

# **TANSZÉKI TANULMÁNYOK**

## **2010 / 4**

### **IDŐBEN VÁLTOZÓ EGYÜTTHATÓJÚ ÖKONOMETRIAI MODELLEK**

**Varga Balázs**

Budapest, 2010. október 31.



# Időben változó együtthatójú ökonometriai modellek

Varga Balázs<sup>1</sup>

2010. október 31.

**Kivonat.** A cikk bevezetést nyújt az időben változó együtthatójú lineáris ökonometriai modellek megoldási módzataiba és elemzi ökonometriai képességeiket. Elsőként az állapot-tér modellkeretben működő Kalman-szűrőt és a hozzá szorosan kapcsolódó (ám kevésbé ismert) rugalmas legkisebb négyzetek módszerét ismertetjük, majd az alternatívaként használható Markov-típusú rezsimváltó modellt mutatjuk be. A két modellesalád kvalitásait szimulációkkal illusztráljuk.

**JEL (Journal of Economic Literature) kódok:** C22, C63

**Kulcsszavak:** időben változó együtthatójú (TVC) modell, Kalman-szűrő, rugalmas legkisebb négyzetek, Markov rezsimváltó modell

## 1 Bevezetés

A lineáris modelleknek számos előnye van az ökonometriában a nemlineáris specifikációkkal szemben: átláthatóbbak, egyszerűbb a heurisztikájuk, egyszerűbb közgazdasági elmélettel alátámasztani őket, és nem utolsó sorban könnyebben is becsülhetők és használhatóak előrejelzésekre. A megfigyelhető közgazdasági idősorok azonban sokszor jóval bonyolultabbnak tűnnek annál, hogy egyszerű lineáris modellekkel leírhatóak legyenek, ilyenkor ésszerűnek tűnik elhagyni a linearitási feltevést a valóság jobb leírása érdekében. Nemlineáris specifikációból – amely alatt e cikkben a modell változóiban való nemlinearitást értjük – viszont végtelen sokféle van, az áttéréssel pedig több jó tulajdonságot is kockáztatunk.

A nemlineáris modellek előnytelen tulajdonságai közül hármat emelünk ki: az előrejelzés nehézségét, a modell-validáció problémáit, és végül a nehéz közgazdasági interpretációt. Előbbi illusztrálásához gondoljunk arra, hogy az előrejelzés nem jelent mást, mint a modellezett változó feltételes várható értékének kiszámítását, illetve előreiterálását. A változóiban lineáris egyenletnél mindez könnyű, hiszen a várható érték operátor maga is lineáris, nemlineáris esetben viszont már gondban lehetünk, hiszen az elsők kívüli momentumok megadása is szükséges lesz. Érdekes köztes megoldást képeznek erre a

---

<sup>1</sup> OTP Alapkezelő Zrt. és Budapesti Corvinus Egyetem, e-mail: balazs.varga@uni-corvinus.hu. A tanulmány az OTKA 73782. számú kutatási támogatása révén valósult meg. A szerző hálás köszönettel tartozik Darvas Zsoltnak a javításaiért és tanácsaiért.

problémára a GARCH-típusú modellek, ahol az eredeti idősor nemlineáris transzformáltjára – a varianciára írunk fel lineáris előrejelzést, lényegében AR és MA tagokkal.

A modell-validáció problémája alatt azt értjük, hogy a nemlineáris modellek végtelen flexibilitása könnyen jó illeszkedést tud produkálni, miközben a tényleges előrejelző képesség nem javul. Ez a probléma több módszerrel is kezelhető, például az előrejelző képesség módszeres tesztelésével vagy a komplexitást büntető kritériumokkal, de a modellek túlillesztése így is igen könnyen előfordulhat.

A nehéz közgazdasági értelmezhetőség egyértelmű az olyan, „black-box” típusú nemlineáris modelleknél, mint a neurális hálók: ezek a modellek párhuzamos struktúrákból épülnek fel, az eredményváltozó ugyanazon bemenetekből kiindulva több szálon is befolyásolható. Épp ez a felépítés adja a neurális hálók jól ismert mintázat-felismerő képességét, viszont igencsak lecsökkenti az elméleti háttér lehetőségét, hiszen a közgazdaságtanban adott kauzális összefüggést leginkább egyféle módon tudunk magyarázni. A neurális hálók közgazdasági alkalmazásaihoz jó kiindulást ad Kaastra és Boyd (1996).

A neurális háló egy elég szélsőséges példa, de sok egyszerűbb nemlineáris modellspecifikációnak is csak nehezen találni közgazdasági elméleti alátámasztást. Viszonylag friss példaként említjük erre Granger és Hyung (2006) min-max típusú modellsaládját. Képzeljünk el egy olyan egy- vagy kétváltozós kointegrált folyamatot, ahol a determinisztikus részt a folyamatok előző időszakai értékeinek és egy konstansnak a maximuma (vagy minimuma) adja. A szerzők kamatláb-különbségekre alkalmazzák a modellt, ahol az arbitrázs csak akkor indul be, ha a különbség már elért egy bizonyos mértéket. Ilyen folyamatra sem lehetetlen tehát elméletet találni, mindenesetre a helyzet az, hogy a makroökonómiai hipotézisek döntő többsége lineáris, vagy lineárisra alakítható összefüggést eredményez.

Ha a nemlineáris modellek hátrányai miatt mégis a lineáris modelleknél akarunk maradni, de feltételezhető, hogy a linearitási feltevés túlzottan megszorító (például strukturális törések miatt), hogyan tudjuk rugalmasabbá tenni a lineáris modelleket? Az időben változó együtthatójú lineáris modellek erre kínálnak alternatívát. Mi több, egy egyszerű tétel segítségével beláthatjuk, hogy az áttéréssel egyáltalán nem kell a nemlinearitás adta sokféleségről lemondanunk. A White-tétel (Granger, 2008) lényegében azt mondja ki, hogy tetszőleges véges és nem nulla várható értékű  $y_t$  idősor leírható olyan AR(1) modellel, amelynek együtthatója időben változik – pontosabban megfogalmazva létezik olyan  $\beta_t$   $t-1$ . időszakos filtrációra ( $F_{t-1}$ -re) mérhető, és  $\varepsilon_t$  martingál-differencia idősor, melyekre

$$y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

A tételnek messzemenő következményei vannak: kimondja, hogy bizonyos értelemben felesleges nemlineáris modellek specifikációjával vesződnünk, hiszen lineáris modellek időben változó együtthatóival éppen ugyanazt az idősor-halmazt tudjuk közelíteni. Emellett viszont megőrizzük a modell és az előrejelzés módszerének egyszerűségét, persze nyilván kérdéses, hogy az előrejelzés milyen mértékben lesz használható. A könnyű értelmezhetőség viszont mindenképp adott, hiszen az együtthatók becsült időbeni alakulásából lineáris közgazdasági modellekben beállt változásokra következtethetünk.

Ez a cikk az időben változó együtthatójú modellek becslési módjait és képességeit mutatja be, hasonlítja össze. Az alapvető egyenlet, amellyel foglalkozunk, a fenti, (1) összefüggés némiképp általánosított formája, ahol a jobb oldalon bármilyen exogén, vagy predeterminált változók  $p$  elemű lineáris kombinációja állhat, a függő változónk az egyszerűség kedvéért skalár:

$$y_t = \beta_t' x_t + \varepsilon_t \quad (2)$$

Ebben a keretben tehát  $\beta_t$  egy  $p \times 1$  méretű oszlopvektor értékei azok, amelyeknek időbeli szekvenciáira kíváncsiak vagyunk. A klasszikusnak nevezhető megoldás Kalman (1960) nevéhez fűződik, ugyanis – mint később meg is mutatjuk – az egyenlet kiegészíthető állapot-tér modellé, amely becsülhető a híres Kalman-szűrővel (KF). Kalman tanulmánya indította el útjukon az időben változó együtthatójú modelleket, alkalmazásaikkal együtt azóta is jelen vannak a közgazdaságtanban.

A Kalman-szűrő nagyon sok – főleg mérnöki – alkalmazásban bizonyított, amelynek oka részint az, hogy feltevéseit tovább lehet lazítani az eredetileg megadottaktól, így például az eloszlási kitételek nagy részét ejthetjük. Ezen az alapon született meg 1988-ban Kalaba és Tesfatsion (1988, 1989, 1990a) jóvoltából az ún. rugalmas legkisebb négyzetek módszere (FLS). Ez a módszer gyakorlatilag bemutatja, hogy a Kalman-szűrő egyenleteit máshonnan kiindulva is levezethetjük, egyfajta négyzetes veszteségfüggvény minimalizálásaként. A szakirodalomban nem túl aktív, de hosszan tartó vita volt a két módszer közötti különbségekről, melyekre Montana et al (2009) tett végül pontot; cikkünkben összefoglaljuk ezen írás eredményeit is.

A fenti modellcsalád mellett egy másik megközelítés is használatos időben változó együtthatójú folyamatok vizsgálatára. Megadhatunk az ismeretlen vektor egyes elemeinek véges sok állapotot – más néven rezsimet – is, amelyek közötti átmeneti valószínűségek segítségével minden időpontban becslést adhatunk az aktuális állapot valószínűség-

eloszlására. Ezt hívjuk Markov-típusú rezsinváltó modellnek (MSW),<sup>2</sup> melyet a közgazdasági idősoelemzésben először Hamilton (1989) alkalmazott, miután adaptálta Goldfeld és Quandt (1973) keresztmetszeti rezsinváltó regresszióját. A modellnek ugyanakkor több közös vonása van a Kalman-szűrővel, amint erre a későbbiekben rámutatunk.

Írásunk további része a következőképpen szerveződik. A 2. fejezetben bemutatjuk a Kalman-szűrőt, a 3. fejezetben a rugalmas legkisebb négyzeteket, valamint rávilágítunk a kettő közötti szoros kapcsolatra. A 4. fejezetben ezután a Markov rezsinváltó modell kerül sorra. Az 5. fejezetben szimulációs módszerekkel illusztráljuk az eljárások képességeit, végül a 6. fejezetben összefoglalunk.

## 2 A Kalman-szűrő

Az általános állapot-tér modell egy olyan dinamikus, lineáris rendszer leírása, amelyben három változócsoporthat jelenik meg: az  $u_t$  bemeneti, a  $\zeta_t$  állapot-, valamint az  $y_t$  kimeneti vagy megfigyelési változók. A feltevések szerint a rendszer állapotdinamikáját egy elsőrendű differenciaegyenlet írja le, melyben a bemeneti változók is szerepelhetnek; ez az ún. állapotegyenlet:

$$\zeta_t = A\zeta_{t-1} + Bu_{t-1} + \omega_t \quad (3)$$

A megfigyelési egyenlet lineárisan összeköti az állapot- és kimeneti változókat, itt is megengedve az inputok hatását:

$$y_t = C\zeta_t + Du_t + \varepsilon_t \quad (4)$$

A bemeneti változók tehát hatnak mindkét másik csoportra – regresszoroknak is hívhatnánk őket –, az állapot- és kimeneti változókat pedig azért kell megkülönböztetnünk egymástól, mert az előbbieket nem feltétlenül tudjuk mérni. Ezek a modell rejtett, látens változói, amelyek értékéről csak közvetetten, a megfigyeléseken keresztül kapunk információt. A fenti egyenletpárosban additív hibtagokat feltételezünk, ezekről szigorú feltevéssel kell eljárunk: mindkét hibtag-vektor rögzített korrelációs mátrixokkal rendelkezik, autokorrelálatlan, és a két vektor bármely tagjának bármely késleltetésre vonatkozó korrelációja is nulla. A (3) és (4) egyenletekkel jellemzett állapot-tér modell diszkrét, mivel időben nem folytonos változóknak írjuk fel. A modellt leíró  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  mátrixok változhatnak az időben.

---

<sup>2</sup> A „Markov Switching Model” elnevezés leginkább a közgazdasági alkalmazásokban terjedt el, más diszciplínákban, ahol egyébként jóval régebb óta ismert, „Hidden Markov Model” (HMM) névvel és rövidítéssel illetik.

Az időben változó együtthatójú regressziót úgy tudjuk állapot-tér keretbe foglalni, hogy a  $\beta_t$  együtthatóvektort tesszük meg állapotvektornak, amelynek a dinamikája adja a rendszer állapotegyenletét. Például, ha az együtthatókról (állapot vektorról) azt feltételezzük, hogy eltolás nélküli egységgyök-folyamatot követnek, akkor:

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \omega_t \quad (5)$$

Az egyenletben az  $\omega_t$  hibatag várható értéke nulla, kovariancia-mátrixa pedig  $V_\omega$ . A megfigyelési egyenlet pedig nem más, mint maga a regresszió, amelynek hibavektora  $\varepsilon_t$ , nulla várható értékkel, és  $V_\varepsilon$  kovariancia-mátrixszal:

$$y_t = \beta' x_t + \varepsilon_t \quad (6)$$

Figyeljük meg, hogy a (4) egyenlet  $C$  mátrixának az itteni  $x_t$  regresszorok vektora felel meg, és mivel azok értéke időfüggő, így az állapot-tér rendszerünk is időfüggővé válik. A hibatagokról az általános modellnek megfelelően fel kell még tennünk, hogy bármely késleltetésre mind az auto- mind a kereszt-korrelációik nullák, továbbá bármely  $t$  időpontra az értékük korrelálatlan a  $\beta_0$  kezdeti állapottal. A Kalman-szűrő eredeti megfogalmazásában és bizonyításában (Kalman, 1960) szerepet kap a hiba-folyamatok normalitásának feltevése, többen bizonyították már azonban (Montana, 2009, vagy Eubank, 2006), hogy az alábbi következtetésekhez ez nem szükséges.

Maga a szűrő nem más, mint egy négyzetes értelemben optimális, lineáris becslési algoritmus az állapotvektor becslésére, amely lépésről lépésre frissül, ahogy haladunk előre az időben, innét a filter elnevezés is. A becslésnek alapvetően két része van: a predikció és a korrekció. Az előbbi során a  $t-1$ . időpontban már rendelkezésünkre áll az állapot szintén  $t-1$ . időpontra vonatkozó  $\beta_{t-1|t-1}$  becslése, így az állapotegyenletet használva azt kivetítjük egy időszakkal előre, képezve  $\beta_{t|t-1}$ -t a  $t$ . időszaki érték becslését a  $t-1$ . időszakból. Esetünkben az állapotegyenlet egyszerűsége miatt

$$\beta_{t|t-1} = \beta_{t-1|t-1} \quad (7)$$

A korrekció során beérkeznek a  $t$ . időpontra vonatkozó megfigyelési adatok, amelyek segítségével frissítjük az erre az időpontra vonatkozó becslésünket. Az algoritmus linearitása itt jelenik meg: az állapotvektor becslését a megfigyelés lineáris függvényében keressük. Ráadásul, mivel a megfigyelési egyenletünk lineáris, így abból kifejezhetjük az  $e_t$  megfigyelési hibát, miközben az állaputra vonatkozó becslés annak is lineáris függvénye marad. Megmutatható, hogy a keresett lineáris összefüggés konstansa éppen a frissítendő állapot lesz:

$$\beta_{t|t} = \beta_{t|t-1} + K_t e_t \quad (8)$$

ahol tehát a megfigyelési hiba összefüggése

$$e_t = y_t - \beta'_{t|t-1} x_t = y_t - y_{t|t-1} \quad (9)$$

Annak igazolása, hogy a (8) egyenlet konstansa épp a  $\beta_{t|t-1}$  becslés lesz, egyébként abból fakad, hogy a becslés minimalizálni kívánja a megfigyelési hibák négyzetösszegét a teljes  $1..T$  intervallumon. A keresendő  $K_t$  mátrix (ami esetünkben  $p \times 1$ -es oszlopvektor) Kalman-erősítés (*Kalman gain*) néven ismert és abban az értelemben optimális, hogy minimalizálja az állapotvektor adott időszaki becslése és valódi értéke közötti négyzetes eltérések összegét. A levezetéseket itt is mellőzzük, viszont a képletek megértéséhez definiálnunk kell néhány újabb jelölést. Legyen a valódi  $\beta_t$  vektor és a  $\beta_{t|t}$  korrigált becslés kovariancia-mátrixa  $P_t$ ,  $\beta_t$  és a  $\beta_{t|t-1}$  prediktált becslés kovariancia-mátrixa pedig  $R_t$ , végül az  $y_{t|t-1}$  egy időszakos becslés varianciája  $Q_t$  (esetünkben ez skalár). Az alábbi két összefüggés ekkor könnyen látható, ha a rendszer állapot- és megfigyelési egyenleteit „kovariancia-egyenletbe” fordítjuk, ügyelve a korrelálatlansági feltevéseinkre:

$$R_t = P_{t-1} + V_w \quad (10)$$

ez lényegében az állapotegyenlet kifejezése kovariancia-mátrixokkal, és

$$Q_t = x'_t R_t x_t + V_\varepsilon \quad (11)$$

ez pedig a megfigyelési egyenlet megfelelője. Most már tehát megadhatjuk az optimális erősítési mátrixot, ami nem más, mint

$$K_t = R_t x_t / Q_t \quad (12)$$

ennek segítségével végül kifejezhetjük a  $P_t$  mátrix rekurzióját is:

$$P_t = R_t - Q_t K_t K'_t \quad (13)$$

Készen állunk tehát a rekurzió egyenleteivel, hiszen ezek segítségével végig tudunk haladni az állapotvektor és annak  $P_t$  kovariancia-mátrixa becslésein, ahogyan az új megfigyelések fokozatosan beérkeznek – persze ha kezdetben megvannak a megfelelő  $\beta_{1|0}$  és  $P_1$  kiinduló értékeink.

Felépítése folytán a Kalman-szűrő alkalmas arra, hogy valós idejű alkalmazásokban működjön, hiszen az újabb állapotérték kiszámításához, a korrekció és predikció

előregörgetéséhez elegendő egyetlen újabb megfigyelt adatpont. Ezért az elmúlt fél évszázadban nagyon elterjedté vált különböző gyakorlati megvalósításokban, különösen a térben mozgó objektumok (repülőgépek, műholdak) helyzetének becslésénél. A közgazdaságtanban is vannak területek, ahol jó kilátásokkal használhatjuk valós idejű alkalmazásként (gondoljunk a kereskedési stratégiákra, ahol az információhoz graduálisan jutunk hozzá), viszont az ökonometriában jellemzőbb az a forma, ahol az adathalmaz már teljes egészében rendelkezésre áll, és nemcsak a legutolsó (vagy aktuális) állapotvektor képezi az érdeklődés tárgyát. Ekkor alkalmazhatjuk a Kalman-simító eljárást (*Kalman-smoother*), ami az adott adathalmaz összes pontját felhasználja. Pontosabban szólva könnyen belátható, hogy a  $t$ . időszaki simított becslés előállításához elegendő a  $t+1$ . időszaki simított becslés és a  $t$ . időszaki megfigyelés, így a simító eljárás nem más, mint egyfajta „visszalépdelés” az időben. Láthatjuk tehát, hogy ami összeköti a szűrt és simított becslt állapotvektorokat, nem más, mint az utolsó időszaki – azonos – érték.

Ez idáig semmilyen eloszlási feltevést sem tettünk, viszont a  $V_\omega$  és  $V_\varepsilon$  kovariancia-mátrixokat teljes mértékben ismertnek feltételeztük. Ha szükségünk van ezek becslésére, a Maximum Likelihood (ML) módszert könnyen alkalmazhatjuk, miután persze specifikáltuk az  $\omega_t$  és  $\varepsilon_t$  hibatagok eloszlását. Itt tehát már szükségünk van normalitási (vagy esetleg egyéb eloszlási) feltevésekre. A szimulációban vizsgálni fogjuk az így becslt szűrt és simított becslés különbözőségét is.

A Kalman-szűrő irodalma óriási, használata a közgazdaságtanban a 90-es évekre széles körben elterjedt, akár változó együtthatójú regressziókkal, akár bonyolultabb állapot-tér modellekkel. Ekkorra már a módszer elméleti és szimulációs tulajdonságait is megvizsgálták, ez azonban – a más tudományágbeli alkalmazások miatt – nem a közgazdászok érdeme volt (az időben változó együtthatójú regresszió különböző elméleti tulajdonságairól lásd pl. Guo, (1990) cikkét és egyéb munkáit). A szűrő közgazdasági alkalmazásairól viszont kifejezetten ökonometriai könyvet írt Harvey (1989).

Makroökonómiai alkalmazásokhoz igyekszünk végül némi irodalmat adni, szigorúan a teljesség igénye nélkül. Sok, korábban konstansnak feltételezett látens változót modelleznek Kalman-szűrővel, így semleges kamatlábat (Horváth, 2007), a munkanélküliség természetes rátáját (Driver et al, 2006) vagy a fiskális politika hatását (Cimadomo et al, 2007). A monetáris transzmissziót kelet-közép európai országok viszonylatában Darvas (2009) vizsgálta időben változó együtthatójú strukturális vektor-autoregresszióval. Az időben változó inflációs perzisztencia vizsgálatát többváltozós (Beechey és Österholm, 2007 és Dossche és Everaert, 2005) és egyváltozós modellkeretben (Darvas és Varga, 2010) is vizsgálták Kalman-szűrővel. Darvas és Simon (2002) a potenciális kibocsátásra ír fel újszerű állapot-tér modellt.



### 3 A rugalmas legkisebb négyzetek módszere és kapcsolata a Kalman-szűrővel

Felejtjük el egy pillanatra az időben változó együtthatóvektort és idézzük fel a közönséges legkisebb négyzetek módszerét! Az OLS koefficiensek becslőeljárásához több kiindulási feltevésből is eljuthatunk (mint pl. a momentumok módszere), a legtöbbször emlegetett négyzetes közelítés azonban nem más, mint a következőképpen definiált költség, vagy veszteség-függvény felírása:

$$C(\beta) = \sum_{t=1}^T (y_t - \beta'x_t)^2 \quad (14)$$

Ezt a célfüggvényt úgy is átfogalmazhatjuk, hogy feltevésünk szerint a függő változó valós és illesztett értéke közötti eltérés „közel nulla” kell legyen, amit jelöléssel akár így is írhatunk:

$$y_t - \beta'x_t \approx 0 \quad (15)$$

Kalaba és Tesfatsion (1988, 1989, 1990a) éppen ezzel a formalizmussal jelezte azt, hogy a kifejezés bal oldalát négyzetes értelemben minimalizálja, viszont az általunk már jól ismert „véletlen eltérésváltozó” fogalmat egyáltalán nem kívánta bevezetni, az ugyanis eloszlási feltevésekkel járna. Az OLS-ről jól tudjuk, hogy nem szükséges benne eltérésváltozó-eloszlást specifikálnunk, a pontbecslés jó tulajdonságait ez gyakorlatilag nem érinti. Tehát lényegében mindegy, hogy alkalmazzuk-e a hibavektor valószínűségi változóként való kezelését, vagy nem, ugyanoda jutunk.

A szerzőpáros tehát elutasította az eloszlási feltevéseket, és a közönséges legkisebb négyzetek módszerét a fentiek szellemében terjesztette ki időben változó együtthatóvektorra. A (15) illeszkedési feltevésben a koefficiensek időfüggését bevezetve kapta az ún. regressziós (megfigyelési) priort, míg  $\beta_t$  dinamikájára simító feltevést tett, dinamikus prior néven.<sup>3</sup>

$$y_t - \beta'x_t \approx 0 \quad (16)$$

$$\beta_t - \beta_{t-1} \approx 0 \quad (17)$$

Ha jól megfigyeljük, e két egyenlet valójában nem más, mint a Kalman-szűrő állapot-tér modelljének ezen új formalizmussal megadott felírása. A feltevések értelmében a közönséges négyzetes költségfüggvény is teljesen logikusan módosul, a két priornak megfelelő négyzetes költségösszegeket egy előre megválasztott  $\mu \geq 0$  skalár súlyparaméterrel összesúlyozzuk:

---

<sup>3</sup> A *prior* kifejezés az FLS szerzőinek értelmezésében *előzetes feltevést* jelent, nincs köze a Bayes-i ökonometriában használt *prior eloszláshoz*.

$$C(\beta, \mu) = \sum_{t=1}^T (y_t - \beta_t' x_t)^2 + \mu \sum_{t=1}^{T-1} (\beta_{t+1} - \beta_t)' (\beta_{t+1} - \beta_t) \quad (18)$$

Kalaba és Tesfatsion a kifejezés első tagját mérési költségnek (*measurement cost*), a másodikat pedig dinamikus költségnek (*dynamic cost*) keresztelte. A szerzők értelmezésében tehát az FLS feladat nem más, mint egy többszemponútú dinamikus optimalizáció, ahol a felhasználó a súlyparaméter segítségével adja meg preferenciáit a mérési és dinamikus költségfüggvény-komponenssel kapcsolatban. Optimális  $\beta_t$  szekvencia esetén csak úgy tudunk bármely költségösszetevőn javítani, ha a másikon közben rontunk – mindez egy Pareto-értelemben vett hatékonysági korlátot (*residual efficiency frontier*) eredményez a két hibakomponens szerint, melyet akár ábrázolhatunk is a síkban.

Figyeljük meg, hogy a paraméter szélsőséges értékeire két jól ismert speciális esetet kapunk vissza!  $\mu = 0$  esetén ugyanis teljesen eltűnik a dinamikus költség, azaz a  $\beta_t$  szekvencia szabadon változhat időben, miközben a megfigyelések eltérés-négyzeteit minimalizáljuk: ekkor nyilván olyan eredményt kapunk, ahol az illetett  $y_t$  értékek megegyeznek a megfigyelésekkel, viszont az állapotok ennek megfelelően összevissza ugrálnak az időben. Másik szélsőséggént  $\mu \rightarrow \infty$ , ekkor az együtthatóvektor bármilyen időbeli megváltozását végtelenül büntetjük, így az időben állandó lesz; a marginálisan, de megjelenő első tag pedig biztosítja, hogy ez esetben az OLS megoldáshoz érkezzünk.

Az FLS feladat megoldását vázolva, kezdetnek azt kell észrevennünk a költségfüggvényben, hogy lehetővé tesz egy  $t = 1$ -ből induló dinamikus optimalizálást. Ha ugyanis  $c(\beta_t, \mu)$ -vel jelöljük az  $n-1$  időpontbeli optimális költségértéket  $\beta_t$ -re kondicionálva, a következő rekurzív összefüggést írhatjuk fel:

$$c(\beta_{t+1}, \mu) = \inf_{\beta_t} \left\{ (y_t - \beta_t' x_t)^2 + \mu (\beta_{t+1} - \beta_t)' (\beta_{t+1} - \beta_t) + c(\beta_t, \mu) \right\} \quad (19)$$

Továbbá, ez az optimális költség a feltevések szerint négyzetes kell legyen az állapotváltozó aktuális értékében:

$$c(\beta_t, \mu) = \beta_t' S_{t-1} \beta_t - 2 \beta_t' s_{t-1} + r_{t-1} \quad (20)$$

Ezt a formát a fenti egyenletbe visszahelyettesítve és a deriválást elvégezve lineáris összefüggés adódik az állapotvektor  $t$ . és  $t+1$ . becslései között – akárcsak a Kalman-szűrő (8) egyenletében. Az FLS filter végül a következő három egyenlettel írható le. Elsőként maga az állapotbecslés:

$$\beta_{t|t} = (S_{t-1} + x_t x_t')^{-1} (s_{t-1} + x_t y_t) \quad (21)$$

ezután pedig az  $S_t$  mátrix és  $s_t$  vektor rekurzióinak összefüggése:

$$S_t = \mu(S_{t-1} + \mu I_p + x_t x_t')^{-1}(S_{t-1} + x_t x_t') \quad (22)$$

$$s_t = \mu(S_{t-1} + \mu I_p + x_t x_t')^{-1}(s_{t-1} + x_t y_t) \quad (23)$$

ezekben az egyenletekben  $I_p$  a  $p \times p$  egységmátrixot jelöli, valamint természetesen kiindulásul meg kell adnunk az  $S_0$  és  $s_0$  kezdőértékeket. E mátrixoknak sajnos egyelőre nem olyan könnyű értelmet találni, így a kezdőérték megadása esetlegessé válik, a szerzők egyenesen kinullázzák őket. A simító eljáráshoz – melyet most nem részletezünk – ugyanezen kezdőértékek kellenek,  $S_t$  és  $s_t$  görgetése is előrefelé zajlik, csak a  $\beta_{t|t}$  becsléseket származtatjuk visszafelé az időben.

A Kalman-szűrőhöz való elképesztő hasonlóság – azonos állapot-tér modell, négyzetes optimumok – nem csak az olvasónak lehet feltűnő. A folyóirat hasábjain, ahol az eredeti FLS cikkek is korábban megjelentek, már 1990-ben vita bontakozott ki a módszer új voltáról. Tucci (1990) könnyen bebizonyította, hogy a Kalman szűrő eloszlási feltevéseit az FLS-ben megtéve a két módszer már teljesen azonos, a még ugyanabban a lapban megjelenő válasz (Kalaba-Tesfatsion, 1990b) továbbra is a többszempontúsági és eloszlás-függetlenségi érveket hozta fel. A támadó érve pedig nem volt erőtlen, de utólag már tudhatjuk, a gond nem az FLS, hanem a Kalman-szűrő oldalán volt: épp a Kalman-szűrő az, amely tökéletesen működik eloszlási feltevések nélkül is (ahogyan feljebb már utaltunk rá, de ezt akkoriban még nem feltételezték).

A két módszer közötti megfelelés további részleteihez lássunk egy tételt, amelyet a Kalman-szűrő eloszlási feltevések változatában már 1970-ben (!) bebizonyítottak (Jazwinski, 1970), Montana et al (2009) pedig később belátta, hogy az igazolás eloszlási feltevések nélkül is lehetséges. Az állítás szerint a Kalman-szűrő optimalizáló algoritmusá ekvivalens a következő kifejezés minimalizálásával  $\beta_1, \dots, \beta_T$  szerint:

$$\sum_{t=1}^T (y_t - \beta_t' x_t)^2 + \sum_{t=1}^{T-1} (\beta_{t+1} - \beta_t)' V_\omega^{-1} (\beta_{t+1} - \beta_t) \quad (24)$$

Láthatjuk, hogy ez teljesen azonos az FLS (18) költségfüggvényével, ahol a súlyparaméter és az állapotvektor (egyébként diagonális) kovariancia-mátrixa között fennáll a

$$V_\omega = \mu^{-1} I_p \quad (25)$$

összefüggés. Ezek szerint a  $\mu$  súlyparaméter segítségével a becsült állapotvektor-szekvencia megváltozásának varianciáját direkt módon állítjuk be. Jól látszik tehát, miben különbözik az

FLS: míg ugyanezt a Kalman-szűrőnél a teljes – bár diagonális –  $V_\omega$  formájában tesszük meg, itt egyetlen szám áll rendelkezésre a teljes  $p$ -tagú variancia leírására.

Összefoglalva tehát, az FLS annyiban restriktívebb a Kalman-szűrőnél, hogy az összes állapotváltozó változási varianciáját az egyetlen súlyparaméterből eredezteti, így azok mind egyenlők lesznek. Ezen kívül a két módszer megegyezik egymással, egyformán jól működnek konkrét eloszlási feltevések nélkül is, az első és másodrendű momentumokat azonban explicit vagy implicit módon, de meg kell adjuk. Mindezt az ML módszerrel annyiban kiegészíthetjük, hogy a paramétereket – így akár  $\mu$ -t is – meg tudjuk becsülni a normalitási feltevések meglépése után.

A rugalmas legkisebb négyzetek szakirodalma a közgazdaságtanban jóval könnyebben áttekinthető híresebb társáénál, hiszen sokszorta kevesebb cikk készült a használatával<sup>4</sup>. A már többször említett kezdeti bemutatkozó sorozat és vita (Kalaba és Tesfatsion, 1988, 1989, 1990a, 1990b és Tucci, 1990) idején Tesfatsion és Veitch (1990) alkalmazásban illusztrálták az FLS képességeit. A szerzők a Goldfeld pénzkeresleti modellt vizsgálták amerikai adatokra, amely a pénzkeresletet a saját késleltetettje és egyéb exogén változók segítségével modellezi. A koefficiensekben időbeli változást mutattak ki, ráadásul az AR(1) együttható értéke jóval alacsonyabban fluktuált a szokásos OLS becslésnél, ez a szerzők szerint alátámasztást szolgáltatott a pénzkeresletet korábban övező egységgyök-hipotézis megdöntéséhez.

Lütkepohl és Herwartz (1996) nagyon jól használható módon általánosították tovább az FLS módszert. A minimalizálandó (18) célfüggvénybe további, szezonális dinamikus összegeket vettek fel, mindemellett ők is észrevették az FLS „implicit” variancia-restriktóját, így minden dinamikus tagba (24)-hez hasonlóan előre megadott diagonális mátrixokat tettek. A módszerrel német szezonális makro-idősorokon értek el eredményeket.

A kétezres években aztán többen fedezték fel a modellt Kalaba és Tesfatsion eredeti munkáit olvasva, valamint hasonlították össze a Kalman-szűrővel, annak ellenére, hogy a kapcsolat már korábban is egyértelmű volt. Kladroba (2005) és Darvas – Varga (2010) szimulációs vizsgálatokat folytat, ahol mindketten belátják, hogy az FLS még a Kalman-szűrőnél alkalmazott ML becslés ellenére is jobb lehet, ez azonban nem egyértelmű. Jogos a kérdés, hogy a szimulációban miért nem lett teljesen ugyanaz a két módszer eredménye. A válasz a részletekben rejlik: a tényleges azonossághoz el kell hagyni az ML-t, és minden kezdőértéket és paramétert megfelelőre kell állítani. Az FLS szűrő tulajdonságait Morana (2009) is vizsgálja, aki, bár leírja a megfelelést, az eloszlási feltevésekben különbséget lát. A teljes és részletes bizonyítást végül a már sokat hivatkozott Montana et al (2009) cikkben találjuk, ahol a szerzők egy valós idejű pénzügyi alkalmazást is bemutatnak. Egzotikus alkalmazásként még

---

<sup>4</sup> Leigh Tesfatsion, az FLS egyik szülőatyja kitűnő irodalom- és programgyűjteményt hozott létre „az FLS honlapján”: <http://www2.econ.iastate.edu/tesfatsi/flshome.htm>

megemlíthetjük Wood (2000) munkáját, aki az elnöki népszerűséget modellezi FLS segítségével.

#### 4 Markov rezsinváltó modellek

Ebben a fejezetben rövid bemutatást adunk a Markov rezsinváltó modellről, az időben változó együtthatójú regresszió kontextusában. Természetesen, akárcsak az állapot-tér modell, ez is felírható jóval általánosabban, itt azonban az előző fejezetekhez hasonlóan ragaszkodunk a lineáris regressziós kerethez.

Kiindulásul be kell vezetnünk az (2) lineáris regresszió  $\beta_t$  együtthatóvektorának véges sok lehetséges értéket. Rögzítsünk ilyenből  $N$  darabot, amelyek mindegyike legalább egy skalár elemében különbözik a többitől, ezeket felső indexszel fogjuk jelölni:

$$\beta \in \{\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^N\} \quad (26)$$

Mivel ezek az együtthatóvektor-értékek egy-egy értelmű megfeleltetésben állnak a modell  $N$  darab állapotával, az állapotokra nem vezetünk be külön jelölést. Azt feltételezzük, hogy az állapotok Markov-láncot követnek, azaz definíció szerint az állapotok előrejelzéséhez a folyamat története nem releváns, kizárólag az utolsó időpontbeli állapot, formálisan

$$P(\beta_t = \beta^j | \beta_{t-1} = \beta^i) = P(\beta_t = \beta^j | \beta_{t-1} = \beta^i, \beta_{t-2} = \beta^k, \dots) = p_{ji} \quad (27)$$

Mindennek megfelelően az állapotok közötti váltásokat két dimenzióban le tudjuk írni, az ún. átmenet (vagy tranzíciós) mátrix segítségével. A  $\Pi$  átmenetmátrix  $N \times N$  méretű, és  $i$ . oszlopának  $j$ . eleme megadja, hogy ha az előző időszak állapotot a  $\beta^i$  együtthatóvektor jellemezte, mekkora annak a valószínűsége, hogy a következő állapotot éppen  $\beta^j$  fogja:

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}, \text{ ahol } p_{ji} = P(\beta_t = \beta^j | \beta_{t-1} = \beta^i) \quad (28)$$

Mivel az állapotok halmaza zárt, azaz bármely állapotból csakis az  $N$  állapot valamelyikébe juthatunk (önmagát beleértve), könnyű látni, hogy az átmenetmátrix oszlopainak összege éppen egységnyi.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> A szakirodalom jó része éppen az általunk használt mátrix transzponáltját alkalmazza. Ekkor az összes többi vektor (emissziók, becslések) sorvektorra kell váljon, a  $\Pi$ -vel való szorzások sorrendjét pedig meg kell cserélni, ezen felül minden igaz lesz, amit itt írunk. A két felírás teljesen ekvivalens egymással, mi az oszlopvektorokat ez esetben kényelmesebbnek tartjuk.

Ha az előző fejezetekre gondolunk, jól látható az állapotdinamikát leíró átmenetmátrix analógiája az állapotegyenlettel, hiszen mindkettő a számunkra nem megfigyelt együtthatóvektor időbeli alakulását adja meg. Vajon mivel írjuk le a megfigyelési egyenlet megfelelőjét? Olyan leképezés szükséges számunkra, amely a megfigyeléseket az állapotok függvényében adja meg, hiszen ez lesz számunkra a kulcs az állapotok identifikálásában az adott megfigyelés ismeretében. Az emissziós mátrix való erre a célra: minden állapotban megadja az egyes kimenetek valószínűségét (természetesen diszkrét véges számú kimenet esetében). Modellünkben azonban folytonos kimenetek vannak, ennek megfelelően az  $\eta_t$  emissziós vektort definiáljuk, amely az állapot függvényében megadja a  $t$ . időszaki megfigyelés feltételes sűrűségfüggvényét:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} p(y_t | \beta_t = \beta^1) \\ \vdots \\ p(y_t | \beta_t = \beta^N) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Vegyük észre, hogy az emissziós vektor megadásánál válik az eloszlási feltevések bevezetése elkerülhetetlenné, hiszen a feltételes sűrűségfüggvényeket meg kell adnunk, még ha paraméterezve is. Így például, ha lineáris regresszióknk hibatagját normálisnak vesszük  $\sigma$  szórással, akkor  $y_t$  sűrűsége a  $\beta^i$  együtthatóvektort tartalmazó állapotot feltételezve nem más, mint

$$p(y_t | \beta_t = \beta^i) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_t - \beta^i x_t}{\sigma}\right) \quad (30)$$

ahol  $\phi(\cdot)$  a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli. Ezzel a modellünknek megadtuk a „megfigyelési egyenletét” is, készen vagyunk a felépítéssel.

Ami most következik, az a rendszer predikció-korrekció algoritmus, az analógia alapján akár „Markov-szűrő”-nek is nevezhetnénk. A kialakuló becsléseink azonban ezúttal nem közvetlenül az együtthatóvektor értékére vonatkoznak – hiszen azokat külön-külön ismerjük, hanem az egyes együtthatóvektorokkal jellemzett állapotok valószínűség-eloszlására. Ezt az eloszlást  $\xi$ -vel fogjuk jelölni, és az alsó indexében a korábbiakhoz hasonlóan megmutatjuk, hogy melyik időszakban készült és melyik időszakra vonatkozik. Így például a  $\xi_{t|t}$  valószínűség-eloszlás vektor nem más, mint

$$\xi_{t|t} = \begin{bmatrix} P(\beta_t = \beta^1 | y_t) \\ \vdots \\ P(\beta_t = \beta^N | y_t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

természetesen a vektor oszlopösszege egységnyi. Ebből már könnyedén megkaphatjuk magára az együtthatóvektorra vonatkozó  $\beta_{t|t}$  becslésünket, hiszen az egyes valószínűség-értékekkel be kell súlyozni magukat a lehetséges együtthatóvektorokat:

$$\beta_{t|t} = E(\beta_t|y_t) = [\beta^1 \quad \dots \quad \beta^N] \begin{bmatrix} P(\beta_t = \beta^1|y_t) \\ \vdots \\ P(\beta_t = \beta^N|y_t) \end{bmatrix} = B\xi_{t|t} \quad (32)$$

ahol  $B$  a lehetséges  $\beta^i$  oszlopvektorokból képzett  $p \times n$  méretű mátrix.

A rendszer predikciója itt is az állapotdinamikából – azaz átmenetmátrixból – adódik és a Kalman-szűrőhöz hasonlóan igen egyszerű. Ha ugyanis megvan a  $\xi_{t-1|t-1}$  korrigált becslésünk, azaz a  $t-1$ . időszaki állapotok valószínűség-eloszlása (illetve az összes megfigyelés eddig az időpontig), azt úgy tudjuk eggyel előre görgetni, hogy megszorozzuk magával az átmenetmátrixszal:

$$\xi_{t|t-1} = \Pi \xi_{t-1|t-1} \quad (33)$$

Az egyenlet egy sorának kifejtése igazolja az állítást, amely magukból a definíciókból adja magát. Ezután szokás szerint feltesszük, hogy beérkezik a  $t$ . időszaki megfigyelés, amiből a fentiek szerint ki tudjuk számolni az  $\eta_t$  emissziós vektort, majd a hiányzó becslésre felírjuk Bayes tételét:

$$P(\beta_t = \beta^i|y_t) = \frac{P(y_t|\beta_t = \beta^i)P(\beta_t = \beta^i)}{P(y_t)} \quad (34)$$

Lássuk, mit takar az egyenlet jobb oldala. A számláló első tényezője az emissziós vektor  $i$ . eleme, a második tag pedig épp az imént kiszámolt  $\xi_{t|t-1}$  becslés  $i$ . eleme (ne felejtsük el, hogy az egész egyenletet kondicionáljuk a  $t-1$ . időszakra). A nevező nem más, mint az  $y_t$  megfigyelés feltételes likelihood függvénye, amit könnyen megkaphatunk, ha minden  $i$ -re a számlálókat összeadjuk:

$$P(y_t) = \sum_{i=1}^N P(y_t|\beta_t = \beta^i)P(\beta_t = \beta^i) = 1'(\eta_t \otimes \xi_{t|t-1}) \quad (35)$$

A második egyenlőség mindezt rövidített formában mutatja, az új operátor az elemenkénti szorzást jelöli. A (34) egyenlet tehát éppen a keresett becslést adja meg, amelyet zárásként átírunk vektoriális formába:

$$\xi_{t|t} = \frac{\eta_t \otimes \xi_{t|t-1}}{1'(\eta_t \otimes \xi_{t|t-1})} = \frac{\eta_t \otimes \Pi \xi_{t-1|t-1}}{1'(\eta_t \otimes \Pi \xi_{t-1|t-1})} \quad (36)$$

A képlet eredménye még csak valószínűség-eloszlás, viszont az ismert lehetséges állapotok  $B$  mátrixával való (32) összesúlyozással könnyen megkapjuk az aktuális állapot várható értékét. Ezzel az egyszerű szűrőalgoritmussal tehát a paraméterek ismeretében becslést adhatunk az ismeretlen együtthatóvektor szekvenciájára, miközben – mintegy melléktermékként – az egyes megfigyelések likelihood-értékeit is kiszámoljuk. Nem kétséges tehát, a Kalman-szűrőhöz hasonlóan itt is használhatjuk az ML módszert bármelyik paraméter megbecslésére, gyakorlatilag az egyetlen amit nekünk kell megadni, az maga a modellstruktúra (pl. hogy éppen  $N$  darab állapot van, vagy az eloszlások milyenségét, stb.). Ráadásul, itt is lehetséges simított értékek számítása, melyet az korábbiakhoz hasonlóan nem részletezünk.

Így az állapot-tér rendszerekkel szemben a Markov-típusú rezsinváltós modellben a lineáris regressziónk együtthatóvektora csak véges sok értéket vehet fel, és feltétlenül szükséges eloszlási feltevésekkel élnünk; még akkor is, ha nem használunk maximum likelihood eljárást, cserébe a rugalmassága óriási. Ezért általában olyan alkalmazásokban használjuk, ahol relatíve kevés, elmélet szempontjából is jól megkülönböztethető rezsinváltós van, amelyek időben feltehetőleg változtatják egymást. Jó példát szolgáltatnak erre a pénzügyi piacok, ahol az ábrákról is leolvashatóan váltják egymást az optimizmus és pánik időszakai: előbbiben felfele haladnak az árak, a beárazott volatilitás folyamatosan csökken és az eszközök közötti korrelációk alacsonyok, míg az utóbbiban áresés, a volatilitás robbanásszerű emelkedése és megugró eszközosztályok közötti korrelációk tapasztalhatók.

Bár Hamilton (1989) eredeti cikke az üzleti ciklusokról szólt, a modell pénzügyi alkalmazásai gyorsan elterjedtek, klasszikus példát ad erre Norden és Schaller (1997), de érdemes Dueker (1997, 2007) munkásságát is végigkövetni, aki az eszközhozamokat rengeteg Markov-féle specifikációval modellezi. Hamilton és Susmel (1994) tanulmányának köszönhetően az ARCH típusú modelleket is elérte a rezsinváltások feltevése, ugyanezzel idehaza Darvas (2001) foglalkozott: ő a forintkamatlábra illesztett „Switching”, azaz rezsinváltó ARCH (SWARCH) modellt.

## 5 Szimulációs vizsgálat

Ebben a fejezetben egy egyszerű szimulációt mutatunk be, ahol különböző környezetekben láthatjuk az eljárásainkat működés közben, valamint összemérhetjük azok képességeit. Mivel az eloszlási feltevéseket és ML módszert igénylő Markov rezsinváltó modellt mindenképp szerepeltetni akarjuk, a folytonos modellcsaládból is a hasonló feltevésekkel jellemzett Kalman-szűrőt választjuk – így értelmessé válik az összehasonlítás.

Célunk azt megvizsgálni, hogy különböző valós  $\beta_t$  szekvenciák esetén hogyan becsli azokat vissza a két módszer szűrő- és simító algoritmusai. Ezért egy olyan regressziót szimulálunk,



ahol aztán a számunkra fontos együtthatóra öt különböző feltevessel élünk, miközben egy másik együtthatót is beveszünk az egyenletbe, amely azonban minden kísérletnél fehér zaj. Összességében tehát a következő modellt szimuláljuk:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_t x_{1t} + \gamma_t x_{2t} + N(0, 0.25) \\ \gamma_t &= N(0, 0.05), x_{1t} \sim N(1, 0.25) \text{ és } x_{2t} \sim N(1, 0.25) \end{aligned} \quad (37)$$

A képletekben jelzett összes véletlen változó független egymástól, az eloszlásoknál pedig a várható értékeket és szórásokat tüntettük fel. Végül a  $\beta_t$ -re vonatkozó öt feltevés az alábbi:

- Konstans együttható,
- Diszkrét törés az együtthatóban,
- Lineáris trend az együtthatóban,
- Szinuszoid mozgás az együtthatóban,
- Az együttható egységgyök folyamatot követ.

A visszabecsléseket mindkét módszernél a helyes specifikációval végezzük (tehát kétváltozós egyenletet teszünk fel), a Kalman-szűrő esetében az (5) egyenlet értelmében az állapotokat egységgyök folyamatként kezeljük és a szűrőt  $\beta_0 = 0.5$ -ről indítjuk, amely egy „semleges” feltevés, mivel ez az együttható időbeli átlaga az első négy esetben és ebből a kezdőértékből indul a véletlen bolyongás az ötödik esetben. A Markov modellnél két rezsimit feltételezünk, amelyekben mindkét együttható más-más értéket vehet fel. Bár elég lett volna a számunkra fontos koefficiens rezsimenkénti változásának megengedése, a modell szabadságát az „igazságosság” érdekében minél közelebb akartuk hozni a Kalman-szűrőéhez. A kezdő valószínűségeket itt 50-50%-ra állítjuk a két rezsimben.

Azonos  $\beta_t$  sorozat mellett a szimulációt és visszabecslést ezerszer megismételtük a 200 megfigyelés hosszúságú adatsorokon, hogy az esetlegességet kiszűrjük; így tulajdonképpen egy Monte Carlo szimulációt végeztünk. A becsült szekvenciák átlagát, valamint 5. és 95. percentiliséit véve konfidencia-intervallumot készítünk, amelyeket – a valós folyamattal együtt – az 1-5a ábrákon mutatunk be. Párhuzamosan, az 1-5b ábrákon egy-egy véletlenszerűen kiválasztott esettel illusztráljuk tovább a becslést. Hogy számszerűen is áttekintést nyerjünk az egyes módszerek előnyeiről és hátrányairól, az 1. táblázatban a valós és becsült szekvenciák közötti átlagos RMSE (*Root Mean Squared Error*) értékeket is közöljük. A következőkben tehát bemutatjuk az öt feltevést az együtthatóvektor alakulására vonatkozóan, és külön-külön megvizsgáljuk az eredményül kapottakat.

- **Konstans együttható**,  $\beta_t$  értékét végig 0.5-ön tartjuk, ez egyfajta kontroll kísérlet. Az 1a. ábrán látjuk, hogy várható érték tekintetében minden eljárás sikerrel vette ezt az alap-akadályt, a két Markov algoritmus viszont jóval nagyobb bizonytalanságot

produkált: vajon miért? A tulajdonképpen technikai választ az ábra jobb panelén találjuk, ahol egyetlen kiragadott eset látható a szimulációkból: a Markov modell itt valójában egy félre-specifikációval szembesül, hiszen csak egyetlen  $\beta$ -érték van a kettő helyett. Az ML-optimumban viszont aligha garantálható, hogy a két kibecsült  $\beta$  egybeessen, valamekkora különbség mindig lesz közöttük a numerikus optimalizálás nem tökéletes volta és az aktuális minta egyenetlenségei miatt. A szűrő- és simítóalgoritmus viszont ettől „ugrálni” fog, mert az aktuális zajok miatt hol az egyik, hol a másik kibecsült érték felé hajlik.

A Kalman-szűrő és simító között is látunk különbséget, bár csak az 1b ábrán. Ez nem az aktuális eset specifikuma, hanem általános: a szűrő becslése mindig volatilisabb, hiszen csak a saját históriájából dolgozik, a simító – ahogy a neve is mutatja – a teljes környezetet figyelembe veszi (előre és hátrafelé is), így ez esetben is helyesen eltalálja az együttható konstans voltát.

A szimuláció tanulsága tehát, hogy a Markov modell becslésének bizonytalansága megnőhet, amikor hamisan túl sokféle állapotot feltételezünk és a becslés rezsimek viszont túlzottan egybeesnek; ettől eltekintve az eljárások jól képesek lekövetni a konstans értéket, ahogyan azt vártuk.

- **Diszkrét törés az együtthatóban**, az értéke a minta felénél 0.3-ról 0.7-re vált. Ez az időbeli viselkedés a leginkább kompatibilis a Markov modell feltevéseivel, hiszen a két értéket két különböző rezsimnek foghatjuk fel. A 2a-b ábrákon mindez gyönyörűen visszaköszön, a Kalman algoritmusok láthatóan rosszabbul alkalmazkodnak az ugráshoz, bár ezen kívül a két modell standard hibája közel azonos. A szűrők – érthetően – csak az ugrás után kezdenek alkalmazkodni, a simítók pedig átsimítják az együttható változását. Összességében, diszkrét váltásnál a Markov modell gyorsabban reagál, de a Kalman-szűrő is használhatóan működik.
- **Lineáris trend az együtthatóban**, értéke a mintában folyamatosan 0.2-ről 0.9-re változik. Ez az eset leginkább a versenyen kívül lévő FLS-nek lenne megfelelő, hiszen valójában itt nem mondhatjuk, hogy  $\beta_t$  változásai véletlenek – független azonos eloszlásúak – lennének. A korábbi fejezetekből azonban tudjuk, hogy elméletben ennek a ténynek a Kalman-szűrőt nem szabad befolyásolnia. A gyakorlatban ez visszaköszön, a 3a-b ábrák tanúsága szerint a Kalman algoritmusok alacsony bizonytalansággal pontosan képesek követni a lineáris változást. Figyeljük meg a szűrő alkalmazkodását a kezdő 0.5-ös értékről. A simító már jobban közelíti ezen a kezdeti szakaszon is az együtthatót, de az induló becsléshez való „húzás” itt is látszik.

A Markov modellek itt már nehezebb helyzetben vannak, hiszen az ML módszer két rögzített  $\beta$  állapotot tud csak kijelölni. Ezek az állapotok logikusan jelölődnek ki a növekvő lineáris szakasz első és harmadik negyedéhez, a szűrő és simító pedig – nagyjából középen – átvált a felső rezsimre, ezt láthatjuk a 3b ábrán. A másik panel szerint ez az átváltás eloszlik a minta közepén, így az egyedi eset hibája ellenére átlagosan jó becslést kapunk: egyrészt jó nagy standard hibával, másrészt pedig egyetlen becsléssel biztosan hibázni fogunk.

Ezt az esetet összefoglalva, a Markov modell „lépcsősen” becsül különböző rezsimeket a folytonos váltás helyett, és a valószínűségek többnyire úgy alakulnak, hogy a súlyozott várható érték nem folytonosan, hanem hirtelen vált át egyik rezsimből a másikba. Lineáris és ehhez hasonló folytonos változás esetén tehát érdemes a nagyon jó követési tulajdonságokkal rendelkező Kalman szűrőt választani.

- **Színuszoid mozgás az együtthatóban**,  $\beta_t$  a mintában egy teljes periódusnyi szinuszos hullámot végez, melynek középértéke és amplitúdója rendre 0.5 és 0.3. Ez az eset jellegében nagyon közel áll az előzőhöz, hiszen itt sem véletlenek az együttható megváltozásai. Ennek megfelelően a megfigyelésünk is hasonló: a Markov modell legfeljebb átlagosan ad jó becslést, a Kalman-szűrő viszont helyesen követi az együttható mozgását. Figyeljük meg a 4a ábrán (és akár az előző, lineáris esetenél is), hogy a Kalman-szűrő várhatóan némi késéssel követi csak a mozgást; ez egy általánosan megfigyelhető jelenség, amelynek az oka az, hogy az algoritmus egyre csökkenő súllyal, de figyelembe veszi az elmúlt megfigyeléseket. A simító természetesen már nem esik ebbe a hibába.
- **Az együttható egységgyök folyamatot követ**, melynek kiinduló értéke 0.5. Ez az eset láthatóan a Kalman-szűrő terepe, hiszen tökéletesen megegyezik annak a feltevésével, míg a másik oldalon előre látható, hogy a Markov-modell becslésének jósága itt esetleges, nagyban függhet a folyamat mintabeli alakulásától. Az 5a-b ábrákon lévő realizációból az előző két esethez hasonlóra következtethetünk: bár a Markov modell szabadsága jóval kisebb, itt is megfelelően választja ki a rezsimeket és vált közöttük.

A szimuláció összefoglalásául tekintsünk az átlagos négyzetes hibákat összegző 1. táblázatra! Megállapíthatjuk, hogy azokban az esetekben, ahol a feltevések megegyeznek az adott modell feltevésével, (1) a simítóeljárás jobb eredményt produkál a szűrőnél, és (2) az adott modell jobban működik a másikkal. A fentiekben részletesen leírtuk, hogy melyik eset melyik modell feltételrendszerének kedvez jobban, és mindezek a tapasztalt hibákban is visszaköszönnek, ami nem meglepő. Ahogyan az sem meglepő, hogy félrespecifikálás hiányában az a jobb eljárás, ami az adott pillanatban „jövőbe lát”, tehát ismeri az összes adatpontot. Ne

feledkezzünk el viszont arról sem, hogy valós idejű alkalmazásban csak a szűrt eredmények állnak rendelkezésre!

## 6 Összefoglalás

Tanulmányunkban az időben változó együtthatójú lineáris regresszióra felírt Kalman-szűrőt, a rugalmas legkisebb négyzetek módszerét és a Markov rezsimműtős modellt hoztuk közös keretbe és hasonlítottuk őket össze elméletben és gyakorlatban. A Kalman-szűrő egy olyan algoritmikus frissítő eljárás az állapot-tér modell állapotváltozójának becslésére, amely négyzetes értelemben optimális mind a megfigyelések, mind az állapotvektor valódi értékektől vett eltérése szempontjából. A rugalmas legkisebb négyzetek módszere ugyanebben az állapot-tér keretben, ugyanúgy az állapotváltozó becslésére szolgál, a célfüggvénye azonban a közönséges legkisebb négyzetek módszerének egy logikus továbbgondolása: a „szokásos” eltérőnégyzetek mellett egy dinamikus tagot is tartalmaz, amely az állapotvektor időbeli változásának varianciáját kontrollálja. A célfüggvény az OLS-hez hasonlóan eloszlási feltevések nélkül optimalizálható, és az is igazolható, hogy némi restriktiók figyelembe vételével a Kalman-szűrővel azonos eredményre jut.

A Markov rezsimműtős modell alapjaiban hasonló az állapot-térhez, a látens állapotváltozó azonban itt diszkrét értékeket vehet fel, amelyeknek az egymásba való átmenete Markov láncot alkot. A megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényének ismeretében adhatunk szűrőeljárást az állapotvektor becslésére, itt tehát nem kerülhetjük el az eloszlási feltevéseket a megfigyelt változókra vonatkozóan. Mind a Kalman-szűrőt, mind a Markov szűrőt alkalmazhatjuk együtt a maximum likelihood módszerrel, amely a modellek gyakorlatilag bármely paraméterét ki tudja becsülni.

A tanulmány gyakorlati része regressziókat szimulált, majd becsült vissza a Kalman-szűrő és a Markov modell segítségével, eloszlási feltevések mellett, a maximum likelihood módszer segítségével. Az eredmények szerint egyrészt az időben változó együtthatóra vonatkozó feltevéstől függően az a modell teljesített jobban, amelynek a feltevései közelebb állnak az együtthatóéhoz, másrészt a simítóeljárások jobb eredményt érnek el a szűrőeljárásoknál. Ezek alapján, ha a regresszió együtthatójában hirtelen ugrásokat feltételezünk, érdekesebb a Markov modellt használnunk, míg ha folytonos változást, akkor inkább a Kalman-szűrőt. Emellett, amíg nem valós idejű, „on-line” típusú becsléssel van dolgunk, a szűrőeljárások helyett érdemes simítókat alkalmaznunk.

A tanulmányból egyelőre kimaradt néhány „közönségesebb”, ám intuitívabb legkisebb négyzetek alapú becslési változat, amelyet máig gyakran láthatunk elemzésekben: ezek a mozgóablakos OLS, illetve a rögzített kezdőpontból induló OLS, amelyet rekurzív legkisebb

négyzetek módszerének is neveznek. Ezek a módszerek nagyon közel állnak az FLS-hez, terveink között szerepel annak bemutatása, hogy pontosan mennyire, valamint hogy összehasonlítva a többivel, hogyan teljesítenek a gyakorlatban. Hasonlóan, az időben változó paraméterű regresszió Bayes-i eszközökkel is becsülhető, amely módszer az utóbbi években különösen nagy teret hódított, ezt a modellt is célszerű így bevenni a vizsgálatba.

## Hivatkozások

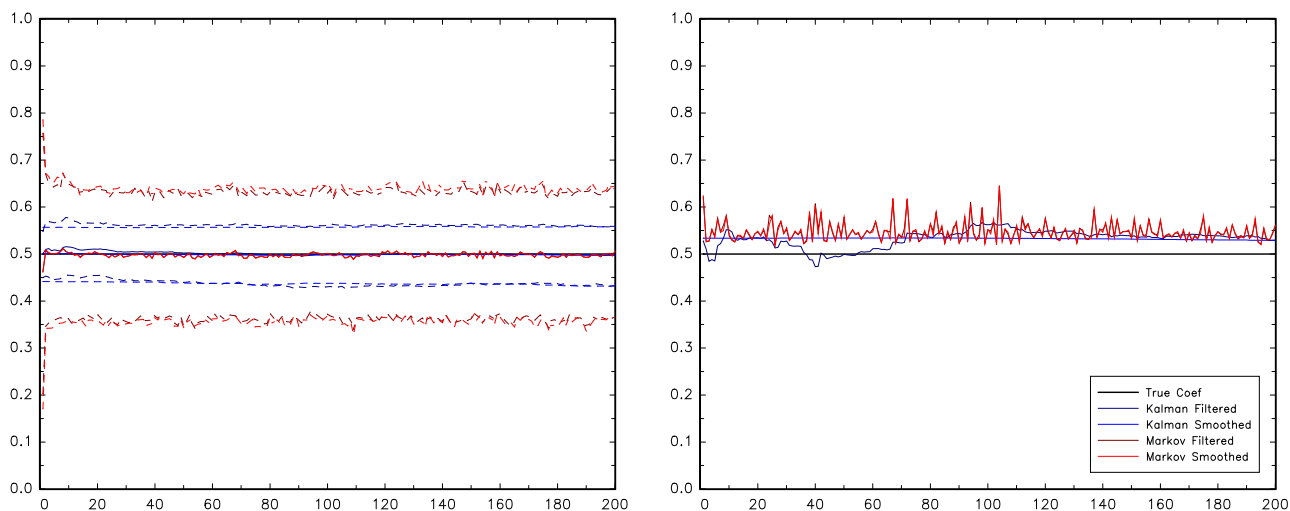
- Beechey, M. és Österholm, P. (2007): *The Rise and Fall of U.S. Inflation Persistence*, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board, 2007-26
- Cimadomo, J., Garnier, J. és Schalck, C. (2007): *Time Varying Fiscal Policy Rules for Five OECD Countries*, AFSE Working Paper
- Darvas, Zs. (2001): *Árfolyamrendszer-hitelesség és kamatláb-változékonyság*, Statisztikai Szemle, 79, pp490-506
- Darvas, Zs. (2009): *Monetary Transmission in three Central European Economies: Evidence from Time-Varying Coefficient Vector Autoregressions*, Tanszéki Tanulmány, 2009/3, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék, Budapesti Corvinus Egyetem.
- Darvas, Zs. és Simon, A. (2002): *A financiálisan fenntartható kibocsátás becslése a gazdaság nyitottságának felhasználásával*, Közgazdasági Szemle XLIX(5), pp361-376.
- Darvas, Zs és Varga, B. (2010): *Time-varying Coefficient Methods to Measure Inflation Persistence*, paper presented at the ECOMOD 2010 Conference in Istanbul, Turkey, 7<sup>th</sup>-10<sup>th</sup> July 2010
- Dossche, M. és Everaert, G. (2005): *Measuring Inflation Persistence – A Structural Time Series Approach*, ECB Working Paper, 495
- Driver, R., Greenslade, J. V. és Pierse, R. (2006): *Whatever Happened to Goldilocks? The Role of Expectations in Estimates of the NAIRU in the US and the UK*, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 68(1), pp45-79
- Dueker, M. J. (1997): *Markov Switching in GARCH Processes and Mean Reverting Stock Market Volatility*, Journal of Business & Economic Statistics, 15(1), pp26-34
- Dueker, M. J. és Neely, Ch. (2007): *Can Markov Switching Models Predict Excess Foreign Exchange Returns?* Journal of Banking & Finance, 31(2), pp279-296
- Eubank, R. L. (2006): *A Kalman Filter Primer*, Chapman and Hall, New York
- Goldfeld, S. M. és Quandt, R. E. (1973): *A Markov Model for Switching Regressions*, Journal of Econometrics, 1, pp3-16
- Granger, C. W. J. (2008): *Non-Linear Models: Where Do We Go Next – Time Varying Parameter Models?* Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 12(3)
- Granger, C. W. J. and Hyung, N. (2006): *Introduction to M-M Processes*, Journal of Econometrics, 130, pp143-164
- Guo, L. (1990): *Estimating Time Varying Linear Parameters by the Kalman Filter Based Algorithm: Stability and Convergence*, IEEE Transactions on Automatic Control, 35(2), pp141-147
- Hamilton, J. D. (1989): *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle*, Econometrica, 57, pp357-384
- Hamilton, J. D. és Susmel, R. (1994): *Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime*, Journal of Econometrics, 64, pp307–333
- Harvey, A. C. (1989): *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge

- Horváth, R. (2007): *Estimating Time-Varying Policy Neutral Rate in Real Time*, IES Working Paper, 2007/1, Charles University of Prague
- Jazwinski, A. H. (1970): *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York
- Kaasra, I. és Boyd, M. (1996): *Designing a Neural Network for Forecasting Financial and Economic Time Series*, *Neurocomputing* (10), pp215-236
- Kalaba, Robert és Tesfatsion, L. (1988): *The Flexible Least Squares Approach to Time-varying Linear Regression*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, pp43-48
- Kalaba, Robert és Tesfatsion, L. (1989): *Time-Varying Linear Regression Via Flexible Least Squares*, *Computers and Mathematics with Applications*, 17, pp1215-1245
- Kalaba, Robert és Tesfatsion, L. (1990a): *Flexible Least Squares for Approximately Linear Systems*, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 20, pp978-989
- Kalaba, Robert és Tesfatsion, L. (1996): *A Multicriteria Approach to Model Specification and Estimation*, *Computational Statistics and Data Analysis*, 21, pp193-214
- Kladroba, A. (2005): *Flexible Least Squares Estimation of State Space Models: An Alternative to Kalman-Filtering?* Working Paper No. 149, Universität Duisburg-Essen.
- Lütkepohl, H. és Herwartz, H. (1996): *Specification of Varying Coefficient Time Series Models via Generalized Flexible Least Squares*, *Journal of Econometrics*, 70, pp261-290
- Montana, G., Triantafyllopoulos, K. and Tsagaris, T. (2009): *Flexible Least Squares for Temporal Data Mining and Statistical Arbitrage*, *Expert Systems with Applications*, 36, 2(2), pp2819-2830
- Morana, C. (2009): *An Omnibus Noise Filter*, *Computational Statistics*, 24
- Norden, S. és Schaller, H. (1997): *Regime Switching in Stock Market Returns*, *Applied Financial Economics*, 7(2), pp177-191
- Tesfatsion, Leigh és John Veitch (1990): *U.S. Money Demand Instability: A Flexible Least Squares Approach*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 14, pp151-173
- Tucci, M., P. (1990): *A Note on Flexible Least Squares*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 14, pp175-182
- Wood, B. D. (2000): *Weak Theories and Parameter Instability: Using Flexible Least Squares to Take Time Varying Relationships Seriously*, *American Journal of Political Science*, 44(3), pp 603-618

## Függelék

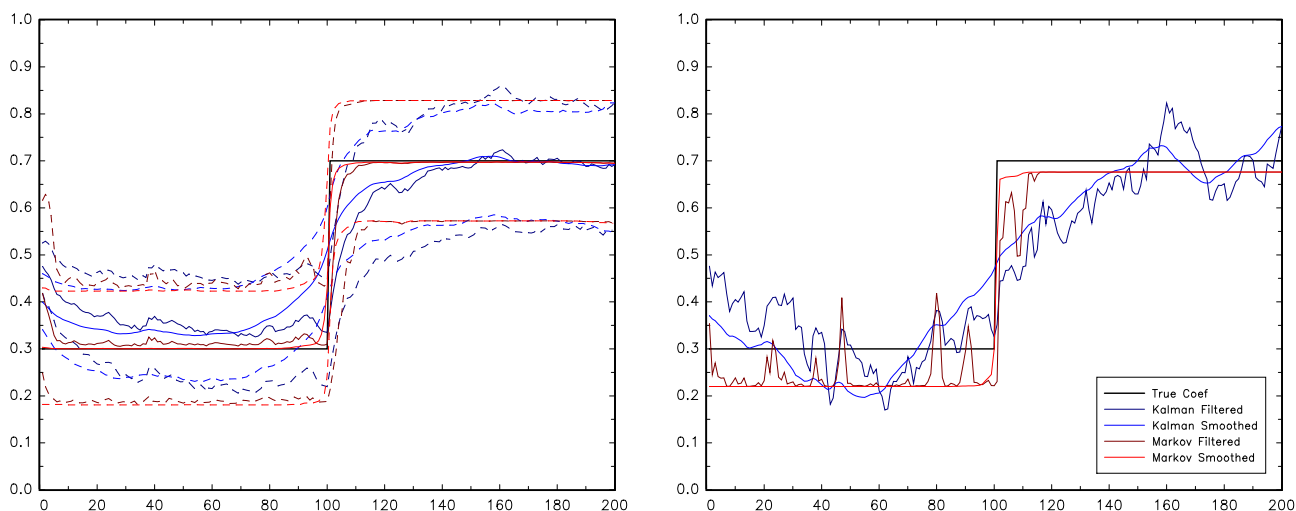
Feltevés $\beta_t$ -re	Kalman		Markov	
	Szűrő	Simító	Szűrő	Simító
Konstans	3.5%	3.1%	8.0%	8.3%
Diszkrét ugrás	9.9%	8.4%	8.2%	7.2%
Lineáris trend	7.5%	6.6%	12.5%	12.7%
Színuszoid mozgás	9.3%	6.7%	12.0%	11.8%
Egységgyök folyamat	12.6%	10.3%	14.2%	13.8%

**1. táblázat – A szimulációk és visszabecslések átlagos RMSE értékei**  
Az együtthatóra vonatkozó öt feltevés, négyféle becslő eljárás.



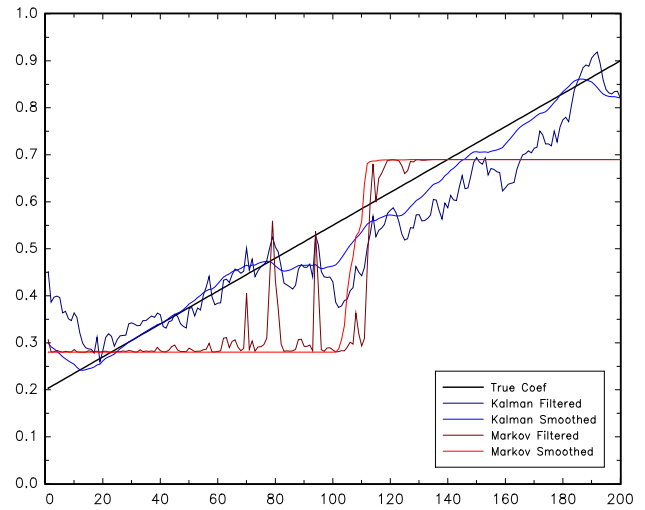
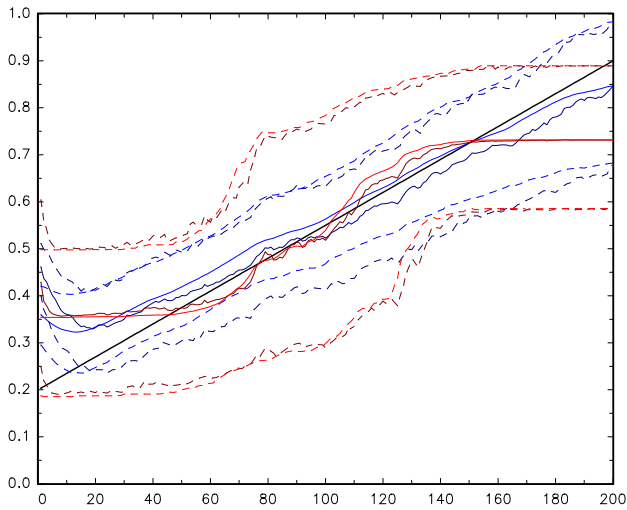
**1a – b. ábrák – Kalman és Markov becslések, időben konstans együttható,  $\beta_t = 0.5$**

A bal oldalon 1000 realizáció átlagos becslése látható 5 és 95%-os kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.



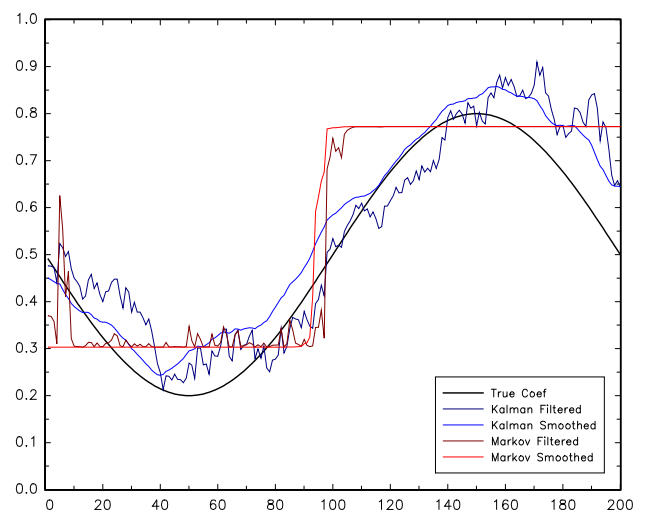
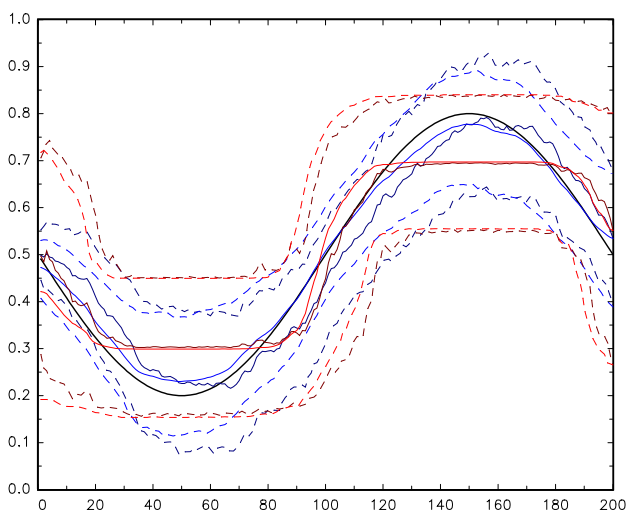
**2a – b. ábrák – Kalman és Markov becslések, diszkrét törés az együtthatóban,  $\beta_t = 0.3(t \leq 100) + 0.7(t > 100)$**

A bal oldalon 1000 realizáció átlagos becslése látható 5 és 95%-os kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.



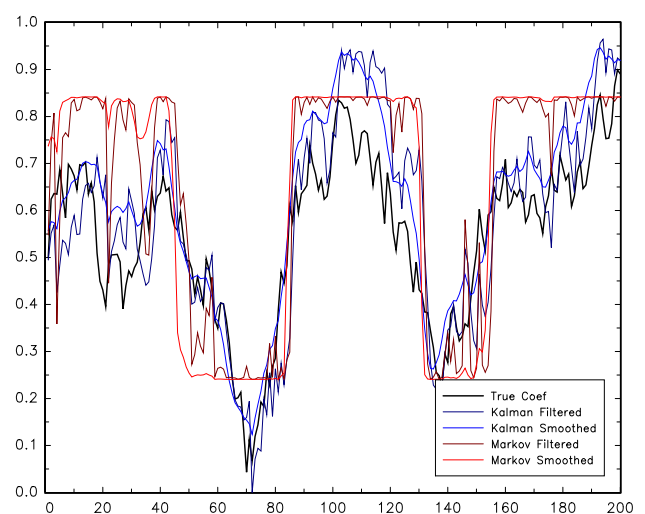
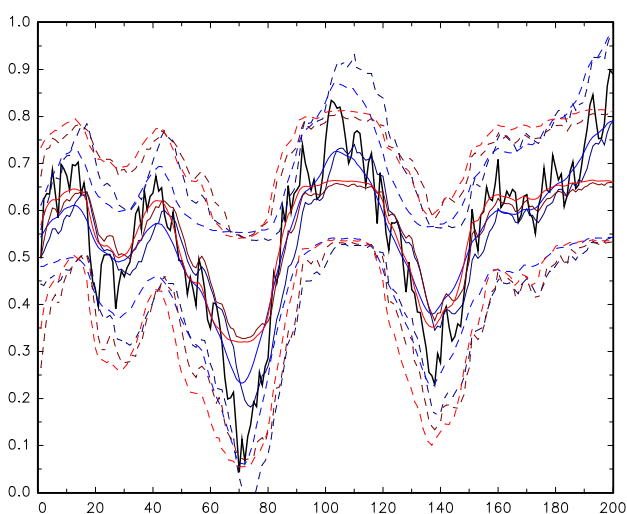
**3a – b. ábrák – Kalman és Markov becslések, lineáris trend az együtthatóban,  $\beta_t = 0.2 + 0.7(t/200)$**

A bal oldalon 1000 realizáció átlagos becslése látható 5 és 95%-os kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.



**4a – b. ábrák – Kalman és Markov becslések, szinuszoid mozgás az együtthatóban,  $\beta_t = 0.5 - 0.3 \sin(2\pi t/200)$**

A bal oldalon 1000 realizáció átlagos becslése látható 5 és 95%-os kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.



**5a – b. ábrák – Kalman és Markov becslések, egységgyök az együtthatóban,  $\beta_t = \beta_{t-1} + 0.05\varepsilon_t$ , ahol  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$**

A bal oldalon 1000 realizáció átlagos becslése látható 5 és 95%-os kvantilisekkel, a jobb oldalon egyetlen realizáció becslései.



# MATEMATIKAI KÖZGAZDASÁGTAN ÉS GAZDASÁGELEMZÉS TANSZÉK

## TANSZÉKI TANULMÁNYOK

- 2010 / 4 Varga Balázs: *Időben változó együtttható ökonometriai modellek*
- 2010 / 3 Zsolt Darvas: *The Case for Reforming Euro Area Entry Criteria, Society and Economy*
- 2010 / 2 Zsolt Darvas: *Fiscal Federalism in Crisis: Lessons for Europe from the US*
- 2010 / 1 Zsolt Darvas – Jakob von Weizsäcker: *Financial Transaction Tax: Small is Beautiful*
- 2009 / 4 Zsolt Darvas: *The Impact of the Crisis on Budget Policy in Central and Eastern Europe, OECD Journal on Budgeting*
- 2009 / 3 Zsolt Darvas: *Monetary Transmission in three Central European Economies: Evidence from Time-Varying Coefficient Vector Autoregressions*
- 2009 / 2 Alan Ahearne – Herbert Brücker – Zsolt Darvas – Jakob von Weizsäcker: *Cyclical dimensions of labour mobility after EU enlargement*
- 2009 / 1 Darvas Zsolt – Szapáry György: *Árszínvonal-konvergencia az új EU tagországokban: egy panel-regressziós modell eredményei*
- 2008 / 5 Darvas Zsolt – Szapáry György: *Az új EU-tagországok megfelelése az optimális valutaövezet kritériumainak*
- 2008 / 4 Darvas Zsolt – Szapáry György: *Az euróövezet bővítése és euróbevezetési stratégiák*
- 2008 / 3 Móczár József: *Nemlineáris dinamika klasszikus növekedési modellekben*
- 2008 / 2 Zsolt Darvas: *Leveraged Carry Trade Portfolios, Journal of Banking and Finance, Vol. 33, Issue 5, May 2009*
- 2008 / 1 Zsolt Darvas – György Szapáry: *Euro Area Enlargement and Euro Adoption Strategies, EU Commission: EMU@10 years*
- 2007 / 8 Benedek Gábor – Homolya Dániel: *Analysis of operational risk of banks – catastrophe modelling*
- 2007 / 7 Zalai Ernő: *Műszaki és gazdasági hatékonyság Koopmans termeléselméletében*
- 2007 / 6 Darvas Zsolt – Schepp Zoltán: *Kelet-közép európai devizaárfolyamok előrejelzése határidős árfolyamok segítségével*
- 2007 / 5 Darvas Zsolt – Schepp Zoltán: *Forecasting Exchange Rates of Major Currencies with Long Maturity Forward Rates*
- 2007 / 4 Benedek Gábor – Lublőy Ágnes – Szenes Márk: *Hálózatelmélet banki alkalmazása*
- 2007 / 3 Móczár József – Krisztin Tibor: *A Harrod modell strukturális stabilitása*
- 2007 / 2 Benedek Gábor: *“Dupla vagy semmi” – duplikációbecslés szimulációs módszerekkel*
- 2007 / 1 Zsolt Darvas: *Estimation Bias and Inference in Overlapping Autoregressions: Implications for the Target Zone Literature, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, Vol. 70, Issue 1, February 2008*
- 2006 / 4 Zsolt Darvas – György Szapáry: *Business Cycle Synchronization in the Enlarged EU, Open Economies Review, Vol. 19, No. 1, February 2008*
- 2006 / 3 Zsolt Darvas – Zoltán Schepp: *Long Maturity Forward Rates of Major Currencies Are Stationary, Applied Economics Letters, Vol. 16, Issue 11, July 2009*
- 2006 / 2 Zalai Ernő: *Reducibilitás és egyensúly Leontief- és Neumann-típusú stacionárius modellekben*
- 2006 / 1 Móczár József: *Arrow-Debreu modell és a Kornai-kritika harminc év után*
- 2005 / 9 Zalai Ernő: *Tjalling C. Koopmans (1910 – 1985)*
- 2005 / 8 Móczár József: *Ragnar Frisch (1895 – 1973)*
- 2005 / 7 Csekő Imre: *Gerard Debreu (1921 – 2004)*