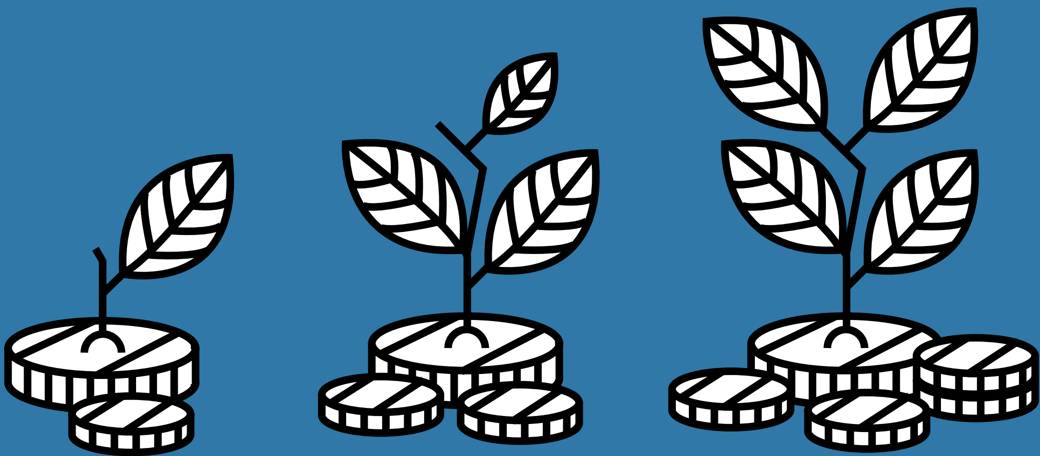
Olvass és tanulj !

#06

Növekedéselméletek

A humán tőkén innen és túl



Szerző: Kuncz Izabella

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

MAGYAR NEMZETI BANK

Kuncz Izabella

Növekedéselméletek

Közgazdaságtudományi Kar
Makroökonómia Tanszék

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar
Makroökonómia Tanszék

„A Budapesti Corvinus Egyetem és a Magyar Nemzeti Bank
együttműködési megállapodása keretében támogatott mű.”

ISBN 978-963-503-649-3
Kiadás 2017

Nyomdai kivitelezés: CC Printing Kft.

TARTALOM

Előszó

A könyv elsősorban a Budapesti Corvinus Egyetem Közgazdasági elemző mesterszakának hallgatói számára készült, akik az első félévükben a Haladó makroökonómia I. tárgy keretein belül megismerkedhetnek a növekedéselmélet releváns kérdéseivel. A tananyag megértéséhez előfeltétel az alapszakos tanulmányok során elsajátított közgazdasági alapfogalmak és a szükséges matematikai eszköztár ismerete.

Az első fejezet – amolyan kedvcsinálóként – empirikus tényeket mutat be a világ országainak gazdasági növekedéséről és a jövedelemkülönbségekről, illetve felhívja a figyelmet azokra a megfigyelésekre, melyeket majd az egyes elméletekkel meg kell tudni magyarázni. A további fejezetekben az egyszerűbb modellektől indulva – fokozatosan bővítve azokat – jutunk el végül az egyre bonyolultabb összefüggésekig.

A modellek bemutatása és levezetése után a fejezetek végén található rövid összefoglalások kiemelik az adott anyagrész főbb következtetéseit, így a vizsgák előtt könnyebb áttekinthetőséget tesznek lehetővé. A gyakorló feladatok pedig akár a szemináriumokon, akár az otthoni gyakorlás során hasznosak lehetnek, illetve a modellek továbbfejlesztési lehetőségeit is megtalálják bennük azok, akik jobban elmélyednének a témakörben. Remélem, hogy a könyv segítséget nyújt majd a kurzus sikeres teljesítésében, és olyan tudás birtokába juttatja az Olvasót, melyet a későbbiek során is alkalmazni tud.

Végül szeretnék köszönetet mondani kollégáimnak a Makroökonómia Tanszéken. Egyrészt azért, mert mindent tőlük tanultam, amit a makroökonómiai modellekről tudni érdemes. A könyv megírása során is nagy hasznát vettem az órai jegyzeteiknek. Másrészt pedig azért, mert diákkoromban bebizonyították, hogy érdekes és izgalmas a makroökonómia, és felkeltették érdeklődésemet a téma iránt, mely azóta is töretlen. Külön köszönöm Varga Gergelynek, a könyv lektorának a számos hasznos tanácsot és észrevételt, valamint Magyarkuti Gyulának, hogy a könyv elnyerhette végső formáját.

Budapest, 2017. június — Kuncz Izabella

I.

EMPIRIKUS TÉNYEK A NÖVEKEDÉSRŐL

A gazdasági növekedés a makroökonómia egyik központi témaköre, hiszen az országok között kialakult jelentős jövedelmi különbségek többek között a bennük rejlő növekedési potenciálra vezethetők vissza. Az ezzel foglalkozó szakirodalom különféle elméletek és modellek segítségével próbál választ kapni arra a kérdésre, hogy mi lehet a fejlődés fő mozgatórugója és mivel biztosítható hosszú távon a növekedés.

Ebben a fejezetben a megfelelő mérőszámok kiválasztása után megmutatjuk, mekkora eltérések vannak a világ gazdaságai között. Az adatok alapján felállított rangsorban megnézzük, mely országok tartoznak a szegényebbek, melyek a gazdagabbak csoportjába, és minek köszönhető az, ha valaki jobb vagy rosszabb kategóriába kerül az idő múlásával.

Akár több száz évig visszamenőleg megvizsgáljuk a jövedelem alakulásának idősorait a világ különböző területein, és összegyűjtjük a növekedéssel kapcsolatos empirikus tényeket, valamint a gazdasági növekedést befolyásoló tényezőket. Végül az országok közötti konvergenciát tanulmányozzuk, vagyis megfigyeljük, hogy létezik-e egy olyan hosszú távú növekedési pálya, melyet idővel az összes gazdaság elérhet, és aminek köszönhetően megszűnnek a jövedelmi különbségek közöttük.

1.1. A jólét mérőszámai

A gazdasági teljesítmény mutatójaként a bruttó hazai terméket, vagyis a GDP-t fogjuk használni a könyv további részében. Figyelnünk kell arra, hogy az értékek időbeli összehasonlítása érdekében kiszűrjük idősorából az árváltozást, és bázis árakon számoljuk ki minden évre vonatkozóan, illetve az országok összevethetősége miatt ugyanabban a pénznemben (például dollárban) adjuk azt meg.

Szintén végig kell gondolnunk, hogy az egy főre és az egy munkásra vetített értékek közül melyiket érdemes használnunk. A kevésbé fejlett gazdaságokban jellemzően alacsonyabb az aktivitási ráta, mert relatíve többen maradnak távol a munkapiactól (például a nők jelentős része gazdaságilag inaktív, és nagyobb az informális szektor). Ha a teljes népességszámmal osztjuk le a GDP-t – mely nem veszi figyelembe a nem-piaci termelést – akkor alulbecsülhetjük ezen országok teljesítményét a fejlettebbekéhez képest.

A problémára megoldást jelenthet, ha egy foglalkoztatottra vetítjük a gazdaság GDP-jét, jobban kifejezve ezzel az ott dolgozók termelékenységét. Mivel azokban a növekedési modellekben, melyekkel a későbbi fejezetekben foglalkozunk, nagy szerepe lesz a munka produktivitásának, ezt a mutatót is érdemes alkalmazni a jólét mérésére.

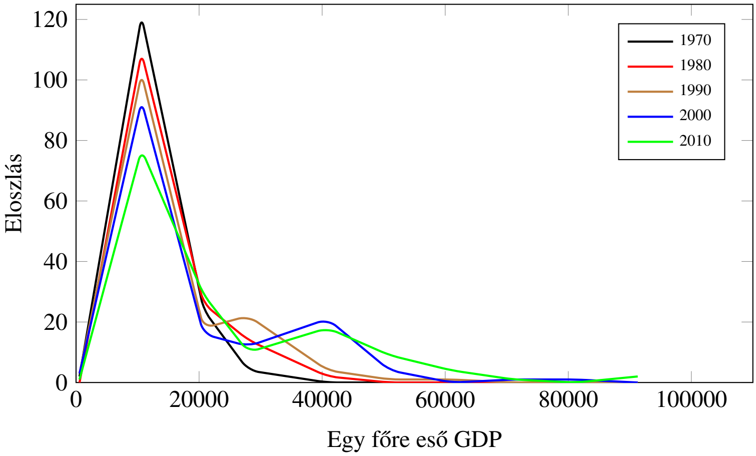
Az 1.1 táblázatban jól láthatjuk, mekkora eltérések lehetnek a két fenti mutatóból kapott eredmények között. A táblázat vásárlóerő-paritáson mérve tartalmazza az egy főre és az egy foglalkoztatottra jutó GDP értékét különböző országokban 2015-ben, az Amerikai Egyesült Államokhoz viszonyítva. Egészen más sorrend alakul ki az egyik illetve a másik mutató mellett. Írország például mindkét esetben listavezető ezen a mintán, de az egy foglalkoztatottra jutó GDP alapján 27%-kal, míg az egy főre jutó GDP alapján csak 16%-kal ért el jobb eredményt, mint az Egyesült Államok. Belgium az egy főre eső GDP szerint Svédország és Dánia után következik, de a másik mutatóval mérve mindkettőt megelőzi. Az előbbiek összefüggésben állnak azzal, hogy Írországban és Belgiumban is alacsonyabb a foglalkoztatottság, mint a többi említett gazdaságban. Franciaország szintén a foglalkoztatottak relatíve alacsony aránya miatt ugrik feljebb a sorrendben, ha egy foglalkoztatottra és nem egy főre normáljuk a GDP-t. Végül Algéria és Egyiptom egy főre eső GDP-je az USA értékének 26, illetve 19%-át teszi ki. Bár az egy foglalkoztatottra jutó GDP mellett is jóval szegényebbnek tűnnek, mint az Egyesült Államok, a helyzetük jelentősen javul, 45 és 32%-ra emelve a mutatót.

	GDP/fő	GDP/foglalkoztatott	Foglalkoztatottság
	(USA-hoz viszonyítva)		%
Írország	1,16	1,27	54,37
Amerikai Egyesült Államok	1,00	1,00	58,83
Svédország	0,86	0,83	59,73
Dánia	0,86	0,80	58,22
Belgium	0,79	0,91	49,05
Egyesült Királyság	0,73	0,72	59,36
Franciaország	0,72	0,84	49,44
Algéria	0,26	0,45	38,89
Egyiptom	0,19	0,32	43,10

1.1. táblázat. Egy főre és egy foglalkoztatottra eső GDP vásárlóerő-paritáson mérve, valamint a 15 éven felüli népesség foglalkoztatottsága 2015-ben. Adatok forrása: World Bank.

Az 1.1 ábra 151 ország eloszlását mutatja a vásárlóerő-paritáson mért egy főre eső reál GDP alapján. Láthatjuk, hogy a legtöbb országban 20 000$ alá esik az értéke, de az évek múlásával egyre csökken azoknak a száma, melyek ebbe a kategóriába sorolhatók. Észrevehető, hogy 1990-ben és azután az országok egy másik jövedelmi szint mellett is sűrűsödnek, mely folyamatosan tolódik jobbra. Minél későbbi adatsort nézünk, annál inkább elnyúlik jobbra az eloszlás, vagyis a gazdagabb országok jövedelme annál magasabbá válik a szegényekhez képest, így a legnagyobb jövedelmi egyenlőtlenséget 2010-ben látjuk az ábrán.

A vizsgált 40 év alatt az egy főre eső GDP átlagos értéke jelentősen megnőtt. 2010-ben körülbelül 13 065$ volt, mely több mint kétszerese az 1970-es 5887$-os értéknek. A leggazdagabb ország a 151 elemű mintában 1970-ben Svájc volt közel 27 250$-os egy főre eső GDP-vel, majd 2010-ben Luxemburg került az élre 84 126$-ral, ami azt jelenti, hogy megháromszorozódott a legmagasabb jövedelem értéke. A legalacsonyabb egy főre eső GDP értéke viszont inkább stagnált, hiszen Etiópia 1970-es 544$-os és Kongó 2010-es 567$-os szintje között nincs számottevő növekedés. A legszegényebb és leggazdagabb országok közti különbségek növekedése tehát egyre jelentősebb. Míg 1970-ben 50-szerese volt a legmagasabb jövedelmű ország egy főre eső GDP-je a legalacsonyabb jövedelmű GDP-jének, addig 2010-ben már 148-szorosa.



1.1. ábra. Az országok eloszlása egy főre eső GDP alapján (2011 US$, vásárlóerő-paritáson számítva). Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

Mivel átlagosan is növekedett a jövedelem, és a növekedés nem lineáris, érdemes a változó természetes alapú logaritmusát vizsgálni. Ha például a szegény ($\text{GDP}_{s,t}$) és a gazdag ország egy főre eső GDP-jének ($\text{GDP}_{g,t}$) is x az éves növekedési rátája, akkor a t. periódusban $\text{GDP}_{g,t} - \text{GDP}_{s,t}$ a jövedelmeik közti különbség abszolút értéke, míg a következőben már $(1+x)(\text{GDP}_{g,t} - \text{GDP}_{s,t})$, vagyis az idő múlásával folyamatosan nő, emiatt egyre inkább szétterülő eloszlást láthatunk az ábrán.

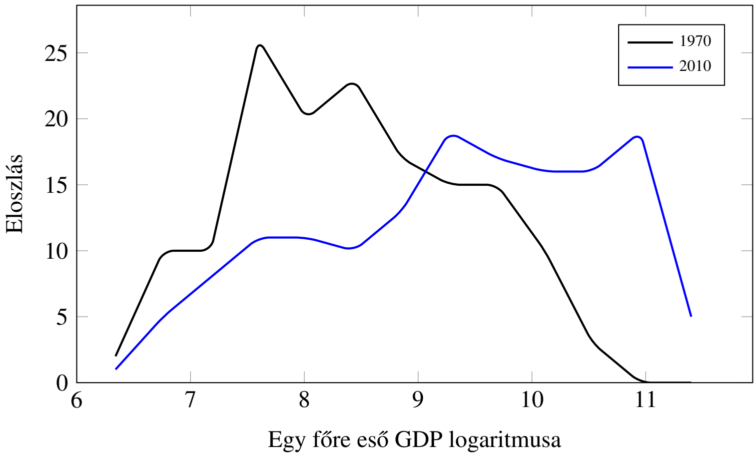
Ezzel ellentétben, ha az egy főre eső GDP természetes alapú logaritmusát vesszük, akkor azok különbsége nem változik az időben, ami a logaritmus azonosságaiból adódik:

$$\ln \text{GDP}_{g,t} - \ln \text{GDP}_{s,t} = \ln\left(\frac{\text{GDP}_{g,t}}{\text{GDP}_{s,t}}\right),$$

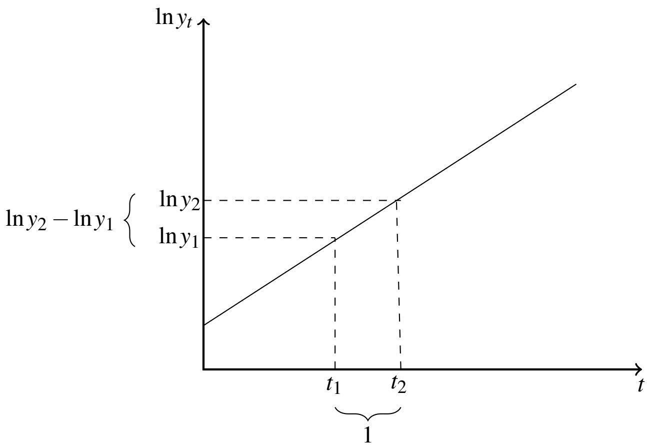
$$\ln \text{GDP}_{g,t+1} - \ln \text{GDP}_{s,t+1} = \ln\left(\frac{(1+x)\text{GDP}_{g,t}}{(1+x)\text{GDP}_{s,t}}\right) = \ln\left(\frac{\text{GDP}_{g,t}}{\text{GDP}_{s,t}}\right).$$

Az 1.2 ábra ugyanannak a 151 országnak mutatja az eloszlását, mint az 1.1 ábra, de itt az egy főre eső GDP természetes alapú logaritmusa alapján. A jobbra tolódás, illetve a gazdagabbak jövedelmének relatíve nagyobb mértékű növekedése a 40 év alatt jól látszik, viszont a diagram már nem olyan elnyúló, mint az előző ábrán volt.

A logaritmizálás másik haszna, hogy a logaritmizált idősor görbéjének meredeksége a változó növekedési rátáját mutatja, mint például az 1.3 ábrán, ahol egy y_t változó alakulását ábrázoltuk az időben.



1.2. ábra. Az országok eloszlása egy főre eső GDP logaritmusa alapján (2011 US$, vásárlóerő-paritáson számítva). Adatok forrása: Penn World Table 9.0.



1.3. ábra. Egy változó természetes alapú logaritmusának alakulása

A változó éves átlagos növekedési rátája is könnyen kiszámítható a logaritmizált idősoron. Ha évente x ütemű a növekedés, akkor bármely két periódus (például t és T) között fennáll az alábbi összefüggés:

$$y_T = (1+x)^{T-t} y_t,$$

melynek természetes alapú logaritmusa:

$$\ln y_T = (T-t)\ln(1+x) + \ln y_t.$$

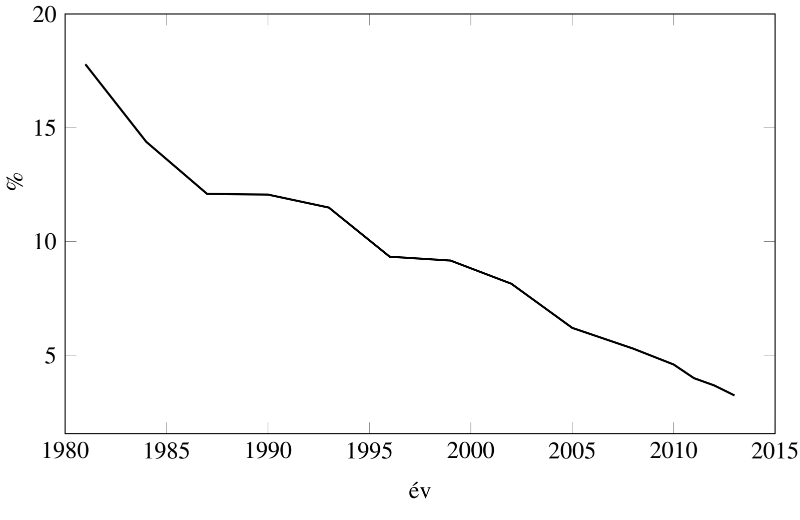
Átrendezés után az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$\ln(1+x) = \frac{\ln y_T - \ln y_t}{T-t},$$

ahol $\ln(1+x) \approx x$, ha x értéke nullához közeli, így egyszerűen számszerűsíthető az átlagos növekedési ráta.

1.2. Gazdagok és szegények

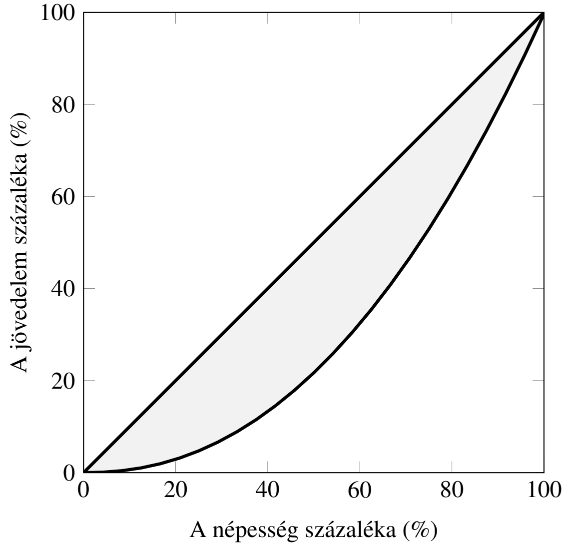
Az 1.4 ábra szerint azok aránya a világ teljes népességén belül, akik a szegénységi küszöb – jelen esetben napi 1,9$ – alatti összegből élnek egyre csökken. A ’80-as évek elején még 15%-nál is nagyobb volt az arányuk, ám napjainkra már 5% alá esett.



1.4. ábra. Napi 1,9$-os szegénységi küszöb alatt élők aránya a világ népességén belül, 1980-2016. Adatok forrása: World Bank.

Azt, hogy közben az országokon belüli jövedelmi különbségek mekkorák és hogy csökkennek-e, a *Lorenz-görbe*, illetve a *Gini-index* segítségével állapíthatjuk meg.

Egy hipotetikus gazdaság Lorenz-görbéje az 1.5 ábrán látható. Azt mutatja meg, hogy az ország népességének adott hányada az ország teljes jövedelmének mekkora részét



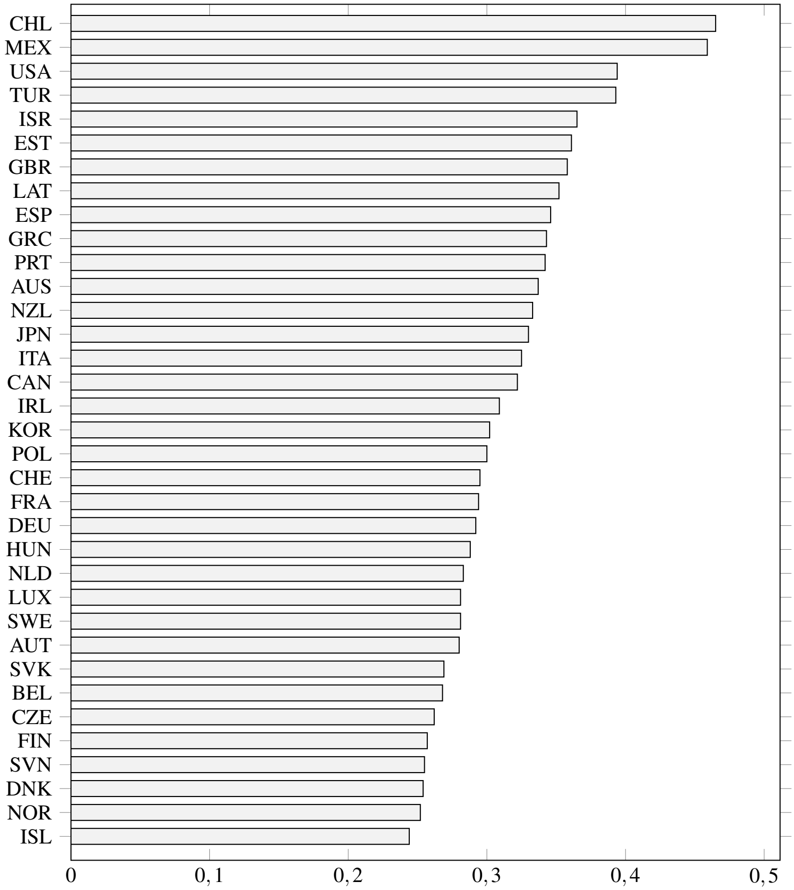
1.5. ábra. Lorenz-görbe

birtokolja. Például egy (x, y) pont a görbén azt jelenti, hogy a lakosság legalacsonyabb jövedelmű x százaléka a teljes jövedelem y százalékához jut hozzá. A jövedelmek teljesen egyenletes eloszlása esetén tehát egybeesne a görbe a 45°-os egyenessel (például a lakosság legszegényebb 20%-a a teljes jövedelem 20%-át kapná meg). Minél nagyobb az egyenlőtlenség, annál lejjebb kerül a Lorenz-görbe az egyeneshez képest.

A görbe és az egyenes által bezárt terület (szürke rész az ábrán) egyenes alatti területhez viszonyított aránya az egyenlőtlenség mérőszáma, hiszen teljes egyenlőség esetén ez az arány 0, teljes egyenlőtlenség esetén pedig 1. Ezt a hányadost Gini-indexnek nevezik, és az 1.6 ábra 35 OECD országban mutatja a 2014-es értékét. Felülről lefelé haladva egyre csökken a mutatószám, vagyis a legfelső gazdaságokban (Chile és Mexikó) a legnagyobb az egyenlőtlenség, a legalsókban (Izland és Norvégia) pedig a legegyenletesebb a jövedelemeloszlás a lakosok között. Ez utóbbiak Gini-indexe majdnem fele az előbbiekének. Ez azt jelenti, hogy nem csak az országok közötti, de az országon belüli jövedelmi különbségek is számottevőek bizonyos országokban.

Bár jelentős különbségeket tapasztalunk, de a legtöbb gazdaságban hosszú távon növekvő trendje van az egy főre eső GDP-nek, így az éves átlagos növekedési rátájuk pozitív. Nézzük meg, hogy mi kell ahhoz, hogy egy ország előrébb tudjon lépni egy magasabb jövedelmi kategóriába a ranglistáján!

Az 1.2 táblázat egy 148 országból álló mintából tartalmazza azt a tízet, melyek a legalacsonyabb egy főre eső GDP-vel rendelkeztek 1970-ben vásárlóerő-paritáson mérve.



1.6. ábra. Gini-index az OECD országokban 2014-ben. Adatok forrása: OECD Income Distribution adatbázis.

Vessük össze ezt a 2010-es listával, mely az 1.3 táblázatban látható! Találunk néhány olyan országot, mely a legszegényebbek között maradt 40 év eltelte után is (Mozambik, Burundi, Etiópia). A legtöbbjük viszont képes volt feljebb kerülni a jövedelem alapján felállított sorrendben, így az utóbbi táblázatban már nincsenek feltüntetve. Ha ez utóbbiakat jobban megnézzük, megfigyelhetjük, hogy az egy főre eső GDP-jük éves átlagos növekedési üteme a vizsgált periódusban relatíve magas (például Egyenlítői-Guineaban 9,6%-os, Vietnamban 4,2%-os). Helyettük olyanok kerültek a 2010-es lista aljára, akik ezzel ellentétben kivétel nélkül negatív átlagos növekedési rátát produkáltak (például

Madagaszkár és Libéria -2%-ost).

	Egy főre eső GDP éves átlagos növekedési üteme, % (1970-2010)
Etiópia	1,3
Mali	2,4
Egyenlítői-Guinea	9,6
Mozambik	1,0
Burundi	-0,4
Burkina Faso	1,4
Nepál	2,2
Mianmar	3,8
Laosz	3,4
Vietnam	4,2

1.2. táblázat. A legszegényebb országok 1970-ben. Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

	Egy főre eső GDP éves átlagos növekedési üteme, % (1970-2010)
Kongói Dem. Köztársaság	-3,7
Burundi	-0,4
Madagaszkár	-2,0
Libéria	-2,0
Niger	-1,5
Közép-Afrikai Köztársaság	-1,2
Etiópia	1,3
Mozambik	1,0
Malawi	-0,2
Togo	-0,6

1.3. táblázat. A legszegényebb országok 2010-ben. Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

A lista másik végét, a legmagasabb egy főre eső GDP-vel rendelkező országokat 1970-ben az 1.4, 2010-ben pedig az 1.5 táblázat mutatja. Többségüknek négy évtizedet követően is sikerült a csúcson maradni (Svájc, Luxemburg, Amerikai Egyesült Államok, Ausztrália, Norvégia, Hollandia), de jobb helyezést értek el közülük azok, akik gyorsabban növekedtek a többi gazdasághoz képest. Melléjük olyan országok kerültek, melyek kimagasló növekedésre voltak képesek (például Szingapúr éves átlagban 6,2%-os, Hongkong 4,6%-os és Írország 3,8%-os). Az ázsiai „kistigrisek” (Koreai Köztársaság, Tajvan, Szingapúr és Hongkong) és Írország esetére *növekedési csodaként* szoktak hivatkozni, hiszen nagyon gyors fejlődést vittek véghez. A táblázatok alapján levonható az a következtetés, hogy az országok növekedési teljesítményével szorosan összefügg, hogy milyen jövedelmi kategóriába esnek.

Ez a megállapítás szintén a növekedéselmélet relevanciáját támasztja alá, hiszen azok képesek feljebb kerülni a rangsorban, akik gyorsabb fejlődésre képesek.

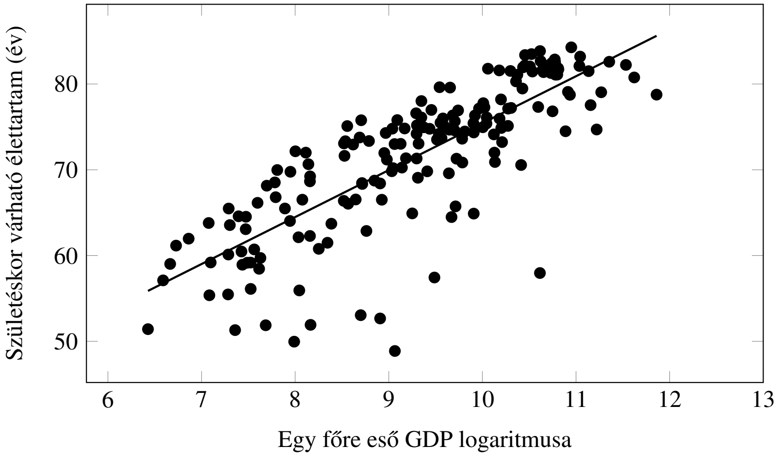
	Egy főre eső GDP éves átlagos növekedési üteme, % (1970-2010)
Svájc	1,6
Luxemburg	2,9
Amerikai Egyesült Államok	1,9
Svédország	1,9
Dánia	1,9
Ausztrália	2,0
Kanada	2,0
Hollandia	2,3
Norvégia	3,1
Izland	2,1

1.4. táblázat. A leggazdagabb országok 1970-ben. Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

	Egy főre eső GDP éves átlagos növekedési üteme, % (1970-2010)
Luxemburg	2,9
Szingapúr	6,2
Norvégia	3,1
Svájc	1,6
Amerikai Egyesült Államok	1,9
Hongkong	4,6
Hollandia	2,3
Írország	3,8
Ausztrália	2,0
Ausztria	2,8

1.5. táblázat. A leggazdagabb országok 2010-ben. Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

Az egy főre eső jövedelmi szintek eltérése jóléti különbségekkel jár együtt. A gazdagabb országokban jellemzően fejlettebb az egészségügyi ellátás és jobbak az életkörülmények. Az 1.7 ábra is ezt a megállapítást erősíti meg, melyen a születéskor várható élettartam és az egy főre jutó GDP logaritmusa között erős pozitív irányú kapcsolatot látunk.



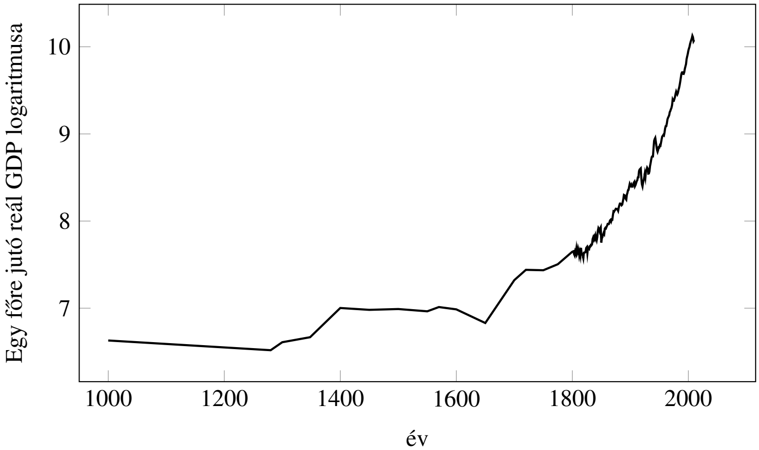
1.7. ábra. Az egy főre eső GDP logaritmusa és a születéskor várható élettartam közti kapcsolat 178 ország adatai alapján 2015-ben. Adatok forrása: World Bank.

1.3. Az egy főre eső jövedelem alakulása

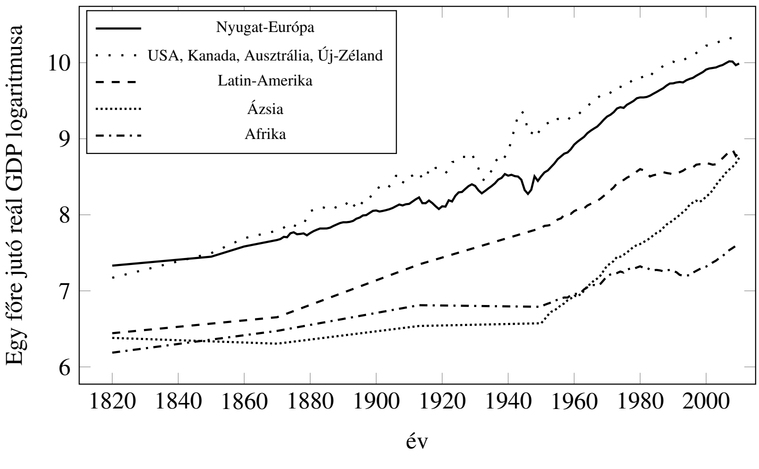
Az 1.8 ábrán egészen 1000-ig visszamenőleg láthatjuk Anglia (később Egyesült Királyság) egy főre jutó reál GDP-jének alakulását. A grafikon szerint az 1700-as évekig stagnálás vagy kismértékű növekedés jellemezte a reál GDP-t, majd erőteljesebb növekedésnek indult, és az 1800-as években ugrott meg robbanásszerűen az értéke az ipari forradalomnak köszönhetően.

Az 1.9 ábrán emiatt már csak az 1800-as évektől kezdődően vizsgáljuk a reál GDP logaritmusának idősorát különböző országcsoportokban. Nyugat-Európa és az Amerikai Egyesült Államok, Kanada, Ausztrália valamint Új-Zéland alkotta csoport körülbelül azonos szintről indult és egymással párhuzamosan haladtak napjainkig. Latin-Amerika, Ázsia és Afrika alacsonyabb de egymással megegyező szinten álltak az 1800-as évek elején, majd Latin-Amerika gyorsabb növekedésbe kezdett az 1870-es években. Afrika egy főre eső jövedelme ezzel szemben szinte végig egyenletes, lassabb növekedést vagy stagnálást mutat, így napjainkra jeletős különbség alakult ki Afrika és a többi régió GDP-je között. Ázsia gazdasága viszonylag sokáig stagnált, majd az 1950-es évekig csak alacsony ütemben fejlődött, amikor viszont ugrásszerűen felgyorsult a növekedése. Ez Japán és a kistigrisek növekedési csodájának köszönhető, melynek eredményeként utolérték a korábban hozzájuk képest jóval magasabb szintű Latin-Amerika egy főre eső GDP-jét.

Kiemelve néhány országot, az 1.10 ábrán külön is megnézhetjük növekedési teljesítményüket a vizsgált 60 éves perióduson.



1.8. ábra. Az egy főre jutó reál GDP logaritmusának alakulása 1000-től 2010-ig Angliában. Adatok forrása: The Maddison-Project (2013).



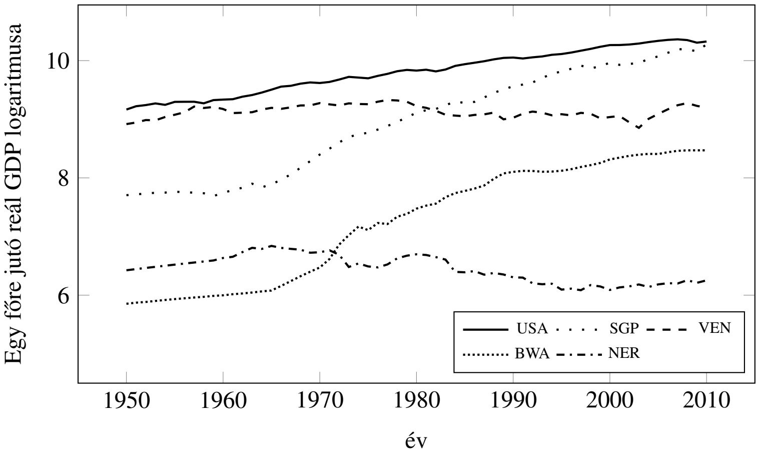
1.9. ábra. Az egy főre jutó reál GDP logaritmusának alakulása 1820-tól 2010-ig. Adatok forrása: The Maddison-Project (2013).

Alapvetően az alábbi négy típusba sorolhatjuk a gazdaságokat.

1. Végig kiegyenlített növekedést mutat (Amerikai Egyesült Államok).
2. Gyors növekedést mutat (Szingapúr, Botswana).

3. Egy ideig gyors, majd erősen lassuló növekedési pálya jellemzi (Venezuela).
4. Stagnáló vagy csökkenő növekedési ütem jellemzi (Niger).

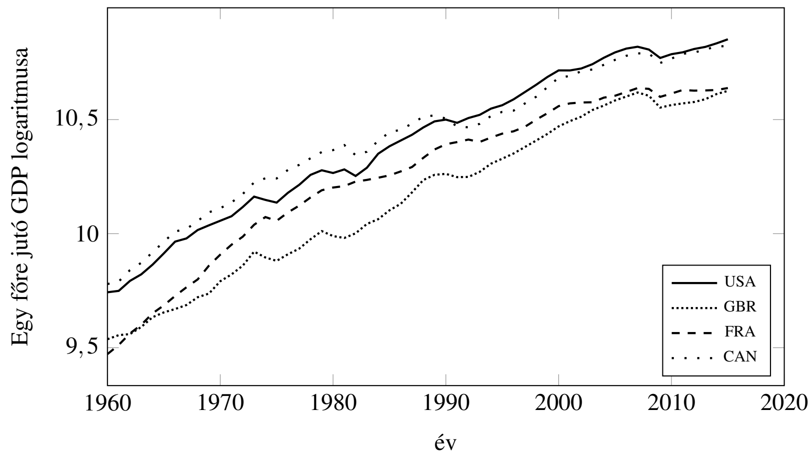
1950-ben az Egyesült Államokat és Venezuelát még szinte ugyanakkora egy főre eső GDP jellemezte, és növekedési ütemük is megegyezett, majd Venezuela romló teljesítménye miatt egyre messzebb kerültek egymástól az idő múlásával. Bár az idősor induló évében Szingapúr még mindkettőtől le volt maradva, a gyors növekedési ütemének köszönhetően leelőzte Venezuelát, és utolérte az Egyesült Államokat. Végül a két afrikai ország – Botswana és Niger – alacsony jövedelmi szintről indultak, és Niger ott is maradt, hiszen nem volt képes tartós, kiegyensúlyozott növekedésre. Egy főre jutó GDP-je inkább stagnált, esetenként csökkent az évek során. Ezzel szemben Botswana, aki az öt gazdaság közül a legrosszabb helyzetben volt még 1950-ben, a ’60-as évek közepétől – a függetlenné válása után – gyors ütemben kezdett növekedni, egyre inkább lehagyva Nigert, aki szintén függetlenné vált 1960-ban, de nem tudott olyan fejlődési pályát leírni, mint Botswana.



1.10. ábra. Az egy főre jutó reál GDP logaritmusának alakulása 1950-től 2010-ig. Adatok forrása: The Maddison-Project (2013).

A fejlett gazdaságok növekedése jellemzően kiegyensúlyozott, mint ahogy az 1.11 ábrán is látszik, és az éves átlagos növekedési rátájuk az elmúlt 50 évben 1,5-2,5% körül alakult.

Az eddigiek alapján kérdésként felmerülhet, hogy miért vannak ilyen nagymértékű jövedelmi különbségek az egyes országok között, illetve hogyan képes valamelyik gazdaság gyors növekedésre, míg mások nem. A könyv további fejezeteiben ezekre próbálunk majd választ kapni különféle növekedési modellek segítségével.



1.11. ábra. Az egy főre jutó reál GDP logaritmusának alakulása (2010 US$), 1960-2015. Adatok forrása: World Bank.

1.4. A növekedés mozgatórugói

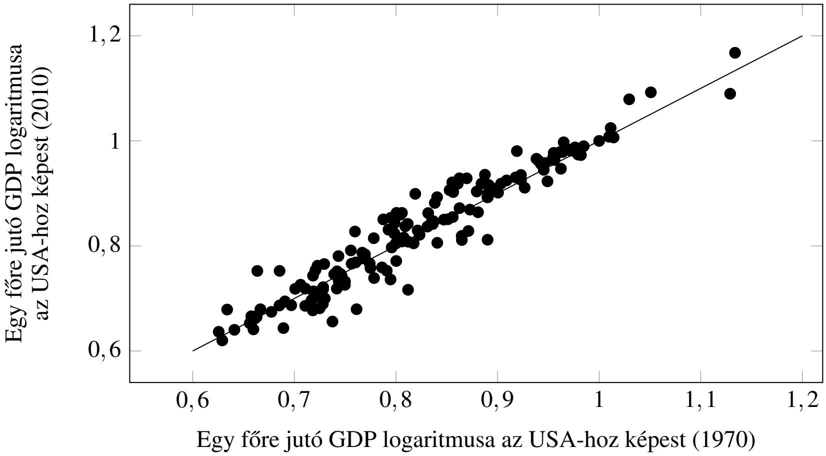
Az előző alfejezetben láttuk, hogy a növekedési teljesítménynek nagy szerepe van a jövedelmi különbségek kialakulásában, de az is kulcsfontosságú, hogy milyen szintről kezdett el növekedni az adott gazdaság.

Az 1.12 ábra az egy főre eső reál GDP 1970-es és 2010-es értékét mutatja az Egyesült Államokhoz viszonyítva 155 országban. A különböző országokat jelölő pontok szorosan a berajzolt 45°-os egyenes körül helyezkednek el, így megállapítható, hogy az a gazdaság, melynek egy főre eső reál GDP-je kisebb volt az Egyesült Államok mutatójától 1970-ben, az jellemzően 2010-ben is elmaradt tőle.

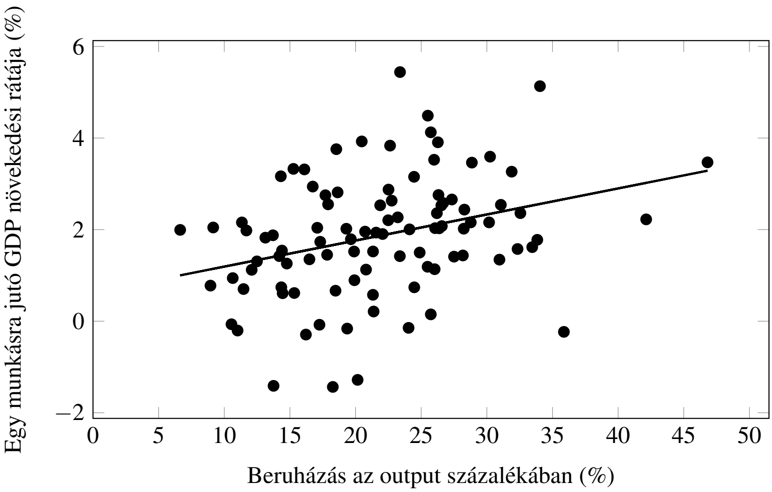
Szintén pozitív irányú kapcsolatot találunk az országok egy főre eső GDP-jének növekedési rátája és beruházási rátája (a beruházások GDP-hez viszonyított aránya) között. Az 1.13 ábra pozitív meredekségű regressziós egyenese a beruházási ráta fontosságára utal a növekedés elősegítése szempontjából, így a modellekben is vizsgáljuk majd megváltozásának hatását.

Nem csak a fizikai, de a humán tőke beruházása is pozitív kapcsolatban áll az egy főre jutó jövedelem változásával. Az 1.14 ábra alapján az átlagos iskolázottság és az egy főre eső jövedelem éves átlagos növekedési üteme között pozitív irányú kapcsolatot találunk, így érdemes lesz a szellemi tőkét is beépíteni a növekedési modellekbe.

További tényezőként a technológia fejlődésének hatását is indokolt elemezni a modellek segítségével, ugyanis pozitívan hathat a növekedésre (például csökkenti a termelés és szállítás költségét, meghosszabítja a várható élettartamot, stb.).

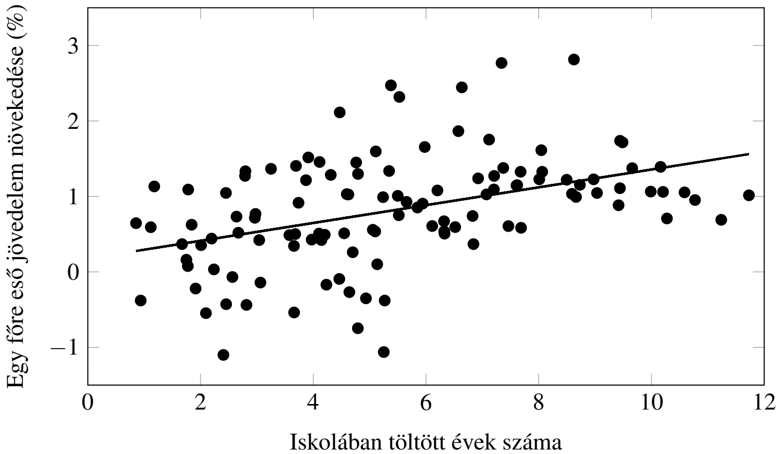


1.12. ábra. Az egy főre jutó reál GDP logaritmusa 155 országban 1970-ben és 2010-ben az Amerikai Egyesült Államokhoz viszonyítva. Adatok forrása: Penn World Table 9.0.



1.13. ábra. A beruházási ráta és az egy főre eső GDP növekedési rátája közti kapcsolat, 100 országban (1970-2014, éves átlag). Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

A növekedés lehetőségét természetesen számos más országspecifikus sajátosság is befolyásolja, melyek Acemoglu (2009) alapján az alábbiak:



1.14. ábra. Átlagos iskolázottság és az egy főre eső jövedelem éves átlagos növekedési üteme közti kapcsolat 115 ország adatai alapján, 1960-2010. Adatok forrása: Barro és Lee (2013) adatbázis és The Maddison-Project (2013).

- *Szerencse*: az azonos piaci struktúrákkal és lehetőségekkel rendelkező országokat más növekedési pálya felé mozdíthatják a bizonytalanságból és a heterogenitásból eredő, egymástól eltérő döntések.
- *Földrajzi különbségek*: a természeti adottságoktól (például a talaj minőségétől, éghajlattól) függ, hogy milyen a mezőgazdaság termelékenysége. Az ország területén rendelkezésre álló természeti kincsek (például szén, vas, kőolaj) szintén hozzájárulnak a növekedéshez, ahogy a megfelelő helyrajz is (domborzat, folyók, tavak vagy a tenger közelsége).
- *Intézményi különbségek*: a törvények és egyéb szabályok különbözőképpen ösztönzik a beruházásokat (akár a fizikai akár a humán tőkét, akár a technológiai újításokat illetően), illetve korlátozzák vagy elősegítik a kereskedelmet.
- *Kulturális különbségek*: az eltérő értékrend és hit miatt az egyes társadalmak más preferenciákkal rendelkeznek, és másként viselkednek. A bizalom erőssége, az együttműködésre való hajlandóság, vagy a türelem mind hatással vannak a gazdasági aktivitásra és a megtakarítási valamint fogyasztási döntésekre.

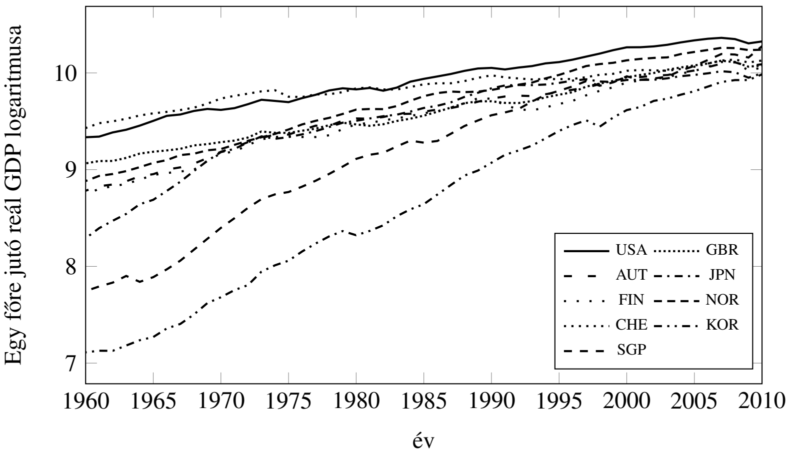
Mivel az előbbi tényezők nehezen mérhetők, a modellekbe általában csak az úgynevezett *proxy* változóikat tesszük, melyek szoros kapcsolatban állnak a vizsgálni kívánt magyarázó változóval, viszont számszerűsíthetők. Ilyen például a humán tőkét helyettesítő átlagos iskolázottság, vagy az életkörülmények minőségét jelző várható élettartam.

1.5. Konvergencia

A növekedéselmélet szintén érdekes kérdése, hogy megszűnnek-e valaha a jövedelmi különbségek a világ egyes részei között, vagyis utolérik-e egyszer a szegény országok a gazdagokat. Háromféle megközelítést ismertetünk, melyek erre a problémára keresik a választ.

Abszolút konvergencia

Az *abszolút konvergencia* elmélete szerint a kevésbé fejlett országok vagy régiók a fejlettekhez tartanak minden egyéb tényezőtől függetlenül, vagyis az országok közötti különbségek csak időszakosak. Ez azt is jelenti, hogy az egyes országok azonos egyensúlyi állapothoz tartanak, így a szegénység hosszú távon el fog tűnni. Az 1.15 ábra alapján az elmélet helyességére következtetnénk, de a következő fejezetekben megnézzük, hogy valóban igazolható-e empirikusan a megállapítás.



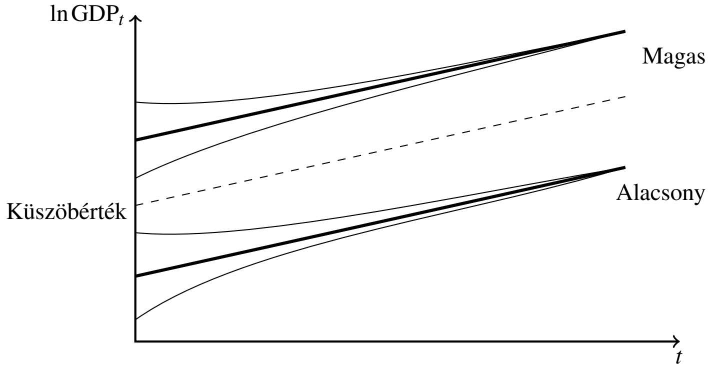
1.15. ábra. Az egy főre jutó reál GDP logaritmusának alakulása, 1950-2010. Adatok forrása: The Maddison-Project (2013).

Feltételes konvergencia

A *feltételes konvergencia* feltevése az, hogy az országok alapvető mutatókban is különböznek egymástól (például megtakarítási hajlandóság, népességnövekedési ütem, oktatásra költött összeg). Kontrollálva ezekre az országspecifikus tényezőkre (azonosnak tekintve őket), az alacsonyabb egy főre jutó GDP-vel rendelkező országok gyorsabban növekednek. Az egy főre jutó jövedelem emiatt a saját, országspecifikus hosszú távú növekedési üteméhez konvergál, nem egy általános növekedési pályához, mint az abszolút konvergencia szerint. Az elmélet részben alátámasztható, ahogyan azt majd a későbbi fejezetekben látni fogjuk.

Klubkonvergencia

A *klubkonvergencia* alapján nemcsak az országspecifikus jellemzők, hanem a kiindulási szint is fontos tényező abban, hogy milyen hosszú távú növekedési pályát érhet el egy gazdaság. Az elmélet szerint egy bizonyos küszöbérték alól indulva, az adott alacsony jövedelműekhez tartozó növekedési pálya felé konvergálhat csak a gazdaság, míg egy küszöbérték feletti kezdeti értékből a magasabb szinten lévő pályához tart, ahogy azt az 1.16 ábra mutatja.



1.16. ábra. Klubkonvergencia

1.6. Összefoglalás

1. Az egy főre eső GDP megfelelő mutató lehet a gazdaság jólétének leírására, az egy foglalkoztatottra eső értékkel pedig a munka átlagos termelékenységéről kaphatunk pontosabb képet.
2. A szegénységi küszöb alatt élők aránya egyre csökken, de az országon belüli és az országok közötti jövedelmi különbségek számottevőek. Láttuk, hogy a gazdaságok növekedési teljesítményével szorosan összefügg, hogy relatíve szegényebbé vagy gazdagabbá váltak az évek során, így arra próbálunk majd választ kapni a következő fejezetekben, hogy hogyan lehet elősegíteni a gazdasági növekedést és akár hosszú távon is fenntartani azt.

3. Az egyes országok más-más szintről indultak a vizsgált periódusban, és fejlődési pályájuk is különbözött. A fejlett gazdaságok jellemzően kiegyensúlyozott növekedést mutattak, de láttunk példát "növekedési csodákra" és "növekedési katasztrófákra" is.

4. A gazdasági növekedést számos tényező befolyásolja, melyek közül néhányat empirikusan is alátámasztottunk, és később a modellekbe is beépítjük azokat.

5. Megismertünk három megközelítést annak lehetséges magyarázatára, hogy eltűnnek-e valaha az országok közötti jövedelmi különbségek. Az abszolút konvergencia elmélete szerint az összes ország ugyanahhoz a hosszú távú növekedési pályához tart, így a szegényebb országok – akik attől még messze vannak – gyorsabban, a gazdagabbak pedig lassabban növekednek. A feltételes konvergencia ezzel szemben azt állítja, hogy minden gazdaság a saját növekedési pályája felé konvergál, mely az eltérő jellemzőkkel bíró országok esetén különböző. Végül a klubkonvergencia a kiindulási szintre hívta fel a figyelmet, ugyanis egy bizonyos küszöbérték alól indulva nem érhető el a magasabb jövedelmű gazdaságok növekedési pályája az elmélet szerint.

I. rész

Exogén növekedés

II.

SOLOW-MODELL

Az előző fejezetben láttuk, hogy mekkora jövedelmi különbségek vannak országok között. Megpróbáltunk az empíria alapján választ kapni arra, hogy mi okozhatja ezeket az eltéréseket, és mitől függ az, hogy valaki a gazdagok vagy a szegények csoportjába került, illetve hogy milyen gyors növekedést tudott produkálni. Ezek a kérdések nem csak a növekedéselmélet, de a makroökonómia központi témái is. Ebben a fejezetben egy olyan alapmodellt építünk, mellyel megvizsgálhatjuk a gazdaság működését, meghatározhatjuk a növekedés forrásait, és elemezhetjük, hogyan reagálnak a fontosabb gazdasági mutatók különböző sokkhatásokra.

Kiinduló modellünk a *Solow-Swan-modell* vagy röviden *Solow-modell*, mely megalkotói, Robert Solow és Trevor Swan után kapta a nevét. Solow (1956) és Swan (1956) mutatta be először a modellt, melyet később Solow továbbfejlesztett, és 1987-ben Nobel-díjjal jutalmazták a gazdasági növekedéselmélethez való hozzájárulásáért. A Solow-modell egyszerűségének köszönhetően megfelelő alapot nyújt ahhoz, hogy megértsük a növekedési modellek logikáját, és később könnyen bővíthessük azokat számos más, növekedést befolyásoló tényezővel, vagy heterogén szereplőkkel.

2.1. A modell felépítése

A modell zárt gazdasága két reprezentatív szereplőt tartalmaz: vállalatot és fogyasztót. A vállalat termelési tényezők felhasználásával, profitját maximalizálva állít elő egyfajta terméket. Mind az előállított termék, mind a termelési tényezők árai a tökéletesen versenyző piacokon a kereslet és kínálat egyensúlyában határozódnak meg.

A fogyasztó jövedelmet munkaerejének és tőkeállományának felajánlásából szerezhet, melynek konstans hányadát fogyasztási célokra fordítja, a fennmaradó összeget pedig megtakarítja. Megtakarításaiból beruházásokat finanszíroz, mivel ő felelős az általa birtokolt tőke bővítésért és pótlásáért.

Vállalat

A vállalat által használt termelési tényező a tőke (K_t) és a hatékony munkaerő (A_tL_t), ami a munkaerő-állomány (L_t) és a munkaerő képességének, hatékonyságának (A_t) szorzata. Ezekből a (2.1) termelési függvény alapján hozza létre termékét (Y_t):

$$Y_t = F(K_t, A_tL_t). \tag{2.1}$$

A választott függvényformának teljesítenie kell a következő követelményeket ahhoz, hogy úgynevezett *jól viselkedő* függvény legyen.

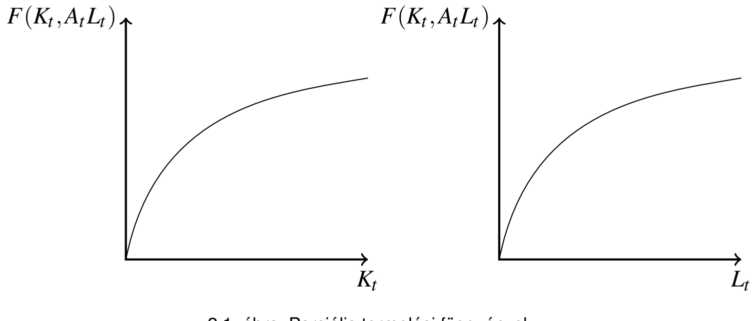
1. *Állandó mérethozadék*. Ha a tőke és a hatékony munkaerő, vagyis mindkét termelési tényező azonos százalékkal nő, akkor a kibocsátás szintén ugyanannyi százalékkal emelkedik. Például ha megduplázzuk mindkét termelési tényezőt, akkor ennek következtében a termelés szintén a duplájára nő, vagyis

$$F(c \cdot K_t, c \cdot A_tL_t) = c \cdot F(K_t, A_tL_t) \quad \text{minden} \quad c_t \geq 0 \quad \text{esetén.}$$

2. *A termelési tényezők csökkenő határterméke.* A termelési tényezők határterméke megmutatja, hogy egy pótlólagos egység az adott tényezőből mennyivel képes megemelni a termelést. Feltesszük, hogy egyre több munkával illetve tőkével egyre több terméket képes előállítani a vállalat, vagyis a határtermék pozitív, de a felhasznált termelési tényezők növekedésével egyre kisebb. Így a termelési függvény tőke illetve munka szerinti első deriváltja pozitív, a második pedig negatív:
$$\frac{\partial F(K_t,A_tL_t)}{\partial K_t} > 0, \qquad \frac{\partial F(K_t,A_tL_t)}{\partial L_t} > 0,$$
$$\frac{\partial^2 F(K_t,A_tL_t)}{\partial^2 K_t} < 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K_t,A_tL_t)}{\partial^2 L_t} < 0.$$

3. *Inada-feltételek.* Annak érdekében, hogy a gazdaság egyensúlyi tőkefelhalmozása véges legyen, feltesszük, hogy a termelési tényezők határterméke nagyon magas, ha azok mennyisége nagyon alacsony és fordítva (Inada, 1964):
$$\lim_{K_t\to 0} F'_{K_t} = \infty, \qquad \lim_{K_t\to\infty} F'_{K_t} = 0,$$
$$\lim_{L_t\to 0} F'_{L_t} = \infty, \qquad \lim_{L_t\to\infty} F'_{L_t} = 0.$$

A 2.1. ábrán látható példa egy olyan parciális termelési függvényre, mely teljesíti a felsorolt feltételeket.



2.1. ábra. Parciális termelési függvények

A *Cobb-Douglas* típusú termelési függvény megfelel a kritériumoknak (lásd 1. feladat), melyet kétféle technológiával is bővíthetünk. A (2.2) egyenletben B_t a *teljes tényezőtermelékenység*, a (2.3) egyenlet pedig az A_t *munkakiterjesztő* technológiát tartalmazza, mely – mint már említettük – a munkaerő tudását, képességeit jeleníti meg. A két függvényforma egymással ekvivalens, ha $A_t = B_t^{1/(1-\alpha)}$, így a továbbiakbak csak a (2.3) termelési függvénnyel vezetjük végig a modellt.

$$Y_t = B_t K_t^{\alpha} L_t^{\,1-\alpha}, \qquad \text{ahol} \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{2.2}$$

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} \tag{2.3}$$

A kibocsátás növekedése csak úgy biztosítható, ha a legalább az egyik termelési tényező mennyisége periódusról periódusra emelkedik. Tegyük fel, hogy a munkaerő mennyisége, és annak tudása is exogén ütemben emelkedik, melyek növekedési rátái n és g:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1+n, \tag{2.4}$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1+g! \tag{2.5}$$

A tőkeállomány szintén változhat az idő múlásával. Beruházásokkal (I_t) növelhető a szintje, ám számolni kell az értékcsökkenéssel is, ugyanis a tőkeállomány $\delta > 0$ hányada minden periódusban amortizálódik. A (2.6) egyenlettel írható fel a *tőkefelhalmozási korlát*:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t. \tag{2.6}$$

A vállalat célja a (2.7) egyenlettel megadott profit maximalizálása. A vállalat w_t reálbért fizet egy munkásnak és r_t^K reálbérleti díj ellenében használhatja a bérbevett tőkét:

$$profit_t = Y_t - w_t L_t - r_t^K K_t, \tag{2.7}$$

$$profit_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} - w_t L_t - r_t^K K_t.$$

A döntési változók szerint maximalizálva a profitot, megkapjuk a vállalat elsőrendű feltételeit. A (2.9) szerint optimumban egy pótlólagos munkaegységből származó termelés (a munka határterméke, MPL_t) megegyezik a munkásnak fizetett reálbérrel, illetve a (2.11) szerint egy pótlólagos tőkeegységből származó termelés (a tőke határterméke, MPK_t) megegyezik a tőkéért fizetett reálbérleti díjjal.

$$\frac{\partial profit_t}{\partial L_t} = K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}(1-\alpha)L_t^{-\alpha} - w_t = 0$$

$$K_t{}^{\alpha} A_t^{1-\alpha}(1-\alpha)L_t^{-\alpha} = w_t \tag{2.8}$$

$$MPL_t = w_t \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial profit_t}{\partial K_t} = \alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L_t)^{1-\alpha} - r_t^K = 0$$

$$\alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L_t)^{1-\alpha} = r_t^K \tag{2.10}$$

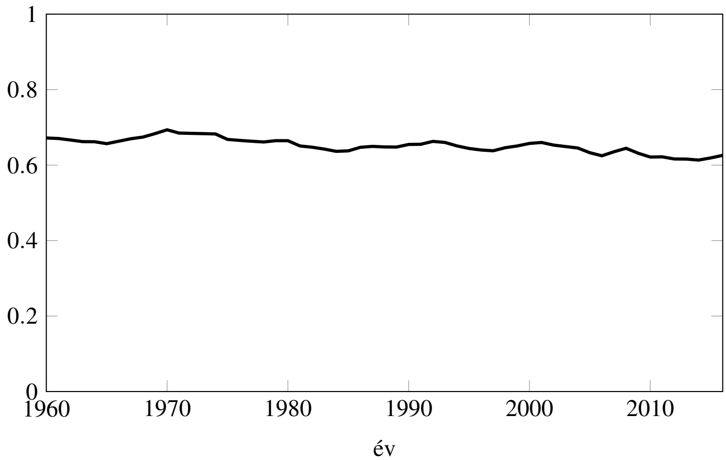
$$MPK_t = r_t^K \tag{2.11}$$

A (2.8) és a (2.10) képletekből kiszámítható a teljes munkaköltség (vagy a fogyasztó oldaláról nézve teljes munkajövedelem) és a teljes tőkeköltség (teljes tőkejövedelem).

A (2.12) és a (2.13) szerint a munkajövedelem aránya a teljes jövedelmen belül a munka kitevőjével egyezik meg $(1-\alpha)$, a tőkejövedelem aránya pedig hasonlóképpen a tőke kitevőjével (α) egyenlő. A 2.2 ábra szerint az előbbi az időben nagyjából konstansnak tekinthető és körülbelül $2/3$ az értéke.

$$w_t L_t = K_t{}^{\alpha} A_t^{1-\alpha}(1-\alpha)L_t^{1-\alpha} = (1-\alpha)Y_t \tag{2.12}$$

$$r_t^K K_t = \alpha K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} = \alpha Y_t \tag{2.13}$$



2.2. ábra. A munkajövedelem aránya a teljes jövedelmen belül az Amerikai Egyesült Államokban, 1960-2016. Adatok forrása: U.S. Department of Commerce.

Fogyasztó

A reprezentatív fogyasztó felelős a tőke felhalmozásáért, melyet bérbeadhat a vállalatnak bérleti díj ellenében. Felkínálhatja munkaerejét is, melyért cserébe munkajövedelmet kap. Az e két forrásból szerzett jövedelem konstans $s > 0$ hányadát a fogyasztó minden periódusban megtakarítja (S_t), a fennmaradó $(1-s)$ hányadot pedig fogyasztásra (C_t) fordítja a (2.14) és a (2.15) egyenleteknek megfelelően:

$$S_t = sY_t, \tag{2.14}$$

$$C_t = (1-s)Y_t. \tag{2.15}$$

Piacok

A vállalat illetve a fogyasztó a piacokon kerülnek egymással kapcsolatba, melyeken a kereslet és a kínálat egyenlősége mellett alakul ki az egyensúly.

1. *Árupiac*. A vállalat felkínálja az előállított terméket, a fogyasztó pedig fogyasztási és beruházási céllal vásárolja azt meg:
$$Y_t = C_t + I_t. \tag{2.16}$$

2. *Munkapiac*. A fogyasztók felkínálják munkaerejüket (L_t^S), amit a vállalat felhasznál a termelés során (L_t^D):
$$L_t^S = L_t^D.$$

3. *Tőkepiac*. A fogyasztók felkínálják az általuk birtokolt tőkét (K_t^S), amit a vállalat felhasznál a termelés során (K_t^D):
$$K_t^S = K_t^D.$$

4. *Kölcsönözhető források (vagyoneszközök) piaca*: A beruházásokat megtakarításokból finanszírozzák.
$$S_t = I_t. \tag{2.17}$$

2.2. A modell dinamikája és egyensúlya

Ha ismertek az induló értékek (K_0,L_0,A_0), akkor a (2.3)–(2.6), (2.8), (2.10), (2.14), (2.15) és a (2.17) egyenletek segítségével a modell bármelyik periódusának endogén vátozói kiszámíthatók.

A modellbeli gazdaság *egyensúlyi növekedési pályára* áll, ha az endogén változók növekedési üteme konstanssá válik, vagyis nem változik tovább. Számítsuk ki, milyen gyorsan növekszik a gazdaság ekkor, illetve milyen tényezők befolyásolják a hosszú távú növekedést!

Egyensúlyi növekedési pálya

Egyensúlyi növekedési pályán definíció szerint a tőke konstans ütemben nő, legyen ez a növekedési ütem $1 + konstans$:
$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + konstans! \tag{2.18}$$

Felhasználva a (2.17), (2.14) és a (2.6) egyenleteket a (2.19) összefüggéshez jutunk:
$$sY_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t. \tag{2.19}$$

Behelyettesítve Y_t helyére a (2.3) termelési függvényt és K_{t+1} helyére az $(1 + konstans)K_t$ összefüggést, a (2.20) egyenletet kapjuk, melynek továbbalakított, majd a következő periódusra felírt verzója a (2.21) és a (2.22) egyenlet:
$$s \cdot K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} = (1 + konstans)K_t - (1-\delta)K_t. \tag{2.20}$$

Vonjuk össze a K_t-ket a jobb oldalon, és írjuk fel az egyenletet a $t+1$-edik periódusra is:

$$s \cdot K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} = (konstans + \delta)K_t, \tag{2.21}$$

$$s \cdot K_{t+1}^{\alpha}(A_{t+1} L_{t+1})^{1-\alpha} = (konstans + \delta)K_{t+1}! \tag{2.22}$$

Elosztva egymással a (2.22) és a (2.21) egyenleteket, az egyszerűsítés és a növekedési ütemek behelyettesítése után végül megkapjuk, hogy a tőkeállomány konstans egyensúlyi növekedési üteme a népesség exogén növekedési ütemének és a tudás szintén exogén fejlődésének függvénye:

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1+n)(1+g). \tag{2.23}$$

Levezethető, hogy a többi aggregátum (Y_t, S_t, C_t és I_t) szintén $(1+n)(1+g)$ ütemben növekszik egyensúlyban, vagyis a kibocsátás növekedése hosszú távon akkor biztosított, ha növekszik a munkaerő-állomány, és fejlődik annak tudása.

Az *egy főre eső* változókat kisbetűvel jelölve (például $k_t \equiv K_t/L_t$), a (2.23) felhasználásával kiszámítható azok egyensúlyi növekedési üteme is:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}}{\frac{K_t}{L_t}} = \frac{K_{t+1}}{K_t}\frac{L_t}{L_{t+1}} = 1+g.$$

Az egy főre eső változók egyensúlyi növekedési üteme tehát a tudás fejlődésétől függ, így csak akkor biztosítható hosszú távon az egy főre eső jövedelem növekedése, ha a munkaerő képességei folyamatosan fejlődnek és abban a gazdaságban érhető el nagyobb növekedés, ahol gyorsabb a termelékenység javulása.

Jelöljük hullámvonallal az *egy hatékony munkaerőre eső* változókat (például $\tilde{k}_t \equiv K_t/(A_t L_t)$), és vezessük le azok egyensúlyi növekedési ütemét is:

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}}{\frac{K_t}{A_t L_t}} = \frac{K_{t+1}}{K_t}\frac{A_t L_t}{A_{t+1}L_{t+1}} = 1!$$

A hatékonysági egységre jutó vagy más néven *fajlagos* változók eszerint egyensúlyban már nem változnak tovább, felveszik *állandósult állapotbeli* értéküket.

Végül határozzuk meg a tőke illetve a munka árának időbeli változását is! A (2.8) és a (2.10) egyenleteket felhasználva levezethető, hogy a tőke reálbérleti díja egyensúlyi növekedési pályán konstans, a reálbér pedig a munka termelékenységének növekedési ütemével megegyező mértékben változik:

$$\frac{r_{t+1}^K}{r_t^K} = \frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}(A_{t+1}L_{t+1})^{1-\alpha}}{\alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L_t)^{1-\alpha}}$$

$$= [(1+g)(1+n)]^{\alpha-1}[(1+g)(1+n)]^{1-\alpha} = 1,$$

$$\frac{w_{t+1}}{w_t} = \frac{K_{t+1}^{\alpha}(1-\alpha)A_{t+1}^{1-\alpha}L_{t+1}^{-\alpha}}{K_t^{\alpha}(1-\alpha)A_t^{1-\alpha}L_t^{-\alpha}}$$

$$= [(1+g)(1+n)]^{\alpha}(1+g)^{1-\alpha}(1+n)^{-\alpha} = 1+g.$$

A modell dinamikája

Mivel a modellben csak a hatékonysági egységre jutó értékek rendelkeznek állandósult állapottal, a továbbiakban ezek segítségével vizsgáljuk meg a dinamikát. A szereplők magatartási egyenletei és a piaci egyensúlyi feltételek könnyen átírhatók hatékonysági egységre jutó változókra. Kihasználva, hogy a termelési függvény konstans mérethozadékú, a (2.1) egyenletben a hatékonysági egységgel, vagyis A_tL_t-vel osztva a termelési tényezőket, a kibocsátás szintén az A_tL_t hányadára változik:

$$\tilde{y}_t = f(\tilde{k}_t).$$

Az általunk használt Cobb-Douglas típusú függvény intenzív formája ez alapján a (2.24) egyenletben látható:

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}. \tag{2.24}$$

A modell dinamikáját a (2.6) tőkefelhalmozási korlát segítségével adhatjuk meg, melynek hatékonysági egységekkel felírt verziója a (2.25):

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(\tilde{i}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t). \tag{2.25}$$

A hatékonysági egységre jutó beruházás a hatékonysági egységre jutó megtakarítással egyezik meg a kölcsönözhető források piacának egyensúlya szerint, ez utóbbi pedig a hatékonysági egységre jutó jövedelem konstans (s) hányada. Ezt felhasználva a (2.26) *mozgásegyenlethez* jutunk, mellyel meghatározható a következő periódus fajlagos tőkeállománya a jelenbeli fajlagos tőke és a paraméterek függvényében:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t). \tag{2.26}$$

Ábrázoljuk a (2.26) egyenletet egy megfelelő koordináta-rendszerben, hogy elemezhessük a konvergenciát az egyensúly felé!

1. A függvény átmegy a (0,0) ponton és csak a nemnegatív tartományban értelmezhető, mert $\tilde{k}_t \geq 0$.

2. A függvény meredeksége:

$$\frac{d\tilde{k}_{t+1}}{d\tilde{k}_t} = \frac{s\alpha\tilde{k}_t^{\alpha-1} + (1-\delta)}{(1+n)(1+g)} > 0.$$

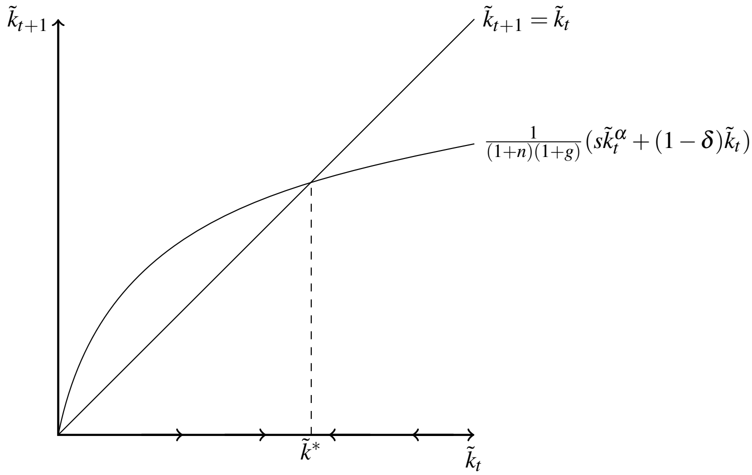
3. A második derivált:

$$\frac{d^2\tilde{k}_{t+1}}{d^2\tilde{k}_t} = \frac{s\alpha(\alpha-1)\tilde{k}_t^{\alpha-2}}{(1+n)(1+g)} \leq 0.$$

4. A meredekség a függvény kezdeti és végpontján, ha $g, n \geq 0$:

$$\lim_{\tilde{k}_t \to 0} \frac{d\tilde{k}_{t+1}}{d\tilde{k}_t} = \infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{\tilde{k}_t \to \infty} \frac{d\tilde{k}_{t+1}}{d\tilde{k}_t} < 1.$$

A 2.3 ábrán láthatjuk, hogy túl alacsony és túl magas induló fajlagos tőkeállomány esetén is az állandósult állapotbeli értékhez ($\tilde{k}^*$) tart a tőkeállomány, vagyis a Solow-modellnek egy stabil egyensúlyi pontja van. Ha túl alacsony szintről indítjuk a modellt, a következő periódus tőkeállománya magasabb lesz, mint a jelenlegi, és ez a növekedés addig folytatódik, míg el nem érjük az egyensúlyt. Túl magas induló tőkeállomány esetén pedig ennek ellenkezője figyelhető meg, vagyis addig csökken a fajlagos tőkeállomány, míg egyensúlyba nem kerül a gazdaság.

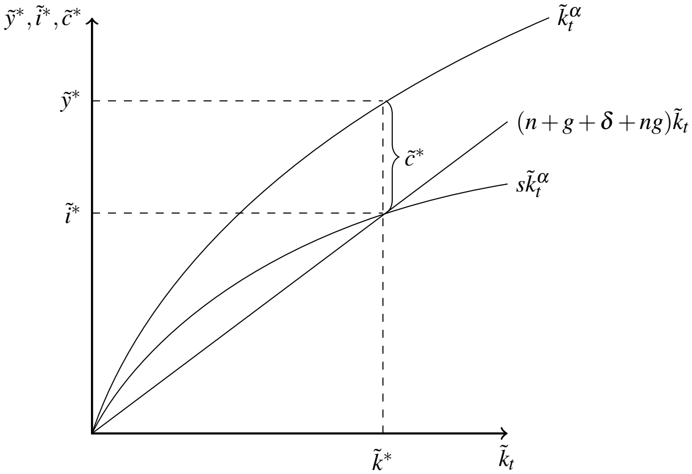


2.3. ábra. Átmenetdiagram

A (2.26) egyenlet a (2.27) alakra hozható, melynek segítségével meghatározható a fajlagos tőkeállomány változása az időben:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s\tilde{k}_t^{\alpha} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t). \tag{2.27}$$

A fajlagos tőkeállomány mellett a többi változó állandósult állapotbeli értéke is leolvasható a 2.4 ábráról.



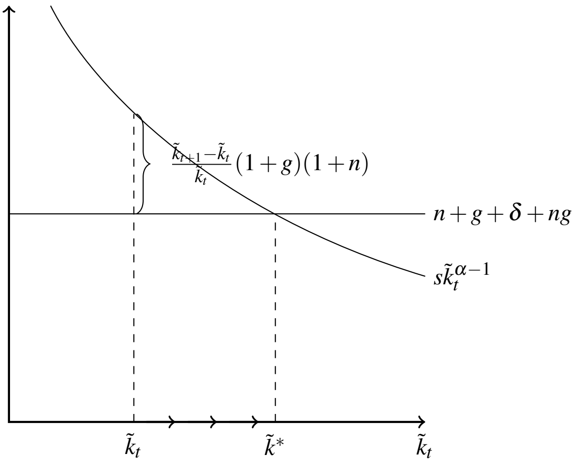
2.4. ábra. Hatékonysági egységre jutó változók állandósult állapotban

A hatékonysági egységre jutó változók tehát akkor válnak konstanssá, azaz akkor érik el állandósult állapotukat, ha $\tilde{i}^* = (n+g+\delta+ng)\tilde{k}^*$, vagyis a beruházás csak a pótlást fedezi, ami a fajlagos tőkeállomány szinten tartásához elég. Egyrészt az amortizálódott tőke helyett új tőkeeszközöket kell biztosítani ($\delta\tilde{k}^*$), másrészt pedig számolni kell a hatékony munkaerő folyamatos növekedésével is. Mivel ez utóbbinak a növekedési rátája $n+g+ng$, így a tőkeállománynak is ekkora ütemben kell nőnie, hogy biztosítsuk egyensúlyban a konstans hatékonysági egységre jutó tőkeállományt $[(n+g+ng)\tilde{k}^*]$.

A (2.27) egyenlet még tovább módosítható olyan formára, mely a fajlagos tőkeállomány növekedési rátáját fejezi ki:

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}-\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s\tilde{k}_t^{\alpha-1} - (n+g+\delta+ng)\right). \tag{2.28}$$

A 2.5 ábráról leolvasható a fajlagos tőkeállomány konvergenciája az egyensúly felé. Túl alacsony induló tőkeállomány esetén a fajlagos tőkeállomány növekedési rátája pozitív, így a tőkében folyamatos, de egyre lassabb növekedést tapasztalunk, ahogy közeledünk az egyensúly felé, ahol nullává válik a növekedési ráta. Túl magas szintről indulva pedig épp ellenkezőleg, negatív növekedési rátát kapunk, ami abszolút értékeben periódusról periódusra egyre csökken, vagyis a fajlagos tőkeállomány értéke egyre alacsonyabbá válik, míg el nem érjük az egyensúlyt.



2.5. ábra. A módosított Solow-egyenlet

Állandósult állapot

Láttuk, hogy a gazdaság fajlagos változói egyensúlyi növekedési pályán konstans értéket vesznek fel, vagyis $\Delta\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = 0$. Így a (2.27) egyenlet alapján:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s\tilde{k}_t^{\alpha} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t) = 0,$$

amiből kiszámítható a hatékonysági egységre eső tőkeállomány állandósult állapotbeli értéke. Majd azt a (2.24) termelési függvénybe behelyettesítve a hatékonysági egységre jutó kibocsátás egyensúlyi értéke is megkapható. A (2.29) és a (2.30) szerint a megtakarítási ráta pozitívan, a népességnövekedés, a tudás fejlődése és az amortizáció pedig negatívan hatnak az állandósult állapotbeli értékükre:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{2.29}$$

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{2.30}$$

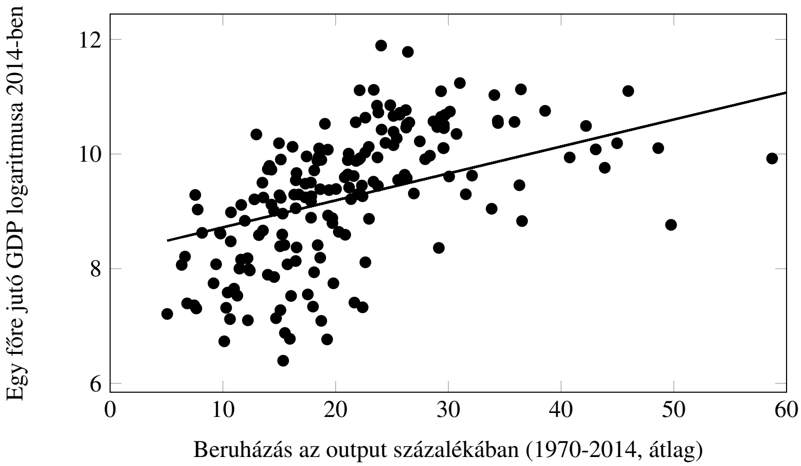
A (2.29) és a (2.30) egyenletekből megadható a változók egy főre jutó szintje is, mely látható, hogy A_t-vel, a tudás fejlődésével megegyező ütemben növekszik egyensúlyban, ahogy azt korábban már megmutattuk:

$$k_t^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot A_t,$$

$$y_t^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta+ng} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A_t. \tag{2.31}$$

Empíria

A 2.6 ábra empirikus adatokkal támasztja alá a Solow-modell eredményét, miszerint ceteris paribus várhatóan abban az országban lesz magasabb az egy főre eső GDP, ahol átlagosan magasabb a megtakarítási (vagy beruházási) ráta. A 2.7 ábra szintén a modell következtetéseit igazolja, hiszen várhatóan ceteris paribus abban a gazdaságban magasabb az egy főre eső GDP logaritmusa, ahol átlagosan lassabb a népesség növekedési üteme.

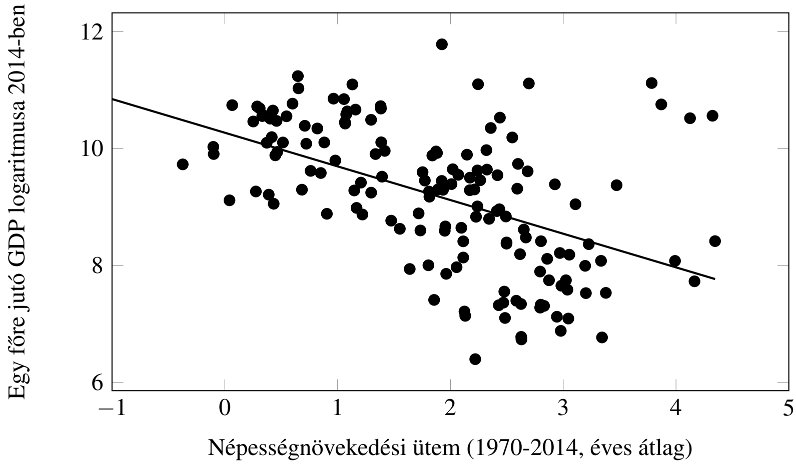


2.6. ábra. A beruházási ráta és az egy főre eső GDP kapcsolata, 180 országban. Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

Logaritmizálva a (2.31) egyenletet a (2.32) összefüggést kapjuk:

$$\ln y_t^* = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\ln s - \ln(n+g+\delta+ng) \right] + \ln A_t. \tag{2.32}$$

Eszerint az egy főre jutó kibocsátás megtakarítási ráta szerinti rugalmassága $\alpha/(1-\alpha)$, a pótlás szerinti pedig $-\alpha/(1-\alpha)$. Így ha például a megtakarítási ráta 1%-kal nő, akkor minden más változatlansága mellet várhatóan $\alpha/(1-\alpha)$%-kal emelkedik az egy főre eső GDP. A legtöbb országban $\alpha = 1/3$, így a rugalmasság $\alpha/(1-\alpha) = 1/2$ lenne a modell szerint. Mankiw, Romer és Weil (1992) a legkisebb négyzetek mószerét (Ordinary Least Squares, OLS) alkalmazva becsülte meg a rugalmasságot háromféle mintán. Az első 98 olyan országot tartalmazott, ahol nem az olajkitermelés a domináns ágazat. A második mintában – kiszűrve a kis országokat – 75 országgal becsülték



2.7. ábra. A népességnövekedési ütem és az egy főre eső GDP kapcsolata, 150 országban. Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

meg az együtthatót, végül 22 OECD országgal is elvégezték a becslést. A 2.1 táblázat tartalmazza az eredményeiket, melyekre a következő fejezetben még visszatérünk.

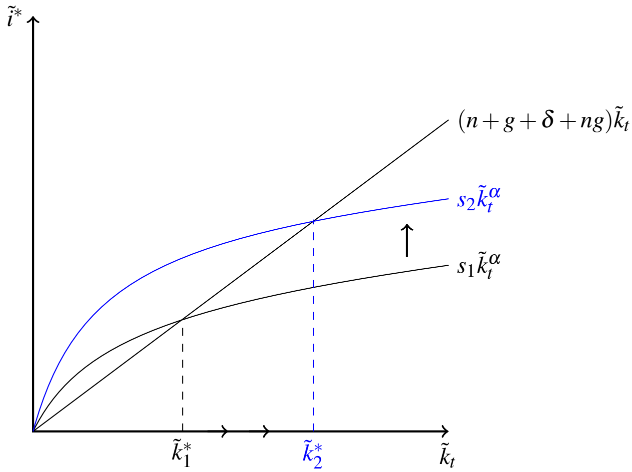
A becslés alapján megállapítható, hogy a Solow-modellből kapott elaszticitás értékét csak a 22 OECD országot tartalmazó esetben kapták vissza, a heterogénebb minták eredményei szerint a valóságban jóval nagyobb a magyarázó változók hatása az egy főre eső GDP-re, mint ahogy azt a modell mutatja.

	Függő változó: Egy munkaképesre jutó GDP logaritmusa		
	98 ország	75 ország	22 ország
Konstans	6,87	7,10	8,62
	(0,12)	(0,15)	(0.53)
$\ln(I/GDP) - \ln(n+g+\delta)$	1,48	1,43	0,56
	(0,12)	(0,14)	(0,36)
$\overline{R}^2$	0,59	0,59	0,06

2.1. táblázat. Az OLS becslések eredményei (zárójelekben a standard hibákkal). Forrás: Mankiw, Romer és Weil (1992).

2.3. A megtakarítási ráta változásának hatása

Láttuk, hogy a modell és a valós adatok szerint is nagy szerepe van a megtakarítási rátának az egy főre eső GDP alakulásában. Nézzük meg, mi történik, ha egy már egyensúlyi növekedési pályán lévő gazdaságban sikerül azt elérni, hogy a fogyasztók tartósan megnöveljék a jövedelmükből megtakarítani kívánt hányadot! A 2.8 ábrán látható, hogy a megtakarítási ráta s_1-ről s_2-re emelése miatt minden tőkeállomány mellett több beruházást tudnak finanszírozni megtakarításaikból a gazdaság szereplői (kék vonal).



2.8. ábra. A megtakarítási ráta emelkedésének hatása

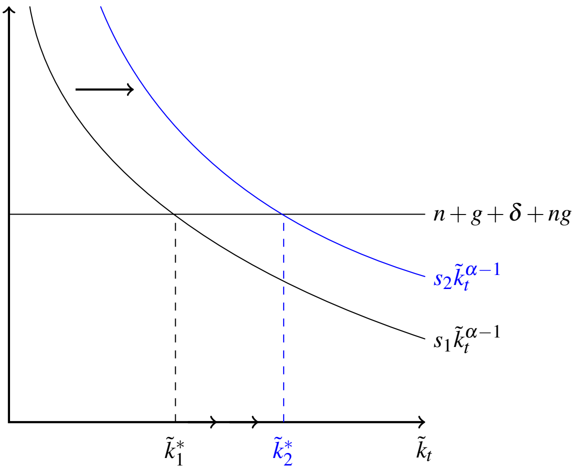
Ha kezdetben $\tilde{k}_1^*$ szinten volt állandósult állapotban a tőkeállomány, akkor a változás után emelett a szint mellett a beruházás meghaladja a pótlás miatt szükséges mennyiséget, így több új tőkeeszközt vásárolnak, mint ami a fajlagos tőkeállomány szinten tartását biztosítaná. Emiatt a következő periódusban magasabb lesz a fajlagos tőkeállomány mint $\tilde{k}_1^*$, és a növekedés addig folytatódik, míg a beruházás már csak a pótlás fedezésére elég, és elérjük az új állandósult állapotbeli $\tilde{k}_2^*$ szintet.

A 2.9 ábra hasonló konvergenciát mutat[1]. A megtakarítási ráta tartós növekedésének következtében az induló periódusban ($\tilde{k}_1^*$ mellett) nem nulla a fajlagos tőkeállomány

[1]A 2.9 ábrán a görbék és a vízszintes egyenes vertikális különbsége:

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}-\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t}(1+g)(1+n).$$

növekedési rátája, hanem pozitív, hiszen az új görbe és a vízszintes egyenes nem metszik egymást abban a pontban. Eszerint a fajlagos tőkeállomány periódusról periódusra emelkedik az átmenet időszakában, ám egyre kisebb növekedési rátával, ahogy közeledünk az új egyensúlyi pont felé ($\tilde{k}_2^*$).

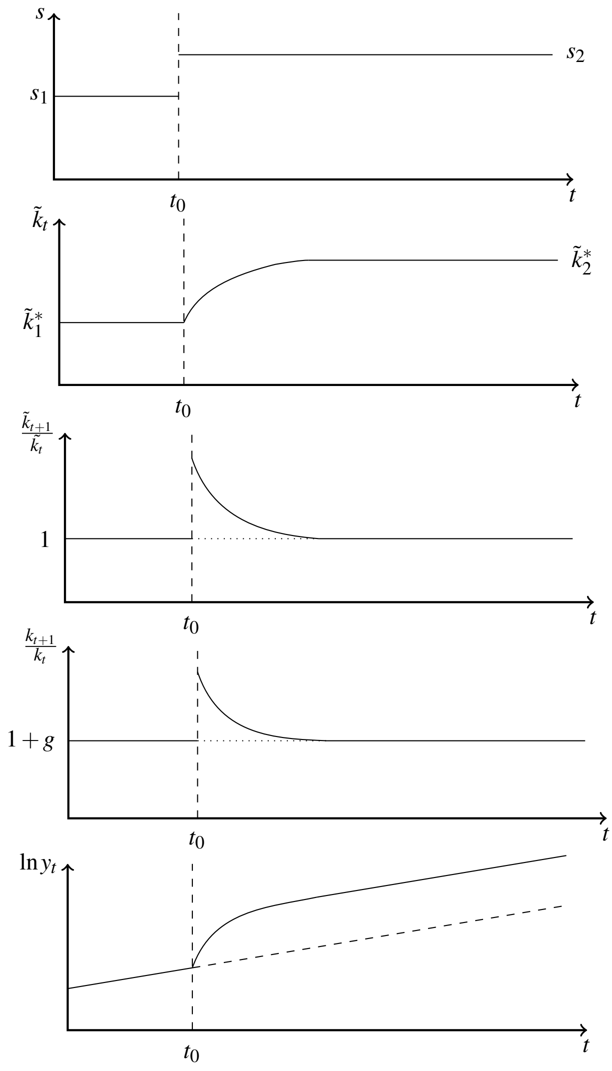


2.9. ábra. A megtakarítási ráta növekedésének hatása

A 2.10 ábrán a főbb változók illetve növekedési ütemük időbeli alakulása látható. A t_0 jelöli azt a periódust, mikor a megtakarítási ráta s_1-ről tartósan s_2-re változott. Előtte a gazdaság már egyensúlyi növekedési pályán haladt, így a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány konstans $\tilde{k}_1^*$ szinten állt. Az egy főre eső tőke és kibocsátás az egyensúlyi $1+g$ ütemben növekedett, így az egy főre eső kibocsátás logaritmusának ábráján a függvény meredeksége – ahogy azt az 1. fejezetben láttuk – a g növekedési rátával egyezik meg.

A 2.8 ábrán már láttuk, hogy az alkalmazkodási periódusban a fajlagos tőkeállomány folyamatosan növekszik, míg el nem éri az új állandósult állapotbeli értéket, de a 2.9 ábra alapján azt is, hogy egyre kisebb ütemben. Így az új egyensúly elérésekor egy magasabb szinten állandósul a fajlagos tőkeállomány, de az egyensúlyi növekedési ütemek nem módosulnak. A megtakarítási ráta emelése tehát csak átmenetileg tudja felgyorsítani a gazdaság növekedését, hosszú távon már nem.

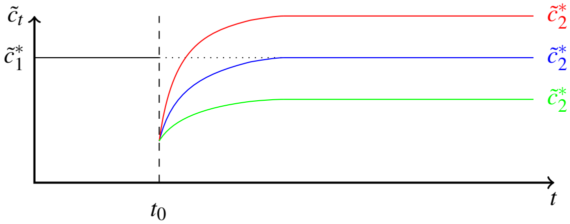
A fogyasztás változása a megtakarítási ráta emelkedése után nem egyértelmű. A sokk periódusában – mivel a jövedelem nagyobb hányadát takarítják meg a szereplők – a jövedelmük kisebb hányadt költik fogyasztásra, így t_0-ban lecsökken a fajlagos fogyasztás. Az alkalmazkodási periódusban – mivel folyamatosan emelkedik a fajlagos jövedelem – a fajlagos fogyasztás is növekszik, míg el nem éri az új állandósult állapotát. Az úgy egyensúlyi érték azonban magasabb, alacsonyabb, sőt ugyanakkora is lehet, mint az



2.10. ábra. A megtakarítási ráta növekedésnek hatása

induló fajlagos fogyasztás ($\tilde{c}_1^*$). A (2.33) egyenletben a szorzat első tagja, a fogyasztási hányad csökkent, de a fajlagos jövedelem nőtt, így az új állandósult állapotbeli fogyasztás értéke attól függ, melyik hatás volt az erősebb. A 2.4 fejezetben azt a megtakarítási rátát keressük, amely mellett maximális fogyasztás biztosítható.

$$\tilde{c}^* = (1-s)\tilde{y}^* \tag{2.33}$$



2.11. ábra. A fogyasztás változása a megtakarítási ráta növekedése esetén

2.4. Aranyszabály

Aranyszabály szerinti egyensúlyi növekedési pályának nevezzük azt az esetet, amelyen maximális fajlagos fogyasztás érhető el. Keressük azt a megtakarítási rátát, amely ezt biztosítja! A (2.34) egyenlettel kiszámítható egyensúlyi fajlagos fogyasztást maximalizálva s szerint a (2.35) feltételhez jutunk. Az aranyszabály szerinti megtakarítási ráta (s_g) tehát a tőke kitevőjével egyezik meg Cobb-Douglas termelési függvény esetén, ami a tőkejövedelem teljes jövedelmen belüli aránya:

$$\tilde{c}^* = (1-s)\tilde{y}^* = (1-s)\left(\frac{s}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \to \max_s \tag{2.34}$$

$$s_g = \alpha. \tag{2.35}$$

A hatékonysági egységre eső fogyasztás a (2.16) árupiaci egyensúly szerint:

$$\tilde{c}^* = \tilde{y}^* - \tilde{i}^*.$$

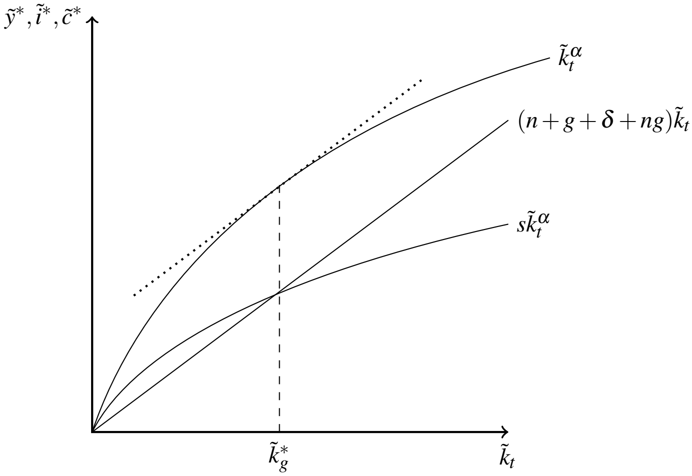
Mivel állandósult állapotban a beruházás csak a pótlást fedezi, így

$$\tilde{i}^* = (n+g+\delta+ng)\tilde{k}^*.$$

A behelyettesítések után elvégezve a (2.36) maximalizálását, a (2.37) feltételt kapjuk. Eszerint ott van az aranyszabály szerinti egyensúly ($\tilde{k}_g^*$) a 2.4 ábrán, ahol a termelési függvény és a pótlás egyenesének meredeksége megegyezik, hiszen ekkor a legnagyobb a kettő közti különbség, vagyis az egyensúlyi fajlagos fogyasztás (lásd a 2.12 ábra). Ez azt jelenti, hogy aranyszabály esetén a tőke határterméke megegyezik a pótlási értékkel:

$$\tilde{c}^* = \tilde{k}_t^\alpha - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}^* \to \max_{\tilde{k}} \tag{2.36}$$

$$\alpha\tilde{k}^{\alpha-1} = n+g+\delta+ng \qquad \text{vagyis} \qquad MPK = n+g+\delta+ng. \tag{2.37}$$



2.12. ábra. Aranyszabály

2.5. Növekedési számvitel

A *növekedési számvitel* a kibocsátás növekedését magyarázza a modellbeli tényezők (munka, tőke és termelékenység) változásával. Ehhez használjuk a teljes tényezőtermelékenységgel bővített (2.2) termelési függvényt, majd írjuk fel annak logaritmusát a t. és egy annál későbbi T. periódusra:

$$Y_t = B_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha},$$

$$\ln Y_t = \ln B_t + \alpha \ln K_t + (1-\alpha)\ln L_t,$$

$$\ln Y_T = \ln B_T + \alpha \ln K_T + (1-\alpha)\ln L_T\,!$$

Ahhoz, hogy kiszámíthassuk a kibocsátás átlagos növekedési rátáját egy periódusra vonatkozóan, vonjuk ki a T. periódus változóinak logaritmusából a t. periódus változóinak logaritmusát, majd osszuk el a különbséget $T-t$-vel, az eltelt évek számával:

$$\frac{\ln Y_T - \ln Y_t}{T-t} = \frac{\ln B_T - \ln B_t}{T-t} + \alpha \frac{\ln K_T - \ln K_t}{T-t} + (1-\alpha)\frac{\ln L_T - \ln L_t}{T-t}. \tag{2.38}$$

Ez alapján a kibocsátás növekedése ($g^Y_{t,T}$) a technológia ($g^B_{t,T}$), a tőke ($g^K_{t,T}$) és a munka ($g^L_{t,T}$) növekedésével magyarázható:

$$g^Y_{t,T} = g^B_{t,T} + \alpha g^K_{t,T} + (1-\alpha) g^L_{t,T}. \tag{2.39}$$

Ha ismerjük a kibocsátás, a tőkeállomány és a munkerő mennyiségének alakulását, illetve a tőke- vagy munkajövedelem arányát a teljes jövedelmen belül, akkor maradékelven ki tudjuk számítani a munka termelékenységének növekedési ütemét – melyre *technikai haladásként* is szoktak hivatkozni – vagyis a *Solow-féle maradéktagot*. A 2.2 táblázatban az Amerikai Egyesült Államokra vonatkozó adatok láthatók különböző intervallumokban. Egyrészt folyamatos lassulás tapasztalható a kibocsátás növekedési ütemén, másrészt pedig 1972-1995 periódusban a technológia növekedési ütemében is visszaesés figyelhető meg. Ez utóbbit az alábbi indokokkal magyarázza Mankiw (2012).

1. *Mérési problémák.* A minőségbeli javulások mérhetetlensége miatt az adatok alábecslik a valós növekedést.

2. *Változik a munkaerő összetétele.* A korábban megemelkedett születésszám miatt a ’70-es években relatíve több pályakezdő fiatal lépett a munkaerőpiacra, csökkentve ezzel a munkaerő átlagos termelékenységét.

3. *Olajválság.* 1973-ban majd 1979-ben kezdődött a két olajválság, amikor az Arab Olajexportáló Országok Nemzetközi Szervezete (OPEC) bejelentette, hogy bizonyos országokba felfüggeszti az olaj exportját. Ennek köszönhetően nagy mértékben emelkedett az olaj ára.

4. *Kevesebb új ötlet.* A számos új találmány után már egyre nehezebb újdonságokkal előállni.

	g^Y	=	$\alpha \cdot g^K$	+	$(1-\alpha)\cdot g^L$	+	g^B
1948-1972	4,1		1,0		1,2		1,9
1972-1995	3,4		1,4		1,3		0,7
1995-2010	2,8		0,4		1,1		1,3
1948-2010	3,4		1,0		1,2		1,2

2.2. táblázat. Növekedési számvitel az Amerikai Egyesült Államokban (%, éves átlagos növekedési ütemekkel számolva). Forrás: Mankiw (2012).

2.6. Solow-modell folytonos időben

A legtöbb növekedéselmélettel foglalkozó tanulmányban ezeket a modellet nem az általunk használt *diszkrét*, hanem *folytonos* időben írják fel. Míg az előbbi bizonyos időpontokban ($t = 1, 2, 3, \ldots$) írja le a gazdaság viselkedését, addig az utóbbi minden időpillanatban jellemzi azt. Vezessük le a Solow-modellt folytonos időben is, hogy lássuk a két módszer és jelölésrendszer közti különbséget!

A modell felépítése

Vállalat

A vállalat tőke és hatékony munkaerő felhasználásával állítja elő termékét. A termelési függvényt a (2.40) egyenlet mutatja, ahol a változók az idő (t) függvényében írhatók fel:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)). \tag{2.40}$$

A termelési függvényre itt is teljesülnek a korábban összegyűjtött feltételek, így felírható az intenzív formája a (2.41) szerint:

$$\tilde{y}(t) = f(\tilde{k}(t)). \tag{2.41}$$

A hatékonysági egységre jutó változókat itt is hullámvonallal jelöljük:

$$\tilde{k}(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)}.$$

A munka és a termelékenység konstans exogén (n illetve g) ütemben nő:

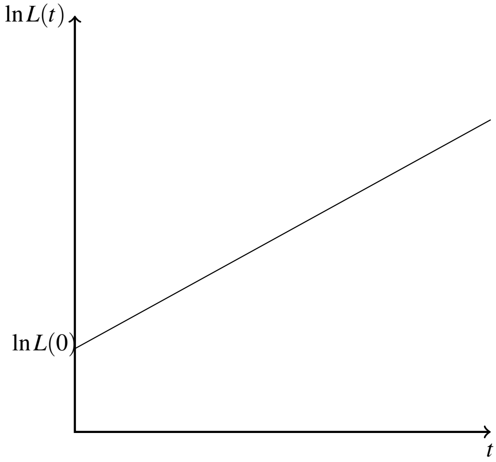
$$\dot{L}(t) = nL(t), \tag{2.42}$$

$$\dot{A}(t) = gA(t). \tag{2.43}$$

A (2.42) és a (2.43) egyenletekben a pont a változók felett azok idő szerinti deriváltját jelöli, és a változás mértékét mutatja:

$$\dot{L}(t) \equiv \frac{dL(t)}{dt} \quad \text{és} \quad \dot{A}(t) \equiv \frac{dA(t)}{dt}.$$

A (2.42) és a (2.43) egyenletek a következőképpen hozhatók kapcsolatba a korábban tanultakkal. Az 1. fejezetben láttuk, hogy a növekedési ráta egyenlő a változó természetes logaritmusainak különbségével, így a természetes alapú logaritmusát ábrázolva az időben, a függvény meredeksége a növekedési rátával egyezik meg. Tehát ha a munkaerő növekedési rátáját szeretnénk kiszámítani, akkor a függőleges tengelyen lévő változó (munka természetes logaritmusa) függvényét kéne a vízszintes tengely változója (idő)



2.13. ábra. A munkaerő logaritmusának alakulása az időben

szerint deriválni (2.13 ábra), hogy megkapjuk a meredekséget. Hasonlóképpen a termelékenység esetén is.

$$\frac{d\ln L(t)}{dt} = \frac{d\ln L(t)}{dL(t)}\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{L(t)}\dot{L}(t) = n$$

$$\frac{d\ln A(t)}{dt} = \frac{d\ln A(t)}{dA(t)}\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{A(t)}\dot{A}(t) = g$$

Ha ismerjük az exogén növekedési rátákat és a változók induló értékeit is, akkor bármelyik periódus értéke kiszámítható a (2.44) és a (2.45) képletekkel:

$$\ln L(t) = \ln L(0) + n \cdot t, \tag{2.44}$$

$$\ln A(t) = \ln A(0) + g \cdot t. \tag{2.45}$$

Átalakítva azokat a (2.46) és a (2.47) egyenletekhez jutunk, amik szerint a munka és a termelékenység exponenciálisa nő:

$$L(t) = L(0) \cdot e^{nt}, \tag{2.46}$$

$$A(t) = A(0) \cdot e^{gt}. \tag{2.47}$$

A tőkeállomány szintje növelhető beruházásokkal, de δ hányada a már meglévő tőkének használhatatlanná válik, amortizálódik, így a tőkeállomány változása a tőkefelhalmozási korlát szerint

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t). \tag{2.48}$$

Fogyasztó

A reprezentatív fogyasztó jövedelme konstans s hányadát megtakarítja, a többit pedig fogyasztásra fordítja:

$$S(t) = sY(t),$$
$$C(t) = (1-s)Y(t).$$

Piaci egyensúlyi feltételek

1. *Árupiac:*
$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{2.49}$$
2. *Munkapiac:*
$$L^S(t) = L^D(t).$$
3. *Tőkepiac:*
$$K^S(t) = K^D(t).$$
4. *Kölcsönözhető források (vagyoneszközök) piaca:*
$$S(t) = I(t). \tag{2.50}$$

A modell dinamikája és egyensúlya

A modell diszkrét idejű felírásánál már láttuk, hogy a gazdaság az egyensúlyban is növekedhet, így állandósult állapota csak a hatékonysági egységre eső változóknak van. Ha felhasználjuk a hányados deriválására vonatkozó szabályokat és a hatékonysági egységre jutó változóink definícióját, akkor a Solow-modell alapegyenletét kapjuk, melyet már a diszkrét verzióban is levezettünk:

$$\dot{\tilde{k}}(t) \equiv \frac{\partial\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\right)}{\partial t} = \frac{\dot{K}(t)A(t)L(t) - K(t)\left(A(t)\dot{L(t)}\right)}{(A(t)L(t))^2}$$

$$= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)\left(A(t)\dot{L(t)}\right)}{(A(t)L(t))^2}$$

$$= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)\left(\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)\right)}{(A(t)L(t))^2}$$

$$= \frac{I(t) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - \tilde{k}(t)\left(\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right)$$

$$= s\tilde{y}(t) - \delta\tilde{k}(t) - \tilde{k}(t)(g+n) = s\tilde{y}(t) - (n+g+\delta)\tilde{k}(t),$$

$$\dot{\tilde{k}}(t) = sf(\tilde{k}(t)) - (n+g+\delta)\tilde{k}(t). \tag{2.51}$$

A (2.51) egyenlet hasonlóképpen nézett ki a diszkrét felírásban is, így a 2.14 ábra is megegyezik a korábbi 2.4 ábrával. Túl alacsony induló fajlagos tőkeállomány esetén a beruházás meghaladja a pótlás miatt szükséges értéket

$$sf(\tilde{k}(t)) > (n+g+\delta)\tilde{k}(t),$$

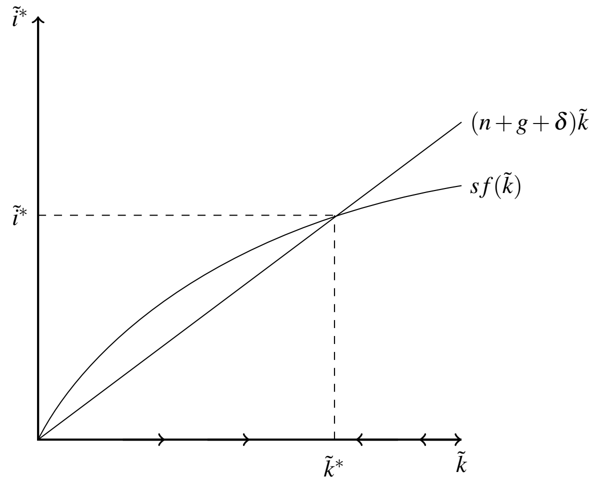
így a fajlagos tőkeállomány növekszik, túl magas induló fajlagos tőkeállomány esetén pedig épp ellenkezőleg, a beruházás nem elég a pótlás finanszírozására sem

$$sf(\tilde{k}(t)) < (n+g+\delta)\tilde{k}(t),$$

így a fajlagos tőkeállomány csökken. Egyensúlyban a beruházás pontosan a pótlás finanszírozására elég

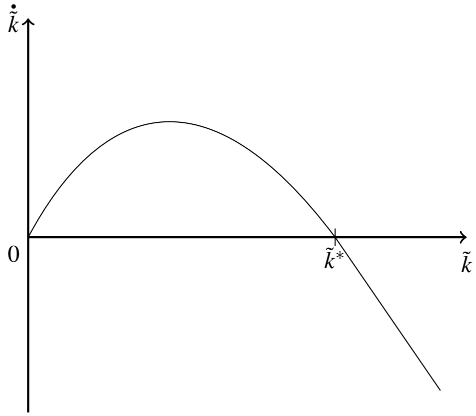
$$sf(\tilde{k}(t)) = (n+g+\delta)\tilde{k}(t),$$

így $\dot{\tilde{k}} = 0$, vagyis a hatékonysági egységre jutó tőke konstans.



2.14. ábra. A modell dinamikája folytonos esetben

A (2.51) egyenlet *fázisdiagramon* is ábrázolható, amely $\dot{\tilde{k}}$-ot mutatja $\tilde{k}$ függvényében. A 2.15 ábra összefoglalja az átmenetegyenlettel kapcsolatos információkat. Ha a fajlagos tőkeállomány alacsonyabb az egyensúlyi szintjénél, akkor növekedési rátája pozitív, vagyis a fajlagos tőkeállomány növekszik. Ha pedig magasabb az állandósult állapotnál, akkor negatív a növekedési ráta, tehát csökken. Így mindkét irány felől a globálisan stabil egyensúlyi pont felé konvergál a gazdaság.



2.15. ábra. Fázisdiagram

Egyensúlyi növekedés

A diszkrét esetben már láttuk, hogy az egy főre eső változók egyensúlyban $1+g$ ütemben, a technikai haladásnak megfelelően növekednek, az aggregált változók egyensúlyi növekedési üteme pedig $(1+g)(1+n)$. Vezessük le ezeket a folytonos idejű felírás módszerével is!

Az egy főre jutó változók – $k(t), y(t), c(t), i(t)$ – egyensúlyban itt is g ütemben növekednek:

$$\dot{k}(t) = \dot{\left(\tilde{k}(t)A(t)\right)} = \dot{\tilde{k}}(t)A(t) + \tilde{k}(t)\dot{A}(t)$$

$$= 0 + \tilde{k}(t)gA(t) = gk(t),$$

vagy másképpen levezetve

$$\left[\ln \dot{\left(\tilde{k}(t)A(t)\right)}\right] = \frac{1}{\tilde{k}(t)A(t)}\left[\dot{\tilde{k}}(t)A(t) + \tilde{k}(t)\dot{A}(t)\right] = g.$$

Az aggregált változók – $K(t), Y(t), C(t), I(t)$ – egyensúlyi növekedési pályán itt is $n+g$ ütemben növekednek:

$$\dot{K}(t) = \dot{\left(k(t)L(t)\right)} = \dot{k}(t)L(t) + k(t)\dot{L}(t) = gk(t)L(t) + k(t)nL(t)$$

$$= k(t)L(t)(g+n) = (g+n)K(t),$$

vagy másképpen levezetve

$$\left[\ln\left(k(\dot{t})L(t)\right)\right] = \frac{1}{k(t)L(t)}\left[\dot{k}(t)L(t) + k(t)\dot{L}(t)\right] = g + n.$$

A konvergencia sebessége

Láttuk, hogy a gazdaság mindig az egyensúlyi növekedési pálya felé konvergál, ha valamilyen esemény attól eltéríti. A paraméterek megváltozásának azonban nemcsak a hosszú távú hatásai lehetnek érdekesek, hanem az utána következő alkalmazkodási folyamat is. Nézzük meg, hogy milyen gyorsan tart $\tilde{k}(t)$ $\tilde{k}^*$-hoz, ha a változók nincsenek állandósult állapotban!

Vegyük az elsőrendű Taylor-közelítését[2] a

$$\dot{\tilde{k}}(t) = sf(\tilde{k}(t)) - (n + g + \delta)\tilde{k}(t)$$

mozgásegyenletnek $\tilde{k}(t) = \tilde{k}^*$ körül:

$$\dot{\tilde{k}}(t) \approx 0 + \left[\frac{\partial \dot{\tilde{k}}(t)}{\partial \tilde{k}(t)}\bigg|_{\tilde{k}(t)=\tilde{k}^*}\right](\tilde{k}(t) - \tilde{k}^*)!$$

Jelöljük a $-\frac{\partial \dot{\tilde{k}}(t)}{\partial \tilde{k}(t)}$ kifejezést λ-val:

$$\dot{\tilde{k}}(t) \approx -\lambda(\tilde{k}(t) - \tilde{k}^*)!$$

Az egyensúlyi növekedési pálya környezetében $\tilde{k}(t)$ olyan sebességgel közelít $\tilde{k}^*$ felé, amely arányos a $\tilde{k}^*$-tól vett távolsággal. Látható itt is, hogy amennyiben a jelenlegi fajlagos tőkeállomány meghaladja az egyensúlyi értékét, akkor a $\dot{\tilde{k}}(t)$ negatív, vagyis a tőkeállomány csökken, ellenkező esetben pedig növekszik. Határozzuk meg λ-t, hogy lássuk, milyen gyors a konvergencia:

$$\begin{aligned}\lambda = -\frac{\partial \dot{\tilde{k}}(t)}{\partial \tilde{k}(t)}\bigg|_{\tilde{k}(t)=\tilde{k}^*} &= -[sf'(\tilde{k}^*) - (n + g + \delta)] \\ &= (n + g + \delta) - sf'(\tilde{k}^*)!\end{aligned} \tag{2.52}$$

Kihasználva, hogy a (2.51) alapján egyensúlyban

$$s = \frac{(n + g + \delta)\tilde{k}^*}{f(\tilde{k}^*)},$$

[2] Egy $f(x)$ függvény elsőrendű Taylor-közelítésének képlete $x = x_0$ pont körül:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

illetve hogy

$$\frac{\tilde{k}^* f'(\tilde{k}^*)}{f(\tilde{k}^*)} = \frac{\tilde{k}^* \alpha \tilde{k}^{*\alpha-1}}{\tilde{k}^{*\alpha}} = \alpha,$$

a (2.52) egyenlet a (2.53) alakban írható fel:

$$\lambda = (n+g+\delta)(1-\alpha). \tag{2.53}$$

Megmutatható, hogy $\tilde{y}(t)$ hasonlóképpen λ ütemben közelíti az egyensúlyi értékét.

A konvergencia sebessége – példa

Vegyünk egy gazdaságot Romer (2011) alapján, ahol $n = 0,01, g = 0,02, \delta = 0,03$ és $\alpha = 1/3$! Ekkor

$$\lambda = (1-\alpha)(n+g+\delta) = 0,04$$

vagyis $\tilde{k}$ és $\tilde{y}$ évente az állandósult állapottól vett távolság 4%-ával közelít az álladósult állapothoz.
Számítsuk ki, mennyi idő alatt teszik meg a változók az út felét!

$$e^{-\lambda t} = 0,5$$

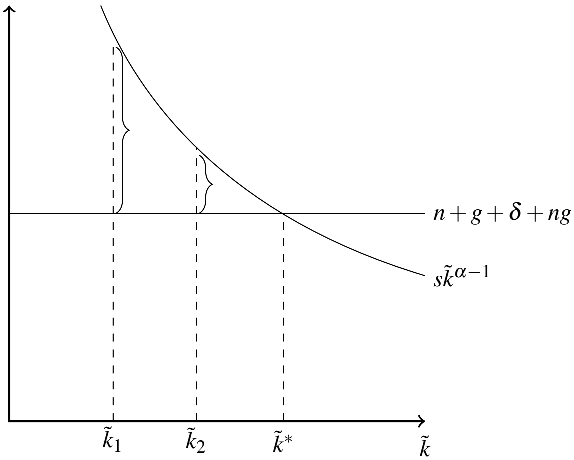
$$-0,04t = \ln 0,5$$

$$t = 17,33 \tag{2.54}$$

Tehát körülbelül 17 periódus alatt érnek el az állandósult állapothoz vezető út feléig a fajlagos változók. Mankiw, Romer és Weil (1992) becslése alapján a Solow-modell felülbecsli a konvergencia sebességét, ugyanis a már említett három mintán (98 ország, ahol nem az olajkitermelés a domináns ágazat, szűrt minta 75 országgal, végül 22 OECD tagállam) rendre a következő λ értékeket kapták: 0,0061, 0,0104 és 0,0173, melyek mind alacsonyabbak, mint a modell 0,04-es értéke.

2.7. Solow-modell és a növekedéselmélet kérdései

Az 1. fejezetben láthattuk, hogy a reál GDP átlagosan magasabb napjainkban, mint évtizedekkel ezelőtt volt, illetve jelentős jövedelmi különbségek vannak a szegényebb és a gazdagabb országok között. Vizsgáljuk meg a Solow-modell segítségével, hogy mi implikálja ezeket a különbségeket! Ha igaz az abszolút konvergencia elmélete, akkor azt várjuk, hogy minden gazdaság ugyanahhoz az egyensúlyi pályához tart. Így egy alacsonyabb jövedelmű ország (1-es gazdaság), aki attól messze van, a modell szerint gyorsabban, egy magasabb jövedelmű ország (2-es gazdaság), aki pedig ahhoz közelebb van, lassabban növekszik a 2.16 ábra alapján.



2.16. ábra. Konvergencia

Baumol (1986) 16 ipari ország adataival vizsgálta 1870 és 1979 között az abszolút konvergenciát. A becsült regresszió:

$$\ln y_{i,1979} - \ln y_{i,1870} = a + b \ln y_{i,1870} + \varepsilon_i,$$

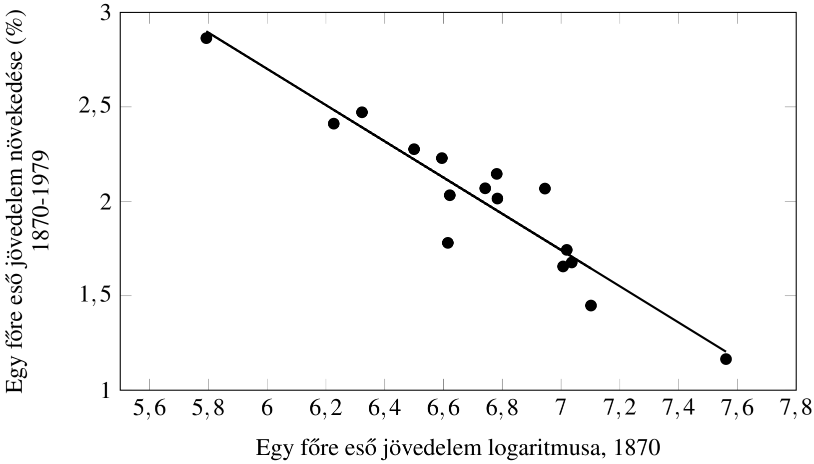
ahol $\ln y$ az egy főre eső jövedelem logaritmusa, i az országok indexe és ε_i a hibatag. Ha van konvergencia az országok között, akkor a b együttható negatív, vagyis a magasabb kezdeti jövedelmű országok lassabban növekednek. A (2.55) eredmény szerint alátámasztható a majdnem tökéletes konvergencia, ugyanis $b = -0,995$.

$$\ln y_{i,1979} - \ln y_{i,1870} = 8,457 - 0,995 \ln y_{i,1870} \qquad R^2 = 0,87 \qquad (2.55)$$

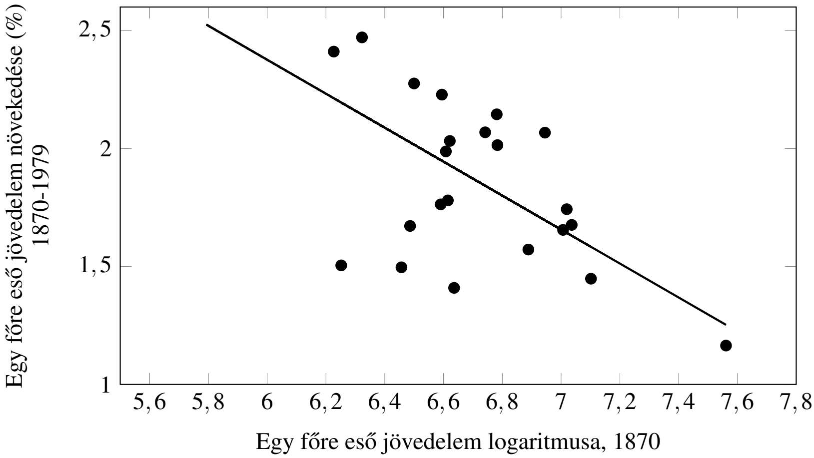
De Long (1988) megmutatta, hogy Baumol (1986) eredményeit fenntartásokkal kell kezelni, ugyanis torzítja a becslést, hogy eléggé homogén mintával, 16 fejlett gazdasággal dolgozott. Emiatt De Long (1988) bevont más országokat is a regresszióba (eredményeket lásd 2.18 ábrán). Az együttható negatív maradt, de abszolútértékben csökkent, így már csak $b = -0,566$.

Még több és többféle országot bevonva a becslésbe az abszolút konvergencia már egyáltalán nem igazolható. A 2.19 ábra 145 ország adatai alapján készült, és a regressziós egyenes meredeksége már enyhén pozitív, de inkább vízszinteshez közeli.

Mivel a modell szerint az abszolút konvergencia egyébként is csak akkor állna fenn, ha a gazdaságok paraméterei megegyeznének, és csak abban térnének el egymástól, hogy különböző tőkeállománnyal rendelkeznek, inkább a feltételes konvergenciát érdemes megnézni. Mankiw, Romer és Weil (1992) az abszolút konvergenciát szintén

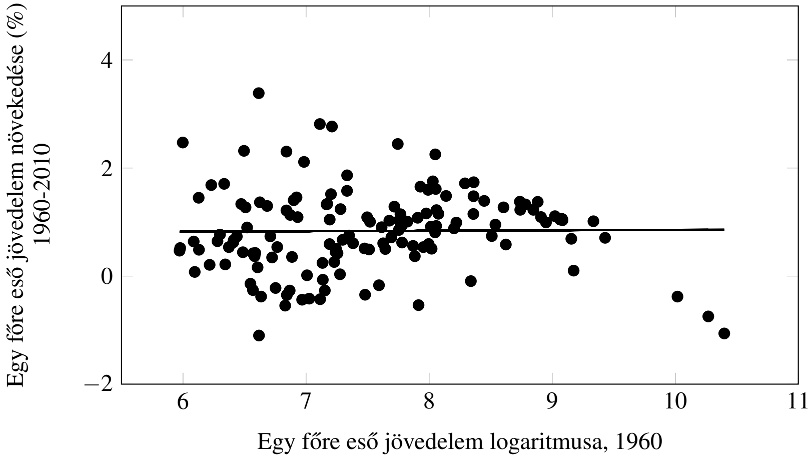


2.17. ábra. Kezdeti jövedelem és a növekedési ütem közti kapcsolat Baumol (1986) mintája alapján. Adatok forrása: De Long (1988).



2.18. ábra. Kezdeti jövedelem és a növekedési ütem közti kapcsolat De Long (1988) mintája alapján. Adatok forrása: De Long (1988).

csak homogén mintán (22 OECD ország) tudta alátámasztani, azonban kontrollálva a megtakarítási ráta és a népességnövekedési ráta eltéréseire a Solow-modell alapján, a feltételes konvergencia már látható volt nagyobb és heterogén (98 országból álló) mintán is. Azonos megtakarítási és népességnövekedési ráta mellett a szegényebb országok gyorsabban növekedtek, ami támogatja a feltételes konvergencia hipotézisét.



2.19. ábra. Kezdeti jövedelem és a növekedési ütem közti kapcsolat 145 ország adatai alapján. Adatok forrása: The Maddison-Project (2013).

Nézzük meg, mi okozza az országok közti jövedelmi eltéréseket! Hasonlítsunk össze két hipotetikus gazdaságot a Solow-modell segítségével! Tegyük fel, hogy az egyik gazdaság egy főre eső jövedelme (y_1) tízszerese a másik gazdaság egy főre eső jövedelmének (y_2), vagyis

$$\frac{y_1}{y_2} = 10!$$

Behelyettesítve a termelési függvények egy főre eső verzióját a (2.56)-ből látható, hogy a jövedelmi különbség oka a tőkeállomány, illetve a termelékenység szintjének eltérésében keresendő. Ha csak a fizikai tőkére koncentrálunk, így feltesszük, hogy a két gazdaságban nem különbözik a munka termelékenysége ($A_1 = A_2$), és $\alpha = 1/3$ paraméterrel számolunk, akkor a 2.57 egyenlet szerint a tízszeres jövedelmi eltérés abból adódik, hogy a gazdagabb országban 1000-szerese a tőkállomány a szegényebb ország tőkéjének. Ilyen nagy mértékű eltérés azonban a valós adatokkal nem támasztható alá.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{k_1^{\alpha} A_1^{1-\alpha}}{k_2^{\alpha} A_2^{1-\alpha}} \tag{2.56}$$

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\alpha} = 10 \tag{2.57}$$

Vessük össze a tőke hozamát is az előbb említett két gazdaságban! A tőke reálbérleti díja $r_i^K = \alpha k_i^{\alpha-1} A_i^{1-\alpha}$ $(i = 1,2)$. Ha itt is feltesszük a technológia egyezőségét és továbbra is $\alpha = 1/3$, akkor a (2.58) szerint a tízszeres jövedelmi eltérés (és a tőke 1000-szeres eltérése) esetén a szegényebb gazdaságban 100-szor akkora a tőke reálbérleti díja, mint a gazdagabb országban. Ez szintén túl magas, ugyanis ekkora eltérés esetén a szegényebb országba áramlana a tőke az egyéb kockázati tényezők (magas adók, államosítás veszélye stb.) ellenére is.

$$\frac{r_1^K}{r_2^K} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\alpha-1} = 0,01 \tag{2.58}$$

A modell szerint az egy főre eső jövedelem növekedésének szempontjából fontos tényező a megtakarítási ráta és a munkaerő-állomány változásának üteme. Mankiw, Romer és Weil (1992) empirikusan igazolta a megtakarítási ráta pozitív és a népességnövekedés negatív rugalmasságát (lásd 2.1 táblázat), de eredményeik szerint a modell alulbecsülte ezeket az értékeket. Láttuk, hogy ezeknek a faktoroknak a megváltozása csak az átmenet időszakában tudja befolyásolni az egy főre eső kibocsátás növekedési ütemét, ugyanis a gazdaság minden kezdeti értékből az egyensúly felé konvergál. A tartós növekedés feltétele pedig a termelékenység folyamatos fejlődése, azonban ez utóbbi exogén módon adott, és csak maradékelven van megmagyarázva, mit értünk alatta.

2.8. Összefoglalás

1. Az exogén technikai haladással és népességnövekedéssel bővített Solow-modellben a gazdaság mindig az egyensúlyi növekedési pálya felé tart, ahol az aggregált változók (Y_t, C_t, I_t, K_t) növekedési üteme $(1+n)(1+g)$, az egy főre eső változók (y_t, c_t, i_t, k_t) és a reálbér növekedési üteme $1+g$, a hatékonysági egységre jutó változók $(\tilde{y}_t, \tilde{c}_t, \tilde{i}_t, \tilde{k}_t)$, valamint a reálbérleti díj pedig konstanssá válnak.

2. Egyensúlyi növekedési pályán abban a gazdaságban biztosítható magasabb egy főre eső kibocsátás, ahol ceteris paribus magasabb a megtakarítási ráta, vagy lassabb a népességnövekedés. Ezt empirikus adatokon is igazoltunk, de a kvantitatív hatásukat alulbecsülte a modell.

3. A megtakarítási ráta emelésének hatására csak az alkalmazkodási periódusban gyorsítható a gazdasági növekedés, hosszú távon ez csak a technikai haladás növelésével lehetséges.

4. A modellben akkor biztosítható maximális egy főre eső fogyasztás, vagyis az aranyszabály, ha a megtakarítási ráta a tőkejövedelem teljes jövedelmen belüli arányával egyezik meg.

5. A modellel alátámasztható a feltételes konvergencia, miszerint – kontrollálva az országspecifikus tényezőkre – várhatóan abban az országban lesz gyorsabb a növekedés, amelyikben alacsonyabb az egy munkásra jutó GDP induló értéke, de felülbecsülte a konvergencia sebességét.
6. A növekedési számvitel segítségével számszerűsíthető, hogy mennyivel járult hozzá a kibocsátás növekedéséhez a termelékenység és a termelési tényezők változása, valamint maradékelven kiszámítható, mekkora a technikai haladás.

2.9. Feladatok

1. Mutassa meg, hogy a Cobb-Douglas típusú függvényre teljesülnek a termelési függvényre tett feltevések!
2. Tegyük fel, hogy a Solow-modell szerint működő gazdaság már egyensúlyi növekedési pályán van és nincs technológiai haladás!
   a) Mi történik az egy főre jutó tőkével, kibocsátással és fogyasztással, ha csökken a népesség növekedési rátája (n)?
   b) Mi történik a teljes kibocsátással (Y_t) a fenti esetben?
3. Tegyük fel, hogy egy egyensúlyi növekedési pályán lévő gazdaságban van technológiai haladás, de nincs népességnövekedés! A t. időpontban hirtelen megnő az ország népessége.
   a) Mi történik a t. időpontban a hatékonysági egységre jutó kibocsátással? Nő, csökken vagy változatlan marad?
   b) A t. időpont után változik-e még a hatékonysági egységre jutó kibocsátás? Ha igen, hogyan?
   c) Miután a gazdaság újra egyensúlyi pályára kerül, a hatékonysági egységre jutó kibocsátás kisebb, nagyobb, vagy ugyanakkora lesz-e, mint mielőtt megjelentek az új munkások?
4. Számítsa ki a hatékonysági egységre jutó kibocsátás egyensúlyi értékének népességnövekedés szerinti rugalmasságát az $\alpha = 1/3, g = 0,02, \delta = 0,03$ paraméterértékek mellett! Mennyivel növeli meg a fajlagos kibocsátást, ha a népesség növekedése 2%-ról 1%-ra csökken?
5. Módosítsuk a termelési függvényt úgy, hogy munkakiterjesztő technológiai haladás helyett tőkekiterjesztőt tartalmazzon:
$$Y(t) = [A(t)K(t)]^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}!$$
   Tegyük fel, hogy a technológia növekedési rátája μ, vagyis $\dot{A}(t) = \mu A(t)$! Mutassuk meg, hogy a gazdaság egyensúlyi növekedési pálya felé konvergál, és keressük meg $Y(t)$ és $K(t)$ növekedési rátáit egyensúlyban! Segítség: fejezzük ki az

$Y/(A^{\phi}L)$ változót $K/(A^{\phi}L)$ függvényében, ahol $\phi = \alpha/(1-\alpha)$, majd elemezzük $K/(A^{\phi}L)$ dinamikáját!

6. Bővítsük a Solow-modellt fiskális politikával! Tegyük fel, hogy gazdaságunkban az állam inproduktív kormányzati kiadásokat eszközöl, vagyis korábbi modellünkhöz képest az aggregált erőforráskorlát

$$\tilde{y}(t) = \tilde{c}(t) + \tilde{i}(t) + \tilde{g}(t),$$

és a kiadásokat jövedelemarányos adókkal finanszírozzák: $\tilde{g}(t) = \tau\tilde{y}(t)$! A szereplők továbbra is a rendelkezésre álló jövedelem s hányadát takarítják meg. Adja meg a rendszer dinamikáját meghatározó tőkefelhalmozási egyenletet! Mekkora az egyensúlyi fajlagos tőkeállomány Cobb-Douglas esetben?

7. Tegyük fel, hogy gazdaságunkban az állam produktív kormányzati kiadásokat eszközöl, vagyis korábbi modellünkhöz képest az aggregált erőforráskorlát $\tilde{y}(t) = \tilde{c}(t) + \tilde{i}(t) + \tilde{g}(t)$, és a kiadásokat jövedelemarányos adókkal finanszírozzák: $\tilde{g}(t) = \tau\tilde{y}(t)$! A szereplők továbbra is a rendelkezésre álló jövedelem s hányadát ruházzák be, de a kormányzati kiadások (például infrastrukturális kiadások) beépülnek a termelési függvénybe, azaz $\tilde{y}(t) = \tilde{k}(t)^{\alpha}\tilde{g}(t)^{\beta}$, ahol $\alpha > 0$, $\beta > 0$, illetve $\alpha + \beta < 1$. Adja meg a rendszer dinamikáját meghatározó tőkefelhalmozási egyenletet! Mekkora az egyensúlyi $\tilde{k}$? Mekkora adókulcs mellett lenne maximális az egyensúlyi $\tilde{k}$?

8. Tegyük fel, hogy a termelési függvény CES (konstans helyettesítési rugalmasság) típusú, vagyis

$$Y = [K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (AL)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

ahol $0 < \sigma$ (σ a tőke és a hatékony munka közti helyettesítési rugalmasság és speciális esetben, mikor $\sigma \to 1$, Cobb-Douglas függvényt kapunk)!

   a) Mutassuk meg, hogy a CES függvény is állandó mérethozadékú!
   b) Írjuk fel a függvény intenzív formáját!

9. Mekkora $Z(t)$ növekedési rátája $\left(\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)}\right)$, ha

   a) $Z(t) = X(t)Y(t)$?
   b) $Z(t) = \frac{X(t)}{Y(t)}$?
   c) $Z(t) = X(t)^{\alpha}$?

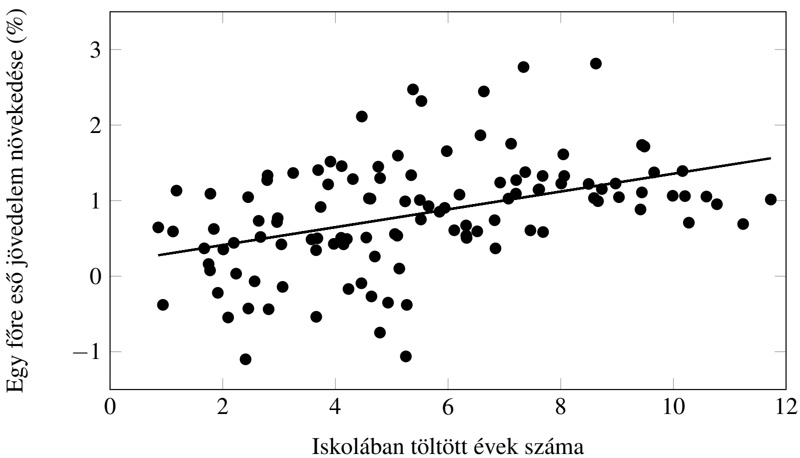
III.

HUMÁN TŐKÉVEL BŐVÍTETT SOLOW-MODELL

Az előző fejezetben felépített Solow-modell segítségével megismerkedtünk a növekedési modellek logikájával, dinamikájával illetve a levezetésük módszertanával. Képesek voltunk vele magyarázni a gazdaság növekedését, ami hosszú távon a termelékenység folyamatos fejlődésével érhető el a modell szerint. Arra is választ kaphattunk, hogyan reagálnak a főbb makroaggregátumok bizonyos változásokra (például a megtakarítási ráta vagy a népességnövekedés módosítására).

A Solow-modell eredményei viszonylag jól illeszkedtek a valós adatokhoz, de volt két szembetűnő kvantitatív eltérés. A megtakarítási ráta pozitív, és a népesség növekedési rátájának negatív, egy főre eső GDP-re gyakorolt hatását igazolni tudtuk, de a modell alulbecsülte rugalmasságukat a valósághoz képest. A feltételes konvergenciát is alátámasztottuk, de a konvergencia sebességét felülbecsülte a modell. Emiatt ebben a fejezetben úgy próbáljuk a már megismert modellt bővíteni, hogy közelebb tudjuk hozni az abból levonható következtetéseket az empíriához.

Mankiw, Romer és Weil (1992) azzal a változtatással állt elő, hogy megjelenítették a fizikai tőke és a munkaerő mellett külön a *humán tőkét* is a termelési függvényben, vagyis egy újabb termelési tényezővel bővült a modell. A gazdaság szereplői így nem csak a fizikai tőke felhalmozására fordíthatják vagyonukat, hanem a tudások növelésére is, például tanfolyamok, iskolák elvégzésével. Az 1. fejezetben már láttuk, hogy a 3.1 ábra szerint abban az országban nő gyorsabban az egy főre eső jövedelem, ahol átlagosan magasabb az iskolázottság. Ez alapján a növekedés szempontjából fontos tényező lehet a humán tőke.



3.1. ábra. Átlagos iskolázottság és az egy főre eső jövedelem éves átlagos növekedési üteme közti kapcsolat 115 ország adatai alapján, 1960-2010. Adatok forrása: Barro és Lee (2013) adatbázis és The Maddison-Project (2013).

Építsük be a humán tőkét a modellbe, és nézzük meg, sikerül-e javítani az alap Solow-modellben levezetett rugalmasságok értékén és a konvergencia sebességén!

3.1. A modell felépítése

A modell zárt gazdasága két reprezentatív szereplőt tartalmaz: vállalatot és fogyasztót. A vállalat háromféle termelési tényező felhasználásával, profitját maximalizálva állít elő egyfajta terméket. Mind az előállított termék, mind a termelési tényezők árai a tökéletesen versenyző piacokon a kereslet és kínálat egyensúlyában határozódnak meg.

A fogyasztó jövedelmet munkaerejének és tőkeállományának felajánlásából szerezhet, melynek konstans hányadát fogyasztási célokra fordítja, a fennmaradó összeget pedig megtakarítja. Megtakarításaiból beruházásokat finanszíroz, ami történhet fizikai illetve humán tőkébe is, ugyanis mindkettő felhalmozásáért és pótlásáért a fogyasztó felelős. A humán tőkét azonban nem tudjuk különválasztani a munkásoktól, mint a fizikai tőkét, hiszen míg egy számítógépet vagy egy irodaházat munkás nélkül is tudnak bérelni a vállalatok, addig a munkások tudására ez nem igaz. Így a humán tőkének nincs saját piaca, hozama a munkavállalókat illeti meg. A munkapiacon kialakult egyensúlyi reálbér tehát pozitívan függ az iskolázottságtól is.

Vállalat

A vállalat termelési tényezők – fizikai tőke, hatékony munkaerő és humán tőke – felhasználásával hozza létre termékét. A bővített termelési függvény így

$$Y_t = F(K_t, H_t, A_t L_t), \tag{3.1}$$

ahol H_t a termeléshez felhasznált humán tőke. A választott függvényformának teljesítenie kell az előző fejezetben már felsorolt követelményeket ahhoz, hogy úgynevezett *jól viselkedő* függvény legyen.

1. *Állandó mérethozadék.* Ha mindhárom termelési tényező azonos százalékkal nő, akkor a kibocsátás szintén ugyanannyi százalékkal emelkedik:

$$F(cK_t, cH_t, cA_t L_t) = cF(K_t, H_t, A_t L_t) \quad \text{minden} \quad c_t \geq 0 \quad \text{esetén.}$$

2. *A termelési tényezők csökkenő határterméke.* A termelési tényezők határterméke megmutatja, hogy egy pótlólagos egység az adott tényezőből mennyivel képes megemelni a termelést. Feltesszük, hogy egyre több munkával illetve fizikai és humán tőkével egyre több terméket képes előállítani a vállalat, vagyis a határtermékük pozitív, de a felhasznált termelési tényezők növekedésével egyre kisebb.

Így a termelési függvény termelési tényezők szerinti első deriváltja pozitív, a második pedig negatív:

$$\frac{\partial F(K_t, A_tL_t)}{\partial K_t} > 0, \qquad \frac{\partial F(K_t, A_tL_t)}{\partial H_t} > 0, \qquad \frac{\partial F(K_t, A_tL_t)}{\partial L_t} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 F(K_t, A_tL_t)}{\partial^2 K_t} < 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K_t, A_tL_t)}{\partial^2 H_t} < 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K_t, A_tL_t)}{\partial^2 L_t} < 0.$$

3. *Inada-feltételek.* Annak érdekében, hogy a gazdaság véges tőkeállományhoz tartson feltesszük, hogy a termelési tényezők határterméke nagyon magas, ha azok mennyisége nagyon alacsony és fordítva (Inada, 1964):

$$\lim_{K_t \to 0} F'_{K_t} = \infty, \qquad \lim_{K_t \to \infty} F'_{K_t} = 0,$$

$$\lim_{H_t \to 0} F'_{H_t} = \infty, \qquad \lim_{H_t \to \infty} F'_{H_t} = 0,$$

$$\lim_{L_t \to 0} F'_{L_t} = \infty, \qquad \lim_{L_t \to \infty} F'_{L_t} = 0.$$

Használjunk most is Cobb-Douglas típusú termelési függvényt, mint az előző fejezetben, munkakiterjesztő technológiával bővítve:

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} (A_tL_t)^{1-\alpha-\varphi}, \tag{3.2}$$

$$0 < \alpha < 1, \qquad 0 < \varphi < 1, \qquad \alpha + \varphi < 1!$$

Tegyük fel, hogy a munkaerő mennyisége, és annak termelékenysége is exogén ütemben emelkedik, melyek növekedési rátái n és g:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1 + n, \tag{3.3}$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g! \tag{3.4}$$

A fizikai és a humán tőkeállomány szintén változhat az időben. A fizikai tőkébe történő beruházás (I_t^K) növeli a fizikai tőke mennyiségét, de a tőkeállomány $\delta > 0$ hányada minden periódusban amortizálódik, így a (3.5) egyenlettel írható fel a fizikai tőke felhalmozási korlátja:

$$K_{t+1} = I_t^K + (1-\delta)K_t. \tag{3.5}$$

Mivel a fogyasztók jövedelmük konstans hányadát képzettségük növelésére, vagyis humán tőke felhalmozására (I_t^H) is fordíthatják, így a humán tőke szintje is növelhető, de mivel a tudásuk elavulhat, illetve egy idő után elfelejthetik, amit megtanultak, itt is számolnunk kell az amortizációs rátával, ami az egyszerűség kedvéért legyen itt is δ:

$$H_{t+1} = I_t^H + (1-\delta)H_t. \tag{3.6}$$

Feltesszük, hogy a gazdaságban minden munkavállalaló h_t értékű humán tőkét birtokol, így az aggregált humán tőkeállomány $H_t = h_t L_t$. Ezt beírva a (3.2) egyenletbe a termelési függvény

$$Y_t = K_t^{\alpha}(h_t L_t)^{\varphi}(A_t L_t)^{1-\alpha-\varphi} = K_t^{\alpha} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi} L_t^{1-\alpha}.$$

A vállalat célja a (3.7) egyenlettel megadott profit maximalizálása. A vállalat w_t reálbért fizet egy munkásnak és r_t^K reálbérleti díj ellenében használhatja a bérbe vett tőkét. A humán tőkét nem tudjuk elválasztani a munkástól, aki azt a tudást birtokolja, így külön a humán tőkéről nem dönt a vállalat, csak a munkások számáról, és nem is fizet érte külön a vállalat, hanem a reálbér foglalja magában ezt az összeget is.

$$profit_t = Y_t - w_t L_t - r_t^K K_t \tag{3.7}$$

$$profit_t = K_t^{\alpha} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi} L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - r_t^K K_t$$

A döntési változók szerint deriválva a profitot megkapjuk a vállalat elsőrendű feltételeit. A (3.9) szerint optimumban egy pótlólagos munkaegységből származó termelés (a munka határterméke, MPL_t) megegyezik a munkásnak fizetett reálbérrel, illetve a (3.11) szerint egy pótlólagos tőkeegységből származó termelés (a tőke határterméke, MPK_t) megegyezik a tőkéért fizetett reálbérleti díjjal. Látható, hogy a reálbér annál magasabb, minél több humán tőkét birtokol a munkás.

$$\frac{\partial profit_t}{\partial L_t} = K_t^{\alpha} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi}(1-\alpha)L_t^{-\alpha} - w_t = 0$$

$$K_t^{\alpha} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi}(1-\alpha)L_t^{-\alpha} = w_t \tag{3.8}$$

$$MPL_t = w_t \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial profit_t}{\partial K_t} = \alpha K_t^{\alpha-1} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi} L_t^{1-\alpha} - r_t^K = 0$$

$$\alpha K_t^{\alpha-1} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi} L_t^{1-\alpha} = r_t^K \tag{3.10}$$

$$MPK_t = r_t^K \tag{3.11}$$

A (3.8) és a (3.10) képletekből kiszámítható a teljes munkaköltség (vagy a fogyasztó oldaláról nézve teljes munkajövedelem) és a teljes tőkeköltség (teljes tőkejövedelem). A (3.12) és a (3.13) szerint a munkajövedelem aránya a teljes jövedelmen belül a munka kitevőjével egyezik meg $(1-\alpha)$, a tőkejövedelem aránya pedig hasonlóképpen a tőke kitevőjével (α) egyenlő (lásd 1. feladat). Eszerint a jövedelemarányok ugyanakkorák maradtak, mint az alap Solow-modellben, nem változtak meg a humán tőke ilyen módú beépítésével. Mankiw, Romer és Weil (1992) becslése szerint a fizikai és a humán tőke kitevője is körülbelül $1/3$.

$$w_t L_t = K_t^{\alpha} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi}(1-\alpha)L_t^{1-\alpha} = (1-\alpha)Y_t \tag{3.12}$$

$$r_t^K K_t = \alpha K_t^{\alpha} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi} L_t^{1-\alpha} = \alpha Y_t \tag{3.13}$$

Fogyasztó

A fogyasztó jövedelmet munkával és tőkéjének bérbeadásával szerezhet, melynek konstans $0 < s < 0$ hányadát minden periódusban megtakarítja, a többit pedig fogyasztási cikkek vásárlására fordítja. A reprezentatív fogyasztó felelős a fizikai és a humán tőke felhalmozásáért és pótlásáért, így megtakarításából mindkettőt finanszírozza, vagyis

$$s = s_K + s_H,$$

ahol $0 < s_K < 1$ a fizikai tőke, $0 < s_H < 1$ pedig a humán tőke megtakarítási vagy beruházási rátája. A fogyasztási és megtakarítási függvény eszerint

$$C_t = (1 - s_K - s_H)Y_t, \tag{3.14}$$

$$S_t = (s_K + s_H)Y_t. \tag{3.15}$$

Piacok

A vállalat illetve a fogyasztó a piacokon kerülnek egymással kapcsolatba, melyeken a kereslet és a kínálat egyenlősége mellett alakul ki az egyensúly.

1. *Árupiac*. A vállalat felkínálja az előállított terméket, a fogyasztó pedig fogyasztási és beruházási céllal vásárolja azt meg:

$$Y_t = C_t + I_t^K + I_t^H. \tag{3.16}$$

2. *Humán tőkével bővített munkapiac*. A fogyasztók felkínálják munkaerejüket (L_t^S) és azzal együtt tudásukat is, amit a vállalat felhasznál a termelés során (L_t^D):

$$L_t^S = L_t^D.$$

3. *Fizikai tőke piaca*. A fogyasztók felkínálják az általuk birtokolt fizikai tőkét (K_t^S), amit a vállalat felhasznál a termelés során (K_t^D):

$$K_t^S = K_t^D.$$

4. *Kölcsönözhető források (vagyoneszközök) piaca*. A beruházásokat megtakarításokból finanszírozzák:

$$s_K Y_t = I_t^K, \tag{3.17}$$

$$s_H Y_t = I_t^H. \tag{3.18}$$

3.2. A modell dinamikája és egyensúlya

Ha ismertek az induló értékek (K_0, H_0, L_0, A_0), akkor a (3.2)–(3.6), (3.8), (3.10), (3.14), (3.15), a (3.17) és a (3.18) egyenletek segítségével a modell bármelyik periódusának endogén vátozói kiszámíthatók.

Az előző fejezetben megmutattuk, hogy állandósult állapota csak a hatékonysági egységre jutó változóknak van, az egy főre jutó, illetve az aggregált változók pedig konstans ütemben növekednek az egyensúlyi növekedési pályán a Solow-modellben. Ez a megállapítás fennáll ebben a modellben is, bizonyítását hasznos gyakorlatként az Olvasóra bízzuk. Vizsgáljuk meg emiatt a modell dinamikáját a hatékonysági egységre jutó változók segítségével!

A modell dinamikája

Jelöljük hullámvonallal a hatékonysági egységre jutó változókat, és definiáljuk úgy, mint az alap Solow-modellben:

$$\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}!$$

A szereplők magatartási egyenletei és a piaci egyensúlyok könnyen átírhatók hatékonysági egységre jutó változókra. Leosztva a (3.2) egyenletet a hatékony munkaerő egységével ($A_t L_t$-vel) a termelési függvény fajlagos változókkal felírt formája

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi}. \tag{3.19}$$

A modell dinamikáját a (3.5) és a (3.6) fizikai és humán tőkefelhalmozási korlát segítségével adhatjuk meg, melyek hatékonysági egységekkel felírt verziója a (3.20) és a (3.21):

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(i_t^K + (1-\delta)\tilde{k}_t), \tag{3.20}$$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(i_t^H + (1-\delta)\tilde{h}_t). \tag{3.21}$$

A hatékonysági egységre jutó fizikai tőke beruházást a hatékonysági egységre jutó jövedelem konstans s_K hányadából finanszírozzák, a humán tőkéjét pedig a jövedelem s_H hányadából. Ezt, illetve a (3.19) termelési függvényt felhasználva a (3.22) és a (3.23) *mozgásegyenletekhez* jutunk, melyekkel meghatározható a következő periódus fajlagos fizikai és humán tőkeállománya a jelenbeli értékeik és a paraméterek függvényében:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t), \tag{3.22}$$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{h}_t). \tag{3.23}$$

Egy két egyenletből álló elsőrendű differeciaegyenlet-rendszert kaptunk, így a modell dinamikájának meghatározása kissé bonyolultabbá válik, mint az alap Solow-modellben, hiszen a következő periódus hatékonysági egységre jutó fizikai illetve humán tőkéjének meghatározásához ismernünk kell mindkét típusú tőke jelenbeli mennyiségét. A könnyebb értelmezhetőség miatt alakítsuk át az egyenleteket a következőképpen:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t\right), \tag{3.24}$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left(s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+\delta+ng)\tilde{h}_t\right)! \tag{3.25}$$

Az egyenletek bal oldala a hatékonysági egységre jutó fizikai illetve humán tőke növekményét mutatja, a jobb oldal pedig a beruházást, amivel elősegíthető a növekedésük, illetve a népességnövekedés, a technikai haladás és az amortizáció miatt pótolni szükséges mennyiséget. Szimulációval (lásd a 3.5 fejezetben) megmutatható, hogy bármilyen hatékonysági egységre jutó értékekről indítjuk is a gazdaságot, az adott paraméterek mellett mindig ugyanabba az egyensúlyi pontba konvergál, ahol a hatékonysági egységre jutó értékek nem változnak tovább, felveszik állandósult állapotbeli értéküket. Ott lesz tehát egyensúlyban a gazdaság, ahol a hatékonysági egységre jutó fizikai és humán tőkállomány értéke konstanssá válik, vagyis teljesül, hogy

$$\Delta\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = 0,$$

$$\Delta\tilde{h}_t = \tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}_t = 0.$$

Állandósult állapotban így a (3.24) és a (3.25) mozgásegyenletekből adódik a (3.26) és a (3.27) összefüggés. Ábrázoljuk ezeket egy *fázisdiagramon* a dinamika elemzéséhez!

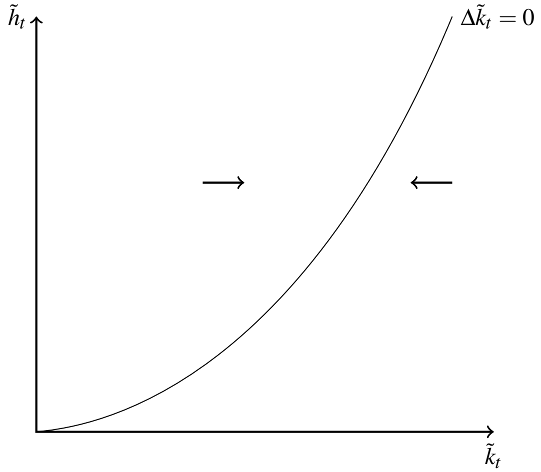
$$\Delta\tilde{k}_t = 0 \quad \rightarrow \quad s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t = 0 \tag{3.26}$$

$$\Delta\tilde{h}_t = 0 \quad \rightarrow \quad s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} - (n+g+\delta+ng)\tilde{h}_t = 0 \tag{3.27}$$

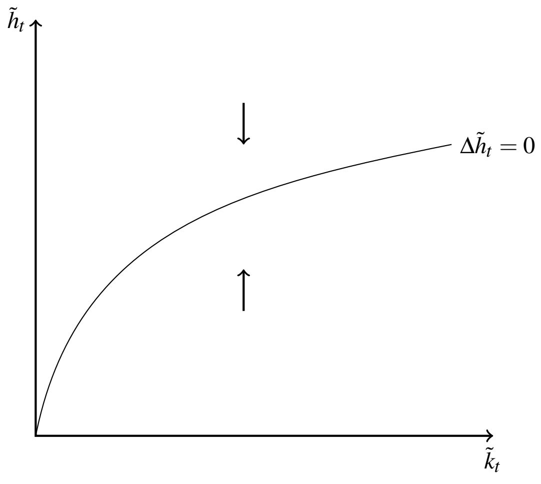
A lehetséges egyensúlyi pontokat könnyen felrajzolhatjuk egy megfelelő koordinátarendszerben. Legyen a függőleges tengelyen a humán tőke, a vízszintesen pedig a fizikai tőke hatékonysági egységre jutó értéke! Ha átrendezzük a függőleges tengelyen lévő $\tilde{h}_t$-re a (3.26) egyenletet, akkor a 3.2 ábrán ez a függvény – ha feltesszük, hogy a humán és a fizikai is tőke sem lehet negatív – az origóból indul, pozitív meredekségű és konvex:

$$\tilde{h}_t = \left[\left(\frac{n+g+\delta+ng}{s_K} \cdot \tilde{k}_t^{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{\varphi}}. \tag{3.28}$$

Ezek azok a pontok, melyeken a fajlagos tőkeállomány nem változik, vagyis a lehetséges állandósult állapotokat mutatja. A görbétől balra, vagyis túl alacsony fajlagos tőkeállomány esetén $\Delta\tilde{k}_t > 0$, tehát a $\tilde{k}_t$ növekszik, túl magas indulóértéknél pedig $\Delta\tilde{k}_t < 0$, így $\tilde{k}_t$ csökken (erre utalnak az ábrán a nyilak).



3.2. ábra. A fizikai tőke állandósult állapotban



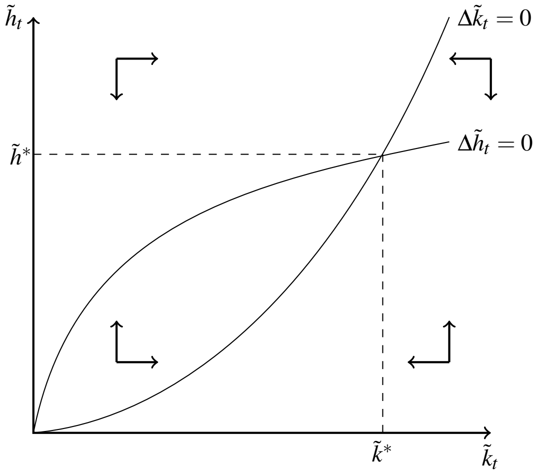
3.3. ábra. A humán tőke állandósult állapotban

Hasonlóképpen átrendezve a (3.27) egyenletet $\tilde{h}_t$-re

$$\tilde{h}_t = \left[\left(\frac{s_H}{n+g+\delta+ng} \cdot \tilde{k}_t^{\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{1-\varphi}}. \tag{3.29}$$

Ez utóbbi egy origóból induló, pozitív meredekségű és konkáv függvényként jelenik meg a 3.3 ábrán, és azokat a pontokat mutatja, ahol a fajlagos humán tőke nem változik. A görbe alatt, vagyis túl alacsony hatékonysági egységre jutó humán tőke esetén a $\Delta\tilde{h}_t > 0$, vagyis $\tilde{h}_t$ növekszik, túl magas indulóértéknél pedig $\Delta\tilde{h}_t < 0$, így $\tilde{h}_t$ csökken.

Tegyük egy koordináta-rendszerbe a (3.28) és a (3.29) függvényeket, illetve rajzoljuk be újra a nyilakat is a megfelelő mozgási irányok megjelenítése miatt! A 3.4 ábrán látható a humán tőkével bővített modell fázisdiagramja, ahol a két görbe metszéspontjában kerül egyensúlyba a gazdaság $\tilde{k}^*$ és $\tilde{h}^*$ értékek mellett. Látható, hogy ha a fajlagos változók a nyilaknak megfelelően változnak periódusról periódusra, akkor bármelyik pontból indítva az elemzést, azok mindig az egyensúly felé konvergálnak.



3.4. ábra. Fázisdiagram a humán tőkével bővített Solow-modellben

Állandósult állapot

A (3.26) – (3.27) egyenletrendszet megoldva megkapjuk a hatékonysági egységre jutó fizikai és humán tőke állandósult állapotbeli értékét a paraméterek függvényében:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s_K^{1-\varphi} s_H^{\varphi}}{n+g+\delta+ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}, \tag{3.30}$$

$$\tilde{h}^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{n+g+\delta+ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}. \tag{3.31}$$

Az egyenletek alapján megállapítható, hogy ha a jövedelem nagyobb hányadát fordítják fizikai tőke beruházásra, az nem csak a fizikai, de a humán tőke egyensúlyi értékét is növeli. Ez annak a következménye, hogy több fizikai tőkével magasabb kibocsátásra képesek a vállalatok, a magasabb jövedelem miatt pedig nagyobb összeg jut a humán tőke felhalmozására, még akkor is, ha s_H konstans. Hasonlóképpen a humán tőke beruházási rátájának növelése is pozitívan hat mindkét típusú tőkeállományra.

A kapott egyensúlyi értékeket a (3.19) termelési függvénybe helyettesítve a hatékonysági egységre jutó kibocsátás:

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s_K}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_H}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}, \tag{3.32}$$

miszerint – hasonlóképpen, mint az alap Solow-modellben – abban a gazdaságban magasabb ceteris paribus a jövedelem, ahol a jövedelem nagyobb hányadát fordítják beruházásra a gazdaság szereplői. Ebben a modellben ez mindkét beruházási rátára igaz. Ezt felhasználva a következőképpen fejezhető ki az egy főre eső kibocsátás:

$$y_t = A_t \left(\frac{s_K}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_H}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}},$$

a (3.33) egyenlet pedig annak logaritmizált verzióját mutatja:

$$\begin{aligned} \ln y_t = \ln A_t &+ \frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}\left(\ln s_K - \ln(n+g+\delta+ng)\right) \\ &+ \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}\left(\ln s_H - \ln(n+g+\delta+ng)\right). \end{aligned} \tag{3.33}$$

A (3.33) egyenlet alapján az egy főre jutó kibocsátás fizikai tőke beruházási rátája szerinti rugalmassága $\alpha/(1-\alpha-\varphi)$, vagyis a ráta 1%-kal való növelése esetén ceteris paribus az egy főre eső kibocsátás $\alpha/(1-\alpha-\varphi)$ %-kal emelkedik. Emlékeztetőül, az alap Solow-modellben $\alpha/(1-\alpha)$ volt a rugalmasság. A humán tőke beruházási rátája szerinti rugalmassága pedig $\varphi/(1-\alpha-\varphi)$, így ha ez a ráta nő 1%-kal, akkor az az egy főre eső kibocsátás $\varphi/(1-\alpha-\varphi)$ %-os növekedéséhez vezet. Végül a pótláshoz tartozó rugalmasság $-(\alpha+\varphi)/(1-\alpha-\varphi)$, ami az alap Solow-modellben $-\alpha/(1-\alpha)$ volt. Ha $\alpha = \varphi = 1/3$ értékekkel számolunk, akkor a 3.1 táblázat alapján látható, hogy a humán tőke beépítésével abszolút értékben sikerült megemelni a rugalmasságok értékét, vagyis megoldottuk az alap modell egyik problémáját, a hatások mértékének alulbecslését.

Mankiw, Romer és Weil (1992) egy 98 országból álló mintán a (3.33) egyenlet alapján készített becslést a modellhez. A humán tőke beruházási rátájának számszerűsítéséhez egy proxyt használtak, mely a középiskolába beiratkozottak aránya az iskoláskorú népességen belül. A 3.2 táblázatban láthatóak az alap- illetve a humán tőkével bővített

	Alapmodell	Humán tőkével bővített modell
s_K	0,5	1
s_H	–	1
$n+g+\delta+ng$	-0,5	-2

3.1. táblázat. Rugalmasságok az alap és a humán tőkével bővített modellben

modellre felírt regressziók eredményei, ahol az α és φ sorok azok eredmények implikálta értékét tartalmazzák[1].

F	Alapmodell	Humán tőkével bővített
Konstans	5,48 (1,59)	6,89 (1,17)
$\ln s_K$	1,42 (0,14)	0,69 (0,13)
$\ln s_H$	–	0,66 (0,07)
$ln(n+g+\delta+ng)$	-1,97 (0,56)	-1,73 (0,41)
$\overline{R}^2$	0,59	0,78
α	0,59	0,31
φ	–	0,28

3.2. táblázat. A becslések eredményei (zárójelekben a standard hibákkal). A függő változó mindkét esetben az egy munkaképes korúra jutú GDP logaritmusa 1985-ben. Forrás: Mankiw, Romer és Weil (1992).

Ha α a tőkejövedelem teljes jövedelmen belüli aránya, akkor annak $1/3$ körülinek kellene lenni az empíria alapján, azonban az alapmodell majdnem $2/3$-nak becsülte az adatok alapján, ami túl sok. A humán tőkével bővített modell jobban illeszkedik az adatokra. Nem csak az elég magas korrigált R^2 miatt, hanem a közelítőleg megfelelő

[1] Például az $\ln s_K$ együtthatójára kapott 1,42-es érték alapján

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = 1,42 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0,59.$$

α és φ értékek miatt is. A humán tőkével való bővítés tehát közelebb hozta a modell eredményeit a valósághoz az alapmodellhez képest.

Egyensúlyi növekedési ütemek

Azt már láttuk, hogy a hatékonysági egységre jutó értékek egyensúlyban nem változnak, és a paraméterek segítségével meghatározható az állandósult állapotuk. Nézzük meg, hogy mitől függ a többi változó hosszú távú növekedése az egyensúlyi növekedési pályán (lásd 3. feladat)!

Felhasználva azt, hogy a fajlagos változók egyensúlyban konstansok, illetve az egy főre eső változók definícióját, megmutatható, hogy minden egy főre eső változó ($y_t, k_t, h_t, c_t, i_t^K, i_t^H$) – úgy, mint az alap Solow-modellben, hiszen ugyanúgy definiáltuk az egy főre eső értékeket – $1+g$ ütemben nő:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{\tilde{k}_{t+1}A_{t+1}}{\tilde{k}_t A_t} = 1+g.$$

Hasonlóképpen látható, hogy az aggregált változók ($Y_t, K_t, H_t, C_t, I_t^K, I_t^H$) egyensúlyi növekedési üteme – mint az alapmodellben – $(1+g)(1+n)$:

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{k_{t+1}L_{t+1}}{k_t L_t} = (1+g)(1+n).$$

A munka illetve a tőke reálárának változása szintén nem módosult az alapmodellhez képest, annak ellenére sem, hogy a reálbér illetve a reálbérleti díj is pozitívan függ az új elem, a humán tőke szintjétől ((3.8) és (3.10) egyenletek alapján). Így a reálbér a technikai haladásnak megfelelő, $1+g$ ütemben növekszik, a reálbérleti díj pedig konstans:

$$\frac{w_{t+1}}{w_t} = \frac{K_{t+1}^{\alpha} h_{t+1}^{\varphi} A_{t+1}^{1-\alpha-\varphi}(1-\alpha)L_{t+1}^{-\alpha}}{K_t^{\alpha} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi}(1-\alpha)L_t^{-\alpha}} = 1+g,$$

$$\frac{r_{t+1}^K}{r_t^K} = \frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} h_{t+1}^{\varphi} A_{t+1}^{1-\alpha-\varphi} L_{t+1}^{1-\alpha}}{\alpha K_t^{\alpha-1} h_t^{\varphi} A_t^{1-\alpha-\varphi} L_t^{1-\alpha}} = 1.$$

Érdekes következtetésre juthatunk, ha kiszámítjuk a reálbérleti díj állandósult állapotbeli értékét is, miután láttuk, hogy egyensúlyban nem változik. A (3.10) összefüggés átalakítható a (3.34) alakra:

$$r_t^K = \alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} \tilde{h}_t^{\varphi}. \tag{3.34}$$

Behelyettesítve a (3.30) és a (3.31) alapján a hatékonysági egységre jutó fizikai és humán tőke egyensúlyi értékét a (3.35) reálbérleti díjat kapjuk állandósult állapotban:

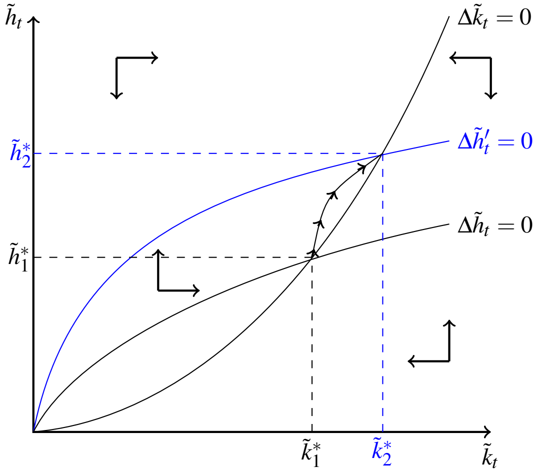
$$r_t^K = \alpha \frac{n+g+\delta+ng}{s_K}. \tag{3.35}$$

Egyrészt látható, hogy nem függ a humán tőke beruházási rátájától, másrészt pedig megmutatható, hogy pontosan ugyanakkora, mint az alap Solow-modellben (lásd 3/c feladat). Egyensúlyban tehát annál magasabb a tőke után fizetett reálbérleti díj, minél alacsonyabb a fizikai tőke megtakarítási rátája, és minél magasabb a pótlásra szoruló hányada, ugyanis ekkor ceteris paribus kisebb a tőkeállomány, ami magasabb határterméket és így magasabb bérleti díjakat implikál.

Megmutattuk, hogy a beruházási ráták itt is kulcsfontosságúak az elérhető jövedelem szempontjából, ezért a következő fejezetben nézzük meg, hogyan reagál a gazdaság azok megváltozására!

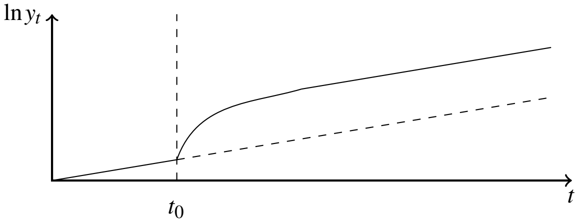
3.3. A beruházási ráták változásának hatása

Tegyük fel, hogy egy már egyensúlyi növekedési pályán haladó gazdaságban sikerül elérni, hogy a gazdaság szereplői tartósan megemeljék a jövedelmükből oktatásra költött összeget! Ekkor a 3.5 ábrán lévő fázisdiagramon a $\Delta\tilde{h}_t = 0$ görbe felfelé tolódik (kék görbe).



3.5. ábra. A humán tőke beruházási rátájának növekedése

A változás bekövetkeztekor a régi egyensúlyi pontban áll a gazdaság $(\tilde{k}_1^*, \tilde{h}_1^*)$, ami az új $\Delta\tilde{h}_t' = 0$ görbe alatt helyezkedik el, így – ahogy a nyilak mutatják – a fajlagos humán tőke értéke növekedni kezd. Mivel a $\Delta\tilde{k}_t = 0$ görbére nincs hatással a változtatás, az nem tolódott el, viszont így s_H megemelkedésének idején a gazdaság aktuális pontja ezen a görbén található. Ez azt jelenti, hogy a sokk periódusában a fizikai tőke hatékonysági egységre jutó értéke nem változik, csak a humán tőke kezd el növekedni. Ezzel átkerül a gazdaság az ábrán abba a negyedbe, ahol már mindkét változó növekszik és az új egyensúlyi pontba konvergál $(\tilde{k}_2^*, \tilde{h}_2^*)$, ahol mindkét változó értéke magasabb lesz, mint a korábbi egyensúlyban. Ez azzal indokolható, hogy a sokk bekövetkeztekor a gazdaság szereplői jövedelmük nagyobb hányadát fordítják humán tőke beruházásra, azonnal megemelve ezzel a humán tőke értékét. Így a következő periódusban a magasabb humán tőke magasabb jövedelmet biztosít, amiből konstans fizikai tőke beruházási ráta mellett is több fizikai tőke halmozható fel. Az alkalmazkodási periódus alatt a hatékonyági egységre jutó jövedelem folyamatosan növekszik, illetve átmenetileg az egy főre eső jövedelem növekedése felgyorsul, és az egyensúlyi $(1+g)$ ütemnél gyorsabban fog emelkedni a szintje. Ahogy a 3.6 ábrán látszik, a jövedelemből oktatásra költött összeg növelésével csak ideiglenesen lehet elérni gyorsabb gazdasági növekedést a változtatás (t_0) után, míg hosszú távon újra a technikai haladással megegyező ütemben nő az egy főre eső kibocsátás.



3.6. ábra. Az egy főre eső kibocsátás alakulása s_H tartós növelése esetén

A fogyasztás változása a beruházási ráta növelésének hatására nem egyértelmű, mint ahogy azt az alapmodellben is láttuk. A sokk periódusában a jövedelemből kisebb hányad marad a fogyasztásra, így akkor visszaesik a fajlagos fogyasztás, majd a jövedelem növekedése miatt emelkedni kezd, de az új állandósult állapotban értéke bármekkora lehet a korábbi egyensúlyhoz képest. A következő fejezetben keressük meg azokat a beruházási rátákat, melyek mellett maximális fogyasztás biztosítható!

3.4. Aranyszabály

Az aranyszabály maximális fogyasztást biztosító egyensúlyi növekedési pálya. A fajlagos fogyasztás a hatékonysági egységre jutó jövedelem azon része, melyet nem beruházásra fordítottak, így állandósult állapotban

$$\tilde{c}^* = (1 - s_K - s_H)\tilde{y}^*,$$

melybe behelyettesítve a (3.32) egyenletet

$$\tilde{c}^* = (1 - s_K - s_H)\left(\frac{s_K}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{s_H}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}.$$

Látható, hogy akár a fizikai, akár a humán tőke beruházási rátáját növeljük, mindkettőnek van pozitív (a jövedelmen keresztül) és negatív hatása (a csökkenő fogyasztási hányad miatt) a fogyasztásra. Maximalizálva a fajlagos fogyasztást s_K és s_H szerint azt kapjuk, hogy akkor biztosítható egyensúlyban a legmagasabb fogyasztás, ha $s_K = \alpha$ és $s_H = \varphi$ (lásd 2. feladat). Eszerint a fizikai tőke aranyszabály szerinti beruházási rátája a fizikai tőke termelési rugalmasságával egyezik meg, a humán tőke beruházási rátája pedig a humán tőke termelési rugalmasságával egyenlő. Az alap Solow-modellben ugyanerre a következtetésre jutottunk a fizikai tőke megtakarítási rátáját illetően, így ebben sincs különbség a két modell között.

3.5. Konvergencia

A dinamika vizsgálatakor egy két egyenletből álló differenciaegyenlet-rendszert vezettünk le, mellyel bonyolultabbá vált a konvergencia vizsgálata az egyensúly felé az alap Solow-modellhez képest. Készítsünk egy szimulációt annak vizsgálatára, hogy adott indulóértékekből hogyan érhető el az állandósult állapot a humán tőkével bővített modellben!

Legyenek a modell paraméterei a következők Sorensen és Whitta-Jacobsen (2005) példája alapján:

$$\alpha = \varphi = \frac{1}{3}$$
$$s_K = 0,2$$
$$s_H = 0,15$$
$$\delta = 0,06$$
$$n = 0$$
$$g = 0,015!$$

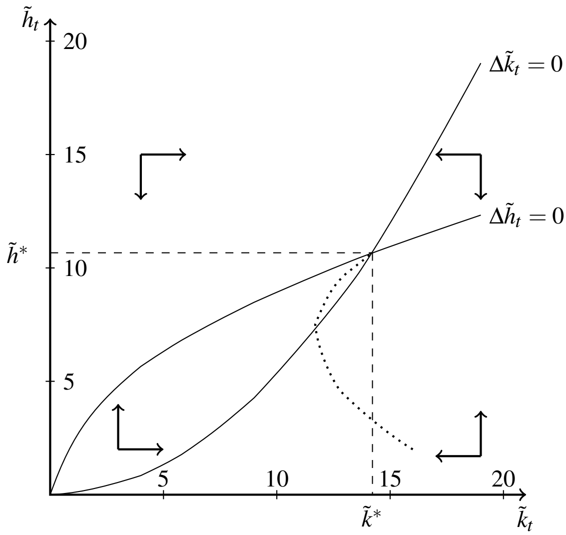
A (3.30) és a (3.31) képletek alapján kiszámítható az adott paraméterek mellett elérhető állandósult állapot, ami ebben a példában

$$\tilde{k}^* = 14,22,$$
$$\tilde{h}^* = 10,67.$$

A kezdeti értékek, ahonnan a vizsgálatot indítjuk legyenek $\tilde{k}_0 = 16$ és $\tilde{h}_0 = 2$, és használjuk a (3.22) és a (3.23) mozgásegyenleteket a következő periódusok értékeinek meghatározására:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t),$$
$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{h}_t)!$$

A 3.7 ábrán látható a változók mozgása a kiinduló ponttól az állandósult állapotig. A fizikai tőke indulóértéke túl magas, a humán tőkéjé pedig túl alacsony az egyensúlyhoz képest. Így abból a negyedből indulunk az ábrán, ahol a nyilak alapján a fizikai tőkének csökkeni, a humánt tőkének pedig növekednie kell periódusról periódusra. Az ábrán lévő pontok azokat a tőkekombinációkat mutatják, melyek a gazdaságot jellemzik az alkalmazkodási időszakban. A fizikai tőke addig csökken, a humán tőke pedig addig nő folyamatosan, míg el nem éri a gazdaság a $\Delta\tilde{k}_t = 0$ görbét. Abban a periódusban, mikor ez megtörténik, a fizikai tőke nem változik, hiszen egy olyan ponton áll a gazdaság, ahol a fajlagos fizikai tőke konstans, így csak a humán tőke szintje emelkedik tovább. Emiatt a következő periódustól átkerül a gazdaság az ábrán a két görbe által határolt területre, ahol mindkét érték növekszik. A humán tőke mellett a fizikai tőke szintje is emelkedni kezd, míg el nem érik a gazdaság állandósult állapotát a két görbe metszéspontjában.



3.7. ábra. Fázisdiagram a humán tőkével bővített Solow-modellben

A konvergencia tehát nem annyira egyértelmű, mint az alap Solow-modellben, ugyanis a fázisdiagramon át is léphetnek a változók az egyes negyedekből egy másikba, megváltoztatva azzal az addigi mozgásuk irányát, mint ahogy a példában láttuk. A szimuláció természetesen más indulóértékek mellett is elvégezhető, mindig ugyanabba az egyensúlyba fog tartani a gazdaság, bárhonnan is indítjuk azt (lásd 5. feladat). Így az egyensúlyi pont itt is stabilnak tekinthető, mint az alap Solow-modellben.

Kiszámítható az is, hogy milyen gyorsan közelítenek a változók az egyensúly felé, azaz mekkora a konvergencia sebessége (a számítás menetét lásd a 3.A függelékben). Hasonlóképpen, mint az alap Solow-modellben, itt is olyan sebességgel közelít az egyensúlyi növekedési pálya környezetében a fajlagos jövedelem az állandósult állapotbeli értéke felé, amely arányos az egyensúlyi értékétől vett távolsággal. Látható itt is a (3.36) egyenletben, hogy amennyiben a jelenlegi fajlagos jövedelem meghaladja az egyensúlyi értékét, akkor csökkennie kell, ellenkező esetben pedig növekszik:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = -\lambda (\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*), \tag{3.36}$$

ahol

$$\lambda = (1 - \alpha - \varphi)(n + g + \delta). \tag{3.37}$$

Az alap Solow-modellben $\lambda = (1 - \alpha)(n + g + \delta)$ volt, ami túl gyorsnak bizonyult az empíriához képest. A humán tőkével bővített modell ennél kisebb értéket adott, vagyis lassabb konvergenciát feltételez. Nézzük meg újra a Solow-modellnél is vett példát, ahol a paraméterértékek $n = 0,01, g = 0,02, \delta = 0,03$ illetve $\alpha = 1/3$, és φ legyen szintén $1/3$! Az alapmodell szerint λ ekkor 0,04, vagyis a fajlagos jövedelem periódusonként az állandósult állapottól vett távolság 4%-ával közelít az egyensúlyi ponthoz. Ezzel szemben a humán tőkével bővített modellben $\lambda = 0,02$.

Mankiw, Romer és Weil (1992) az előző fejezetben már említett három mintán (98 ország, ahol nem az olajkitermelés a domináns ágazat, szűrt minta 75 országgal, végül 22 OECD tagállam) rendre a következő λ értékeket becsülte a humán tőkével bővített modellre: 0,0137, 0,0182 és 0,0203 melyek már jóval közelebb vannak a modell 0,02-es értékéhez, mint az alapmodell becslésének eredményei a 0,04-hez. Sikerült tehát a konvergencia sebességének problémáját is megoldani a bővítéssel. Ebben a modellben az adott paraméterek mellett körülbelül 35 periódus alatt teszi meg az állandósult állapothoz vezető út felét a gazdaság[2], míg az alapmodellben csak 17 periódust számoltunk.

Mankiw, Romer és Weil (1992) háromféle mintán tesztelte az abszolút illetve a feltételes konvergencia hipotézisét. Az előző fejezetben már láttuk, hogy az abszolút konvergencia csak homogén mintán igazolható, de többféle ország bevonásával már nem. A 3.3 táblázatban a 98 országot tartalmazó mintával kapott eredményeik láthatók.

A táblázat alapján az abszolút konvergenciát tesztelve enyhén pozitív az egy munkaképes korúra jutó GDP kezdő értékének (Y_{60}) együtthatója, a korrigált R^2 pedig közel nulla, tehát nem állapítható meg olyan tendencia, miszerint a szegényebb országok átlagosan gyorsabban növekednének mint a gazdagok.

Az alap Solow-modell alapján felírt, vagyis népességnövekedéssel és beruházási rátával bővített regresszióban már szignifikánsan negatív a kezdeti jövedelemhez tartozó koefficiens és javul a regressziófüggvény illeszkedése. Alátámasztja tehát a feltételes konvergencia elméletét, miszerint ha az országok nem különböznének a népességnövekedés és a beruházási ráta szempontjából, akkor a szegényebb országok átlagosan gyorsabb növekedést produkálnának, mint a gazdagok.

A humán tőkével bővített regresszióban tovább csökken az induló jövedelem együtthatója, és még jobban javul a regressziós egyenes illeszkedése, vagyis az országok konvergenciája erősebbnek bizonyul, mint az alapmodellben.

[2] A felezési idő kiszámításának képlete: $e^{-\lambda t} = 0,5$, melyből $-0,02t = \ln 0,5$ így $t = 34,66$.

	Abszolút konvergencia	Feltételes konvergencia (Solow)	Feltételes konvergencia (Humán tőke)
Konstans	-0,266 (0,380)	1,93 (0,83)	3,04 (0,83)
ln (Y_{60})	0,0943 (0,0496)	-0,141 (0,052)	-0,289 (0,062)
ln s_K	–	0,647 (0,087)	0,524 (0,087)
lns_H	–	–	0,233 (0,060)
$\ln(n+g+\delta+ng)$	–	-0,299 (0,304)	-0,505 (0,288)
$\overline{R}^2$	0,03	0,38	0,46

3.3. táblázat. A konvergencia tesztelésének eredményei (zárójelekben a standard hibákkal). A függő változó az egy munkaképes korúra jutó GDP logaritmusának differenciája 1960 és 1985 között. Forrás: Mankiw, Romer és Weil (1992).

3.6. Összefoglalás

1. Ebben a fejezetben a munkások tudásával bővítettük az alap Solow-modellt, amit az oktatás során sajátítottak el a gazdaság szereplői. A humán tőke egy új termelési tényezőként került a modellbe a fizikai tőke és a munka mellett. Mivel a munkavállalalóktól nem lehet különválasztani a tudásukat úgy, mint a fizikai tőkét, a vállalat nem tudta növelni a felhasználni kívánt humán tőkét a munka növelése nélkül. A humán tőkének emiatt nincs saját ára, hanem a munkapiacon kialakult bért növeli meg a magasabb iskolázottság.

2. A fogyasztók megtakarításaikból a fizikai tőke felhalmozása mellett a humán tőke bővítését is finanszírozták. Mindkét beruházási ráta pozitívan befolyásolta az állandósult állapotbeli értékeket, és adott technológia mellett az egy főre eső GDP-t is. Bármelyik rátát is növeltük, az az átmeneti időszakban felgyorsította a gazdasági növekedést, illetve mindkét típusú tőkét és a jövedelemet is megemelte. Sikerült növelni az egy munkásra eső kibocsátás népességnövekedés és beruházási ráták szerinti rugalmasságát, javítva ezzel az alap Solow-modellen, és közelebb hozva az eredményeket a valósághoz.

3. Az egyensúlyi növekedési ráták az alap Solow-modellhez képest nem változtak a bővítés ellenére sem, illetve az aranyszabály szerinti megtakarítási rátákra is a

megfelelő termelési tényező termelési rugalmasságát kaptuk, mint az előző fejezetben.

4. A modell megerősítette a feltételes konvergencia hipotézisét, miszerint kontrollálva a fizikai és humán tőke beruházási rátájára és a népességnövekedési ütemre, az alacsonyabb jövedelmű országok várhatóan gyorsabban növekednek, mint a gazdagabbak. Míg a Solow-modell a konvergencia sebességét felülbecsülte, addig a humán tőkével bővített modellel sikerült lelassítani a modellből kapott konvergenciát.

5. Bár a modell illeszkedése jónak bizonyult, és sikerült a Solow-modell becslési problémáit megoldani, a modell mégsem tökéletes. Egyrészt a beruházási ráták alakulása kulcsfontosságú a makroaggregátumok szempontjából, de azok kívülről adottak, nem a modellből határozódnak meg a szereplők dötései alapján. Másrészt a hosszú távú növekedés forrása a termelékenység fejlődése (g), mely szintén exogén és nincs megmagyarázva, pontosan mit értünk alatta.

3.7. Feladatok

1. Mutassa meg, hogy a humán tőkével bővített Solow-modellben a tőkejövedelem és a munkajövedelem GDP-hez viszonyított aránya α és $1-\alpha$, mint az alap Solow-modellben!

2. Számítsa ki a hatékonysági egységre jutó fogyasztás egyensúlyi értékét! Milyen s_K és s_H értékek mellett lesz ez maximális?

3. Egyensúlyi növekedés.

   a) Számítsa ki az egy főre jutó fizikai tőke, humán tőke és jövedelem (k_t, h_t, y_t) egyensúlyi növekedési ütemét!

   b) Számítsa ki az aggregált tőkeállomány, humán tőke és jövedelem (K_t, H_t, Y_t) egyensúlyi növekedési ütemét!

   c) Mekkora a reálbér és a reálbérleti díj egyensúlyban?

4. Fázisdiagram segítségével mutassa meg, mi történik a hatékonysági egységre jutó fizikai és humán tőkével, ha egyszerre megemelkedik a fizikai tőke beruházási rátája (s_K) és lecsökken a humán tőke beruházási rátája (s_H)!

5. Vegyük a konvergenciánál tárgyalt szimulációs példát, melyben a paraméterértékek $\alpha = \varphi = 1/3, s_K = 0,2, s_H = 0,15, \delta = 0,06, n = 0, g = 0,015$! Végezze el a szimulációt más indulóértékekkel is, és elemezze a modell dinamikáját!

6. Tegyük fel, hogy a kormány megadóztatja a jövedelmet, melynek adókulcsa τ! Továbbá minden periódusban az adóbevétel s_H^g hányadát az oktatás finanszírozására költi, a maradékot pedig kormányzati kiadásokra, és fizikai tőkébe nem

ruház be. A fogyasztó a rendelkezésre álló jövedelme s_K^p hányadát fizikai tőke, s_H^p hányadát pedig humán tőke felhalmozására fordítja. Minden más változatlan a fejezetben tárgyalt humán tőkével bővített Solow-modellhez képest. Mutassa meg hogy a fiskális politikával bővített modell megfeleltethető az eredeti modellnek, ha

$$s_K = (1-\tau)s_K^p,$$

$$s_H = \tau s_H^g + (1-\tau)s_H^p!$$

7. Építsük be másként a humán tőkét a modellünkbe! A termelési függvény legyen

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t h L_t)^{1-\alpha},$$

ahol $h = e^{\psi u}$! ψ a humán tőke termelékenységi paramétere, u pedig a munkavállalók átlagos iskolában töltött éveit mutatja (mindkettő pozitív, konstans paraméter). Így ebben a modellben az egy főre jutó humán tőke (h) konstans. A modell elemzéséhez vegyük az alábbi segédváltozókat:

$$\tilde{y}_t = \frac{y_t}{hA_t},$$

$$\tilde{k}_t = \frac{k_t}{hA_t},$$

ahol y_t és k_t az egy főre jutó változókat jelölik!

a) Írja fel a rendszer dinamikáját leíró egyenletet (haszálja a segédváltozókat)! Hasonlítsa össze az eredeti Solow-modellel!

b) Adja meg az egy főre jutó jövedelem értékét egyensúlyban!

3.A. A konvergencia sebessége

Vegyük a (3.22) és a (3.23) átmenetegyenleteket:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_K \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{k}_t),$$

$$\tilde{h}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s_H \tilde{k}_t^{\alpha} \tilde{h}_t^{\varphi} + (1-\delta)\tilde{h}_t),$$

és linearizáljuk a rendszert az állandósult állapot körül[3]:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\Big[\Big(s_K \alpha \tilde{k}^{*\alpha-1}\tilde{h}^{*\varphi} + (1-\delta)\Big)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) + \Big(s_K \tilde{k}^{*\alpha}\varphi \tilde{h}^{*\varphi-1}\Big)(\tilde{h}_t - \tilde{h}^*)\Big],$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}^* = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\Big[\Big(s_H \alpha \tilde{k}^{*\alpha-1}\tilde{h}^{*\varphi}\Big)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) + \Big(s_H \tilde{k}^{*\alpha}\varphi \tilde{h}^{*\varphi-1} + (1-\delta)\Big)(\tilde{h}_t - \tilde{h}^*)\Big]!$$

Ha kihasználjuk, hogy a változó természetes alapú logaritmusainak különbsége közelítőleg a növekedési rátával egyezik meg, vagyis

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* \approx \tilde{k}^*(\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^*),$$

$$\tilde{h}_{t+1} - \tilde{h}^* \approx \tilde{h}^*(\ln \tilde{h}_{t+1} - \ln \tilde{h}^*),$$

és behelyettesítjük, hogy $\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi}$, akkor az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^* = \frac{1}{(1+g)(1+n)}\Big[\Big(s_K \alpha \frac{\tilde{y}^*}{\tilde{k}^*} + (1-\delta)\Big)(\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*) + \Big(s_K \varphi \frac{\tilde{y}^*}{\tilde{h}^*}\Big)(\ln \tilde{h}_t - \ln \tilde{h}^*)\frac{\tilde{h}^*}{\tilde{k}^*}\Big], \tag{3.38}$$

[3] Az $y = f(x,u)$ függvény linearizálásának képlete x_0 és u_0 körül a Taylor-sorba fejtést alkalmazva:

$$f(x,u) \approx f(x_0,u_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0,u_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x_0,u_0} \cdot (u - u_0),$$

ahol $f(x_0,u_0) = y_0$, így

$$y - y_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0,u_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x_0,u_0} \cdot (u - u_0).$$

$$\ln\tilde{h}_{t+1}-\ln\tilde{h}^{*}=\frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[\left(s_H\alpha\frac{\tilde{y}^{*}}{\tilde{k}^{*}}\right)(\ln\tilde{k}_t-\ln\tilde{k}^{*})\frac{\tilde{k}^{*}}{\tilde{h}^{*}}\right.$$
$$\left.+\left(s_H\varphi\frac{\tilde{y}^{*}}{\tilde{h}^{*}}+(1-\delta)\right)(\ln\tilde{h}_t-\ln\tilde{h}^{*})\right]. \tag{3.39}$$

A modell állandósult állapotbeli értékeit felhasználva ((3.30), (3.31) és (3.32) egyenlet), meghatározhatjuk a (3.38) és a (3.39) egyenletekben lévő arányokat:

$$\frac{\tilde{y}^{*}}{\tilde{k}^{*}}=\frac{n+g+\delta+ng}{s_K},$$

$$\frac{\tilde{y}^{*}}{\tilde{h}^{*}}=\frac{n+g+\delta+ng}{s_H},$$

$$\frac{\tilde{k}^{*}}{\tilde{h}^{*}}=\frac{s_K}{s_H}.$$

Ezek behelyettesítése és egyszerűsítés után a (3.38) és a (3.39) egyenletek végső formája:

$$\ln\tilde{k}_{t+1}-\ln\tilde{k}^{*}=\frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[\Big(\alpha(n+g+\delta+ng)+(1-\delta)\Big)(\ln\tilde{k}_t-\ln\tilde{k}^{*})\right.$$
$$\left.+\Big(\varphi(n+g+\delta+ng)\Big)(\ln\tilde{h}_t-\ln\tilde{h}^{*})\right], \tag{3.40}$$

$$\ln\tilde{h}_{t+1}-\ln\tilde{h}^{*}=\frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[\Big(\alpha(n+g+\delta+ng)\Big)(\ln\tilde{k}_t-\ln\tilde{k}^{*})\right.$$
$$\left.+\Big(\varphi(n+g+\delta+ng)+(1-\delta)\Big)(\ln\tilde{h}_t-\ln\tilde{h}^{*})\right]. \tag{3.41}$$

Vezessük le a (3.40) és a (3.41) egyenletekből a hatékonysági egységre jutó jövedelem változást leíró összefüggést! Az $\tilde{y}_t=\tilde{k}_t^{\alpha}\tilde{h}_t^{\varphi}$ termelési függvény logaritmizált alakja $\ln\tilde{y}_t=\alpha\ln\tilde{k}_t+\varphi\ln h_t$, mely alapján

$$\ln\tilde{y}_{t+1}-\ln\tilde{y}^{*}=\frac{1}{(1+g)(1+n)}\left[(\ln\tilde{k}_t-\ln\tilde{k}^{*})\alpha\right.$$
$$\cdot\Big((\alpha+\varphi)(n+g+\delta+ng)+(1-\delta)\Big)$$
$$\left.+(\ln\tilde{h}_t-\ln\tilde{h}^{*})\varphi\Big((\alpha+\varphi)(n+g+\delta+ng)+(1-\delta)\Big)\right],$$

miszerint a kiemelés és behelyettesítés után

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}^* = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \Big((\alpha + \varphi)(n+g+\delta+ng) + (1-\delta) \Big)$$

$$\cdot (\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*).$$

Végül vonjunk ki az egyenlet mindkét oldalából $\ln \tilde{y}_t$-t és adjunk hozzá $\ln \tilde{y}^*$-ot:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)} \Big((\alpha + \varphi)(n+g+\delta+ng) + (1-\delta) \Big)$$

$$\cdot \Big[(\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*) + \frac{(1+g)(1+n)}{(\alpha+\varphi)(n+g+\delta+ng) + (1-\delta)} (\ln \tilde{y}^* - \ln \tilde{y}_t) \Big]!$$

Kiemelés és egyszerűsítés után a konvergencia végső összefüggése:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = \frac{1}{(1+g)(1+n)} (n+g+\delta+ng)(\alpha+\varphi-1)(\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*).$$

Ha az együttható ellentettjét λ-val jelöljük, akkor

$$\lambda = \frac{1}{(1+g)(1+n)} (n+g+\delta+ng)(1-\alpha-\varphi)$$

$$\approx (1-\alpha-\varphi)(n+g+\delta).$$

Ha az aktuális fajlagos kibocsátás magasabb az egyensúlyi értékénél, akkor negatív a növekedési ráta, vagyis csökkenni fog az egyenlet szerint, ha pedig alacsonyabb a jelenlegi szint, mint az állandósult állapotbeli, akkor a növekedési ráta pozitív, azaz növekedni fog a hatékonysági egységre eső kibocsátás. Látható tehát, hogy bármely kezdeti értékből indulva a gazdaság az egyensúlyi pont felé konvergál.

II. rész

Endogén növekedés

IV.

TERMELŐI EXTERNÁLIÁN ALAPULÓ ENDOGÉN NÖVEKEDÉS

Az előző fejezetekben levezetett Solow-féle növekedési modellek megfelelő alapot nyújtottak a növekedéselmélet kérdéseinek vizsgálatára. A humán tőkével bővített modell már elég jól visszaadta a valós adatokon végzett becslések eredményeit is, így következtetései összhangban voltak az empíriával. Fő hiányossága ezeknek a modelleknek, hogy hosszú távon a tartós gazdasági növekedést a technológia fejlődésével lehetett csak elérni, azonban ez exogén módon adott volt, és nem igazán lehetett körülhatárolni, hogy mit foglal magában. Csupán maradékelven mondtuk azt, hogy olyan termelést befolyásoló tényező növekedéséről beszélünk, ami nem fizikai tőke vagy munka, hanem valamiféle tudás, képzettség.

A könyvnek ebben a részében endogenizáljuk a termelékenység változását, vagyis a modell paramétereinek segítségével fogjuk levezetni annak értékét. Ennek köszönhetően meg tudjuk majd vizsgálni például a beruházási ráták vagy a népességnövekedés változásának nem csak a rövid, de a hosszú távú gazdasági növekedésre gyakorolt hatását is. Az endogén növekedési modellek tehát lehetőség biztosítanak az olyan gazdaságpolitikai beavatkozások egy főre jutó GDP növekedési ütemére gyakorolt hatásának vizsgálatára, melyek a modell alap paramétereit befolyásolják.

Kétféle endogén növekedési modellel fogunk megismerkedni. Az egyik megközelítés szerint a modell explicit módon megadja a technológia fejlődésének mértékét egy termelési függvény segítségével, ugyanis az új ötletek, ismeretek a kutatás és fejlesztés szektorban jönnek létre. Ezt a következő fejezetben fogjuk részletesen tárgyalni.

A másik elmélet szerint nincs külön szektor a gazdaságban, ahol a technikai haladás biztosításán dolgoznak, hanem a pozitív termelői externáliának köszönhető a termelékenység fejlődése. A gazdaság aggregált termelési függvénye így már nem konstans, hanem növekvő mérethozadékúvá válik, ami az egy főre jutó GDP folyamatos növekedését képes biztosítani exogén termelékenység-növekedés nélkül is. Ebben a fejezetben egy ilyen típusú modelt fogunk felépíteni.

4.1. A modell felépítése

A modell zárt gazdasága két reprezentatív szereplőt tartalmaz: vállalatot és fogyasztót. A vállalat termelési tényezők felhasználásával, profitját maximalizálva állít elő egyfajta terméket. Mind az előállított termék, mind a termelési tényezők árai a tökéletesen versenyző piacokon a kereslet és kínálat egyensúlyában határozódnak meg.

A fogyasztó jövedelmet munkaerejének és tőkeállományának felajánlásából szerezhet, melynek konstans hányadát fogyasztási célokra fordítja, a fennmaradó összeget pedig megtakarítja. Megtakarításaiból beruházásokat finanszíroz, mivel ő felelős az általa birtokolt tőke bővítésért és pótlásáért.

A technikai haladás már nem exogén módon adott, hanem a termelői externáliáknak köszönhető, vagyis a munka termelékenysége pozitívan függ a felhasznált tőke vagy a kibocsátás szintjétől. Az úgynevezett *learning-by-doing* típusú tudásfelhalmozás ötlete már Arrow (1962) tanulmányában is megjelent, melyben arra az empirikus megfigyelésre hivatkozott, hogy egy repülőgép vázának elkészítéséhez szükséges munkaórák száma csökkenő függvénye a korábban már előállított repülőgépvázak számának. A munkaerő egyre tapasztaltabbá, képzettebbé válik a munkavégzés során, így innováció nélkül is növekszik annak termelékenysége a termelési folyamat egyfajta melléktermékeként.

Vállalat

Exogén technikai haladás nélkül is elérhető folyamatos gazdasági növekedés, ha a termelési függvény *növekvő mérethozadékú* (Romer, 1986). Azt gondolhatnánk, hogy ez egyszerűen megoldható egy hasonló termelési függvénnyel, mint amit az előző fejezetekben is használtunk, csak egy helyett egynél nagyobbnak állítanánk be a kitevők összegét, például

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{\beta}, \qquad \text{ahol} \qquad \alpha + \beta > 1. \tag{4.1}$$

Ez azonban nem lenne tanácsos, ha a vállalat profitmaximalizálását átgondoljuk. A korábbi fejezetekben már láttuk, hogy állandó mérethozadék esetén a vállalat termelési költségei a kibocsátással arányosak, hiszen minél több terméket állított elő, annál több tőkét és munkát kellett igénybe vennie hozzá, ami növelte a költségeket. Emiatt a termelési tényezők árai azok határtermékével egyeztek meg optimumban, illetve mind a határköltségek, mind az átlagköltségek konstansok voltak.

Növekvő mérethozadék esetén a vállalat termelésének bizonyos százalékú növeléséhez nem szükséges mindkét termelési tényező ugyanolyan mértékű növelése, elég azokat kisebb mértékben bővíteni. Ekkor a határköltség és az átlagköltség is csökkenő lesz a kibocsátás függvényében, így a határköltség 0-ba tart, ha a kibocsátás a végtelenhez közelít. Adott termék- és tényezőárak mellett ennek az lenne a következménye, hogy a profitmaximalizáló vállalat végtelen mennyiségű terméket szeretne előállítani, vagyis nem lenne véges megoldása a modellnek.

A vállalat szintjén tehát meg kell őrizni a korábbi fejezetekben felsorolt *jól viselkedő* függvény feltételeit; a konstans mérethozadékot és a termelési tényezők pozitív, de csökkenő határtermékét. Vegyünk most is egy munkakiterjesztő technológiával bővített Cobb-Douglas típusú termelési függvényt, ahol a kitevők összege 1:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}, \qquad \text{ahol} \qquad 0 > \alpha > 1! \tag{4.2}$$

A modellben bemutatott vállalat kicsi a gazdaság egészéhez viszonyítva, vagyis nincs jelentős hatása a gazdasági aggregátumokra, azokat adottnak veszi. A termelékenység (A_t) már nem exogén módon növeszik, hanem feltesszük, hogy a tőkeállomány pozitív függvénye[1]:

$$A_t = K_t^{\phi}, \qquad \text{ahol} \qquad \phi > 0. \tag{4.3}$$

A pozitív irányú kapcsolat a tőke és a termelékenység között azzal indokolható, hogy a munkások új ismereteket sajátítanak el az új tőkeeszközökkel való munka során, valamint tapasztalatot szereznek a munka elvégzésével. A tőkeállomány növelése tehát önmagában közvetlenül növeli a termelést, közvetetten pedig a munkások termelékenységének fejlődésén keresztül. Ez nem csak annak a vállalatnak a javára szolgál, amely növelte a termelés során felhasználni kívánt tőkét, hanem a többire is pozitív hatással lesz hosszú távon, hiszen idővel ott is megtanulhatják az új termelési eljárásokat, illetve a munkások magukkal vihetik a megszerzett tudást más vállalatokhoz is.

Megkapjuk a gazdaság aggregált termelési függvényét, ha a (4.3) összefüggést a (4.2) termelési függvénybe helyettesítjük, vagyis érvényesítjük az externális hatást (pozitív externália):

$$Y_t = K_t^{\alpha}(K_t^{\phi} L_t)^{1-\alpha} = K_t^{\alpha+\phi(1-\alpha)} L_t^{1-\alpha}. \tag{4.4}$$

Ha $\phi > 0$, akkor a (4.4) aggregált termelési függvény növekő mérethozadékú, mert a kitevők összege 1-nél nagyobb, vagyis ha konstans (c) szorosára növeljük a tőkét és a munkát is, akkor a termelés annak többszörösére nő:

$$cY_t < (cK_t)^{\alpha+\phi(1-\alpha)}(cL_t)^{1-\alpha},$$

$$cY_t < c^{1+\phi(1-\alpha)} K_t^{\alpha+\phi(1-\alpha)} L_t^{1-\alpha}.$$

Ha $\phi = 0$ lenne, visszakapnánk a technikai haladás nélküli Solow-modellt. Ha $0 < \phi < 1$, akkor az aggregált termelési függvényben a tőke csökkenő hozadékú, mert a kibocsátás tőke szerinti első deriváltja pozitív, a második pedig negatív. Ezt a verziót fogjuk majd később *szemi-endogén* növekedési modellnek nevezni. Ha $\phi = 1$, akkor a $\alpha + \phi(1-\alpha) = 1$, vagyis tőke hozadéka konstans. Erre *endogén* növekedési modellként vagy röviden AK-modellként fogunk hivatkozni. Végül ha $\phi > 1$, akkor a tőke növekvő hozadékú, ami azt jelenti, hogy a gazdasági növekedés robbanásszerű, és nem tart egyensúlyi növekedési pályához a modell. Ez utóbbival emiatt nem fogunk foglalkozni.

Empirikus becslésekkel megmutatták (lásd Sorensen és Whitta-Jacobsen, 2009), hogy a kitevők összege $[1 + \phi(1-\alpha)]$ nagyobb mint egy és körülbelül 1,1-1,5 közé esik. Ha $\alpha = 1/3$-dal számolunk, ez azt jelenti, hogy a ϕ paraméter 0,45-0,75 körüli. A termelési függvény vállalati szinten tehát maradt állandó mérethozadékú, de aggregált szinten már növekvő.

[1]Olyan felírás is létezik, mely szerint nem a tőke, hanem a kibocsátás pozitív függvénye a termelékenység (lásd 4. feladat):

$$A_t = Y_t^{\phi}.$$

A munkaerő-állomány növekedése exogén, n ütemű, a tőkeállományt pedig továbbra is beruházással lehet bővíteni, és a már meglévő tőke δ hányada minden periódusban amortizálódik:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1+n, \tag{4.5}$$

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t. \tag{4.6}$$

A reprezentatív vállalat a (4.7) egyenlettel megadott profitot maximalizálja, melyet a döntési változók szerint maximalizálva megkapjuk a vállalat elsőrendű feltételeit.

$$profit_t = Y_t - w_t L_t - r_t^K K_t \tag{4.7}$$

$$profit_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} - w_t L_t - r_t^K K_t$$

Mivel vállalati szinten nincs változás a korábbi Solow-modellhez képest, itt is azt kapjuk, hogy optimumban egy pótlólagos munkaegységből származó termelés (a munka határterméke, MPL_t) megegyezik a munkásnak fizetett reálbérrel, illetve egy pótlólagos tőkeegységből származó termelés (a tőke határterméke, MPK_t) megegyezik a tőkéért fizetett reálbérleti díjjal:

$$MPL_t = w_t, \tag{4.8}$$

$$MPK_t = r_t^K. \tag{4.9}$$

A (4.8) és a (4.9) képletek segítségével kiszámítható a teljes munkajövedelem és a teljes tőkejövedelem, melyek aránya a teljes jövedelmen belül konstans, és ugyanakkora, mint a Solow-modellben a (4.10) és a (4.11) egyenletek szerint:

$$w_t L_t = K_t{}^{\alpha} A_t^{1-\alpha}(1-\alpha)L_t^{1-\alpha} = (1-\alpha)Y_t, \tag{4.10}$$

$$r_t^K K_t = \alpha K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} = \alpha Y_t. \tag{4.11}$$

Fogyasztó

A reprezentatív fogyasztó felelős a tőke felhalmozásáért, melyet bérbeadhat a vállalatnak bérleti díj ellenében. Felkínálhatja munkaerejét is, melyért cserébe munkajövedelmet kap. Az e két forrásból szerzett jövedelem konstans $s > 0$ hányadát a fogyasztó minden periódusban megtakarítja (S_t), a fennmaradó $(1-s)$ hányadot pedig fogyasztásra (C_t) fordítja a (4.12) és a (4.13) egyenleteknek megfelelően, mint ahogy a Solow-modellben is láttuk:

$$S_t = sY_t, \tag{4.12}$$

$$C_t = (1-s)Y_t. \tag{4.13}$$

Piacok

A vállalat illetve a fogyasztó a piacokon kerülnek egymással kapcsolatba, melyeken a kereslet és a kínálat egyenlősége mellett alakul ki az egyensúly.

1. *Árupiac*. A vállalat felkínálja az előállított terméket, a fogyasztó pedig fogyasztási és beruházási céllal vásárolja azt meg:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{4.14}$$

2. *Munkapiac*. A fogyasztók felkínálják munkaerejüket (L_t^S), amit a vállalat felhasznál a termelés során (L_t^D):

$$L_t^S = L_t^D.$$

3. *Tőkepiac*. A fogyasztók felkínálják az általuk birtokolt tőkét (K_t^S), amit a vállalat felhasznál a termelés során (K_t^D):

$$K_t^S = K_t^D.$$

4. *Kölcsönözhető források (vagyoneszközök) piaca*. A beruházásokat megtakarításokból finanszírozzák:

$$S_t = I_t. \tag{4.15}$$

4.2. Szemi-endogén növekedés

Ha ismert a tőke illetve a munka indulóértéke (K_0, L_0), akkor a (4.3) - (4.6), (4.8), (4.9), (4.12), (4.13) és a (4.15) egyenletek segítségével bármely periódus endogén változóinak értéke meghatározható.

Vegyük azt az esetet, mikor $0 < \phi < 1$, vagyis a tőke csökkenő hozadékú! Definiáljuk a hatékonysági egységre eső változókat most is hullámvonallal:

$$\tilde{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t},$$

de ne feledjük, hogy A_t növekedése már nem exogén, hanem a tőkefelhalmozás mértékétől függ!

A (4.2) termelési függvény hatékonysági egységekkel felírt alakja a korábbi modellekből már ismert

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}. \tag{4.16}$$

A (4.6) tőkefelhalmozási korlát átírása már bonyolultabb, hiszen tudnunk kéne hozzá a termelékenység növekedési ütemét is, emiatt a korábbi modellektől eltérő módon fogjuk levezetni a modell egyensúlyi növekedési pályáját.

A modell dinamikája

A termelékenység növekedése termelési externáliából adódik, ami a (4.3) egyenlet alapján a következőképpen számítható ki:

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{K_{t+1}^{\phi}}{K_t^{\phi}}. \tag{4.17}$$

Mivel ez a tőke endogén növekedési ütemétől függ, határozzuk meg először azt, kezdve a hatékonysági egységre jutó tőke változását leíró egyenlet levezetésével!

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{K_t}}{\frac{A_{t+1}}{A_t}\frac{L_{t+1}}{L_t}},$$

melybe belyehettesítve a (4.5) és a (4.17) összefüggést:

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{K_t}}{\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\phi}\frac{L_{t+1}}{L_t}} = \frac{1}{1+n}\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{1-\phi}. \tag{4.18}$$

A (4.6) tőkefelhalmozási korlátot is beírva, illetve felhasználva, hogy a beruházásokat a megtakarításokból finanszírozzák, a (4.15) szerint

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{1+n}\left(\frac{sY_t+(1-\delta)K_t}{K_t}\right)^{1-\phi}$$

$$= \frac{1}{1+n}\left(s\frac{Y_t}{K_t}+(1-\delta)\right)^{1-\phi} = \frac{1}{1+n}\left(s\tilde{k}_t^{\alpha-1}+(1-\delta)\right)^{1-\phi}.$$

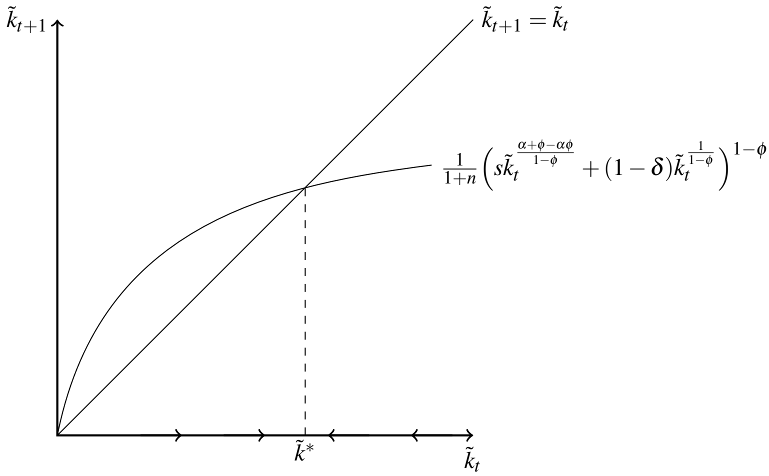
Megszorozva az egyenlet mindkét oldalát $\tilde{k}_t$-vel a fajlagos tőkeállomány *átmenetegyenletét* kapjuk meg, mely segítségével kiszámítható a következő periódus hatékonysági egységre jutó tőkeállománya a paraméterek és a jelenlegi tőkeállomány ismeretében:

$$\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t\frac{1}{1+n}\left(s\tilde{k}_t^{\alpha-1}+(1-\delta)\right)^{1-\phi}, \tag{4.19}$$

vagy kisebb átalakítás után

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(s\tilde{k}_t^{\frac{\alpha+\phi-\alpha\phi}{1-\phi}}+(1-\delta)\tilde{k}_t^{\frac{1}{1-\phi}}\right)^{1-\phi}. \tag{4.20}$$

Vegyük észre, hogy $\phi = 0$ esetén visszakapnánk a technikai haladás nélküli Solow-modell mozgásegyenletét! Ábrázoljuk a (4.20) egyenletet egy megfelelő koordinátarendszerben, hogy elemezhessük a rendszer dinamikáját! A függvény az origóból indul, ha feltesszük, hogy a fajlagos tőkeállomány nem lehet negatív, szigorúan monoton növekvő és konkáv, ahogy a 4.1 ábrán látható. A 45°-os egyenessel a pozitív tartományban csak egy metszéspontja van, mely meghatározza a gazdaság állandósult állapotát. Megmutatható, hogy bármely pontból indítjuk is a hatékonysági egységre eső tőkeállományt, az mindig a $\tilde{k}^*$ egyensúlyi pont felé tart. Túl alacsony kezdeti tőkeállomány estén a következő periódusok tőkéje egyre nagyobb, túl magas esetén pedig egyre alacsonyabb, míg el nem éri az állandósult állapotbeli értékét, ahol már nem változik tovább. Az egyensúlyi pont tehát ebben a modellben is stabil.



4.1. ábra. Egyensúly a szemi-endogén növekedési modellben

Állandósult állapot

A (4.19) egyenletbe beírva, hogy egyensúly esetén a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány nem változik, vagyis $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$, megkapjuk annak állandósult állapotbeli értékét:

$$\tilde{k}^* = \left[\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{4.21}$$

melyet a (4.16) termelési függvénybe helyettesítve a hatékonysági egységre jutó kibocsátás értéke is meghatározható a paraméterek függvényében:

$$\tilde{y}^* = \tilde{k}^{*\alpha} = \left[\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{4.22}$$

A fenti egyenletek szerint az állandósult állapotbeli fajlagos tőkeállomány és jövedelem – hasonlóképpen mint az alap Solow- és a humán tőkével bővített Solow-modellben – abban a gazdaságban magasabb, ahol ceteris paribus magasabb a beruházási ráta, és alacsonyabb a népesség növekedési üteme valamint az amortizációs ráta.

Egyensúlyi növekedési pálya

Ugyanúgy definiáltuk az egy főre eső változókat, mint a Solow-modellben, és ebben a modellben is azt kaptuk, hogy állandósult állapotban a hatékonysági egységre eső változók értéke konstans, ami így csak akkor lehetséges, ha az egy főre eső változók az egyensúlyi növekedési pályán a termelékenység növekedésének megfelelő ütemben nőnek, például

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{\tilde{k}_{t+1}A_{t+1}}{\tilde{k}_t A_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t}.$$

Míg a Solow-modellben a technikai haladás exogén módon adott volt, az egy főre eső változók is az exogén g ütemben növekedtek, vagyis nem volt igazán megmagyarázva, mivel lehet biztosítani a hosszú távú növekedésüket. Ebben a fejezetben a munka termelékenysége a tőkeállománytól függ és termelői externáliának köszönhető a növekedése, vagyis egyelőre nem ismerjük az egyensúlyi növekedési ütemét. Vezessük le, hogyan változik egyensúlyban! Ehhez vegyük a (4.18) összefüggést, és tegyük egyenlővé 1-gyel, mert a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány egyensúlyban nem változik!

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{1+n}\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{1-\phi} = 1.$$

Ebből egy gyors átrendezéssel adódik az aggregált tőkeállomány egyensúlyi növekedési üteme, mely

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}.$$

A munka hatékonyságának egyensúlyi növekedési üteme tehát

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\phi} = (1+n)^{\frac{\phi}{1-\phi}}.$$

Látható, hogy a népesség növekedési ütemétől (n), illetve az externális hatás erősségétől (ϕ) függ, vagyis sikerült endogén módon, a modell paraméterivel meghatározni azt. Megmutatható, hogy a modellben minden egy főre eső változó (y_t, k_t, c_t, i_t) a fentiek alapján $(1+n)^{\frac{\phi}{1-\phi}}$, és minden aggregált változó (Y_t, K_t, C_t, I_t) pedig $(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}$ ütemben növekszik egyensúlyban.

Az egy főre eső jövedelem hosszú távú növekedése tehát akkor biztosítható, ha pozitív a népesség növekedési rátája, illetve a modell szerint várhatóan abban a gazdaságban lesz gyorsabb, ahol nagyobb ütemben nő a népesség. Mivel az endogén növekedés eszerint az exogén népességnövekedéssel magyarázható, a modell csak félig tekinthető endogénnek, ezért *szemi-endogénként* szoktak rá hivatkozni.

A reálbérleti díj – ugyanúgy, mint a Solow-modellben – konstanssá válik az egyensúlyi növekedési pályán, a reálbér pedig a termelékenység növekekedésével megegyező ütemben változik, ami most a népességnövekedés függvénye:

$$\frac{r_{t+1}^K}{r_t^K} = \frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}(A_{t+1}L_{t+1})^{1-\alpha}}{\alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L_t)^{1-\alpha}}$$

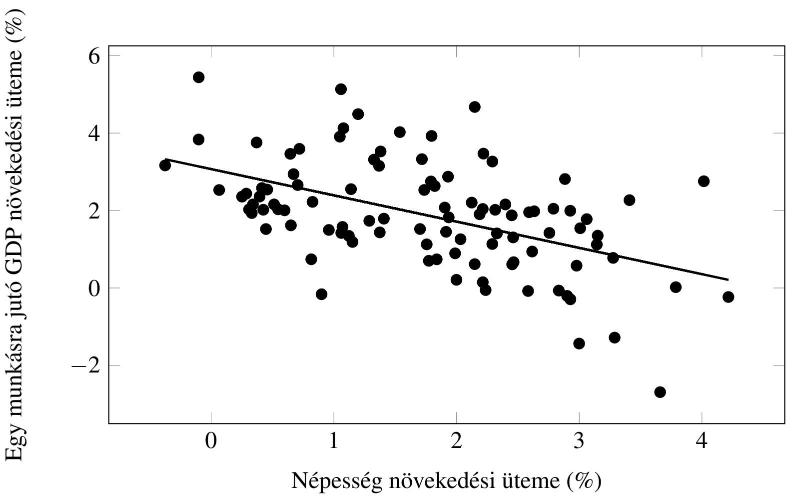
$$= (1+n)^{\frac{\alpha-1}{1-\phi}}(1+n)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{1-\phi}}(1+n)^{1-\alpha} = 1$$

$$\frac{w_{t+1}}{w_t} = \frac{K_{t+1}^{\alpha}(1-\alpha)A_{t+1}^{1-\alpha}L_{t+1}^{-\alpha}}{K_t^{\alpha}(1-\alpha)A_t^{1-\alpha}L_t^{-\alpha}}$$

$$= (1+n)^{\frac{\alpha}{1-\phi}}(1+n)^{\frac{(1-\alpha)\phi}{1-\phi}}(1+n)^{-\alpha} = (1+n)^{\frac{\phi}{1-\phi}}.$$

Empíria

Nézzük meg, hogy igazolható-e a modell eredménye empirikusan is!



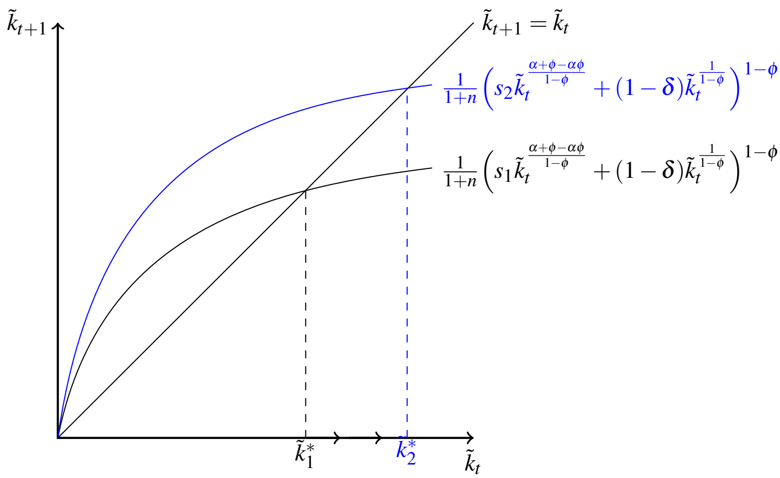
4.2. ábra. A népesség növekedési üteme és az egy munkásra jutó reál GDP növekedése közötti kapcsolat, 100 országban (1970-2014, éves átlagok). Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

A 4.2 ábrán az éves átlagos népességnövekedés és az egy munkásra eső reál GDP éves átlagos növekedési rátája közti kapcsolat látható. 100 ország adatait felhasználva nem pozitív, hanem negatív kapcsolatot mutat a két változó között az 1970 és 2014 közötti időszakban, ami ellentmond a modell következtetésének, de ez nem jelenti azt szükségszerűen, hogy a szemi-endogén növekedési modell téves.

Egyrészt nem világos, hogy a modell mekkora területet fed le amíg nem tisztázott, hogy mekkora az externális hatás. Ha a tudást át tudják venni egymástól a különböző országokban lévő vállalatok, akkor akár az egész világra is vonatkozhat, ellenkező esetben csak egy régióra vagy gazdaságra. Másrészt feltettük, hogy létezik egy egyenesúlyi növekedési pálya, mely felé a gazdaságok tartanak. Ha a konvergencia elég lassú, akkor a modell eredményeit hosszabb időtávon kell vizsgálni. Harmadrészt, ha a népesség növekedési rátája csökken, akkor a (4.20) egyenlet alapján növekszik a fajlagos tőkeállomány, míg el nem éri az új állandósult állapotát. Az átmenet időszakában ez ideiglenesen megemeli az egy főre eső GDP növekedési ütemét. Minél lassabb a konvergencia, annál tovább áll fenn ez a hatás a gazdaságban.

A megtakarítási ráta növelésének hatása

A Solow-modellben azt láttuk, hogy a megtakarítási ráta növelésével az átmenet időszakában felgyorsítható a gazdasági növekedés, mert a fajlagos tőkeállomány és kibocsátás folyamatosan emelkedik, míg el nem éri az emiatt kialakuló új, magasabb szinten lévő állandósult állapotot. A szemi-endogén növekedési modell hasonló következtetésre jut, ahogy az a 4.3 ábrán látszik.



4.3. ábra. A megtakarítási ráta növelésének hatása

A megtakarítási ráta növelésének hatására az átmenetegyenlet görbéjének meredeksége megnő, így a kiinduláskor a $\tilde{k}_1^*$ pontban lévő gazdaságban a következő periódusok fajlagos tőkeállománya ehhez képest egyre magasabb lesz, de csökkenő mértékben növekszik, míg el nem éri az új állandósult állapotot ($\tilde{k}_2^*$). A hatékonysági egységre jutó jövedelem alakulásáról ugyanez mondható el, így az egy főre eső jövedelem növekedési üteme itt is, mint a Solow-modellben csak a konvergencia időszakában emelkedik meg, elérve az egyensúlyi pályát újra a termelékenység fejlődésének ütemével egyezik meg.

A fogyasztás változása a ráta növelésének hatására itt sem egyértelmű, mint ahogy azt az előző két modellben is láttuk. A sokk periódusában a jövedelemből kisebb hányad marad a fogyasztásra, így akkor visszaesik a fajlagos fogyasztás, majd a jövedelem növekedése miatt emelkedni kezd, de az új állandósult állapotban értéke bármekkora lehet a korábbi egyensúlyhoz képest. A következő fejezetben keressük meg azt a megtakarítási rátát, mely mellett maximális fogyasztás biztosítható!

Aranyszabály

Az aranyszabály maximális egy főre eső fogyasztást biztosító egyensúlyi növekedési pálya. A fogyasztás a jövedelem azon része, melyet nem beruházásra fordítottak, így egyensúlyi növekedési pályán a (4.22) értéke alapján

$$c_t^* = (1-s)y_t^* = (1-s)\tilde{y}^* A_t,$$

$$c_t^* = (1-s)\left[\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A_t, \tag{4.23}$$

ahol $A_t = K_t^{\phi}$, vagyis $A_t = (\tilde{k}^* A_t L_t)^{\phi}$, amiből

$$A_t = (\tilde{k}^* L_t)^{\frac{\phi}{1-\phi}}.$$

Ezt beírva a (4.23) egyenletbe a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány egyensúlyi értékével együtt, az egy főre eső fogyasztás

$$c_t = (1-s)\left[\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right]^{\frac{(1-\phi)\alpha+\phi}{(1-\alpha)(1-\phi)}} L_t^{\frac{\phi}{1-\phi}}.$$

Ez utóbbit s szerint maximalizálva megkapjuk az aranyszabály szerinti megtakarítási rátát, ami

$$s_g = \alpha + \phi(1-\alpha).$$

Ebben a modellben tehát a jövedelem nagyobb hányadát kell megtakarítani a maximális egy főre eső fogyasztás eléréséhez, mint a Solow-modellben[2], de itt is a tőke termelési rugalmasságával egyezik meg az aranyszabály szerinti megtakarítási ráta (lásd (4.4) aggregált termelési függvény).

A konvergencia sebessége

A konvergencia sebessége az előző modellekben használt közelítési eljárással határozható meg (lásd 4.A Függelék). A hatékonysági egységre eső jövedelem az egyensúlyi értékétől vett távolsággal arányos sebességel közelít az állandósult állapot felé. Látható itt is a (4.24) és a (4.25) egyenletekből, hogy amennyiben a jelenlegi fajlagos jövedelem meghaladja az egyensúlyi értékét, akkor a növekedési ráta negatív, vagyis a jövedelem csökken, ellenkező esetben pedig növekszik a szemi-endogén növekedési modellben, vagyis $0 < \phi < 1$ esetén:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = -\lambda (\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*), \tag{4.24}$$

ahol

$$\lambda = (1-\phi)(1-\alpha)\frac{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - 1 + \delta}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}}. \tag{4.25}$$

Minél erősebb a termelői externália hatása, vagyis minél nagyobb ϕ, annál lassab a konvergencia a képlet szerint. Ez magyarázható azzal, hogy az aggregált termelési függvényben a tőke kitevője egyre nagyobb, ahogy ϕ tart az egyhez, emiatt a tőke csökkenő hozadéka – ami a konvergenciát biztosítja – egyre kevésbé érvényesül, így a konvergencia egyre lassul.

A $\phi = 0$ esetben visszakapnánk a technikai haladás nélküli Solow-modellben levezetett konvergencia sebességét, amit az empíria alapján túl gyorsnak találtunk. A $\phi = 1$ esetén pedig a tőke csökkenő hozadéka teljesen eltűnik, konstans hozadékúvá válik, így $\lambda = 0$ lesz, miszerint nincs konvergencia a modellben.

4.3. Endogén növekedés: AK modell

Láttuk, hogy ha $\phi \to 1$, akkor $\lambda \to 0$, vagyis egyre lassul a konvergencia a modellben. Vegyük azt az esetet, mikor $\phi = 1$! Ekkor a modell értékei folyamatosan változnak, nem állnak be bizonyos idő elteltével egyensúlyi növekedési pályára.

Ahhoz, hogy könnyebben megvizsgálhassuk, hogy tud-e hosszú távon népességnövekedés nélkül is emelkedni az egy főre jutó kibocsátás a gazdaságban, legyen $n = 0$,

[2] A Solow-modellben $s_g = \alpha$.

vagyis konstans a munkaerőállomány ($L_t = L$)! Ilyen paraméterek mellett a tőkétől függő termelékenység és a termelési függvény:

$$A_t = K_t,$$

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha} = K_t L^{1-\alpha}. \tag{4.26}$$

Az ilyen típusú modellekre, ahol a termelési függvényben konstans a tőke hozadéka *AK-modellként* szoktak hivatkozni. Az elnevezés annak köszönhető, hogy $L^{1-\alpha} \equiv A$ definícióval élve a termelési függvény átírható az

$$Y_t = AK_t \tag{4.27}$$

alakra. A jelölés zavaró lehet miután eddig A_t-vel a munka termelékenységét jelöltük, a (4.27) egyenletben pedig a konstans szorzóra utal a termelési függvényben ($A_t \neq A$). Ahhoz, hogy egyértelmű legyen a megkülönböztetés, abban az esetben, ha a termelékenységet jelöli, kitesszük a t időindexet, utalva arra, hogy a változóról beszélünk, ha pedig a szorzót az AK-modellben, akkor nem írjuk ki, jelezve, hogy az egy konstans.

A tényezőárak leegyszerűsödnek az AK-modellben, hiszen ha a reálbérleti díj a tőke határtermékével egyezik meg a profitmaximalizáló vállalat elsőrendű feltételének következtében, akkor az már nemcsak az egyensúlyban, hanem minden periódusban állandó

$$MPK_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L)^{1-\alpha} = \alpha L^{1-\alpha}$$

$$\downarrow$$

$$r_t^K = r^K = \alpha L^{1-\alpha}.$$

A munkabér a munka határtermékével egyezik meg, melynek alakulása az aggregált tőkeállomány és – mivel nincs népességnövekedés – az egy főre eső tőkeállomány növekedési ütemétől függ:

$$MPL_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha} = (1-\alpha)K_t L^{-\alpha}$$

$$\downarrow$$

$$w_t = (1-\alpha)K_t L^{-\alpha}.$$

A munkajövedelem és a tőkejövedelem aránya a teljes jövedelmen belül nem változik, még mindig α illetve $1-\alpha$, mint a korábbi modellekben.

A modell dinamikája

Könnyen megmutatható, hogy a modellben folyamatosan növekszik az egy főre eső kibocsátás. Elosztva a (4.26) termelési függvény mindkét oldalát L-lel megkapjuk az egy főre eső termelés értékét az egy főre eső tőke függvényében:

$$y_t = k_t L^{1-\alpha}, \tag{4.28}$$

vagy az AK-modellben bevezetett rövidebb jelölést használva

$$y_t = Ak_t.$$

A (4.6) tőkefelhalmozási korlátot hasonlóképpen átírhatjuk egy főre eső változókra

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t,$$

ahol $i_t = sy_t$. Beírva ebbe az egy főre eső kibocsátás értékét

$$k_{t+1} = sAk_t + (1-\delta)k_t = (sA + 1 - \delta)k_t, \tag{4.29}$$

ami átalakítások után az alábbi formákban írható fel:

$$k_{t+1} - k_t = (sA - \delta)k_t, \tag{4.30}$$

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = sA - \delta. \tag{4.31}$$

Ez utóbbi az egy főre eső tőke növekedési rátáját mutatja, mely a konstans népesség miatt az aggregált tőkeállomány növekedési rátája is. Megmutatható, hogy az egy főre eső jövedelem, fogyasztás és beruházás valamint azok aggregált értékei is ugyanekkora ütemben nőnek, illetve a munka termelékenységének fejlődése is ezzel megegyező.

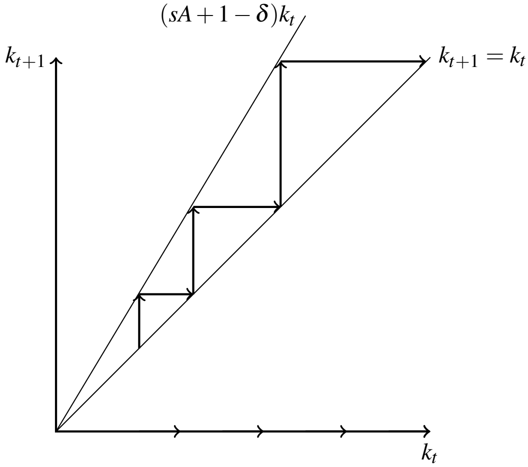
Készítsünk a modell dinamikáját leíró egyenletekhez ábrákat, hogy könnyebb legyen megérteni a modell működését! A (4.29) összefüggés a (4.4) ábrán látható, ha feltesszük, hogy $sA - \delta > 0$. Ne feledjük, hogy $A \equiv L^{1-\alpha}$ és $A \neq A_t$!

Az ábra alapján megállapítható, hogy bármely pontból is indítjuk a gazdaságot, a következő periódus egy főre eső tőkeállománya mindig nagyobb lesz, mint az azt megelőző volt, vagyis az egy főre eső értékek folyamatos növekedése biztosított a modellben.

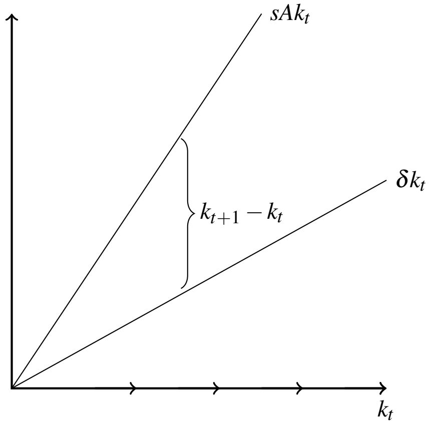
A (4.30) egyenlet ábrája a 4.5 ábra, mely alapján két egymás utáni periódus egy főre jutó tőkeállományának különbsége egyre nagyobb, ahogy nő a tőkeállomány, ami szintén a folyamatos növekedést támasztja alá.

Végül a (4.31) egyenletből kapott összefüggést a 4.6 ábra mutatja, miszerint az egy főre eső tőkeállomány növekedési rátája konstans. Ez egyrészt azt jelenti, hogy van folyamatos gazdasági növekedés, másrészt pedig azt, hogy a növekedés üteme nem csak az egyensúlyban állandó, hanem minden periódusban ugyanakkora.

Az AK-modellben tehát exogén technikai haladás és népességnövekedés nélkül is sikerült endogén módon biztosítani az egy főre eső GDP folyamatos növekedését, ami a tőke konstans hozadékából adódik.

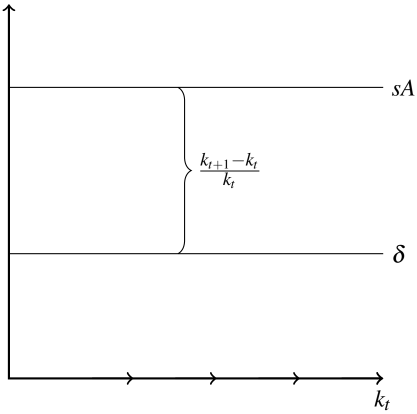


4.4. ábra. Átmenetdiagram a (4.29) összefüggéshez



4.5. ábra. Átmenetdiagram a (4.30) összefüggéshez

A (4.31) egyenlet alapján várhatóan abban a gazdaságban lesz gyorsabb a gazdasági növekedés, ahol magasabb a megtakarítási ráta, így ebben a modellben – ellentétben a korábbiakkal – már nem csak az átmenet időszakában lehet felgyorsítani a gazdaság növekedését a megtakarítási ráta emelésével, hanem hosszú távon is. Az amortizációs ráta csökkentése az endogén növekedési modellben szintén képes tartósan felgyorsítani



4.6. ábra. Átmenetdiagram a (4.31) összefüggéshez

a gazdaság növekedését, és nem csak az egyensúlyi szinteket, illetve az ideiglenes növekedési ütemeket emeli meg, mint a Solow-modellben. Mivel δ megváltozását nehéz elérni gazdaságpolitikai beavatkozáson keresztül, a megtakarítási ráta emelésének van inkább gyakorlati jelentősége. Mivel $A \equiv L^{1-\alpha}$, a modell szerint a nagyobb népességszám szintén alkalmas a permanens növekedés felgyorsítására. Nézzük meg, látunk-e hasonló összefüggéseket a valós adatokon is!

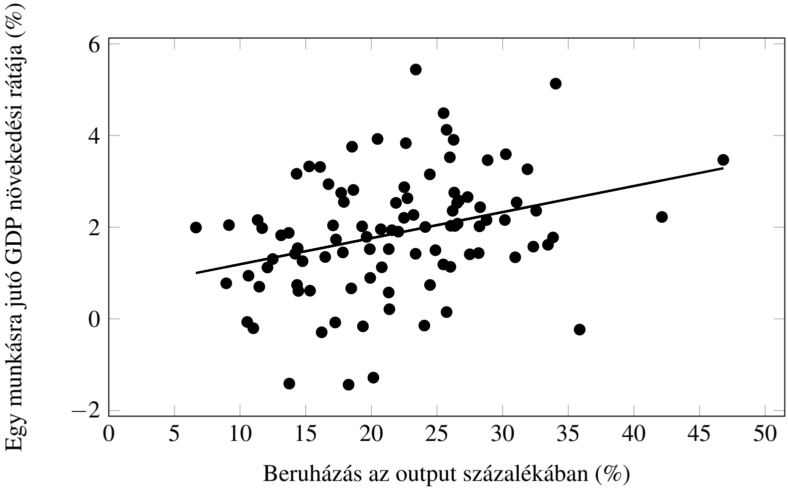
Empíria

A modell egyik fő következtetése, hogy a megtakarítási vagy beruházási ráta pozitívan hat az egy főre eső jövedelem növekedési ütemére.

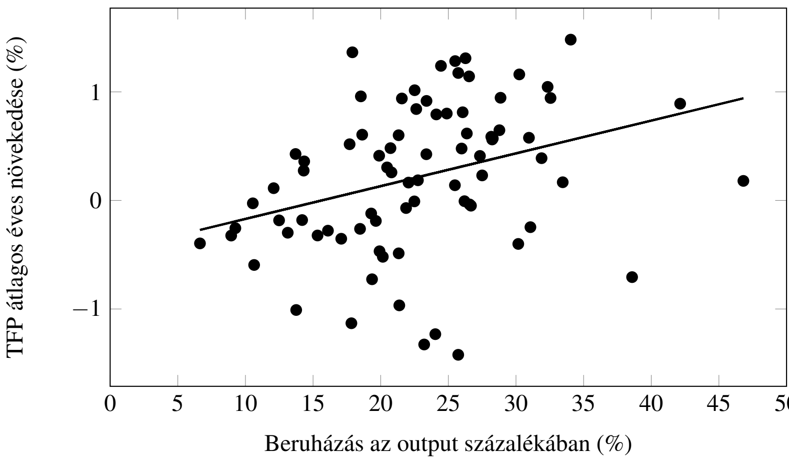
A 4.7 ábrán 100 ország adatai alapján empirikusan is alátámaszthatjuk ezt az összefüggést, hiszen az egy munkásra jutó GDP éves átlagos növekedési üteme átlagosan abban a gazdaságban nagyobb, ahol a beruházási ráta magasabb.

Az eredmények alapján a termelékenység az egy főre eső tőkeállománnyal megegyező ütemben növekszik, így a magasabb beruházási ráta a termelékenység gyorsabb növekedését is eredményez. A 4.8 ábrán teljes tényezőtermelékenységgel (total factor productivity, TFP) mérve a termelékenységet, szintén pozitív kapcsolat állapítható meg az átlagos beruházási ráta és a termelékenység éves átlagos növekedése között 80 ország adatai alapján.

A modell másik következtetése, hogy nagyobb népességszámmal is elősegíthető a tartós növekedés. Ezt *mérethatásnak* nevezik, és eléggé ellenentmondásos. Egyrészt a valóságban a nagyobb népességű országokban nem mutatható ki szignifikánsan gyorsabb növekedés, mint a kisebb országokban. Másrészt a legtöbb gazdaságban a népes-



4.7. ábra. A beruházási ráta és az egy főre eső GDP növekedési rátája közti kapcsolata, 100 országban (1970-2014, éves átlag). Adatok forrása: Penn World Table 9.0.



4.8. ábra. A beruházási ráta és a termelékenység növekedése közti kapcsolata, 80 országban (1970-2014, éves átlag). Adatok forrása: Penn World Table 9.0.

ség nem konstans. Folyamatosan növekvő népesség mellett viszont a gazdaság is egyre gyorsabban növekedne a modell szerint periódusról periódusra, és véges időhorizonton elérné az egy főre jutó GDP értéke a végtelent (szétrobbanna a modell). A mérethatás elleni érvek azonban megkérdőjelezhetőek a termelési tényezők és termékek országok közötti áramlása miatt, illetve mert nem világos, mekkora időintervallumot fed le a modell (50 évet, 200 évet vagy még többet).

A mérethatás problémáját könnyen megoldhatjuk, ha a tőkeállomány helyett az egy főre eső tőkétől tesszük függővé a termelékenységet (lásd 1. feladat) és azzal vezetjük végig a modellt:

$$A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}.$$

4.4. Összefoglalás

1. Ebben a fejezetben endogenizáltuk a munka termelékenységének növekedési ütemét, így az egy főre eső GDP változását már nem az exogén technikai haladás határozta meg, hanem a modell paraméterei.

2. A termelékenység folyamatos növekedésének forrása a termelői externáliák pozitív hatása volt. Feltettük, hogy a munkások az új tőkeeszközökkel végzett munka során új ismereteket sajátítanak el, tapasztalatot gyűjtenek, és ennek köszönhetően produktívabbak lesznek a következő periódusokban (learning-by-doing).

3. Az exogén technikai haladás nélküli növekedés eléréséhez növekvő mérethozadékú termelési függvényre volt szükségünk, de láttuk, hogy vállalati szinten konstans mérethozadékú termelési eljárásnál kell maradnunk. Ezt úgy oldottuk meg, hogy egy relatíve kis reprezentatív vállalat viselkedését vezettük le, mely nem képes hatni a gazdaság aggregátumaira, azokat adottságként kezeli, így vállalati szinten nem változott a termelési függvény a korábbi modellekhez képest, de aggregált szinten érvényesült az externális hatás, így növekvő mérethozadékhoz jutottunk.

4. Az externális hatás erősségét a ϕ paraméterrel állítottuk be, mely $0 < \phi < 1$ esetén szemi-endogén növekedéshez vezetett, $\phi = 1$ estén endogén növekedéshez és $\phi > 1$ esetén pedig egy szétrobbanó rendszerhez, amit emiatt nem is vizsgáltunk.

5. A szemi-endogén növekedési modell hatékonysági egységre eső változói egy stabil állandósult állapot felé konvergáltak. Az egy főre eső változók a termelékenység növekedésével megegyező ütemben változtak, ami már nem exogén adottság volt, hanem a modell szerint a népességnövekedéstől függött pozitív irányban. Mivel viszont a népességnövekedés exogén, csak félig sikerült endogenizálni a növekedési rátákat. Másrészt a kapott összefüggés empirikusan megkérdőjelezhető volt. A népesség növekedési rátájának emelkedése rövid távon, az alkalmazkodási periódusban vissza is vetette a növekedést, és csak az egyensúlyi növekedési pályán állította be egy magasabb, állandó szintre.

6. Hasonlóképpen, mint a korábbi modellekben, a beruházási vagy megtakarítási ráta emelése magasabb hatékonysági egységre jutó tőkeállományt és jövedelmet eredményezett, de az egy főre eső kibocsátás növekedési ütemét csak ideiglenesen tudta növelni a konvergencia időszaka alatt.
7. Az aranyszabály szerinti megtakarítási rátát hasonlóképpen vezethettük le, mint a korábbi modellekben, azonban a szemi-endogén növekedés esetén magasabb megtakarítási rátával lehetett biztosítani a maximális egy főre eső fogyasztást, mint a Solow-modellben.
8. A konvergencia sebessége az externális hatás erősségétől függött. Megmutattuk, hogy minél nagyobb az externális hatás (minél nagyobb ϕ, annál lassabb konvergenciát kapunk a modellben).
9. Ha elég lassú a konvergencia, akkor a népesség növekedési ütemének inkább a negatív, és nem a pozitív hatása érvényesül a növekedés szempontjából, ezért levezettünk egy olyan szélsőséges verziót is, mikor teljesen megszűnik a konvergencia a tőke konstans hozadékának köszönhetően ($\phi = 1$). Ezt neveztük AK-modellnek.
10. Az AK-modellben népességnövekedés nélkül is biztosítani tudtuk a folyamatos gazdasági növekedést, melyet a megtakarítási ráta pozitívan, az amortizációs ráta pedig negatívan befolyásolt. Így ezen paraméterek megváltoztatásával már nem csak a szintekre és az átmeneti időszak növekedésére tudtunk hatni, hanem a hosszú távú növekedési ütemekre is.
11. Empirikusan alátámasztottuk, hogy a megtakarítási ráta és az egy főre eső GDP, valamint a termelékenység növekedése között pozitív irányú a kapcsolat, ahogy az a modell eredményeiből is adódott. A mérethatás, vagyis a népességszám és a gazdasági növekedés közti pozitív irányú kapcsolat magyarázata azonban már problémát jelentett, de ez a modell kisebb átalakításával megszüntethető.

4.5. Feladatok

1. Az AK modellben problémát jelentett a mérethatás, miszerint magasabb népességszint magasabb egy főre jutó GDP növekedést eredményez. Mutassuk meg, hogy ez könnyen megszüntethető, ha a termelői externália nem a tőkétől, hanem az egy főre jutó tőkétől függ, azaz
$$A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}!$$
2. Alakítsuk át a szemi-endogén növekedési modellt ($\phi < 1$) is hasonlóképpen, azaz legyen
$$A_t = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\phi}!$$

a) Mekkora a technológia növekedési üteme?
b) Írjuk fel az átmenetegyenletet a fajlagos változók és a paraméterek segítségével!
c) Mekkora a fajlagos tőkeállomány és kibocsátás egyensúlyi értéke?
d) Mutassuk meg, hogy A_t, k_t és y_t ugyanakkora ütemben növekednek egyensúly esetén! Mekkora a növekedési ráta?
e) Mutassuk meg, hogy egyensúlyban az egy főre eső tőkeállomány és kibocsátás értéke is konstans! Adjuk meg a pontos értékeket is!

3. Bővítsük az órán tanult endogén növekedési modellt fiskális politikával! A modell egyenletei a következőképpen változnak:

A termelési függvény $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$, ahogy eddig is, viszont az állam megadóztatja a jövedelmet, és az abból származó bevételt kormányzati kiadásokra költi ($G = \tau Y_t$). A kormányzati kiadások „produktívak" abban az értelemben, hogy pozitívan befolyásolják a produktivitást ($A_t = aG_t$, $a > 0$). A tőkefelhalmozási korlát a következő:

$$K_{t+1} = s(1-\tau)Y_t + (1-\delta)K_t.$$

Végül tegyük fel, hogy a munkaerő konstans ($L_t = L$)!

a) Írjuk fel az aggregált termelési függvényt! Mutassuk meg, hogy ez ekvivalens az AK-modellel!
b) Vezessük le az egy főre jutó tőke és GDP növekedési rátáját!
c) Felmerül a mérethatás problémája? Tegyük fel, hogy az egy munkásra jutó kormányzati kiadás produktív, vagyis

$$A_t = a\left(\frac{G_t}{L_t}\right).$$

Írjuk fel így is az egy főre jutó GDP növekedési ütemét!
d) Mekkora adókulcs maximalizálná a gazdasági növekedést a két fenti esetben?
e) Alakítsuk át a fenti modellt szemi-endogén növekedési modellé! Legyen $A_t = a(G_t)^{\phi}$, $0 < \phi < 1$ és $L_{t+1} = (1+n)L_t$!
Írjuk fel az aggregált termelési függvényt, majd az átmenetegyenletet! Határozzuk meg a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány és GDP egyensúlyi értékét, majd az egy főre jutó GDP és A_t egyensúlyi növekedési ütemét!

4. Az endogén növekedési modellekben azzal a feltevéssel is élhetünk, hogy a termelékenységet nem a tőke, hanem a kibocsátás határozza meg, vagyis

$$A_t = Y_t^{\phi} \qquad \text{és} \qquad 0 < \phi < \frac{1}{1-\alpha}.$$

a) Írja fel az aggregált termelési függvényt! Miért volt szükség a

$$0 < \phi < \frac{1}{1-\alpha}$$

feltevésre?

b) Vegyük azt az esetet, mikor $\phi < 1$ (szemi-endogén növekedés)! Írja fel az átmenetegyenletet a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány és a paraméterek segítségével!

c) Határozza meg a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány és kibocsátás egyensúlyi értékét!

d) Határozza meg az egy főre jutó kibocsátás egyensúlyi növekedési ütemét!

4.A. A konvergencia sebessége

Vegyük a (4.19) átmenetegyenlet elsőrendű Taylor-közelítését[3] $\tilde{k}_t = \tilde{k}^*$ körül:

$$\tilde{k}_{t+1} \approx \tilde{k}^* + \frac{1}{1+n}\Big[\Big(s\tilde{k}^{*\alpha-1} + (1-\delta)\Big)^{1-\phi}$$

$$+\tilde{k}^*(1-\phi)\Big(s\tilde{k}^{*\alpha-1} + (1-\delta)\Big)^{-\phi} s(\alpha-1)\tilde{k}^{*\alpha-2}\Big](\tilde{k}_t - \tilde{k}^*)!$$

Ha behelyettesítjük a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány állandósult állapotbeli értékét, ami

$$\tilde{k}^* = \left[\frac{s}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - (1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

akkor egyszerűsítések után a

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* = \left(1 + (1-\phi)(\alpha-1)\frac{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - 1 + \delta}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}}\right)(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*) \tag{4.32}$$

összefüggéshez jutunk. Ha kihasználjuk, hogy a változó természetes alapú logaritmusainak különbsége közelítőleg a növekedési rátával egyezik meg, vagyis

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^* \approx \tilde{k}^*(\ln\tilde{k}_{t+1} - \ln\tilde{k}^*),$$

akkor a (4.32) egyenlet az átalakítás után:

$$\ln\tilde{k}_{t+1} - \ln\tilde{k}^* = \left(1 + (1-\phi)(\alpha-1)\frac{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - 1 + \delta}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}}\right)(\ln\tilde{k}_t - \ln\tilde{k}^*). \tag{4.33}$$

A termelési függvény intenzív formájának ($\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha}$) logaritmizált alakja

$$\ln\tilde{y}_t = \alpha\ln\tilde{k}_t.$$

Ha a $t+1$. periódus korlátjából kivonjuk az állandósult állapotbelit, akkor

$$\ln\tilde{y}_{t+1} - \ln\tilde{y}^* = \alpha(\ln\tilde{k}_{t+1} - \ln\tilde{k}^*),$$

melybe behelyettesítve a (4.33) egyenletet:

$$\ln\tilde{y}_{t+1} - \ln\tilde{y}^* = \alpha\left(1 + (1-\phi)(\alpha-1)\frac{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - 1 + \delta}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}}\right)(\ln\tilde{k}_t - \ln\tilde{k}^*).$$

[3] Egy $f(x)$ függvény elsőrendű Taylor-közelítésének képlete $x = x_0$ pont körül:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vegyük észre, hogy $\alpha(\ln\tilde{k}_t - \ln\tilde{k}^*) = \ln\tilde{y}_t - \ln\tilde{y}^*$, így a fenti egyenlet átírható:

$$\ln\tilde{y}_{t+1} - \ln\tilde{y}^* = \left(1 + (1-\phi)(\alpha-1)\frac{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - 1 + \delta}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}}\right)(\ln\tilde{y}_t - \ln\tilde{y}^*)!$$

Végül kivonva az egyenlet mindkét oldalából $\ln\tilde{y}_t$-t és hozzáadva $\ln\tilde{y}^*$-ot a konvergencia végső összefüggéséhez jutunk:

$$\ln\tilde{y}_{t+1} - \ln\tilde{y}_t = \left((1-\phi)(\alpha-1)\frac{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - 1 + \delta}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}}\right)(\ln\tilde{y}_t - \ln\tilde{y}^*).$$

Ha az együttható ellentettjét λ-val jelöljük, mint az előző fejezetek modelljeiben, akkor

$$\lambda = (1-\phi)(1-\alpha)\frac{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}} - 1 + \delta}{(1+n)^{\frac{1}{1-\phi}}}.$$

V.

KUTATÁS-FEJLESZTÉS ALAPÚ ENDOGÉN NÖVEKEDÉSI MODELL

Az eddig megismert modellekben a hosszú távú gazdasági növekedés forrása a munka termelékenységének változása volt. A Solow-modellben és a humán tőkével bővített Solow-modellben nem volt meghatározva, mit értünk pontosan ez alatt, és annak növekedési ütemét is exogén módon adtuk meg. Így a technikai haladás mértékét, mely hosszú távon biztosítja az egy főre eső GDP növekedését, nem a modellből kaptuk meg. Ahhoz, hogy a növekedéselmélet központi kérdésére választ adjunk, és képesek legyünk megmagyarázni az országok közötti növekedésbeli különbségeket, a termelékenység változását endogenizálnunk kell.

Az előző fejezetben a termelékenységet a tőkeállománytól (vagy jövedelemtől) tettük függővé, és feltettük, hogy a munkavállalók az új tőkével folyatott munka során új ismereteket sajátítanak el és tapasztaltabbá válnak (*learning-by-doing*). Produktivitásuk fejlődését tehát a termelői externália pozitív hatásának tulajdonítottuk, így a felhasznált tőke mennyisége közvetlenül és a termelékenység javításán keresztül indirekt módon is növelte a vállalat kibocsátását.

A technikai haladást az externália alapú modellben az aggregált tőkeállomány növekedésével magyaráztuk, tehát sikerült endogén módon meghatározni a növekedés forrását. Egyensúlyban a gyengébb externális hatás esetén ez a népességnövekedéstől függött, vagyis csak *szemi-endogén* eredményt kaptunk, erősebb externális hatás esetén pedig megszűnt a konvergencia egy egyensúlyi növekedési pálya felé, és a tőke konstans hozadéka biztosította a makroaggregátumok folyamatos emelkedését népességnövekedés nélkül is.

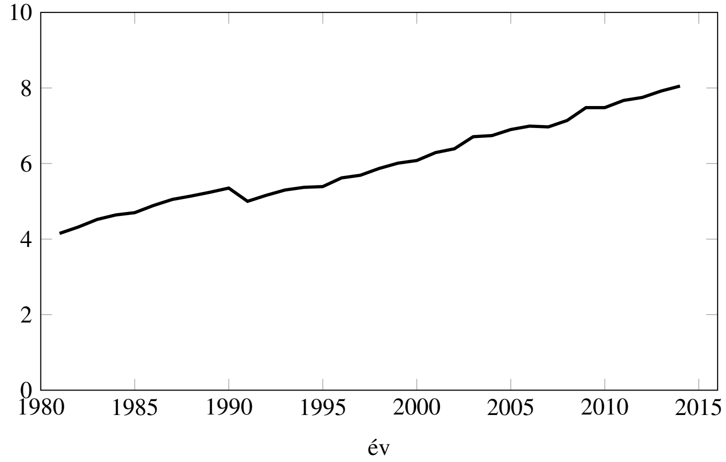
Míg az externália alapú endogén növekedési modellekben a technológia fejlődése csak a termelési folyamat mellékterméke volt, addig ebben a fejezetben a kutatási tevékenységet folytató vállalatok lesznek felelősek az ismeretek bővítéséért.

Az 5.1 ábra alapján megállapítható, hogy az utóbbi 35 évben a kutatók részaránya a foglalkoztatottakon belül a duplájára emelkedett az OECD országokban, és 2014-ben 1000 alkalmazottra átlagosan már 8 kutató jutott.

Az 5.1 táblázat szintén a *kutatás-fejlesztés (K+F)* szektor növekedését támasztja alá. A kutatás-fejlesztésre fordított bruttó kiadást mutatja a GDP százalékában (*gross expenditure on research and development, GERD*) 1981-ben és 2015-ben, mely a felsorolt országok mindegyikében növekedett az évek során.

Mivel a válóságban számos vállalatnál és egyetemen folynak kutatások azzal a céllal, hogy hatékonyabbá tegyék a termelési eljárást, így a következő modellben egy kutatás-fejlesztési tevékenységet folytató szektorral bővítjük a modellt. A K+F szektor által létrehozott termék a tudás, melyet a munkások felhasználhatnak más vállalatoknál is a végtermék előállítása során. Az új ötleteket közjószágnak tekintjük, ugyanis az új ötletek felhasználásában senkit nem akadályoz az, ha más is használja ugyanazokat az ismereteket (nincs rivalizálás), és használatukból csak részben (például jogdíj vagy szabadalom által) vagy egyáltalán nem lehet kizárni a gazdaság szereplőit.

Az általunk felépített modell a könnyebb megértés miatt egy egyszerűsített verzió lesz, a K+F alapú endogén növekedési modellek további bővítési lehetőségeiről lásd például Romer (1990), Grossman és Helpman (1991) valamint Aghion és Howitt (1992) munkáit.



5.1. ábra. 1000 alkalmazottra jutó kutatók száma az OECD-ben, 1981-2014. Adatok forrása: OECD.

	1981	2015
Amerikai Egyesült Államok	2,3	2,8
Ausztria	1,1	3,1
Dánia	1,0	3,0
Finnország	1,1	2,9
Franciaország	1,9	2,2
Hollandia	1,6	2,0
Írország	0,6	1,5
Kanada	1,2	1,6
Németország	2,4	2,9
Norvégia	1,2	1,9
Olaszország	0,3	1,3
Japán	2,1	3,5
Spanyolország	0,4	1,2

5.1. táblázat. Kutatás-fejlesztése fordított bruttó kiadás a GDP százalékában (GERD). Adatok forrása: OECD.

5.1. A modell felépítése

A modellbeli gazdaság két szektort, egy végterméket előállító és egy K+F tevékenységet folytató reprezentatív vállalatot tartalmaz. Az előbbi a korábbi modellekhez hasonlóan tőke és hatékony munkaerő felhasználásával állítja elő végtermékét, melynek konstans hányadát a fogyasztók beruházási, a többit pedig fogyasztási céllal vásárolják meg. Feltesszük, hogy a munkavállalók egy részét az egyik, a többit pedig a másik szektorban alkalmazzák. A K+F szektorban az ismeretek bővítésén dolgoznak a kutatók, melyek produktívabbá teszik a másik szektorban működő vállalat termelését, illetve hozzájárulnak a tudás további fejlesztéséhez. A technikai haladás tehát nem exogén, hanem a K+F szektornak köszönhető.

Végterméket előállító vállalat

A végterméket előállító reprezentatív vállalat hasonló jellemzőkkel bír, mint a Solow-modellben, vagyis a termelési tényezők felhasználásával állít elő egy végterméket. A termelési függvény legyen állandó mérethozadékú, vagyis adott technológia mellett a tőke és a munka konstans c százalékkal való növelése a kibocsátás szintén c százalékú növekedését eredményezze, a tőke illetve munka határterméke pedig legyen csökkenő! Használjuk itt is a Cobb-Douglas függvényformát:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_{Y,t})^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1! \tag{5.1}$$

Mivel kétféle szektor között oszlanak meg a munkások, az alsó indexben jelölnünk kell, hogy melyik vállalat munkásairól beszélünk, így $L_{Y,t}$ a végterméket (Y_t) előállító vállalatnál alkalmazott munkaerőre utal.

A munka termelékenysége (A_t) az aktuális periódusban elérhető innovatív ötletekből és tudásból származik, melyet a K+F szektorban hoznak létre. Ez utóbbi két ok miatt is különbözik a másik két termelési tényezőtől. Az egyik, hogy a vállalat adottnak veszi A_t értékét, mert nem tudja befolyásolni a gazdasági szereplők tudásszintjét, csak használni tudja azt, ami elérhető, míg a tőke- és munkakeresletét megváltoztathatja. A másik, hogy míg az elérhető A_t szintű ismeretekhez bármely vállalat hozzáférhet vagyis közjószágnak tekinthető, mert piacán nincs rivalizálás és az egyszerűség kedvéért nincs kizárás sem, addig a tőke és a munka piaca versenyző.

Kutatás-fejlesztés szektor

A K+F szektorban egy kutatás-fejlesztési tevékenységet folytatató reprezentatív vállalat működik. Az általa előállított termék az új ötlet (a_t), mely a t. periódusban a már meglévő tudás állományát bővíti:

$$a_t = A_{t+1} - A_t. \tag{5.2}$$

Az innovatív ötletek létrehozásához szükség van az adott periódusban már elérhető tudásra (A_t), ami – mint már említettük korábban is – közjószág, így ez a vállalat is szabadon hozzáférhet. Mivel a tudás nem választható külön az emberektől, munkásokra is szükség van, akik ebben a szektorban dolgoznak. Jelöljük L_A, t-vel a kutatók számát a t. periódusban! Természetesen a valóságban tőke (például számítógép, irodaépület) is szükséges a kutatáshoz, de a jelenlegi modellben azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy tőkét csak a végterméket előállító vállalat használ fel a termelés során[1].

A K+F szektor vállalatának termelési függvénye:

$$a_t = \rho A_t^{\phi} L_{A,t}^{\lambda}, \quad \rho > 0. \tag{5.3}$$

A ϕ paraméter az új ötletek aktuális tudásszint szerinti rugalmassága, melynek nagysága megmutaja, milyen irányban és mértékben befolyásolják a már meglévő ismeretek az újak létrehozásának sikerességét. Előjele lehet pozitív, de akár negatív is. Egyrészt a múltbeli felfedezések és a már feltalált eszközök könnyebbé teszik a további kutatómunkát. Ebben az esetben $\phi > 0$. Másrészt egyre nehezebb új ötletekkel előállni, ha már eleve magas a tudásszint a gazdaságban, hiszen a legkönnyebb technológiát fejlesztik ki legelőször, majd az egyre bonyolultabbakat. Ekkor $\phi < 0$. A továbbiakban a modellt pozitív ϕ értékkel vezetjük le.

Feltesszük, hogy ha egyre több kutatót alkalmaznak a szektorban, akkor egyre nagyobb az esélye annak, hogy többen is ugyanazt a technológiát fejlesztik ki. Hiába jönnek rá ugyanarra az innovációra többen is, az csak egynek számít a tudásállományban. Emiatt $0 < \lambda < 1$, vagyis minél többen dolgoznak a K+F szektorban, annál kevésbé növeli plusz egy kutató az új ötletek számát az adott periódusban[2].

Fogyasztó

A reprezentatív fogyasztó felelős a tőke felhalmozásáért, melyet bérleti díj ellenében bérbe adhat a végterméket előállító vállalatnak. A tőkefelhalmozási korlát a korábbi modellekben már megismert formában írható fel:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t. \tag{5.4}$$

A teljes népesség (L_t) $0 < s_R < 1$ hányada kutatóként dolgozik a K+F szektorban:

$$L_{A,t} = s_R L_t,$$

a többi munkavállaló pedig a végterméket előállító vállalatnál helyezkedik el:

$$L_{Y,t} = (1-s_R)L_t.$$

s_R értéke a modellben kívülről adott, így az alakulásának okát nem, de annak következményeit tudjuk majd vizsgálni a modellel. A teljes népesség exogén n ütemben növekszik:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = (1+n),$$

[1] Könnyen bővíthető tőkével is a K+F szektor, ha a tőkeállományt is megosztjuk a két szektor között, mint a munkaerőt.

[2] Ha $\lambda = 1$ lenne, akkor a munka hozadéka konstans, $\lambda > 1$ esetén pedig növekvő lenne és nem csökkenő a K+F szektorban.

ahol

$$L_t = L_{Y,t} + L_{A,t}.$$

A fogyasztók teljes jövedelmük konstans $0 < s < 1$ hányadát megtakarítják, a többit pedig fogyasztási célokra fordítják:

$$S_t = sY_t, \tag{5.5}$$

$$C_t = (1-s)Y_t. \tag{5.6}$$

Piacok

A vállalat illetve a fogyasztó az alábbi piacokon kerülnek egymással kapcsolatba, melyeken a kereslet és a kínálat egyenlősége mellett alakul ki az egyensúly.

1. *Árupiac*. A végterméket előállító vállalat felkínálja termékét, a fogyasztó pedig fogyasztási és beruházási céllal vásárolja azt meg:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{5.7}$$

2. *Munkapiac*. A fogyasztók s_R hányada a K+F szektorban, $(1 - s_R)$ hányada pedig a végterméket előállító vállalat szektorában kínálja fel munkaerejét, melyet az adott a vállalat felhasznál a termelés során:

$$L^S_{Y,t} = L^D_{Y,t},$$

$$L^S_{A,t} = L^D_{A,t}.$$

3. *Tőkepiac*. A fogyasztók felkínálják az általuk birtokolt tőkét (K^S_t), amit a végterméket előállító vállalat felhasznál a termelés során (K^D_t):

$$K^S_t = K^D_t.$$

4. *Kölcsönözhető források (vagyoneszközök) piaca*. A beruházásokat megtakarításokból finanszírozzák:

$$S_t = I_t. \tag{5.8}$$

5.2. Szemi-endogén növekedés

Ha ismert a tőke, a munka illetve a tudásszint indulóértéke (K_0, L_0, A_0), akkor az (5.1) - (5.6), és az (5.8) egyenletek segítségével bármely periódus endogén változóinak értéke meghatározható.

Vegyük azt az esetet, mikor $0 < \phi < 1$, vagyis a már meglévő ismeretek felhasználása segíti az új ötletek megszületését, de az ismeretek növekedése mellett egyre kevésbé bővíthető a tudásszint!

Jelöljük a hatékonysági egységre eső változókat most is hullámvonallal, az egy főre esőket pedig kisbetűvel, és figyeljünk arra, hogy a definíció nem változott a korábbi modellekhez képest, vagyis a teljes népességszámmal osztunk, nem csak az egyik szektorban foglalkoztatott munkások számával:

$$\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t},$$

$$k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}!$$

Vezessük le, milyen gyors a technikai haladás, illetve minek köszönhetők az országok közötti jövedelmi különbségek!

A modell dinamikája

Az (5.3) egyenlet alapján a tudásállomány folyamatosan nő periódusról periódusra, hiszen $A_{t+1} - A_t = \rho A_t^{\phi} L_{A,t}^{\lambda}$ pozitív. Az egyenletet átalakítva kiszámítható a technológia növekedési rátája a t. és t+1. periódus között:

$$g_t \equiv \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \rho A_t^{\phi-1} L_{At}^{\lambda},$$

melyből látszik, hogy A_t emelkedésével a növekedési ráta egyre csökken, mert a kitevője negatív ($\phi - 1 < 0$). Ha tehát $t \to \infty$, akkor $A_t \to \infty$, és $g_t \to 0$. Kihasználva azt, hogy a teljes népesség K+F szektorban dolgozó részaránya s_R, a növekedési ráta átírható az alábbi alakra:

$$g_t = \rho A_t^{\phi-1} (s_R L_t)^{\lambda}. \tag{5.9}$$

Mivel a technikai haladás már nem exogén, illetve nem konstans, mint a Solow-modellben, ki kell számítanunk, hogyan változik az időben az (5.9) egyenlet segítségével:

$$\frac{g_{t+1}}{g_t} = \left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right)^{\phi-1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\lambda} = (1+g_t)^{\phi-1}(1+n)^{\lambda}. \tag{5.10}$$

Az (5.10) egyenlet levezetésénél felhasználtuk, hogy ρ és s_R konstans, illetve a népesség n ütemben növekszik. Megkaptuk tehát a tudás növekedési rátájának mozgásegyenletét, miszerint a következő periódus növekedési rátája kiszámítható a jelenbeli növekedés és a paraméterek ismeretében:

$$g_{t+1} = (1+g_t)^{\phi-1} g_t (1+n)^{\lambda}. \tag{5.11}$$

Ábrázoljuk az (5.11) egyenletet egy megfelelő koordináta-rendszerben (lásd az 5.2 ábra)! Az átmenetegyenlet az alábbi tulajdonságokkal bír, ha feltesszük, hogy $g_t \geq 0$ és $n > 0$:

1. Átmegy az origón.

2. A meredeksége pozitív[3]:

$$(1+n)^{\lambda}(1+g_t)^{\phi-2}(1+\phi g_t) > 0.$$

3. A második derivált negatív, tehát konkáv[4]:

$$(1+n)^{\lambda}(1+g_t)^{\phi-3}(\phi-1)(2+g_t\phi) < 0.$$

4. Egyetlen metszéspontja van a 45°-os egyenessel a pozitív tartományban, ahol az egyensúlyi érték (g^*) található.

Az 5.2 ábrán látható, hogy minden pozitív indulóértékről az egyensúlyi növekedési ráta felé konvergál a gazdaság, tehát létezik egy stabil egyensúlyi pont, ahol a növekedési ráta konstanssá válik.

Nézzük meg a endogén változók mozgásának dinamikáját is! A tőke felhalmozási korlátjának ((5.4) egyenlet) hatékonysági egységre jutó változókkal felírt alakja:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}(\tilde{i}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t),$$

ahol ne feledjük, hogy g_t csak egyensúlyban konstans, egyébként pedig az idő múlásával változik. Felhasználva, hogy a beruházást a megtakarításból finanszírozzák, mely a jövedelem konstans s hányada:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)}(s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t). \tag{5.12}$$

[3] A görbe meredeksége a következőképpen adható meg:

$$\frac{\partial g_{t+1}}{\partial g_t} = (1+n)^{\lambda}\left[(\phi-1)(1+g_t)^{\phi-2}g_t + (1+g_t)^{\phi-1}\right]$$

$$= (1+n)^{\lambda}(1+g_t)^{\phi-2}\left[(\phi-1)g_t + (1+g_t)\right]$$

$$= (1+n)^{\lambda}(1+g_t)^{\phi-2}(1+\phi g_t).$$

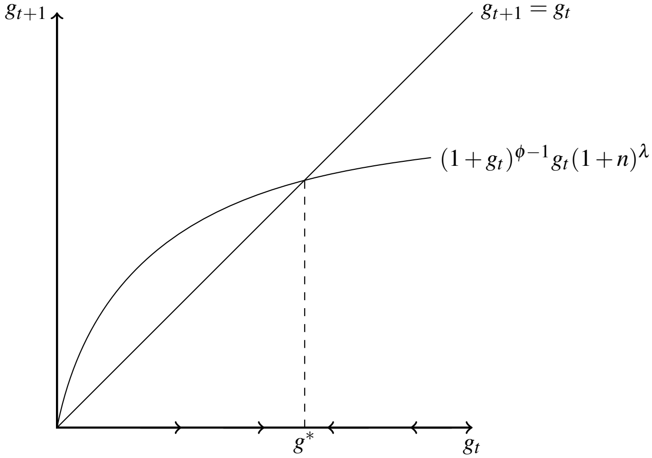
[4] A második derivált kiszámítása és átalakítása:

$$\frac{\partial^2 g_{t+1}}{\partial^2 g_t} = (1+n)^{\lambda}\left[(\phi-2)(1+g_t)^{\phi-3}(1+\phi g_t) + (1+g_t)^{\phi-2}\phi\right]$$

$$(1+n)^{\lambda}(1+g_t)^{\phi-3}\left[(\phi-2)(1+\phi g_t) + (1+g_t)\phi\right]$$

$$= (1+n)^{\lambda}(1+g_t)^{\phi-3}(2\phi - 2 + g_t\phi^2 - g_t\phi)$$

$$= (1+n)^{\lambda}(1+g_t)^{\phi-3}\left[2(\phi-1) + g_t\phi(\phi-1)\right].$$



5.2. ábra. g_t-re vonatkozó átmenetegyenlet

A termelési függvény intenzív formájának felírásához vegyük az (5.1) egyenletet, ahol tudjuk, hogy a végterméket előállító vállalatnál a munkások $(1 - s_R)$ hányada dolgozik:

$$Y_t = K_t^{\alpha} (A_t (1 - s_R) L_t)^{1-\alpha},$$

majd osszuk le mindkét oldalát $A_t L_t$-vel:

$$\tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha} (1 - s_R)^{1-\alpha}. \tag{5.13}$$

A fajlagos kibocsátás egyenletét az (5.12) felhalmozási korlátba helyettesítve megkapjuk a fajlagos tőke mozgásegyenletét is:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)} \Big(s\tilde{k}_t^{\alpha} (1 - s_R)^{1-\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t \Big). \tag{5.14}$$

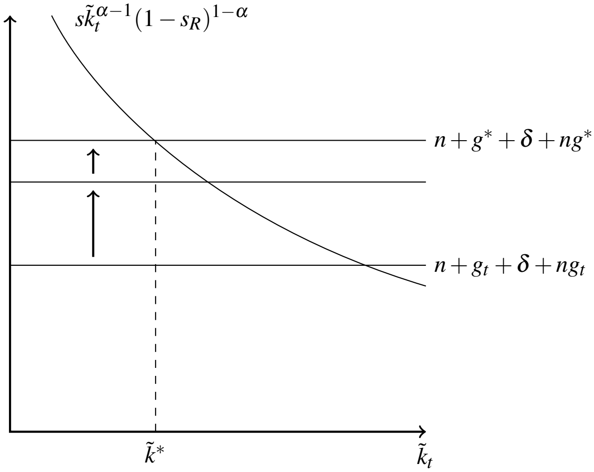
A rendszer dinamikáját tehát az (5.11) és az (5.14) egyenletek határozzák meg. Az előbbiből, mint láttuk, a paraméterek illetve a technológia induló növekedési ütemének ismeretében kiszámítható a következő időszakok növekedési rátája. Ezt és a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány aktuális értékét felhasználva az utóbbi egyenletben, megkapjuk a következő időszak fajlagos tőkeállományát is.

Alakítsuk át úgy az egyenletet, hogy a hatékonysági egységre eső tőke növekedési rátáját adja meg (vonjunk ki mindkét oldalból $\tilde{k}_t$-t, majd osszuk is el vele):

$$\frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g_t)} \Big[s\tilde{k}_t^{\alpha-1} (1 - s_R)^{1-\alpha} - (n + g_t + \delta + n g_t) \Big]! \tag{5.15}$$

Hasonló ábrát készíthetünk hozzá, mint a Solow-modellben (lásd az 5.3 ábrát). Az $s\tilde{k}_t^{\alpha-1}(1 - s_R)^{1-\alpha}$ összefüggés $\tilde{k}_t$-ben csökkenő és konvex függvényként jelenik meg,

$n+g_t+\delta+ng_t$ pedig egy vízszintes egyenes. Mivel az 5.2 ábra alapján a tudás növekedési rátája ebben a modellben csak egyensúlyban konstans, egyébként pedig az idő múlásával egyre lassuló ütemben, de folyamatosan változik, a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány egyensúlyi értéke nem e kettő metszéspontjában található.



5.3. ábra. $\tilde{k}_t$-ra vonatkozó átmenetegyenlet

A vízszintes egyenes g_t folyamatos emelkedésének köszönhetően addig tolódik felfelé, míg a növekedési ütem be nem áll a konstans egyensúlyi értékére[5]. Láttuk, hogy bármely pontból is indítva a gazdaságot, az mindig ugyanahhoz az egyensúlyi értékhez, g^*-hoz tart, így írjuk be ezt az (5.15) egyenletbe:

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}-\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t}=\frac{1}{(1+n)(1+g^*)}\left[s\tilde{k}_t^{\alpha-1}(1-s_R)^{1-\alpha}-(n+g^*+\delta+ng^*)\right]! \tag{5.16}$$

Ekkor az átmenetegyenletben már csak konstansok vannak a tőkén kívül, és $s\tilde{k}_t^{\alpha-1}(1-s_R)^{1-\alpha}$ illetve $n+g^*+\delta+ng^*$ metszéspontjában megtaláljuk a fajlagos tőkeállomány állandósult állapotbeli értékét ($\tilde{k}^*$). Ettől a ponttól balra az 5.3 ábrán a tőke növekedési rátája pozitív, vagyis túl alacsony induló tőkeállomány esetén a tőke növekszik. Ezzel ellentétben az egyensúlyi ponttól jobbra pedig negatív a növekedési ráta, ami a túl magas tőkeállomány csökkenését eredményezi. Az ábra alapján tehát meghatározható egy stabil egyensúlyi pont, mely felé a gazdaság bármely kezdeti értékből indulva konvergál. Határozzuk meg a technikai haladás és a fajlagos változók egyensúlyi értékeit!

[5] g_t folyamatos csökkenése esetén pedig lefelé tolódik.

Állandósult állapot

A tudás növekedési rátájának konstans egyensúlyi értéke könnyen meghatározható, ha az (5.11) egyenletet egyensúlyban, $g_{t+1} = g_t = g^*$ felhasználásával írjuk fel és átrendezzük:

$$g^* = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1. \tag{5.17}$$

A technikai haladás tehát egyensúlyban az (5.17) szerint abban a gazdaságban gyorsabb, ahol ceteris paribus gyorsabban nő a népesség, illetve ahol a K+F szektorban a termelés munka és technológia szerinti rugalmassága magasabb.

Az (5.16) egyenletből pedig a fajlagos tőkeállomány egyensúlyi értékét kapjuk meg, majd azt az (5.13) termelési függvénybe írva a fajlagos kibocsátás is meghatározható egyensúlyban:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{n+g^*+\delta+ng^*}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-s_R), \tag{5.18}$$

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{n+g^*+\delta+ng^*}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R). \tag{5.19}$$

A kapott összefüggések nagyon hasonlóak a Solow-modell állandósult állapotában kapott értékekhez. A különbséget az okozza, hogy a K+F alapú modellben mindkét változó egyenletének jobb oldalán megjelenik az $(1-s_R)$ szorzó, arra utalva, hogy a teljes népesség ekkora hányada dolgozik csak a végterméket előállító szektorban[6]. Egyensúlyban tehát abban a gazdaságban lesz nagyobb a hatékonysági egységre jutó jövedelem, ahol magasabb a megtakarítási ráta, illetve kisebb a pótlási igény (ahogyan a Solow-modellben is), valamint ahol a munkaerő-állomány nagyobb hányadát alkalmazzák a végterméket előállító vállalatnál.

Egyensúlyi növekedési pálya

A definíció szerint az egy munkásra eső tőkeállomány

$$k_t = \tilde{k}_t A_t,$$

ahol a hatékonysági egységre jutó tőke egyensúlyban konstans, A_t pedig konstans ütemben növekszik. Látható, hogy eszerint az összes egy főre eső változó (y_t, k_t, i_t, c_t) a technikai haladással megegyező ütemben növekszik, aminek az állandósult állapotát már kiszámítottunk (lásd (5.17 egyenlet):

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{\tilde{k}_{t+1}A_{t+1}}{\tilde{k}_t A_t} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}.$$

Az egy főre jutó jövedelem hosszú távú növekedése a modell szerint akkor biztosítható, ha pozitív a népesség növekedési rátája, és abban a gazdaságban nő gyorsabban,

[6] Ha kivesszük a K+F szektort a modellből, vagyis $s_R = 0$, akkor visszakapjuk a Solow-modell állandósult állapotbeli értékeit.

ahol nagyobb a népesség növekedési üteme. Mivel a gazdasági növekedést az exogén népességnövekedéssel magyarázzuk a technikai haladás endogenizálása mellett is, ez a modellverzió csak szemi-endogénnek tekinthető (hasonlóan mint a termelői externália alapú szemi-endogén növekedési modellben). Empirikusan nem tudtuk alátámasztani a gazdaság növekedési és a népesség növekedési rátája közti pozitív irányú kapcsolatot az előző fejezetben sem, de ahogy ott is megállapítottuk, n emelkedése rövid távon lelassítja a növekedést a hatékonysági egységre jutó változók csökkentése miatt, majd hosszú távon képest azt megemelni. Ha lassú a konvergencia az egyensúly felé, akkor előfordulhat, hogy a negatív hatás dominál a vizsgált országokban.

Határozzuk meg, mitől függ az egy főre eső jövedelem szintje az egyensúlyi növekedési pályán! Az (5.9) egyenletet átrendezve adódik a tudás szintje és a népességszám közötti összefüggés egyensúlyban:

$$A_t = \left(\frac{\rho(s_R L_t)^\lambda}{g^*}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}. \tag{5.20}$$

Ezt beírva az egy főre eső kibocsátás $y_t^* = \tilde{y}^* A_t$ képletébe:

$$y_t^* = \left(\frac{s}{n+g^*+\delta+ng^*}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R)\left(\frac{\rho(s_R L_t)^\lambda}{g^*}\right)^{\frac{1}{1-\phi}},$$

ahol

$$L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}} = \left[L_0(1+n)^t\right]^{\frac{\lambda}{1-\phi}} = L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}(1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}\cdot t} = L_0^{\frac{\lambda}{1-\phi}}(1+g^*)^t,$$

vagyis a megtakarítási ráta növelése pozitívan hat az egy főre eső GDP szintjére, de a K+F szektorban dolgozók részarányának hatása bármilyen előjelű lehet. Relatíve minél többen dolgoznak a végterméket előállító vállalatnál, annál nagyobb kibocsátásra képes a gazdaság (s_R és az egy főre jutó GDP között negatív irányú a kapcsolat), de minél nagyobb arányban dolgoznak a K+F szektorban, annál gyorsabban emelkedik az elérhető tudás, mely a munkások hatékonyságát növeli a végtermék gyártása során is (s_R és az egy főre jutó GDP között pozitív irányú a kapcsolat).

Az aggregált változók (Y_t, K_t, I_t, C_t) egyensúlyi növekedési üteme is kiszámítható a definíciót, illetve a már levezetett egyensúlyi értékeket felhasználva, például

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{k_{t+1}L_{t+1}}{k_t L_t} = (1+n)^{\frac{\lambda+1-\phi}{1-\phi}}.$$

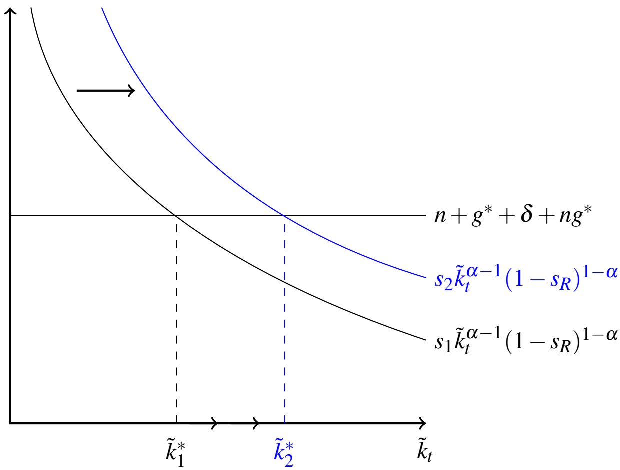
Az aggregált változók növekedési üteme is annál nagyobb egyensúlyban, minél gyorsabban nő a népesség.

A megtakaratási ráta növelésének hatása

A K+F alapú modellben kétféle hatást elemezhetünk. Az egyik az olyan paraméterek megváltozásának hatása az endogén változókra, mely nem változtatja meg az 5.2 ábrán lévő görbe helyzetét. Ilyenkor a munka termelékenységének növekedési üteme nem módosul, marad a korábbi állandósult állapotbeli értékén. Változás csak az 5.3 ábrán látható az egyenes vagy a görbe egyszeri eltolódása miatt, mert ehhez igazodva a hatékonysági egységre jutó változók elindulnak az új egyensúly felé. A konvergencia ebben az esetben – ha g_t konstans marad – a Solow-modellben tapasztaltakhoz hasonló.

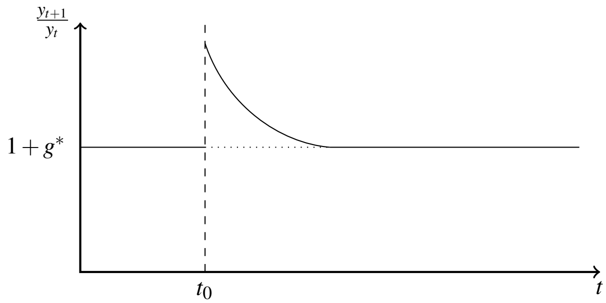
A másik eset, mikor olyan változás történik a gazdaságban, mely az 5.2 ábra értékeire is hatással van. Ez azt jelenti, hogy a K+F szektort is érintetette a hatás. Ilyenkor g_t-nek is el kell érnie az új állandósult állapotát, nem csak a hatékonysági egységre eső változóknak, vagyis az 5.3 ábrán a vízszintes egyenes addig tolódik felfelé vagy lefelé, míg a technikai haladás fel nem veszi az új, konstans egyensúlyi értékét. Ennek következményeként ez utóbbi esetben az átmenet időszaka tovább tart, mint az előbbiben, vagyis lassabb a konvergencia, ha a K+F szektorra is hatással van a változás.

Nézzünk egy példát az egyszerűbb sokkra, az első esetre! Ha például megemelkedik a megtakarítási ráta egy már egyensúlyi növekedési pályán haladó gazdaságban, az az 5.2 ábrát, és így a tudás növekedési ütemét nem befolyásolja. Mivel a technikai haladás g^* ütemű maradt, a másik ábrán nem tolódik el a vízszintes egyenes, de a görbe igen (lásd 5.4 ábra).



5.4. ábra. A megtakarítási ráta növekedésének hatása a hatékonysági egységre jutó tőkeállományra

Ha $\tilde{k}_1^*$ pontban volt a gazdaság akkor, mikor a megtakarítási ráta s_1-ről s_2-re emelkedett, akkor az ábráról leolvasható, hogy ebben a pontban a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány növekedési rátája pozitívvá válik, hiszen a fajlagos tőkeállománynak növekednie kell, hogy elérje az új, magasabb szinten lévő állandósult állapotát. A modell következtetése a Solow-modelléhez hasonló. A konvergencia időszakában növekszik a hatékonysági egységre jutó tőke és emiatt a jövedelem is, de amint elérik az új állandósult állapotot, újra konstanssá válnak. Emiatt az 5.5 ábrán látható módon ebben a modellben is csak ideiglenesen lehet felgyorsítani a megtakarítási ráta emelésével az egy főre eső GDP növekedési ütemét, hosszú távon visszaáll a technikai haladással megegyező ütemre, melyre egyáltalán nem volt hatással a fenti változás.



5.5. ábra. A megtakarítási ráta növekedésének hatása az egy főre jutó jövedelem növekedési ütemére

A K+F szektorban dolgozók részarányának növelése

A K+F szektort is befolyásoló változás például a kutatók arányának megemelkedése a teljes népességen belül. Az 5.1 ábrán már láttuk, hogy az 1000 alkalmazottra jutó kutatók száma szinte folyamatosan növekedett az elmúlt 35 évben. Nézzük meg, hogyan hat a gazdaságra s_R egyszeri, permanens megemelkedése a modell szerint! Első ránézésre azt hihetnénk, hogy az 5.2 ábrán nem mozdítja el a görbét, és így nem is befolyásolja a technikai haladás ütemét, hiszen nem szerepel az átmenetegyenletben. Vigyázzunk ezzel a kijelentéssel, hiszen az (5.11) levezetésekor azzal a feltevéssel éltünk, hogy s_R konstans, most azonban a sokk periódusában $s_{R,1}$-ről $s_{R,2}$-re emelkedik tartósan a szintje! Ha a gazdaság a t_0. periódusban még egyensúlyban volt, és a t_1. periódusban emelkedett meg a K+F szektorban dolgozók részaránya, akkor

$$g_0 = \rho A_0^{\phi-1}(s_{R,1}L_0)^{\lambda}$$

és

$$g_1 = \rho A_1^{\phi-1}(s_{R,2}L_1)^{\lambda}.$$

Ha elosztjuk a fenti két egyenletet egymással, megkapjuk a technikai haladás mozgásegyenletét a két periódus között:

$$\frac{g_1}{g_0} = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{\phi-1}\left(\frac{s_{R,2}}{s_{R,1}}\right)^{\lambda}\left(\frac{L_1}{L_0}\right)^{\lambda},$$

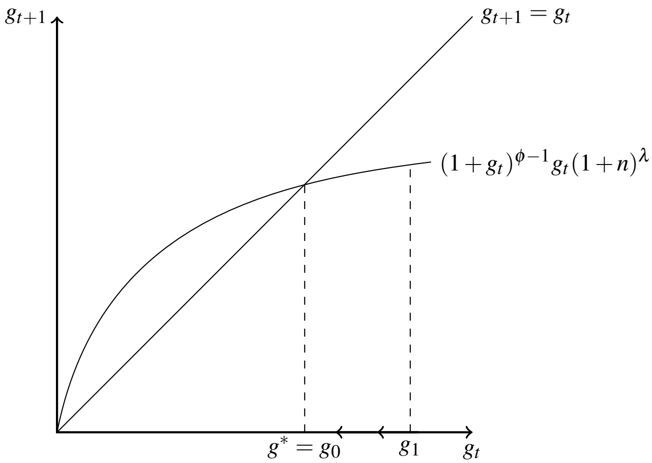
ahol $A_1/A_0 = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$, mert itt még egyensúlyban volt a gazdaság, utána érte csak sokkhatás, illetve $L_1/L_0 = 1+n$:

$$\frac{g_1}{g_0} = (1+n)^{\frac{\lambda(\phi-1)}{1-\phi}} \left(\frac{s_{R,2}}{s_{R,1}}\right)^{\lambda} (1+n)^{\lambda} = \left(\frac{s_{R,2}}{s_{R,1}}\right)^{\lambda}. \tag{5.21}$$

Az (5.21) egyenlet alapján tehát a sokk bekövetkeztekor a tudás növekedési rátája a K+F szektorban dolgozók részarányának növekedésével arányos mértékben emelkedik. Miután a részarány változása egyszeri volt, és a következő periódusoktól permanensen $s_{R,2}$ marad, az átmenetegyenlet újra a

$$g_{t+1} = (1+g_t)^{\phi-1} g_t (1+n)^{\lambda}$$

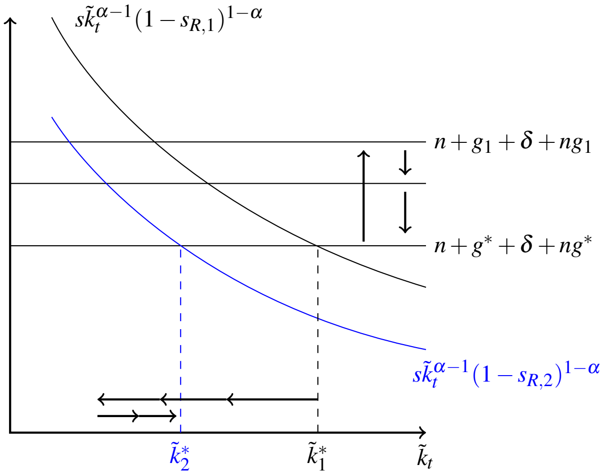
formában adott, így az 5.6 ábrán a függvény alakja nem változik, és a megemelkedett növekedési ütem csökkenni kezd, hogy visszatérjen az eredeti állandósult állapotbeli értékére. A technikai haladást tehát csak ideiglenesen lehet felgyorsítani a kutatók részarányának növelésével, hosszú távon nem.



5.6. ábra. A K+F szektorban dolgozók részarány-növekedésének hatása g_t-re

Az 5.7 ábrán a sokk periódusában a vízszinten egyenes magasabbra szintre ugrik ($n + g^* + \delta + ng^*$-ról $n + g_1 + \delta + ng_1$-re), majd folyamatosan lefelé tolódik, ahogy g_t csökken, míg el nem éri újra az eredeti állandósult állapotbeli értékét. Közben a görbe a sokk hatására lefelé tolódik, és alacsonyabb szinten is marad s_R növekedése miatt. Ha már egyensúlyi növekedési pályán haladt a gazdaság, mielőtt a változás bekövetkezett, akkor a $\tilde{k}_1^*$ hatékonysági egységre jutó tőkeállománnyal rendelkezett. A sokk hatására

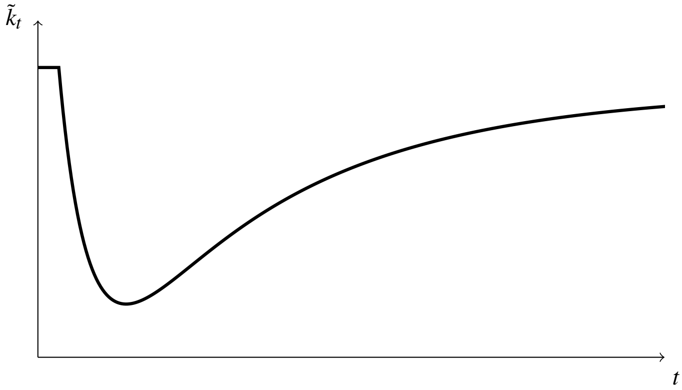
– az egyenes felfelé és a görbe lefelé tolódásával – ebben a pontban negatívvá vált a fajlagos tőkeállomány növekedési rátája, vagyis a tőke csökkenni kezdett. Ahogy a technikai haladás egyre lassul az alkalmazkodás időszakában, úgy tolódik egyre lejjebb a vízszintes egyenes, folyamatosan lassítva a fajlagos tőkeállomány csökkenését. Végül az aktuális hatékonysági egységre jutó tőke mellett az $s\tilde{k}_t^{\alpha-1}(1-s_{R,2})^{1-\alpha} > n+g_t+\delta+ng_t$ reláció alakul ki, vagyis a tőke növekedési rátája pozitívvá válik, és a tőke növekedésnek indul, míg el nem éri az új állandósult állapotot, $\tilde{k}_2^*$-ot, mely alacsonyabb, mint a korábbi egyensúlyi érték.



5.7. ábra. A K+F szektorban dolgozók részarány-növekedésének hatása $\tilde{k}_t$-re

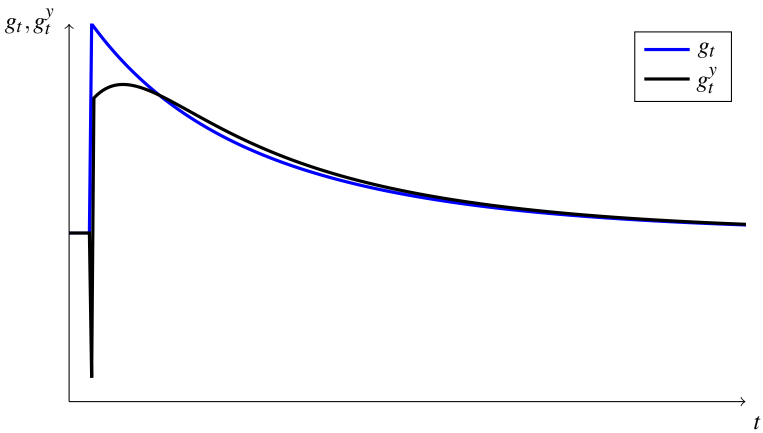
Az 5.8 ábrán jól látható, milyen pályát ír le az egyensúlyból induló hatékonysági egységre jutó tőkeállomány a K+F szektorban dolgozók részarányának növekedése következtében.

Az 5.9 ábra a technikai haladás hirtelen felgyorsulását mutatja a sokk idején, majd pedig a folyamatos lassulását, míg vissza nem tér az eredeti állandósult állapotába, ahogy ezt már az 5.6 ábránál is megjegyeztük. Mellette g_y-nal jelölve az egy főre jutó jövedelem növekedési rátájának alakulása látható, mely a sokk előtti egyensúlyi növekedési pályán ugyanakkora volt, mint a tudás növekedési rátája (g_t). A részarány megemelkedésekor a növekedési ütem hirtelen visszaesett, mert relatíve kevesebb munkás került a végterméket előállító vállalathoz, ami lelassította az egy főre eső GDP növekedését. Ezt követően a munka termelékenységének egyensúlyinál magasabb növekedése pozitívan hatott az egy főre eső GDP növekedési rátájára is, de addig, amíg az 5.8 ábrán a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány csökkenő tendenciát mutatott, a termelékenység növekedése volt a gyorsabb. Miután a fajlagos tőkeállomány újra növekedésnek indult,



5.8. ábra. A hatékonysági egységre jutó tőkeállomány alakulása s_R permanens emelekedése után

az egy főre eső jövedelem növekedési rátája lett a magasabb, míg végül újra egyensúlyi növekedési pályára állt a gazdaság, ahol mindkét ráta ugyanakkora, és a sokk előtti értékkel egyeznek meg.



5.9. ábra. A tudás és az egy főre eső GDP növekedési rátájának alakulása s_R permanens emelekedése után

Láttuk tehát, hogy a K+F szektort is érintő változás szintén csak ideiglenesen tudta felgyorsítani a gazdasági növekedést, hosszú távon nem változtatta azt meg.

Aranyszabály

Az egy főre eső fogyasztás alakulására mindkét fenti változás – s és s_R emelkedése – pozitív és negatív hatásokkal is bírhat. A megtakarítási ráta növelésével egyidejűleg lecsökken a fogyasztási hányad, viszont növekszik a hatékonysági egységre jutó jövedelem, így a fogyasztás alakulása e két ellentétes irányú hatás erősségétől függ. Egyensúlyi növekedési pályán felhasználva az (5.19) összefüggést

$$c_t^* = (1-s)\left(\frac{s}{n+g^*+\delta+ng^*}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R)A_t,$$

ahol az (5.20) képlet alapján

$$A_t = \left(\frac{\rho(s_R L_t)^\lambda}{g^*}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}.$$

A maximális egy főre eső fogyasztás biztosításához az szükséges, hogy az aranyszabály szerinti megtakarítási ráta – a Solow-modellhez hasonlóan – a tőke termelési rugalmasságával egyezzen meg ($s_g = \alpha$). Az összefüggés levezetését lásd a 3. feladatban.

Ha s_R emelkedik meg a gazdaságban, akkor megnő a kutatók aránya, vagyis az alkalmazkodási periódusban felgyorsul a munka termelékenységének növekedése, ami pozitívan hat az egy főre eső jövedelemre és így a fogyasztásra is. Közben ez azt is jelenti, hogy a végterméket előállító vállalatnál alkalmazottak aránya lecsökken, ami pedig negatívan hat az egy főre eső jövedelemre és fogyasztásra egyaránt. Az aranyszabály szerinti K+F részarány ($s_{R,g}$) szintén megkapható az egy főre eső fogyasztás s_R szerinti maximalizálásával (lásd 3. feladat). Akkor biztosítható az elérhető legmagasabb egyensúlyi egy főre eső fogyasztás, ha a teljes népesség

$$s_{R,g} = \frac{\lambda}{1+\lambda-\phi}$$

hányada a K+F szektorban helyezkedik el.

A konvergencia sebessége

Nézzük meg, milyen gyorsan közelít az egyensúlyi növekedési pálya felé a gazdaság! A technikai haladás átmenetegyenletéből közelítési eljárással levezethető, hogy az egyensúlyinál magasabb növekedési ráta esetén lassulás, alacsonyabb esetén pedig gyorsulás figyelhető meg. A növekedési ráta változása az állandósult állapotától vett távolsággal arányos[7]:

$$\ln g_{t+1} - \ln g_t = (1-\phi)\left[(1+n)^{\frac{-\lambda}{1-\phi}} - 1\right](\ln g_t - \ln g^*).$$

[7] A konvergencia sebességének levezetését lásd az 5.A függelékben.

Látható, hogy minél közelebb esik ϕ egyhez, annál lassabbá válik a konvergencia a modellben, és $\phi = 1$ esetén az átmenetegyenlet

$$g_{t+1} = (1+n)^{\lambda} g_t$$

alakban írható fel, ami pozitív népességnövekedés esetén a technikai haladás folyamatos gyorsulását eredményezi, és g_t a végtelenbe tart.

5.3. Endogén növekedés

Láttuk, hogy a konvergencia egyre lassul, ahogy a K+F szektor kibocsátásának tudás szerinti rugalmassága növekszik. Legyen $\phi = 1$ most a rugalmasság! Mivel ebben az esetben nem lenne konvergencia az egyensúly felé, ha van népességnövekedés a gazdaságban, mert g_t folyamatosan emelkedne, tegyük fel, hogy $n = 0$! Ekkor a K+F szektor termelési függvénye:

$$A_{t+1} - A_t = \rho A_t (s_R L_t)^{\lambda},$$

ahol $L_t = L$ konstans. Ebből a tudás növekedési rátája

$$g_t = \rho (s_R L)^{\lambda},$$

ami azt jelenti, hogy a növekedési ütem konstans, így nem csak egyensúlyban, hanem minden periódusban ugyanakkora ($g_t = g$). Az összefüggés szerint abban a gazdaságban gyorsabb a technikai haladás ahol magasabb a K+F szektorban dolgozó kutatók aránya a népességen belül, vagyis érdemes támogatni a K+F szektort a növekedés elősegítése érdekében. Empirikusan a pozitív irányú kapcsolat a kutatás-fejlesztésre fordított kiadások GDP-n belüli aránya és a termelékenység növekedési rátája között az 5.10 ábrán 23 OECD ország adatai alapján nem támasztható alá. A minta elemszáma azonban egyrészt elég alacsony, másrészt pedig a tudás országok között is áramlik a valóságban, míg a modellünk egy zárt gazdaságra lett felírva.

A modell többi része – mivel a munka hatékonyságának növekedési rátája konstans – a hagyományos Solow-modellhez hasonló. A végterméket előállító vállalat termelési függvénye konstans népesség mellett

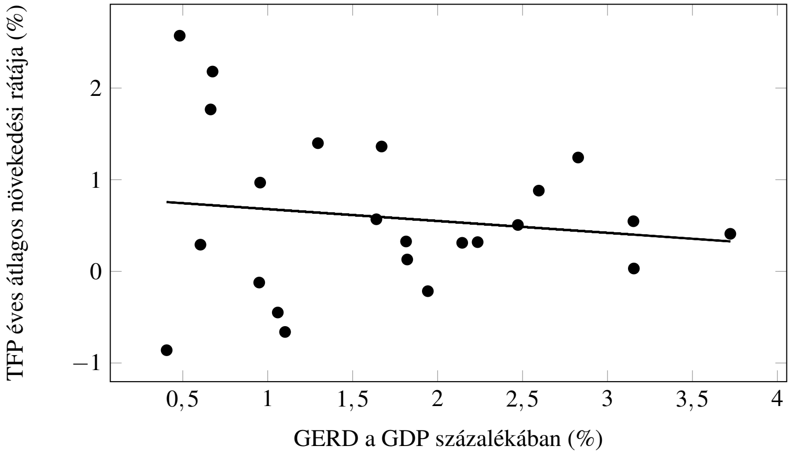
$$Y_t = K_t^{\alpha} (A_t (1 - s_R) L)^{1-\alpha},$$

ahol A_t növekedését már levezettük, a tőke pedig a felhalmozási korlát által adott módon változik:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta) K_t.$$

Ez utóbbit hatékonysági egységre jutó változókkal felírva, és kihasználva, hogy a beruházás a megtakarítással egyezik meg, ami a jövedelem s hányada, az átmenetegyenlet:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+g)} \left(s \tilde{k}_t^{\alpha} (1 - s_R)^{1-\alpha} + (1 - \delta) \tilde{k}_t \right).$$



5.10. ábra. A termelékenység éves átlagos növekedési üteme és a K+F-re fordított kiadások közti kapcsolat 23 OECD tagállamban, 1994-2014 (éves átlagok). Adatok forrása: OECD és Penn World Table 9.0.

Belátható, hogy a fajlagos változók minden pozitív indulóértékből az állandósult állapothoz konvergálnak, melyek értéke

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}(1-s_R),$$

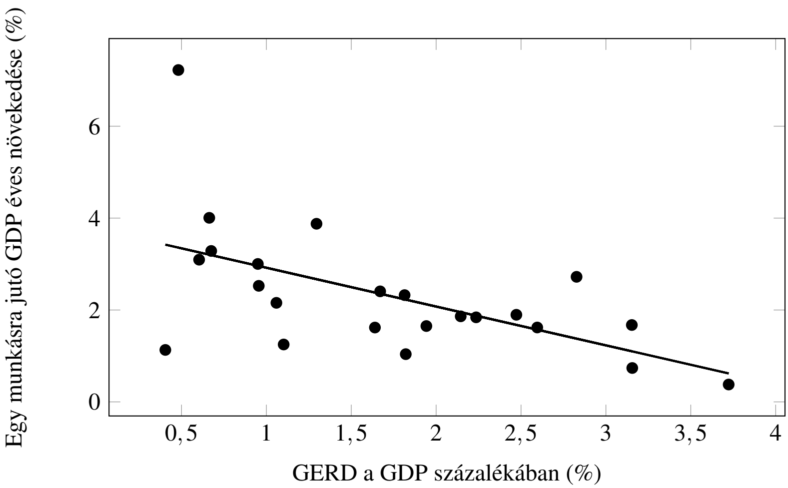
$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-s_R).$$

Az eredmény tulajdonképpen ugyanaz, mint a szemi-endogén változatban, azzal a különbséggel, hogy itt nincs népességnövekedés, illetve a technikai haladás konstans értéke más paraméterektől függ. Mivel egyensúlyban a hatékonysági egységre jutó értékek nem változnak, az egy főre jutó változók egyensúlyi növekedési üteme a munka termelékenységének növekedési ütemével egyezik meg, például:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} = \rho(s_R L)^{\lambda} - 1. \tag{5.22}$$

Egyensúlyi növekedési pályán tehát az egy főre eső jövedelem konstans ütemben növekszik, melyet exogén népességnövekedés nélkül is sikerült hosszú távon biztosítani, vagyis a modell teljesen endogénnek tekinthető. Az (5.22) egyenletből látszik, hogy a kutatók részarányának növelésével – szemben a szemi-endogén modellel – hosszú távon is gyorsítható a gazdasági növekedés, így a modell szerint érdemes a K+F szektort támogatni. Az 5.11 ábra 23 OECD országban mutatja a K+F-re fordított kiadások

GDP-n belüli aránya és az egy munkásra jutó GDP növekedési rátája közti kapcsolatot, ami inkább negatívnak látszik, ellentmondva a modell eredményének, de ahogy az 5.10 ábránál is említettük, óvatosan kell kezelni ezeket a következtetéseket.



5.11. ábra. Az egy munkásra jutó GDP éves átlagos növekedési rátája és a K+F-re fordított kiadások közti kapcsolat 23 OECD tagállamban, 1994-2014 (éves átlagok). Adatok forrása: OECD és Penn World Table 9.0.

A modell szerint az egy főre eső GDP egyensúlyi növekedési üteme akkor is magasabb, ha ceteris paribus nagyobb az adott ország népessége, vagyis itt is megjelenik a mérethatás, ami már az externália alapú modellben is problémát jelentett. Előnye ennek a modellnek az externália alapú endogén növekedéssel szemben többek között az, hogy itt létezik egy egyensúlyi növekedési pálya, ahová a gazdaság tart. Ez azt jelenti, hogy az alacsonyabb egy főre jutó jövedelemmel rendelező országok – minden más változatlansága mellett – gyorsabban növekednek, mint a magasabb jövedelműek, vagyis a K+F alapú modell visszaadja a valóságban megfigyelt feltételes konvergenciát, míg az externália alapúban nem volt konvergencia.

5.4. Összefoglalás

1. Ebben a fejezetben a technológia fejlődése már nem volt exogén, és nem is externális hatások melléktermékeként jelent meg, hanem egy kutatás-fejlesztéssel foglalkozó szektorban jöttek létre az új ötleteket. A gazdaság így kétszektorossá

vált, és a népesség konstans hányada kutatóként, a másik része pedig a végterméket előállító vállalatnál helyezkedett el. A K+F szektorban előállított technológiát később mindkét típusú vállalat használni tudta a termelési folyamata során.

2. A $0 < \phi < 1$ esetben a gazdaság minden indulóértékből az egyensúlyi növekedési pálya felé konvergált, ahol az egy főre eső GDP növekedése a technikai haladással egyezett meg. Hosszú távon csak pozitív népességnövekedéssel lehetett fenntartani a folyamatos fejlődést, egyéb paraméterek (például a megtakarítási ráta vagy a kutatók részaránya) növelése csak ideiglenes gyorsulást eredményezett az átmenet időszakában. Emiatt ez a verzió csak szemi-endogén növekedést tartalmazott.

3. Láttuk, hogy ϕ növekedésével a konvergencia egyre lassul, így levezettük a modellt $\phi = 1$-gyel, népességnövekedés nélkül. Itt már teljesen endogén növekedést kaptunk, hiszen az egy főre eső GDP növekedési üteme egyensúlyban a technikai haladással megegyezően a modell paramétereitől függött és nem az exogén népességnövekedéstől. A K+F szektorban dolgozók részarányának emelésével tartósan képesek voltunk felgyorsítani a gazdasági növekedést.

4. Az externália alapú endogén növekedési modellhez képest pozitívum többek között, hogy ebben a modellben a gazdaság egy egyensúlyi növekedési pálya felé tart, tehát alátámasztja a feltételes konvergencia hipotézisét, míg a korábbi modellben ez nem volt megfigyelhető. Hasonlóság a két modellben, hogy a mérethatás problémája mindkét esetben fennállt.

5. Bár a növekedést sikerült endogenizálni, a modell hiányossága maradt, hogy nem tartalmaz fogyasztói optimalizációt, így a jövedelem megtakarítási illetve fogyasztási hányada kívülről adott, nem a modellből határozódnak meg.

5.5. Feladatok

1. Vegyük a szemi-endogén növekedési modellt ($0 < \phi < 1$ és $n > 0$)! Tegyük fel, hogy a nulladik periódusban a gazdaság már egyensúlyi növekedési pályán halad, vagyis

$$g_t \equiv \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} \quad \text{és} \quad g_t^y \equiv \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t}$$

növekedési ráták is egyensúlyban vannak, azaz

$$g^* = g^{y,*} = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1.$$

Az első periódusban a K+F szektor termelékenységi paramétere (ρ) tartósan megemelkedik.

a) Mutassuk meg, hogy a technológia növekedési rátája az első és második periódus között:

$$g_1 = \frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{\rho'}{\rho} g^*!$$

b) Ábrázoljuk, mi történik a technikai haladással a termelékenységi paraméter megváltozásának következtében!

c) Megváltozik emiatt az egy főre eső GDP növekedési üteme hosszú távon? Mi történik hosszú távon az egy főre eső GDP-vel és fogyasztással?

d) Az endogén növekedési modellben ($\phi = 1, n = 0$) mi történik hosszú távon az egy főre jutó GDP növekedési ütemével a fenti változás következtében?

2. Tekintsük a szemi-endogén növekedési modellt ($0 < \phi < 1$ és $n > 0$)! Tegyük fel, hogy a gazdaság már egyensúlyi növekedési pályán halad, mikor a népesség növekedési rátája lecsökken ($n' < n$, de $n' > 0$)!

   a) Ábrázoljuk a fenti változást!

   b) Ismertek az alábbi paraméterek: $\alpha = 1/3, \rho = \lambda = 1, \phi = 1/2, s = 0,2, \delta = 0,06, s_R = 0,03$ és kezdetben $n = 0,015$. A népességnövekedés később $n' = 0,005$-re csökken. Számítsa ki az állandósult állapotbeli értékeket a változás előtt és után ($g_t, g_t^y, K_t/Y_t$)!

   c) Tegyük fel, hogy kezdetben egyensúlyi állapotban volt a gazdaság, majd a 10. és 11. periódus között csökkent le n! Az indulóértékek közül tudjuk, hogy $L_0 = 1$. Számítsuk ki A_0-t és K_0-t, majd rajzoljuk fel $g_t, g_t^y, K_t/Y_t$ változását az első 200 periódusban!

3. Tekintsük a szemi-endogén növekedési modellt! Mekkora az aranyszabály szerinti megtakarítási ráta? Mekkora s_R maximalizálja az egy főre jutó fogyasztást?

4. Tekintsük a g_t-re felírt átmenetegyenletet:

$$g_{t+1} = (1+g_t)^{\phi-1} g_t (1+n)^{\lambda}!$$

   Hogyan néz ki az átmenetegyenlet ábrája és hogyan változik hosszú távon a technológia növekedési rátája az alábbi esetekben:

   a) $\phi = 1$ és $n > 0$?

   b) $\phi > 1$ és $n = 0$?

   c) $\phi < 1$ és $n < 0$?

   d) $\phi = 1$ és $n < 0$?

5.A. A konvergencia sebessége

Vegyük az (5.11) átmenetegyenlet elsőrendű Taylor-közelítését[8] $g_t = g^*$ körül:

$$g_{t+1} \approx g^* + (1+n)^{\lambda}(1+g^*)^{\phi-2}(1+\phi g^*)(g_t - g^*).$$

Ha behelyettesítjük a tudás növekedési rátájának állandósult állapotbeli értékét, ami

$$g^* = (1+n)^{\frac{\lambda}{1-\phi}} - 1,$$

akkor egyszerűsítések után a

$$g_{t+1} - g^* = \left[(1-\phi)(1+n)^{\frac{-\lambda}{1-\phi}} + \phi\right](g_t - g^*) \tag{5.23}$$

összefüggéshez jutunk. Ha kihasználjuk, hogy közelítőleg

$$g_{t+1} - g^* \approx g^*(\ln g_{t+1} - \ln g^*)$$

akkor az (5.23) egyenlet az átalakítás után:

$$\ln g_{t+1} - \ln g^* = \left[(1-\phi)(1+n)^{\frac{-\lambda}{1-\phi}} + \phi\right](\ln g_t - \ln g^*). \tag{5.24}$$

Kivonva az egyenlet mindkét oldalából $\ln g_t$-t és hozzáadva $\ln g^*$-ot a konvergencia végső összefüggéséhez jutunk:

$$\ln g_{t+1} - \ln g_t = (1-\phi)\left[(1+n)^{\frac{-\lambda}{1-\phi}} - 1\right](\ln g_t - \ln g^*).$$

[8]Egy $f(x)$ függvény elsőrendű Taylor-közelítésének képlete $x = x_0$ pont körül:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

III. rész

Növekedési modellek fogyasztói optimalizációval

VI.

RAMSEY-MODELL

Az eddig megismert modellek közös jellemzője, hogy a jövedelemből megtakarítani valamint fogyasztani kívánt hányad exogén módon adott és konstans volt. Ha hiányzik a fogyasztói optimalizáció, akkor a modell nem alkalmas arra, hogy különböző ösztönzők viselkedésre gyakorolt hatását elemezzük vele. Ahhoz, hogy pontosabb képet kaphassunk a gazdasági növekedésről, endogenizálnunk kell a fogyasztási és megtakarítási rátákat, így ebben a fejezetben hasznosságmaximalizáló fogyasztókkal bővítjük a modellt Ramsey (1928), Cass (1965) és Koopmans (1965) alapján.

A Ramsey-modell a gazdasági növekedés neoklasszikus alapmodellje, mely nem tartalmaz piaci tökéletlenségeket, és nem tesz különbséget a háztartások vagy generációk között. Használható például fiskális poltikával, adózással és üzleti ciklusokkal kapcsolatos kérdések vizsgálatára. Hosszú távú következtetései lényegileg megegyeznek a Solow-modellével, de a rövid távú dinamikájukban jelentős eltérés tapasztalható.

Miután a megtakarítási ráta a gazdasági környezetnek megfelelően változhat, látni fogjuk majd, mi és hogyan befolyásolja alakulását (például adók, támogatások, kamat, jövedelem). A ráta értéke a változók állandósult állapotát is meghatározza, illetve az odáig tartó konvergencia sebességét is lassíthatja vagy gyorsíthatja.

6.1. A modell felépítése

A fejezet első részében a modell két reprezentatív szereplőt tartalmaz: vállalatot és fogyasztót. A vállalat viselkedése megegyezik a Solow-modellben tanultakkal, vagyis termelési tényezők – tőke és munkaerő – felhasználásával, profitját maximalizálva állítja elő végtermékét. Mind az előállított termék, mind a termelési tényezők árai a tökéletesen versenyző piacokon a kereslet és kínálat egyensúlyában határozódnak meg.

A reprezentatív háztartások az egész életpályájukon optimalizálva maximalizálják hasznosságukat a költségvetési korlátok mellett. Jövedelmüket munkabérből és a megtakarításaik után kapott hozamokból szerzik, melyet elkölthetnek fogyasztási cikkek vásárlására, vagy továbbvihetik azt a következő periódusra. Megtakarításaikat kétféle eszközbe fektethetik. Vásárolhatnak belőle tőkét, melyet bérleti díj ellenében bérbe adhatnak a vállalatnak, vagy valamilyen pénzügyi eszközt (például kötvényt), melynek értékét később kamatokkal együtt kapják vissza.

A fejezet második részében állammal bővítjük a modellt, mely fiskális politikai funkciókat lát el, vagyis adót szed a fogyasztótól és kormányzati kiadásokat eszközöl.

Vállalat

A reprezentatív vállalat tőkét és hatékony munkaerőt használ fel a termelés során, melynek eredményeként Y_t terméket hoz létre a termelési függvény által meghatározott módon:

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t).$$

A függvény tegyen eleget a Solow-modellben felsorolt követelményeknek, vagyis legyen állandó mérethozadékú, a tőke és a munka határterméke pedig csökkenő a hozzá tartozó termelési tényező növekedése esetén, illetve teljesítse az Inada-feltételeket! Az egyszerűség kedvéért legyen a munka hatékonysága minden periódusban egységnyi, a népesség pedig konstans[1]:

$$A_t = 1 \quad \rightarrow \quad g = 0,$$

$$L_t = L_{t+1} \quad \rightarrow \quad n = 0.$$

A vállalat a felhasznált munka után bért, a tőke után pedig bérleti díjat fizet, és az alábbi profitfüggvényt maximalizálja minden periódusban a döntési változói szerint:

$$\pi_t = F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t^K K_t \quad \rightarrow \quad \max_{K_t, L_t}.$$

Az elsőrendű feltételek alapján – mint ahogy azt a korábbi modellekben is láttuk – a tényezőárak a határtermékekkel egyeznek meg optimumban:

$$\frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K_t} = r_t^K, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L_t} = w_t.$$

A modell levezetéséhez használjuk a Cobb-Douglas típusú termelési függvényt:

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}!$$

Fogyasztó

A modellben nem teszünk különbséget az egyes generációk vagy háztartások között, így minden fogyasztó ugyanolyan preferenciákkal rendelkezik, produktivitásuk egyforma, emiatt munkájuk után ugyanakkora bért kapnak, illetve ugyanakkora hozamokban részesülnek megtakarításaik után.

A reprezentatív fogyasztó célja az *életpálya hasznosságának* maximalizálása a költségvetési korlátok mellett. Jövedelme abból származik, hogy megfelelő bérleti díj ellenében bérbe adja a vállalatnak az általa birtokolt tőkét, munkája után bért fizetnek neki, a vállalat tulajdonosaként részesül annak profitjából, illetve pénzügyi eszközei után kamatot kap. Minden periódusban arról dönt, hogy a jövedelemből mennyit fordítson fogyasztási célokra és mennyit takarítson meg, de itt már nem exogén adottság a fogyasztási és megtakarítási hányad, hanem az optimalizáció eredményeként adódnak. Megtakarításai elhelyezésére két lehetősége van: tőkeeszközbe történő beruházás, vagy pénzügyi eszköz vásárlása.

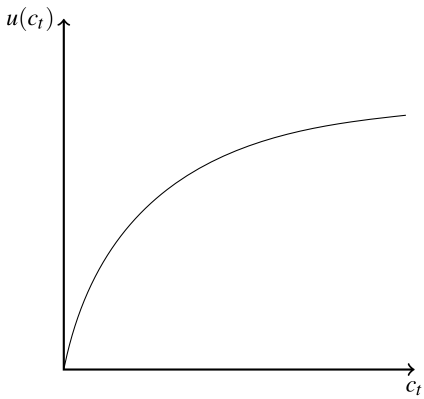
[1] A modell könnyen bővíthető exogén technikai haladással és népességnövekedéssel (lásd 3. feladat), de mivel a változók hosszú távú viselkedése megegyezik a Solow-modellben tapasztaltakkal, ettől most eltekintünk.

Egy periódus hasznossága az adott időszak fogyasztásától függ, jelöljük ezt $u(c_t)$-vel a t. periódusban, ahol

$$c_t = \frac{C_t}{L_t}$$

az egy főre eső fogyasztásra utal, mint a korábbi modellekben. Feltesszük, hogy több termék elfogyasztása nagyobb hasznosságot biztosít, de még egy termék elfogyasztása egyre kisebb pótlólagos hasznosságot eredményez (*csökkenő határhaszon*). A t. periódus hasznossági függvénye tehát kétszer folytonosan differenciálható, növekvő és konkáv (lásd 6.1 ábra):

$$u'(c_t) > 0,$$
$$u''(c_t) < 0.$$



6.1. ábra. A t. periódus hasznossága a fogyasztás függvényében

Ezáltal biztosítani tudjuk majd, hogy a fogyasztó preferálja a fogyasztási pálya simítását azzal szemben, hogy bizonyos periódusokban nagyon keveset, míg másokban nagyon sokat fogyasszon. A simítás a megtakarítására oly módon lesz hatással, hogy azokban az időszakokban, mikor jövedelme alacsony, hitelfelvételre, magas jövedelem esetén pedig megtakarításra lesz ösztönözve.

Feltesszük, hogy a fogyasztási függvény az Inada-feltételeknek is eleget tesz:

$$u'(c_t) \to \infty, \quad \text{ha} \quad c_t \to 0,$$
$$u'(c_t) \to 0, \quad \text{ha} \quad c_t \to \infty.$$

Az életpálya-hasznosság (U) az egyes periódusok hasznosságának súlyozott átlaga:

$$U = u(c_1) + \beta u(c_2) + \beta^2 u(c_3) + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t), \tag{6.2}$$

ahol β a *személyes diszkontfaktor* vagy más néven *türelmetlenségi paraméter*, mely megmutatja, hogyan értékeli a fogyasztó a következő periódusok hasznosságát a jelenlegi hasznossághoz képest. Feltesszük, hogy $0 < \beta < 1$, vagyis a jelen fontosabb számára, mint a jövő, és minél közelebb esik β egyhez, annál nagyobb jelentőséggel bír számára következő időszakok hasznossága is.

A reprezentatív fogyasztó *költségvetési korlátja* megmutatja, miből származik a fogyasztó jövedelme, és mire fordítja azt az adott periódusban. Munkakínálata rugalmatlan, és minden fogyasztó egységnyi munkakínálattal rendelkezik. A t. periódusban a fogyasztó bevételei megegyeznek a kiadásaival:

$$w_t + r_t^K k_t + \pi_t + (1+r_t)b_t = c_t + i_t + b_{t+1}. \tag{6.3}$$

Mivel egy fogyasztó korlátját írtuk fel a 6.3 egyenletben, így egy főre eső értékeket tartalmaz, miszerint a w_t bért, az $r_t^K k_t$ tőkejövedelmet, a π_t profitot, és az r_t kamattal együtt visszakapott előző időszakban megvásárolt b_t értékű pénzügyi eszközt (továbbiakban kötvényt) c_t fogyasztásra, i_t beruházásra és b_{t+1} kötvényvásárlásra fordítja. A kötvényállomány időindexe a lejárat dátumára utal, így például b_{t+1} a t. periódusban felhalmozott, de kamatokkal együtt csak a $t+1$. periódusban visszakapott értéket jelöli. Ha $b_{t+1} > 0$, akkor megtakarításról, ha pedig $b_{t+1} < 0$, hitelfelvételről beszélünk. Az előbbi után kamatot kap a fogyasztó, utóbbi után pedig kamatfizetési kötelezettség terheli. Ellentétben az előző fejezetekben tárgyalt modellekkel, a fogyasztó itt képes eladósodni is.

A fogyasztó felelős a tőke bővítéséért és pótlásáért, melyekre a beruházások teremtenek lehetőséget, így beruházási függvénye a már ismert formát ölti[2]:

$$i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t. \tag{6.4}$$

A (6.4) egyenletet a (6.3) korlátba helyettesítbe kapjuk, hogy

$$w_t + r_t^K k_t + \pi_t + (1+r_t)b_t = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + b_{t+1}. \tag{6.5}$$

Ha két egymás után következő periódus korlátját összekapcsoljuk a kötvényállomány segítségével, levezthető az *intertemporális költségvetési korlát*. Vegyük az életpálya utolsó, T. periódusbeli költségvetési korlátját b_T-re rendezve:

$$b_T = \frac{c_T + k_{T+1} - (1-\delta)k_T + b_{T+1} - w_T - r_T^K k_T - \pi_T}{1+r_T},$$

majd írjuk be ezt az előző, $T-1$. periódus korlátjába:

$$w_{T-1} + r_{T-1}^K k_{T-1} + \pi_{T-1} + (1+r_{T-1})b_{T-1} = c_{T-1} + k_T - (1-\delta)k_{T-1}$$
$$+ \frac{c_T + k_{T+1} - (1-\delta)k_T + b_{T+1} - w_T - r_T^K k_T - \pi_T}{1+r_T}!$$

[2] A tőkefelhalmozási korlát egy főre eső változókkal felírt verziója azért ilyen egyszerű, mert kivettük a népességnövekedést a modellből.

Ez utóbbi korlátot b_{T-1}-re rendezve:

$$b_{T-1} = \frac{c_{T-1} + k_T - (1-\delta)k_{T-1} - w_{T-1} - r_{T-1}^K k_{T-1} - \pi_{T-1}}{1 + r_{T-1}}$$

$$+ \frac{c_T + k_{T+1} - (1-\delta)k_T + b_{T+1} - w_T - r_T^K k_T - \pi_T}{(1+r_{T-1})(1+r_T)}.$$

Folytatva tovább a fenti logikát, és a megkapott kötvényértéket mindig behelyettesítve az előző időszak korlátjába, a következő összefüggéshez jutunk, ha egészen az életpálya kezdetéig visszagörgetjük:

$$w_1 + r_1^K k_1 + \pi_1 + \frac{w_2 + r_2^K k_2 + \pi_2}{1+r_2} + \frac{w_3 + r_3^K k_3 + \pi_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_T + r_T^K k_T + \pi_T}{\prod\limits_{t=2}^{T}(1+r_t)}$$

$$+(1+r_1)b_1 = c_1 + k_2 - (1-\delta)k_1 + \frac{c_2 + k_3 - (1-\delta)k_2}{1+r_2} \tag{6.6}$$

$$+\frac{c_3 + k_4 - (1-\delta)k_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{c_T + k_{T+1} - (1-\delta)k_T + b_{T+1}}{\prod\limits_{t=2}^{T}(1+r_t)}$$

A (6.6) összefüggés a fogyasztó intertemporális költségvetési korlátja, melynek bal oldalán a jövedelmek jelenértéke található, jobb oldalán pedig a kiadásoké, így a két jelenértéknek meg kell egyeznie.

Az életpálya végi eladósodás korlátozására kössük ki a *nincs Ponzi-játék* feltételét:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{k_{T+1} + b_{T+1}}{\prod\limits_{t=2}^{T}(1+r_t)} \geqq 0,$$

mely optimumban egyenlőségként teljesül (*transzverzalitási feltétel*):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{k_{T+1} + b_{T+1}}{\prod\limits_{t=2}^{T}(1+r_t)} = 0.$$

Fogyasztói optimalizáció

A fogyasztó a (6.2) életpálya-hasznosságát maximalizálja a (6.5) által adott költségvetési korlátok és a transzverzalitási feltétel mellett. A fogyasztó problémáját a *Lagrange-módszer* segítségével oldjuk meg, ahol a Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \text{célfüggvény} + \text{Lagrange-multiplikátor} \cdot (\text{a korlát 0-ra rendezve}). \tag{6.7}$$

Beírva az életpálya hasznosságát, illetve a korlátokat nullára rendezve, és a λ_t-vel jelölt multiplikátorral szorozva azokat:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t)$$

$$+ \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \Big(w_t + r_t^K k_t + \pi_t + (1+r_t)b_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - b_{t+1} \Big).$$

A Lagrange-függvényt a fogyasztó döntési változói szerint deriváljuk. A fogyasztó dönt minden periódusban a fogyasztásáról $(c_1, c_2, \ldots)$, valamint a felhalmozni kívánt tőkéről $(k_2, k_3, \ldots)$ és kötvényről $(b_2, b_3, \ldots)$. Az tőke- és a kötvényállomány indulóértéke (k_1 és b_1) adottság, melyek értelmezhetőek úgy, mint az elődöktől örökölt mennyiségek. Ezekről tehát a fogyasztó nem dönthet. Az alábbiakban a t. és $t+1$. periódus döntési változói szerinti deriváltak láthatók, a többi pedig hasonlóképpen megkapható:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^{t-1} u'(c_t) - \lambda_t = 0 \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}} = \beta^{t} u'(c_{t+1}) - \lambda_{t+1} = 0 \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}) = 0 \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_{t+2}} = -\lambda_{t+1} + \lambda_{t+2}(1 + r_{t+2}) = 0 \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1}(r_{t+1}^K + (1-\delta)) = 0 \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+2}} = -\lambda_{t+1} + \lambda_{t+2}(r_{t+2}^K + (1-\delta)) = 0. \tag{6.13}$$

A (6.8) és a (6.9) alapján a t. és $t+1$. időszakhoz tartozó Lagrange-multiplikátor értéke:

$$\lambda_t = \beta^{t-1} u'(c_t),$$

$$\lambda_{t+1} = \beta^{t} u'(c_{t+1}),$$

melyeket a (6.10) egyenletbe helyettesítve, átrendezés után az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$u'(c_t) = (1 + r_{t+1})\beta u'(c_{t+1}). \tag{6.14}$$

A kapott összefüggés az *Euler-egyenlet*, mely kapcsolatot teremt két egymást követő időszak fogyasztása között. A fogyasztónak döntenie kell, hogy vagyonának egy egységét a t. periódusban elfogyasztja és az $u'(c_t)$ hasznosságot jelent neki, vagy pedig a

t. periódusban megtakarítja azt, és a következő időszakban – mikor kamatokkal együtt visszakapta – fogyasztja csak el. Ez utóbbi $(1+r_{t+1})u'(c_{t+1})$ hasznosságot jelent, mert a kapott kamatot is felhasználhatja. Mivel a következő időszak most kevésbé fontos számára, mint a jelenlegi, így β-val súlyozza a hasznosságot. A (6.14) szerint tehát akkor dönt optimálisan a fogyasztó, ha az egymást követő periódusok határhaszna megegyezik egymással.

A (6.10) és a (6.12) összefüggés λ_t-re rendezve:

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}(1+r_{t+1}),$$

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}(r^K_{t+1} + (1-\delta)),$$

melyek alapján

$$1+r_{t+1} = r^K_{t+1} + (1-\delta). \tag{6.15}$$

A kapott összefüggés a fogyasztó *tőkekínálati függvénye*, mely a két megtakarítási eszköz, a tőke és a kötvény közti *optimális helyettesítés* feltétele. Ha jövedelme egy egységét kötvényben takarítja meg, akkor a következő időszakban azt kamatokkal együtt kapja vissza, vagyis $(1+r_{t+1})$ lesz belőle. Ha pedig tőkeként használja fel, akkor egyrészt bérbe adhatja azt a következő periódusban, ami után r^K_{t+1} bérleti díjat fizet a vállalat, másrészt pedig az el nem használt (nem amortizálódott) tőkét megtarthatja és felhasználhatja, melynek értéke $(1-\delta)$. A (6.15) szerint akkor dönt optimálisan a fogyasztó, ha a tőkéből és a kötvényből származó hozam megegyezik egymással. Így kizárható az arbitrázs lehetősége, és a két megtakarítási eszköz tökéletes helyettesítő. Vegyük észre, hogy az életpálya első tőkekínálati függvényének időindexe 2, mert ha az első periódusban dönthet először a fogyasztó a megtakarításáról, akkor azoknak a második periódusban lesz csak hozama.

A modell levezetéséhez használjunk *CRRA* (konstans relatív kockázatkerülés[3]) típusú hasznossági függvényt, melynek formája:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta}!$$

Nevét onnan kapta, hogy konstans, fogyasztástól független kockázatkerülés jellemzi, melynek értéke θ és kiszámításának módja:

$$-\frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)} = -\frac{-\theta c_t^{-\theta}}{c_t^{-\theta}} = \theta.$$

Mivel a modellben egyelőre nincs bizonytalanság, a fogyasztó kockázatkerülésének mértéke nem releváns, de a függvény másik tulajdonsága, hogy intertemporális helyettesítési rugalmassága szintén konstans, és $1/\theta$ értékű (lásd 1. feladat). Ha θ értéke kisebb, akkor a határhaszon lassabban csökken a fogyasztás növekedése esetén, így a

[3]CRRA: Constant relative risk aversion.

háztartások jobban elviselik a fogyasztás ingadozását az időben. Ha θ értéke nagyobb, akkor pedig jobban érdekeltek a fogyasztás simításában.

Megmutatható, hogy $\theta \to 1$ esetén a CRRA típusú hasznossági függvény logaritmikussá válik[4]:

$$u(c_t) = \ln c_t,$$

mellyel szintén végigvezethető a modell dinamikája (lásd 2. feladat).

Maradva a CRRA hasznossági függvénynél, a t. és $t+1$. periódus fogyasztását összekapcsoló Euler-egyenlet alakja:

$$c_t^{-\theta} = (1+r_{t+1})\beta c_{t+1}^{-\theta}. \tag{6.16}$$

Piacok

A vállalat illetve a fogyasztók a piacokon kerülnek egymással kapcsolatba, melyeken a kereslet és a kínálat egyenlősége mellett alakul ki az egyensúly.

1. *Kölcsönözhető források (vagyoneszközök) piaca*. Mivel minden háztartás azonos jellemzőkkel bír, ezért egyidejűleg szeretne mindenki hitelt felvenni vagy megtakarítani. Ez azt jelenti, hogy egymással nem tudnak ilyen típusú ügyleteket kötni, más olyan szereplő (állam, külföld) pedig még nincs a modellben, mely felé el lehetne adósodni, vagy ahonnan kötvényt lehetne vásárolni. Emiatt egyensúlyban $b_{t+1} = 0$ minden periódusban.

2. *Árupiac*. A vállalat felkínálja az előállított terméket, a fogyasztók pedig fogyasztási, és beruházási céllal vásárolják azt meg:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{6.17}$$

Az összefüggés a fogyasztók költségvetési korlátainak aggregálásával is megkapható, ha kihasználjuk, hogy $b_{t+1} = 0$, és $w_t L_t + r_t^K K_t + \pi_t = Y_t$

3. *Munkapiac*. A fogyasztók felkínálják egységnyi munkaerejüket, így az aggregált munkakínálat L_t^S, amit a vállalat felhasznál a termelés során (L_t^D):

$$L_t^S = L_t^D.$$

4. *Tőkepiac*. A fogyasztók felkínálják az általuk birtokolt tőkét, mely összesen K_t^S, amit a vállalat felhasznál a termelés során (K_t^D):

$$K_t^S = K_t^D.$$

[4] A L'Hospital szabályt alakalmazva:

$$\lim_{\theta\to 1} \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta} = \lim_{\theta\to 1} \frac{c_t^{1-\theta}\ln c_t(-1)}{-1} = \ln c_t.$$

6.2. A modell dinamikája és egyensúlya

A vállalat és a fogyasztó elsőrendő feltételei, valamint korlátai és a piaci egyensúlyok segítségével, adott indulóértékek mellett bármelyik periódus endogén változóinak értéke kiszámítható. A legegyszerűbben c_t és k_t mozgásával írható le a gazdaság viselkedése. Vezessük le a dinamikájukat jellemző egyenleteket!

A modell dinamikája

Miután minden fogyasztó viselkedése megegyezik, a (6.16) Euler-egyenlet nem csak egy fogyasztó, hanem az egész gazdaság fogyasztásának alakulását jellemzi. CRRA hasznossági függvény esetén átrendezés után a fogyasztás növekedési üteme:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \Big[(1+r_{t+1})\beta\Big]^{\frac{1}{\theta}},$$

ahol a (6.15) optimális helyettesítés feltétele szerint a kötvényből származó hozam megegyezik a tőke hozamával. Így

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \Big[\Big(r^K_{t+1} + (1-\delta)\Big)\beta\Big]^{\frac{1}{\theta}},$$

ahol a tőke reálbérleti díja a vállalat (6.1) elsőrendű feltétele alapján a tőke határtermékével egyenlő, ami Cobb-Douglas típusú termelési függvény esetén:

$$r^K_{t+1} = \alpha K^{\alpha-1}_{t+1} L^{1-\alpha}_{t+1} = \alpha k^{\alpha-1}_{t+1}.$$

A fogyasztás dinamikája tehát megadható az egy főre eső tőkeállomány és a paraméterek függvényében:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \Big[\Big(\alpha k^{\alpha-1}_{t+1} + (1-\delta)\Big)\beta\Big]^{\frac{1}{\theta}}. \tag{6.18}$$

A tőke mozgásegyenletének levezetéséhez vegyük a (6.17) árupiaci egyensúlyt egy főre eső változókra átírva:

$$y_t = c_t + i_t,$$

ahol y_t helyére beírható a termelési, i_t helyére pedig a beruházási függvény egy főre eső alakja:

$$k^{\alpha}_t = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t.$$

Átrendezés után az egy főre eső tőkeállomány változását leíró összefüggés:

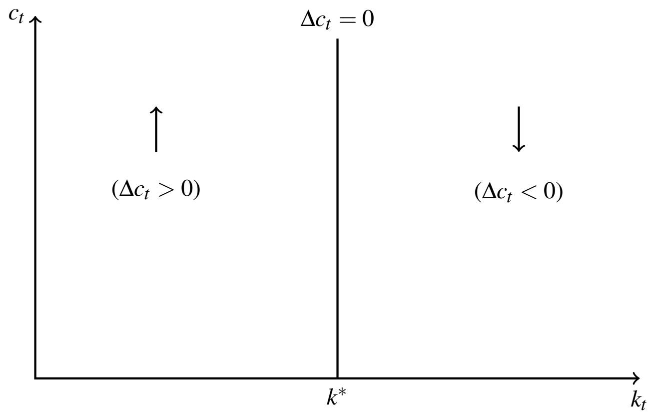
$$k_{t+1} - k_t = k^{\alpha}_t - c_t - \delta k_t. \tag{6.19}$$

A (6.18) és (6.19) összefüggések együtt egy differenciaegyenlet-rendszert alkotnak adott k_1 kezdőérték és a transzverzalitási feltétel mellett, melynek megoldását fázisdiagramon szemléltethetjük. Ehhez elsőként ábrázoljuk egy megfelelő koordinátarendszerben azokat a pontokat, ahol $\Delta c_t = 0$ és $\Delta k_t = 0$, vagyis ahol állandósult állapotban van a gazdaság!

A (6.18) egyenlet szerint a fogyasztás változatlansága esetén az egy főre eső tőkeállomány is konstans:

$$k^* = \left[\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta\right)\frac{1}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{6.20}$$

A 6.2 ábrán tehát a $\Delta c_t = 0$ eset függőleges egyenesként jelenik meg a k^* tőkeállománynál[5]. Ha az aktuális egy főre eső tőkeállomány ettől alacsonyabb, akkor a (6.18) egyenlet szerint a fogyasztás növekedési üteme egynél nagyobb, vagyis $\Delta c_t > 0$, túl magas tőkeállomány esetén pedig egynél kisebb, vagyis $\Delta c_t < 0$. Az ábrán a nyilak ezek alapján arra utalnak, hogy $k_t < k^*$ esetén az egy főre eső fogyasztás növekszik $k_t > k^*$ esetén pedig csökken.



6.2. ábra. Az egy főre eső fogyasztás dinamikája

A (6.19) egyenlet szerint ha az egy főre eső tőkeállomány nem változik, vagyis állandósult állapotban van, akkor:

$$c_t = k_t^\alpha - \delta k_t. \tag{6.21}$$

Ábrázoljuk ezt a függvényt a 6.3 ábrán! A függvény első deriváltja

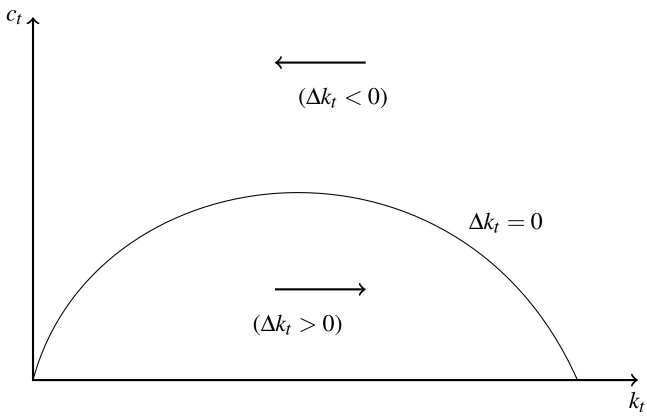
$$c'(k_t) = \alpha k_t^{\alpha-1} - \delta \tag{6.22}$$

akkor pozitív, ha $\alpha k_t^{\alpha-1} > \delta$, és negatív $\alpha k_t^{\alpha-1} < \delta$ esetén. A függvény tehát növekvő a $\alpha k_t^{\alpha-1} = \delta$ pontig, utána pedig csökkenő. A második derivált minden pozitív tőkeérték mellett negatív:

$$c''(k_t) = \alpha(\alpha-1)k_t^{\alpha-2},$$

[5]Vegyük észre, hogy $\Delta c_t = 0$ akkor is, ha $c_t = 0$, vagyis a vízszintes tengelyen lévő pontok esetén is változatlan a fogyasztás. A későbbiekben látni fogjuk, hogy egyensúlyban nem lehet nulla az értéke, így ezek a pontok nem relevánsak.

vagyis a függvény konkáv. Ha az aktuális egy főre eső fogyasztás túl alacsony, azaz a görbe alatti tartományba esik, akkor a (6.19) egyenlet szerint $\Delta k_t > 0$, tehát nő a tőkeállomány. Túl magas – görbe feletti értéket felvevő – fogyasztás mellett pedig $\Delta k_t < 0$, így a tőkeállomány csökken, ahogy az ábrán is mutatják a nyilak az egy főre eső tőke mozgását.



6.3. ábra. Az egy főre eső tőke dinamikája

Tegyük össze a fogyasztás és a tőke dinamikájáról tanultakat egy ábrába (lásd a 6.4 ábra)! Figyeljünk rá, hogy a görbe maximumhelyéhez képest hol van k^*, azaz hova húzzuk be az ábrán a függőleges egyenest! A (6.20) összefüggésben meghatározott k^* és a (6.22) alapján levezethető maximumhely[6] közötti reláció:

$$\left[\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta\right)\frac{1}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} < \left[\frac{\delta}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

vagyis

$$k^* < k_g,$$

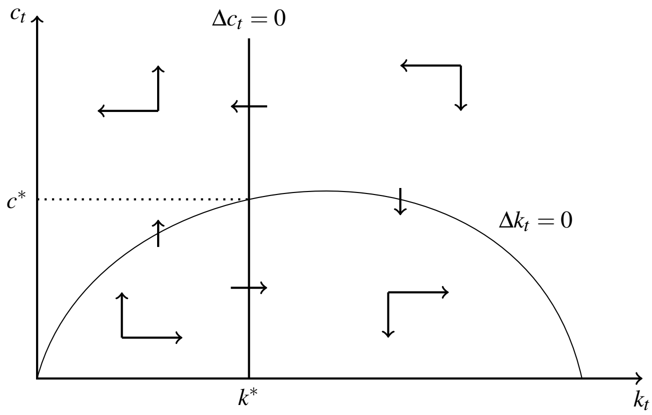
mert $1/\beta - 1 > 1$ és a kitevő negatív. Mivel a görbe maximumhelye abban az állandósult állapotbeli pontban van, ami mellett az egy főre eső fogyasztás értéke maximális, ez egyben az aranyszabály szerinti tőkeállomány is, így k_g-vel jelöljük. A 6.4 ábrán a függőleges, $\Delta c_t = 0$ egyenletű egyenes a $\Delta k_t = 0$ egyenletű görbe maximumától balra

[6] A görbe maximumhelye:

$$k_g = \left[\frac{\delta}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

található. Ott van állandósult állapotban a gazdaság, ahol az egyenes és a görbe metszi egymást. Ebben a pontban se az egy főre eső fogyasztás, se a tőkeállomány nem változik, és leolvasható a k^* és c^* egyensúlyi értékük[7].

A nyilak a változók mozgásának irányát jelölik a korábban levezetettek alapján. Látható, hogy csak két olyan negyed van a koordináta-rendszerben (bal alsó és jobb felső), ahonnan az egyensúlyi pont felé konvergálhat a gazdaság (de mindjárt látni fogjuk, hogy itt se minden értékből), a másik két negyedben pedig távolodnak ettől a ponttól a változók. A Ramsey-modellben – ellentétben az eddig tanult modellekkel – csak bizonyos kezdőértékekből tart a gazdaság a (k^*, c^*) egyensúlyi pontba, nem bármely pontból.



6.4. ábra. A Ramsey-modell fázisdiagramja

Nyeregpálya

A tőkeállomány kezdőértéke adottság, de a hozzá tartozó fogyasztást meg kell határoznunk. A 6.5 ábra a változók alakulását mutatja k_1 induló tőke mellett, különböző fogyasztási kezdőértékek esetén.

Az A pont abban a negyedben található, ahol a 6.4 ábrán lévő nyilak alapján a fogyasztás növekszik, a tőke pedig csökken, így ebből a pontból a függőleges tengely

[7]Korábban megjegyeztük, hogy $\Delta c_t = 0$ a vízszintes tengely pontjain is fennáll, így még két olyan pontot találunk, ahol mindkét érték konstans. Az egyik az origó, ahol nincs tőke és nincs fogyasztás se a gazdaságban, a másik pedig ahol magas a tőkeállomány, de nincs fogyasztás. Ha $c_t = 0$, akkor az a következő periódusokban is nulla marad, ami nem lehet egyensúly hasznosságmaximalizáló fogyasztó mellett, így a továbbiakban ezekkel az esetekkel nem foglalkozunk.

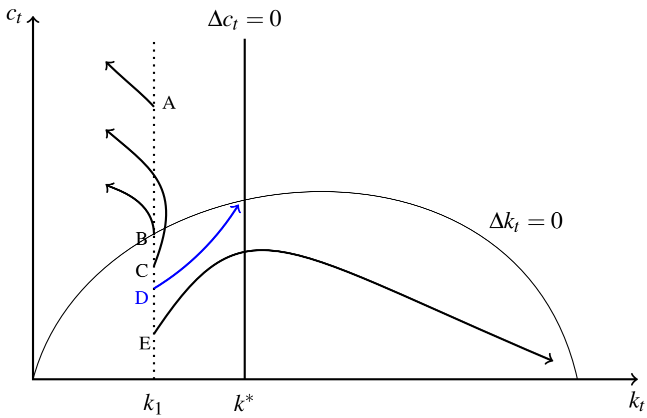
felé tart a gazdaság, ahol végül a tőke nullává válik. Ez nem lehet egyensúly, mert ha az egy főre eső tőkeállomány nulla, akkor az egy főre eső jövedelem is nulla, és ha köt a fogyasztó költségvetési korlátja, akkor ebből pozitív értékű fogyasztás nem érhető el, csak nulla.

A B pont a $\Delta k_t = 0$ görbén helyezkedik el, ahol kezdetben a tőke nem változik, csak a fogyasztás növekszik, így felfelé mozdul el a gazdaság ebből a pontból. Ekkor átkerül abba a negyedbe, ahol az A pont is volt, vagyis itt már csökkenni kezd a tőke, míg a fogyasztás tovább nő, és végül megint elfogyna a tőke, ami nem egyensúly.

A C pont abban a negyedben található, ahol mindkét változó növekszik, vagyis a metszéspont felé tart, azonban túl közel esik a $\Delta k_t = 0$ görbéhez. Azt elérve csak a fogyasztás emelkedik, a tőke nem változik, így a gazdaság átkerül az A pont negyedébe, ahonnan nem juthat egyensúlyba a gazdaság.

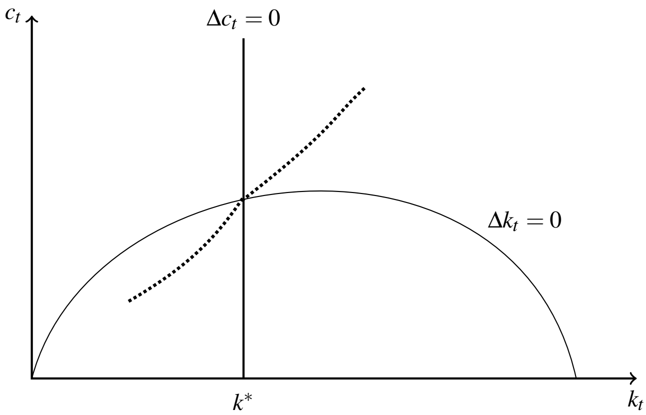
Az E pont szintén abban a negyedben található, ahol mindkét változó növekszik, de túl alacsony az induló fogyasztás, így az egyensúlyi pont helyett a $\Delta c_t = 0$ egyenest érik el a változók. Ekkor a fogyasztás nem változik, a tőke pedig tovább emelkedik, átkerülve így abba a negyedbe, ahol a fogyasztás már csökken, a tőke pedig nő. Bizonyos idő elteltével a fogyasztás itt nullává válna, ami nem lehet az optimalizáló fogyasztó hasznosságmaximalizálásának megoldása, így egyensúly sem.

Annak az induló fogyasztásnak, ami biztosítja, hogy egyensúlyba jusson a gazdaság, a C és a E pont között kell lennie, mert túl magas fogyasztás esetén előbb éri el $\Delta k_t = 0$ görbét, túl alacsony esetén pedig a $\Delta c_t = 0$ egyenest, mint az egyensúlyi pontot. A k_1 indulótőkéhez tehát csak egy olyan fogyasztás tartozik, melyből az állandósult állapotba konvergál a gazdaság, ezt mutatja a D pont.



6.5. ábra. A változók dinamikája különböző induló értékek mellett

Bár eddig csak egy kezdeti tőke mellé kerestünk megfelelő fogyasztást, a következtetések minden más pozitív tőkeérték esetén is érvényesek. Így az összes pozitív induló tőkeállományhoz egy olyan induló fogyasztás tartozik, mely konzisztens a fogyasztó hasznosságmaximalizálásával, a költségvetési korlátjával és a tőke dinamikájával. A függvényt, mely megadja ezeket a fogyasztás értékeket a tőke függvényében *nyeregpályának* nevezzük. Bármely kezdeti tőkeállományhoz a megfelelő fogyasztás értéke a nyeregpálya által meghatározott, és a gazdaság a nyeregpálya mentén az állandósult állapotba tart (lásd 6.6 ábra).



6.6. ábra. A nyeregpálya

Állandósult állapot és egyensúlyi növekedés

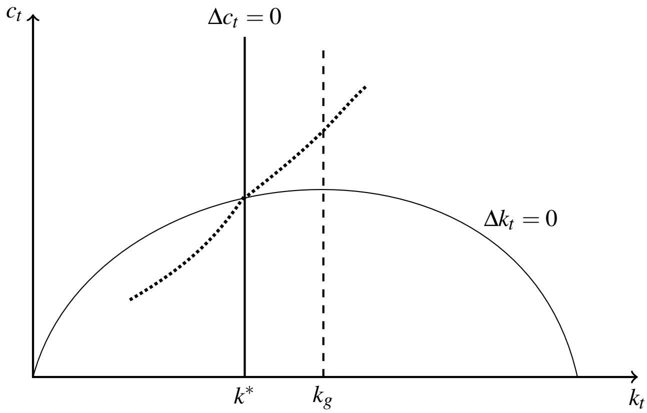
Ha a gazdaság elérte állandósult állapotát, akkor a népességnövekedés és technikai haladás nélküli modellben konstanssá váltak az egy főre jutó és az aggregált változók, valamint a termelési tényezők árai is. A (6.23) összefüggés szerint abban a gazdaságban érhető el magasabb egyensúlyi tőkeállomány és ennek következtében magasabb jövedelem is, ahol a fogyasztók személyes diszkontfaktora (β) nagyobb, vagyis ahol fontosabb számukra a jövőbeli fogyasztásuk. Ellenben az amortizációs ráta esetén negatív kapcsolat figyelhető meg:

$$y^* = \left[\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta\right)\frac{1}{\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \tag{6.23}$$

Ha a modellt n ütemű népességnövekedéssel és g ütemű technikai haladással bővítjük (lásd 3. feladat), akkor egyensúlyi növekedési pályán ugyanazokra a következtetésekre jutunk, mint a Solow-modellben, vagyis a hatékonysági egységre eső változók lesznek konstansok, az egy főre esők a termelékenység változásával megegyező ütemben, az aggregált változók pedig a népességnövekedéstől és a technikai haladástól függő ütemben növekednek.

Aranyszabály

Korábban már láttuk, hogy a gazdaság maximális egy főre eső fogyasztását biztosító tőkeállomány mindig alacsonyabb, mint az egyensúlyi (lásd 6.7 ábra). Fontos különbség a Solow-modellhez képest, hogy míg abban létezhetett olyan egyensúlyi növekedési pálya, melyen az aranyszabálynak megfelelő, vagy akár annál nagyobb tőkemennyiséget is felhalmozhattak a gazdaságban, addig a Ramsey-modellben ez nem lehetséges.



6.7. ábra. Aranyszabály a Ramsey-modellben

Ha a Ramsey-modellben az egy főre eső tőkeállomány az aranyszabály szerinti értékél nagyobb, akkor nyeregpályán lévő fogyasztás túl magas ahhoz, hogy ez a tőkeállomány konstans szinten tartható legyen, így a tőke folyamatosan csökkenne, és k^*-hoz tartana, ami alacsonyabb, mint az aranyszabály szerinti szint. Ennek következménye, hogy ebben a modellben nem érhető el olyan egyensúlyi növekedési pálya, mely maximális egy főre eső fogyasztást biztosít.

Ha szeretnénk ennek okát intuitív módon megindokolni, gondoljunk arra, hogy a Solow-modellben láttuk, hogy ha túl alacsony volt a tőkeállomány az aranyszabály szerintihez képest, akkor a megtakarítási ráta tartós, megfelelő mértékű emelésével lehetett azt elérni. A megtakarítási ráta emelése azonban a sokk időpontjában változatlan jövedelem mellett csökkentette le a fogyasztási hányadot, és így a fogyasztást is, majd később az alkalmazkodási időszakban a jövedelem növekedésének köszönhetően emelkedett folyamatosan a fogyasztás szintje. A Ramsey-modellben a fogyasztó a teljes életpálya hasznosságát maximalizálja, amiben a jelenbeli fogyasztás nagyobb súllyal számít, mint a jövőbeli. Emiatt a fogyasztás visszaesése miatt a jelenben elszenvedett hasznosságcsökkenést nem ellensúlyozza a jövőben várható tartósan magasabb fogyasztás, így nem éri meg megemelnie a megtakarítási hányadot.

Ne feledjük azonban, hogy a Solow-modellben minden periódusban konstans volt a megtakarítási ráta, amit exogén módon adtunk meg, ebben a modellben pedig a szereplők optimalizálásának eredményeként kapjuk meg. Nézzük meg, mitől függ az értéke a Ramsey-modellben!

A megtakarítási ráta alakulása

A megtakarítás alakulása két ellentétes hatás erősségétől függ. Az egyik az úgynevezett *helyettesítési hatás*. Ha a konvergencia időszakában az egy főre eső tőkeállomány növekszik, akkor a tőke csökkenő hozadéka miatt egyre csökken a tőke reálbérleti díja, vagyis a megtakarítás hozama, és ezáltal egyre kevésbé lesz ösztönözve a fogyasztó a megtakarításra ahogy tart az egyensúly felé. A helyettesítési hatás tehát csökkenti a megtakarítási rátát növekvő tőkeállomány esetén.

A másik hatás a *jövedelmi hatás*. Az egy főre eső tőkeállomány növekedésével egyre nő az egy főre eső jövedelem is, és mivel a fogyasztó szeretné simítani a fogyasztási pályáját, számítva a későbbi magasabb jövedelemre, már az alacsony jövedelmű periódusokban is relatíve sokat fogyaszt, aminek következménye, hogy jövedelme kisebb hányadát takarítja meg akkor. Ahogy nő a jövedelme, egyre nagyobb hányadát lesz képes megtakarítani a fenntartani kívánt fogyasztási szint mellett, így a jövedelmi hatás emeli a megtakarítási rátát, ahogy közelít a gazdaság az egyensúly felé.

Állandósult állapotban az egy főre eső tőkeállomány és jövedelem konstanssá válik, nem növekszik tovább, így ott a megtakarítási ráta is változatlan marad. A megtakarítási ráta a nem fogyasztásra fordított kiadások jövedelmen belüli aránya, mely egyensúlyban:

$$s^* = \frac{y^* - c^*}{y^*} = \frac{\delta k^*}{k^{*\alpha}} = \delta \left[\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta \right) \frac{1}{\alpha} \right]^{-1}.$$

Egyrészt látható, hogy minél fontosabb a fogyasztó számára a jövő (minél nagyobb β), jövedelme annál nagyobb hányadát takarítja meg egyensúlyban. Másrészt pedig – ellentétben a Solow-modellel – csak állandósult állapotban válik konstanssá a megtakarítási ráta[8].

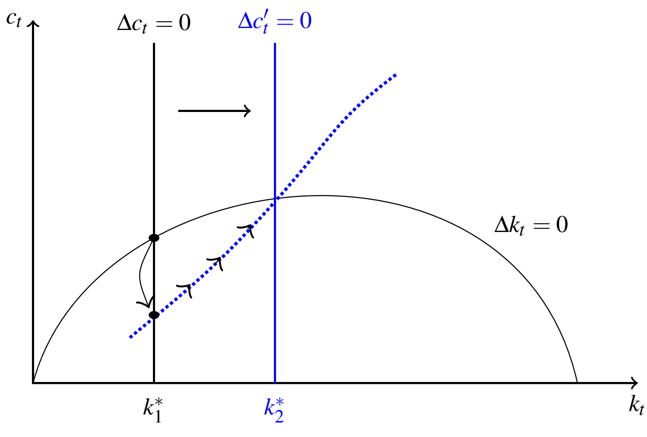
[8] A népességnövekedéssel és technikai haladással bővített modellben is konstans egyensúlyban, lásd 3. feladat.

6.3. A személyes diszkontfaktor változásának hatása

Mint láttuk, a személyes diszkontfaktor értéke hatással van a fogyasztó viselkedésére és a változók állandósult állapotára egyaránt. Nézzük meg, mi történik, ha egy már egyensúlyi növekedési pályán haladó gazdaságban türelmesebbé válnak a fogyasztók, vagyis fontosabbnak kezdik érezni jövőbeli fogyasztásukat (β permanensen megemelkedik)!

Mivel a modell előrelátó fogyasztókat tartalmaz, meg kell határoznunk, hogy egy változás előre várt módon, vagy váratlanul következett be. Ha számítottak rá, akkor viselkedésüket már akkor megváltoztatták, mikor tudomást szereztek róla. Ha viszont arra számítottak, hogy β az egész életpályán változatlan marad, és csak később, az adott periódusban szembesülnek vele, hogy preferenciáik megváltoztak, akkor csak abban a periódusban tudnak rá reagálni. Vezessük le ez utóbbinak a hatását!

Mivel a fogyasztó preferenciája csak a (6.18) fogyasztási pályát leíró egyenletet módosítja, a (6.19) tőke mozgási egyenletet nem, így a 6.8 ábrán csak a $\Delta c_t = 0$ egyenes helyzete változik meg, a $\Delta k_t = 0$ görbéjé nem. Ha β megemelkedik, az növeli az egy főre eső tőkeállomány értékét a (6.20) által megadott módon, így a függőleges egyenes jobbra tolódik.



6.8. ábra. A személyes diszkontfaktor változásának hatása

A gazdaság a sokk bekövetkeztekor már állandósult állapotban volt k_1^* tőkeállomány mellett. A sokk pillanatában a tőkeállomány nem változik meg, hiszen predeterminált (az előző időszakban határozták meg az értékét), illetve látszik az ábrán is, hogy a $\Delta k_t = 0$ görbén található a kiinduló pont, az eredeti metszéspontban. A gazdaság csak úgy juthat az új állandósult állapotba, ha a sokk időpontjában rákerül az új nyeregpályára, különben más irányba fognak mozogni a változók. Abban a periódusban tehát, mikor a fogyasztók számára fontosabbá válik a jövőbeli fogyasztás, mint korábban, visszafogják aktuális fogyasztásukat (emiatt ugrik le a fogyasztás változatlan tőke mellett az új nyeregpályára). Majd a következő periódustól mindkét változó növekedni kezd, míg el nem érik az új egyensúlyi pontot, ahol magasabb tőkeállomány, magasabb jövedelem és magasabb fogyasztás biztosítható magasabb megtakarítási ráta mellett.

A változás ekvivalens az aranyszabály szerintinél alacsonyabb megtakarítási ráta permanens emelésével a Solow-modellben. Mindkét esetben először lecsökken a fogyasztás, majd az alkalmazkodási periódus végére az eredeti állandósult állapotnál magasabb szintet ér el a folyamatos növekedés eredményeként. Az egyetlen különbség a változók dinamikájában, hogy a Ramsey-modellben a jövedelemből megtakarítani kívánt hányad nem konstans a konvergencia alatt.

6.4. Fiskális politikával bővített modell

Az eddig felépített modellből kihagytuk az államot, pedig a valóságban a GDP jelentős hányadát alkotja a kormányzati vásárlás. Bővítsük egy új szereplővel, az állammal a modellt, mely fiskális politikai funkciókat lát el! Tegyük fel, hogy G_t kormányzati kiadást eszközöl a t. periódusban, amit az első verzióban a fogyasztóktól beszedett T_t értékű adóból, a másodikban pedig adóból és államkötvényből finanszíroz!

Adófinanszírozás

A kormányzat a G_t értékű vásárlását teljes egészében a fogyasztókra kivetett egyösszegű, összesen T_t értékű adóból finanszírozza, így költségvetése minden periódusban kiegyensúlyozott. A t. periódus költségvetési korlátja:

$$G_t = T_t.$$

Mivel a kormányzati kiadások nem produktívak, adót pedig csak a fogyasztók fizetnek, a fiskális politika exogén változói nem befolyásolják sem a vállalat termelési függvényét, sem a kiadásait, így a vállalat viselkedése megegyezik az állam nélküli esetben levezetettel.

A fogyasztó hasznosságába szintén nem kerülnek be ezek az aggregátumok, így az továbbra is csak az egy főre eső fogyasztás függvénye. Változás a fogyasztó költségvetési korlátjában van, mert a kiadási oldal a fizetendő egyösszegű adóval bővül, melynek egy főre eső értéke $t_t \equiv T_t/L_t$:

$$w_t + r_t^K k_t + \pi_t + (1 + r_t)b_t = c_t + i_t + b_{t+1} + t_t.$$

A fogyasztó magartartási egyenletei (Euler-egyenlet, tőke és kötvény közti optimális helyettesítés feltétele) szintén nem módosulnak, mert a Lagrange-módszer alkalmazásakor kiesnek az adók a döntési változók szerinti deriváláskor. Ennek következtében a fogyasztás (6.18) mozgásegyenlete ugyanaz marad, mint a korábbi modellverzióban.

A fogyasztók és az állam költségvetési korlátját aggregálva, majd kihasználva, hogy a munka-, a tőke- és a profitjövedelem együtt a teljes Y_t jövedelmet adják, felírható az árupiac egyensúlyának feltétele, mely egy főre eső változókkal:

$$y_t = c_t + i_t + g_t.$$

Kihasználtuk azt is, hogy a vagyoneszközök piacán egyensúlyban $b_t = 0$, mert az államnál egyelőre még nincs lehetőség a megtakarítások elhelyezésére, a fogyasztók az azonos preferenciák miatt pedig egymással sem képesek ilyen ügyleteket kötni.

A tőke (6.19) átmenetegyenlete emiatt az alábbi alakra módosul:

$$k_{t+1} - k_t = k_t^{\alpha} - c_t - \delta k_t - g_t. \tag{6.24}$$

Látható, hogy minél több terméket vásárol az állam (minél nagyobb g_t), annál kevesebbet tudnak a háztartások megvenni, ha az egy főre eső tőkeállomány konstans.

Tegyük fel, hogy az állam váratlanul, tartósan megemeli kiadásait! A 6.9 ábra mutatja ennek gazdaságra gyakorolt következményeit. Mivel a (6.18) egyenlet nem változott az állammal való bővítés hatására, a $\Delta c_t = 0$ még mindig egy

$$k^* = \left[\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta\right)\frac{1}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

pontba húzott függőleges egyenes, melyet nem befolyásol fiskális politikai beavatkozás.

A $\Delta k_t = 0$ új egyenlete a (6.24) alapján:

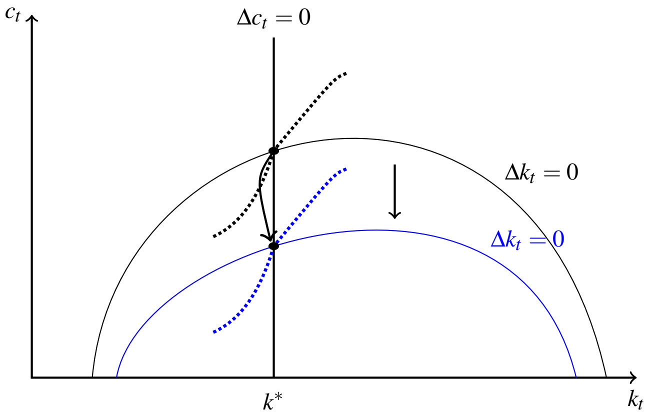
$$c_t = k_t^{\alpha} - \delta k_t - g_t,$$

mely lejjebb tolódik a kormányzati kiadások emelése esetén. Ha a kormányzati kiadások változásának mértéke Δg, akkor a görbe is pontosan Δg-vel tolódik lefelé.

Mivel a sokk pillanatában – mint láttuk korábban – a tőke nem változik, így a fogyasztás értékében lesz egy ugrás, mellyel a gazdaság átkerül az új nyeregpályára, hogy az új állandósult állapotba konvergáljon. Ha az ugrás nem megfelelő mértékű, akkor nem juthat egyensúlyba a gazdaság. Ebben az esetben ez csak úgy lehetséges, ha a fogyasztás ugyanannyival csökken le a sokk bekövetkeztekor, mint amennyivel a kormányzati vásárlások emelkedtek, és a gazdaság azonnal az új egyensúlyi pontba kerül.

Ennek oka, hogy az állam a fogyasztót terhelő adókból finanszírozza vásárlásait, melyet szintén meg kell emelnie, ha kiadásai nőnek. A magasabb adók permanensen csökkentik a háztartások jövedelmét az adóemeléssel megegyező mértékben, így a tőke változatlansága mellett a fogyasztást is ekkora mértékben kell visszafognia. A kormányzati kiadások tartós növelése tehát csak az egy főre eső fogyasztásra hatott, az egy főre eső tőkét és kibocsátást valamint a vagyoneszközök hozamát nem érintette.

Összevetve az eredményt a korábbi modellben tanultakkal, eltérést tapasztalunk. A Solow-modellben minden periódusban a rendelkezésre álló jövedelem konstans $(1 - s)$ hányadát fordították fogyasztásra és s hányadát a beruházások finanszírozására. Az



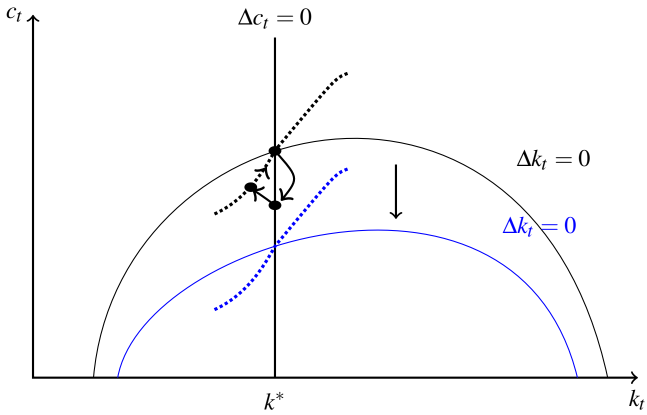
6.9. ábra. A kormányzati kiadások permanens növelésének hatása

adók növelésével a rendelkezésre álló jövedelem visszaesik, aminek eredményeként a fogyasztók nem csak a fogyasztást, de a beruházást is csökkentik. A kormányzati kiadások kiszorítják a beruházásokat, így a tőkeállomány csökkenni kezd, a hozama pedig nőni. Ezzel ellentétben a Ramsey-modellben ekkor nincs *kiszorítási hatás*, mert a tőke nem változott.

Tegyük fel, hogy a kormányzat váratlanul, de csak ideiglenesen növeli meg kiadásait, és az emelés idején bejelenti azt is, mikor kíván visszaállni a korábbi szintre. Ekkor a 6.10 ábrán látható módon a $\Delta k_t = 0$ egyenes az emeléssel megegyező mértékben tolódik lefelé, mint a tartós növekedés esetén, majd a visszatéréskor visszakerül az eredeti szintre. Ebben az esetben a fogyasztás kevésbé csökken a sokk pillanatában, mint a tartós növelés mellett. Ha ugyanannyival csökkenne, akkor egy újabb ugrásra lenne szükség akkor, mikor a fiskális politika visszaállítja kiadásai és így az adók szintjét a korábbi értékükre, hogy visszakerüljön a gazdaság az eredeti egyensúlyi pontba. Ez azonban nem lehetséges, mert a szereplők ismerik a visszatérés időpontját, számítanak rá, így teljesülnie kell az Euler-egyenletnek, vagyis a fogyasztások határhasznának meg kell egyeznie az egymást követő periódusokban.

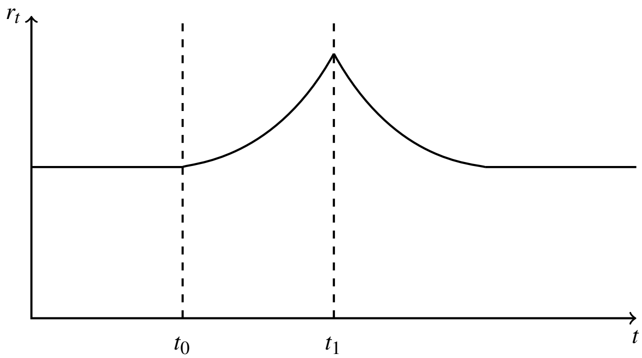
A fogyasztás tehát akkora mértékben esik vissza a kiadások emelésekor, hogy onnan a (6.18) és a (6.24) által meghatározott dinamika az eredeti nyeregpályára juttassa a gazdaságot a kiadások visszaállítása idején, hogy onnan visszakerülhessen a kiinduló egyensúlyi pontba a 6.10 ábrán látható módon.

Ahogy közeleg a kiadások – és adók – visszaállításának ideje, a fogyasztók növelni kezdik fogyasztásukat, és csökkentik tőkeállományukat. Mivel a tőkeállomány csökken, hozama növekszik, így a vagyoneszközök közti optimális helyettesítés feltétele alapján ((6.15) egyenlet) a kamat átmenetileg emelkedik a gazdaságban, amíg a kormányzati kiadások magasak, majd miután a tőkeállomány újra növekedésnek indul a



6.10. ábra. A kormányzati kiadások ideiglenes növelésének hatása

kiadások visszacsökkentésével, a hozamok csökkenni kezdenek. A 6.11 ábra a kamatláb alakulását mutatja, ha a t_0. periódusban emelte meg a kiadásait a kormányzat és a t_1. periódusban állította vissza a korábbi szintre.



6.11. ábra. A kamatláb alakulása

Fontos következtetése tehát a modellnek, hogy ellentétben a korábbi fejezetekben tapasztaltakkal, az előrelátó fogyasztóknak köszönhetően az adott periódus fogyasztása már nem csak az adott periódus rendelkezésre álló jövedelmének függvénye, hanem a jövőre vonatkozó várakozások is befolyásolják azt.

Az eredmények alapján a reál kamatláb emelkedése a kormányzati kiadások ideiglenes növelése esetén figyelhető meg, tartós növeléskor nem. Megfelelő példa lehet a valóságban az ideiglenes növelésre a háborús időszak. Háborúban nagyobbak az ország kiadásai, így a modell alapján azt várnánk, hogy a kamatláb is. Barro (1987) empirikusan tesztelte ezt az összefüggést az Egyesült Királyság adatait felhasználva 1729-től 1918-ig. A becsléshez a brit katonai kiadások GNP-hez viszonyított arányát, illetve a hosszú távú kamatlábat használta fel, és azt találta, hogy a kettő között szignifikánsan pozitív a kapcsolat, amivel alátámasztható a modell következtetése.

Adó- és kötvényfinanszírozás

Bővítsük a modellt államkötvényekkel! A továbbiakban a költségvetésnek nem kell kiegyensúlyozottnak lennie, megengedjük az állam eladósodását, így a kormányzat kiadásait az adók mellett a háztartásoknak eladott államkötvényekkel is finanszírozhatja. A költségvetési korlátja egy főre eső változókkal felírva így

$$g_t + (1 + r_t)d_t = t_t + d_{t+1},$$

ahol d_{t+1} a t. periódusban kibocsátott államkötvény, mely után a $t+1$. periódusban kamatot fizet. A vállalat és a fogyasztó magatartási egyenletei most sem változnak az állam nélküli esethez képest, egyedül a fogyasztó költségvetési korlátja módosul az adófizetési kötelezettség miatt:

$$w_t + r_t^K k_t + \pi_t + (1 + r_t)b_t = c_t + i_t + b_{t+1} + t_t.$$

A vagyoneszközök piacán a fogyasztónak már van lehetősége pénzügyi eszközök – államkötvények – vásárlására is, így a tőke mellett már ebben is képes megtakarítani. Egyensúly esetén $b_{t+1} = d_{t+1}$. Ezt, és az állam, valamint a fogyasztó költségvetési korlátját felhasználva, a korábban látott módon felírható az árupiaci egyensúly feltétele:

$$y_t = c_t + i_t + g_t.$$

A gazdaság diamikáját meghatározó egyenletek tehát megegyeznek a csak adóval történő finanszírozásnál kapott összefüggésekkel. Ez azt jelenti, hogy az endogén változók alakulása szempontjából nem számít, miként finanszírozza a kormányzat a kiadásokat. Ha adott a kormányzati vásárlások szintje, és a fiskális politika adót csökkent a t. periódusban, akkor kiadásait kötvények kibocsátásával fedezi. A háztartások az adócsökkentésből eredő plusz jövedelem teljes összegét megtakarítják (államkötvényt vásárolnak), ugyanis tudják, hogy később az állam adóemeléssel lesz csak képes finanszírozni a kötvények kivonását. Az államkötvények így csak az adók alakulását befolyásolják, a fogyasztási pályát nem, ha a fogyasztók előretekintők. Ezt nevezzük *ricardói ekvivalenciának*.

6.5. Összefoglalás

1. Ebben a fejezetben fogyasztói optimalizációval bővítettük a modellt, hogy endogenizáljuk a jövedelemből fogyasztásra és megtakarításra fordított hányadot.

A háztartások életpálya-hasznosságukat maximalizálták költségvetési korlátaik mellett.

2. A modell hosszútávú következtetései megegyeztek a Solow-modellben tapasztaltakkal, de a változók rövid távú alkalmazkodásában jelentős különbségeket láttunk. Az egyik az volt, hogy a Ramsey-modellben fontos volt, milyen kezdőpontból indítjuk a gazdaságot, mert minden induló tőkeállományhoz csak egy olyan fogyasztási szint tartozott, mely biztosította, hogy a gazdaság egyensúlyi növekedési pályára kerülhessen. Másik eltérés volt, hogy ebben a modellben nem lehetett elérni olyan egyensúlyi növekedési pályát, mely maximális fogyasztást biztosítana, mert az aranyszabály szerinti tőkeállomány az egyensúlyinál nagyobb.

3. Szintén eltérés a korábbi modellekhez képest, hogy itt a megtakarítási ráta csak egyensúlyban vált konstanssá, egyébként folyamatosan változott a jövedelmi és helyettesítési hatás által meghatározott módon.

4. A személyes diszkontfaktor változásának gazdaságra gyakrololt hatása megfeleltethető volt a megtakarítási ráta módosításának a Solow-modellben. Hasonló következtetésekre jutottunk a főbb endogén változók alakulását illetően.

5. Végül állammal bővítettük a modellt, mely így alkalmassá vált arra, hogy a fiskális politikai beavatkozások hatását elemezzük vele. Míg a kormányzati kiadások permanens emelése csak a fogyasztást befolyásolta, a tőkeállományt, annak hozamát, illetve a jövedelmet nem, addig az ideiglenes emelés minden változóra hatással volt.

6. Érvényes volt a ricardói-ekvivalencia, miszerint adott kormányzati kiadások mellett a háztartások döntését nem befolyásolta az, hogy az állam hogyan finanszírozza kiadásait. Ha a fogyasztók előretekintők és végtelen időhorizontra tervezők, akkor egy jelenlegi adócsökkentés után később adóemelésre számítanak, így nem változtatnak fogyasztásuk addigi pályáján.

6.6. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta}$$

alakú hasznossági függvény esetén az intertemporális helyettesítési rugalmasság $1/\theta$! Segítség: a helyettesítési rugalmasság két periódus fogyasztása között:

$$IES = -\frac{\partial ln\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)}{\partial ln\left(\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right)}.$$

2. Tegyük fel, hogy a fogyasztó hasznossági függvénye logaritmikus:

$$u(c_t) = lnc_t.$$

Vezesse le, mekkora a t. periódus fogyasztása a paraméterek, a konstans kamatláb és a kezdeti fogyasztás (c_1) függvényében!

3. Tekintsünk egy Ramsey-modellel leírt gazdaságot, mely már egyensúlyi növekedési pályán van, és tartalmaz konstans technológiai fejlődést valamint népességnövekedést. Tegyük fel, hogy a technológia növekedési üteme (g) tartósan lecsökken!

   a) Hogyan befolyásolja a fenti változás a $\Delta\tilde{k} = 0$ függvényt?
   b) Hogyan befolyásolja a $\Delta\tilde{c} = 0$ függvényt?
   c) Ábrázoljuk, mekkora lesz a fajlagos fogyasztás és tőkeállomány az új egyensúlyban!
   d) Mekkora a jövedelem megtakarítani kívánt hányada (s^*) az egyensúlyi növekedési pályán?

4. Tekintsünk egy Ramsey-modellel leírt gazdaságot, mely már egyensúlyi növekedési pályán van! Tegyük fel, hogy az állam megadóztatja a beruházásokat, így a háztartás által elérhető reálbérleti díj a tőke bérbeadása után $(1-\tau)r_t^K$. Az állam a bevételeit egyösszegű transzferek formájában a fogyasztóknak adja.

   a) Hogyan változtatja meg az adó a $\Delta k = 0$ és $\Delta c = 0$ függvényeket?
   b) Mi történik az adó bevezetésének időpontjában és utána k és c értékével?
   c) Mutassuk meg, hogy a megtakarítási ráta egyensúlyban annál nagyobb, minél alacsonyabb az adókulcs!
   d) Ha az állam támogatja a beruházásokat ($\tau < 0$), és egyösszegű adóból származik a bevétele, magasabb jólét érhető el, mint az adómentes esetben?
   e) Hogyan változik az (a) és (b) kérdésekre adott válasz, ha az állam bevételét nem a fogyasztók kapják meg transzferek formájában, hanem kormányzati kiadásokra költik (g_t)?

5. Tegyük fel, hogy az állam a t. periódusban még nem vezeti be a tőke megadóztatását, csak bejelenti, hogy egy későbbi időponttól (t_2) kezdve adóköteles lesz! Ábrázoljuk fázisdiagram segítségével, mi történik a t. periódus után!

6. Vegyünk egy Ramsey-modellel leírható gazdaságot, ahol nincs népességnövekedés és konstans a technológia. A vállalat termelési függvénye $Y_t = AK_t^{\alpha}L^{1-\alpha}$, a fogyasztó hasznossági függvénye pedig logaritmikus.

   a) Hogyan befolyásolja a technológia tartós megemelkedése ($A \uparrow$) a $\Delta k = 0$ és $\Delta c = 0$ görbék alakját és az egy főre eső fogyasztás illetve tőke egyensúlyi értékét?

b) Hogyan befolyásolja az amortizációs ráta tartós visszaesése ($\delta \downarrow$) a $\Delta k = 0$ és $\Delta c = 0$ görbék alakját és az egyensúlyi értékeket?

c) Ismerjük az alábbi értékeket:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,33 \\ \beta &= 0,95 \\ \delta &= 0,1 \\ A &= 1 \\ k_1 &= 1 \\ b_1 &= 0. \end{aligned}$$

Számítsa ki az egy főre eső tőkeállomány és fogyasztás egyensúlyi értékét! Mekkora c_1 szükséges ahhoz, hogy az induló periódusban a nyeregpályán legyen a gazdaság? Nézze meg, milyen pályát ír le az egy főre eső fogyasztás és tőkeállomány, ha az induló fogyasztás, $c_1 = 0,5$! Hanyadik periódus után térünk át a fázisdiagram másik negyedébe?

7. Vegyünk egy két időszakig élő fogyasztót, akinek nincs kezdeti jövedelme és a két periódusban Y_1 és Y_2 jövedelemben részesül. Y_1 ismert számára, de Y_2 bizonytalan, így $Y_2 = Y_1 + \varepsilon$. Az állam megadóztatja a jövedelmet, melynek adókulcsa τ_1 és τ_2 a két időszakban. A fogyasztó hitelt vehet fel, vagy kölcsönt nyújthat fix kamatláb mellett, ami az egyszerűség kedvéért most 0. Így a második periódus fogyasztása a költségvetési korlát segítségével felírható:

$$C_2 = [(1-\tau_1)Y_1 - C_1] + (1-\tau_2)Y_2.$$

A fogyasztó maximalizálni szeretné az alábbi hasznosságát:

$$U(C_1) + E[U(C_2)].$$

a) Írjuk fel az elsőrendű feltételt!

b) Mutassuk meg, hogy $E(C_2) = C_1$, ha a hasznossági függvény kvadratikus (például $u(C_t) = C_t - aC_t^2$)!

c) Tegyük fel, hogy az állam csökkenti az első időszak adókulcsát, viszont úgy növeli a másodikat, hogy a bevétele $[\tau_1 Y_1 + \tau_2 E(Y_2)]$ változatlan. Hogyan változik ennek hatására az első periódus fogyasztása, ha a hasznossági függvény kvadratikus?

d) Hogyan változik az első periódus fogyasztása az előző esetben, ha a hasznossági függvény CRRA típusú?

VII.

DIAMOND-MODELL

Az előző fejezetben endogenizáltuk a jövedelemből megtakarítani és fogyasztani kívánt hányadot a fogyasztói optimalizáció beépítésével. Ennek eredményeként a változók rövid távú mozgásában jelentős eltéréseket láttunk a korábbi modellekhez képest, de a hosszú távú dinamika nem módosult.

A Ramsey-modellben minden fogyasztó ugyanolyan preferenciákkal és korlátokkal rendelkezett és végtelen időhorizonton maximalizálta hasznosságát. Az előbbi feltevés következtében nem jöhettek létre interakciók a háztartások között, az utóbbi pedig azt jelentette, hogy nem érkeznek új fogyasztók a gazdaságba, a meglévők pedig sohasem hagyják azt el.

Ebben a fejezetben a gazdaság továbbra is végtelen időszakig működik majd, de közben a szereplők véges ideig élnek. Minden periódusban születik egy új, fiatal generáció, illetve minden periódusban meghal egy idős. Látni fogjuk, hogy ennek a látszólag egyszerű változtatásnak lényeges következményei lesznek. Ezek a modellek az *együttélő nemzedékek (overlapping generations, OLG)* modellcsaládhoz tartoznak, hiszen többféle korosztályt tartalmaznak egyszerre. Elsőként Samuelson (1958) és Diamond (1965) alkalmazta oly módon, hogy a fogyasztók életpályájának hosszát előre meghatározták. Később Blanchard (1985) folytonos időben felírt modelljében a halálozási valószínűség bevezetésével biztosította a véges időhorizontot, Auerbach és Kotlikoff (1987) pedig realisztikusabbá tette az eredeti modellt a fogyasztók életpályájának részletesebb felírásával.

Az együttélő nemzedékeket tartalmazó modellek több szempontból is hasznosak. Egyrészt lehetővé teszik a generációk közötti interakciókat a piacokon. Másrészt alkalmasak a demográfiai változások és a társadalombiztosítási rendszer vizsgálatára. Harmadrészt pedig pontosabb képet adnak a fiskális politikai beavatkozások gazdasára gyakorolt hatásáról, mint a Ramsey-modell.

7.1. A modell felépítése

A fejezet első részében a modell két reprezentatív szerepelőt tartalmaz: vállalatot és fogyasztót. A vállalat viselkedése megegyezik a korábbi modellekben tanultakkal, vagyis termelési tényezők – tőke és munkaerő – felhasználásával, profitját maximalizálva állítja elő végtermékét. Mind az előállított termék, mind a termelési tényezők árai a tökéletesen versenyző piacokon a kereslet és kínálat egyensúlyában határozódnak meg.

A fogyasztók két periódusig élnek, és a teljes a életpályán maximalizálják hasznosságukat. Az első életszakaszban munkaképes fiatalok, a másodikban pedig idősek, akik már nem dolgoznak. Egy periódus hosszát nem egy évként értelmezzük, hanem az élet vagy a felnőttkor felének (körülbelül 30-40 évnek) tekintjük. Mivel munkából származó jövedelmet csak fiatalkorban szerezhetnek, az időskori fogyasztásukat a korábbi megtakarításaik felhasználásval tudják csak biztosítani, ha nincsenek más generációtól vagy az államtól kapott transzferek.

A fejezet második részében egy kizárólag fiskális politikai funkciókat ellátó állammal bővítjük a modellt, mely kormányzati kiadásait először csak adókkal, majd kötvénykibocsátással is finanszírozhatja. Végül kétféle nyugdíjrendszer mellett jellemezzük a gazdaság növekedését.

Vállalat

A reprezentatív vállalat tőkét és hatékony munkaerőt használ fel a termelés során, melynek eredményeként Y_t terméket hoz létre a termelési függvény által meghatározott módon:

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t),$$

ahol L_t már nem a teljes népességet jelöli, hanem a t. periódus elején születettek, azaz a munkaképesek számát.

A függvény állandó mérethozadékú, teljesíti az Inada-feltételeket, valamint a tőke és a munka határterméke csökkenő. A fiatal generáció létszáma és annak tudása exogén ütemben emelkedik, melyek növekedési rátái n és g:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1 + n, \tag{7.1}$$

$$\frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g. \tag{7.2}$$

A vállalat a felhasznált munka után bért, a tőke után pedig bérleti díjat fizet, és az alábbi profitfüggvényt maximalizálja minden periódusban a döntési változói szerint:

$$\pi_t = F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t^K K_t \quad \rightarrow \quad \max_{K_t, L_t}.$$

Az elsőrendű feltételek alapján a tényezőárak a határtermékekkel egyeznek meg optimumban:

$$\frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K_t} = r_t^K, \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L_t} = w_t.$$

A modell levezetéséhez használjuk a Cobb-Douglas típusú termelési függvényt:

$$Y_t = K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha}!$$

Fogyasztó

Minden periódus elején L_t fiatal születik, ahol a t időindex a születés idejére utal. Életük első szakaszában dolgoznak, amiért cserébe a vállalattól munkabért kapnak. Munkakínálatuk rugalmatlan, mindannyian egységnyi munkakínálattal rendelkeznek. Jövedelmüket fogyasztásra költik, illetve bizonyos hányadát megtakarítják. A második életszakaszban, az időskorban már nem vállalnak munkát, csak elfogyasztják a megtakarításuk, illetve az utána kapott kamatok értékét. A gazdaságban így két generáció él egymás mellett, és a teljes népesség a t. periódusban:

$$L_t + L_{t-1},$$

ahol L_t a fiatal, L_{t-1} pedig az idősek száma, miután az előbbiek a t., az utóbbiak pedig a $t-1$. periódusban születtek. Mivel a születések száma exogén n ütemben növekszik, így $L_{t-1} = L_t/(1+n)$. Megmutatható, hogy ekkor a teljes népesség növekedési rátája is n:

$$\frac{L_{t+1}+L_t}{L_t+L_{t-1}} = \frac{(1+n)L_t+L_t}{L_t+\frac{L_t}{1+n}} = \frac{(2+n)L_t}{\frac{2+n}{1+n}L_t} = 1+n.$$

A fogyasztók az életpálya-hasznosságukat maximalizálják a költségvetési korlátok mellett, így a fogyasztási és megtakarítási hányad a Ramsey-modellhez hasonlóan endogén, és a különböző generációk között eltérhet.

Az adott periódus hasznossága az akkori fogyasztás függvénye. Jelöljük U_t-vel egy t. periódusban született egyén életpálya-hasznosságát, a fiatalkori és időskori fogyasztás pedig legyen $c_{1,t}$ és $c_{2,t+1}$, utalva arra, hogy az első életszakaszában (a t. periódusban) fiatal, a másodikban ($t+1$-ben) pedig idős! Az életpálya hasznossága az egyes időszakok hasznosságának súlyozott átlaga:

$$U_t = u(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\rho}u(c_{2,t+1}), \tag{7.4}$$

ahol $1/(1+\rho)$ a személyes diszkontráta[1] és $\rho > -1$, hogy értéke pozitív legyen. Ha $\rho > 0$, akkor a fogyasztó számára fontosabb az aktuális fiatalkori hasznossága, mint a későbbi időskori, $\rho < 0$ esetén pedig fordítva. A periódusbeli hasznossági függvények pozitívak és konkávok, mert a magasabb fogyasztás magasabb hasznosságot biztosít, de a fogyasztás határhaszna csökkenő:

$$u'(c_{1,t}) > 0 \qquad u''(c_{1,t}) < 0,$$

$$u'(c_{2,t+1}) > 0 \qquad u''(c_{2,t+1}) < 0.$$

Kövessük végig a fogyasztó életpályáját! Tegyük fel, hogy egyelőre nincs öröklés a modellben, így születésekor nem rendelkezik vagyonnal! Fiatal korában felkínálja egységnyi munkaerejét, melyért cserébe w_t bért kap. Ennek egy részét fogyasztásra fordítja, a többit pedig megtakarítja idős korára (s_t), így az első életszakasz költségvetési

[1] Hasonlóképpen értelmezhető, mint a Ramsey-modell paramétere, vagyis $\beta = 1/(1+\rho)$.

korlátja:

$$w_t = c_{1,t} + s_t. \tag{7.5}$$

A következő periódusban idősként már nem dolgozik, csak feléli korábbi megtakarítását annak kamataival együtt:

$$c_{2,t+1} = (1 + r_{t+1})s_t. \tag{7.6}$$

Ha érvényes a *nincs Ponzi-játék* feltevés, akkor az életpálya végén adósságot nem halmozhatnak fel, és mivel utódaikról nem gondoskodnak, nem racionális döntés a megtakarítás az életpálya végén, vagyis fennáll a transzverzalitási feltétel.

Behelyettesítve a (7.6) egyenletből kifejezett megtakarítást a (7.5) egyenletbe, megkapjuk a fogyasztó intertemporális költségvetési korlátját, miszerint a bevétel és a kiadás jelenértéke megegyezik:

$$w_t = c_{1,t} + \frac{c_{2,t+1}}{1 + r_{t+1}}. \tag{7.7}$$

A fogyasztó a (7.4) életpálya-hasznosságát maximalizálja a (7.7) költségvetési korlát mellett. Problémáját a *Lagrange-módszer* segítségével oldjuk meg, ahol a Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \text{célfüggvény} + \text{Lagrange-multiplikátor} \cdot (\text{a korlát 0-ra rendezve}).$$

Beírva az életpálya hasznosságát, illetve a nullára rendezett korlátot, és λ-val jelölve a multiplikátort:

$$\mathcal{L} = u(c_{1,t}) + \frac{1}{1+\rho} u(c_{2,t+1}) + \lambda \left[w_t - c_{1,t} - \frac{c_{2,t+1}}{1 + r_{t+1}} \right].$$

A Lagrange-függvényt a fogyasztó döntési változói ($c_{1,t}, c_{2,t+1}$) szerint maximalizálva az elsőrendű feltételek:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{1,t}} = u'(c_{1,t}) - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{2,t+1}} = \frac{1}{1+\rho} u'(c_{2,t+1}) - \lambda \frac{1}{1 + r_{t+1}} = 0,$$

melyekből kifejezve λ értékét az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$\lambda = u'(c_{1,t}),$$

$$\lambda = \frac{1}{1+\rho} u'(c_{2,t+1})(1 + r_{t+1}).$$

Ez utóbbiakat felhasználva megkapjuk a fogyasztó *Euler-egyenletét*:

$$u'(c_{1,t}) = \frac{1}{1+\rho} u'(c_{2,t+1})(1 + r_{t+1}), \tag{7.8}$$

mely megegyezik a Ramsey-modellben levezetettel. A fogyasztónak döntenie kell, hogy vagyonának egy egységét fiatal korában elfogyasztja, ami $u'(c_{1,t})$ hasznosságot jelent neki, vagy pedig megtakarítja azt, és idős korában – mikor kamatokkal együtt visszakapta – fogyasztja csak el. Ez utóbbi $(1+r_{t+1})u'(c_{2,t+1})$ hasznosságot jelent, mert a kapott kamatot is felhasználhatja, de mivel a következő időszak most kevésbé fontos számára, mint a jelenlegi, így $1/(1+\rho)$-val súlyozza azt. A (7.8) szerint tehát akkor dönt optimálisan a fogyasztó, ha az első és második életszakasz határhaszna megegyezik.

Az előző fejezeben már megismert CRRA típusú hasznossági függvény:

$$U_t = \frac{c_{1,t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho}\frac{c_{2,t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta > 0 \tag{7.9}$$

mellett az Euler-egyenlet

$$c_{1,t}^{-\theta} = \frac{1}{1+\rho} c_{2,t+1}^{-\theta}(1+r_{t+1}),$$

vagy átrendezve

$$\frac{c_{2,t+1}}{c_{1,t}} = \left[\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right]^{1/\theta}. \tag{7.10}$$

A (7.10) összefüggésből látszik, hogy ha $r_{t+1} > \rho$, akkor a fogyasztási pálya növekvő, $r_{t+1} < \rho$ esetén csökkenő és $r_{t+1} = \rho$ mellett simított. Az intertemporális helyettesítési rugalmasság $(1/\theta)$ határozza meg, hogy mennyire érzékeny a fogyasztás a kamat és a személyes diszkontfaktor megváltozására.

Az Euler-egyenletet a második periódus fogyasztására rendezve, majd beírva azt a (7.7) intertemporális költségvetési korlátba, megkapjuk az első periódus fogyasztásának képletét:

$$c_{1,t} = \frac{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}} w_t,$$

melyből adódik az első periódus megtakarítása:

$$s_t = w_t - c_{1,t} = \frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}} w_t, \tag{7.11}$$

miszerint a jövedelem megtakarítani kívánt hányada, azaz a megtakarítási ráta a kamatláb függvénye:

$$s(r_{t+1}) = \frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}}. \tag{7.12}$$

Nézzük meg, hogyan befolyásolja a kamatláb emelkedése a megtakarítási rátát! Egyszerűsítések után adódik, hogy

$$\frac{\partial s(r_{t+1})}{\partial r_{t+1}} = \frac{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-2}(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}}}{\left((1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}\right)^2},$$

ahol minden tényező pozitív, kivéve a számlálóban lévő $1/\theta - 1$, melynek előjele θ értékétől függ. A kapcsolat iránya azért nem egyértelmű, mert egyszerre jelentkezik két ellentétes hatás: a jövedelemi és helyettesítési hatás. Az előbbi szerint a kamat emelkedésével nő a fogyasztó kamatjövedelme, melyet a megtakarításai után kap, így mindkét periódus fogyasztását növeli, vagyis a megtakarítását csökkenti. Az utóbbi szerint a kamat emelkedése arra ösztönzi a fogyasztót, hogy relatíve többet fogyasszon a következő periódusban, és kevesebbet a jelenlegiben, ami pedig növeli megtakarítását. A kamat és a megtakarítási ráta közti összefüggés az alábbiak szerint alakul.

1. Ha $\theta < 1$, akkor $1/\theta > 1$, így $\frac{\partial s(r_{t+1})}{\partial r_{t+1}} > 0$. A kamatláb és a megtakarítási ráta között pozitív irányú a kapcsolat, azaz ha a kamatláb nő, akkor a fogyasztó a jövedelem nagyobb hányadát teszi félre. Ekkor a helyettesítési hatás az erősebb.
2. Ha $\theta > 1$, akkor $1/\theta < 1$, így $\frac{\partial s(r_{t+1})}{\partial r_{t+1}} < 0$. A kamatláb és a megtakarítási ráta között negatív irányú a kapcsolat, azaz ha a kamatláb nő, akkor a fogyasztó a jövedelem kisebb hányadát teszi félre. Ekkor a jövedelmi hatás az erősebb.
3. Ha $\theta = 1$ (logaritmikus hasznossági függvény), akkor $\frac{\partial s(r_{t+1})}{\partial r_{t+1}} = 0$. A kamatláb növekedése nem változtatja meg a megtakarítási rátát, vagyis a két hatás eredője 0.

Piacok

A vállalat illetve a fogyasztók a piacokon kerülnek egymással kapcsolatba, melyeken a kereslet és a kínálat egyenlősége mellett alakul ki az egyensúly.

1. *Kölcsönözhető források (vagyoneszközök) piaca.* A fiatalok egyféle vagyoneszközben képesek csak megtakarítani, tőkében, így a fiatalok következő időszakra átvitt összes megtakarítása megegyezik a következő periódus aggregált tőkeállományával:
$$K_{t+1} = s_t L_t. \tag{7.13}$$
2. *Árupiac.* A vállalat felkínálja az előállított terméket, a fogyasztók pedig fogyasztási, és beruházási céllal vásárolják azt meg:
$$Y_t = C_t + I_t, \tag{7.14}$$
ahol $C_t = c_{1,t}L_t + c_{2,t}L_{t-1}$ az aggregált fogyasztás, azaz a két együttélő generáció fogyasztásának az összege. Az egyensúly feltételét úgy is megkapjuk, ha aggregáljuk a t. periódusban élő két generáció tagjainak költségvetési korlátait:
$$w_t L_t + (1 + r_t)s_{t-1}L_{t-1} = c_{1,t}L_t + c_{2,t}L_{t-1} + s_t L_t,$$
majd behelyettesítjük a vagyoneszközök piacának egyensúlyi képletét és az aggregált fogyasztást:
$$w_t L_t + (1 + r_t)K_t = C_t + K_{t+1}.$$

Végül kihasználjuk, hogy $1+r_t$ valójában a tőke nettó hozama, mely $r_t^K+1-\delta$:

$$w_t L_t + r_t^K K_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t,$$

ahol $w_t L_t + r_t^K K_t = Y_t$, és $K_{t+1} - (1-\delta)K_t = I_t$.

3. *Munkapiac*. A fiatal generáció tagjai felkínálják egységnyi munkaerejüket, így az aggregált munkakínálat L_t^S, amit a vállalat felhasznál a termelés során (L_t^D):

$$L_t^S = L_t^D.$$

4. *Tőkepiac*. Az idős fogyasztók felkínálják az általuk birtokolt tőkét, mely összesen K_t^S, és a vállalat felhasználja azt a termelés során (K_t^D):

$$K_t^S = K_t^D.$$

7.2. A modell dinamikája és egyensúlya

Adott kezdeti értékek mellett bármely periódusában kiszámíthatók az endogén változók értékei a szereplők elsőrendű feltételeit, korlátait valamint a piaci egyensúlyi feltételeket felhasználva. Feltesszük, hogy a gazdaság vizsgálatának kezdetekor L_0 az idősek száma, akik összesen K_1 tőkét birtokolnak (mindkét érték exogén). Miután az idősek nem gondoskodnak utódaikról, életük végén már nem halmoznak fel vagyont, hanem felélik az összes megtakarításukat. Mivel tőkében takarítottak meg, ez úgy lehetséges, hogy eladják a náluk lévő tőkét a fiataloknak, akik hajlandók ezt megvenni, mert abban tudják csak átvinni vagyonukat a következő periódusra. A folyamat később tovább folytatódik a következő generációk között. Láthatjuk, hogy ellentétben a Ramsey-modellel a Diamond-modellben lehetséges a fogyasztók közti tranzakció.

A modell dinamikája

A fiatalok teljes megtakarítása a következő periódusban felhasználható tőkeállománnyal egyezik meg a (7.13) szerint, és egy fiatal megtakarítását a (7.11) egyenlet alapján számíthatjuk ki:

$$K_{t+1} = s_t L_t = \frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}} w_t L_t. \tag{7.15}$$

Írjuk át ezt hatékonysági egységre eső változókra! A definíció ugyanaz, mint a korábbi modellekben, vagyis a változók egy hatékony munkaerőre eső értékét $A_t L_t$-vel való osztás után kapjuk meg, például:

$$\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}.$$

A (7.15) egyenlet ekkor:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \cdot \frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1} w_t}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1} A_t},$$

ahol Cobb-Douglas típusú termelési függvény esetén

$$w_t = K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}(1-\alpha)L_t^{-\alpha},$$

így

$$\frac{w_t}{A_t} = K_t^{\alpha} A_t^{-\alpha}(1-\alpha)L_t^{-\alpha} = (1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha}.$$

A fajlagos tőkeállomány dinamikáját meghatározó egyenlet tehát:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \cdot \frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1}{\theta}-1}} (1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha},$$

ahol

$$r_{t+1} = r_{t+1}^{K} - \delta = \alpha K_{t+1}^{\alpha-1}(A_{t+1}L_{t+1})^{1-\alpha} - \delta = \alpha \tilde{k}_{t+1}^{\alpha-1} - \delta.$$

Az egyszerűség kedvéért a levezetést logaritmikus hasznossági függvénnyel ($\theta = 1$) folytassuk, mert ekkor az átmenetegyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \cdot \frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha}. \tag{7.16}$$

A (7.16) egyenletet ábrázoljuk egy megfelelő koordináta-rendszerben (lásd 7.1 ábra)! A függvény az origóból indul – ha feltesszük, hogy a tőkeállomány nem lehet negatív – valamint növekvő és konkáv:

$$\frac{d\tilde{k}_{t+1}}{d\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \cdot \frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)\alpha\tilde{k}_t^{\alpha-1} \geq 0,$$

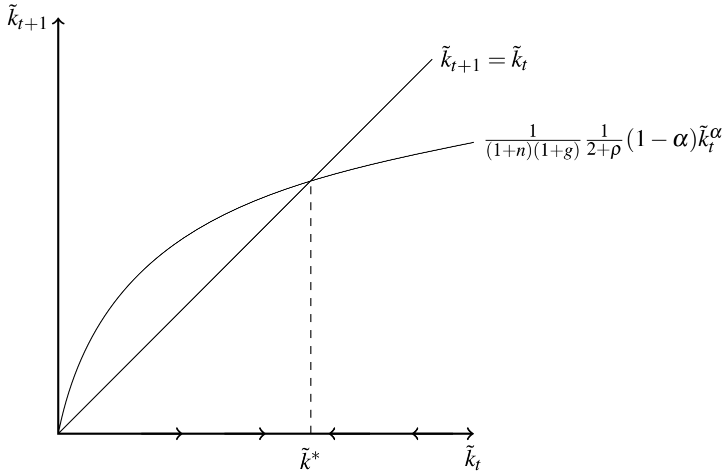
$$\frac{d^2\tilde{k}_{t+1}}{d^2\tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \cdot \frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)(\alpha-1)\alpha\tilde{k}_t^{\alpha-2} \leq 0,$$

$$\frac{d\tilde{k}_{t+1}}{d\tilde{k}_t} \to \infty, \quad \text{ha} \quad \tilde{k}_t \to 0,$$

$$\frac{d\tilde{k}_{t+1}}{d\tilde{k}_t} \to 0, \quad \text{ha} \quad \tilde{k}_t \to \infty.$$

Látható, hogy a függvény és a 45°-os egyenes a $\tilde{k}^*$ pontban metszi egymást[2]. Ettől alacsonyabb induló hatékonysági egységre jutó tőkeállomány esetén az ábra alapján a tőke értéke periódusról periódusra nő, míg el nem éri a $\tilde{k}^*$ pontot, ettől magasabb kezdeti érték esetén pedig folyamatos csökkenést tapasztalunk $\tilde{k}^*$-ig. $\tilde{k}^*$ tehát egy globálisan stabil egyensúlyi pont, hiszen bármely pozitív induló fajlagos tőkeállományból indítva a gazdaságot, az mindig ebbe a pontba konvergál.

[2] Az origó is közös pontjuk, de a $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = 0$ esettel nem foglalkozunk.



7.1. ábra. Átmenetdiagram a Diamond-modellben

Állandósult állapot

Egyensúlyban a hatékonysági egységre eső tőkeállomány nem változik ($\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1}$), és állandósult állapotbeli értéke a (7.16) egyenletből megkapható:

$$\tilde{k}^* = \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{7.17}$$

Ennek következtében a hatékonysági egységre eső kibocsátás sem változik:

$$\tilde{y}^* = \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Eszerint abban a gazdaságban érhető el álladósult állapotban magasabb hatékonysági egységre eső kibocsátás, ahol lassabb a népességnövekedés és a technikai haladás (a Solow-modellhez hasonlóan), illetve ahol ρ kisebb, vagyis ahol a fogyasztók számára relatíve fontosabb az időskori hasznosság.

Az állandósult állapotbeli értékek számszerűsítésénél figyeljünk arra, hogy ebben a modellben egy periódus nem egy évnek, hanem az élettartam felének felel meg! Így például ha egy periódus 30 évet foglal magába, akkor egy 40%-os népességnövekedés egy periódus alatt évi $\sqrt[30]{1,4} = 1,0113$, azaz 1,13%-os növekedést jelent.

Egyensúlyi növekedési pálya

Jelöljük kisbetűvel az egy munkásra eső értékeket, például:

$$k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}!$$

Ne feledjük, hogy ebben a modellben – az előzőektől eltérően – az egy főre és az egy munkásra jutó érték nem ugyanazt jelenti, hiszen az idős generáció már nem dolgozik!

Ha a hatékonysági egységre jutó értékek $(\tilde{k}_t, \tilde{y}_t, \tilde{i}_t, \tilde{c}_t)$ nem változnak egyensúlyban, akkor az egy főre eső változók (k_t, y_t, i_t, c_t) egyensúlyi növekedési üteme a technikai haladással egyezik meg, az aggregált változók (K_t, Y_t, I_t, C_t) pedig $(1+n)(1+g)$ ütemben növekednek, például:

$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{\tilde{k}_{t+1}A_{t+1}}{\tilde{k}_t A_t} = 1+g,$$

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{k_{t+1}L_{t+1}}{k_t L_t} = (1+g)(1+n).$$

A reálbérleti díj egyensúlyban konstans, a reálbér növekedését pedig a munka hatékonyságának fejlődése határozza meg:

$$\frac{r^K_{t+1}}{r^K_t} = \frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}(A_{t+1}L_{t+1})^{1-\alpha}}{\alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L_t)^{1-\alpha}} = \left(\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t}\right)^{\alpha-1} = 1,$$

$$\frac{w_{t+1}}{w_t} = \frac{K_{t+1}^{\alpha}A_{t+1}^{1-\alpha}(1-\alpha)L_{t+1}^{-\alpha}}{K_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}(1-\alpha)L_t^{-\alpha}} = \frac{A_{t+1}}{A_t}\left(\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t}\right)^{\alpha} = 1+g.$$

A megtakarítási ráta már nem exogén, hanem a fogyasztói optimalizáció alapján határozódik meg, mint a Ramsey-modellben, és a (7.12) egyenletben már levezettük a fiatalokét. Mivel a megtakarítás hozama egyensúlyban konstans, a megtakarítási rátájuk sem változhat akkor, de a konvergencia időszakában igen, mint a Ramsey-modellben. Logaritmikus hasznossági függvény esetén azonban minden periódusban konstans $1/(2+\rho)$ az értéke. Az állandó megtakarítási ráta a Solow-modellhez hasonló, de a rátát itt a paraméterekből vezetjük le, azaz endogén.

A modell hosszú távú következtetései megegyezenek a Solow-modellben tapasztaltakkal, és logaritmikus hasznossági függvény esetén a rövid távú dinamika is hasonló.

A konvergencia sebessége

A korábbi modellekben is alkalmazott módszerrel meghatározhatjuk, milyen gyorsan közelít az egyensúlyi növekedési pálya felé a gazdaság, ha még nem érte azt el (levezetését lásd a 7.A függelékben). A konvergencia sebességét megadó egyenlet:

$$\ln\tilde{y}_{t+1} - \ln\tilde{y}_t = (\alpha-1)(\ln\tilde{y}_t - \ln\tilde{y}^*).$$

Eszerint ha az aktuális hatékonysági egységre eső kibocsátás magasabb az állandósult állapotbeli értékénél, akkor negatív a növekedési ráta (az egyenlet bal oldala), vagyis $\tilde{y}_t$

csökken, ha pedig alacsonyabb a jelenlegi szint, mint az állandósult állapotbeli, akkor a növekedési ráta pozitív, azaz növekedni fog a hatékonysági egységre eső kibocsátás. Ebből is látható, hogy bármely kezdeti értékből indulva a gazdaság az egyensúlyi pont felé konvergál, ahogy azt már korábban is megmutattuk.

A konvergencia sebessége a tőke termelési rugalmasságának függvénye, így például $\alpha = 1/3$ esetén az állandósult állapottól vett távolság $2/3$-ával közelít a fajlagos jövedelem az egyensúlyi pontja felé minden periódusban. Emlékeztetőül, a Solow-modellben az együttható $(\alpha - 1)(n+g+\delta)$, így a konvergencia ott ettől lassabb.

Ennek oka, hogy a Solow-modellben a teljes jövedelemből megtakarítani kívánt hányad konstans volt, itt pedig a tőke függvényében változik. A Diamond-modellben a gazdaság egészének megtakarítása $S_t = I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$, ahol K_{t+1} a fiatalok megtakarítása, $(1-\delta)K_t$ pedig az idősek által birtokolt tőke amortizáció után fennmaradó hányada, melyet fogyasztási cikkek vásárlására fordítanak (megtakarításukat felélik az életpálya végén).

A teljes megtakarítás aggregált jövedelemhez viszonyított aránya így:

$$\frac{S_t}{Y_t} = \frac{K_{t+1}}{Y_t} - (1-\delta)\frac{K_t}{Y_t}.$$

Felhasználva, hogy a fiatalok megtakarítása logaritmikus hasznossági függvény esetén $K_{t+1} = s_t L_t = 1/(2+\rho)w_t L_t$, ahol a reálbér a munka határtermékével egyenlő, láthatjuk, hogy a fiatalok megtakarítása a teljes jövedelem konstans hányada:

$$\frac{K_{t+1}}{Y_t} = \frac{\frac{1}{2+\rho}K_t^{\alpha}A_t^{1-\alpha}(1-\alpha)L_t^{-\alpha}L_t}{Y_t} = \frac{1-\alpha}{2+\rho}.$$

Ezzel szemben az idősek "negatív megtakarítási" rátája a hatékonysági egységre eső tőke függvényében változik, így csak állandósult állapotban konstans:

$$\frac{K_t}{Y_t} = \tilde{k}_t^{1-\alpha}.$$

A fentiek alapján tehát a teljes megtakarítás aggregált jövedelemhez viszonyított aránya $\tilde{k}_t$ csökkenő függvénye:

$$\frac{S_t}{Y_t} = \frac{1-\alpha}{2+\rho} - (1-\delta)\tilde{k}_t^{1-\alpha}.$$

Ez azt jelenti, hogy az egyensúlyihoz képest túl magas tőkeállomány mellett a megtakarítási hányad alacsonyabb az állandósult állapotbeli értékénél, túl alacsony tőkeállomány esetén pedig magasabb annál. Ennek eredménye, hogy a Diamond-modellben gyorsabb a konvergencia, mint a Solow-modellben.

Aranyszabály és hatékonyság

A Ramsey-modellben azt tapasztaltuk, hogy nem lehetséges a túlzott tőkefelhalmozás, mert a fogyasztók megtakarítási döntése optimális, és nem exogén adottság, mint a

Solow-modellben. A Diamond-modellben ezzel szemben lehetséges, annak ellenére is, hogy a fogyasztók itt is az optimális megtakarítást választják. Ez annak köszönhető, hogy a szereplők véges, két időszakig tartó életpályán maximalizálják hasznosságukat, miközben a gazdaság végtelen időhorizonton működik.

Ahhoz, hogy ezt megmutassuk, vezessük le a maximális hatékonysági egységre eső fogyasztást biztosító, vagyis az aranyszabály szerinti egyensúlyi fajlagos tőkeállományt! A gazdaság árupiaci egyensúlyából kifejezhető az aggregált fogyasztás, illetve átalakítás után a hatékonysági egységre eső értéke is állandósult állapotban:

$$C_t = Y_t - I_t$$

$$\tilde{c}^* = \tilde{y}^* - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}^* = \tilde{k}^{*\alpha} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}^*$$

A hatékonysági egységre eső fogyasztást maximalizálva ugyanazt az aranyszabályt biztosító feltételt kapjuk, mint a Solow-modellben, miszerint a tőke határterméke a pótlással egyezik meg:

$$\alpha\tilde{k}^{*\alpha-1} = (n+g+\delta+ng),$$

melyből levezethető az aranyszabály szerinti fajlagos tőkeállomány ($\tilde{k}_G$) értéke:

$$\tilde{k}_G = \left(\frac{\alpha}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Összevetve ezt a hatékonysági egységre jutó tőkeállomány állandósult állapotbeli értékével, nem tudjuk egyértelműen megállapítani melyik a nagyobb:

$$\tilde{k}_G \quad \lesseqgtr \quad \tilde{k}^*.$$

$$\left(\frac{\alpha}{n+g+\delta+ng}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \lesseqgtr \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Ha α elég alacsony, akkor előfordulhat, hogy $\tilde{k}^* > \tilde{k}_G$, vagyis túlzott a tőkefelhalmozás az egyensúlyi növekedési pályán. Belátható, hogy ez nem hatékony. *Pareto-hatékonynak* nevezzük azt az egyensúlyt, mikor nem lehetséges úgy javítani valamely szereplő jólétén (jelen esetben hasznosságán), hogy közben másoké ne csökkenjen.

Ha létezne egy társadalmi tervező, aki átrendezhetné a szereplők erőforrásait úgy, hogy annyival csökkentené a megtakarítást, hogy a hatékonysági egységre eső tőkeállomány a következő periódusban az aranyszabály szerinti értékére kerüljünk, és tartósan ott is maradjon, akkor a későbbi időszakokban magasabb hatékonysági egységre eső fogyasztás és így magasabb jólét lenne elérhető, mint a beavatkozás előtt.

Az *első jóléti tétel* szerint azonban a versenyzői egyensúly Pareto-hatékony, vagyis versenyzői piacok mellett, ahol nincsenek externáliák, a kialakult egyensúlynak Pareto-hatékonynak kellene lenni. Ez azért nem teljesül a Diamond-modellben, mert a generációk száma nem véges, így a társadalmi tervező képes úgy gondoskodni az idősek fogyasztásáról, ahogy az a piacokon nem lenne megvalósítható. Mivel az idősek munkajövedelemben már nem részesülnek, úgy biztosítják időskori fogyasztásukat, hogy fiatal korukban tőkeeszközökben megtakarítanak. Erre akkor is rákényszerülnek, ha a tőke hozama nagyon alacsony. A társadalmi tervező ezzel szemben képes arra, hogy az elérhető forrásokat újraossza a fiatal és az idős generáció között. Vegyük például azt az esetet, mikor minden fiataltól elveszi a munkajövedelme egy egységét, és transzferként az időseknek adja az abból befolyt összeget! Ha L_t a fiatalok száma, L_{t-1} pedig az időseké, akkor az egy idősre jutó transzfer (tr_t) értéke:

$$tr_t = \frac{1 \cdot L_t}{L_{t-1}},$$

ahol $L_{t-1} = L_t/(1+n)$ az n ütemű népességnövekedés miatt, így egy idős $1+n$ egységnyi transzferben részesül. Ha a jövedelem egy egységét fiatal korában megtakarította volna, akkor az után most $1+r_t$ kamatot kapna. Ha $n > r_t$, akkor a társadalmi tervező által nagyobb időskori fogyasztás biztosítható, mint mikor a fogyasztók a piaci kamatláb mellett takarítanak meg. A fiatalok fogyasztása nem csökken, mert amit a tervező beszed tőlük, azt egyébként is megtakarítanák, és nem fogyasztásra fordítanák, az idősek fogyasztása pedig növekszik, így a Pareto-javítás lehetősége miatt az egyensúly nem Pareto-hatékony.

Ha a társadalmi tervező ezt az újraosztást a következő generációk között is elvégzi az összes jövőbeli periódusban, akkor azzal nem ront egyik fogyasztó életpályahasznosságán sem. Mivel a modellben lehetőség van arra, hogy úgy növeljük bizonyos generációk fogyasztását, hogy közben a többié sem csökken le, az egyensúly nem hatékony. Ez a hatékonyság viszont különbözik a fentebb definiálttól, mert a későbbi periódusokat is figyelembe veszi, így *dinamikus hatékonyságnak* nevezzük. A túlzott tőkefelhalmozás esetére tehát a dinamikus hatékonyság sem áll fenn.

Ezzel ellentétben a Ramsey-modell egyensúlya mindig Pareto-hatékony volt, mert a végtelen időhorizonzon optimalizáló fogyasztók ugyanolyan korlátokkal és preferenciákkal rendelkeztek, így a társadalmi jólét egybeesett a reprezentatív háztartás jólétével, a társadalmi tervező által meghatározott optimum pedig a fogyasztók optimalizációjából adódó egyensúllyal.

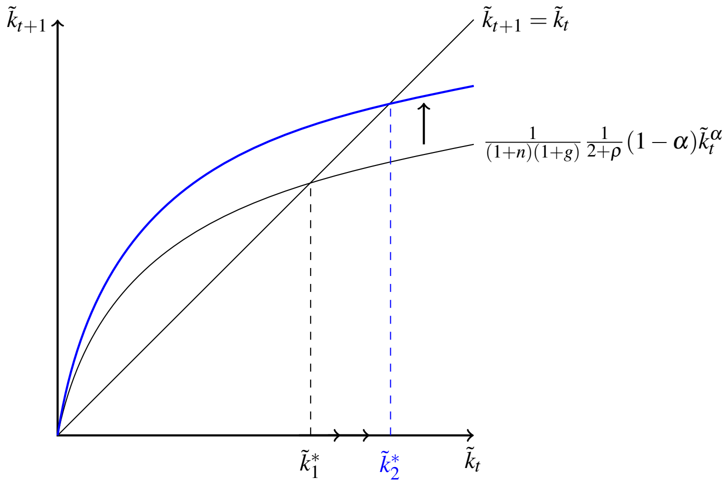
Abel, Mankiw, Summers és Zeckhauser (1989) az Amerikai Egyesül Államok és másik hat fejlett gazdaság (Anglia, Franciaország, Japán, Kanada, Németország és Olaszország) adatait felhasználva vizsgálták, hogy létrejöhet-e a valóságban is dinamikusan nem hatékony helyzet. Ez akkor állna fenn, ha a hozamok alacsonyabbak lennének, mint a növekedési ráta. Azt találták, hogy a rövid lejáratú államkötvények reál kamatlába alacsonyabb volt a gazdasági növekedésnél az Egyesült Államokban, tehát fennállhatott a túlzott tőkefelhamozás lehetősége.

Felhívták azonban a figyelmet arra, hogy a valóságban nem csak egy megtakarítási eszköz áll a szereplők rendelkezésére, hanem többféle, melyek hozama és kockázata eltérő. Más típusú hozam felhasználása mellett már a dinamikus hatékonyság létezését támasztották alá az összes vizsgált országban. Még Japánban is, ahol a többi országhoz képest magas volt a beruházási ráta 1960 és 1984 között.

7.3. A személyes diszkontfaktor változásának hatása

A modell hosszú távú dinamikája hasonlóképpen alakult, mint a Ramsey- és a Solow-modellben. Nézzük meg, hogy a sokkokra adott válaszok és a változók rövid távú mozgása mennyiben tér el ezektől!

Tegyük fel, hogy az általunk vizsgált gazdaság már egyensúlyi növekedési pályán haladt, mikor megváltoztak a fogyasztók preferenciái, és a fiatal generáció számára fontosabbá vált a jövő (ρ lecsökkent)! Az időskori hasznosság felértékelődése miatt jövedelmük nagyobb hányadát takarítják meg, hogy magasabb fogyasztási szintet tudjanak a második életszakaszukban biztosítani.



7.2. ábra. A személyes diszkontfaktor változásának hatása

A hatékonysági egységre jutó tőke dinamikáját leíró (7.16) függvény a 7.2 ábrán látható módon feljebb tolódik, így a $\tilde{k}_1^*$ eredeti állandósult állapotban lévő gazdaságban a tőkeállomány folyamatosan, de egyre csökkenő ütemben növekedni kezd, míg el nem éri az új, $\tilde{k}_2^*$ egyensúlyi szintet. A hatékonysági egységre eső fogyasztás a változás pillanatában lecsökken a hirtelen megemelkedett megtakarítási ráta miatt, majd az egyre nagyobb fajlagos tőkeállomány egyre magasabb hatékonysági egységre jutó jövedelmet biztosít, mely – az akkor már konstans megtakarítási ráta mellett – egyre magasabb fajlagos fogyasztást tesz lehetővé. Az egy főre jutó kibocsátás növekedési üteme emiatt csak átmenetileg gyorsul fel, elérve az új egyensúlyi növekedési pályát újra a technikai haladássalal egyezik meg.

A folyamat tehát hasonló ahhoz, amit a Ramsey-modellben tapasztaltunk β emelkedésének hatására, illetve amit a Solow-modellben láttunk az exogén megtakarítási ráta növekedésekor.

7.4. Fiskális politikával bővített modell

Bővítsük a modellt egy fiskális politikai funkciókat ellátó állammal! Tegyük fel, hogy G_t kormányzati kiadást eszközöl a t. periódusban, amit az első verzióban a fiatal fogyasztóktól beszedett T_t értékű adóból, a másodikban pedig adóból és államkötvényből finanszíroz!

Adófinanszírozás

A kormányzat a G_t értékű vásárlását teljes egészében a fiatal fogyasztókra kivetett egyösszegő, összesen T_t értékű adóból finanszírozza, így költségvetése minden periódusban kiegyensúlyozott. Az idős generációnak már nincs adófizetési kötelezettsége. A t. periódusban az állam költségvetési korlátja:

$$G_t = T_t.$$

Mivel a kormányzati kiadások nem produktívak, adót pedig nem fizetnek a vállalatok, a fiskális politika exogén változói nem befolyásolják sem a termelési függvényét, sem a kiadásait, így a vállalat viselkedése megegyezik az állam nélküli esetben levezetettel.

A fogyasztó hasznosságába szintén nem kerülnek be ezek az aggregátumok, így az továbbra is csak a két életszakasz fogyasztásának függvénye. Változás a fiatal fogyasztó költségvetési korlátjában van, mert a kiadási oldal a fizetendő egyösszegű adóval bővül, melynek egy fiatalra eső értéke $t_t \equiv T_t/L_t$:

$$w_t = c_{1,t} + s_t + t_t.$$

Idős korban már nem fizetnek adót és transzfert sem kapnak az államtól, így korlátjuk változatlan, vagyis időskori fogyasztásukat csak korábbi megtakarításaikból finanszírozhatják: $(1+r_{t+1})s_t = c_{2,t+1}$. A fogyasztó Euler-egyenlete szintén nem változik, mely logaritmikus hasznossági függvény esetén:

$$\frac{1}{c_{1,t}} = \frac{1}{1+\rho}(1+r_{t+1})\frac{1}{c_{2,t+1}}. \tag{7.18}$$

Az időskori költségvetési korlátot és az Euler-egyenletet $c_{2,t+1}$-re kifejezve, majd azokat egyenlővé téve egymással az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\frac{1}{1+\rho}(1+r_{t+1})c_{1,t} = (1+r_{t+1})s_t,$$

ahol a megtakarítás a fiatalkori munkajövedelem adófizetés és fogyasztás után megmaradó része: $s_t = w_t - t_t - c_{1,t}$. Egyszerűsítés és átrendezés után megkapjuk a fiatalkori fogyasztást, ami a rendelkezésre álló (adózás utáni) jövedelem $(1+\rho)/(2+\rho)$ hányada:

$$c_{1,t} = \frac{1+\rho}{2+\rho}(w_t - t_t), \tag{7.19}$$

így a megtakarítás:

$$s_t = \frac{1}{2+\rho}(w_t - t_t), \tag{7.20}$$

vagyis a megtakarítási ráta maradt $1/(2+\rho)$, mint az állam nélküli esetben.

Továbbra is egyféle megtakarítási eszköz áll a fogyasztók rendelkezésére, a tőke, így a következő periódusban felhasználható tőkeállomány a fiatalok aggregált megtakarításával egyezik meg:

$$K_{t+1} = s_t L_t,$$

ami egy hatékony munkaerő egységére vetítve:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\frac{s_t}{A_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\frac{w_t - t_t}{A_t}.$$

A hatékony munkaerőre eső, rendelkezésre álló jövedelem az alábbiak szerint számítható ki, ha tudjuk, hogy a vállalat elsőrendű feltétele alapján a reálbér a munka határtermékével egyezik meg, $\tilde{t}_t \equiv t_t/A_t$ pedig a hatékonysági egységre eső adó, ami az állam kiegyensúlyozott költségvetése miatt $\tilde{t}_t = \tilde{g}_t$:

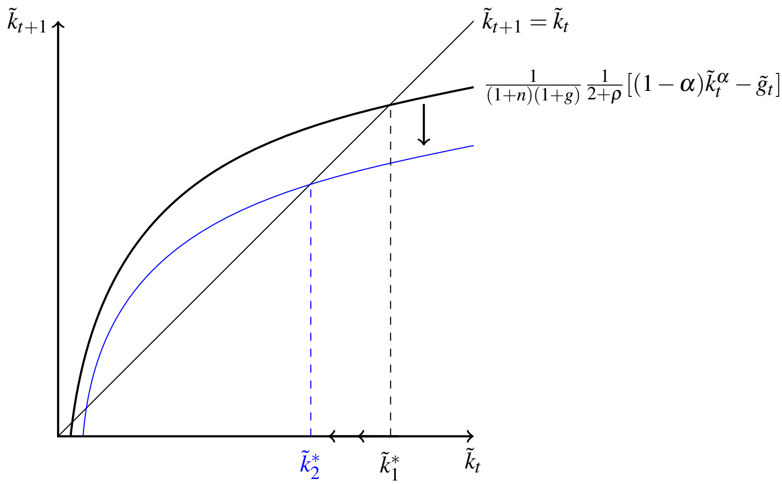
$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}((1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha} - \tilde{g}_t). \tag{7.21}$$

A modell dinamikáját meghatározó egyenlet tehát ugyanaz, mint az állam nélküli esetben, azzal a különbséggel, hogy a rendelkezésre álló, hatékonysági egységre eső jövedelem itt $(1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha} - \tilde{g}_t$ a korábbi $(1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha}$ helyett az adózás miatt.

A Ramsey-modellben azt láttuk, hogy a kormányzati kiadások permanens emelése csak a fogyasztást csökkentette le pontosan annyival, amennyivel a kiadások – és emiatt az adók – nőttek. A tőkére, a kibocsátásra és a kamatokra viszont nem volt hatással. Ezzel szemben az ideiglenes emelés kisebb mértékben vetette vissza a fogyasztást, és a magas kormányzati kiadások idején a tőkeállomány csökkent, a kamatok pedig nőttek.

Nézzük meg, hogy reagálnak a változók a Diamond-modellben hasonló fiskális politikai beavatkozásokra! A kormányzati kiadások tartós emelésének hatására a (7.21) függvény a 7.3 ábrán látható módon lefelé tolódik.

Ha kezdetben a gazdaság a $\tilde{k}_1^*$ melletti állandósult állapotban volt, akkor a kormányzati kiadások emelésének hatására a következő periódusok fajlagos tőkeállománya ennél egyre alacsonyabb lesz, míg el nem éri az új, $\tilde{k}_2^*$ egyensúlyi értéket. A magasabb kiadásokat az állam magasabb adókból képes finanszírozni. Bár adót csak fiatalkorban fizetnek a fogyasztók, annak emelése hatással van időskorukra is. Mivel simítani szeretnék fogyasztási pályájukat, ezért nem az adóváltoztatás mértékével megegyezően csökkentik le fiatalkori fogyasztásukat, hanem attól kevésbé, ezért megtakarításukat is



7.3. ábra. A kormányzati kiadások permanens növelésének hatása

visszafogják. Az alacsonyabb megtakarítás miatt csökken a gazdaság tőkeállománya, a hozamok pedig nőnek. A Ramsey-modellel ellentétben itt tehát a kormányzati kiadások permanens emelésére is a tőkeállomány csökkenésével és a kamatláb növekedésével reagál a gazdaság.

Tegyük fel, hogy a kiadások – és az adók – emelése csak ideiglenes, és bizonyos idő elteltével az állam visszaállítja azokat a kiinduló szintjükre! A modell dinamikája megint a (7.21) egyenlet által adott, ahol $\tilde{g}_1$ jelöli a kezdeti kiadásokat, illetve amire később újra visszatérnek, $\tilde{g}_2$ pedig az ideiglenesen magas értékük:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}((1-\alpha)\tilde{k}_t^\alpha - \tilde{g}_1). \tag{7.22}$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}((1-\alpha)\tilde{k}_t^\alpha - \tilde{g}_2). \tag{7.23}$$

Mivel a fogyasztók életpályája csak két periódusig tart, nem befolyásolja őket, ha tudják, hogy a jövőben egy ismert időpontban újra alacsonyak lesznek a kiadások és az adók (ellentétben a Ramsey-modellel). A magas kiadások mellett a (7.23) összefüggés szerint működik a gazdaság, így a 7.3 ábrán az alacsonyabban lévő görbe az érvényes. Ekkor a permanens esethez hasonlóan a hatékonysági egységre eső tőkeállomány folyamatosan csökken, a kamatláb pedig nő. Amint visszaáll a kiadás az eredeti értékére, újra a (7.22) által adott a dinamika, az ábrán pedig a magasabban lévő görbe a meghatározó. Emiatt a fajlagos tőkeállomány újra növekedni kezd, a kamat pedig csökken.

Adó- és kötvényfinanszírozás

A Ramsey-modellben azt tapasztaltuk, hogy érvényes a ricardiói-ekvivalencia, azaz adott kiadások adóval illetve államkötvénnyel való finanszírozása egymással ekvivalens. Egy adócsökkentésből származó pótlólagos rendelkezésre álló jövedelmet az előrelátó fogyasztó nem költötte el, hanem teljes egészében megtakarította, számítva arra, hogy később csak adóemeléssel tudja majd az állam az adósságát visszafizetni.

Bővítsük a modellt államkötvényekkel és nézzük meg, érvényes-e a fenti megállapítás az együttélő nemzedékekkel bővített modellre is! A továbbiakban a költségvetésnek nem kell kiegyensúlyozottnak lennie, megengedjük az állam eladósodását, így a kormányzat kiadásait az adók mellett a háztartásoknak eladott államkötvényekkel is finanszírozhatja. A költségvetési korlátja így

$$G_t + (1 + r_t)D_t = T_t + D_{t+1},$$

ahol D_{t+1} a t. periódusban kibocsátott államkötvény, mely után a $t+1$. periódusban kamatot fizet. A vállalat és a fogyasztó magatartási egyenletei és korlátai nem változnak az előző, csak adófinanszírozásos esethez képest[3], így egy fiatal fogyasztó fogyasztása és megtakarítása megegyezik a (7.19) és a (7.20) egyenletekben kapott értékekkel.

A különbséget az jelenti, hogy a megtakarítások elhelyezésére már két eszköz áll a szereplők rendelkezésére: tőke és államkötvény, így a fiatalok aggregált megtakarítása e kettő összegével egyezik meg:

$$K_{t+1} + D_{t+1} = s_t L_t,$$

ahol a (7.20) alapján s_t a rendelkezésre álló jövedelem $1/(2+\rho)$ hányada:

$$K_{t+1} + D_{t+1} = \frac{1}{2+\rho}(w_t - t_t)L_t.$$

Átvezetve ezt hatékonysági egységre jutó változókra, és felhasználva, hogy a reálbér a munka határtermékével egyezik meg, $\tilde{t}_t$ pedig a hatékonysági egységre eső adó, ami most nem feltétlen egyenlő a kormányzati kiadásokkal az eladósodás lehetősége miatt:

$$\tilde{k}_{t+1} + \tilde{d}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\left[(1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha} - \tilde{t}_t\right]. \tag{7.24}$$

Látható, hogy ebben a modellben az adó- illetve kötvényfinanszírozás már nem ekvivalens egymással és nem érvényes a ricardiói-ekvivalencia sem. Ha az állam adott kiadások mellett adót csökkent, és azt kötvénykibocsátással finanszírozza, akkor a kötvények kivonása a jövőbeli generációkra kivetett magasabb adók mellett lesz lehetséges. A későbbi adóemelés azonban nem befolyásolja a most élő fiatalokat, így az alacsonyabb adók mellett nő a hatékonysági egységre eső fogyasztás és csökken a tőkeállomány.

[3] A fiatal fogyasztó munkajövedelmét most is fogyasztásra, adófizetésre és megtakarításra fordítja: $w_t = c_{1,t} + t_t + s_t$, időskorában pedig feléli megtakarításait az érte kapott kamatokkal együtt: $(1 + r_{t+1})s_t = c_{2,t+1}$.

7.5. Nyugdíjrendszerek

Az együttélő nemzedékekkel bővített modellcsalád lehetőséget nyújt a különféle nyugdíjrendszerek vizsgálatára, ezért bővítsük az alapmodellt tőkefedezeti, illetve felosztó-kiróvó nyugdíjrendszerrel. Az előbbiben a fiatalok nyugdíjjárulékát tőkébe fektetik, melyet a hozamokkal együtt időskorukban nyugdíjjáradékként visszakapnak. Az utóbbiban pedig a fiatalok által befizetett összegből az akkori idős generáció nyugdíját fedezik. Az egyszerűség kedvéért az állam most csak a nyugdíjakkal kapcsolatos feladatokat látja el, kormányzati kiadásai nincsenek és államkötvényeket sem bocsát ki.

Tőkefedezeti nyugdíjrendszer

Tegyük fel, hogy az állam minden fiataltól t_t összegű adót szed be, melyből tőkeeszközöket vásárol! A tőkét és annak hozamát időskorukban nyugdíjként kapják vissza a fogyasztók, mely egy fogyasztó esetén $(1+r_{t+1})t_t$ értékű, ha a tőke nettó hozama a kamattal egyezik meg.

Egy két időszakig élő fogyasztó ekkor az alábbi költségvetési korlátok mellett maximalizálja életpálya hasznosságát. Fiatal korában munkajövedelmet szerez, melyet fogyasztásra, adófizetésre és megtakarítása fordít, idős korában pedig nyugdíjban részesül, melyet a megtakarításával együtt fogyasztásra költ:

$$w_t = c_{1,t} + s_t + t_t,$$

$$(1+r_{t+1})s_t + (1+r_{t+1})t_t = c_{2,t+1}.$$

A fogyasztó Euler-egyenletét nem változtatja meg a nyugdíjrendszer, mert a fogyasztás határhasznát és a személyes diszkontfaktort nem befolyásolja, így logaritmikus hasznossági függvény mellet az Euler-egyenlet a (7.18) egyenlet által adott. Az Euler-egyenlet és a költségvetési korlátok felhasználásával a korábbiakhoz hasonlóan levezethetjük a fiatal fogyasztó fogyasztását és megtakarítását, melyek tőkefedezeti nyugdíjrendszer mellett:

$$c_{1,t} = \frac{1+\rho}{2+\rho} w_t,$$

$$s_t = \frac{1}{2+\rho} w_t - t_t.$$

A következő időszakban felhasználható tőkeállomány a fiatalok megtakarításából és az általuk befizetett nyugdíjjárulékból adódik, hiszen azt tőkeeszközökbe fekteti az állam:

$$K_{t+1} = s_t L_t + t_t L_t,$$

mely hatékony munkaegységre normálva:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} \left[\frac{1}{2+\rho} \frac{w_t}{A_t} - \tilde{t}_t + \tilde{t}_t \right],$$

mely a munka határtermékével megegyező bérek mellett:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}(1-\alpha)\tilde{k}_t^\alpha.$$

Látható, hogy a tőkefedezeti nyugdíjrendszer bevezetése nem befolyásolja a tőke dinamikáját meghatározó összefüggést. A fiatalok éppen annyival csökkentik le megtakarításukat, amennyi nyugdíjjárulék befizetésére kötelezettek, így összességében a felhalmozott tőkeállomány nem változik.

Felosztó-kiróvó nyugdíjrendszer

A felosztó-kiróvó nyugdíjrendszerben szintén t_t összegű nyugdíjjárulékot szed be az állam minden fogyasztótól, de abból nem vásárol tőkeeszközöket, hanem még abban a periódusban kifizeti azt az akkori időseknek nyugdíjként.

Ha összesen $t_t L_t$ értékű bevételt kell szétosztani L_{t-1} idős között, akkor egy nyugdíjasra ebből

$$\frac{t_t L_t}{L_{t-1}} = t_t(1+n)$$

transzfer jut. Egy fogyasztó két életszakaszának költségvetési korlátja ekkor:

$$w_t = c_{1,t} + s_t + t_t,$$

$$(1+r_{t+1})s_t + (1+n)t_{t+1} = c_{2,t+1},$$

az Euler-egyenlete pedig továbbra is változatlan. Ez utóbbi három összefüggésből levezethető a fiatalkori fogyasztás és megtakarítás, melyek:

$$c_{1,t} = \frac{1+\rho}{2+\rho}\left[w_t - t_t\frac{r_{t+1}-n}{1+r_{t+1}}\right], \tag{7.25}$$

$$s_t = \frac{1}{2+\rho}w_t - t_t\left[\frac{(2+\rho)(1+r_{t+1})-(1+\rho)(r_{t+1}-n)}{(2+\rho)(1+r_{t+1})}\right], \tag{7.26}$$

abban az esetben, ha nyugdíjjárulék mértékén nem változtat az állam az idő múlásával és $t_t = t_{t+1}$. Jelöljük a megtakarítás egyenletében az adó együtthatóját Ω_t-vel:

$$s_t = \frac{1}{2+\rho}w_t - t_t\Omega_t!$$

A következő időszakban felhasználható tőkeállomány a fiatalok megtakarításából adódik:

$$K_{t+1} = s_t L_t = \left[\frac{1}{2+\rho}w_t - t_t\Omega_t\right]L_t,$$

mely fajlagos változókkal felírva:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}\left[\frac{1}{2+\rho}(1-\alpha)\tilde{k}_t^\alpha - \Omega_t\tilde{t}_t\right],$$

ha felhasználjuk, hogy $w_t/A_t = (1-\alpha)\tilde{k}_t^{\alpha}$. Ha $\Omega_t\tilde{\imath}_t \neq 0$, akkor a felosztó-kiróvó nyugdíjrendszer alacsonyabb tőkeállományhoz vezet, mint a nyugdíj nélküli egyensúlyban vagy a tőkefedezeti rendszer mellett, mert $\Omega_t > 0$. Az ilyen típusú nyugdíj bevezetése kevésbé ösztönzi megtakarításra a fiatalokat, mert időskorukban az állam biztosítja fogyasztásuk egy részét. Mivel a befizetett nyugdíjjárulékból itt nem vásárolnak tőkét, az egyéni megtakarítás csökkenése az aggregált tőkeállomány csökkenését eredményezi.

Abban az esetben, mikor a nyugdíj bevezetése előtti egyensúly dinamikusan nem volt hatékony, mert túl sok tőkét halmoztak fel a gazdaságban, akkor a felosztó-kiróvó rendszer akár Pareto-javításhoz is vezethet. Ahogy korábban megmutattuk, $r_{t+1} < n$ esetén alakul ki túlzott tőkefelhalmozás, és ilyenkor a tőkeállomány csökkentésével magasabb fogyasztási szint válik elérhetővé (aranyszabály). A (7.25) egyenletből látszik, hogy $r_{t+1} < n$ esetén magasabb fogyasztás biztosítható a nyugdíjrendszer mellett, mint nélküle, mert a (7.26) összefüggés szerint ekkor $\Omega_t > 1$, vagyis a nyugdíjjárulék összegénél nagyobb mértékében csökken a fiatal fogyasztó megtakarítása.

7.6. Összefoglalás

1. Ebben a fejezetben egy véges ideig élő, optimalizáló fogyasztókat tartalmazó modellel foglalkoztunk. A Diamond-modellben minden periódusban születetik egy új generáció, mely fiatalkorban dolgozik és munkajövedelmét kiadásai finanszírozására és megtakarításra fordítja. Időskorban munkajövedelmet már nem szerez, csak feléli az előző időszak megtakarítását a kamatokkal együtt. Hasonlóképpen a Ramsey-modellhez, a fogyasztók hasznosságukat maximalizálva döntenek endogén változóik pályájáról, de életpályájuk nem végtelen, és egyszerre több generáció él egymás mellett.

2. A modellnek egy globálisan stabil egyensúlyi pontja van, hiszen bármely induló tőkeállomány mellől oda konvergál a gazdaság logaritmikus hasznossági függvényt feltételezve, de a konvergencia gyorsabb, mint a Solow-modellben. Az egyensúlyi növekedési ütemek megegyeznek a Solow- és a Ramsey-modellével, így az exogén technikai haladás határozza meg az egy munkásra eső jövedelem növekedését.

3. A modellben lehetőség van túlzott tőkefelhalmozásra, de megmutattuk, hogy ez nem lehet hatékony egyensúly, hiszen lehetséges úgy javítani bizonyos szereplők helyzetén, hogy másé ne romoljon se akkor, se az elkövetkezendő periódusokban. Itt a Pareto-hatékony egyensúly fogalma mellett bevezettük a dinamikus hatékonyságot is.

4. A személyes diszkontfaktor változására hasonlóképpen reagált a gazdaság, mint a Ramsey-modellben, illetve a Solow-modellben a megtakarítási ráta módosításakor. Csak rövid távon hatott a növekedési ütemekre, hosszú távon nem befolyásolta azokat.

5. A fiskális politikával bővített modell eredményei viszont eltértek a Ramsey-modellétől, mert a kormányzati kiadások permanens és ideiglenes emelése is lecsökkentette a tőkeállományt és megemelte a kamatokat a fogyasztók véges életpályájának köszönhetően. Szintén ebből eredően a ricardói-ekvivalencia sem volt érvényes, és az adó- és kötvenyfinanszírozás sem ekvivalens egymással.

6. Az együttélő nemzedékekkel bővített modell lehetőséget teremt a nyugdíjrendszerek vizsgálatára, így tőkefedezeti, majd felosztó-kiróvó nyugdíjrendszert tettünk a modellbe. Az előbbi bevezetése nem változtatta meg a modell dinamikáját és állandósult állapotát, de az utóbbi kevesebb megtakarításra ösztönözte a fiatalokat, és ebből adódóan alacsonyabb tőkeállományt eredményezett. Megmutattuk, hogy ez Pareto-javításhoz is vezethet, amennyiben a gazdaság egyensúlya dinamikusan nem hatékony.

7.7. Feladatok

1. Hogyan befolyásolják az alábbi változások $\tilde{k}_{t+1}$ alakulását $\tilde{k}_t$ függvényében a Diamond-modellben:

   a) n nő

   b) α nő

   c) a termelési függvény alakja a következő: $\tilde{y}_t = B\tilde{k}_t^{\alpha}$ és a B teljes tényezőtermelékenység csökken?

2. Vegyük a Diamond-modellt logaritmikus hasznossági függvénnyel, ahol a fiatalok a munkajövedelmük (w_t) egyik részét fogyasztásra ($c_{1,t}$) költik, másik részét pedig megtakarítják időskorukra. Az idősek életpályájuk végén elfogyasztják összes jövedelmüket, azaz a fiatalkori megtakarításaikat kamatokkal együtt. Bővítsük a modellt a következőképpen! A fiatalok munkajövedelmére adót vet ki az állam, melynek adókulcsa τ_L (tehát nem egyösszegű az adó). Az adóbevételt az állam kormányzati kiadásokra költi, és egyik generációnak sem folyósít transzfereket, valamint államkötvényket sem bocsát ki.

   a) Vezesse le a fogyasztó Euler-egyenletét!

   b) Írja fel a fiatalok megtakarítását!

   c) Vezesse le az átmenetegyenletet (azaz $\tilde{k}_{t+1}$-et $\tilde{k}_t$ függvényében), és adja meg a fajlagos tőkeállomány egyensúlyi értékét ($\tilde{k}^*$)!

3. Bővítsük a modellt más típusú adókkal! Az állam most a fogyasztást adóztatja (időskorit és fiatalkorit egyaránt), melynek adókulcsa (τ_C). Az adóbevételt az állam kormányzati kiadásokra költi, és egyik generációnak sem folyósít transzfereket, valamint államkötvényeket sem bocsát ki.

a) Vezesse le a fogyasztó Euler-egyenletét!
b) Írja fel a fiatalok megtakarítását!
c) Vezesse le az átmenetegyenletet (azaz $\tilde{k}_{t+1}$-et $\tilde{k}_t$ függvényében) és adja meg a fajlagos tőkeállomány egyensúlyi értékét ($\tilde{k}^*$)!

4. Tegyük fel, hogy a fogyasztók életpályáját nem korlátozzuk két időszakra, hanem halálozási valószínűségekkel bővítjük a modellt! Minden periódusban születik egy új generáció, melynek mérete egységnyi ($L_t = 1$ minden t-re), azaz nincs népességnövekedés. Minden fogyasztó φ valószínűséggel éli meg a következő időszakot és $1-\varphi$ valószínűséggel hal meg. Így a fogyasztók életpályahasznosságának várható értéke a következő:

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} (\beta\varphi)^{t-1} u(c_t).$$

Adja meg φ függvényében, mekkora a teljes népesség mérete a t. periódusban!

5. Vegyük a Diamond-modellt logaritmikus hasznossági függvénnyel:

$$U_t = lnc_{1,t} + lnc_{2,t+1}!$$

A termelési oldal viszont legyen egyszerűbb, mint az órán vett modellben, vagyis tegyük fel, hogy minden évben adott A mennyiségű terméket kapnak a fiatalok, amit elfogyaszthatnak (c) vagy elraktározhatnak (F)! Egységnyi elraktározott mennyiség után $x > 0$ mennyiségű terméket kapnak időskorukban.

a) Jellemezzük a gazdaság egyensúlyi állapotát!
b) Tegyük fel, hogy az elraktározott mennyiség A-hoz viszonyított aránya konstans (f)! Hogyan alakul az egy munkásra eső fogyasztás f függvényében? Ha $x < 1+n$, mekkora f maximalizálja az egy munkaerőre jutó fogyasztást? A fenti egyensúly Pareto-hatékony? Ha nem, növelheti-e a jólétet egy társadalmi tervező?

6. Módosítsuk az előző feladatot a következőképpen! Tegyük fel, hogy $x < 1+n$, és a 0. időszak idős generációjának tagjai fejenként M egységnyi osztható, raktározható "pénzhez" jutnak, ami nem fogyasztható, így közvetlenül nem tartalmazza a hasznosság függvényük sem!

a) Vegyünk egy t. periódusban született szereplőt! Legyen egy jószág ára a t. periódusban P_t és $t+1$-ben P_{t+1} pénzegység! A szereplő eladhatja egységnyi termékét P_t pénzegységért, majd a következő periódusban felhasználva a pénzt, vásárolhat a következő generációtól. Hogyan viselkedik a fogyasztó P_t/P_{t+1} függvényében?
b) Mutassa meg, hogy $P_{t+1} = P_t/(1+n)$ esetén létezik egyensúly (minden $t \geq 0$-ra) a pénzpiacon, ahol nincs raktározás és a pénznek köszönhetően elérhető az aranyszabály szerinti fogyasztás!

c) Végül magyarázza el, miért egyensúly a $P_t = \infty$ (a pénz értéktelen) eset is, és véges időhorizont esetén miért ez az egyetlen egyensúly!

7. Módosítsuk az előző feladatot a következőképpen! Legyen $x = 0$, és a logaritmikus hasznosság helyett használjunk CRRA típusút! Végül vegyük a következő egyszerűsítést: $n = 0$!

    a) Hogyan viselkedik a fogyasztó P_t/P_{t+1} függvényében?

    b) Tegyük fel, hogy $P_0/P_1 < 1$! A 0. periódusban születettek mekkora mennyiségű terméket kívánnak vásárolni az 1. periódusban a fiataloktól? Mekkora legyen P_1/P_2, hogy az 1. periódus fiataljai el is adják nekik ezt a mennyiséget?

    c) Hogyan változik az idő múlásával P_t/P_{t+1}? Lehet ez egyensúly?

    d) Lehet egyensúlyban $P_0/P_1 > 1$?

7.A. A konvergencia sebessége

Vegyük a (7.16) mozgásegyenletet, és írjuk fel annak elsőrendű Taylor-közelítését a $\tilde{k}_t = \tilde{k}^*$ pont körül:

$$\tilde{k}_{t+1} \approx \tilde{k}^* + \frac{(1-\alpha)\alpha}{(1+n)(1+g)(2+\rho)} \tilde{k}^{*\alpha-1}(\tilde{k}_t - \tilde{k}^*). \tag{7.27}$$

Átrendezve és felhasználva, hogy a változó természetes alapú logaritmusainak különbsége közelítőleg a növekedési rátával egyezik meg:

$$\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^* = \frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}^*}{\tilde{k}^*},$$

$$\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^* = \frac{\tilde{k}_t - \tilde{k}^*}{\tilde{k}^*},$$

a (7.27) egyenlet átírható az alábbi alakra:

$$\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^* = \frac{(1-\alpha)\alpha}{(1+n)(1+g)(2+\rho)} \tilde{k}^{*\alpha-1}(\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*).$$

A hatékonysági egységre eső tőkeállomány állandósult állapotbeli értékét – melyet a (7.17) egyenletben adtunk meg – behelyettesítve

$$\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^* = \frac{(1-\alpha)\alpha}{(1+n)(1+g)(2+\rho)} \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(1+g)(2+\rho)}\right]^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha}} (\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*),$$

amiből az egyszerűsítések után egy jóval rövidebb összefüggés adódik:

$$\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^* = \alpha(\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*).$$

A termelési függvény intenzív formájának logaritmizált alakját ($\ln \tilde{y}_t = \alpha \ln \tilde{k}_t$) felhasználva a hatékonysági egységre jutó jövedelem növekedési rátájára is felírható hasonló összefüggés:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}^* = \alpha(\ln \tilde{k}_{t+1} - \ln \tilde{k}^*) = \alpha\alpha(\ln \tilde{k}_t - \ln \tilde{k}^*),$$

ami egyszerűbben

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}^* = \alpha(\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*).$$

Végül vonjunk ki az egyenlet mindkét oldalából $\ln \tilde{y}_t$-t és adjunk hozzá $\ln \tilde{y}^*$-ot, hogy megkapjuk a konvergencia sebességét meghatározó egyenletet:

$$\ln \tilde{y}_{t+1} - \ln \tilde{y}_t = (\alpha - 1)(\ln \tilde{y}_t - \ln \tilde{y}^*)!$$

IRODALOMJEGYZÉK

Abel, A. B., Mankiw, N. G., Summers, L. H., és Zeckhauser, R. J. (1989). Assessing Dynamic Efficiency: Theory and evidence. *The Review of Economic Studies*, 56(1):1–19.

Acemoglu, D. (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press.

Aghion, P. és Howitt, P. (1992). A Model of Growth Through Creative Destruction. *Econometrica*, 60(2):323–351.

Arrow, K. J. (1962). The Economic Implications of Learning by Doing. *The Review of Economic Studies*, 29(3):155–173.

Auerbach, A. J. és Kotlikoff, L. J. (1987). *Dynamic Fiscal Policy*. Cambridge University Press, Cambridge.

Barro, R. és Sala-i Martin, X. (2004). *Economic Growth*. The MIT Press, Cambridge, 2nd edition.

Barro, R. J. (1987). Government Spending, Interest Rates, Prices, and Budget Deficits in the United Kingdom, 1701–1918. *Journal of Monetary Economics*, 20(2):221 – 247.

Barro, R. J. és Lee, J. W. (2013). A New Data Set of Educational Attainment in the World, 1950–2010. *Journal of Development Economics*, 104:184 – 198.

Baumol, W. J. (1986). Productivity Growth, Convergence, and Welfare: What the Long-Run Data Show. *The American Economic Review*, pages 1072–1085.

Blanchard, O. (1985). Debt, Deficits, and Finite Horizons. *Journal of Political Economy*, 93(2):223–47.

Cass, D. (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *The Review of Economic Studies*, 32(3):233–240.

De Long, J. B. (1988). Productivity Growth, Convergence, and Welfare: Comment. *The American Economic Review*, 78(5):1138–1154.

Diamond, P. A. (1965). National Debt in a Neoclassical Growth Model. *The American Economic Review*, 55(5):1126–1150.

Feenstra, R. C., Inklaar, R., és Timmer, M. P. (2015). The Next Generation of the Penn World Table. *American Economic Review*, 105(10):3150–3182.

Grossman, G. M. és Helpman, E. (1991). *Innovation and Growth in the Global Economy*. MIT Press, Cambridge.

Inada, K.-I. (1963). On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization. *The Review of Economic Studies*, 30(2):119–127.

Koopmans, T. C. (1965). On the Concept of Optimal Economic Growth. The Economic Approach to Development Planning, Amsterdam: North Holland

Mankiw, N. (2012). *Macroeconomics*. Worth Publishers.

Mankiw, N. G., Romer, D., és Weil, D. N. (1992). A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2):407–437.

Ramsey, F. P. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *The Economic Journal*, 38(152):543–559.

Romer, D. (2011). *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill, 4th edition.

Romer, P. M. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, 98(5):71–102.

Samuelson, P. A. (1958). An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. *Journal of Political Economy*, 66(6):467–482.

Solow, R. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1):65–94.

Sørensen, P. B. és Whitta-Jacobsen, H. J. (2005). *Introducing Advanced Macroeconomics: Growth and Business Cycles*. McGraw-Hill, London.

Swan, T. W. (1956). Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record*, 32(2):334–361.

The Maddison-Project adatbázis. (2013). http://www.ggdc.net/maddison/maddison-project/home.htm, Letöltve: 2017. május

#06

Növekedéselméletek

Miért olvassam el?

Hogyan váltak az évek során bizonyos országok gazdaggá, mások pedig szegénnyé? Miért ilyen nagyok az országok közti jövedelmi különbségek? Miért nem képesek egyes országok gyors gazdasági növekedésre, ha mások igen? Egyáltalán mi kell ahhoz, hogy a GDP emelkedjen?

Ezek a makroökonómia talán legizgalmasabb kérdései. A könyv különféle elméletek segítségével próbál választ kapni arra, hogy mi lehet a fejlődés fő mozgatórugója, és miként biztosítható hosszú távon a növekedés. Célja, hogy az egyszerű összefüggésektől indulva, lépésről-lépésre haladva jussunk el a bonyolultabb modellekig, melyek egyre jobban teljesítenek empirikusan. Egy haladó makroökonómia kurzus keretein belül megfelelő eszköz lehet a kezünkben a növekedési modellek logikájának elsajátításához.