^* = w$, ami megint csak ellentmond a fogyasztó feltételezett viselkedésének. □

4.B.2. Hatékonyság és a haszonlehetőség-határ

A következő megismerendő fogalom a *Pareto*-hatékonyság fogalma. Ez elengedhetetlen jellemzője a „jó" talajdonságú állapotnak.

4.B.7. Definíció. *Egy $e \in \mathcal{E}^p$ gazdaságban az $a^\circ \in \mathcal{A}_{ok}$ megvalósítható allokáció* Pareto-hatékony *vagy* Pareto-optimális, *ha* nem *létezik olyan másik megvalósítható $a' \in \mathcal{A}_{ok}$ allokáció és i' fogyasztó, hogy*

$$x_i' \succcurlyeq_i x_i^\circ, \quad \forall i\text{-re} \quad \textit{és} \quad x_{i'}' \succ_{i'} x_{i'}^\circ.$$

Ha maradunk az A–D modell *keretei között, akkor egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}^p$ gazdaságban az $a^\circ \in \mathcal{A}_{ok}$ megvalósítható allokáció* Pareto-hatékony *vagy* Pareto-optimális, *ha* nem *létezik olyan másik megvalósítható $a' \in \mathcal{A}_{ok}$ allokáció és i' fogyasztó, hogy $i = 1, 2, \ldots, I$-re*

$$U_i(x_i') \geqq U_i(x_i^\circ),$$

valamint

$$U_{i'}(x_{i'}') > U_{i'}(x_{i'}^\circ).$$

4.B.8. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy* a Pareto-hatékonyság *csak a fogyasztókhoz kötődik. Noha tevékenységegyütteseken van értelmezve, de ebből az aspektusból csak a szereplők végső, fogyasztási értékítélete a döntő. Egy hatékony allokációban csak akkor javíthatunk valaki helyzetén, ha legalább egy másik fogyasztó helyzetén rontunk. Azt is vegyük észre, hogy a hatékonyság definíciójában semmilyen szerepet nem játszik a mechanizmus, csak a környezet. Ezt a megfigyelést használjuk ki később a következőkben. A hatékonyság fogalma nem kötődik az elosztási kérdésekhez sem. Ha egy allokációban minden jószág egy fogyasztónak jut, az allokáció még lehet hatékony.*

Vajon egy gazdaságban létezik-e egyáltalán *Pareto*-hatékony tevékenységegyüttes? Ha igen, hogyan jellemezhetnénk a *Pareto*-hatékony allokációk halmazát?

4.B.9. Definíció. *Egy olyan $e \in \mathcal{E}^p$ gazdaságban, amiben a fogyasztók preferenciái hasznossági függvényekkel reprezentálhatók, az*

$$\mathcal{U}_e = \left\{ (U_1, U_2, \ldots, U_I) \in \mathbb{R}^I \,|\, \exists\, a \in \mathcal{A}_{ok},\ \text{amire } U_i \leqq U_i(x_i)\ \forall i\text{-re} \right\}$$

halmazt a gazdaság haszonlehetőség-halmaz*ának hívjuk.*
E halmaz része a

$$\mathcal{U}_e^\circ = \left\{ \begin{array}{c} (U_1^\circ, U_2^\circ, \ldots, U_I^\circ) \in \mathcal{U}_e \,|\, \nexists\, (U_1', U_2', \ldots, U_I') \in \mathcal{U}_e \text{ és } i' \\ \text{hogy } \forall i\text{-re és } U_i' \geqq U_i^\circ \text{ és } U_{i'}' > U_{i'}^\circ \end{array} \right\}$$

szabállyal definiált haszonlehetőség-határ.

4.B.10. Állítás. *Egy $a^\circ \in \mathcal{A}_{ok}$ allokáció akkor és csak akkor* Pareto-*hatékony, ha a hozzá tartozó $U_{a^\circ} \in \mathcal{U}_e$ haszonlehetőség-vektor a haszonlehetőség-határ eleme, azaz igaz az $U_{a^\circ} \in \mathcal{U}_e^\circ$ tartalmazás.*

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt, és a definíciók közvetlen alkalmazása. Tegyük fel $U_{a^\circ} \notin \mathcal{U}_e^\circ$. Ekkor létezik olyan $a' \in A_{ok}$ allokáció és i' fogyasztó, hogy

$$(U_1', U_2', \ldots, U_I')_{a'} \geqq (U_1^\circ, U_2^\circ, \ldots, U_I^\circ)_{a^\circ}, i = 1, 2, \ldots, I\text{-re és } U_{i'}' > U_{i'}^\circ,$$

azaz a° nem *Pareto*-hatékony. Visszafelé ugyanígy járunk el. □

4.B.11. Állítás. *Egy $e \in \mathcal{E}^p_{A-D}$ gazdaságban, ahol $i = 1, 2, \ldots, I$-re léteznek olyan $\hat{x}_i \in X_i$ fogyasztási vektorok, hogy $\sum_{i=1}^I \hat{x}_i \leqq \omega$, az $\mathcal{U}_e$ haszonlehetőség-halmaz nemüres, zárt, felülről korlátos halmaz.*

Bizonyítás. A bizonyítás során kihasználjuk azt a tényt, hogy az $\mathcal{U}_e$ halmaz nem más, mint a megvalósítható allokációk halmaza folytonos képének és az $\mathbb{R}^I_-$ halmaznak az összege, azaz $\mathcal{U}_e = \mathcal{U}_{\mathcal{A}_{ok}} + \mathbb{R}^I_-$, ahol

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}_{ok}} = \left\{ (U_1(x_1), U_2(x_2), \ldots, U_I(x_I)) \in \mathbb{R}^I \,|\, a \in \mathcal{A}_{ok} \right\}$$

és x_i természetesen az a allokáció része. A gazdaság feltételei között szereplő *tétlenség lehetségessége* feltételből és az állításban szereplő egyenlőtlenségből nyilvánvaló a gazdaságbeli releváns döntési halmazok nemüressége. A 3.B.3. Segédtételből tudjuk, hogy a releváns döntési halmazok korlátosak is. Ebből következik, hogy $\mathcal{A}_{ok}$ is nemüres és korlátos.

Most az $\mathcal{A}_{ok}$ halmaz zártságát látjuk be. Tekintsük az

$$a^q = (x_1^q, x_2^q, \ldots, x_I^q, y_1^q, y_2^q, \ldots, y_J^q) \in \mathcal{A}_{ok}, \quad q = 1, 2, \ldots$$

sorozatot. Abból, hogy a^q megvalósítható, tudjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^q - \sum_{j=1}^{J} y_j^q \leqq \omega,$$

és feltettük, hogy a tevékenységi halmazok zártak. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{q\to\infty} x_i^q &= x_i^\circ \in X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, I, \\ \lim_{q\to\infty} y_j^q &= y_j^\circ \in Y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J \end{aligned}$$

és miután az összegképzés folytonos

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^\circ - \sum_{j=1}^{J} y_j^\circ \leqq \omega,$$

azaz $\mathcal{A}_{ok}$ tényleg zárt és így kompakt is egyben. Ebből következően a hasznossági függvények feltételezett folytonosságából kapjuk, hogy $\mathcal{U}_{\mathcal{A}_{ok}}$ egy kompakt halmaz folytonos képe, és így maga is kompakt. Innen az $\mathcal{U}_e$ halmaz zártsága és felülről korlátossága következik. □

4.B.12. Következmény. *Az* $e \in \mathcal{E}^p_{A-D}$ *gazdaságban létezik* Pareto-*hatékony allokáció.*

Bizonyítás. A 4.B.10. és 4.B.11. Állítások közvetlen következménye.□

4.C. Az alapvető jóléti tételek

Ebben az alfejezetben az egyensúly és a *Pareto*-hatékonyság fogalmak kapcsolatával foglalkozunk. A kimondandó két tétel – a jóléti gazdaságtan alaptételei[39] – a legfőbb elméleti érvek a versenyzői gazdaságok működtetése mellett. A piacgazdaság, a piac hatékonysága szlogen innen eredeztethető.

[39] Két klasszikus, az itt alkalmazott tárgyalásmóddal rokon hivatkozás *Arrow* (1951) és *Debreu* (1954). Ezekben nem szerepel a jövedelemtranszfer itt használt fogalma, de tartalmilag az állítások megegyeznek a miénkkel.

4.C.1. A jóléti gazdaságtan első alaptétele

Ebben a pontban a jóléti gazdaságtan első alaptételét mondjuk ki és látjuk be. Ez a tétel még teljesebbé teszi a smithi *láthatatlan kéz* formalizált elméletét, hiszen a piac és az egyensúly hatékonysága ebből a tételből fakad. A tétel nagyon általános körülmények között igaz, mi most egy $e \in \mathcal{E}^p_{A-D}$ gazdaságra vonatkoztatjuk, csak a tételt követő megjegyzésben adjuk meg az általánosabb feltételeket.

4.C.1. Tétel (Az első jóléti tétel). *Ha* (a^*, p^*) *egy* $e \in \mathcal{E}^p_{A-D}$ *gazdaság jövedelemtranszferek melletti egyensúlyi állapota, akkor* a^* *Pareto-hatékony.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a^* nem hatékony. Ekkor létezik egy olyan $a' \in \mathcal{A}_{ok}$ allokáció és i' fogyasztó, hogy $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$U_i(x'_i) \geqq U_i(x^*_i),$$

valamint

$$U_{i'}(x'_{i'}) > U_{i'}(x^*_{i'}).$$

Miután a fogyasztók az adott jövedelemtranszfer melletti, legnagyobb hasznosságú fogyasztási kosarakat választották, ezért $i = 1, 2, \ldots, I$-re $p^* x'_i \geqq w_i$ és i'-re $p^* x'_{i'} > w_{i'}$. Ha ezeket az egyenlőtlenségeket a fogyasztók szerint összegezzük, akkor

$$p^* \sum_{i=1}^{I} x'_i > \sum_{i=1}^{I} w_i = p^* \omega + p^* \sum_{j=1}^{J} y^*_j = p^* \sum_{i=1}^{I} x^*_i,$$

ahol az utolsó egyenlőség a jövedelemtranszfer melletti egyensúly definíciójának utolsó pontjából következik. Miután a' megvalósítható és $p^* \in P^N$, ezért

$$p^* \left(\sum_{i=1}^{I} x'_i - \sum_{j=1}^{J} y'_j - \omega \right) \leqq 0 = p^* \left(\sum_{i=1}^{I} x^*_i - \sum_{j=1}^{J} y^*_j - \omega \right).$$

Ezt összevetve az előző egyenlőtlenségsorozattal, azt kapjuk, hogy

$$p^* \sum_{j=1}^{J} y^*_j < p^* \sum_{j=1}^{J} y'_j,$$

ami ellentmond a profitmaximalizálási feltételnek. □

4.C.2. Megjegyzés. *A 4.B.4. Megjegyzésben láttuk, hogy egy $e \in \mathcal{E}^p_{A-D}$ gazdaságban a versenyzői egyensúly szükségképpen jövedelemtranszfer melletti egyensúly. Ezért ez a tétel azt is kimondja, hogy egy versenyzői egyensúly Pareto-hatékony is egyben. Így* a láthatatlan kéz *nemcsak egyensúlyba, hanem* hatékony *állapotba is vezeti a gazdaságot. Igaz, ez a tétel egyáltalán nem foglalkozik elosztási kérdésekkel, a hatékony egyensúlyi allokáció igencsak szélsőséges jövedelemkülönbségeket is eredményezhet.*

4.C.3. Megjegyzés. *A tétel sokkal általánosabb körülmények között is igaz, mint az* A–D *modell. Ha figyelmesen követjük a bizonyítást, akkor látjuk, egy $e \in \mathcal{E}^p$ gazdaságban csak a lokális telhetetlenség kell hozzá, nem pedig konvexitási és folytonossági feltételek.*

4.C.4. Megjegyzés. *Egy nagyon rövid észrevétel, később alapvető szerepe lesz. A tétel igazához* feltétlenül kell *a Pareto-gazdaságok környezete, azaz – többek között – az, hogy a fogyasztó preferenciái csak a saját fogyasztási halmaza fölött vannak értelmezve, valamint e gazdaságok mechanizmusa, az árelfogadás.*

4.C.2. A jóléti gazdaságtan második alaptétele

A második jóléti tétel a közgazdasági szempontból talán még mélyebb kérdéssel foglalkozik. Azzal, hogy ha adott egy $e \in \mathcal{E}^p_{A-D}$ gazdaságbeli a° hatékony allokáció, akkor ez megvalósítható-e versenyzői mechanizmussal? E kérdésre ad pozitív választ a tétel. Azt mondja ki, hogy e gazdaságban létezik olyan jövedelemtranszfer melletti kváziegyensúly, aminek része ez az a° allokáció, sőt a kváziegyensúly egy pótlólagos, nem túl szigorú feltétel teljesülése esetén jövedelemtranszfer melletti egyensúly is egyben. Maga a tétel, a konvex halmazok szeparációs tételének alkalmazása, újabb illusztrációt ad az árrendszer és az allokáció összefonódására, noha itt az árrendszer más matematikai szerepet tölt be, mint az eddigiekben.

4.C.5. Definíció. *Az $e \in \mathcal{E}^p_{A-D}$ gazdaságban*[40] *a $p \in P^N$ ár és w_i jövedelemtranszfer mellett az i-edik fogyasztóra teljesül az* erős létbiztonság *feltétele, ha létezik olyan $\hat{x}_i \in X_i$ fogyasztási vektor, hogy $p\hat{x}_i < w_i$.*

[40] Ne feledjük, erre a gazdaságra teljesülnek a 2.D.1. és a 2.D.5. Feltevések.

4.C.6. Tétel (A második jóléti tétel). *Legyen a° egy $e \in \mathcal{E}^p_{A-D}$ gazdaságbeli hatékony allokáció. Ekkor létezik egy olyan $p^\circ \in P^N$ árvektor, amire az (a°, p°) állapot jövedelemtranszfer melletti kváziegyensúlyi állapot. Továbbá, ha emellett a p° árvektor és a $w_i = p^\circ x_i^\circ$, $i = 1, 2, \ldots, I$ jövedelemtranszferek mellett minden fogyasztóra teljesül az erős létbiztonság feltétele, akkor (a°, p°) jövedelemtranszfer melletti egyensúlyi állapot is egyben.*

Bizonyítás. A jövedelemtranszfer melletti kváziegyensúly feltételeit kicsit kevert sorrendben igazoljuk.

(iii) Az a° hatékony tevékenység megvalósíthatóságából triviálisan következik a naturális egyensúly.

(iv) Definiáljuk a következő halmazokat. Legyen $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$G_i(x_i^\circ) = \{x_i \in X_i \,|U_i(x_i) > U_i(x_i^\circ)\}$$

és legyen

$$G(x^\circ) = \sum_{i=1}^{I} G_i(x_i^\circ).$$

A *globális telhetetlenség* feltétele miatt $G(x^\circ)$ nemüres, és azt is könnyű belátni, hogy konvex, hiszen konvex halmazok direkt összege. Hasonlóképpen az $\hat{Y} = Y + \{\omega\}$ aggregált kínálati halmaz is nemüres és konvex, valamint nyilvánvalóan zárt. A $G(x^\circ)$ és az $\hat{Y}$ halmazok metszete nyilván üres, különben a° nem lehetne *Pareto*-hatékony. Ezt a halmazok és a *Pareto*-hatékonyság definíciójából nyilvánvalóan kapjuk. Ennek értelmében a két halmaz szeparálható, azaz a konvex halmazok szeparációs tételének megfelelően létezik olyan $p^\circ \neq 0$ vektor és ρ skalár, amire

$$p^\circ x \geqq \rho, \quad \forall x \in G(x^\circ), \tag{4.C–1}$$

$$p^\circ \hat{y} \leqq \rho, \quad \forall \hat{y} \in \hat{Y}. \tag{4.C–2}$$

A kérdés az, hogy vajon ez a $p^\circ \neq 0$ vektor szolgálhat-e árvektorként, azaz eleme-e az árszimplexnek. Definiáljuk a

$$Z = G(x^\circ) - \hat{Y}$$

halmazt. Ha ennek lenne nempozitív eleme, akkor ez a fentiek alapján ellentmondana a *Pareto*-hatékonyságnak. A Z nyilván nemüres, konvex és a fentiek alapján szeparálható az $\mathbb{R}^N_-$ halmaztól, azaz létezik olyan $p' \neq 0$ vektor, hogy

$$\begin{aligned} p'z &\geqq 0, \quad \forall z \in Z, \\ p'v &\leqq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N_-. \end{aligned}$$

Ebből p' nyilván lehet eleme az árszimplexnek. Ugyanakkor, mivel $\forall z \in Z$-re $z = x - y - \omega$, $x \in G(x^\circ)$, $y + \omega \in \hat{Y}$, így a

$$p^\circ = p' \quad \text{és} \quad \rho = \max_{\hat{y} \in \hat{Y}} p^\circ \hat{y}$$

választás[41] megfelel az előző szeparáció feltételeinek is, azaz p° alkalmas árvektornak.
Tudjuk, az a° allokáció megvalósítható, ezért egy $p^\circ \in P^N$ vektorral szorozva $pz^\circ \leqq 0$. Ugyanakkor $p^\circ z^\circ \geqq 0$ is, hiszen a $p^\circ z^\circ < 0$ reláció ellentmondana a (4.C–1) és (4.C–2) egyenlőtlenségeknek. Ebből ugyanis a definíciók szerint $p^\circ x^\circ < \max_{\hat{y} \in \hat{Y}} p^\circ \hat{y} = \rho$ következne. De ekkor a tétel feltételeiből következő *lokális telhetetlenség*ből minden i-re olyan, az x_i° pontokhoz tetszőlegesen közel választható $x_i'' \in X_i$, $U_i(x_i'') > U_i(x_i^\circ)$ pontok léteznek, amelyekre nyilván $p^\circ \sum_{i=1}^{I} x_i'' < \rho$. Ezekből $p^\circ z^\circ = 0$.

(i) Az előző pontból nyilvánvaló, hogy

$$p^\circ \sum_{i=1}^{I} x_i^\circ = p^\circ \omega + p^\circ \sum_{j=1}^{J} y_j^\circ = \rho. \tag{4.C–3}$$

A

$$\rho = \max_{\hat{y} \in \hat{Y}} p^\circ \hat{y}$$

választásból, az $\hat{Y}$ definíciójából és a (4.C–2) egyenlőtlenségből nyilvánvalóan következik, hogy $j = 1, 2, \ldots, J$-re

$$p^\circ y_j \leqq p^\circ y_j^\circ, \quad \forall y_j \in Y_j.$$

Ha ugyanis ez nem lenne igaz, mondjuk a j' termelőre, akkor létezne olyan $y'_{j'} \in Y_{j'}$ tevékenység, amire $p^\circ y'_{j'} > p^\circ y^\circ_{j'}$. De miután

$$(y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y^\circ_{j'-1}, y'_{j'}, y^\circ_{j'+1,\ldots,}y_J^\circ) \in \mathcal{Y},$$

[41] Ne feledjük, az $\hat{Y}$ halmaz zárt, így a (4.C–2) egyenlőtlenségből következik, hogy a folytonos skaláris szorzat felveszi a maximumát.

a

$$p^\circ y'_{j'} + p^\circ \sum_{j \neq j'} y_j^\circ > p^\circ \sum_{j=1}^{J} y_j^\circ = \rho - p^\circ \omega$$

egyenlőtlenség ellentmond ρ definíciójának.

(ii) Legyen most $i = 1, 2, \ldots, I$-re $w_i = p^\circ x_i^\circ$. Ekkor a (4.C–3) egyenlőség miatt nyilván

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = p^\circ \omega + p^\circ \sum_{j=1}^{J} y_j^\circ .$$

Azt is tudjuk, hogy $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$p^\circ x_i \geqq w_i, \quad \forall x_i \in X_i\text{-re, amire } U_i(x_i) \geqq U_i(x_i^\circ). \tag{4.C–4}$$

Ellenkező esetben ugyanis létezne egy fogyasztó, mondjuk i', és $x'_{i'} \in X_{i'}$, $U_{i'}\left(x'_{i'}\right) \geqq U_{i'}\left(x_{i'}^\circ\right)$, valamint $p^\circ x'_{i'} < w_{i'}$. De ekkor

$$p^\circ x'_{i'} + p^\circ \sum_{i \neq i'} x_i^\circ < p^\circ \sum_{i=1}^{I} x_i^\circ = \rho.$$

A lokális telhetetlenség miatt azonban minden fogyasztó aktuális fogyasztási vektorának tetszőlegesen kis környezetében létezik annál jobb másik fogyasztási vektor, amiknek a p° árak melletti értékösszege a skaláris szorzat folytonossága miatt szintén kisebb, mint ρ. Ez viszont ellentmond a (4.C–1) egyenlőtlenségnek. A (4.C–4) egyenlőtlenségek még erősebbek is a kváziegyensúly által követeltnél[42].

Végül azt látjuk be, hogy a pótlólagos, az erős létbiztonságra vonatkozó feltétel teljesülése esetén ez az (a°, p°) kváziegyensúly jövedelemtranszfer melletti egyensúly is egyben. Azt kell csak belátnunk, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, I$ fogyasztóra és minden olyan $x_i \in X_i$ vektorra, amire $U_i(x_i) > U_i(x_i^\circ)$ a $p^\circ x_i > w_i$ reláció következik. Tegyük fel, az nem igaz, azaz létezik egy i fogyasztó és egy olyan $x'_i \in X_i$ fogyasztási vektor, amire $U_i\left(x'_i\right) > U_i(x_i^\circ)$ és $p^\circ x'_i \leqq w_i = p^\circ x_i^\circ$. Definiáljuk az x_i^λ vektort most a következőképpen:

$$x_i^\lambda = \lambda x'_i + (1 - \lambda)\, \hat{x}_i, \quad \lambda \in (0, 1)\,,$$

[42] Lásd a 4.B.6. Állítást!

ahol az erős létbiztonság feltétele következtében $p^\circ \hat{x}_i < w_i$. Ekkor U_i folytonossága miatt nyilván létezik olyan 1-hez tetszőleges közeli λ' érték, amire

$$p^\circ x_i^{\lambda'} < w_i \quad \text{és} \quad U_i\left(x_i^{\lambda'}\right) > U_i(x_i^\circ).$$

Ez viszont nyilvánvalóan ellentmond a kváziegyensúly (ii) feltételének.□

V.

KOOPERÁCIÓ VAGY VERSENY?

5.A. Bevezetés

Ebben a fejezetben tovább vizsgáljuk a versenyzői egyensúly és a hatékonyság fogalmak kapcsolatát. Első lépésben még szigorítjuk is az egyensúly fogalmát, majd magát a versenyzői magatartásra vonatkozó árelfogadási posztulátumot adjuk fel. Definiálunk egy teljesen általános cserefogalmat, cseremechanizmust, és összevetjük az ezáltal kapott eredményt a szigorú versenyzői egyensúllyal. Látni fogjuk, a két végállapot között nem sok a különbség.[43]

5.B. A szigorú egyensúly fogalma és létezése

Ebben az alfejezetben a szigorú egyensúly fogalmával ismerkedünk meg, és megmutatjuk, egy alkalmasan megválasztott plusz feltétel teljesülése esetén egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságban e szigorú értelemben vett egyensúlyi állapot is létezik.

5.B.1. Definíció. *Az* (a^*, p^*) *állapot az* $e \in \mathcal{E}^w$ *gazdaság* szigorú egyensúlyi állapot*a, ha*

(i) Profitmaximalizálás: $j = 1, \ldots, J - re$ $y_j^* \in Y_j(p^*)$,

(ii) Haszonmaximalizálás: $i = 1, \ldots, I - re$ $x_i^* \in X_i(p^*)$,

(iii) Szigorú naturális egyensúly: $a^* \in \mathcal{A}_{ok}$, és

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* - \sum_{j=1}^{J} y_j^* - \sum_{i=1}^{I} \omega_i, = 0.$$

5.B.2. Megjegyzés. *Azonnal látszik, hogy fölösleges törődnünk az értékegyensúllyal, triviálisan teljesül. Ami nem igazán triviális, azt kikerültük azzal, hogy az állapot meghatározásában benne vannak* a nemnegatív *árak. Az árak nemnegativitása ugyanis bizonyos esetekben ellentmondhat a szigorú naturális egyensúly feltételének.*

5.B.3. Definíció. *Egy* $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ *technológiai halmazra érvényes a* díjmentes lomtalanítás (free disposal) *feltétele, ha az* $y \in Y$ *tartalmazásból és az* $y' \leqq y$ *relációból az* $y' \in Y$ *tartalmazás következik.*

[43] Egészen kiváló, szellemes bevezetést nyújt a terület eredményeibe *Hildenbrand–Kirman* (1976).

5.B.4. Tétel (Se hiány, se fölösleg). *Ha egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaságban az aggregált termelési halmazra érvényes a* díjmentes lomtalanítás *feltétele, akkor ebben a gazdaságban létezik szigorú egyensúlyi állapot.*

Bizonyítás. A 3.D.5. Tételből tudjuk, hogy ebben az e gazdaságban létezik versenyzői egyensúly. Jelöljük ezt most – a szokásostól kicsit eltérve – az $(a^\diamond, p^\diamond)$ szimbólummal. Legyen

$$z^\diamond = \sum_{i=1}^{I} x_i^\diamond - \sum_{j=1}^{J} y_j^\diamond - \sum_{i=1}^{I} \omega_i. \tag{5.B–1}$$

A versenyzői egyensúly definiciójából tudjuk, hogy

$$z^\diamond \leqq 0 \quad \text{és} \quad p^\diamond z^\diamond = 0.$$

A díjmentes lomtalanítás feltételéből következik, hogy $(y^\diamond + z^\diamond) \in Y$. Legyen most $y^* = y^\diamond + z^\diamond$. Válasszunk $j = 1, 2, \ldots, J$-re egy olyan $y_j^* \in Y_j$ vektort, amikre

$$\sum_{j=1}^{J} y_j^* = y^* = y^\diamond + z^\diamond.$$

Miután $y^* \in Y$, ezért ilyenek biztos léteznek. Válasszuk meg most a $p^* \in P^N$ és az $x_i^* \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, I$ vektorokat is a következőképpen: $p^* = p^\diamond, x_i^* = x_i^\diamond$. Nyilván

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* - \sum_{j=1}^{J} y_j^* - \sum_{i=1}^{I} \omega_i = 0, \tag{5.B–2}$$

azaz a csillaggal jelölt tevékenységegyüttes megvalósítható, és szigorú naturális egyensúlyban van. Az maradt tehát csak hátra, hogy a tevékenységek optimalitását is belássuk. Az (5.B–1) és (5.B–2) egyenlőségekből kapjuk, hogy

$$p^* \sum_{j=1}^{J} y_j^* = p^* \sum_{j=1}^{J} y_j^\diamond.$$

Tegyük fel most, hogy az egyik – mondjuk, az első –, csillaggal jelzett termelési tevékenység nem maximalizálja a p^* árak melletti profitot a megfelelő termelési halmaz felett, azaz létezik olyan $y_1' \in Y_1$, hogy $p^* y_1' > p^* y_1^*$. Meglátjuk, ez ellentmondásra vezet. Azt tudjuk ugyanis, y^* maximalizálja a p^* árak melletti profitot az Y halmaz felett, hiszen ugyanezt tette $y^\diamond$ is. Ugyanakkor $\left(y_1' + \sum_{j=2}^J y_j^*\right) \in Y$ és $p^* \left(y_1' + \sum_{j=2}^J y_j^*\right) > p^* \sum_{j=1}^J y_j^\diamond$. Hasonló módon érvelve a többi termelő esetében, látjuk, hogy $j = 1, 2, \ldots, J$-re y_j^* profitmaximalizáló termelés. Ez azt is jelenti egyben, hogy egy termelő profitja sem változik, így $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$B_i(p^*) = B_i(p^\diamond),$$

amiből nyilvánvalóan kapjuk, hogy $x_i^* \in X_i(p^*)$. □

5.B.5. Megjegyzés. *A tétel feltételei szükségtelenül erősek, de a továbbiak tárgyalásánál nem kell majd élesítenünk őket. Miután így hivatkozhattunk az eddigi eredményeinkre, ezt az alakot használjuk. A tétel állításából és bizonyításából nyilvánvaló a díjmentes lomtalanítás szerepe. Egyrészt biztosítja az egyensúlyi árrendszer nemnegativitását, hiszen akár csak egy jószág negatív ára is a profitok nemkorlátos voltához vezetne, másrészt triviális módon szolgáltatja a szigorú egyensúlyi pontot, azáltal, hogy „fekete lyukba süllyeszti" a fölösleges jószágegységeket.*

A későbbiekben külön elméleti jelentőséggel bírnak majd azok a gazdaságok, amelyekben nincs termelés. Ahelyett azonban, hogy explicite kizárnánk a termelés lehetőségét, csak annyit tételezünk majd fel, hogy csak egy termelő szerepel a gazdaságban, és ő is csak lomtalanít, méghozzá díjmenetesen.

5.B.6. Definíció. *Ha egy $e \in \mathcal{E}^w$ gazdaságban $J = 1$ és $Y = \mathbb{R}_-^N$, akkor a gazdaságot* tiszta cseregazdaság*nak hívjuk. A tiszta cseregazdaságok családját $\mathcal{E}_{cs}^w$-vel jelöljük. Ha az $e \in \mathcal{E}^w$ gazdaság nem tiszta cseregazdaság, akkor* termelő gazdaság*nak nevezzük.*

5.B.7. Következmény. *Ha egy $e \in \mathcal{E}_{A-D}$ gazdaság egyben tiszta cseregazdaság is, azaz $e \in \mathcal{E}_{cs,A-D}^w$, akkor létezik szigorú egyensúlypontja.*

Bizonyítás. Az Y termelési halmaz nyilvánvalóan kielégíti az 5.B.4. Tétel feltételeit, így a bizonyítás trivialitás. □

Az előző állítás igázából azért érdekel minket, hogy a következő alfejezetben elmondandók ne lógjanak a levegőben. A továbbiakban a hatékonyság fogalmát teljesítjük ki, feladjuk az eddigiekben féltve őrzött elkülönültségi hipotézist, és a tiszta árelfogadást. Megengedjük, hogy az egyes gazdasági szereplők kooperáljanak, koalíciókat alkossanak. Egyben újfajta mechanizmust vezetünk be, a javak olyan maradék nélküli szétosztását, amelyeket a közvetlen hasznosságfogalmon keresztül a szereplők egybehangzó akarata szentesít, és nem az árak diktálta gazdaságosság.

5.C. A gazdaság magja

Ebben a fejezetben a továbbiakban olyan gazdaságokkal foglalkozunk, amelyek – mint azt az előbb említettük – elsősorban a mechanizmusukban különböznek az eddigiektől. Megint csak nem a legáltalánosabb modellel foglalkozunk, hanem egy olyannal, amely beleillik eddigi tárgyalásunkba. Tesszük ezt a célból, hogy az elért eredményeinket alkalmazni tudjuk rájuk. Az ilyen gazdaságokkal először *Francis Ysidro Edgeworth* foglalkozott[44], az ő nevére való utalással jelöljük majd az ilyen gazdaságok családját az $\mathcal{E}^e$ szimbólummal.[45]

5.C.1. Edgeworth-gazdaság, szerződési görbe, mag

Az Edgeworth-gazdaságok környezete speciális, a versenyzői gazdaságoknak is megfelelő környezet. Ha ezeket a környezeteket a *walrasi* mechanizmussal párosítanánk, akkor a tiszta cseregazdaságok $\mathcal{E}^w_{cs}$ családját kapnánk. Az Edgeworth-gazdaságokban tehát N darab, egymástól megkülönböztethető jószág(fajta), I fogyasztó és J termelő van, ahol $J = 1$ és $Y = \mathbb{R}^N_-$. A fogyasztókat $i = 1, 2, \ldots, I$-re az X_i fogyasztási halmazok, a $\succcurlyeq_i$ preferenciarendezések és az ω_i kezdőkészletek jellemzik. Ha ezek $i = 1, 2, \ldots, I$-re kielégítik az A–D gazdaságokra vonatkozó 2.D.3. Feltevést, akkor – mint tudjuk – a preferenciarendezéseket U_i hasznossági függvényekkel reprezentálhatjuk. Az ilyen gazdaságok családját az $\mathcal{E}^e_{A-D}$ szimbólummal jelöljük.[46] Az Edgeworth-gazdaságok tárgyalásánál – miután elsősorban a cserére koncentrálunk – az allokáció fogalmába

[44] Az úttörő munkája *Edgeworth* (1881).

[45] A téma kiváló és magas szintű monográfiája *Hildenbrand* (1974).

[46] Az Y (aggregált) termelési halmaz nyilván kielégíti a 2.D.1. Feltevést.

beépítjük a megvalósíthatóságot, azaz azt a tényt, hogy nem cserélhetjük el, ami nincs.

5.C.1. Definíció. *Egy $e \in \mathcal{E}^e$ gazdaságban egy $(x_i, x_2, \ldots, x_I, y) \in \mathcal{X} \times Y$ tevékenységegyüttest allokációnak hívunk, ha*

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} \omega_i + y.$$

Az Edgeworth-gazdaságok mechanizmusa lényegesen eltér a versenyzői mechanizmustól. Legfőképpen abban, hogy implicite feltesszük, a fogyasztók ismerik egymás jellemzőit[47], és képesek a javakat közvetlenül elcserélni egymás között. Egy fogyasztó akkor cserél egy jószágkosarat egy másik kosárra, ha az utóbbit nem tekinti rosszabbnak. Látható, ezzel azt is feltesszük, hogy a fogyasztó a számára egyformán jó kosarakat mindig hajlandó elcserélni. Ugyanakkor a fogyasztók egymás között tetszőleges csoportokat, *koalíció*kat alkothatnak. A koalíció tagjai kölcsönösen előnyös, kötelező erejű csereszerződéseket kötnek egymással, amelyek eredményeképpen a javak új szétosztása jön létre. (Ez az általános cserefogalom egyáltalán nem zárja ki az árak alkalmazását, de nem írja elő. Egy, az árak által vezérelt csere simán belefér az Edgeworth-gazdaságok mechanizmusába.) A cserék kezdő- és végpontja nyilván minden esetben allokáció. A fő kérdésünk: mi jellemzi az Edgeworth-gazdaságokban a cserefolyamat végpontjait. A válaszhoz némi formalizálás és több fogalom definiálása útján jutunk el.

5.C.2. Definíció. *Egy $e \in \mathcal{E}^e$ gazdaságban a fogyasztók $\mathcal{F}$ halmazának tetszőleges, nemüres $\mathcal{I}$ részhalmazát* koalíciónak *hívjuk. Az $\mathcal{I}$ koalíció* blokkolja *az $(x_i, x_2, \ldots, x_I, y)$ allokációt – más szóval :* újraszerződik *az $(x_i, x_2, \ldots, x_I, y)$ allokációból –, ha léteznek olyan $x_i' \in X_i$ fogyasztási vektorok és $i' \in \mathcal{I}$ fogyasztó, hogy $\forall i \in \mathcal{I}$-re $x_i' \succcurlyeq_i x_i, i'$-re $x_i' \succ_{i'} x_i$, valamint*

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i' - \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega_i = y \in Y.$$

5.C.3. Megjegyzés. *A blokkolás (újraszerződés) fogalma tehát azt jelenti, hogy a fogyasztók egy csoportja egymás között úgy képes újraosztani a csoporthoz tartozók összkészletét, hogy ezáltal a koalíció egy tagja*

[47] Ezt a feltevést nem szokták kihangsúlyozni, annak ellenére, hogy igen fontos.

sem jár rosszul, sőt legalább az egyik határozottan jobban jár, mint az eredeti, blokkolt allokációban.

A következő fogalom már jó ismerősünk. Azért adjuk meg ismét a meghatározását, hogy egy, a későbbiekben is alkalmazandó jelölést bevezessünk.

5.C.4. Definíció. *Az $e \in \mathcal{E}^e$ gazdaságban az olyan allokációkat, amelyeket az összes fogyasztóból álló $\mathcal{I} = \mathcal{F}$ koalíció nem blokkol,* Pareto-hatékony *allokációknak hívjuk. Az e-beli* Pareto-*hatékony allokációk halmazát a $PO(e)$ szimbólummal jelöljük.*

A következőkben eddig nem használt, de nagyon fontos fogalmakat definiálunk.

5.C.5. Definíció. *Az $e \in \mathcal{E}^e$ gazdaságban az olyan allokációkat, amelyeket az egy fogyasztóból álló koalíciók nem blokkolnak,* individuálisan racionális *allokációknak nevezzük. Az e-beli individuálisan racionális allokációk halmazát az $IR(e)$ szimbólummal jelöljük.*

5.C.6. Definíció. *Az $e \in \mathcal{E}^e$ gazdaságban az $(x_i, x_2, \ldots, x_I, y) \in PO(e) \cap IR(e)$ allokációk halmazát* szerződési görbé*nek nevezzük.*

Végül e fejezet alapfogalmát definiáljuk. Ez a halmaz, a *gazdaság magja,* azoknak az allokációknak a halmaza, amelyek a cserefolyamat végpontjai lehetnek.

5.C.7. Definíció. *Az $e \in \mathcal{E}^e$ gazdaságban azoknak az allokációknak a halmazát, amelyeket egy koalíció sem blokkol, a gazdaság magjának nevezzük és a $\mathcal{C}(e)$ szimbólummal jelöljük.*

5.C.8. Állítás. *Egy $e \in \mathcal{E}^e$ gazdaságban minden magbeli allokáció egyben a szerződési görbe eleme, és így* Pareto-*hatékony. Továbbá, amennyiben $I = 2$, akkor a szerződési görbe és a gazdaság magja egybeesik.*

Bizonyítás. Triviális a definíciókból. $\square$

5.C.2. A mag és az egyensúly kapcsolata

Ebben a pontban azt a kérdést kezdjük vizsgálni, hogy mi a kapcsolat a gazdaság magja és versenyzői egyensúlyi állapota között. Ennek érdekében olyan gazdaságokat veszünk górcső alá, amelyekben az egyensúly létét biztosítani tudjuk. Meglátjuk, egy egyensúlyi állapothoz tartozó allokáció biztosan a mag része. Ez egyben a mag nemürességét is biztosítja. A vizsgált gazdaságokra vonatkozó feltételek – rossz szokásunk szerint – kicsit erősebbek a feltétlenül szükségesnél, de így hivatkozhatunk az eddigi eredményeinkre.

Először is vegyük észre, hogy egy $e \in \mathcal{E}^e_{A-D}$ gazdaságnak könnyen megfeleltethető egy $e^w \in \mathcal{E}^w_{cs,A-D}$ gazdaság oly módon, hogy környezetük megegyezik és $i = 1, 2, \ldots, I$-re $\alpha_{i(1)} = 1/I$. A termelő optimális profitja minden ár mellett nyilván zérus, így minden fogyasztó minden ár melletti $M_i(p)$ jövedelme megegyezik készleteinek értékével. A pont további részében az e és a belőle ily módon származtatott e^w gazdaságokat „összemossuk”, és ez utóbbinak egyensúlyi allokációit mint cseréből származtatott allokációkat tekintjük. Tudjuk azt is, hogy egy $e \in \mathcal{E}^w_{cs,A-D}$ gazdaságban is értelmezhetők, így az $\mathcal{E}^e$-beli gazdaságokra vonatkozó fogalmak, másképpen egy $\mathcal{E}^w_{cs,A-D}$-beli gazdaság nyilván $\mathcal{E}^e_{cs,A-D}$ eleme is. Ennek megfelelően azt is tudjuk (5.B.4. Tétel), hogy ennek az $e \in \mathcal{E}^w_{cs,A-D}$ gazdaságnak létezik szigorú egyensúlyi állapota. A későbbi használat érdekében vezessünk be még egy jelölést: az e gazdaság szigorú egyensúlyi állapotaihoz tartozó allokációkat jelöljük a $WE(e)$ szimbólummal.

5.C.9. Segédtétel. *Egy $e \in \mathcal{E}^w_{cs,A-D}$ gazdaságban $WE(e) \subset \mathcal{C}(e)$, azaz a versenyzői egyensúlyi állapothoz tartozó allokáció eleme a gazdaság magjának.*

Bizonyítás. Indirekt úton bizonyítunk. Feltesszük, hogy az a^* szigorú egyensúlyi allokációt blokkolja egy $\mathcal{I}$ koalíció. Ekkor minden $i \in \mathcal{I}$-re léteznek olyan $x'_i \in X_i$ fogyasztási vektorok és $i' \in \mathcal{I}$ fogyasztó, hogy $\forall i \in \mathcal{I}$-re $\quad U_i(x'_i) \geqq U_i(x^*_i)$, i'-re $U_{i'}\left(x'_{i'}\right) > U_{i'}(x^*_{i'})$, valamint

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} x'_i - \sum_{i \in \mathcal{I}} \omega_i = y \in Y.$$

Miután $y \in Y = \mathbb{R}^N_-$ és $p^* \in P^N$, ezért $p^* y \leqq 0$. Ugyanakkor a fogyasztók feltételezett lokális telhetetlensége miatt az $U_i(x'_i) \geqq U_i(x^*_i)$

relációból $p^*x'_i \geqq p^*\omega_i$, valamint az $x'_{i'} \succ_i x^*_{i'}$ relációból $p^*x'_{i'} > p^*\omega_{i'}$ következik. Ezekből kapjuk az ellentmondást, hiszen

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} p^*x'_i > \sum_{i\in\mathcal{I}} p^*\omega_i,$$

amiből

$$p^*\sum_{i\in\mathcal{I}}(x'_i - \omega_i) = p^*y > 0,$$

ami lehetetlen. □

Vegyük észre, hogy ez a segédtétel az első jóléti tétel versenyzői gazdaságokra vonatkozó alakja általánosításának tekinthető. A második jóléti tételnek megfelelő kérdést, tehát azt, hogy minden magpont egyensúlyi ponttá tehető-e, a következő alfejezetben vizsgáljuk meg alaposabban. E helyütt csak arra mutatunk rá, hogy a kapcsolat így, visszafelé, nyilvánvalóan nem igaz. A mag fogalma ugyanis – ellentétben a *Pareto*-hatékonysággal – egyben elosztási kategória is: a mag nemcsak a gazdaság összkészletétől és a fogyasztók preferenciáitól függ, hanem a készletek kezdeti elosztásától is. Ebből következően, ha a javakat egy állapot elérésének érdekében újra kívánnánk osztani, egyben a gazdaság magját is megváltoztatnánk. Így csak az az értelmes kérdés, hogy egy adott $\mathcal{E}^e$ gazdaságban egy magbeli allokáció versenyzői egyensúlyi állapot része-e. Könnyű olyan példát szerkesztenünk, ahol ez nem igaz.

5.C.10. Példa. *Legyen egy $e \in \mathcal{E}^e_{cs,A-D}$ gazdaság a következő.*

$$e = \left\{ \begin{array}{c} 2, 2, 1, \left\{X_i = \mathbb{R}^2_+\right\}_1^2, \left\{U_i = x_i^{(1)}x_i^{(2)}\right\}_1^2, \\ \left\{(0,1), (1,0)\right\}, \mathbb{R}^2_- \end{array} \right\}.$$

Az ehhez a gazdasághoz az alább leírt módon rendelt $e^w \in \mathcal{E}^w_{cs,A-D}$ versenyzői gazdaságban egyetlen egyensúlyi állapot van:

$$(a^*, p^*) = (x_1^*, x_2^*, y^*, p^*) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Könnyen megmutatható az is, hogy például az

$$a^\circ = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), (0,0)\right)$$

allokáció a mag eleme.

5.D. A gazdaság magja szűkülőben

Az előző alfejezetben ismertetett általános cseremechanizmus különösen akkor tűnik jobbnak, mint a walrasi árelfogadás, ha a szereplők száma kicsi. Igencsak furcsa feltételezni, hogy egy kétfogyasztós tiszta cseregazdaságban a szereplők követik az árelfogadási posztulátumot és nem próbálnak stratégiai lépéseket tenni annak érdekében, hogy a csere végeredményét saját maguk számára minél jobbá tegyék. Ugyanakkor az említett feltételezés, hogy a fogyasztók ismerik egymás jellemzőit, nyilvánvalóan kevéssé reális, ha a szereplők száma egy bizonyos határon túl növekszik. Ekkor merül fel ismét az árak vezérelte csere, a walrasi mechanizmus szerepének jelentősége. Azt láttuk, a walrasi egyensúlyi állapothoz tartozó allokáció szükségképpen eleme a magnak, sőt azt is érezzük, hogy információs szempontból a lehető legkevesebbet követeli meg, és így talán nem túl költséges a működtetése. Mégis felmerül a kérdés, nincs-e mégis valamilyen jobb mechanizmusunk a „nagy” gazdaságok kezelésére. Erről másutt még nagyon sokat beszélünk majd, e helyütt csak egy alapvető fontosságú eredményt mutatunk be, sajnos, megint csak nem a lehető legáltalánosabb alakban[48]. Az eredmény – nagyon pongyolán fogalmazva – az, hogy ha a gazdaságunk „igazán sok” szereplős, akkor csak a walrasi egyensúlyi állapothoz tartozó allokációk maradnak a gazdaság magjában. Ezt az állítást tesszük precízebbé és látjuk be ebben az alfejezetben.

5.D.1. A sokszorozott gazdaság

Először egy kicsit átalakítjuk az eddigi modellünk interpretációját. Eddig i-vel a fogyasztókat indexeltük. Most feltesszük, hogy az eddigi egyes fogyasztók fogyasztói típusokat jelölnek. Az egy i típusba tartozó fogyasztókat egymástól a $q_i = 1, 2, \ldots, Q_i$ index-szel különböztetjük meg. Azt is feltesszük, hogy minden típusból ugyanannyi Q számú fogyasztónk van, ezáltal a q index i alsó indexét elhagyhatjuk a jelöléseinkben.[49] Az azonos típusba tartozó fogyasztók $X_{i,q}$ fogyasztási halmaza, $\succcurlyeq_{i,q}$ preferenciarendezése és $\omega_{i,q}$ készletvektora minden q-ra megegyezik. A jelö-

[48] Az általános modellt, amely más jellegű, de nagyon mély matematikai eszköztárat alkalmaz, megtalálhatjuk az *Aumann* (1964) cikkben.

[49] Ez egy olyan pont, ahol modellünk nem elég általános. E feltevés feloldása után azonban egészen más, e tárgyalás kereteit meghaladó matematikai eszköztárra lenne szükségünk a bizonyításhoz.

lésrendszerünket is módosítjuk egy picit. Az eredeti $e \in \mathcal{E}^e$ gazdaságot $e(1)$-gyel, a Q-szorosára növelt gazdaságot pedig $e(Q)$-val jelöljük. Nyilván $e(Q) \in \mathcal{E}^e$ szintén, ha pedig $e(1) \in \mathcal{E}^e_{cs,A-D}$, akkor $e(Q) \in \mathcal{E}^e_{cs,A-D}$, amiből rögtön következik, hogy ez utóbbiban is létezik szigorú egyensúlyi állapot, és így $\mathcal{C}\,(e(Q))$ nem üres. Egy $e(Q) \in \mathcal{E}^e$ gazdaság egy tetszőleges allokációját nyilván az

$$(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots x_{1,Q}, \dots, x_{I,1}, x_{I,2}, \dots x_{I,Q}, y) \in \prod_{i=1}^{I} \prod_{q=1}^{Q} X_{i,q} \times Y$$

alakba írhatjuk. Első állításunk arra vonatkozik, hogy milyen allokációkat tartalmaz az így sokszorozott A–D gazdaságok magja. A tárgyalás egyszerűsítése érdekében, és anélkül, hogy ezzel lényegesen csökkentenénk az állítás erejét, egy új feltevést vezetünk be.

5.D.1. Definíció. *Egy* $e(1) \in \mathcal{E}^e_{cs,A-D}$ *gazdaságban a fogyasztók preferenciái* szigorúan konvexek, *ha* $i = 1, 2, \dots, I$*-re* $U_i(x_i^1) \geqq U_i(x_i^2)$ *és* $\lambda \in (0,1)$ *esetén*

$$U_i(\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2) > U_i(x_i^2).$$

5.D.2. Segédtétel. *Legyen* $e(1) \in \mathcal{E}^e_{cs,A-D}$*, amiben a fogyasztók preferenciái szigorúan konvexek. Ha az* $e(Q) \in \mathcal{E}^e$ *gazdaságbeli*

$$\left(x^\circ_{1,1}, x^\circ_{1,2}, \dots x^\circ_{1,Q}, \dots, x^\circ_{I,1}, x^\circ_{I,2}, \dots x^\circ_{I,Q}, y^\circ\right)$$

allokáció eleme a $\mathcal{C}\,(e(Q))$ *magnak, akkor* $i = 1, 2, \dots, I$*-re az azonos típusú fogyasztók azonos jószágkosarat kapnak, azaz*

$$x^\circ_{i,s} = x^\circ_{i,t} \quad 1 \leqq s, t, \leqq Q \quad \forall i\text{-re.}$$

Bizonyítás. Legyen

$$x_i^\circ = \arg\min_q U_i(x^\circ_{i,q}) \quad i = 1, 2, \dots, I\text{-re.}$$

Tegyük fel az indirekt bizonyítás elvét követve, hogy létezik egy i' fogyasztói típus, amiben legalább két, s és t, fogyasztó különböző jószágkosarat kap, azaz $x^\circ_{i',s} \neq x^\circ_{i',t}$. Ekkor az A–D gazdaságokbeli fogyasztói preferenciák feltételezett konvexitásából kapjuk, hogy $i = 1, 2, \dots, I$-re

$$U_i\left(\frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} x^\circ_{i,q}\right) \geqq U_i(x_i^\circ),$$

és

$$U_{i'}\left(\frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} x^{\circ}_{i',q}\right) > U_{i'}(x^{\circ}_{i'}).$$

Ugyanakkor

$$\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{1}{Q}\sum_{q=1}^{Q} x^{\circ}_{i,q} - \omega_i\right) = \frac{1}{Q} y \in Y, \tag{5.D–1}$$

ami azt jelenti, hogy egy olyan $\mathcal{I}$ koalíció, amelyben minden típusú fogyasztóból pontosan egy szerepel, mégpedig az, aki az eredeti allokációban a legrosszabbul járt, blokkolja a feltételezett magbeli allokációnkat. Ugyanis az (5.D–1) egyenlőség azt mutatja, hogy a típusonként legrosszabbul járó fogyasztók a saját készletükből biztosítani tudják maguk számára a típusonkénti átlagos fogyasztást, ami a konvexitási feltevések értelmében jobb (nem rosszabb), mint amit jelenleg kapnak. Ez az ellentmondás. □

Ez az 5.D.2. Segédtétel lehetőséget nyújt arra, hogy ezentúl a sokszorozott gazdaságok magjában levő allokációkat az eddigieknél egyszerűbben jelöljük. Egyszerűen csak a típusokra vonatkozó fogyasztási vektorokat szerepeltetjük a jelölésben, és nem írjuk ki az egyes fogyasztókra külön vonatkozó fogyasztási vektorokat. Az így nyert

$$(x^{\circ}_1, x^{\circ}_2, \ldots, x^{\circ}_I, Qy^{\circ})$$

allokációkat *típusallokációnak* hívjuk a továbbiakban. Mindezt megtehetjük, hiszen egy magbeli

$$\left(x^{\circ}_{1,1}, x^{\circ}_{1,2}, \ldots x^{\circ}_{I,Q}, \ldots, x^{\circ}_{I,1}, x^{\circ}_{I,2}, \ldots x^{\circ}_{I,Q}, Qy^{\circ}\right)$$

allokáció biztos megvalósítható, az Y halmaz a nempozitív ortáns, így a

$$\sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{q=1}^{Q} x^{\circ}_{i,q} - Q\omega_i\right) = Qy^{\circ} \in Y$$

egyenlőségből

$$\sum_{i=1}^{I}(x^{\circ}_i - \omega_i) = y^{\circ} \in Y.$$

Ez a módosítás csak a jelölést érinti, a tartalmat nem.

Annál is inkább figyelni kell erre, mert a sokszorozott gazdaság magja erősen függ a sokszorozás mértékétől. Miként? Legyen adott egy $e(1) \in \mathcal{E}^e_{cs,A-D}$ gazdaság, és legyen (a^*, p^*) ennek egy szigorú egyensúlyi állapota. A Q-szorosra növelt $e(Q)$ gazdaságban egyszerű belátni, hogy

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_I^*, Qy^*) \in WE(e(Q)),$$

hiszen a (sokszorozott) típusallokáció és a p^* árvektor a szigorú egyensúly mindhárom feltételét teljesíti. Ebből az következik, hogy ha tekintjük a gazdaságok $e(1)$, $e(2), \ldots$ sorozatát, akkor a $WE(e(1))$ allokációk – persze a megfelelő módon sokszorozva – sosem kerülnek ki a $\mathcal{C}(e(1)), \mathcal{C}(e(2)), \ldots$ magokból, azaz többet tudunk annál, mint amire már utaltunk: ezek a magok nem csak nemüresek, de ismerjük bizonyos elemeiket is.

Ugyanakkor a gazdaság növekedésével, azaz ahogy Q nő, a mag nem bővülhet. Ezt könnyű megmutatni, tegyük fel ugyanis, hogy egy $e(Q+1)$ gazdaságban az $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_I^\circ, (Q+1)y^\circ)$ típusallokáció a mag eleme, ugyanakkor

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_I^\circ, Qy^\circ) \notin \mathcal{C}(e(Q)).$$

Ez annyit jelentene, hogy az $e(Q)$ gazdaságban létezik egy blokkoló $\mathcal{I}$ koalíció. De ez a koalíció az $e(Q+1)$ gazdaságban is nyilvánvalóan újraszerződik. Vajon szűkül-e a gazdaság magja Q növekedtével? Viszonylag könnyen megmutatható, hogy igen. Ennek oka az, hogy az újonnan belépő I fogyasztó új koalíciós lehetőségeket jelent, és így azok a magpontok, amelyekben egy típus a legrosszabbul járt, kikerülnek a magból.

5.D.2. A mag határértéktétele

Ebben a pontban megvizsgáljuk, mi történik a sokszorozott gazdaság magjával, ha a fogyasztók száma az egyes típusokon belül minden határon túl nő[50]. Ezzel részleges választ kapunk arra kérdésre, miért is tekintjük a walrasi cseremechanizmust hatékony és használható mechanizmusnak az olyan gazdaságokban, amelyben a szereplők száma viszonylag nagy. A vizsgálat támaszkodik az előző pontban kifejtettekre, azt annyiban egészíti ki, hogy belátunk egy tételt, ami szerint a gazdaság

[50] Persze az eddig elmondottak nem biztosítják azt, hogy végtelen szereplős gazdaságokban létezzen walrasi egyensúly. Ezzel a kérdéskörrel foglalkozik az *Aumann* (1966) cikk, ebben a szerző bebizonyítja, hogy alkalmas feltételek mellett a végtelen szereplős esetben is létezik walrasi egyensúly.

magja „ráhúzódik” a versenyzői egyensúlyi allokációk halmazára. Az alapgondolat *Edgeworthé*, a tételt ebben a formájában *Debreu* és *Scarf* bizonyította.[51]

5.D.3. Tétel (Debreu–Scarf). *Legyenek egy $e(1) \in \mathcal{E}^e_{cs,A-D}$ gazdaságban a fogyasztók preferenciái szigorúan konvexek. Ha az*

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_I^\circ, Qy^\circ)$$

típusallokáció minden természetes Q értékre a sokszorozott gazdaság magjának része, akkor szigorú egyensúlyi állapotból származó allokáció, azaz a

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_I^\circ, Qy^\circ) \in \mathcal{C}(e(Q)), \quad Q = 1, 2, \ldots,$$

tartalmazásból

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_I^\circ, y^\circ) \in WE(e(1))$$

következik.

Bizonyítás. Definiáljuk a következő halmazokat!
Legyen $i = 1, 2, \ldots, I$-re

$$G_i(x_i^\circ) = \left\{ v_i \in \mathbb{R}^N \,|U_i(v_i + \omega_i) > U_i(x_i^\circ) \right\},$$

valamint

$$G(x^\circ) = \operatorname{conv} \bigcup_{i=1}^{I} G_i(x_i^\circ).$$

A $G_i(x_i^\circ)$ halmazok nyilván nemüres, konvex halmazok. Egyesítésük[52] így biztos nem üres, de nem feltétlenül konvex. Ezért használjuk ennek konvex burkát! Ennek értelmében egy $v \in G(x^\circ)$ vektor felírható a következő alakban:

$$v = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i v_i,$$

ahol $\forall i$-re $\lambda_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1$ és $U_i(v_i + \omega_i) > U_i(x_i^\circ)$. Megmutatjuk, hogy

$$G(x^\circ) \cap Y = \emptyset.$$

[51] *Debreu–Scarf* (1963).

[52] Vegyük észre a különbséget a második jóléti tétel bizonyításában definiált és az itt használt aggregált halmaz között!

Indirekt úton bizonyítunk, feltesszük, hogy a fenti v eleme az Y halmaznak. Egy l pozitív egész számra legyen

$$a_i^l = |[-l\lambda_i]|\,,$$

azaz az $l\lambda_i$ szorzatnál nem kisebb legkisebb egész szám. Legyen továbbá $\mathcal{I}$ azoknak a fogyasztói típusoknak a halmaza, amelyekhez tartozó v_i vektorok pozitív súllyal szerepelnek v előállításában:

$$\mathcal{I} = \{i\,|\lambda_i > 0\}\,.$$

Minden $i \in \mathcal{I}$ esetén definiáljuk a következő vektorokat:

$$v_i^l = \left(\frac{l\lambda_i}{a_i^l}\right) v_i.$$

Ebből tudjuk, hogy a $v_i^l + \omega_i$ az $(\omega_i, v_i + \omega_i)$ szakasz egy pontja, továbbá

$$\lim_{l\to\infty} v_i^l + \omega_i = v_i + \omega_i.$$

Miután $i = 1, 2, \ldots, I$-re U_i folytonos, elég nagy l esetén $U_i\left(v_i^l + \omega_i\right) > U_i(x_i^\circ)$, sőt

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} a_i^l v_i^l = l \sum_{i\in\mathcal{I}} \lambda_i v_i = lv \in Y, \qquad (5.\text{D–}2)$$

az indirekt bizonyítás feltevése és Y kúp volta miatt. Definiálunk egy $\mathcal{I}^\circ$ koalíciót úgy, hogy egy ilyen l esetén minden $i \in \mathcal{I}$ típusból legyen a_i^l tagja. Legyen most

$$Q = \max_{i\in\mathcal{I}} a_i^l.$$

Az $e(Q)$ gazdaságban az $\mathcal{I}^\circ$ koalíció blokkolja az $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_I^\circ, Qy^\circ)$ típusallokációt, hiszen – az (5.D–2) összefüggés alapján – tagjai összkészletéből biztosítani tudja számukra rendre a $v_i^l + \omega_i$ jószágkosarakat. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_I^\circ, Qy^\circ) \notin \mathcal{C}(e(Q)),$$

ami nyilvánvaló ellentmondás: találtunk ugyanis olyan Q értéket, amire a típusallokáció kikerül a magból.

Ezek szerint a $G(x^\circ)$ és Y halmazok szeparálhatók, azaz létezik olyan $p^\circ \in \mathbb{R}^N$ vektor, amire $p^\circ \neq 0$ és

$$\begin{aligned} p^\circ v &\geqq 0 \quad \forall v \in G(x^\circ), \\ p^\circ y &\leqq 0 \quad \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Ez utóbbi relációból $p^\circ \in P^N$, azaz p° szolgálhat árvektorként. Továbbá, ha egy $x_i' \in X_i$ jószágkosárra $U_i(x_i') > U_i(x_i^\circ)$ akkor $(x_i' - \omega_i) \in G_i(x_i^\circ) \subset G(x^\circ)$, amiből

$$p^\circ x_i' \geqq p^\circ \omega_i. \tag{5.D–3}$$

A feltételeinkből következő lokális telhetetlenségből azt is kapjuk, hogy minden i-re

$$p^\circ x_i^\circ \geqq p^\circ \omega_i. \tag{5.D–4}$$

Miután az $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_I^\circ, y^\circ)$ típusallokációról tudjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^\circ - \sum_{i=1}^{I} \omega_i = y^\circ,$$

ezért a szigorú naturális egyensúly fennáll rá és

$$p^\circ \sum_{i=1}^{I} (x_i^\circ - \omega_i) = p^\circ y^\circ \leqq 0.$$

Ugyanakkor, összegezve az (5.D–4)-ben szereplő I darab egyenlőtlenséget,

$$p^\circ \sum_{i=1}^{I} (x_i^\circ - \omega_i) \geqq 0,$$

amiből $p^\circ y^\circ = 0$. Miután az Y termelési halmaz a nempozitív ortáns, ezért ez azt jelenti, $y^\circ \in Y(p^\circ)$. Egyszersmind azt is kaptuk, hogy

$$p^\circ x_i^\circ = p^\circ \omega_i, \quad i = 1, 2, \ldots, I.$$

A profit, mint láttuk, zérus volt, így ez azt jelenti, minden fogyasztó jövedelme a készletének p° árak melleti értéke. Ezért már csak azt kell belátnunk, hogy $U_i(x_i') > U_i(x_i^\circ)$ esetén $p^\circ x_i' > p^\circ x_i^\circ$. Tegyük fel, ez nem igaz. Meglátjuk, ez ellentmondásra vezet. Miután minden fogyasztó fogyasztási halmazában létezik $b_i < \omega_i$ elem, ezért minden i-re a p° árak és a $p^\circ \omega_i$ jövedelem mellett teljesül az erős létbiztonság feltétele. Ebből teljesen hasonló érveléssel, mint amit a második jóléti tétel bizonyításának végén alkalmaztunk, kapjuk, hogy létezik olyan $x_i^{\lambda'} \in X_i$, hogy $U_i(x_i^{\lambda'}) > U_i(x_i^\circ)$ és $p^\circ x_i^{\lambda'} < p^\circ \omega_i$. Ez utóbbi reláció pedig ellentmond (5.D–3)-nak. Ezek szerint minden i-re $x_i^\circ \in X_i(p^\circ)$, és így az $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_I^\circ, y^\circ)$ típusallokáció ténylegesen szigorú egyensúlyi állapothoz tartozik. $\square$

VI.

KÖZJAVAK A GAZDASÁGBAN

6.A. Bevezetés

Ebben a fejezetben ugyanazokat a témákat tekintjük át röviden, amelyekkel az eddigiekben is foglalkoztunk, azzal a különbséggel, hogy feltételezzük, a gazdaságban úgynevezett közjószágokkal, közjavakkal is találkozunk. Először definiáljuk, mit is értünk közjószágon, ezt követően egy olyan gazdaságot vizsgálunk, amiben csak egy közjószágot termelnek egy összetett magánjószág segítségével, majd az általános esetet vesszük szemügyre, amiben a közjavak és magánjavak száma nagyobb is lehet egynél.

A jószágokat két csoportra osztjuk, tiszta köz-, illetve magánjavakra. Az előbbiekre nincs általánosan elfogadott definíció. A leginkább használt meghatározás szerint a tiszta közjószágból történő fogyasztásra vonatkozóan nincs kizárás és nincs rivalizálás. Mi e helyütt nem bonyolódunk bele ebbe a tipizálásba, hiszen ez igen messze vezetne a tárgyunktól, hanem a közjószágot úgy definiáljuk, hogy belőle mindenki szükségszerűen ugyanannyit fogyaszt. Ez azt is jelenti egyben, hogy az úgynevezett klubjavakkal, illetve zsúfoltságra hajlamos javakkal e helyütt nem foglalkozunk.[53]

6.B. Egyensúly és optimum a parciális modellben

Ebben az alfejezetben – kis módosításokkal – azzal a modellel foglalkozunk, amellyel az első fejezetben, azzal a különbséggel, hogy az egyszerű magánjószág helyett közjószágot szerepeltetünk, így ennek a piacát vizsgáljuk. A jelöléseinket mindaddig, amíg a változtatást nem jelezzük, megtartjuk. Az Olvasó dolgát megkönnyítendő idemásoljuk a modellt és azokat a feltételeket, amelyeket használni fogunk.[54]

A fogyasztókat továbbra is i-vel indexeljük, halmazuk jele $\mathcal{F}$, e halmaz számossága I. Az i-edik fogyasztót három objektum jellemzi: az X_i fogyasztási halmaz, ennek egy elemét az (x_i, m_i) vektorral jelöljük, ahol az x_i szimbólum a közjószágra, az m_i pedig az összetett magánjószágra

[53] Lásd ezekről például a *Cornes–Sandler* (1986) monográfiát.

[54] Ez a modell leginkább a *Foley* (1970) cikkben találhatóra hasonlít. Ugyan kicsit általánosabb és talán használhatóbb feltevéseket alkalmaz *Milleron* (1972), de számunkra most ez a modell alkalmasabb a mondanivalónk illusztrálására.

vonatkozik, a $\succcurlyeq_i$ preferenciarendezés, illetőleg az ezt reprezentáló U_i hasznossági függvény, valamint a jószágokból eredetileg rendelkezésére álló készletvektor, aminek jelölését a következő feltevés során adjuk meg.

6.B.1. Feltevés. *$\forall$ i-re, (azaz $i = 1, ..., I$)*

- $X_i = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,
- $U_i(x_i, m_i) = u_i(x_i) + m_i$, $u_i \in \mathcal{C}^2$, azaz kétszer folytonosan differenciálható, felülről korlátos, $\forall x_i \geq 0$ esetén $u_i'(x_i) > 0$ és $u_i''(x_i) < 0$, valamint $u_i(0) = 0$,
- a készletvektor $(0, \omega_i) \in (\{0\} \times \mathbb{R}_{++})$ alakú.

Ebben a modellben most csak egy termelőt szerepeltetünk, akiről feltesszük, hogy az $Y \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ termelési halmaz jellemzi. A halmaz egy elemét az (y, r) vektorral jelöljük, ahol – mint a fogyasztó esetében is – az első szimbólum vonatkozik a közjószágra.

6.B.2. Feltevés. *$Y = \{(y, r) \mid y \geqq 0, -r \geqq c(y)\}$, ahol $c(y)$ az y kibocsátáshoz minimálisan szükséges ármércejószág mennyisége. Tegyük fel továbbá, hogy $c(\cdot) \in \mathcal{C}^2$ és $\forall y \geqq 0$ esetén $c'(y) > 0$, $c''(y) > 0$.*

A közjószág szerepeltetése miatt egy kicsit meg kell változtatnunk a megvalósítható allokáció meghatározását is.

6.B.3. Definíció. *Legyen $\mathcal{X} = (X_1 \times X_2 \times ... \times X_I)$. Egy*

$$a = \{(x_1, m_1), ..., (x_I, m_I), (y, r)\} \in \mathcal{X} \times Y$$

együttest allokációnak *hívunk. Egy allokáció* megvalósítható*, ha*

$$\forall i\text{-re} \quad x_i = x \leqq y \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{I} m_i \leqq \sum_{i=1}^{I} \omega_i + r.$$

6.B.1. A közjószág hatékony szintje

A *Pareto*-hatékonyság fogalmát változatlanul hagyhatjuk, hiszen az nem kötődik magához a jószághoz, és így annak köz- vagy magánjellegéhez, csak a belőle nyert hasznossághoz. Emiatt ebben a modellben is érvényes az 1.D.1. Állítás, azaz a haszonlehetőség-határ egy olyan affin felület, amelynek a normálisa az összegzővektor. Miután egyetlenegy Pareto-hatékony allokáció sem eredményezhet a haszonlehetőség-halmaz belsejében lévő haszonvektort, egy a° *Pareto*-hatékony allokációhoz csak olyan (x_i°, m_i°), $x = x_i^\circ$, $i = 1, 2, \ldots, I$ fogyasztási és (y°, r°) termelési tevékenységek tartozhatnak, amelyek a lehető legmesszebbre tolják ki a fenti határt. Ebből következően ahhoz, hogy a *Pareto*-optimális allokációkhoz tartozó tevékenységegyütteseket meghatározhassuk, elegendő, ha megoldjuk a következő feltételes szélsőérték-számítási feladatot.

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{x \geqq 0 \\ (m_1,\ldots,m_I) \geqq 0 \\ y \geqq 0,\ r \leqq 0}} \quad & \sum_{i=1}^{I} (u_i(x) + m_i) \\
\sum_{i=1}^{I} m_i \quad \leqq \quad & \sum_{i=1}^{I} \omega_i + r \qquad (6.\text{B–}1) \\
-r \quad \geqq \quad & c(y) \\
x \quad = \quad & y.
\end{aligned}$$

A 6.B.1. és 6.B.2. Feltevésekben felsorolt feltételeink egyrészt azt biztosítják, hogy a feladat korlátai egyenlőségre teljesülnek, másrészt azt, hogy amennyiben azokat behelyettesítjük a maximalizálandó függvénybe, akkor az elsőrendű feltétel teljesülése elégséges az optimalitáshoz. Ha a közjószág optimális szintjére bevezetjük a q° jelölést, akkor ez a feltétel a következő alakot ölti:

$$\sum_{i=1}^{I} u_i'(q^\circ) \leqq c'(q^\circ), \quad =, \text{ ha } q^\circ > 0. \qquad (6.\text{B–}2)$$

Ha figyelembe vesszük a szimbólumok jelentését és azt a tényt, hogy a hasznossági függvények – feltevés szerint – kvázilineárisak, akkor láthatjuk, hogy pozitív közjószágszint esetén ez az összefüggés a híres *samuelson*i[55]

$$\sum_{i=1}^{I} MRS_i(q^\circ, m_i^\circ) = MC(q^\circ) = MRT(q^\circ, r^\circ) \qquad (6.\text{B–}3)$$

optimalitási feltételnek felel meg. Jól felismerhető továbbá az ismert geometriai interpretáció is. Ebben a kvázilineáris esetben ugyanis az

[55] Lásd *Samuelson* (1954) és *Samuelson* (1955).

i-edik fogyasztó

$$MRS_i\left(x, m_i\right) = \frac{u_i'\left(x\right)}{1}$$

helyettesítési határaránya minden x közjószágszint mellett a fogyasztó közjószág iránti $p(x)$ inverz keresleti függvényének értékét adja, ha feltételezzük a fogyasztó árelfogadó magatartását. Ezeknek a függvényeknek a vertikális összege tehát a (6.B–3) egyenlet értelmében a hatékony szintnél metszi a közjószág termelésének monoton növekedő határköltségfüggvényét. Ebből az is látható, hogy ebben a gazdaságban az 1.C.6. Állításban szereplő $c'(y) \to \infty$, ha $y \to \infty$ és

$$\max_i u_i'(0) > c'(0)$$

feltételek – a *Bolzano*-tétel segítségével – a hatékony tevékenység létezését is biztosítják. Ez annál is inkább fontos, mert – mint látni fogjuk – a jóléti tétel most nem teszi ezt meg.

6.B.2. A közjószág egyensúlyi szintje

Az egyensúly tárgyalásánál természetesen fenntartjuk a versenyzői mechanizmus legfontosabb vonásait, az elkülönült, önérdekkövető magatartást és az árelfogadást. Jelöljük a közjószág árát most a p szimbólummal, és kövessük azt a normalizálási eljárást, ahol az összetett magánjószág ára egységnyi. Tegyük most fel, hogy a közjószágot a fogyasztók „dobják össze”, mindegyikük eldönti, mennyit vásárol belőle ezen az áron. A közjószág szintje pedig ezeknek a mennyiségeknek az összege lesz.

A termelő a profitját maximalizálja, azaz megoldja a

$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{y \geqq 0,\ r \leqq 0} & & py + r \\ -r & \geqq & c\left(y\right) \end{array}$$

feladatot. A cél- és feltételi függvényekre vonatkozó konvexitási és monotonitási feltételeink értelmében a korlát egyenlőségre teljesül, és ezt behelyettesítve, majd a deriválást elvégezve kapjuk a feladat megoldásának szükséges és elégséges feltételeként, hogy

$$p \leqq c'\left(y^*\right), \quad =, \text{ ha } y^* > 0. \tag{6.B–4}$$

A termelő optimális profitja ezek után nyilván

$$py^* - c\left(y^*\right).$$

Ekkor az *i-edik* fogyasztó jövedelme nem más, mint készleteinek értéke és a profitrészesedésének összege, azaz, ha itt is megtartjuk a szokásos jelöléseinket,

$$M_i(p) = \omega_i + \alpha_i (py^* - c(y^*)),$$

ahol $\forall i$-re $\alpha_i \geqq 0$, és $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 1$. Ezek szerint, amennyiben a többiek $(k \neq i)$ az x_k^* közjószágszintet kívánják finanszírozni, az i-edik fogyasztó a

$$\begin{aligned} \max_{x_i \geqq 0,\ m_i} & \quad u_i\left(x_i + \sum_{k \neq i} x_k^*\right) + m_i \\ px_i + m_i & \leqq \omega_i + \alpha_i (py^* - c(y^*)) \end{aligned}$$

feladatot oldja meg. Mint az előbb, a cél- és feltételi függvényekre vonatkozó konvexitási és monotonitási feltételeink értelmében a korlát itt is egyenlőségre teljesül, és ezt behelyettesítve, majd a deriválást elvégezve kapjuk a feladat megoldásának szükséges és elégséges feltételeként, hogy

$$u_i'\left(x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^*\right) \leqq p, \quad =, \text{ ha } x_i^* > 0. \tag{6.B–5}$$

Ebben a gazdaságban tehát az egyensúlyi p^* árnak és $(x_1^*, \ldots, x_I^*, y^*)$ tevékenységeknek a következő egyenletrendszert kell kielégíteniük:

$$\begin{aligned} p^* & \leqq c'(y^*), \quad =, \text{ ha } y^* > 0, \\ \forall i\text{-re} \quad u_i'\left(x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^*\right) & \leqq p^*, \quad =, \text{ ha } x_i^* > 0, \\ x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^* & = x^* = y^* \triangleq q^*. \end{aligned}$$

Akárcsak a magánjavas gazdaság parciális egyensúlyi modelljében, az 1.C.6. Állításban szereplő $c'(y) \to \infty$, ha $y \to \infty$ és

$$\max_i u_i'(0) > c'(0)$$

feltételek – a *Bolzano*-tétel segítségével – itt is biztosítják az egyensúlyi állapot létezését.

6.B.3. A potyázás lehetősége és eredménye

A közjavas és a magánjavas gazdaság közötti, a definícióból közvetlenül folyó fő különbség az, hogy az egyes fogyasztó nem teljesen szuverén annak a meghatározásában, hogy mennyi közjószágot fogyaszt. Ha a többiek által finanszírozott szintet alacsonynak találja, módjában áll azt megemelni. Ha azonban a többiek által előállíttatott közjószágmennyiség számára túl sok, akkor nem értékesíthet ebből semmit sem, hanem az adott helyzethez kell alkalmazkodnia. Ez az alkalmazkodás a *potyázás*ban ölt testet. A potyázás lehetősége pedig oda vezet, hogy a gazdaságban előállított közjószág mennyisége a hatékony szintnél kisebb lesz. Lássuk ezt formálisan is.[56]

Azt kell belátnunk, hogy $q^* < q^\circ$. Definiáljuk most a δ_i, $i = 1, 2, \ldots, I$ bináris változókat a következőképpen. Legyen $\delta_i = 1$, ha $x_i^* > 0$ és $\delta_i = 0$, ha $x_i^* = 0$. Figyelembe véve a (6.B–4) és (6.B–5) összefüggéseket, kapjuk a

$$\sum_{i=1}^{I} \delta_i \left[u_i'(q^*) - c'(q^*)\right] = 0$$

egyenlőséget. A potyázásnak akkor van értelme, ha legalább két fogyasztó van, és a közjószág előállított mennyisége pozitív, azaz $I > 1$ és $q^* > 0$. Ebben az esetben $\delta_i = 1$ legalább egy i-re, hiszen legalább egy fogyasztónak szükségképpen pozitív mennyiséget kell finanszíroznia a közjószágból. Legyen az általánosság megsértése nélkül ez az $i = 1$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{I} u_i'(q^*) > c'(q^*). \tag{6.B–6}$$

Ellenkező esetben ugyanis a

$$\sum_{i=1}^{I} u_i'(q^*) \leqq c'(q^*)$$

egyenlőtlenség ellentmondáshoz vezet, hiszen

$$u_1'(q^*) = c'(q^*)$$

[56] Ezt többféleképpen tehetjük meg, itt a *Mas-Colell és mások* (1995) könyv 11. fejezetében található érvelést követjük.

és ugyanakkor

$$\sum_{i=2}^{I} u_i'(q^*) > 0,$$

az $u_i'(\cdot)$ függvények feltételezett pozitivitásából.

Ha most összehasonlítjuk a (6.B–2) és a (6.B–6) összefüggéseket, akkor láthatjuk, hogy egyrészt ebben a modellben nem lehet igaz az első jóléti tétel, hiszen $q^* \neq q^\circ$szükségképpen, másrészt a $q^* > q^\circ$ reláció sem állhat fent az $u_i'(\cdot)$ és a $c'(\cdot)$ feltételezett monotonitási tulajdonságai miatt.

Vegyük észre azt is, hogy modellünkben a potyázás egészen szélsőséges formát ölt. Tegyük fel ugyanis, hogy $\forall q \geqq 0$ esetén

$$u_1'(q) > u_2'(q) > \cdots > u_I'(q).$$

Ekkor csak az első fogyasztó állja a számlát, mindenki más potyázik, hiszen a (6.B–5) összefüggés csak őrá állhat fenn egyenlőség formájában.

6.B.4. A Lindahl-egyensúly és hatékonysága

Eddigi modellünkben az okozza a gondot, hogy a fogyasztó kettős kötöttségben vergődik. Egyrészt rögzített számára az ár, másrészt ugyanannyit kell fogyasztania, mint a többieknek. A probléma első érdekes megoldása *Lindahl* nevéhez fűződik.[57] Ő azt feltételezte, hogy az egyes fogyasztók által fogyasztott közjószág magánjószág, de csak az adott fogyasztó vásárolhat belőle, méghozzá pont annyit, mint amennyit a többiek vásárolnak a „saját” (köz)jószágukból. Ekkor ezeknek a privatizált közjószágoknak az ára eltérhet egymástól, és a fogyasztó ehhez az egyéniesített p_i árhoz alkalmazkodik, azt fogadja el. A termelő pedig minden fogyasztótól bekasszírozhatja a közjószág árát. A megoldandó feladata tehát az egyenlőségre teljesülő korlát behelyettesítése után

$$\max_{y \geqq 0} \sum_{i=1}^{I} p_i y - c(y).$$

[57] *Lindahl* (1919).

A feladatot megoldó y^* értéknek ki kell elégítenie az alábbi szükséges és elégséges feltételt:

$$\sum_{i=1}^{I} p_i \leqq c'(y^*), \quad =, \quad \text{ha } y^* > 0. \tag{6.B–7}$$

A fogyasztó feladata szintén az egyenlőségre teljesülő korlátok behelyettesítése után:

$$\max_{x_i \geqq 0} u_i(x_i) - p_i x_i + \omega_i + \alpha_i \left(\sum_{i=1}^{I} p_i y^* - c(y^*) \right).$$

A feladatot megoldó x_i^* értéknek $\forall i$-re ki kell elégítenie az alábbi szükséges és elégséges feltételt:

$$u_i'(x_i^*) \leqq p_i, \quad =, \text{ ha } x_i^* > 0. \tag{6.B–8}$$

Egyenúlyban ezeken kívül teljesülnie kell a

$$\forall i\text{-re } x_i^* = x^* = y^* = q^*$$

egyenlőségsorozatnak, így a (6.B–8) egyenlőtlenségeket figyelembe véve a (6.B–7) összefüggés a

$$\sum_{i=1}^{I} u_i'(q^*) \leqq c'(q^*), \quad =, \ ha\ q^* > 0$$

alakot ölti. Ezt összevetve a (6.B–2) feltétellel, láthatjuk, hogy

$$q^* = q^\circ,$$

azaz a *Lindahl*-egyensúlyban a közjószág szintje hatékony. Egyben azt is igazoltuk, hogy a gazdaságban a hatékony tevékenység egzisztenciája a *Lindahl*-egyensúly létezését is biztosítja.

A *lindahl*i ötlet nagyon szellemes ugyan, mégis van egy komoly hátulütője. A fogyasztó egymaga támaszt keresletet a „privatizált” közjószága iránt, így annak feltételezése, hogy árelfogadó, igencsak gyenge lábakon áll.

6.C. Egyensúly az általános modellben

Most a második fejezetben definiált $e \in \mathcal{E}^w_{A-D}$ gazdaságot módosítjuk egy kicsit. Továbbra is feltesszük, hogy a gazdaságban véges sok jószág van, és rendelkezésünkre áll ezek listája és így egyértelmű sorrendjük. E sorrend szerint indexeljük a jószágokat; a közjószágok indexváltozója m, a magánjószágoké n lesz. A közjószágok (véges) száma M, a magánjószágoké N. Az eddigi N jószág helyett tehát ezentúl $M + N$ jószágot szerepeltetünk, az N magánjószág mellett az első M darab, az $m = 1, \dots, M$ -mel indexelt jószág közjószág.

A következő fogalom a *jószágkosár.* A jószágkosár ezek szerint egy olyan $M+N$ elemű lista, amelynek első M eleme a közjószágokra vonatkozik, és ami megmondja nekünk, hogy az egyes jószágokból mekkora mennyiségről „van szó". A jószágkosárnak mint listának az elemei valós számok, előjelük pozitív, ha a jószág (fogyasztásra) rendelkezésre áll, negatív, ha a jószágot a fogyasztásból kivonjuk. Egy jószágkosarat ezek szerint megfeleltethetünk az $M + N$ dimenziós euklideszi tér egy pontjának, és emiatt ezt az $\mathbb{R}^{M+N}$-nel jelölt teret *jószágtér*nek hívjuk.

A fogyasztókat i-vel indexeljük, halmazuk jele $\mathcal{F}$, e halmaz számossága I. Az i-edik fogyasztót három objektum jellemzi:

- az $X_i \subset \mathbb{R}^M_+ \times \mathbb{R}^N$ fogyasztási halmaz, amelynek elemei a (q_i, x_i) szimbólummal jelölt fogyasztási vektorok;[58]
- az $U_i : X_i \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény;
- a fogyasztó számára a javakból rendelkezésre álló $(0, \omega_i) \in \mathbb{R}^{M+N}$ készletvektor.

A gazdaságban a fogyasztás mellett termelés is folyik, azaz javakat nemcsak kivonunk a rendelkezésre állás alól, hanem a javak – más javakból, transzformáció útján – előállíthatók is. Ezt a termelést csak az $Y \subseteq \mathbb{R}^{M+N}$ termelési halmaz jellemzi, amelynek elemei az (q, y) szimbólummal jelölt termelési vektorok. A termelési vektor egy komponense pozitív, ha azt a jószágot végső soron (nettó módon) termeljük, negatív, ha a termelésben felhasználjuk.

[58] Az Olvasót bizonyára zavarja, hogy a jelölésrendszer nem teljesen konzekvens. A parciális modellekben az x_i szimbólum az egyszerű jószágra vonatkozott, legyen az magán- vagy közjószág. Itt – összhangban az általános modellek esetében használt jelölésekkel – az x_i szimbólum kizárólag a(z egyszerű) magánjószágokra vonatkozik.

Az eddig ismert A–D feltételeket – érthető módon – kissé meg kell változtatnunk:

6.C.1. Feltevés. *Az $Y \subset \mathbb{R}^{M+N}$ termelési halmazra igazak a következők:*

- Y zárt, konvex kúp, és mint ilyen $0 \in Y$;
- ha $0 \neq (q, y) \in Y$, akkor létezik n' , hogy $y^{n'} < 0$ (nincsen rózsa tövis nélkül);
- (a disznó–kolbász feltételre nincs szükség, mert $J = 1$);
- $\forall m$-re $\exists$ $(q, y) \in Y$, hogy $q^m > 0$, (minden közjószág termelhető);
- ha $(q, y) \in Y$, valamint
$$\{r^m = q^m, \text{ha } q^m \geqq 0, \text{de } r^m = 0, \text{ha } q^m < 0\},$$
akkor $(r, y) \in Y$ (közjószágból nincs ráfordításszükséglet).

6.C.2. Feltevés. *$\forall i$-re, azaz $i = 1, \ldots I$ esetén*

- $X_i \subset \mathbb{R}^M_+ \times \mathbb{R}^N$ zárt, konvex, alulról korlátos;
- az $U_i : X_i \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos;
- az $U_i : X_i \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény szigorúan kvázikonkáv;
- a fogyasztó globálisan telhetetlen.

6.C.3. Feltevés. *$\forall i$-re, azaz $i = 1, \ldots I$ esetén*

- $\exists$ $(0, b) \in X_i$, amire $b_i < \omega_i$;
- (a profitból való részesedés nem érdekes, mert a tétlenség lehetősége és a termelési halmaz kúp volta miatt az optimális profit mindig zérus).

Egy ilyen gazdaság megadható az

$$e = \left\{M, N, I, \{X_i\}_{i=1}^I, \{\succcurlyeq_i\}_{i=1}^I, \{0, \omega_i\}_{i=1}^I, Y\right\}$$

listával.

6.C.4. Definíció. *Ebben a fenti modellben az*

$$a = (q, x_1, \dots x_I) \in \mathbb{R}_+^M \times \prod_{i=1}^{I} \mathbb{R}^N$$

pontot (megvalósítható) allokációnak *mondjuk, ha*

$$\forall i\text{-re } (q, x_i) \in X_i \quad \text{és} \quad \left(q, \sum_{i=1}^{I}(x_i - \omega_i)\right) \in Y.$$

6.C.5. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a megvalósíthatóságot itt beépítettük az allokáció fogalmába. A továbbiakban ezért külön nem írjuk ki, ha allokációról beszélünk, feltételezzük a megvalósíthatóságot is.*

Az egyensúlyfogalmunk ebben a modellben kicsit eltér a walrasi, versenyzői egyensúlyfogalomtól, amint azt a parciális esetben is láttuk. Megtartjuk az alapötletet, az árelfogadást, de megszüntetjük a kettős kötöttséget, vagyis azt, hogy a fogyasztandó közjószág mennyisége és ára is egyaránt azonos a fogyasztók számára. Miután a közjószágból definíciószerűen egyforma nagyságot kell fogyasztaniuk, ezért az értük fizetendő ár lesz különböző fogyasztóról fogyasztóra. A mechanizmus egyébként mindenben megegyezik a walrasival,[59] ugyanúgy decentralizált, egyéniérdek-követő, csak ebben tér el tőle. A továbbiakban e mechanizmust *Lindahl-mechanizmus*nak hívjuk. Az ilyen mechanizmussal ellátott, a fentieknek megfelelő környezetű gazdaságokat *Lindahl-gazdaságoknak* hívjuk, jelük $\mathcal{E}^L_{A-D}$.

6.C.6. Definíció. *Az $e \in \mathcal{E}^L_{A-D}$ gazdaság* Lindahl-egyensúly*i állapota egy olyan a $(q^*, x_1^*, \dots, x_I^*)$ megvalósítható allokációból, illetve egy*

$$(p_1^{(q)}, \dots p_I^{(q)}, p^{(x)}) \geqq (\neq) 0$$

árrendszerből álló pont, amelyre

- $\sum_{i=1}^{I} p_i^{(q)} q^* + p^{(x)} \sum_{i=1}^{I}(x_i^* - \omega_i) \geqq \sum_{i=1}^{I} p_i^{(q)} q + p^{(x)} y \quad \forall\, (q, y) \in Y;$
- $\forall i$-re, ha $U_i(q_i, x_i) > U_i(q_i^*, x_i^*)$, akkor

$$p_i^{(q)} q_i + p^{(x)} x_i > p_i^{(q)} q_i^* + p^{(x)} x_i^* = p_i^{(q)} 0 + p^{(x)} \omega_i = p^{(x)} \omega_i.$$

[59] A fogyasztó jövedelme ugyanúgy készleteiből képződik.

6.C.7. Állítás. *A 6.C.1., 6.C.2. és 6.C.3. Feltevések mellett az* $e \in \mathcal{E}^L_{A-D}$ *gazdaságban létezik* Lindahl-egyensúly.

Bizonyítás: Definiáljuk a következő $\bar{Y} \subset \mathbb{R}^{I \cdot M+N}$ és $\bar{X}_i \subset \mathbb{R}^{I \cdot M+N}$, $\forall i$-re halmazokat:

$$\bar{Y} = \{(q_1, q_2, \dots q_I, y) \, | q_i = q \; \forall i\text{-re} \quad \textit{és} \quad (q, y) \in Y\},$$

$$\bar{X}_i = \{(0, \dots, 0_{i-1}, q_i, 0_{i+1}, \dots, 0_I, x_i \, | (q_i, x_i) \in X_i)\}.$$

Erre az $I+1$ halmazra az $\mathbb{R}^{I \cdot M+N}$ térben fennállnak az *Arrow–Debreu*-modell feltételei közül azok, amelyekkel egy termelő esetén bizonyítani tudjuk az *Arrow* és *Debreu* által definiált *kváziegyensúly*[60] létezését.[61] Így ebben az új gazdaságban létezik olyan $(p_1^{(q)}, \dots p_I^{(q)}, p^{(x)}) \in P^{I \cdot M+N}$ árrendszer és

$$a^* = \left((q_1^*, 0, \dots, 0_I, x_1^*), \dots, (0, \dots, 0_{I-1}, q_I^*, x_I^*), (q_1^*, \dots q_I^*, y^*)\right)$$

allokáció, amelyekre

- $q_i^* = q^* \quad \forall i$-re, és $\sum_{i=1}^I (x_i^* - \omega_i) = y^*$;
- $\sum_{i=1}^I p_i^{(q)} q_i^* + p^{(x)} y^* \geqq \sum_{i=1}^I p_i^{(q)} q + p^{(x)} y \quad \forall (q, y) \in Y$-ra;
- $\forall i$-re és $\forall (q_i', x_i') \in X_i$-re, ha $U_i(q_i', x_i') \geqq U_i(q_i^*, x_i^*)$, akkor

$$p_i^{(q)} q_i' + p^{(x)} x_i' \geqq p_i^{(q)} q_i^* + p^{(x)} x_i^* = p_i^{(q)} 0 + p^{(x)} \omega_i = p^{(x)} \omega_i.$$

---

[60] A kváziegyensúly a versenyzői egyensúlytól csak a fogyasztókra vonatkozó kitételben különbözik. Itt nem feltétlenül követeljük meg, hogy a fogyasztó maximalizálja a hasznát a költségvetési halmaza felett, hanem megengedjük, hogy a kváziegyensúlyi p^* árrendszerben az x_i^* fogyasztási vektornak a fogyasztó jövedelmével egyenlő értéke a fogyasztási halmaz feletti létminimummal egyezzen meg. Szimbólumokkal: $\forall i$-re

$$\begin{aligned} x_i^* &\in X_i(p^*) \text{ és/vagy} \\ p^* x_i^* &= M_i(p^*) = \min p^* X_i. \end{aligned}$$

Érdemes megmutatni – ezt most az olvasóra bízzuk –, hogy az imént definiált kváziegyensúlyban és a 4.B.5. Definícióban adott jövedelemtranszfer melletti kváziegyensúlyban a fogyasztókra vonatkozó viselkedési szabály – feltételeink mellett – ekvivalens.

[61] A bizonyítást lásd a *Debreu* (1962) cikkben.

Tegyük most fel, hogy $p^{(x)} = 0$. Ekkor valamelyik $p_i^{(q)} \geqq (\neq)\, 0$. Tekintsük azt a közjószágot, amelynek ebben az egyéni árvektorban pozitív ára van. Ezt – a termelhetőségi feltételünk miatt – pozitív mennyiségben elő tudjuk állítani. De azt is tudjuk, hogy más közjószág nem kell a termeléshez, így ezt a közjószágot zérus költség mellett termelhetjük. Emiatt e termelés pozitív profitot hozna, ami ellentétben van Y kúp voltával. Tehát $p^{(x)} \geqq (\neq)\, 0$.

A kváziegyensúly harmadik feltételéből kapjuk, hogy ha $U_i(q_i', x_i') > U_i(q_i^*, x_i^*)$, akkor

$$p_i^{(q)} q_i' + p^{(x)} x_i' \geqq p_i^{(q)} q_i^* + p^{(x)} x_i^* = p_i^{(q)} 0 + p^{(x)} \omega_i = p^{(x)} \omega_i.$$

Tegyük fel, hogy az egyenlőség áll fenn. Ekkor a készletekre vonatkozó feltételünk és a magánjavakra vonatkozó árvektor szemipozitivitása miatt a $(0, b_i) \in X_i$ fogyasztási tevékenységre $p_i^{(q)} 0 + p^{(x)} b_i < p^{(x)} \omega_i$. Ebből $\lambda \in (0, 1)$ esetén

$$p_i^{(q)} \left(\lambda q_i' + (1 - \lambda)\, 0\right) + p^{(x)} \left(\lambda x_i' + (1 - \lambda)\, b_i\right) < p^{(x)} \omega_i.$$

Ha λ elég közel van 1-hez, akkor az U_i függvények folytonossága miatt e konvex kombináció határozottan jobb az i-edik fogyasztó számára, mint (q_i^*, x_i^*). De ez ellentmond a kváziegyensúly harmadik feltételének, hiszen olcsóbb is nála. Tehát az egyenlőtlenségnek kell fennállnia. Így a *Lindahl*-egyensúly minden feltétele teljesül. □

6.D. A Lindahl-egyensúly és a mag kapcsolata

A *Lindahl*-egyensúly egzisztenciájának bizonyítása után nézzük meg annak hatékonyságát is. Sőt követve a magánjavas gazdaságokra elmondottakat, azt is megvizsgáljuk, hogy a *Lindahl*-egyensúlyi allokáció a magnak is eleme-e.

6.D.1. Definíció. *Az $a \in \mathbb{R}_+^M \times \prod_{i=1}^I \mathbb{R}^N$ allokáció* Pareto-hatékony, *ha nem létezik olyan másik $a' \in \mathbb{R}_+^M \times \prod_{i=1}^I \mathbb{R}^N$, hogy*

$$\begin{aligned} U_i(q', x_i') &\geqq U_i\,(q, x_i) \quad \forall i\text{-re}, \quad \textit{és} \\ \exists i' \quad \textit{hogy} \quad U_{i'}(q', x_{i'}') &> U_{i'}\,(q, x_{i'})\,. \end{aligned}$$

6.D.2. Definíció. *Egy $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}$ koalíció* blokkolja *az $a \in \mathbb{R}_+^M \times \prod_{i=1}^I \mathbb{R}^N$ allokációt, ha létezik olyan $(\bar{q}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_I)$ allokáció, amelyre*

$$\begin{aligned}
&U_i(\bar{q}, \bar{x}_i) \geqq U_i(q, x_i) \quad \forall i \in \mathcal{N}\text{-re;} \\
&\exists i' \in \mathcal{N}, \quad hogy \quad U_{i'}(\bar{q}, \bar{x}_{i'}) > U_{i'}(q, x_{i'})\,; \\
&\left(\bar{q}, \sum_{i \in \mathcal{N}} (\bar{x}_i - \omega_i)\right) \in Y.
\end{aligned}$$

Egy $a \in \mathbb{R}_+^M \times \prod_{i=1}^I \mathbb{R}^N$ allokáció a gazdaság magjának eleme, ha egy nemüres koalíció sem blokkolja.

6.D.3. Megjegyzés. *Egy magbeli allokáció nyilván* Pareto-*hatékony.*

6.D.1. A jóléti tételek

Az első jóléti tétel általánosítása erre a gazdaságra kézenfekvő módon történik. Megmutatjuk, hogy a *Lindahl*-egyensúlyi allokáció a gazdaság magjának eleme, és ebből azonnal következik hatékonysága. Ezután néhány megjegyzést teszünk a második jóléti tétel alkalmazhatóságával kapcsolatban.

6.D.4. Állítás. *A* Lindahl-*egyensúlyi allokáció benne van a gazdaság magjában.*

Bizonyítás: Tegyük fel, nincs benne. Ekkor létezik olyan $\mathcal{S}$ koalíció, ami blokkolja. Legyen a blokkolásban szereplő allokáció a'. Ekkor

$$\begin{aligned}
U_i(q_i', x_i') &\geqq U_i(q_i^*, x_i^*) \quad \forall i \in \mathcal{S}\text{-re és} \\
U_{i'}(q_{i'}', x_{i'}') &> U_{i'}(q_{i'}^*, x_{i'}^*) \text{ legalább egy } i' \in \mathcal{S}\text{-re.}
\end{aligned}$$

Ezekből a *Lindahl*-egyensúly definíciója miatt:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} p_i^{(q)} q' + p^{(x)} \sum_{i \in \mathcal{S}} x_i' > \sum_{i \in \mathcal{S}} p_i^{(q)} q^* + p^{(x)} \sum_{i \in \mathcal{S}} x_i^* = p^{(x)} \sum_{i \in \mathcal{S}} \omega_i.$$

Átrendezve:

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} p_i^{(q)} q' + p^{(x)} \sum_{i \in \mathcal{S}} (x_i' - \omega_i) > 0,$$

amiből, mivel $q' \geqq 0$ és az árak is nemnegatívak,

$$\sum_{i=1}^{I} p_i^{(q)} q' + p^{(x)} \sum_{i \in \mathcal{S}} (x'_i - \omega_i) > 0.$$

A blokkolás definíciója miatt:

$$\left(q', \sum_{i \in \mathcal{S}} (x'_i - \omega_i) \right) \in Y.$$

Ez azt jelenti, hogy ez a termelési tevékenység pozitív profitot hozna, ami az Y halmaz kúp volta miatt ellentmond az egyensúly profitmaximalizálási feltételének. □

6.D.5. Megjegyzés. *A fenti állítás közvetlen folyománya: egy* Lindahl-*egyensúlyi allokáció szükségképpen* Pareto-*hatékony.*

Az első jóléti tétel igazságának belátása után természetes módon merül fel a *Lindahl*-mechanizmus alkalmazhatóságának a kérdése a második jóléti tétel relevanciájával kapcsolatban. Válasszunk ki egy valamilyen szempontból megfelelőnek tartott hatékony tevékenységet és vizsgáljuk meg, hogy vajon ezt a tevékenységet támogathatnánk-e egy olyan decentralizált piaci mechanizmussal, mint a *lindahl*i. Ha megmutatnánk is, hogy létezik egy, a preferenciáktól és a technológiától függő szeparáló árrendszer, amilyet a második jóléti tétel bizonyításában is találtunk, még mindig erősen kérdéses marad, hogy emellett a piaci szereplők hajlandók lennének-e árelfogadóként viselkedni egy olyan piacon, ahol ők az egyedüli vásárlók. Ezt csak akkor tudnánk biztosítani, ha ez az árrendszer kompatibilis lenne egyrészt az érdekkövető magatartásukkal, másrészt a preferenciáikkal. Ehhez azonban ismerni kellene ezeket a preferenciákat, amire nyilvánvalóan kevés a remény[62]. Emiatt a potyázás lehetőségét nem tudjuk igazán megszüntetni. Ennek a jelenségnek a másik oldala az a tény, hogy közjavas gazdaságban a mag is másképpen viselkedik, ha a szereplők számát növeljük, mint egy magánjavas gazdaságban.

[62] Lásd erről például a *Clarke* (1973) tanulmányt!

6.D.2. A „kemény mag”

Ebben a pontban egy példa segítségével megmutatjuk, hogy a közjavas gazdaságban a mag nem úgy viselkedik, mint a tiszta magánjavas gazdaságokban, hiszen a közjószágok szerepeltetése azt okozza, hogy a mag nem feltétlenül húzódik rá a *Lindahl*-egyensúlyi allokációk halmazára, ahogy a szereplők számát növeljük.[63]

Tekintsünk először egy olyan gazdaságot, amiben egy köz-, illetve egy összetett magánjószág termelhető, fogyasztható. Legyen ebben a gazdaságban 1 fogyasztó, akinek fogyasztási halmaza az $\mathbb{R}^2_+$, készletvektora a $(0, \omega)$ vektor, preferenciái az $u(q, x) = qx$ hasznossági függvénnyel reprezentálható *Cobb–Douglas*-típusúak. A gazdaságban szintén egy termelő tevékenykedik, technológiája kúp:

$$Y = \{\lambda\,(1, -1)\,|\lambda \geqq 0\}\,.$$

Jelöljük a közjószág árát a p szimbólummal, és rögzítsük az összetett magánjószág árát az 1 értéken. A termelő optimális profitja a konstans mérethozadék miatt nyilván zérus, a fogyasztó jövedelme így az ω értékkel egyenlő. A kereslete a p ár mellett:

$$q = \frac{\omega}{2p}, \quad x = \frac{\omega}{2}.$$

A fogyasztónk tehát $\omega/2$ magánjószágot fordít a közjószág előállíttatására. Ha figyelembe vesszük a piactisztítási feltételt és a technológia kúp voltát, akkor a termelési vektor

$$\left(\frac{\omega}{2}, -\frac{\omega}{2}\right)$$

és az egyensúlyi p^* ár is egységnyi. A fogyasztó elérhető maximális haszna ekkor

$$u(q^*, x^*) = \frac{\omega^2}{4}.$$

Ezután tekintsünk egy olyan gazdaságot, amiben 2 egyforma fogyasztó van, egyébként minden tekintetben megegyezik az előzővel. Itt a

$$((q^*, x_1^*)\,, (q^*, x_2^*)\,, (q^*, y^*)\,, (p_1^*, p_2^*, 1))$$

[63] A számpéldát a *Muench* (1972) cikkből kölcsönöztük.

Lindahl-egyensúlyban

$$\begin{aligned}
i = 1, 2\text{-re} \quad (q^*, x_i^*) &= \left(\frac{2 \cdot \omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right) \\
(q^*, y^*) &= \left(\frac{2 \cdot \omega}{2}, -\frac{2 \cdot \omega}{2}\right) \\
p_1^* = p_2^* &= 1/2.
\end{aligned}$$

A fogyasztók összhaszna itt

$$\sum_{i=1}^{2} u_i(q^*, x_i^*) = 2 \cdot \frac{2 \cdot \omega}{2} \cdot \frac{\omega}{2} = \frac{2^2 \omega^2}{4}.$$

Végül nyilvánvaló, hogy egy olyan gazdaságban, ahol az egyforma fogyasztók száma I, a megfelelő értékek:

$$\begin{aligned}
\forall i\text{-re} \quad (q^*, x_i^*) &= \left(\frac{I \cdot \omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right) \\
(q^*, y^*) &= \left(\frac{I \cdot \omega}{2}, -\frac{I \cdot \omega}{2}\right) \\
\forall i\text{-re} \quad p_i^* &= 1/I.
\end{aligned}$$

A fogyasztók összhaszna:

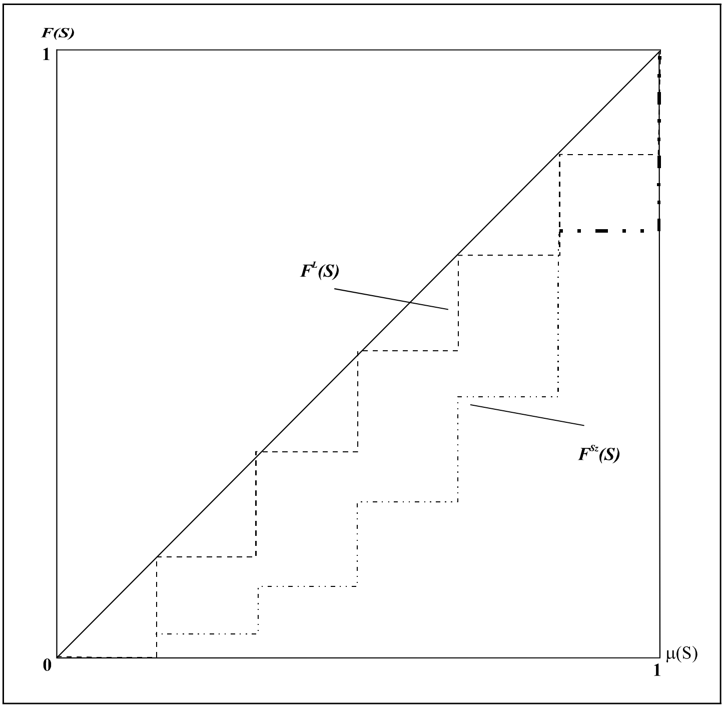
$$\sum_{i=1}^{I} u_i(q^*, x_i^*) = I \cdot \frac{I \cdot \omega}{2} \cdot \frac{\omega}{2} = \frac{I^2 \omega^2}{4}.$$

Ebben a gazdaságban tekintsünk most egy tetszőleges $\mathcal{S}$ koalíciót, tagjai száma legyen S. Ez a koalíció is nyilván „hozzáfér” a technológiához, ezért ha magukra maradnának, vagy kiválnának, számukra a közjószág optimális szintje

$$q_{\mathcal{S}} = \frac{S\omega}{2}$$

lenne. Emiatt az egyforma fogyasztók egyéni haszna $S\omega^2/4$, a koalíció összhaszna $V(\mathcal{S}) = S^2\omega^2/4$.

Egy haszonallokáció nem más, mint egy olyan $(u_1, u_2, \ldots, u_I)$ vektor, amelynek i-edik komponense az i fogyasztó (egy allokációból származó)



6.D.1. ábra: A *Lindahl*-egyensúly és a mag véges esetben

egyéni haszna. Az e gazdaság magbeli haszonallokációinak halmaza legyen $\mathcal{CU}(e)$. Ha egy allokáció benne van a magban, akkor egy koalíció sem blokkolhatja, azaz

$$(u_1, u_2, \ldots, u_I) \in \mathcal{CU}(e)$$

akkor és csak akkor, ha

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} u_i \geqq \frac{S^2 \omega^2}{4} \quad \forall \mathcal{S} \in \mathcal{F},$$

hiszen, ha egy $\mathcal{S}$ koalíciónak az allokációból kevesebb haszna származna, mint $V(\mathcal{S})$, akkor egyszerűen „kiszállnának a buliból”, hiszen saját készletüket újraosztva a tagok között jobban járnának.

A haszonallokációkat a *Lorentz*-diagram típusú 6.D.1. ábrán láthatjuk. Az ábrázolás során a következő eljárást követtük.

(i) A fogyasztókat újraindexeljük következőképpen. Egy tetszőleges $(u_1, u_2, \ldots, u_I)$ haszonallokáció esetében tekintsük az 1. fogyasztónak azt, aki a legrosszabbul jár, és így tovább. Nyilvánvaló, hogy az I-edik fogyasztó jár a legjobban. Ezt az újraindexelést nyugodtan megtehetjük, nem sértjük az általánosságot, hiszen a fogyasztók egyformák (klónok).

(ii) Tetszőleges $(u_1, u_2, \ldots, u_I)$ haszonallokációhoz definiáljuk az

$$F(\mathcal{S}) = \frac{\sum_{i=1}^{S} u_i}{\sum_{i=1}^{I} u_i}$$

eloszlásfüggvényt!

(iii) Ábrázoljuk ezt az eloszlásfüggvényt úgy, hogy a vízszintes tengelyre mérjük fel a koalíció $\mu(\mathcal{S}) = S/I$ súlyát, a függőleges tengelyre pedig az $\mathcal{S}$ koalíció által a haszonallokációban elért $F(\mathcal{S})$ arányt.

Vajon mely allokációkat tekinthetjük magbelieknek? A válaszhoz először definiáljuk a legszélsőségesebb, azaz legegyenlőtlenebb haszonelosztást megvalósító, még magbeli allokációt. Ez minden $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ koalícióhoz azt a haszonallokációt rendeli, amit az adott koalíció nem blokkol. Miután a fogyasztók teljesen egyformák, ez a haszonallokáció csak a koalícióban résztvevők számának függvénye, ezért könnyű ábrázolni. Ábrabeli példánkban $I = 6$. Az azonos számú fogyasztókból álló koalíciókat megkülönböztetni nem tudjuk a fogyasztók azonos tulajdonságai miatt. Ezért csak azt kell megvizsgálnunk, hogy egy 1, 2, ..., 6 főből álló koalíció mekkora, számára minimális összhasznú allokációt hajlandó elfogadni. Ezt az eloszlásfüggvényt az

$$F^{Sz}(\mathcal{S}) = \frac{S^2\omega^2/4}{I^2\omega^2/4} = \frac{S^2}{I^2} = (\mu(\mathcal{S}))^2$$

szabállyal adhatjuk meg, ahol rendre $S = 1, 2, ..., 6$ és $I = 6$.

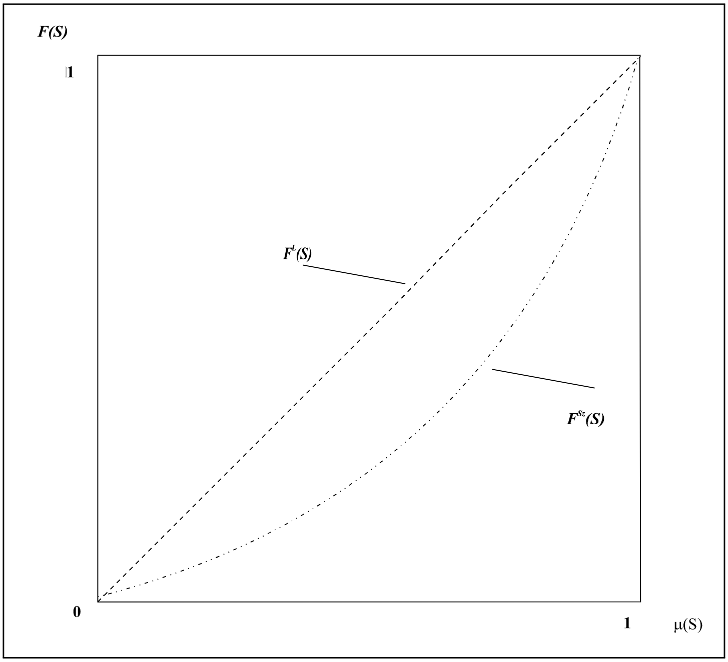
A magbeli allokációkhoz tartozó haszonallokáció-értékekre ezért nyilván minden $S = 1, 2, ..., 6$ esetben

$$(\mu(\mathcal{S}))^2 \leqq F(\mathcal{S}) \leqq \mu(\mathcal{S}) = S/I.$$

Ha most a *Lindahl*-egyensúlyi allokációt tekintjük, akkor láthatjuk, hogy ez is a mag eleme, hiszen az erre definiált

$$F^L(\mathcal{S}) = \frac{S \cdot I \cdot \omega^2/4}{I^2\omega^2/4} = \frac{S}{I} = (\mu(\mathcal{S}))$$

eleget tesz ennek a feltételnek.



6.D.2. ábra: A *Lindahl*-egyensúly és a mag végtelen sok fogyasztó mellett

Növeljük most a gazdaságbeli fogyasztók számát! Ha I minden határon túl nő, akkor a fogyasztók halmaza (legyen ez kontinuum számosságú) a $[0,1]$ intervallumnak feleltethető meg. Ezt a helyzetet illusztrálandó szerkesztettük meg a 6.D.2. ábrát.

Ezen a legegyenlőtlenebb haszonallokációhoz tartozó eloszlásfüggvény az

$$F^{Sz}(\mathcal{S}) = (\mu(\mathcal{S}))^2$$

alakot ölti. Ha most a *Lindahl*-egyensúlyi allokációt tekintjük, akkor most is láthatjuk, hogy a mag eleme, hiszen

$$F^L(\mathcal{S}) = (\mu(\mathcal{S})),$$

azaz pontosan egybeesik az átlóval. A magbeli haszonallokációk pedig most is azok, amikre

$$(\mu(\mathcal{S}))^2 \leqq F(\mathcal{S}) \leqq \mu(\mathcal{S}) = S/I,$$

azaz a mag jól láthatóan nem húzódott rá a *Lindahl*-egyensúlyi allokációk halmazára.

Mi lehet vajon ennek az oka? A válasz egyszerű. Amíg a tisztán magánjavas gazdaságban a fogyasztók által elfogyasztható kosarak csak a saját készletüktől – és a termeléstől – függnek, addig a közjavak előállítása során mindenki pozitív módon befolyásolja a többiek által elérhető hasznot. Emiatt a blokkolás, azaz a kivonulás, egyben a többiek által finanszírozott közjószágból nyerhető haszonról történő lemondással jár együtt. A versenyzői gazdaság pont ebben a jelenségben különbözik lényegesen attól az esettől, amikor közjavak is megtalálhatók a gazdaságban: a mag ez utóbbiban nem húzódik rá az egyensúlyi allokációk halmazára.

Hivatkozott irodalom

Arrow, K. J. (1951): An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics. Megjelent: *Neymann, J.* (szerk.): *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.* University of California Press, Los Angeles, 507–532. o.

Arrow, K. J. (1979): *Egyensúly és döntés.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Arrow, K. J.–Debreu, G. (1954): Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, **22**: 265–290. o.

Arrow, K.–Hahn, F. (1971): *General Competitve Analysis.* Holden-Day, San Francisco.

Arrow, K.–Intriligator, M. (szerk.) (1982): *Handbook of Mathematical Economics. Vol. II.* North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York.

Aumann, R. (1964): Market with Continuum of Traders. *Econometrica*, **32**: 39–50. o.

Aumann, R. (1966): Existence of Competitive Equilibria in Markets with Continuum of Traders. *Econometrica*, **34**: 1–17. o.

Berge, C. (1963): *Topological Spaces.* Macmillan, London.

Clarke, E. (1973): Multipart Pricing of Public Goods. *Public Choice*, **2**: 17–33. o.

Cornes, R.–Sandler, T. (1986): *The Theory of Externalities, Public Goods and Club Goods.* Cambridge University Press, Cambridge, MA.

Cornwall, R. (1984): *Introduction to the Use of General Equilibrium Analysis.* North-Holland, Amsterdam.

Csekő, I. (2016): *Közösségi döntések, gazdasági mechanizmus, általános egyensúly.* Budapesti CORVINUS Egyetem, Budapest.

Debreu, G. (1952): A Social Equilibrium Existence Theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **38**: 886–893. o.

Debreu, G. (1954): Valuation Equilibrium and Pareto Optimum. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **40**: 588–592. o.

Debreu, G. (1956): Market Equilibrium. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **42**: 876–878. o.

Debreu, G. (1959): *Theory of Value.* Wiley, New York.

Debreu, G. (1962): New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis. *International Economic Review*, **3**: 257–273. o.

Debreu, G. (1964): Continuity Properties of Paretian Utility. *International Economic Review*, **5**: 178–184. o.

Debreu, G. (1982): Existence of Competitive Equilibrium. Megjelent: *Arrow, K.–Intriligator, M.* (szerk.): *Handbook of Mathematical Economics. Vol. II.* North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, 697–713. o.

Debreu, G. (1987): *Közgazdaságtan axiomatikus módszerrel.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Debreu, G.–Scarf, H. (1963): A Limit Theorem on the Core of an Economy. *International Economic Review*, **4**: 235–246. o.

Edgeworth, F. Y. (1881): *Mathematical Psychics.* Kegan Paul, London.

Ellickson, B. (1993): *Competitive Equilibrium.* Cambridge University Press, Cambridge.

Foley, D. (1970): Lindahl's Solution and the Core of an Economy with Public Goods. *Econometrica*, **38**: 66–72. o.

Hegedűs, M.–Zalai, E. (1978): *Fixpont és egynsúly a gazdasági modellekben.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Hildenbrand, W.–Kirman, A. P. (1976): *Introduction to Equilibrium Analysis.* North-Holland-Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York.

Hildenbrand, W. (1974): *Core and Equilibria of a Large Economy.* Princeton University Press, Princeton, N. J.

Kakutani, S. (1941): A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem. *Duke Mathematical Journal*, **8**: 457–459. o.

Lindahl, E. (1919): Just Taxation–a Positive Solution. Megjelent: *Musgrave, R.–Peacock, A.* (szerk.): *Classics in the Theory of Public Finance.* MacMillan, London, 168–176. o.

Marshall, A. (1920): *Principles of Economics.* Macmillan, New York.

Mas-Colell, A.–Whinston, M.–Green, J. (1995): *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, Oxford.

McKenzie, L. (1954): On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems. *Econometrica*, **22**: 147–161. o.

McKenzie, L. (1959): On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market. *Econometrica*, **27**: 54–71. o.

McKenzie, L. (1961): On the Existence of General Equilibrium: Some Corrections. *Econometrica*, **29**: 247–248. o.

Milleron, J.-C. (1972): Theory of Value with Public Goods: A Survey Article. *Journal of Economic Theory*, **5**: 419–477. o.

Moore, J. C. (2007): *General Equilibrium and Welfare Economics.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

Muench, T. (1972): The Core and the Lindahl Equilibrium of an Economy with Public Goods: an Example. *Journal of Economic Theory*, **4**: 241–255. o.

Nash, J. F. (1950): Equilibrium Ponits in N-Person Games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **36**: 48–49. o.

Pareto, W. (1906): Manuel d'economie politique. Angolul megjelent: *Manual of Political Economy.* Augustus M. Kelley Publishers, New York, 1971.

Samuelson, P. (1954): The Pure Theory of Public Expenditure. *Review of Economics and Statistics*, **36**: 387–389. o.

Samuelson, P. (1955): Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure. *Review of Economics and Statistics*, **37**: 350–356. o.

Shafer, W.–Sonnenschein, H. (1982): Market Demand And Excess Demand Functions. Megjelent: *Arrow, K.–Intriligator, M.* (szerk.): *Handbook of Mathematical Economics. Vol. II.* North-Holland, Amsterdam, Oxford, New York, 671–693. o.

Smith, A. (1776): ... The Wealth of Nations. Magyarul megjelent: *A nemzetek gazdagsága*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1992.

Sonnenschein, H. (1973): Do Walras' Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions? *Journal of Economic Theory*, **6**: 345–354. o.

Starr, R. M. (1997): *General Equilibrium Theory.* Cambridge University Press, Cambridge.

Uzawa, H. (1962): Walras' Existence Theorem and Brouwer's Fixed Point Theorem. *Economic Studies Quarterly*, **13**: 59–62. o.

Walras, L. (1874-77): Éléments d'économie politique pure. Angolul megjelent: *Elements of Pure Economics*. Irwin, London, 1954.

Zalai, E. (2000): *Matematikai közgazdaságtan.* KJK-Kerszöv, Budapest.

#03

Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe

Miért olvassam el?

Az általános egyensúlyelmélet a közgazdaságtan máig meghatározó, uralkodó paradigmája. Fő állítása, alaptétele, hogy az egymástól elkülönült, önérdekkövető gazdasági szereplők cselekedetei nem káoszhoz, hanem egy ellentmondásmentes állapothoz, a versenyzői egyensúlyhoz vezetnek, és ez az egyensúly hatékony. Adam Smith válasza arra a kérdésre, hogy vajon miként lehetséges ez, az, hogy a piacon egy „láthatatlan kéz" koordinálja és vezeti egyensúlyba a rendszert. Ez a gondolat a társadalomtudományok talán legnagyobb hatású metaforája.

E könyv címe, Rövid bevezetés az általános egyensúly elméletébe, teljes mértékben fedi a tartalmat, a kötet ténylegesen rövid, és nem lép túl egy bevezetés keretein. A szöveg talán jobban érzékelhetővé teszi a fenti, több mint kétszáz éves gondolatkört, amely Adam Smithtől Walras, Edgeworth és Pareto munkáin át egészen az Arrow—Debreu szerzőpáros egzisztenciatételéig terjed, azáltal, hogy igyekszik bemutatni a gondolatmenet matematikai hátterét is.