Olvass és tanulj !

#07

Az általános egyensúlyelmélet matematikai eszközei

A láthatatlan kéz megragadása

Szerzők: Szabó Imre - Kánnai Zoltán

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

MAGYAR NEMZETI BANK

Szabó Imre, Kánnai Zoltán

Az általános egyensúlyelmélet matematikai eszközei

Közgazdaságtudományi Kar
Matematika Tanszék

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar
Matematika Tanszék

„A Budapesti Corvinus Egyetem és a Magyar Nemzeti Bank
együttműködési megállapodása keretében támogatott mű.”

ISBN 978-963-503-645-5
Kiadás 2017

Nyomdai kivitelezés: CC Printing Kft.

TARTALOM

Előszó

Adam Smith korának gazdaságát vizsgálva arra a – ma már közszájon forgó – felismerésre jutott, hogy a gazdaság szereplői bár csupán saját, egymástól különböző egyéni céljaikat követik, és nem törődnek a társadalom érdekével, mindennek ellenére egy *láthatatlan kéz* által vezetve a közös célokat mégis a leghatékonyabban mozdítják elő.

Ezt a titokzatos és kissé paradox összefüggést az 1776-ban publikált *Wealth of Nations* című munkájában (IV. könyv, II. fejezet, IX. paragrafus) írta le [20]:

„*Every individual endeavours ... to employ his capital ... so that its produce may be of gretaest value. ... He generally neither intends to promote the public interest, nor knows how much he is promoting it. ... He intends only his own security, ... only his own gain. And he is in this ... led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention. ... By pursuing his own interest, he frequently thus promotes that of society more effectually than when he really intends to promote it.*"

Ezt a gondolatot a tapasztalatok néha igazolják, néha viszont úgy tűnik, hogy az ellenkezőjét erősítik, mindenesetre ez mélyen meghatározza a közgazdászok gondolkodását mind a mai napig. Erősen meg is osztja a közgazdász-társadalmat. Sokan keresik az elmélet hiányosságait és ellentmondásait, sokan pedig feltétlen követői, és igyekeznek minél precízebb matematikai modellel alátámasztani a fenti gondolatot.

Adam Smith tudniillik nem adott pontos leírást arról, hogy a láthatatlan kéz hogyan irányít, és nem adott elfogadható indoklást sem ennek létéről. Száz évet kellett várni arra, hogy Léon Walras felismerje, miszerint az árrendszerek a láthatatlan kéz működésének az elemei. Az árrendszerek működése vezeti a különböző szereplőket azáltal, hogy elegendő információval látnak el mindenkit a szűkös javak eléréséhez szükséges következetes vfiselkedéshez. Walras 1874-ben az „Elements d'économie politique pure" című könyvében vezette be az *általános egyensúly* fogalmát, amit egy nemlineáris egyenleterendszer megoldásaként definiált. Az általános jelző azt jelenti, hogy az egyensúly egyidejűleg az összes piacon, azaz általánosan fennáll. Az egyenletek számának és a változók számának az egyenlősége alapján ő és követői azon a véleményen voltak, hogy az egyenletrendszernek létezik megoldása, a gazdaságnak tehát létezik egyensúlya. Ismeretes azonban, hogy egy egyenletrendszernek nem feltétlenül van megoldása, még lineáris esetben sem.

Majdnem újabb száz évnek kellett eltelnie ahhoz, hogy Neumann János a játékelmélet keretei között bevezesse a nyeregpont fogalmát, és a nevét viselő növekedési modellben igazolja ennek létezését. A megoldás matematikai kulcsa a Brouwer-féle fixponttétel általa történt általánosítása. A nyeregpont fogalmát később John Nash általánosította, ez a Nash-féle egyensúlyfogalom tette aztán lehetővé Arrow és Debreu számára, hogy az Adam Smith gondolatai által motivált modellben pontos állítást fogalmazzanak meg az egyensúly létezésére, és megadják ennek matematikailag korrekt bizonyítását is. A Neumann-féle fixponttétel bizonyításának a leegyszerűsítésére igazolta Kakutani a halmazértékű leképezésekre vonatkozó fixponttételét, amely mára az ő megfogalmazásában vált közismertté. Ennek a tételnek a segítségével Arrow és Debreu nagyon elegáns felépítést tudott adni az általános egyensúly létezésére [1].

Az általános egyensúlyelméleti modell a közgazdaságtan egyik legjelentősebb, egyszersmind legaxiomatizáltabb eredménye, amihez a legkiválóbb matematikusok úttörő munkájára volt szükség. E modell azóta is mintául szolgál a gazdaságról való gondolkodásra minden elméleti közgazdász számára. Ugyanakkor a matematika alkalmazási körét is kibővítette, lehetővé téve, hogy a matematikai modellezést ne csak a szűkebb értelemben vett természettudományokban, hanem a társadalomtudományokban is használni lehessen.

Tapasztalataink alapján úgy tűnik, hogy egy közgazdasági elmélet elsajátításának a nehézsége nem a közgazdasági összefüggések bonyolult voltában gyökerezik, hanem a felhasznált matematikai eszköztár mélységéből következik. Ezek ismerete nélkül csupán felszínes és ingatag következtetésekhez juthatunk. A szükséges matematikai eszközök hiánytalan birtokában ugyanakkor a közgazdasági alkalmazások meglepően röviddé és áttekinthetővé is válnak. Tehát még a közgazdasági aspektusból vett egyszerűséget sem leljük másban, mint az igényes matematikai megalapozásban. Ahogy a régi mondás tartja: *Ha hat órám van egy fa kivágására, akkor ebből az első négyet a fejsze élesítésére fordítom.* Az általános egyensúlyi modell esetében a fejsze élét a már említett Kakutani-féle fixponttétel jelenti. Ahhoz, hogy használni tudjuk ezt a fixponttételt, tisztában kell lennünk a halmazértékű leképezések folytonosságával. Ahhoz pedig, hogy az úgynevezett túlkeresleti leképezés folytonosságát megértsük, ismernünk kell a feltételes szélsőérték-feladatok elméletét.

Mind az egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat megoldására vonatkozó Lagrange-féle multiplikátor-tétel, mind pedig az egyenlőtlenséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat megoldására vonatkozó Kuhn–Tucker–Fritz John-féle multiplikátor-tétel bizonyítása igen mély analízisbeli ismereteket igényel. Emiatt az első fejezetben a szemléltetés kedvéért csupán kétváltozós függvényekre mutatjuk be a felmerülő problémákat, és igyekszünk minél több feladaton (mintegy iskolapéldákon) keresztül megismertetni a tételek alkalmazását. A kétváltozós függvényekre adott bizonyítások pedig jó útmutatóul szolgálnak az általános eset technikailag lényegesen összetettebb bizonyításainak megértéséhez.

A második fejezetben szerepelnek a multiplikátor-tételek bizonyításához felhasznált matematikai eszközök: az implicitfüggvény-tétel, a Ljusztyernyik-tétel, a Farkas-tétel és a szeparációs tételek. A harmadik fejezetben pedig újra a multiplikátor-tételek kerülnek sorra, immár általános esetben.

A negyedik fejezetben ismertetjük a halmazértékű leképezések folytonossági fogalmait, ezek kapcsolatát, a feltételes szélsőértékfeladatok értékfüggvényének és megoldásleképezésének a folytonosságát jellemző Berge-tételt.

Az ötödik fejezetben tárgyaljuk a Brouwer-féle fixponttételt. Ez a fixponttétel a többi sorra kerülő fixponttételnek (a kontrakciós és Tarski-féle tételek kivételével) jól elkülöníthető alapját képezi, egyszersmind a bizonyítása azokéhoz képest mélyebben fekvő, ezért került eléjük egy külön fejezetbe. A többi fixponttételt pedig a hatodik fejezet tartalmazza.

Végül a hetedik fejezet az általános egyensúlyelméleti modell matematikai szempontú összefoglalása.

A könyv több évtized munkájának lenyomata. A megszerzett tudásért sokaknak tartozunk köszönettel. Közülük kiemeljük Czách Lászlót, aki a matematikai gondolkodásunkra nagy hatással volt, és Dancs Istvánt, akinek a kézirataiból (a teljesség igénye nélkül [6] [7], [8]) sok ismeretre tettünk szert, továbbá akinek strukturális szemlélete e könyv sok-sok lapjáról visszaköszön, és aki a matematikán és közgazdaságtanon kívül egész tudományos világképünkre nézve is meghatározó volt.

Budapest, 2017. március Szabó Imre és Kánnai Zoltán

I.

FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK-FELADATOK, MULTIPLIKÁTOR TÉTELEK I.

A feltételes szélsőérték-feladatok elmélete a közgazdaságtan talán legfontosabb matematikai eszköze. Az egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat megoldásának szükséges feltétele, a Lagrange-féle multiplikátor-tétel, valamint a bizonyításához felhasznált implicitfüggvény-tétel nem csak azért fontos, hogy segítségükkel konkrét problémákat tudjunk megoldani, hanem ezek a tételek teszik lehetővé a mikroökonómia alapvető fogalmainak a bevezetését, továbbá a köztük fennálló kapcsolatok áttekinthető értelmezését. Az egyenlőtlenséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat megoldásának szükséges feltétele, a Kuhn-Tucker-tétel pedig még életszerűbb modellek tanulmányozását teszi lehetővé.

1.1. Feltételes szélsőérték-feladatok a kétváltozós függvényekre

A fent elmondottak alapján a mikroökonómia bevezető kurzusa során is szükség volna az implicitfüggvény-tétel és a Lagrange-féle multiplikátor-tétel ismeretére, ugyanakkor ezek matematikai szempontból nehéznek számítanak, a matematikai analízis mélyebben fekvő területéhez tartoznak, már kimondásuk megértése is komoly ismereteket igényel. A könnyebb érthetőség végett első lépésben a kétváltozós függvényekre vonatkozó esetüket mutatjuk be. Ismeretük nemcsak a mikroökonómia fogalmainak alapos megértéséhez nyújtanak nélkülözhetetlen segítséget, hanem ezen tételek általánosabb tárgyalásához is jó alapot adnak azáltal, hogy az említett kétváltozós eset szemléltető vázát alkotja az általános eset technikailag jóval bonyolultabb felépítésének.

Szintvonal és szintvonal érintője

A probléma

Az alábbiakban arra a kérdésre keressük a választ, hogy egy adott kétváltozós függvény szintvonala függvényt alkot-e? Nevezetesen, legyen $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény és $c\in\mathbb{R}$ egy adott szám; kérdés pedig, hogy az

$$f^{-1}(c) = \{(x,y)\ :\ f(x,y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

szintvonalhoz van-e olyan $g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, amelyre teljesül, hogy

$$f^{-1}(c) = g\,.$$

Másképpen megfogalmazva: az

$$f(x,y) = c$$

egyenlőségből az y változó kifejezhető-e az x változó $y = g(x)$ alakú függvényeként explicit alakban, azaz a fenti egyenlőség tekinthető-e egy implicit módon megadott függvénynek.

1.1.1. Példa (Egy speciális eset: a lineáris függvény szintvonala)**.** Abban az esetben, amikor az $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény lineáris, azaz

$$f(x,y) = n_1 x + n_2 y$$

(aminek a gráfja egy origót tartalmazó sík), akkor a válasz nyilvánvaló. Ugyanis ekkor az $f(x,y) = c$ egyenlőség az

$$n_1 x + n_2 y = c$$

alakot ölti, ami az (n_1, n_2) normálvektorú egyenes egyenlete, s ebből, feltéve, hogy $n_2 \neq 0$, kapjuk, hogy az y változó kifejezhető az x változó függvényeként:

$$y = g(x) = -\frac{n_1}{n_2} x + \frac{c}{n_2} .$$

Mivel az f függvény lineáris, így differenciálható $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pontban, és

$$f'(x,y) = [\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)] = [n_1, n_2] ,$$

továbbá a g függvény is differenciálható $\forall\ x \in \mathbb{R}$ pontban, és $g'(x) = \frac{n_1}{n_2}$, amikből adódik a következő összefüggés:

$$g'(x) = -\frac{\partial_1 f(x,y)}{\partial_2 f(x,y)} .$$

Mivel a differenciálhatóság lineáris függvénnyel való közelítést jelent, ezért ezek alapján az várható, hogy ha egy differenciálható $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényre egy $c \in \mathbb{R}$ szám mellett van olyan $g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre teljesül, hogy

$$f^{-1}(c) = g ,$$

akkor

$$g'(x) = -\frac{\partial_1 f(x,y)}{\partial_2 f(x,y)} .$$

Ez az összefüggés valóban igaz, mint később látni fogjuk az implicitfüggvény-tételben.

1.1.2. Példa (A paraboloid szintvonala)**.** Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény, nevezetesen

$$f(x,y) = x^2 + y^2 ,$$

aminek a gráfja egy paraboloid. Ennek a $c > 0$ konstanshoz tartozó szintvonalai körök. Ugyanis ekkor az $f(x,y) = c$ egyenlőség a $c = r^2$ mellett az

$$x^2 + y^2 = r^2$$

kör egyenlete. Ez természetesen nem függvény, de a felső illetve az alsó fele már az:

$$y = g(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{és} \quad y = h(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} .$$

Látható, hogy az f függvény differenciálható $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pontban, és

$$f'(x,y)=[\partial_1 f(x,y),\partial_2 f(x,y)]=[2x,2y]\,,$$

továbbá a g és h függvények is differenciálhatók $\forall\,x\in(-r,r)$ pontban, és például

$$g'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}\,,$$

amikből ebben az esetben adódik a fent már felvázolt összefüggés:

$$g'(x)=-\frac{\partial_1 f(x,y)}{\partial_2 f(x,y)}\,.$$

Ebben a példában még egy szabályt fedezhetünk fel. A g függvény érintőjének a normálvektora

$$(g'(x),-1)=(-x/y,-1)\,.$$

Ekkor viszont normálvektora a

$$(-y)\cdot(-x/y,-1)=(x,y)$$

vektor is, ami azt jelenti, hogy az (x,y) ponthoz tartozó sugár merőleges az (x,y) pontbeli érintőre, mint az egyébként is ismert.
Továbbá normálvektora a

$$(-2y)\cdot[-x/y,-1]=[2x,2y]=[\partial_1 f(x,y),\partial_2 f(x,y)]=f'(x,y)$$

derivált (gradiensvektor) is, ami azt jelenti, hogy az f függvény deriváltja, ami egyébként, ismeretesen az f függvény legnagyobb növekedésének az iránya, merőleges az f függvény szinthalmazának az érintőjére.

A fentiek megismételhetők egy hajszálnyival általánosabban az $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=b^2x^2+a^2y^2$$

kvadratikus függvényre, ami továbbra is egy paraboloid, csak valamilyen irányból „össze van nyomva". Ennek a szintvonalai ellipszisek. Ugyanis ekkor az $f(x,y)=c$ egyenlőség a $c=a^2b^2$ mellett az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ellipszis egyenlete. Ez sem függvény természetesen, de a felső illetve az alsó fele már az:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad\text{és}\quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,.$$

A probléma pontosítása

A fenti esetekből kiindulva a felületes szemlélő számára az a látszat keletkezhet, hogy a fenti probléma nem túlságosan mély, csupán az ügyességünkön múlhat, hogy az $f(x,y)=c$ egyenlőségből az y változót kifejezzük. Tekintsük azonban az

$$f(x,y)=e^{x+y}+x+y$$

függvénynek a $c=1$ melletti szintvonalát, azaz próbáljuk meg az

$$e^{x+y}+x+y=1$$

egyenlőségből kifejezni az y változót az x változó függvényeként. Ez az eddigi eszközökkel nem sikerülhet. (Bicskával nem faragható ki a megoldás, komolyabb szerszámokra van szükségünk.)

A kvadratikus függvények esete már sejteti, hogy globális megoldást általában nem is várhatunk, csak lokálisat. Könnyű elképzelni olyan „domborzatot”, amelynek a szintvonalai messze nem függvények, de az adott pontjaik valamely környezetében már általában azok. Pontosítsuk ezért a fenti probléma felvetést az alábbi módon:
Legyen $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény, valamint legyen

$$(x_0,y_0)\in\mathscr{D}(f)$$

egy adott pont. Tekintsük ezután az

$$f^{-1}(f(x_0,y_0))=\{(x,y)\ :\ f(x,y)=f(x_0,y_0)\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

szintvonalat. Kérdés, hogy ez a szintvonal az (x_0,y_0) egy környezetében függvényt alkot-e? Pontosabban, van-e olyan $g:\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ függvény, amelyre teljesül, hogy az (x_0,y_0) egy környezetében

$$f^{-1}(f(x_0,y_0))=g\,.$$

1.1.3. Példa (A lineáris függvény szintvonalai)**.** Tekintsük ismét az $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=n_1x+n_2y=\langle(n_1,n_2),(x,y)\rangle$$

lineáris függvényt, aminek a deriváltja

$$f'(x,y)=[\partial_1 f(x,y),\partial_2 f(x,y)]=[n_1,n_2]\,.$$

Egy adott $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pont mellett az $f(x,y)=f(x_0,y_0)$ egyenlőség azt jelenti, hogy

$$n_1x+n_2y=n_1x_0+n_2y_0\,,$$

ami az (x_0,y_0) ponton átmenő (n_1,n_2) normálvektorú egyenes egyenlete, s ebből $n_2\neq 0$ esetén az y változó kifejezhető:

$$y-y_0=-\frac{n_1}{n_2}(x-x_0)\,,$$

ez pedig az (x_0, y_0) ponton átmenő

$$m = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{\partial_1 f(x_0,y_0)}{\partial_2 f(x_0,y_0)}$$

meredekségű egyenes egyenlete.

1.1.4. Példa (A paraboloid szintvonala és egy további kérdésfelvetés)**.** Tekintsük ismét a fenti $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 + y^2 ,$$

kvadratikus függvényt, aminek a gráfja egy paraboloid. Ez a függvény differenciálható minden pontban, és a deriváltja

$$f'(x,y) = [\partial_1 f(x,y), \partial_2 f(x,y)] = [2x, 2y] .$$

Egy adott $(x_0,y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pont mellett az $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ egyenlőség azt jelenti, hogy

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 ,$$

ami egy $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ sugarú kör egyenlete, aminek az alsó és felső felei függvények:

$$y = g(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{és} \quad y = h(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} .$$

Láttuk, hogy ha $x_0 \in (-r,r)$, akkor a g (illetve a h) függvény, azaz a kör érintőjének a normálvektora az (x_0,y_0) pontban a függvény deriváltja:

$$f'(x_0,y_0) = [2x_0, 2y_0] ,$$

ezt felhasználva a szintvonal érintőjének az egyenlete az (x_0,y_0) pontban:

$$2x_0 x + 2y_0 y = 2x_0 x_0 + 2y_0 y_0 .$$

Magának az f függvénynek az érintője (érintősíkja) az (x_0,y_0) pontban

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0)\,((x,y) - (x_0,y_0)) , \quad \text{azaz} \\ z - f(x_0,y_0) &= 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) , \end{aligned}$$

ennek a $z = f(x_0,y_0)$ értékhez tartozó szintvonala pedig

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0 .$$

Ezek szerint a szintvonal érintője megegyezik az érintő szintvonalával.

Szintvonal érintője általában

Az előző példa alapján felvetődik az a kérdés, hogy igaz-e általában, hogy a függvény deriváltja a szintvonal érintőjének a normálvektora. Ez az állítás is igaz, mint később látni fogjuk a Ljusztyernyik-tételben.

A szemléletre támaszkodva ezt a következő módon erősíthetnénk meg: Egy $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightarrowtail\mathbb{R}$ differenciálható kétváltozós függvény

$$(x_0,y_0)\in\mathscr{D}(f)$$

pontbeli érintősíkjának az egyenlete

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0)+f'(x_0,y_0)\left((x,y)-(x_0,y_0)\right), \quad \text{azaz} \\ z-f(x_0,y_0) &= \partial_1 f(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial_2 f(x_0,y_0)(y-y_0), \end{aligned}$$

aminek a $z=f(x_0,y_0)$ értékhez tartozó szintvonala

$$\begin{gathered} 0=\partial_1 f(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial_2 f(x_0,y_0)(y-y_0), \quad \text{azaz} \\ \partial_1 f(x_0,y_0)x+\partial_2 f(x_0,y_0)y=\partial_1 f(x_0,y_0)x_0+\partial_2 f(x_0,y_0)y_0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

illetve másképpen:

$$\langle(\partial_1 f(x_0,y_0),\partial_2 f(x_0,y_0)),(x,y)-(x_0,y_0)\rangle=0. \tag{1.2}$$

Ha feltesszük, hogy $\partial_2 f(x_0,y_0)\neq 0$, akkor a fentieket úgy is írhatjuk, hogy

$$y-y_0=-\frac{\partial_1 f(x_0,y_0)}{\partial_2 f(x_0,y_0)}(x-x_0). \tag{1.3}$$

A szemlélet alapján úgy tűnik, hogy a szintvonal érintője nem lehet más, mint az érintő szintvonala. Amennyiben ezt elfogadjuk, akkor a fentiekből az következik, hogy az

$$f^{-1}(f(x_0,y_0))=\{(x,y)\ :\ f(x,y)=f(x_0,y_0)\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

szintvonal érintője az (x_0,y_0) pontban nem más az (1.1) szerint, mint az

$$f'(x_0,y_0)=[\partial_1 f(x_0,y_0),\partial_2 f(x_0,y_0)]\in\mathbb{R}^{1\times 2}$$

normálvektorú egyenes. Az (1.2) szerint pedig úgy fogalmazhatunk, hogy a derivált ortokomplementumának az (x_0,y_0) pontba való eltoltja:

$$\left(f'(x_0,y_0)\right)^{\perp}+(x_0,y_0).$$

Ez utóbbit úgy is értelmezhetjük, hogy egy (x,y) pont az érintőnek pontosan akkor a pontja, ha

$$(x,y)-(x_0,y_0)\in\ker f'(x_0,y_0).$$

A szemléletre való támaszkodás azonban meglehetősen gyenge lábakon áll, hiszen érintő csak egy differenciálható függvény gráfjához húzható, ugyanakkor az

$f^{-1}(f(x_0,y_0))$ szintvonalról pedig még azt sem tudjuk, hogy függvényt alkot-e. Ha tudnánk, hogy ez igaz, azaz van olyan $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre teljesül, hogy az (x_0,y_0) egy környezetében

$$f^{-1}(f(x_0,y_0)) = g\,,$$

akkor ennek az érintője az

$$y-y_0 = g'(x_0)(x-x_0)$$

egyenes volna. Ha még azt is elfogadnánk, hogy a szintvonal érintője megegyezik az érintő szintvonalával, akkor ebből is következne (1.3) alapján, hogy

$$g'(x_0) = -\frac{\partial_1 f(x_0,y_0)}{\partial_2 f(x_0,y_0)}\,.$$

Mindez azonban nem magától értetődő. Az alábbiakban az implicitfüggvény- és a Ljusztyernyik-tételek korrekt tárgyalását követjük, ami logikailag a fenti szemléletes bevezetéssel pont ellentkező irányú, s ennek végkövetkeztetéseül fogjuk kapni a szemlélet számára olyan nyilvánvalónak látszó tényt, hogy a szintvonal érintője megegyezik az érintő szintvonalával.

A kétváltozós implicitfüggvény-tétel

1.1.5. Állítás (implicitfüggvény-tétel)**.** *Legyen $D\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ nyílt halmaz, az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy $D=I\times J$, ahol $I,J\subseteq\mathbb{R}$ nyílt intervallumok.*

Ha egy $f:D\to Z$ függvényre egy $(x_0,y_0)\in D$ pontban teljesül, hogy

(1) folytonosan differenciálható,

(2) $\partial_2 f(x_0,y_0)\neq 0$,

akkor az $x_0\in I$ pontnak $\exists\ U=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq I$ környezete, és $\exists!\ g:U\to\mathbb{R}$ függvény, hogy

(a) $\forall\, x\in U$ esetén $f(x,g(x)) = f(x_0,y_0)$,

(b) az $(x_0,y_0)\in D$ pontnak $\exists\ G=(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ környezete, hogy

$$G\cap f^{-1}(f(x_0,y_0)) = g\,,$$

(c) $g(x_0)=y_0$,

(d) a $g:U\to Y$ függvény differenciálható, és $\forall\, x\in U$ esetén

$$g'(x) = -\frac{\partial_1 f(x,g(x))}{\partial_2 f(x,g(x))}\,.$$

Bizonyítás. Mivel $\partial_2 f(x_0,y_0)\neq 0$, ezért feltehető, hogy például $\partial_2 f(x_0,y_0)>0$. Mivel a $\partial_2 f$ parciális deriváltfüggvény folytonos az (x_0,y_0) pontban, ezért $\exists\ \gamma,\ \varepsilon>0$ számok, hogy

$$\forall\ (x,y)\in(x_0-\gamma,x_0+\gamma)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)\ \text{ esetén }\ \partial_2 f(x,y)>0\,.$$

Emiatt $\forall\ x\in(x_0-\gamma,x_0+\gamma)$ esetén az

$$f(x,\cdot):[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]\to\mathbb{R}$$

függvény szigorúan monoton növő. Legyen $f(x_0,y_0)=c$, ekkor

$$f(x_0,y_0-\varepsilon)<c\ \text{ és }\ f(x_0,y_0+\varepsilon)>c\,.$$

Mivel az f függvény folytonosan differenciálható az (x_0,y_0) pontban, így folytonos annak egy környezetében, ezért a fenti ε megválasztható úgy, hogy az

$$f(\cdot,y_0-\varepsilon)\ \text{ és }\ f(\cdot,y_0+\varepsilon)$$

függvények is folytonosak legyenek az x_0 pont egy környezetében. Ekkor $\exists\ \delta\in(0,\gamma)$, hogy

$$\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\ \text{ esetén }\ f(x,y_0-\varepsilon)<c\ \text{ és }\ f(x,y_0+\varepsilon)>c\,. \tag{1.4}$$

Mivel az f függvény folytonos az (x_0,y_0) pont egy környezetében, ezért a fenti δ és ε megválaszthatók úgy, hogy az $\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ esetén az

$$f(x,\cdot):[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]\to\mathbb{R}$$

függvény folytonos legyen. Emiatt (1.4) alapján a Bolzano-tétel szerint $\forall\ x\in(a-\delta,a+\delta)$ esetén

$$\exists\ y_x\in(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)\,,\ \text{ hogy }\ f(x,y_x)=c=f(x_0,y_0)\,. \tag{1.5}$$

Sőt mivel $\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ esetén az $f(x,\cdot):[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]\to\mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növő, azért az y_x létezése egyértelmű.

Legyen $g:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ esetén

$$g(x):=y_x\,.$$

Az y_x egyértelműsége miatt a g függvény létezése is egyértelmű.

Lássuk ezután a g függvény tulajdonságait:

(a) A g definíciójából és az (1.5) egyenlőségből következik, hogy

$$\forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ esetén } f(x,g(x)) = f(x,y_x) = c = f(x_0,y_0)\,.$$

(b) A fenti (a) tulajdonságot úgy is írhatjuk, hogy

$$\forall\, x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ esetén } (x,g(x)) \in f^{-1}(f(x_0,y_0))\,,$$

ami azt jelenti, hogy

$$g \subseteq f^{-1}(f(x_0,y_0))\,.$$

Mivel viszont $\forall\, x \in (x_0-\gamma, x_0+\gamma)$ esetén az $y_x \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ létezése egyértelmű, ezért ha $y \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ valamint $f(x,y) = c = f(x_0,y_0)$, akkor

$$y = y_x = g(x)\,,$$

amit úgy is írhatunk, hogy

$$\forall\, (x,y) \in (x_0-\gamma, x_0+\gamma) \times (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon) \cap f^{-1}(f(x_0,y_0)) \text{ esetén } g(x) = y\,,$$

ami azt jelenti, hogy az $(x_0,y_0) \in D$ pontnak a

$$G = (x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$$

környezetére teljesül, hogy

$$G \cap f^{-1}(f(x_0,y_0)) \subseteq g\,,$$

ami a fentiekkel együtt azt jelenti, hogy

$$G \cap f^{-1}(f(x_0,y_0)) = g\,.$$

(c) Mivel

$$(x_0,y_0) \in G \cap f^{-1}(f(x_0,y_0))\,,$$

ezért (b) szerint

$$y_0 = g(x_0)\,.$$

(d) Megmutatjuk, hogy a $g : U \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, amihez először belátjuk, hogy folytonos. A Lagrange-középértéktétel szerint

$$\forall\, x,\ z \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \text{ esetén } \exists\, u \in (x,z) \text{ és } \exists\, v \in (g(x),g(z))\,, \tag{1.6}$$

(az egyszerűség kedvéért persze feltéve, hogy $g(x) \le g(z)$), amikre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= f(z,g(z)) - f(x,g(x)) \\ &= (f(z,g(z)) - f(x,g(z))) + (f(x,g(z)) - f(x,g(x))) \\ &= \partial_1 f(u,g(z)) \cdot (z-x) + \partial_2 f(x,v) \cdot (g(z)-g(x))\,, \end{aligned}$$

innen $\partial_2 f(x,v) \neq 0$ miatt

$$\frac{g(z)-g(x)}{z-x} = -\frac{\partial_1 f(u,g(z))}{\partial_2 f(x,v)}\,. \tag{1.7}$$

(Ha most tudnánk, hogy a fenti egyenlőség jobboldala korlátos, akkor abból már adódna, hogy a g függvény folytonos. Ez sajnos az eddigiekből nem következik, de könnyen

látható, hogy ha a bizonyítás elején körültekintőbben választjuk meg a δ-t és az ε-t, akkor a fenti egyenlőség jobboldala korlátos lesz.)
Mivel a $\partial_1 f$ és a $\partial_2 f$ függvények az (x_0, y_0) pontban folytonosak, továbbá $\partial_2 f((x_0, y_0)) > 0$, ezért δ, $\varepsilon > 0$ úgy is megválaszthatók, hogy $\forall\ (x,y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ esetén

$$\partial_2 f(x,y) \geq \frac{\partial_2 f(x_0,y_0)}{2} \quad \text{és} \quad |\partial_1 f(x,y)| \leq |\partial_1 f(x_0,y_0)| + 1\,,$$

ezért $\forall\ (x,v),\ (u,y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ esetén

$$\left| -\frac{\partial_1 f(x,y)}{\partial_2 f(u,v)} \right| \ \leq\ 2 \cdot \frac{|\partial_1 f(x_0,y_0)| + 1}{\partial_2 f(x_0,y_0)} \ =: \mathscr{K}\,,$$

így $\forall\, x,\ z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén

$$\left| \frac{g(z) - g(x)}{z - x} \right| \ \leq\ \mathscr{K}\,, \quad \text{azaz} \quad |g(z) - g(x)| \ \leq\ \mathscr{K} \cdot |z - x|\,,$$

ami azt jelenti, hogy a $g : U \to \mathbb{R}$ függvény (Lipschitz-)folytonos.

Legyen $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tetszőleges pont. Mivel a $\partial_1 f$ és a $\partial_2 f$, valamint a g függvények folytonosak, azért $\forall\ \alpha > 0$ esetén $\exists\ \beta \in (0, \delta)$, hogy $\forall\ z \in (x - \beta, x + \beta)$ esetén az (1.6)-beli $u \in (x,z)$ és $v \in (g(x), g(z))$ pontokra

$$\left| \frac{\partial_1 f(x, g(x))}{\partial_2 f(x, g(x))} \ -\ \frac{\partial_1 f(u, g(z))}{\partial_2 f(x, v)} \right| \ <\ \alpha\,,$$

így (1.7) szerint

$$\left| \frac{g(z) - g(x)}{z - x} \ +\ \frac{\partial_1 f(x, g(x))}{\partial_2 f(x, g(x))} \right| \ <\ \alpha\,.$$

Mivel ez $\forall\ z \in (x - \beta, x + \beta)$ esetén igaz, ezért a g függvény differenciálható az x pontban és

$$g'(x) \ =\ \lim_{z \to x} \frac{g(z) - g(x)}{z - x} \ =\ -\frac{\partial_1 f(x, g(x))}{\partial_2 f(x, g(x))}\,.$$

Ebből a $\partial_1 f$ és a $\partial_2 f$, valamint a g függvények folytonossága alapján következik, hogy a $g' : U \to \mathbb{R}$ deriváltfüggvény folytonos az (x_0, y_0) pontban. $\square$

1.1.6. Megjegyzés. Az y változó kifejezhetőségét nem algebrai értelemben kell értenünk, tehát előfordulhat, hogy a g függvény létezését igazolni tudjuk, de azt explicit formában nem tudjuk előállítani.

Példák és feladatok az implicitfüggvény-tételre

1.1. *Feladat.* Fejezzük ki az

$$f(x,y) = e^{x+y} + x + y = 1$$

egyenletből az y változót az x függvényeként.

Megoldás: Az f függvényre például a $(0,0)$ pontban teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei, ugyanis $f(0,0) = 1$, továbbá az f függvény parciálisan differenciálható mindkét változója szerint:

$$\partial_1 f(x,y) = e^{x+y} + 1 \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x,y) = e^{x+y} + 1\,,$$

amely parciális derivált függvények folytonosak, így az f függvény folytonosan differenciálható, végül

$$\partial_2 f(0,0) = 2 \neq 0\,.$$

Az implicitfüggvény-tétel szerint található egy olyan a 0 pont egy környezetében értelmezett g függvény, amelyre

(a) a fenti egyenlet ebben a környezetben azonosság,

(b) a fenti szintvonal a $(0,0)$ egy környezetében megegyezik ezzel a g függvénnyel,

(c) $g(0) = 0$,

(d) g differenciálható, és

$$g'(x) = -\frac{e^{x+g(x)} + 1}{e^{x+g(x)} + 1} = -1\,.$$

A (d) szerint $g(x) = -x + c$, a (c) szerint pedig $g(0) = 0$, amiből az adódik, hogy $g(x) = -x$, amelyet y-ba helyettesítve írva valóban azonossághoz jutunk.

1.2. *Feladat.* Fejezzük ki az

$$e^{x+y} - 2\cos y = 1$$

egyenletből az y változót az x függvényeként.

Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan látható, hogy ez az egyenlet a $(0,0)$ pont környezetében egy olyan g differenciálható függvényt definiál, amelyre

$$e^{x+g(x)} - 2\cos g(x) = 1$$

de ez explicit formában nem tudjuk megadni.

1.1.7. Példa (Egy mikroökonómiai példa: a helyettesítési határarány)**.** A mikroökonómiában a hasznossági függvény a jószágtéren értelmezett olyan függvény, amely a fogyasztó preferenciáit fejezi ki. Feltéve, hogy két jószágunk van, legyen $u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ egy hasznossági függvény. Egy adott $\alpha\in\mathbb{R}$ hasznossági szinthez tartozó szinthalmazt közömbösségi görbének szokás nevezni:

$$u^{-1}(\alpha)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : u(x_1,x_2)=\alpha\}\subset\mathbb{R}^2_+ .$$

Ez a halmaz (reláció) nem feltétlenül függvény, de ha az u hasznossági függvényre teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei, akkor van olyan $g:U\to\mathbb{R}$, $x_2=g(x_1)$ függvény, és olyan G környezet, hogy

$$G\cap u^{-1}(\alpha)=g,$$

továbbá a g függvény differenciálható is, és

$$g'(x_1)=-\frac{\partial_1 u(x_1,g(x_1))}{\partial_2 u(x_1,g(x_1))},\qquad \text{másképpen írva}\qquad \frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\partial_1 u(x_1,x_2)}{\partial_2 u(x_1,x_2)}.$$

Közgazdasági értelemben ez az összefüggés azt jelenti, hogy a helyettesítési határarány megegyezik a határhasznok hányadosának az ellentettjével.

Ebből az összefüggésből adódik, hogy ha $u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ függvény monoton növekedő (tehát parciális deriváltjai nemnegatívok), akkor a g függvény monoton csökkenő. Könnyen látható továbbá, hogy ha az $u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ függvény még konkáv is, akkor a g függvény konvex, így a g' derivált függvény monoton nő, a negatív előjel miatt pedig abszolútértékben csökken, azaz a helyettesítési határarány abszolútértékben csökken.

Ugyanez mondható el egy $f:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ termelési függvény esetében is. Ekkor a

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\partial_1 f(x_1,x_2)}{\partial_2 f(x_1,x_2)}$$

összefüggés úgy interpretálható, hogy a technikai helyettesítési határarány megegyezik a határtermékek hányadosának az ellentettjével.

1.1.8. Példa (Egy makroökonómiai példa: az IS és az LM görbék)**.** 1. Az IS (investment–saving) görbe:

Jelölje I a beruházást (investment), S a megtakarítást (saving), i a kamatlábat (interest rate), Y a kibocsátást (output). Tegyük fel, hogy a beruházás a kamatláb függvénye: $I(i)$, valamint azt, hogy a beruházás a kamatláb növekedése esetén csökken, másképpen $I'(i)<0$. Tegyük fel továbbá, hogy a megtakarítás a kibocsátás függvénye: $S(Y)$, valamint azt, hogy a megtakarítás a kibocsátás növekedése esetén nő, másképpen $S'(Y)>0$.

Az (Y,i) kamatláb–jövedelem párt egyensúlyinak nevezzük, ha a hozzájuk tartozó megtakarítás és beruházás egyenlő, azaz

$$S(Y) = I(i).$$

Jelölje $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ azt a függvényt, amelyre $\forall\ (Y,i) \in \mathbb{R}^2_+$ esetén

$$F(Y,i) := S(Y) - I(i).$$

Ekkor az egyensúlyi (Y,i) kamatláb–jövedelem párok halmaza megegyezik az

$$F^{-1}(0) = \{(Y,i) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ F(Y,i) = 0\} \subset \mathbb{R}^2_+$$

szinthalmazzal.

Ha az F függvényre teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei, akkor létezik egy olyan környezet, amelyben ez a szinthalmaz, azaz az egyensúlyi kamatláb–jövedelem párok halmaza egy függvényt alkot, amely ráadásul még differenciálható is. Kérdés, hogy milyen ennek a függvénynek az alakja? Mivel

$$i'(Y) = \frac{di}{dY} = -\frac{\partial_1 F(Y,i)}{\partial_2(Y,i)} = -\frac{S'(Y)}{-I'(i)},$$

valamint a feltevések szerint $S'(Y) > 0$ és $I'(i) < 0$, ezért $i'(Y) < 0$, így az $i(Y)$ csökkenő függvény.

2. Az LM (liquidity–money) görbe:

Tegyük fel, hogy a pénzkereslet a kibocsátás és a kamatláb függvénye: $M_D(Y,i)$, valamint azt, hogy a pénzkereslet a kibocsátás növekedése esetén nő, másképpen $\partial_1 M_D(Y,i) > 0$, továbbá azt, hogy a pénzkereslet a kamat növekedése esetén csökken, másképpen $\partial_2 M_D(Y,i) < 0$. Tegyük fel azt is, hogy a pénzkínálat állandó, és megegyezik a pézmennyiség és a pénz forgási sebességének a hányadosával: $M_S = M/P$.

Az (Y,i) kamatláb–jövedelem párt egyensúlyinak nevezzük, ha a hozzájuk tartozó pénzkereslet megegyezik a pénzkínálattal, azaz

$$M_D(Y,i) = M/P.$$

Jelölje $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ azt a függvényt, amelyre $\forall\ (Y,i) \in \mathbb{R}^2_+$ esetén

$$F(Y,i) := M_D(Y,i) - M/P.$$

Ekkor az egyensúlyi (Y,i) kamatláb-jövedelem párok halmaza megegyezik az

$$F^{-1}(0) = \{(Y,i) \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ F(Y,i) = 0\} \subset \mathbb{R}^2_+$$

szinthalmazzal. Ha az F függvényre teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei, akkor létezik egy olyan környezet, amelyben ez a szinthalmaz, azaz az egyensúlyi kamatláb–jövedelem párok halmaza egy függvényt alkot, amely még differenciálható is. Kérdés, hogy milyen ennek a függvénynek az alakja? Mivel

$$i'(Y) = \frac{di}{dY} = -\frac{\partial_1 F(Y,i)}{\partial_2 F(Y,i)} = -\frac{\partial_1 M_D(Y,i)}{\partial_2 M_D(Y,i)},$$

valamint a feltevések szerint $\partial_1 M_D(Y,i) > 0$ és $\partial_2 M_D(Y,i) < 0$, ezért $i'(Y) > 0$, így az $i(Y)$ növekvő függvény.

Gyakorlatok az implicitfüggvény-tételre

Az alábbi gyakorlatokban a megadott függvényekre igazoljuk az implicit függvény létezését a megadott pontok körül, és deriváltjukra is írjuk föl az implicitfüggvény-tételben szereplő formulát!

1.3. *Gyakorlat.* $f(x,y) = x^3 + x^2y + -2y^2 - 10y$, $(x_0,y_0) = (2,1)$

Megoldás: Mivel $f(2,1) = 0$, ezért az $f^{-1}(0)$ szintvonalát vizsgáljuk. Mivel

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 + 2xy \text{ és } \partial_2 f(x,y) = x^2 - 4y - 10,$$

ezek folytonosak és $\partial_2 f(2,1) = -10 \neq 0$, ezért ez a szintvonal egy környezetben egy g függvény, amelyre még az is teljesül, hogy

$$g'(x) = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 4y - 10}, \qquad \text{speciálisan} \quad g'(2) = \frac{8}{5}.$$

1.4. *Gyakorlat.* $f(x,y) = e^{xy^2} - 2x - 4y$, $(x_0,y_0) = (0,1)$

Megoldás: Mivel $f(0,1) = -3$, ezért az $f^{-1}(-3)$ szintvonalát vizsgáljuk. Mivel

$$\partial_1 f(x,y) = e^{xy^2}y^2 - 2 \text{ és } \partial_2 f(x,y) = e^{xy^2}2xy - 4,$$

ezek folytonosak és $\partial_2 f(0,1) = -4 \neq 0$, ezért ez a szintvonal egy környezetben egy g függvény, amelyre még az is teljesül, hogy

$$g'(x) = -\frac{e^{xy^2}y^2 - 2}{e^{xy^2}2xy - 4}, \qquad \text{speciálisan} \quad g'(0) = -\frac{1}{4}.$$

1.5. *Gyakorlat.* $f(x,y) = e^{\frac{y}{2}-x} + 2x - y$, $(x_0,y_0) = (1,2)$

Megoldás: Mivel $f(1,2) = 0$, ezért az $f^{-1}(0)$ szintvonalát vizsgáljuk. Mivel

$$\partial_1 f(x,y) = -e^{\frac{y}{2}-x} + 2x - y - 1 \text{ és } \partial_2 f(x,y) = \frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}-x} - 1,$$

ezek folytonosak és $\partial_2 f(1,2) = \frac{1}{2} \neq 0$, ezért ez a szintvonal egy környezetben egy g függvény, amelyre még az is teljesül, hogy

$$g'(x) = -\frac{-e^{\frac{y}{2}-x} + 2x - y - 1}{\frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}-x} - 1}, \qquad \text{speciálisan} \quad g'(1) = 2.$$

1.6. *Gyakorlat.* $f(x,y) = e^{xy} + 2x^2$, $(x_0,y_0) = (1,0)$

A Ljusztyernyik-tétel

1.1.9. Állítás (Ljusztyernyik-tétel)**.** *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ nyílt halmaz, az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy $D = I\times J$, ahol $I,J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumok.*

Ha egy $f : D \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az implicitfüggvény-tétel feltételei egy $(x_0,y_0)\in D$ pontban, azaz

(1) folytonosan differenciálható,

(2) $\partial_2 f(x_0,y_0)\neq 0$,

akkor az

$$f^{-1}(f(x_0,y_0)) = \{(x,y)\ :\ f(x,y) = f(x_0,y_0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

szintvonal érintője az (x_0,y_0) pontban nem más, mint az

$$f'(x_0,y_0) = [\partial_1 f(x_0,y_0), \partial_2 f(x_0,y_0)] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

gradiens normálvektorú egyenes:

$$\partial_1 f(x_0,y_0)x + \partial_2 f(x_0,y_0)y = \partial_1 f(x_0,y_0)x_0 + \partial_2 f(x_0,y_0)y_0\,,$$

ami vektorosan írva:

$$\langle f'(x_0,y_0),(x,y)-(x_0,y_0)\rangle = 0\,,$$

azaz a derivált ortokomplementumának az (x_0,y_0) pontba való eltoltja:

$$\big(f'(x_0,y_0)\big)^{\perp} + (x_0,y_0)\,.$$

Ez utóbbit úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy (x,y) pont az érintőnek pontosan akkor a pontja, ha

$$(x,y)-(x_0,y_0)\in \ker f'(x_0,y_0)\,.$$

Bizonyítás. Mivel teljesülnek az implicitfüggvény-tétel, azaz az 1.1.5. állítás feltételei, ezért az $x_0\in I$ pontnak $\exists\ U = (x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq I$ környezete, és $\exists!\ g : U\to\mathbb{R}$ függvény, hogy

(a) $\forall\, x\in U$ esetén $f(x,g(x)) = f(x_0,y_0)$,

(b) az $(x_0,y_0)\in D$ pontnak $\exists\ G = (x_0-\delta,x_0+\delta)\times(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ környezete, hogy

$$G\cap f^{-1}(f(x_0,y_0)) = g\,,$$

(c) $g(x_0) = y_0$,

(d) a $g : U\to Y$ függvény differenciálható, és $\forall\, x\in U$ esetén

$$g'(x) = -\frac{\partial_1 f(x,g(x))}{\partial_2 f(x,g(x))}\,.$$

Mivel a g függvény differenciálható az x_0 pontban, ezért van érintője ebben a pontban, ami azon (x,y) pontokból áll, amelyekre

$$y - g(x_0) = g'(x_0)\cdot(x - x_0)\,,$$

amibe a fentieket behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$y - y_0 = -\frac{\partial_1 f(x_0,y_0)}{\partial_2 f(x_0,y_0)}(x - x_0)\,,$$

amiből

$$\partial_1 f(x_0,y_0)x + \partial_2 f(x_0,y_0)y = \partial_1 f(x_0,y_0)x_0 + \partial_2 f(x_0,y_0)y_0\,. \qquad \square$$

1.1.10. Megjegyzés. Egy $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differenciálható kétváltozós függvény $(x_0,y_0) \in \mathscr{D}(f)$ pontbeli érintőjének az egyenlete:

$$z = f(x_0,y_0) + f'(x_0,y_0)\left((x,y) - (x_0,y_0)\right)\,,$$

aminek a $z = f(x_0,y_0)$ értékhez tartozó szintvonala skaláris szorzatos jelöléssel:

$$\langle f'(x_0,y_0), (x,y) - (x_0,y_0)\rangle = 0\,,$$

ami a tétel szerint megegyezik a szintvonal érintőjével.
Másképpen megfogalmazva: Az f függvény (x_0,y_0) pontbeli érintőjének a normálvektora

$$(f'(x_0,y_0), -1) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\,,$$

aminek az $\mathbb{R}^2$-re való projekciója, azaz az érintő szintvonalának a normálvektora

$$f'(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2\,,$$

ami a tétel szerint megegyezik a szintvonal érintőjének a normálvektorával.

Egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat: a Lagrange-féle multiplikátor-tétel

Ebben az alfejezetben az egyenlőséggel korlátozott sima feltételes szélsőérték-feladat megoldására adunk szükséges feltételt. Mivel a célfüggvénynek egy adott függvény szintvonalára való leszorítását vizsgáljuk, ezért a bizonyítás során fontos szerepet játszik a szintvonalhoz tartozó érintő, amit a Ljusztyernyik-tétel jellemez.

1.1.11. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ adott halmaz, $f_0, f_1 : D \to \mathbb{R}$ adott függvények. A következő feladatot *egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatnak* nevezzük:

$$\begin{cases} f_0(x,y) \to \max\ (\min) \\ f_1(x,y) = 0 \\ (x,y) \in D \end{cases} . \qquad (1.8)$$

Az f_0 függvényt a feladat *célfüggvényének* nevezzük.

A feladat *feltételi halmaza* vagy más néven a *lehetséges megoldások halmaza*:

$$\{(x,y) \in D \,:\, f_1(x,y) = 0\} = f_1^{-1}(0)\,.$$

1.1.12. Definíció. Egy $(x_0,y_0) \in D$ pontot az (1.8) feladat (*optimális*) *megoldásának* nevezzük, ha az $f_0|_{f^{-1}(0)} : f^{-1}(0) \to \mathbb{R}$ függvény maximumhelye (minimumhelye), azaz

(1) (x_0,y_0) lehetséges megoldás,

(2) $\forall\,(x,y)$ lehetséges megoldás esetén $f_0(x_0,y_0) \geq f_0(x,y)$ (minimumfeladat esetén pedig fordítva).

Erre a feladatra az $f_0'(x_0,y_0) = 0$ feltétel már nem feltétlenül szükséges feltétele a szélsőértéknek, hiszen elképzelhető, hogy az f_0 függvény a szélsőértékét a $f^{-1}(0)$ halmaz határán veszi fel.

Tekintsük például az $f_0(x,y) = x+y$ függvényt, és keressük a maximumát az $x^2+y^2 = 1$ egységsugarú körön. Könnyen látható, hogy a megoldás $(x_0,y_0) = (1,1)$, de az f_0 függvény deriváltja természetesen sehol sem nulla a feltételi halmazon.

Mint a feltételes szélsőérték-feladatokat általában, az egyenlőségekkel korlátozott feltételes szélsőértékfeladatot úgy oldjuk meg, hogy visszavezetjük a feladatot a Lagrange-függvénye feltétel nélküli szélsőértékének a vizsgálatára.

1.1.13. Definíció. Az (1.8) feladat *Lagrange-függvénye* az az $\mathscr{L} : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\,(x,y) \in D$ és $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f_0(x,y) - \lambda \cdot f_1(x,y)\,.$$

A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot *Lagrange-multiplikátornak* nevezzük.
Minimumfeladat esetén a feltételi rész hozzáadása célszerű:

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f_0(x,y) + \lambda \cdot f_1(x,y)\,.$$

1.1.14. Megjegyzés. Ha az f_0, f_1 függvények differenciálhatók egy $(x,y) \in D$ pontban, akkor $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az (x,y) változó szerinti parciális derivált

$$\partial_{1,2}\mathscr{L}(x,y,\lambda)) = f_0'(x,y) - \lambda \cdot f_1'(x,y)\,.$$

Továbbá $\forall\,(x,y) \in D$ és $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ pontban a λ változó szerinti parciális derivált

$$\partial_3\mathscr{L}(x,y,\lambda) = -f_1(x,y)\,.$$

1.1.15. Megjegyzés. A feladat megoldásának szükséges feltételére vonatkozó tétel, a Lagrange-féle multiplikátor-tétel bizonyítása a Ljusztyernyik-tételen alapul. Felhasználunk még egy későbbiekben bebizonyított lineáris algebtai állítást, a 2.3.1. állítást, az ún. következménytétel speciális esetét, miszerint tetszőleges $(X,+,\cdot)$ $\mathbb{F}$ feletti vektortérben az f és $g \in X'$ lineáris funkcionálokra

$$\ker f \subseteq \ker g \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{F}\,,\ \text{amelyre}\ g = \lambda \cdot f\,.$$

1.1.16. Állítás (Lagrange-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nyílt halmaz, az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy $D = I \times J$, ahol $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumok.*

Legyenek az $f_0, f_1 : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók egy $(x_0, y_0) \in D$ pontban. Tegyük fel, hogy az $f_1 : D \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az $(x_0, y_0) \in D$ pontban az implicitfüggvény-tétel feltételei, azaz teljesül a következő két regularitási feltétel (constraint qualification):

(1) folytonosan differenciálható,

(2) $\partial_2 f_1(x_0, y_0) \neq 0$.

Ha $(x_0, y_0) \in D$ megoldása az egyenlőséggel korlátozott (1.8) feltételes szélsőértékfeladatnak, akkor $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ Lagrange-multiplikátor, hogy

$$\mathscr{L}'(x_0, y_0, \lambda) = (0, 0, 0),$$

ami részletesen azt jelenti, hogy

(a) $f_0'(x_0, y_0) - \lambda \cdot f_1'(x_0, y_0) = (0, 0)$, *azaz* $f_0'(x_0, y_0) = \lambda \cdot f_1'(x_0, y_0)$,
(Euler-Lagrange-egyenlet), koordinátánként kiírva:
$\partial_1 f_0(x_0, y_0) - \lambda \cdot \partial_1 f_1(x_0, y_0) = 0$,
$\partial_2 f_0(x_0, y_0) - \lambda \cdot \partial_2 f_1(x_0, y_0) = 0$,

(b) $f_1(x_0, y_0) = 0$.

Ha feltesszük még, hogy az $f_0 : D \to \mathbb{R}$ függvényre is teljesülnek az $(x_0, y_0) \in D$ pontban az implicitfüggvény-tétel feltételei:

(1) folytonosan differenciálható,

(2) $\partial_2 f_0(x_0, y_0) \neq 0$,

akkor $\lambda \neq 0$, továbbá az

$$f_0^{-1}(f_0(x_0, y_0)) \quad \textit{és} \quad f_1^{-1}(0)$$

szintvonalak érintik egymást az (x_0, y_0) pontban.

Bizonyítás. Az (x_0, y_0) pont nyilván pontosan akkor az (1.8) feladat megoldása, ha az $f_0|_{f^{-1}(0)} : f^{-1}(0) \to \mathbb{R}$ függvény maximumhelye.

Mivel az $f_1 : D \to \mathbb{R}$ függvényre az $(x_0, y_0) \in D$ pontban teljesülnek az implicitfüggvény-tétel (az 1.1.5. állítás) feltételei, ezért az $f_1^{-1}(0)$ szintvonal az (x_0, y_0) egy környezetében egy $g : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ezek szerint, ha (x_0, y_0) a feladat megoldása, akkor x_0 az

$$h = f_0 \circ (\mathrm{id}, g) : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R},$$

azaz a $h(x) = f_0(x, g(x))$ függvény maximumhelye.

Belátjuk, hogy

$$\ker f_1'(x_0,y_0) \subseteq \ker f_0'(x_0,y_0)\,.$$

Legyen $(u,v) \in \ker f_1'(x_0,y_0)$, azaz

$$(u,v) = (x_0,y_0) + (u,v) - (x_0,y_0) \in \ker f_1'(x_0,y_0)\,.$$

Mivel az $f_1 : D \to \mathbb{R}$ függvényre az $(x_0,y_0) \in D$ pontban teljesülnek a Ljusztyernyik-tétel (1.1.9. állítás) feltételei, ezért az $(x_0,y_0)+(u,v)$ pont az

$$f_1^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^2$$

szintvonal (x_0,y_0) pontbeli érintőjének, azaz a $g : (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény x_0 pontbeli érintőjének egy pontja, ami azt jelenti, hogy

$$(y_0+v) - y_0 = g'(x_0)\cdot((x_0+u)-x_0)\,, \quad \text{azaz} \quad v = g'(x_0)\cdot u\,.$$

Ezek alapján a g függvény x_0 pontbeli differenciálhatósága azt jelenti, hogy $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} g(x_0+\lambda u) &= y_0 + g'(x_0)\cdot(x_0+\lambda u - x_0) + r(x_0+\lambda u - x_0) \\ &= y_0 + \lambda\cdot g'(x_0)\cdot u + r(\lambda u) \\ &= y_0 + \lambda v + r(\lambda u)\,, \end{aligned}$$

ahol $\lim_{\lambda\to 0}\frac{r(\lambda u)}{\lambda} = 0$. Legyen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\forall\,\lambda$ esetén

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= h(x_0+\lambda u) \\ &= f_0\left(x_0+\lambda u, g(x_0+\lambda u)\right) \\ &= f_0\left(x_0+\lambda u, y_0+\lambda v + r(\lambda u)\right) \\ &= f_0\left((x_0,y_0)+\lambda(u,v)+(0,r(\lambda u))\right)\,. \end{aligned}$$

A fentiek alapján, ha (x_0,y_0) a feladat megoldása, akkor a $\lambda = 0$ pont a φ függvény maximumhelye, ezért a szélsőérték szükséges feltétele szerint $\varphi'(0) = 0$. Ez viszont az előzőek szerint a láncszabály alapján azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(0) \\ &= f_0'\left((x_0,y_0)+0(u,v)+(0,r(0))\right)\cdot\frac{d}{d\lambda}\left((x_0,y_0)+\lambda(u,v)+(0,r(\lambda u))\right)|_{\lambda=0} \\ &= \langle f_0'(x_0,y_0),(u,v)\rangle\,. \end{aligned}$$

Ezek szerint $(u,v) \in \ker f_0'(x_0,y_0)$, amivel beláttuk, hogy

$$\ker f_1'(x_0,y_0) \subseteq \ker f_0'(x_0,y_0)\,.$$

Ebből viszont, mint ismert, következik, hogy $\exists\,\lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$f_0'(x_0,y_0) = \lambda\cdot f_1'(x_0,y_0)\,, \quad \text{azaz} \quad f_0'(x_0,y_0) - \lambda\cdot f_1'(x_0,y_0) = (0,0)\,.$$

Az $f_1(x_0,y_0) = 0$ feltételt a megoldásnak automatikusan teljesítenie kell.

Tegyük fel még, hogy az $f_0 : D \to \mathbb{R}$ függvényre is teljesülnek az $(x_0, y_0) \in D$ pontban az implicitfüggvény-tétel feltételei. Mivel ekkor $\partial_2 f_0(x_0, y_0) \neq 0$, így $f_0'(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, ezért az $f_0'(x_0, y_0) = \lambda \cdot f_1'(x_0, y_0)$ egyenlőség miatt $\lambda \neq 0$.

Továbbá ekkor a Ljusztyernyik tétel szerint az

$$f_0^{-1}(f_0(x_0, y_0)) \quad \text{és} \quad f_1^{-1}(0)$$

szintvonalak (x_0, y_0) ponton átmenő érintőinek a normálvektorai

$$f_0'(x_0, y_0) \quad \text{illetve} \quad f_1'(x_0, y_0),$$

emiatt pedig, szintén az $f_0'(x_0, y_0) = \lambda \cdot f_1'(x_0, y_0)$ egyenlőség alapján, a két szintvonal érintőinek normálvektorai azonosak, ami azt jelenti, hogy a két szintvonal érinti egymást. □

1.1.17. Megjegyzés. A Lagrange-féle multiplikátor-tétel szerint a (1.8) feltételes szélsőérték-feladatra vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel megegyezik a feladat Lagrange-függvényének a feltétel nélküli szélsőértékére vonatkozó elsőrendű szükséges feltétellel. Ez egy három ismeretlent tartalmazó három egyenletből álló egyenletrendszer, nevezetesen

$$\begin{cases} \partial_1 f_0(x, y) - \lambda \cdot \partial_1 f_1(x, y) = 0, \\ \partial_2 f_0(x, y) - \lambda \cdot \partial_2 f_1(x, y) = 0, \\ f_1(x, y) = 0, \end{cases}$$

amit megoldva megkapjuk a feladat lehetséges megoldásait.

1.1.18. Megjegyzés. Tegyük fel, hogy a maximumfeladat Lagrange-függvénye az (x, y) változóban konkáv, azaz az

$$(x, y) \mapsto \mathscr{L}(x, y, \lambda)$$

függvény konkáv, ami azzal ekvivalens, hogy az f_0 célfüggvény konkáv, az f_1 feltételi függvény pedig konvex. Ekkor a megoldás Lagrange-féle multiplikátor-tételbeli

$$\mathscr{L}'(x_0, y_0, \lambda) = (0, 0, 0)$$

szükséges feltétele a megoldásnak egyben elégséges feltétele is.

Ugyanis: Mivel $\partial_{1,2}\mathscr{L}(x_0, y_0, \lambda) = (0, 0)$, ezért az (x_0, y_0) az $(x, y) \mapsto \mathscr{L}(x, y, \lambda)$ konkáv függvény maximumhelye, így $\forall\ (x, y)$ lehetséges megoldás esetén

$$\begin{aligned} f_0(x_0, y_0) &= f_0(x_0, y_0) - \lambda \cdot f_1(x_0, y_0) = \mathscr{L}(x_0, y_0, \lambda) \\ &\geq \mathscr{L}(x, y, \lambda) = f_0(x, y) - \lambda \cdot f_1(x, y) = f_0(x, y). \end{aligned}$$

Ugyanez mondható el, ha a minimumfeladat Lagrange-függvénye az (x, y) változóban konvex, azaz az

$$(x, y) \mapsto \mathscr{L}(x, y, \lambda)$$

függvény konvex, ami azzal ekvivalens, hogy az f_0 célfüggvény és az f_1 feltételi függvény is konvex.

Példák és feladatok a Lagrange-féle multiplikátor-tételre

1.7. *Feladat.* Határozzuk meg az

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

ellipszisnek az origóhoz legközelebbi és legtávolabbi pontjait. A feladat a következő feltételes szélsőértékfeladat megoldására vezet:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \to \max\ (\min) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \tag{1.9}$$

Megoldás: A fenti tétel jelöléseivel $f_0(x,y) = x^2 + y^2$ és $f_1(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3$. A feladat Lagrange-függvénye

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda \cdot (x^2 - xy + y^2 - 3),$$

továbbá

$$\begin{aligned} \partial_1 f_0(x,y) &= 2x \ \text{ és } \ \partial_2 f_0(x,y) = 2y, \\ \partial_1 f_1(x,y) &= 2x - y \ \text{ és } \ \partial_2 f_1(x,y) = -x + 2y. \end{aligned}$$

Ezért ha (x,y) megoldása az (1.10) feladatnak, akkor a Lagrange-elv szerint $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, hogy x, y, λ kielégítik a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} &2x - \lambda \cdot (2x - y) = 0, \\ &2y - \lambda \cdot (-x + 2y) = 0, \\ &x^2 - xy + y^2 = 3. \end{aligned}$$

Az első két egyenletből:

$$(x+y)(2-\lambda) = 0.$$

Ha $x + y \neq 0$, akkor $\lambda = 2$, és $(x,y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$ illetve $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.
Ha $x + y = 0$, akkor $\lambda = \frac{2}{3}$, és $(x,y) = (1,-1)$ illetve $(-1,1)$.

Kérdés, hogy ezek a vektorok megoldásai-e a feladatnak? A Weierstrass-tétel alapján a folytonos célfüggvény a kompakt feltételi halmazon (ellipszisen) felveszi a maximumát és a minimumát, ezért a feladatoknak léteznek megoldásai, és ezek a Lagrange-feltétel megoldásai között vannak. Mivel

$$f_0(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = f_0(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 6, \quad \text{továbbá} \quad f_0(1,-1) = f_0(-1,1) = 2,$$

ezért $(x,y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$ illetve $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ a maximumfeladat megoldásai, továbbá $(x,y) = (1,-1)$ illetve $(-1,1)$ pedig a minimumfeladat megoldásai.

1.8. *Feladat.* Oldjuk meg a következő feladatot $a > 0$ esetén:

$$\begin{cases} x \cdot y \to \max \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \tag{1.10}$$

Megoldás: A fenti tétel jelöléseivel $f_0(x,y) = x \cdot y$ és $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - a$. A feladat Lagrange-függvénye

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = x \cdot y - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - a)\,,$$

továbbá

$$\begin{aligned} \partial_1 f_0(x,y) &= y \ \text{ és } \ \partial_2 f_0(x,y) = x\,, \\ \partial_1 f_1(x,y) &= 2x \ \text{ és } \ \partial_2 f_1(x,y) = 2y\,. \end{aligned}$$

Ezért, ha (x_0, y_0) megoldása az (1.10) feladatnak, akkor a Lagrange-elv szerint $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, hogy kielégítik a következő egyenleteket:

$$\begin{aligned} y - \lambda \cdot 2x &= 0\,, \\ x - \lambda \cdot 2y &= 0\,, \\ x^2 + y^2 &= a\,. \end{aligned}$$

Az első két egyenletből

$$x = \lambda \cdot 2y = \lambda \cdot 2 \cdot \lambda \cdot 2x = 4\lambda^2 \cdot x\,,$$

a harmadik egyenlet szerint $a \neq 0$ esetén x és $y \neq 0$, ezért

$$4\lambda^2 = 1\,, \ \text{ azaz } \ \lambda = \pm\frac{1}{2}\,,$$

tehát

$$x = y \ \text{ vagy } x = -y\,.$$

A harmadik egyenletbe helyettesítve mindkét esetben azt kapjuk, hogy

$$2x^2 = a\,,$$

azaz a megoldások csak a

$$\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right), \left(\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)$$

pontok közül kerülhetnek ki. Az $f_0(x,y) = x \cdot y$ függvény értéke az első két helyen $\frac{a}{2}$, a második két helyen $-\frac{a}{2}$. A fenti első két számpár valóban a megoldásokat szolgáltatja. A másik két számpár a minimumfeladat megoldása. Látható továbbá, hogy mindkét szinthalmaz (szintvonal) érinti egymást ezekben a pontokban, például a $\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ pontban mindkét szintvonal meredeksége

$$g_0'\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = g_1'\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = 1\,.$$

1.1.19. Példa (Egy mikroökonómiai példa: a haszonmaximalizálás)**.** A mikroökonómiában központi szerepet játszanak a feltételes szélsőérték-feladatok, így a Lagrange-féle multiplikátor-tétel, ugyanis a fogyasztók illetve a termelők viselkedése ilyen feladatokkal írható le.

Tekintsünk egy olyan gazdaságot, amelyben egy fogyasztó rendelkezik egy fogyasztási halmazzal, más néven jószágtérrel, azaz a választási lehetőségek halmazával. A következőkben tegyük fel, hogy kétféle jószág van, a jószágteret jelenítse meg $\mathbb{R}^2_+$, egy fogyasztási jószágköteget (fogyasztási kosarat) jelöljön egy $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ vektor.

Kiindulásként feltesszük, hogy a fogyasztó rendelkezik azzal a képességgel, miszerint képes „racionálisan" választani, amit úgy fogalmazunk meg (matematikai eszközökkel), hogy a fogyasztó rendelkezik egy $R \subset \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+$ tranzitív és teljes relációval, azaz preferenciarendezéssel. Azért, hogy egy ilyen szélsőértékfeladatot az analízis eszközeivel tudjunk vizsgálni, a preferenciarelációt egy „preferenciaindikátorfüggvénnyel", más néven „hasznossági függvénnyel" kell helyettesíteni, azaz egy olyan $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ függvénnyel, ami reprezentálja az R preferenciarelációt. Ezen azt értjük, hogy $\forall\ (x_1,x_2),\ (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2_+$ jószág esetén

$$(x_1,x_2) R\ (y_1,y_2) \ \Leftrightarrow\ u(x_1,x_2) \geq u(y_1,y_2)\,.$$

Ezek után azzal a feltevéssel élünk, hogy a fogyasztó rendelkezik egy $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel.

Tegyük fel, hogy a javak árai pozitívak. Ezek szerint jelenítse meg $\mathbb{R}^2_{++}$ a lehetséges árvektorok halmazát. Feltesszük még, hogy az áruk ára a fogyasztó számára külső adottság, azaz az ő egyéni fogyasztása nem hat vissza az árakra. Ezt a feltevést úgy nevezzük, hogy a fogyasztó árelfogadó.

Végül feltesszük, hogy a fogyasztó rendelkezik egy $m \in \mathbb{R}_{++}$ nagyságú pozitív jövedelemmel.

A fogyasztó a fogyasztási javainak $u(x_1,x_2)$ vektorát úgy határozza meg, hogy maximalizálja az $u(x_1,x_2)$ hasznosságát a $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = m$ költségvetési feltétel mellett, azaz a viselkedését a következő, ún. *haszonmaximalizálási feladat* írja le:

$$\begin{cases} u(x_1,x_2) \to \max \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = m \end{cases} \tag{1.11}$$

A feladat Lagrange-függvénye az az $\mathscr{L} : \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+,\ \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{L}(x_1,x_2,\lambda) := u(x_1,x_2) - \lambda \cdot (p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - m)\,.$$

Legyen az $(x_1^0,x_2^0) \in \mathbb{R}^2_{++}$ vektor a (1.11) feladat megoldása, és tegyük fel, hogy a feladat függvényeire fennálnak a Lagrange-féle multiplikátor-tétel feltételei, akkor eszerint a tétel szerint

$$\begin{aligned} \partial_1 u(x_1^0,x_2^0) - \lambda \cdot p_1 &= 0\,, \\ \partial_2 u(x_1^0,x_2^0) - \lambda \cdot p_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

továbbá

$$\lambda = \frac{\partial_1 u(x_1^0, x_2^0)}{p_1} = \frac{\partial_2 u(x_1^0, x_2^0)}{p_2}.$$

Ezekből az következik, hogy az optimális pontban

$$\frac{\partial_1 u(x_1^0, x_2^0)}{\partial_2 u(x_1^0, x_2^0)} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{1.12}$$

- Közgazdasági szempontból ez azt jelenti, hogy optimális pontban a két termék határhasznának az aránya megegyezik az áraik arányával.
- Matematikai szempontból pedig azt jelenti, – mint ahogy a Lagrange-féle multiplikátor-tételben már láttuk –, hogy az u hasznossági függvénynek az $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2_{++}$ optimális ponthoz tartozó szinthalmazát, közömbösségi görbéjét érinti a költségvetési egyenes. Ezek szerint az optimális pont meghatározását úgy szemléltethetjük, hogy a hasznossági függvény közömbösségi görbéit addig toljuk, amíg a költségvetési egyenes nem érinti.

Mivel a feladat célfüggvényére, az $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvényre fennállnak az implicitfüggvény-tétel feltételei, ezért – mint a 1.1.7. példában már láttuk – az $u^{-1}(u(x_1^0, x_2^0)) \subset \mathbb{R}^2_+$ közömbösségi görbe az x_1^0 egy környezetében egy differenciálható függvény, és

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial_1 u(x_1^0, x_2^0)}{\partial_2 u(x_1^0, x_2^0)},$$

ami azt jelenti, hogy a helyettesítési határarány megegyezik a határhasznok hányadosának az ellentettjével.

Továbbá az $(x_1, x_2) \mapsto p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$ függvénynek az m-hez tartzó szintvonala függvény, azaz a

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = m$$

egyenletből az x_2 változó kifejezhető x_1 változó függvényeként:

$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2} \cdot x_1 + \frac{1}{p_2} \cdot m.$$

Ez a függvény nyilván differenciálható, és a derivált minden pontban az egyenes meredeksége:

$$-\frac{p_1}{p_2}.$$

Az (1.12) összefüggés alapján ebből következik a mikroökonómia egy sarkalatos törvénye, amely szerint

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2},$$

ami azt jelenti, hogy az (x_1^0, x_2^0) optimális pontban a helyettesítési határarány abszolútértéke megegyezik az ráaránnyal.

1.1.20. Példa (Egy másik mikroökonómiai példa: a költségminimalizálás)**.** Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl ugyanazokat a feltételeket, mint a haszonmaximalizálás esetén. Röviden, tegyük fel, hogy egy fogyasztónak van egy fogyasztási halmaza, ez legyen $\mathbb{R}^2_+$. Jelölje $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ a fogyasztási javaknak, $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$ pedig ezen fogyasztási javak árainak a vektorát. A fogyasztó rendelkezik egy $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel.

A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát azonban ebben az esetben úgy határozza meg, hogy minimalizálja a $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$ költségét, miközben egy u_0 megkívánt hasznossági szintet ér el, azaz a viselkedését a következő, ún. *költségminimalizálási feladat* írja le:

$$\begin{cases} p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \to \min \\ u(x_1,x_2) = u_0 \end{cases} . \tag{1.13}$$

A feladat megoldása során ugyanazokat az eredményeket kapjuk, mint a haszonmaximalizálási feladat esetén. A feladat Lagrange-függvénye az az $\mathscr{L} : \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+,\ \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathscr{L}(x_1,x_2,\lambda) := p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \lambda \cdot (u(x_1,x_2) - u_0) .$$

Legyen az $(x_1^0,x_2^0) \in \mathbb{R}^2_{++}$ vektor a (1.13) feladat megoldása, és tegyük fel, hogy a feladat függvényeire fennálnak a Lagrange-féle multiplikátor-tétel feltételei, akkor eszerint a tétel szerint

$$\begin{aligned} p_1 + \lambda \cdot \partial_1 u(x_1^0,x_2^0) &= 0 , \\ p_2 + \lambda \cdot \partial_2 u(x_1^0,x_2^0) &= 0 , \end{aligned}$$

továbbá

$$\lambda = -\frac{p_1}{\partial_1 u(x_1^0,x_2^0)} = -\frac{p_2}{\partial_2 u(x_1^0,x_2^0)} ,$$

azaz a (1.11) feladat Lagrange szorzójának a negatív reciproka, amiből most is az következik, hogy az optimális pontban

$$\frac{\partial_1 u(x_1^0,x_2^0)}{\partial_2 u(x_1^0,x_2^0)} = \frac{p_1}{p_2} . \tag{1.14}$$

Mint a haszonmaximalizálásnál láttuk:

- Közgazdasági szempontból a kapottak azt jelentik, hogy optimális pontban a két termék határhasznának az aránya megegyezik az áraik arányával.
- Matematikai szempontból pedig azt jelenti, – mint ahogy a Lagrange-féle multiplikátor-tételben már láttuk –, hogy az u hasznossági függvénynek az $(x_1^0,x_2^0) \in \mathbb{R}^2_{++}$ optimális ponthoz tartozó szinthalmazát, közömbösségi görbéjét érinti a költségvetési egyenes. Ezek szerint az optimális pont meghatározását úgy szemléltethetjük, hogy a a költségvetési egyeneseket addig toljuk, amíg nem érintik a hasznossági függvény közömbösségi görbéjét.

Végül most is megkapjuk a mikroökonómia sarkalatos törvényét, amely szerint

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2},$$

ami azt jelenti, hogy az (x_1^0, x_2^0) optimális pontban a helyettesítési határarány abszolútértéke megegyezik áraránnyal.

1.1.21. Megjegyzés. Meglepőnek tűnhet, hogy annak a roppant egyszerű rajzolgatásnak, ami a mikroökonómia egyik kiindulópontja, milyen nehéz a matematikai háttere. Vegyük észre azonban, hogy az olyan egyszerűnek tűnő fogalomnak, mint az érintőnek a bevezetése hozta létre az analízist, továbbá a valós számegyenesnek a gondos bevezetése az analízis egyik legmélyebb területe.

Gyakorlatok a Lagrange-féle multiplikátor-tételre

1.9. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x \cdot y \to \max \\ x + y = 2 \end{cases}. \tag{1.15}$$

1.10. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő paraméteres feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x \cdot y \to \max \\ 2x + y = m \end{cases}. \tag{1.16}$$

1.11. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} 12x \cdot \sqrt{y} \to \max \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}. \tag{1.17}$$

1.12. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő paraméteres feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \to \min \\ x + 2y = a \end{cases}. \tag{1.18}$$

1.13. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 \to \min \\ x + y = 1 \end{cases}. \tag{1.19}$$

1.14. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 \to \max \\ x + y = 100 \end{cases}. \tag{1.20}$$

1.15. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő paraméteres haszonmaximalizálási feladatot:

$$\begin{cases} u(x,y) = 10 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \to \max \\ k(x,y) = 2x + 4y = m \end{cases} . \tag{1.21}$$

1.16. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő paraméteres haszonmaximalizálási feladatot:

$$\begin{cases} u(x,y) = 100 - e^{-x} - e^{-y} \to \max \\ k(x,y) = px + qy = m \end{cases} . \tag{1.22}$$

1.17. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő költségminimalizálási feladatot:

$$\begin{cases} rK + wL \to \min \\ F(K,L) = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{4}} = Q \end{cases} , \tag{1.23}$$

ahol K a rendelkezésre álló tőke, aminek az ára r, és L a rendelkezésre álló munka, aminek az ára w.

1.2. Feltételes szélsőérték-feladatok a többváltozós függvényekre

Az implicitfüggvény-tétel többváltozós függvényekre

A normált terek közötti függvényekre vonatkozó implicitfüggvény-tétel egyenes általánosítása annak amely a kétváltozós függvényekre vonatkozik, mégis tanulságos az n-változós függvényekre vonatkozó implicitfüggvény-tételt közelebbről is megvizsgálni.

Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ egy függvény, ahol $m < n$, és $b \in \mathbb{R}^m$ egy adott vektor, kérdés, hogy az

$$f^{-1}(b) = \{x \ : \ f(x) = b\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

szinthalmazhoz van-e olyan $g : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ függvény, amelyre teljesül, hogy

$$f^{-1}(b) = g \, .$$

Érdemes a bevezetőbeli lineáris eset általánosítását áttekinteni.

1.2.1. Példa (Egy speciális eset: a lineáris függvény szintvonala)**.** Abban az esetben, amikor az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény lineáris, azaz

$$f(x) = Ax \, , \quad \text{ahol} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \, ,$$

akkor egy adott $b \in \mathbb{R}^m$ vektor mellett az $f(x) = b$ egyenlőség az

$$Ax = b$$

inhomogén lineáris egyenletrendszert jelenti, amelynek jól ismert a (belső reprezentálású) megoldási módja. Ez röviden, az implicitfüggvény-tételhez igazított megfogalmazásban a következő:

Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix sorai lineárisan függetlenek, így m darab lineárisan független oszlopa van, és képzeljük el úgy a mátrixot, hogy ez az utolsó m oszlop. Az A bázisfaktorizációja:

$$A = [A_1, A_2] = A_2\,[D, E]\,, \quad \text{ahol} \quad A_2 \in \mathbb{R}^{m\times m} \quad \text{invertálható,}$$

és

$$D = A_2^{-1} A_1 \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}\,.$$

Az $Ax = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai olyan

$$\begin{bmatrix} x_s \\ x_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$$

vektorok, amelyekre

$$x_k = -Dx_s\,, \quad \text{ahol} \quad x_s \in \mathbb{R}^{n-m} \quad \text{tetszőleges.}$$

Továbbá tetszőleges adott $b \in \mathbb{R}^m$ esetén $\exists!\ d \in \mathbb{R}^m$, hogy $A_2 d = b$, ekkor az $Ax = b$ inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai olyan

$$\begin{bmatrix} x_s \\ x_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$$

vektorok, amelyekre

$$x_k = d - Dx_s\,, \quad \text{ahol} \quad x_s \in \mathbb{R}^{n-m} \quad \text{tetszőleges,}$$

másképpen kifejezve

$$A^{-1}(b) = \left\{ \begin{bmatrix} x_s \\ x_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \ :\ x_k = d - Dx_s\,,\ x_s \in \mathbb{R}^{n-m} \right\}.$$

Legyen $g : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ az a (lineáris) függvény, amelyre $\forall\, x_s \in \mathbb{R}^{n-m}$ esetén

$$g(x_s) = d - Dx_s = d - A_2^{-1} A_1 \cdot x_s\,,$$

ekkor az előzőek alapján

$$A^{-1}(b) = g\,,$$

továbbá a g függvény deriváltja $\forall\, x_s \in \mathbb{R}^{n-m}$ pontban

$$g'(x) = -D = -A_2^{-1} A_1\,.$$

1.2.2. Állítás (implicitfüggvény-tétel a többváltozós függvényekre). *Legyen* $f : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ *egy függvény (* $m < n$ *), tegyük fel, hogy egy* $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}(f)$ *pontban teljesül, hogy*

(1) folytonosan differenciálható,

(2) az $f'(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *deriváltmátrix sorai lineárisan függetlenek,*

tegyük még fel, hogy a deriváltmátrix utolsó m oszlopa lineárisan független, ami azt jelenti, hogy az

$$f'(x_0,y_0) = [\partial_1 f(x_0,y_0), \partial_2 f(x_0,y_0)] \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)} \times \mathbb{R}^{m \times m}$$

deriváltban a

$$\partial_2 f(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

parciális derivált invertálható, így a derivált bázisfaktorizációja:

$$f'(x_0,y_0) = [\partial_1 f(x_0,y_0), \partial_2 f(x_0,y_0)] = \partial_2 f(x_0,y_0) \cdot [D, E] \, ,$$

ahol

$$D = [\partial_2 f(x_0,y_0)]^{-1} \cdot \partial_1 f(x_0,y_0) \, .$$

Ekkor az $x_0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ *pontnak* $\exists\, U$ *környezete, és* $\exists!\; g : U \to \mathbb{R}^m$ *függvény, hogy*

(a) $\forall\, x \in U$ *esetén* $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$,

(b) az (x_0, y_0) *pontnak* $\exists\, G$ *környezete, hogy*

$$G \cap f^{-1}(f(x_0,y_0)) = g \, ,$$

(c) $g(x_0) = y_0$,

(d) a $g : U \to Y$ *függvény differenciálható, és* $\forall\, x \in U$ *esetén*

$$g'(x) = -[\partial_2 f(x,y)]^{-1} \cdot \partial_1 f(x,y) \, .$$

1.2.3. Megjegyzés. 1. A tétel bizonyítását lásd később (2.1.22. állítás).

2. Fontos kiemelnünk, hogy bár a g függvényt általában explicit módon nem tudjuk meghatározni, de x_0-beli deriváltját igen.

Feladatok a többváltozós függvényekre vonatkozó implicitfüggvény-tételre

1.18. *Feladat.* Legyen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ az a függvény, amelyre $\forall\ (x,y,u,v)$ esetén

$$f(x,y,u,v) = \begin{bmatrix} u + e^{uv} + \sin(xu) + yv \\ u + xyu - yv \end{bmatrix}.$$

Függvényt alkot-e az $(x,y,u,v) = (0,1,1,0) \in \mathbb{R}^4$ ponthoz tartozó szinthalmaza ennek a pontnak egy környezetében?

Megoldás:

$$f(0,1,1,0) = \begin{bmatrix} 1 + e^0 + \sin 0 + 0 \\ 1 + 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

továbbá

$$f'(x,y,u,v) = \begin{bmatrix} u\cos(xu) & v & 1 + e^{uv}v + x\cos(xu) & e^{uv}u + y \\ yu & xu - v & 1 + xy & -y \end{bmatrix},$$

amiből

$$f'(0,1,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}.$$

Látható, hogy a deriváltnak két független oszlopa van, azaz a sorai lineárisan függetlenek:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_{.1} & a_{.2} & a_{.3} & a_{.4} \\ \hline e_1 & 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ e_2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|ccc} & a_{.1} & a_{.2} & a_{.2} \\ \hline a_{.3} & 1 & 0 & 2 \\ e_2 & 0 & 0 & \boxed{-3} \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|cc} & a_{.1} & a_{.2} \\ \hline a_{.3} & 1 & 0 \\ a_{.4} & 0 & 0 \end{array}$$

Ezek szerint az implicitfüggvény-tétel alapján $\exists\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény, hogy a $(0,1,1,0)$ pont egy környezetben

$$f^{-1}(f(0,1,1,0)) = f^{-1}(2,1) = g.$$

Mivel a számolás során az utolsó két oszlopot vittük be a bázisba, ezért a

$$\partial_{u,v} f(0,1,1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

parciális derivált invertálható, emiatt pedig az implicitfüggvény-tétel alapján az utolsó két koordináta az első két koordinátának a függvénye:

$$(u,v) = g(x,y).$$

Továbbá a g függvény deriválható is, és

$$\begin{aligned} g'(0,1) &= -\left[\partial_{u,v} f(0,1,1,0)\right]^{-1} \cdot \partial_{x,y} f(0,1,1,0) = -D \\ &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}. \end{aligned}$$

1.19. *Feladat.* Legyen $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ az a függvény, amelyre $\forall\ (x,y,u,v)$ esetén

$$f(x,y,u,v)=\begin{bmatrix} xyu+x^2v+y^2u \\ x^2y^2v+x+u \end{bmatrix}.$$

Függvényt alkot-e az $(x,y,u,v)=(1,-1,2,1)\in\mathbb{R}^4$ ponthoz tartozó szinthalmaza ennek a pontnak egy környezetében?

Megoldás:

$$f(1,-1,2,1)=\begin{bmatrix} -2+1+1 \\ 1+1+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

továbbá

$$f'(x,y,u,v)=\begin{bmatrix} yu+2xv & xu+2yu & xy+y^2 & x^2 \\ 2xy^2v+1 & 2x^2yv & 1 & x^2y^2 \end{bmatrix},$$

amiből

$$f'(1,-1,2,1)=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times4}.$$

Látható, hogy a deriváltnak két független oszlopa van, azaz a sorai lineárisan függetlenek:

$$\begin{array}{c|cccc} & a_{.1} & a_{.2} & a_{.3} & a_{.4} \\ \hline e_1 & 0 & -2 & 0 & \boxed{1} \\ e_2 & 3 & -2 & \boxed{1} & 1 \end{array} \quad\to\quad \begin{array}{c|cc} & a_{.1} & a_{.2} \\ \hline a_{.4} & 0 & -2 \\ a_{.3} & 3 & 0 \end{array}, \quad \text{ezzel} \quad D=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ezek szerint az implicitfüggvény-tétel alapján $\exists\ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvény, hogy az $(1,-1,2,1)$ pont egy környezetben

$$f^{-1}(f(1,-1,2,1))=f^{-1}(1,4)=g\,.$$

Mivel a számolás során az utolsó két oszlopot vittük be a bázisba, ezért a

$$\partial_{u,v}f(1,-1,2,1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$$

parciális derivált invertálható, emiatt az implicitfüggvény-tétel alapján az utolsó két koordináta az első két koordinátának a függvénye:

$$(u,v)=g(x,y)\,.$$

Továbbá a g függvény deriválható is, és

$$\begin{aligned} g'(1,-1) &= [\partial_{u,v}f(1,-1,2,1)]^{-1}\cdot\partial_{x,y}f(1,-1,2,1)=-D \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}. \end{aligned}$$

1.20. *Feladat.* Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\forall\ (x,y,z)$ esetén

$$f(x,y,z)=(xyz)^3+(xy)^2+y\,.$$

Függvényt alkot-e az $(x,y,z)=(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$ ponthoz tartozó szinthalmaza ennek a pontnak egy környezetében?

Megoldás:

$$f(1,1,1)=3\,,$$

továbbá

$$f'(x,y,z)=[3x^2y^3z^3+2xz^2\,,3x^3y^2z^3+1\,,3x^3y^3z^2+2x^2z]\,,$$

amiből

$$f'(1,1,1)=[5,4,5]\in\mathbb{R}^{1\times3}\,.$$

A deriváltnak nyilván egy független oszlopa van, azaz lineárisan független sorvektor. Továbbá a bázisba bármely oszlopvektor bevihető:

$$(1)\quad \begin{array}{c|ccc} & a_{.1} & a_{.2} & a_{.3}\\ \hline e_1 & 5 & 4 & \boxed{5}\end{array} \quad\to\quad \begin{array}{c|cc} & a_{.1} & a_{.2}\\ \hline a_{.3} & 1 & 4/5\end{array},\quad \text{így}\quad D=[1,4/5]\,,$$

$$(2)\quad \begin{array}{c|ccc} & a_{.1} & a_{.2} & a_{.3}\\ \hline e_1 & 5 & \boxed{4} & 5\end{array} \quad\to\quad \begin{array}{c|cc} & a_{.1} & a_{.3}\\ \hline a_{.2} & 5/4 & 5/4\end{array},\quad \text{így}\quad D=[5/4,5/4]\,,$$

$$(3)\quad \begin{array}{c|ccc} & a_{.1} & a_{.2} & a_{.3}\\ \hline e_1 & \boxed{5} & 4 & 5\end{array} \quad\to\quad \begin{array}{c|cc} & a_{.2} & a_{.3}\\ \hline a_{.1} & 4/5 & 1\end{array},\quad \text{így}\quad D=[4/5,1]\,.$$

Ezek szerint az implicitfüggvény-tétel alapján az $(1,1,1)$ pont egy környezetében a

$$f^{-1}(f(1,1,1))=f^{-1}(3)\subseteq\mathbb{R}^3$$

szinthalmaz függvényt alkot, méghozzá az x,y,z bármelyike kifelyezhető a másik kettőnek a deriválható függvényeként. Mindhárom eset számításait elvégezve,

(1) $\partial_z f(1,1,1)=[5]$ invertálható, ezért $z=g_1(x,y)$, továbbá
$g_1'(1,1)=[\partial_z f(1,1,1)]^{-1}\cdot\partial_{x,y}f(1,1,1)=-D=[-1,-4/5]\in\mathbb{R}^{1\times2}$,

(2) $\partial_y f(1,1,1)=[4]$ invertálható, ezért $y=g_2(x,z)$, továbbá
$g_2'(1,1)=\left[\partial_y f(1,1,1)\right]^{-1}\cdot\partial_{x,z}f(1,1,1)=-D=[-5/4,-5/4]\in\mathbb{R}^{1\times2}$,

(3) $\partial_x f(1,1,1)=[5]$ invertálható, ezért $x=g_3(y,z)$, továbbá
$g_3'(1,1)=[\partial_x f(1,1,1)]^{-1}\cdot\partial_{y,z}f(1,1,1)=-D=[-4/5,-1]\in\mathbb{R}^{1\times2}$.

1.21. *Feladat.* Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\forall\ (x,y,z)$ esetén

$$f(x,y,z) = \sin(xy) + e^{-yz}\,.$$

Függvényt alkot-e az $(x,y,z) = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ ponthoz tartozó szinthalmaza ennek a pontnak egy környezetében?

Megoldás:

$$f(0,1,0) = 1\,,$$

továbbá

$$f'(x,y,z) = [y\cos(xy)\,, x\cos(xy) - ze^{yz}\,, -ye^{-yz}]\,,$$

amiből

$$f'(0,1,0) = [1,0,1] \in \mathbb{R}^{1\times 3}\,.$$

A deriváltnak nyilván egy független oszlopa van, azaz lineárisan független sorvektor. Továbbá az első és a harmadik oszlopvektora bevihető:

$$(1) \quad \begin{array}{c|ccc} & a_{.1} & a_{.2} & a_{.3} \\ \hline e_1 & 1 & 0 & \boxed{1} \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|cc} & a_{.1} & a_{.2} \\ \hline a_{.3} & 1 & 0 \end{array}, \quad \text{így} \quad D = [1,0]\,,$$

$$(2) \quad \begin{array}{c|ccc} & a_{.1} & a_{.2} & a_{.3} \\ \hline e_1 & \boxed{1} & 0 & 1 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|cc} & a_{.2} & a_{.3} \\ \hline a_{.1} & 0 & 1 \end{array}, \quad \text{így} \quad D = [0,1]\,.$$

Ezek szerint az implicitfüggvény-tétel alapján a $(0,1,0)$ pont egy környezetben az

$$f^{-1}(f(0,1,0)) = f^{-1}(1) \subseteq \mathbb{R}^3$$

szinthalmaz függvényt alkot, méghozzá az x illetve a z változó kifejezhető a másik két változó deriválható függvényeként. A második oszlop viszont nem vihető be, tehát az y változó nem áll elő a másik kettő függvényeként. A számításokat elvégezve,

(1) $\partial_z f(0,1,0) = [1]$ invertálható, ezért $z = g_1(x,y)$, továbbá
$g_1'(0,1) = [\partial_z f(0,1,0)]^{-1} \cdot \partial_{x,y} f(0,1,0) = -D = [-1,0] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$,

(2) $\partial_x f(0,1,0) = [1]$ invertálható, ezért $x = g_3(y,z)$, továbbá
$g_3'(1,0) = [\partial_x f(0,1,0)]^{-1} \cdot \partial_{y,z} f(0,1,0) = -D = [0,-1] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$,

(3) $\partial_y f(0,1,0) = [0]$, ami nem invertálható, ezért
$\nexists\, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $y = g_2(x,z)$.

Egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat: a Lagrange-féle multiplikátor-tétel

Ebben az alfejezetben a Lagrange-féle multiplikátor-tétel többváltozós függvényekre vonatkozó alakját mutatjuk be.

1.2.4. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ adott halmaz, $f_0, f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ adott függvények. A következő feladatot *egyenlőségekkel korlátozott feltételes szélsőértékfeladatnak* nevezzük:

$$\begin{cases} f_0(x) \to \max\ (\min) \\ f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0 \\ x \in D \end{cases}. \tag{1.24}$$

Az f_0 függvényt a feladat *célfüggvényének* nevezzük.
A feladat *feltételi halmaza* vagy más néven a *lehetséges megoldások halmaza*:

$$\{x \in D \ : \ f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(0).$$

1.2.5. Definíció. Egy $x_0 \in D$ pontot az (1.8) feladat (*optimális*) *megoldásának* nevezzük, ha az $f_0|_{\bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(0)} : \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(0) \to \mathbb{R}$ függvény maximumhelye, azaz

(1) x_0 lehetséges megoldás,

(2) $\forall\, x$ lehetséges megoldás esetén $f_0(x_0) \geq f_0(x)$.

Mint a feltételes szélsőértékfeladatokat általában, az egyenlőségekkel korlátozott feltételes szélsőértékfeladatot úgy oldjuk meg, hogy visszavezetjük a feladatot a Lagrange-függvénye feltétel nélküli szélsőértékének a vizsgálatára.

1.2.6. Definíció. Az (1.8) feladat *Lagrange-függvénye* az az $\mathscr{L} : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\, x \in D$ és $\forall\, l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\mathscr{L}(x,l) = \mathscr{L}(x,(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)) \doteq f_0(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x).$$

Az $l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ vektort *Lagrange-multiplikátornak* nevezzük.
Minimumfeladat esetén a feltételi rész hozzáadása célszerű:

$$\mathscr{L}(x,l) = \mathscr{L}(x,(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)) \doteq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x).$$

1.2.7. Megjegyzés. Ha az $f_0, f_1, \ldots, f_m$ függvények differenciálhatók egy $x \in D$ pontban, akkor $\forall\, l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén az x változó szerinti parciális derivált

$$\partial_1 \mathscr{L}(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) = f_0'(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i'(x)\,.$$

Továbbá $\forall\, x \in D$ és $\forall\, l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ pontban $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén a λ_i változó szerinti parciális derivált

$$\partial_{\lambda_i} \mathscr{L}(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) = -f_i(x)\,.$$

1.2.8. Állítás (Lagrange-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz halmaz. Legyenek az $f_0, f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók egy $x_0 \in D$ pontban. Tegyük fel, hogy az*

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$$

függvényre teljesülnek az $x_0 \in D$ pontban az implicitfüggvény-tétel feltételei, azaz teljesül a következő két regularitási feltétel (constraint qualification):

(1) az $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan differenciálhatók az $x_0 \in D$ pontban

(2) az $f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Ha $x_0 \in D$ megoldása az egyenlőségekkel korlátozott (1.24) feltételes szélsőértékfeladatnak, akkor $\exists\, l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ Lagrange-multiplikátor, hogy

$$\mathscr{L}'(x_0, l) = \mathbf{0}\,,$$

ami azt jelenti, hogy

(a) $f_0'(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{R^{1\times n}}$ (Euler-Lagrange-egyenlet), amiből $f_0'(x_0) \in \mathrm{lin}\{f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)\}$,

(b) $f_1(x_0) = 0, \ldots, f_m(x_0) = 0$.

1.2.9. Megjegyzés. 1. A tétel bizonyítását lásd később (3.1.6. állítás).

2. A Lagrange-féle multiplikátor-tétel szerint a (1.24) feltételes szélsőérték-feladatra vonatkozó szükséges feltétel megegyezik a feladat Lagrange-függvényének a feltétel nélküli szélsőértékére vonatkozó elsőrendű szükséges feltételével.

3. Ez a szükséges feltétel egy $n+m$ ismeretlent tartalmazó, $n+m$ egyenletből álló

$$\begin{cases} \partial_j f_0(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \partial_j f_i(x_0) = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n \\ f_1(x_0) = 0, \ldots, f_m(x_0) = 0\,, \end{cases}$$

egyenletrendszer, amit megoldva kapjuk meg a feladat lehetséges megoldásait.

1.2.10. Megjegyzés. Tegyük fel, hogy a maximumfeladat Lagrange-függvénye az x változóban konkáv, azaz az

$$x \mapsto \mathscr{L}(x,l)$$

függvény konkáv, ami azzal ekvivalens, hogy az f_0 célfüggvény konkáv, az $f_1,\ldots,f_m$ feltételi függvények pedig konvexek. Ekkor a megoldás Lagrange-multiplikátor-tételbeli

$$\mathscr{L}'(x_0,l) = \mathbf{0}$$

szükséges feltétele a megoldásnak egyben elégséges feltétele is.

Ugyanis: Mivel $\partial_x \mathscr{L}(x_0,l) = \mathbf{0}$, ezért az x_0 az $x \mapsto \mathscr{L}(x,l)$ konkáv függvény maximumhelye, így $\forall\, x$ lehetséges megoldás esetén

$$\begin{aligned} f_0(x_0) &= f_0(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x_0) = \mathscr{L}(x_0,l) \\ &\geq \mathscr{L}(x,l) = f_0(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x) = f_0(x)\,. \end{aligned}$$

Ugyanez mondható el, ha a minimumfeladat Lagrange-függvénye az x változóban konvex, azaz az

$$x \mapsto \mathscr{L}(x,l)$$

függvény konvex, ami azzal ekvivalens, hogy az f_0 célfüggvény és az $f_1,\ldots,f_m$ feltételi függvények is konvexek.

Feladatok a Lagrange-féle multiplikátor-tételre

1.22. *Feladat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2y^3z \to \max \\ x+y+z = 12 \end{array} \right. . \tag{1.25}$$

Megoldás: A fenti tétel jelöléseivel

$$\begin{aligned} f_0(x,y,z) &= x^2y^3z\,, \\ f_1(x,y,z) &= x+y+z-12\,. \end{aligned}$$

A feladat Lagrange-függvénye

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = x^2y^3z - \lambda \cdot (x+y+z-12)\,.$$

Ha (x,y,z) megoldása az (1.10) feladatnak, akkor a Lagrange-elv szerint $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, hogy x,y,z,λ kielégítik a következő egyenleteket:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2xy^3z - \lambda = 0 \\ 3x^2y^2z - \lambda = 0 \\ x^2y^3 - \lambda = 0 \\ x+y+z = 12 \end{array} \right. ,$$

amikből

$$(x,y,z) = (4,6,2)\ .$$

Kérdés, hogy ez a vektor valóban megoldása-e a feladatnak? A pozitív térnyolcadban ez valóban maximumhely. Általában véve azonban a célfüggvény a feltételi halmazon nem felülről korlátos. Például tetszőleges $y > 0,\ x = -y,\ z = 12$ mellett

$$x^2y^3z = 12y^5\ ,$$

ami akármilyen nagy lehet.

1.23. *Feladat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \to \min \\ x+2y+z=1 \\ 2x-y-3z=4 \end{array}\right. . \tag{1.26}$$

A feladat geometriai interpretációja: Keressük meg a feltételi lineáris függvények által definiált hipersíkok metszetének a legkisebb normájú pontját.

Megoldás: A fenti tétel jelöléseivel

$$\begin{aligned} f_0(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2\,, \\ f_1(x,y,z) &= x+2y+z-1\,, \\ f_2(x,y,z) &= 2x-y-3z-4\,. \end{aligned}$$

A feladat Lagrange-függvénye

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = x^2+y^2+z^2-\lambda_1\cdot(x+2y+z-1)-\lambda_2\cdot(2x-y-3z-4)\,.$$

Ha (x_0,y_0,z_0) megoldása az (1.10) feladatnak, akkor a Lagrange-elv szerint $\exists\,\lambda_1\,,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$, hogy kielégítik a következő egyenleteket:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ 2y-2\lambda_1+\lambda_2=0 \\ 2z-\lambda_1+3\lambda_2=0 \\ x+2y+z=1 \\ 2x-y-3z=4 \end{array}\right. ,$$

amikből

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{2}{5}x+\frac{4}{5}y \\ \lambda_2 = \frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y \end{array}\right. ,$$

így

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+2y+z=1 \\ 2x-y-3z=4 \end{array}\right. ,$$

ezért

$$(x,y,z) = \left(\frac{16}{15},\frac{5}{15},-\frac{11}{15}\right)\,,$$

mivel a Lagrange-függvény konvex, ez valóban minimumhely.

Gyakorlatok a Lagrange-féle multiplikátor-tételre

1.24. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \to \min \\ x+y+z=1 \end{cases} . \tag{1.27}$$

1.25. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x+y+z \to \max(\min) \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x-y-z=1 \end{cases} . \tag{1.28}$$

1.26. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x+y \to \max(\min) \\ x^2+2y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} . \tag{1.29}$$

1.27. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x^2-2x+2y^2+z^2+z \to \min \\ x+y+z=1 \\ 2x-y-z=5 \end{cases} . \tag{1.30}$$

1.28. *Gyakorlat.* Oldjuk meg az 1.7. példa következő általánosítását:

$$\begin{cases} \langle x,x\rangle \to \max(\min) \\ \langle x,Ax\rangle = 1 \end{cases} , \tag{1.31}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adott pozitív definit szimmetrikus mátrix.

1.29. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot x_i^2 \to \min \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{cases} . \tag{1.32}$$

ahol $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ adott paraméterek.

1.30. *Gyakorlat.* Oldjuk meg az 1.1.19. haszonmaximalizálási példa következő általánosítását:

$$\begin{cases} u(x) \to \max \\ \langle p,x\rangle = w \end{cases} . \tag{1.33}$$

a) Speciálisan legyen

$$u(x_1,\ldots,x_n) = Ax_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n},$$

ahol $A,\alpha_1,\ldots,\alpha_n > 0$ adott paraméterek.

b) Speciálisan legyen

$$u(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n}\,,$$

ahol $\alpha_1,\ldots,\alpha_n > 0$ adott paraméterek.

c) Speciálisan

$$\begin{cases} \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + (1-\alpha_1-\alpha_1)\ln(L-l) \to \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 = p_3 l + w \end{cases}, \tag{1.34}$$

ahol a fogyasztó l órát dolgozik p_3 órabérért, valamint $\alpha_1+\alpha_2 < 1$ paraméterek.

Egyenlőtlenséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat: a Fritz John-Kuhn-Tucker-multiplikátor-tétel

A fenti (1.24) feladatnak tekintsük azt a módosítását, amelyben a feltételek nem egyenlőségek, hanem egyenlőtlenségek. Ebben az alfejezetben ennek a feladatnak a megoldására adunk feltételeket.

1.2.11. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ adott halmaz, $f_0, f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ adott függvények. A következő feladatot *egyenlőtlenségekkel korlátozott feltételes szélsőértékfeladatnak* nevezzük:

$$\begin{cases} f_0(x) \to \max\ (\min) \\ f_1(x) \le 0, \ldots, f_m(x) \le 0 \\ x \in D \end{cases}. \tag{1.35}$$

Az f_0 függvényt a feladat *célfüggvényének* nevezzük.
A feladat *feltételi halmaza* vagy más néven a *lehetséges megoldások halmaza*:

$$\{x \in D\ :\ f_1(x) \le 0, \ldots, f_m(x) \le 0\} = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)\,.$$

1.2.12. Definíció. Egy $x_0 \in D$ pontot az (1.35) feladat (*optimális*) *megoldásának* nevezzük, ha az $f_0|_{\bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)} : \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \to \mathbb{R}$ függvény maximumhelye, azaz

(1) x_0 lehetséges megoldás,

(2) $\forall\, x$ lehetséges megoldás esetén $f_0(x_0) \ge f_0(x)$.

Mint a feltételes szélsőértékfeladatokat általában, az egyenlőtlenségekkel korlátozott feltételes szélsőértékfeladatot úgy oldjuk meg, hogy visszavezetjük a feladatot a Lagrange-függvénye feltétel nélküli szélsőértékének a vizsgálatára.

1.2.13. Definíció. Az (1.35) feladat *Lagrange-függvénye* az az $\mathscr{L} : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\, x \in D$ és $\forall\, l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\mathscr{L}(x,l) = \mathscr{L}(x,(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)) \doteq f_0(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\,.$$

Az $l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ vektort *Lagrange-multiplikátornak* nevezzük.
Minimumfeladat esetén a feltételi rész hozzáadása célszerű:

$$\mathscr{L}(x,l) = \mathscr{L}(x,(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)) \doteq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\,.$$

1.2.14. Megjegyzés. A feladat megoldására vonatkozó multiplikátor-tétel a Lagrange-féle multiplikátor-tételhez nagyon hasonló, persze bizonyos különbségekkel.

1.2.15. Állítás (Fritz John-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Legyenek az $f_0, f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók egy $x_0 \in D$ pontban. Tegyük fel, hogy az $x_0 \in D$ pontban teljesül a következő regularitási feltétel* (*constraint qualification*)*: az*

$$f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0) \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

vektorok kúpfüggetlenek.
Ha $x_0 \in D$ megoldása az egyenlőtlenségekkel korlátozott (1.35) *feltételes szélsőérték-feladatnak, akkor $\exists\, l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátor, hogy*

(a) $f_0'(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{R^{1\times n}}$ (*Euler-Lagrange-egyenlet*)*, amiből* $f_0'(x_0) \in \operatorname{con}\{f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)\}$,

(b) $\lambda_1 \cdot f_1(x_0) = 0, \ldots, \lambda_m \cdot f_m(x_0) = 0$ (*komplementaritási feltétel*).

1.2.16. Megjegyzés. 1. A tétel bizonyítását lásd később (3.1.6. állítás).

2. A Fritz John-tétel a Lagrange-tételétől a következőkben különbözik:

- A feltételben szereplő ún. reguláris feltétel nem lineáris, hanem ún. kúpfüggetlenséget követel meg, ami azt jelenti, hogy csak a nemtriviális kúp-kombináció állítja elő a zérus vektort, lásd a 2.3.18. definíciót.

- Az állítás szerint a multiplikátorok csak nemnegatívak lehetnek. Egyébként emiatt fontos, hogy maximumfeladat esetén levonjuk, minimumfeladat esetén hozzáadjuk a feltételi részt. Az Euler-Lagrange egyenlet ezek szerint azt jelenti, hogy a célfüggvény deriváltja a feltételi függvények deriváltjainak a kúpburkában van.

- A feladat feltételei most egyenlőtlenségek, de a komplementaritási feltétel azt jelenti, hogy ha a feladat megoldásában egy egyenlőtlenség szigorúan teljesül, akkor a hozzá tatozó multiplikátor nulla.

3. A Fritz John-féle multiplikátor-tétel szerint az (1.35) feltételes szélsőérték-feladatra vonatkozó szükséges feltétel egy $n+m$ ismeretlent tartalmazó $n+m$ egyenletből álló

$$\begin{cases} \partial_j f_0(x_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \partial_j f_i(x_0) = 0\,, \quad j = 1,\dots,n \\ \lambda_1 \cdot f_1(x_0) = 0,\dots,\lambda_m \cdot f_m(x_0) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0,\dots,\lambda_m \geq 0\,, \end{cases}$$

egyenletrendszer, amit megoldva kapjuk a feladat lehetséges megoldásait. A komplementaritási feltételek ellenőrzése azonban lényegesen összetettebb feladat, mint a Lagrange-féle multiplikátor-tétel alkalmazásakor. Szemben az ottani esettel, most 2^m esetet kell diszkutálnunk.

1.2.17. Megjegyzés. Tekintsük most az egyenlőtlenséggel korlátozott (1.35) feltételes szélsőérték-feladatnak azt a speciális esetét, amikor csak maximumot keresünk:

$$\begin{cases} f_0(x) \to \max \\ f_1(x) \leq 0,\dots,f_m(x) \leq 0 \\ x \in D \end{cases} . \tag{1.36}$$

Ha az egyenlőtlenségekkel korlátozott (1.36) feltételes szélsőértékfeladatban szereplő függvények konvexek, akkor a megoldás fenti szükséges feltételei elégségesek is. Ebben az esetben a Fritz John-tételbeli regularitási feltétel egy sokkal könnyebben ellenőrizhető feltétellel, a Slater-feltétellel helyettesíthető.

1.2.18. Állítás (Kuhn-Tucker-Fritz John-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, konvex halmaz. Legyenek a $-f_0, f_1,\dots,f_m : D \to \mathbb{R}$ függvények konvexek, továbbá differenciálhatók egy $x_0 \in D$ pontban. Tegyük fel, hogy az $x_0 \in D$ pontban teljesül a következő regularitási feltétel $($constraint qualification$)$, amit ebben az esetben Slater-feltételnek szokás nevezni:*

$$\exists\ \tilde{x} \in D\,, \quad \textit{amelyre} \quad f_1(\tilde{x}) < 0,\dots,f_m(\tilde{x}) < 0\,.$$

Egy $x_0 \in D$ vektor pontosan akkor megoldása az egyenlőtlenségekkel korlátozott (1.36) feltételes szélsőértékfeladatnak, ha $\exists\ l = (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátor, hogy

(a) $\partial_1 \mathscr{L}(x_0, l) = \mathbf{0}$, *ami az jelenti, hogy*

$f_0'(x_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{R^{1\times n}}$ *(Euler-Lagrange-egyenlet), amiből*

$f_0'(x_0) \in \mathrm{con}\{f_1'(x_0),\dots,f_m'(x_0)\}$,

(b) $\lambda_1 \cdot f_1(x_0) = 0,\dots,\lambda_m \cdot f_m(x_0) = 0$ *(komplementaritási feltétel).*

1.2.19. Megjegyzés. A tétel bizonyítását lásd később (3.2.4. állítás).

1.2.20. Megjegyzés. Az állítás (a) része, az Euler-Lagrange-egyenlet röviden úgy írható, hogy

$$\partial_1 \mathscr{L}(x_0, l) = \mathbf{0}_{R^{1\times n}},$$

ami a következő nyeregponti alakban is megfogalmazható:

$$\max_{x\in D} \mathscr{L}(x,l) = \mathscr{L}(x_0,l) = \min_{s\in\mathbb{R}^m_+} \mathscr{L}(x_0,s).$$

Ugyanis: Az állítás feltétele szerint az $-f_0, f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ függvények konvexek, ezért a feladat $\mathscr{L}(.,l) : D \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvénye konkáv (az x változóban), továbbá $\partial_1 \mathscr{L}(x_0,l) = \mathbf{0}_{R^{1\times n}}$, azaz a deriváltja az x_0 pontban $\mathbf{0}_{R^{1\times n}}$, ezért az x_0 maximumhelye:

$$\forall\, x \in D \quad \text{esetén} \quad \mathscr{L}(x,l) \le \mathscr{L}(x_0,l).$$

Továbbá legyen $s = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in \mathbb{R}^m_+$ tetszőleges, ekkor $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén a komplementaritási feltétel szerint

$$0 = \lambda_i \cdot f_i(x_0) \ge \sigma_i \cdot f_i(x_0),$$

amiből

$$\mathscr{L}(x_0,l) = f_0(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f_i(x) \le f_0(x) - \sum_{i=1}^m \sigma_i \cdot f_i(x_0) = \mathscr{L}(x_0,s).$$

Feladatok a Fritz John-féle multiplikátor-tételre

1.31. *Feladat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\left\{ \begin{array}{l} xy + yz \to \max\ (\min) \\ x^2 - y^2 + z^2 \le 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \le 10 \end{array} \right. . \tag{1.37}$$

Megoldás: A fenti tétel jelöléseivel

$$\begin{aligned} f_0(x,y,z) &= xy + yz = y(x+z), \\ f_1(x,y,z) &= x^2 - y^2 + z^2 - 2, \\ f_2(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 10. \end{aligned}$$

A feladat Lagrange-függvénye

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = xy + yz - \lambda_1 \cdot (x^2 - y^2 + z^2 - 2) - \lambda_2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 10).$$

A regularitási feltételek teljesülése:

$$f_1'(x,y,z) = [2x, -2y, 2z], \quad f_2'(x,y,z) = [2x, 2y, 2z] \in \mathbb{R}^{1\times 3},$$

továbbá ha ezen vektorok pozitív együtthatókkal vett kúp kombinációja a $\mathbf{0}$ vektor, akkor $x = z = 0$.

A feladat megoldásainak a megkeresése: Ha (x,y,z) megoldása a feladatnak, akkor a Fritz John-féle multiplikátor-tétel szerint $\exists\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátorok, hogy $x,y,z,\lambda_1,\lambda_2$ kielégítik a következő egyenleteket:

$$\begin{cases} y-2\lambda_1 x-2\lambda_2 x=0 \\ x+z+2\lambda_1 y-2\lambda_2 y=0 \\ y-2\lambda_1 z-2\lambda_2 z=0 \\ \lambda_1\cdot(x^2-y^2+z^2-2)=0 \\ \lambda_2\cdot(x^2+y^2+z^2-10)=0 \end{cases}.$$

A Lagrange-feltétel az első három egyenlet, ezeket átalakítva:

$$\begin{cases} y=2(\lambda_1+\lambda_2)x \\ x+z=2(\lambda_2-\lambda_1)y \\ y=2(\lambda_1+\lambda_2)z \end{cases},$$

A komplementaritási feltétel az utolsó két egyenlet:

$$\begin{cases} \lambda_1\cdot(x^2-y^2+z^2-2)=0 \\ \lambda_2\cdot(x^2+y^2+z^2-10)=0 \end{cases},$$

ennek ellenőrzése 2^2 eset vizsgálatát jelenti.

1. eset:

$$\begin{cases} x^2-y^2+z^2-2=0 \\ x^2+y^2+z^2-10=0 \end{cases}.$$

Ez az eset pontosan az egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat, a megoldása azonos a Lagrange-multiplikátor-tétel alkalmazásával. Ekkor

$$2y^2=8\,,\quad x,z\neq 0\,,\quad x=z\,,\quad \text{és}\quad 4x^2=12\,,$$

ezért

$$(x,y,z)=\pm(\sqrt{3},2,\sqrt{3})\,,\quad \text{illetve}\quad \pm(\sqrt{3},-2,\sqrt{3})\,,$$

valamint

$$f_0(\pm(\sqrt{3},2,\sqrt{3}))=4\sqrt{3}\,,\quad \text{illetve}\quad f_0(\pm(\sqrt{3},-2,\sqrt{3}))=-4\sqrt{3}\,.$$

2. eset:

$$\begin{cases} x^2-y^2+z^2-2<0 \\ x^2+y^2+z^2-10<0 \end{cases},\quad \text{így}\quad \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases}.$$

Ekkor a Lagrange feltételből

$$y=0\cdot x=0\,,\quad \text{így}\quad x+z=0\,,\quad \text{azaz}\quad x=-z\,,$$

ezért

$$(x,y,z)=(x,0,-x)\,,$$

valamint
$$f_0(x,0,-x) = 0\,.$$

3. eset:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 - 2 < 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}, \quad \text{így} \quad \lambda_1 = 0 \quad .$$

Ekkor a Lagrange-feltétel:
$$\begin{cases} y = 2\lambda_2 x \\ x + z = \lambda_2 y \\ y = 2\lambda_2 z \end{cases},$$

Ha $\lambda_2 = 0$, akkor
$$y = 0 \cdot x = 0\,, \quad \text{így} \quad x + z = 0\,, \quad \text{azaz} \quad x = -z\,,$$

ezért
$$(x,y,z) = (x,0,-x)\,, \quad \text{valamint} \quad f_0(x,0,-x) = 0\,.$$

Ha $\lambda_2 \neq 0$, akkor
$$x = z\,, \quad \text{így} \quad x = \lambda_2 y = 2\lambda_2^2 x\,, \quad \text{ezért} \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad \text{emiatt} \quad y = \sqrt{2}x\,,$$

továbbá a második komplementaritási feltételből $4x^2 = 10$, ezek szerint
$$(x,y,z) = \pm(\sqrt{5/2}, \sqrt{5}, \sqrt{5/2})\,, \quad \text{valamint} \quad f_0(\pm(\sqrt{5/2}, \sqrt{5}, \sqrt{5/2})) = 5\sqrt{2}\,.$$

4. eset:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 10 < 0 \end{cases}, \quad \text{így} \quad \lambda_2 = 0 \quad .$$

Ekkor a Lagrange-feltétel:
$$\begin{cases} y = 2\lambda_1 x \\ x + z = -\lambda_1 y \\ y = 2\lambda_1 z \end{cases},$$

Ha $\lambda_1 = 0$, akkor
$$y = 0 \cdot x = 0\,, \quad \text{így} \quad x + z = 0\,, \quad \text{azaz} \quad x = -z\,,$$

ezért
$$(x,y,z) = (x,0,-x)\,, \quad \text{valamint} \quad f_0(x,0,-x) = 0\,.$$

Ha $\lambda_1 \neq 0$, akkor
$$x = z\,, \quad \text{így} \quad x = \lambda_1 y = -2\lambda_1^2 x\,, \quad \text{ezért} \quad \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0\,,$$

ami nem lehet .

Összehasonlítva f_0-nak a a kapott pontokban vett értékeit, a maximumfeladat megoldásai:

$$(x,y,z) = \pm(\sqrt{5/2}, \sqrt{5}, \sqrt{5/2}),$$

a minimumfeladat megoldásai pedig:

$$(x,y,z) = \pm(\sqrt{3}, -2, \sqrt{3}).$$

1.32. *Feladat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4z \to \min\ (\max) \\ x^2+y^2+z^2 \le 3 \\ z \le xy \end{cases}. \tag{1.38}$$

Megoldás: A fenti tétel jelöléseivel

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= x^2+y^2+z^2-4z, \\ f_1(x,y) &= x^2+y^2+z^2-3, \\ f_2(x,y) &= z-xy. \end{aligned}$$

A feladat Lagrange-függvénye, mivel minimum-feladatot vizsgálunk:

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = x^2+y^2+z^2-4z+\lambda_1\cdot(x^2+y^2+z^2-3)+\lambda_2\cdot(z-xy).$$

Ha (x,y,z) megoldása a fenti feladatnak, akkor a Fritz John-féle multiplikátor-tétel szerint $\exists\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátorok, hogy $x,y,z,\lambda_1,\lambda_2$ kielégítik a következő egyenleteket:

$$\begin{cases} 2x+2\lambda_1 x-\lambda_2 y = 0 \\ 2y+2\lambda_1 y-\lambda_2 x = 0 \\ 2z-4+2\lambda_1 z+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1\cdot(x^2+y^2+z^2-3) = 0 \\ \lambda_2\cdot(z-xy) = 0 \end{cases}.$$

1. eset:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 < 3 \\ z < xy \end{cases}, \tag{1.39}$$

ekkor $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, továbbá $x = y = 0$, $z = 2$, de ez ellentmond az első egyenlőtlenségnek.

2. eset:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 3 \\ z < xy \end{cases}, \tag{1.40}$$

ekkor $\lambda_2 = 0$, továbbá $x = y = 0$, $z = -\sqrt{3}$, de $\lambda_1 < 0$, ami nem lehet.

3. eset:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2<3 \\ z=xy \end{cases}, \tag{1.41}$$

ekkor $\lambda_1=0$, továbbá $x=y=z=0$, és $\lambda_2=4$. A célfüggvény értéke: $f_0(0,0,0)=0$.

4. eset:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ z=xy \end{cases}, \tag{1.42}$$

ekkor

$$(x-y)\cdot(2+\lambda_1+2\lambda_2)=0\,.$$

Mivel $2+\lambda_1+2\lambda_2>0$, ezért $x=y$, így $(x^2)^2+2x^2-3=0$, amiből $x=y=\pm1$, $z=1$, továbbá $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$. A célfüggvény értéke: $f_0(1,1,1)=-1$ és $f_0(-1,-1,1)=-1$.

Ezek szerint a minimumfeladat megoldásai

$$(x,y,z)=(1,1,1) \text{ és } (-1,-1,1)\,.$$

1.33. *Feladat* (Kuhn-Tucker-Fritz John-féle multiplikátor-tételre). Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x^2+y^2+y-1\to\min \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases}. \tag{1.43}$$

Megoldás: A fenti tétel jelöléseivel

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= x^2+y^2+y-1\,, \\ f_1(x,y) &= x^2+y^2-1\,, \end{aligned}$$

ezek mindketten konvex függvények, így a minimumfeladatra vonatkozó szükséges feltételek egyben elégséges feltételek is.

A feladat Lagrange-függvénye, mivel minimumfeladatot vizsgálunk:

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda)=x^2+y^2+y-1+\lambda\cdot(x^2+y^2-1)\,.$$

Ha (x,y) megoldása a fenti feladatnak, akkor a Fritz John-féle multiplikátor-tétel szerint $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátor, hogy x,y,λ kielégítik a következő egyenleteket:

$$\begin{cases} 2x+2\lambda x=0 \\ 2y+1+2\lambda y=0 \\ \lambda\cdot(x^2+y^2-1)=0 \end{cases},$$

amikből

$$(x,y)=(0,1)\,,\ \lambda=-\frac{3}{2}\,;\ (x,y)=(0,-1)\,,\ \lambda=-\frac{1}{2}\,;\ (x,y)=\left(0,-\frac{1}{2}\right),\ \lambda=0\,.$$

Mivel egyedül a harmadik esetben igaz az, hogy $\lambda \geq 0$, ezért csak $(x,y) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ lehet a minimumfeladat megoldása, de a tétel szerint valóban az is. Ez látszik a célfüggvény értékeiből is:

$$f(0,1) = 1\,,\ f(0,-1) = -1\,,\ f(0,1/2) = -5/4\,.$$

Egyébként $(0,1)$ a maximumfeladat megoldása.

Gyakorlatok a Fritz John-féle multiplikátor-tételre

1.34. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - x \to \max\ (\min) \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} . \tag{1.44}$$

1.35. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y \to \max\ (\min) \\ x + e^{-x} \leq y \\ 0 \leq x \end{cases} . \tag{1.45}$$

1.36. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x^2 - 2y \to \max\ (\min) \\ x^2 + y^2 \leq 5 \\ 0 \leq x,\ 0 \leq y \end{cases} . \tag{1.46}$$

1.37. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} x^2 + 2y \to \max\ (\min) \\ x^2 + y^2 \leq 5 \\ 0 \leq y \end{cases} . \tag{1.47}$$

1.38. *Gyakorlat.* Oldjuk meg a következő feltételes szélsőérték-feladatot:

$$\begin{cases} \ln x + y + z \to \max\ (\min) \\ x + y + z \leq 1 \\ 1 \leq x \\ x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases} . \tag{1.48}$$

II.

A MULTIPLIKÁTOR-TÉTELEK ESZKÖZEI

2.1. Az implicitfüggvény-tétel

Normált terek direkt szorzata

2.1.1. Állítás. *Legyenek* $(X, \|.\|_X)$ *és* $(Y, \|.\|_Y)$ *ugyanazon* $\mathbb{K}$ *test feletti normált terek. Ismert, hogy az* $X \times Y$ *Descartes-szorzaton értelmezett*

$$(x,y)+(u,v) \doteq (x+u, u+v) \quad \text{és} \quad \lambda\cdot(x,y) \doteq (\lambda\cdot x, \lambda\cdot y)$$

műveletekkel $(X\times Y, +, \cdot)$ *vektortér* $\mathbb{K}$ *felett.*
Értelmezzük ezen a vektortéren a következő $\|.\|_{X\times Y} : X\times Y \to \mathbb{R}$ *„normát": legyen* $\forall\ (x,y)\in X\times Y$ *esetén*

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} \doteq \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}\,.$$

Ekkor a $\|.\|_{X\times Y} : X\times Y \to \mathbb{R}$ *függvény valóban norma.*

Bizonyítás. (1) Először is nyilván $\forall\ (x,y)\in X\times Y$ esetén

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \geq 0\,,$$

továbbá

$$\begin{aligned} & 0 = \|(x,y)\|_{X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \|x\|_X = 0\,,\ \|y\|_Y = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \mathbf{0}_X\,,\ y = \mathbf{0}_Y \ \Leftrightarrow\ (x,y) = \mathbf{0}_{X\times Y}\,. \end{aligned}$$

(2) $\forall\ \lambda\in\mathbb{K}$ esetén $\forall\ (x,y)\in X\times Y$ pontban

$$\begin{aligned} & \|\lambda\cdot(x,y)\|_{X\times Y} = \|(\lambda\cdot x, \lambda\cdot y)\|_{X\times Y} = \max\{\|\lambda\cdot x\|_X, \|\lambda\cdot y\|_Y\} \\ = \quad & \max\{|\lambda|\cdot\|x\|_X, |\lambda|\cdot\|y\|_Y\} = |\lambda|\cdot\max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \\ = \quad & |\lambda|\cdot\|(x,y)\|_{X\times Y}\,. \end{aligned}$$

(3) A háromszög-egyenlőtlenség: $\forall\ (x,y)$ és $(u,v)\in X\times Y$ esetén

$$\begin{aligned} & \|(x,y)+(u,v)\|_{X\times Y} = \|(x+u, y+v)\|_{X\times Y} \\ = \quad & \max\{\|x+u\|_X, \|y+v\|_Y\} \\ \leq \quad & \max\{\|x\|_X + \|u\|_X, \|y\|_Y + \|v\|_Y\} \\ \leq \quad & \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} + \max\{\|u\|_X, \|v\|_Y\} \\ = \quad & \|(x,y)\|_{X\times Y} + \|(u,v)\|_{X\times Y}\,. \end{aligned}$$

□

2.1.2. Definíció. Az $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ ugyanazon $\mathbb{K}$ feletti normált terek *direkt szorzatának* nevezzük az előző állításban definiált $(X \times Y, \|.\|_{X\times Y})$ normált teret, azaz amikor az $(X \times Y, +, \cdot)$ vektortéren azt a $\|.\|_{X\times Y} : X \times Y \to \mathbb{R}$ normát definiáljuk, amelyre $\forall\ (x,y) \in X \times Y$ esetén

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} \doteq \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

2.1.3. Megjegyzés. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az $(X \times Y, \|.\|_{X\times Y})$ szorzat normált tér gömbjei megegyeznek az $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ normált terek ugyanilyen sugarú gömbjeinek a Descartes-szorzatával:

$$B_{X\times Y}((x,y), r) = B_X(x,r) \times B_Y(y,r),$$

speciálisan az egységgömbökre:

$$B_{X\times Y}(\mathbf{0}_{X\times Y}, 1) = B_X(\mathbf{0}_X, 1) \times B_Y(\mathbf{0}_Y, 1).$$

2.1.4. Megjegyzés. 1. A normált terek szorzatának a 2.1.2. definíciójában a szorzatnormát tulajdonképpen az $\mathbb{R}^2$-beli $\|.\|_\infty$ norma segítségével definiáltuk:

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|(\|x\|_X, \|y\|_Y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Ugyanilyen jó lett volna a definícióban bármelyik $\mathbb{R}^2$-beli p-norma is, ahol $p \geq 1$ szám:

$$\|(\|x\|_X, \|y\|_Y)\|_p = \sqrt[p]{\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p}.$$

Azért érdemes mégis a $\|.\|_\infty$ normát választani, ahogy a metrikus tereknél is, mert emellett teljesül, hogy a szorzattérbeli gömbök a kiinduló normált térbeli gömbök szorzatai, ami a bizonyításokat esetenként gördülékennyé teszi.

2. A fentiekhez hasonlóan definiálható n darab normált tér direkt szozata is.

Reguláris leképezések

2.1.5. Definíció. Legyenek $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ normált terek. Egy $A : X \to Y$ leképezést *regulárisnak*, nevezünk, ha

(1) izomorfia, azaz lineáris bijekció az X és Y vektorterek között,

(2) homeomorfia az $(X, \tau_{\|.\|_X})$ és $(Y, \tau_{\|.\|_Y})$ topologikus terek között, azaz az $A : X \to Y$ és $A^{-1} : Y \to X$ függvények folytonosak.

Az $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ normált tereket *izomorfaknak* nevezzük, ha $\exists\ A : X \to Y$ reguláris leképezés.

2.1.6. Jelölés. $\mathrm{Reg}(X,Y) \doteq \{A : X \to Y \ : \ A \text{ reguláris}\} \subseteq L(X,Y)$, valamint $\mathrm{Reg}(X) \doteq \mathrm{Reg}(X,X)$.

2.1.7. Megjegyzés. Az izomorf normált tereket mind algebrai, mind topológiai szempontból azonosnak tekintjük.

2.1.8. Állítás. *Legyen* $(X, \|.\|_X)$ *Banach-tér. Ha egy* $A \in L(X)$ *folytonos lineáris transzformációra* $\|A\|_{L(X)} < 1$*, akkor*

(1) az $I - A \in L(X)$ *folytonos lineáris transzformáció reguláris:* $A \in \mathrm{Reg}(X)$*,*

(2) teljesül, hogy

$$\|(I-A)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{L(X)}}.$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy az $I - A \in L(X)$ folytonos lineáris transzformáció bijektív:

$$\forall\, y \in X \text{ esetén } \exists!\, x \in X \text{ hogy } (I-A)x = y.$$

Ugyanis: Legyen $y \in X$ tetszőleges. Legyen $F \doteq A + y : X \to X$, tehát az az affin leképezés, amelyre $\forall\, x \in X$ esetén

$$F(x) \doteq Ax + y.$$

Az F leképezés kontrakció, ugyanis: $\forall\, x_1, x_2 \in X$ esetén

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \|Ax_1 + y - Ax_2 - y\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\| \|x_1 - x_2\|,$$

és a feltétel szerint $\|A\| \in (0,1)$.

Mivel az $(X, \|.\|_X)$ normált tér teljes (azaz Banach-tér), ezért a Banach-féle fixponttétel (6.5.5. állítás) szerint létezik pontosan egy fixpontja:

$$\exists!\, x \in X \text{ hogy } F(x) = x, \text{ azaz } Ax + y = x, \text{ tehát } (I-A)x = y.$$

Mivel az $A \in L(X)$ lineáris transzformáció folytonos, így az $I - A \in L(X)$ is az, ezért az $I - A$ regularitásához már csak azt kell belátni, hogy az $(I-A)^{-1} : X \to X$ inverz lineáris transzformáció is folytonos. Ehhez azt látjuk be, hogy $\forall\, y \in X$ esetén

$$\|(I-A)^{-1}y\|_X \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{L(X)}} \cdot \|y\|_X.$$

Legyen e célból $y \in X$ tetszőleges, továbbá $x \doteq (I-A)^{-1}y$, amivel $y = (I-A)x$.

Ekkor a norma háromszög-egyenlőtlensége és a folytonos lineáris leképezések szubmultiplikativitása szerint

$$\begin{aligned}\|y\| &= \|(I-A)x\| = \|x-Ax\| \\ &\geq \|x\| - \|Ax\| \\ &\geq \|x\| - \|A\|\|x\| = (1-\|A\|)\cdot\|x\| \\ &= (1-\|A\|)\cdot\|(I-A)^{-1}y\|\,.\end{aligned}$$

Mivel $\|A\|<1$, azaz $1-\|A\|>0$, ezért

$$\|(I-A)^{-1}y\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}\cdot\|y\|\,.$$

Ebből egyrészt adódik, hogy az $(I-A)^{-1}$ inverz lineáris transzformáció is folytonos, tehát az $I-A$ lineáris transzformáció reguláris, másrészt az operátornorma ekvivalens definíciója alapján az állítás (2) része is következik. □

2.1.9. Állítás. *Legyenek* $(X,\|.\|_X)$ *és* $(Y,\|.\|_Y)$ *Banach-terek. Ha egy* $A\in\mathrm{Reg}(X,Y)$ *reguláris leképezésre és egy* $B\in L(X,Y)$ *folytonos lineáris leképezésre teljesül, hogy*

$$\|A-B\|_{L(X,Y)} < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{L(Y,X)}}\,,$$

akkor

(1) a B *leképezés is reguláris:* $B\in\mathrm{Reg}(X,Y)$*;*

(2)

$$\|B^{-1}-A^{-1}\|_{L(Y,X)} \leq \frac{\|A^{-1}\|^2_{L(Y,X)}}{1-\|A^{-1}\|_{L(Y,X)}\cdot\|A-B\|_{L(X,Y)}}\cdot\|A-B\|_{L(X,Y)}\,.$$

Bizonyítás. Tekintsük a B leképezés következő előállítását:

$$B = A-(A-B) = A\cdot[I-A^{-1}\cdot(A-B)]\,.$$

(1) A szubmultiplikativitási tulajdonság és az állítás feltétele szerint

$$\|A^{-1}\cdot(A-B)\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|(A-B)\| < 1\,,$$

ezért az előző 2.1.8. állítás (1) pontja alapján

$$I-A^{-1}\cdot(A-B)\in\mathrm{Reg}(X,X)\,.$$

Mivel A reguláris, ezért a szorzatuk is az, azaz

$$B = A\cdot[I-A^{-1}\cdot(A-B)]\in\mathrm{Reg}(X,Y)\,.$$

(2) A B folytonos lineáris leképezésnek a fenti előállítása, valamint az előző 2.1.8. állítás (2) pontja szerint:

$$\begin{aligned}\|B^{-1}\| &= \|[I - A^{-1}\cdot(A-B)]^{-1}\cdot A^{-1}\| \\ &\leq \|[I - A^{-1}\cdot(A-B)]^{-1}\|\cdot\|A^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{1-\|A^{-1}\cdot(A-B)\|}\cdot\|A^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|A-B\|}.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $B^{-1}-A^{-1} = B^{-1}(B-A)A^{-1}$, a fentiek alapján

$$\begin{aligned}\|B^{-1}-A^{-1}\| &= \|B^{-1}(B-A)A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\|\cdot\|B-A\|\cdot\|A^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|A-B\|}\cdot\|B-A\|\cdot\|A^{-1}\|.\end{aligned}$$

□

2.1.10. Állítás. *Legyenek* $(X,\|.\|_X)$ *és* $(Y,\|.\|_Y)$ *Banach-terek, ekkor*

(1) a $\mathrm{Reg}(X,Y)\subseteq L(X,Y)$ *halmaz nyílt;*

(2) az $\mathrm{inv}:\mathrm{Reg}(X,Y)\to\mathrm{Reg}(Y,X)$,

$$\forall\, A\in\mathrm{Reg}(X,Y) \text{ esetén } \mathrm{inv}(A)\doteq A^{-1},$$

leképezés folytonos.

Bizonyítás. (1) Az előző 2.1.9. állítás (1) értelmében $\forall\, A\in\mathrm{Reg}(X,Y)$ „pont” $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$ sugarú gömbi környezetének minden eleme reguláris, azaz

$$B_{L(X,Y)}\left(A, 1/\|A^{-1}\|\right)\subseteq\mathrm{Reg}(X,Y),$$

ahonnan $A\in\mathrm{int}\,\mathrm{Reg}(X,Y)$. Emiatt $\mathrm{Reg}(X,Y)\subseteq L(X,Y)$ nyílt halmaz.

(2) Legyen $A\in\mathrm{Reg}(X,Y)$ tetszőleges, továbbá legyen (A_n) olyan $\mathrm{Reg}(X,Y)$-beli sorozat, amelyre $A_n\to A$ az $\|.\|_{L(X,Y)}$ normában. Ekkor az $\varepsilon\doteq 1/\|A^{-1}\|$ számhoz $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$, küszöbindex, hogy $\forall\, n>n_0$ esetén $\|A_n-A\|<1/\|A^{-1}\|$. Ezért az előző 2.1.9. állítás (2) pontja szerint

$$\|A_n^{-1}-A^{-1}\|\leq\frac{\|A^{-1}\|^2}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|A-A_n\|}\cdot\|A-A_n\|,$$

amiből $\|A-A_n\|\to 0$ alapján következik, hogy $A_n^{-1}\to A^{-1}$, azaz $\mathrm{inv}(A_n)\to\mathrm{inv}(A)$ az $\|.\|_{L(Y,X)}$ normában. Ez azt jelenti, hogy az $\mathrm{inv}:\mathrm{Reg}(X,Y)\to\mathrm{Reg}(Y,X)$ leképezés folytonos az $A\in\mathrm{Reg}(X,Y)$ „pontban”. □

2.1.11. Állítás. *Legyenek* $(X_1, \|.\|_1)$, $(X_2, \|.\|_2)$, $(Y_1, \|.\|_1)$, $(Y_2, \|.\|_2)$, *normált terek, tekintsük ezek szozatait, az* $(X_1 \times X_2, \|.\|)$ *és az* $(Y_1 \times Y_2, \|.\|)$ *normált tereket. Ha az*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0}_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in L(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2)$$

folytonos lineáris leképezés esetén $A_{11} \in \mathrm{Reg}(X_1, Y_1)$ *és* $A_{22} \in \mathrm{Reg}(X_2, Y_2)$, $A_{21} \in L(X_1, Y_2)$ *pedig tetszőleges lineáris leképezés, valamint* $\mathbf{0}_{12}$ *az* $L(X_2, Y_1)$ *tér nulleleme, akkor* $A \in \mathrm{Reg}(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2)$, *továbbá*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \mathbf{0}_{12} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \in L(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2).$$

Bizonyítás. A mátrixokat mindkét sorrendben összeszorozva egységmátrixot kapunk, például:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0}_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \mathbf{0}_{12} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} A_{11} A_{11}^{-1} - \mathbf{0}_{12} A_{22}^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & A_{11} \mathbf{0}_{12} + \mathbf{0}_{12} A_{22}^{-1} \\ A_{21} A_{11}^{-1} - A_{22}^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} A_{11}^{-1} & A_{21} \mathbf{0}_{12} + A_{22} A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Y_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{Y_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Diffeomorfizmusok

A következőkben legyenek $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ normált terek.

2.1.12. Definíció. Legyenek $D \subseteq X$ és $C \subseteq Y$ nyílt halmazok.

1. Egy $f : D \to C$ függvényt *homeomorfizmusnak* nevezünk, ha $f : D \to C$ bijekció, valamint az $f : D \to C$ függvény és az $f^{-1} : C \to D$ inverzfüggvény is folytonos.

2. Egy $f : D \to C$ függvényt *diffeomorfizmusnak* nevezünk, ha $f : D \to C$ bijekció, valamint az $f : D \to C$ függvény és az $f^{-1} : C \to D$ inverzfüggvény is differenciálható.

3. Egy $f : D \to C$ függvényt C^1*-diffeomorfizmusnak* nevezünk, ha $f : D \to C$ bijekció, valamint az $f : D \to C$ függvény és az $f^{-1} : C \to D$ inverzfüggvény is folytonosan differenciálható (C^1-beli).

A normált terekben való differenciálás során megismert inverzfüggvény deriválásának a globális szabályát az e fogalmakkal adott új keretek között a következőképpen fogalmazzuk át:

2.1.13. Állítás (inverzfüggvény deriválása, globális változat)**.** *Legyenek* $D \subseteq X$ *és* $C \subseteq Y$ *nyílt halmazok.*
Ha egy $f : D \to C$ *függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:*

(1) homeomorfizmus,

(2) differenciálható,

(3) $\forall\, x \in D$ *esetén* $f'(x) \in \mathrm{Reg}(X,Y)$ *reguláris folytonos lineáris leképezés,*

akkor az $f : D \to C$ *függvény diffeomorfizmus.*

2.1.14. Definíció. Egy $f : D \to Y$ $(D \subseteq X)$ függvényt egy $a \in D$ pontban *lokális homeomorfizmusnak*, *lokális diffeomorfizmusnak* illetve *lokális* C^1*-diffeomorfizmusnak* nevezünk, ha $\exists\, U$ nyílt környezete az a pontnak és V nyílt környezete az $f(a)$ pontnak, hogy az $f|_U : U \to V$ függvény rendre homeomorfizmus, diffeomorfizmus illetve C^1-diffeomorfizmus.

A lokális homeomorfizmus definíciójában az $U \in \tau(a)$ és $V \in \tau(f(a))$ környezetek nyíltsága elhagyható:

2.1.15. Állítás. *Legyenek* $U \in \tau(a)$ *és* $V \in \tau(f(a))$ *tetszőleges környezetek. Ha az* $f|_U : U \to V$ *függvény homeomorfizmus, azaz* $f|_U : U \to V$ *bijekció, valamint az* $f|_U : U \to V$ *és az* $(f|_U)^{-1} : V \to U$ *függvény is folytonos, akkor* $\exists\, U_0 \in \tau(a)$ *és* $V_0 \in \tau(f(a))$ *nyílt környezetek, hogy az* $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ *függvény is homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $G \doteq \mathrm{int}\, V$, ekkor $G \in \tau(f(a))$ nyílt környezet, ezért $f^{-1}(G) \cap U$ az U halmazban nyílt, de az X halmazban nem feltétlenül nyílt. Emiatt legyen $U_0 \doteq \mathrm{int}(f^{-1}(G) \cap U)$ és $V_0 \doteq f(U_0)$. Mivel f^{-1} folytonos, ezért a $V_0 \in \tau(f(a))$ nyílt környezet a $G = \mathrm{int}\, V$ halmazban, ezért az X halmazban is. □

Az inverzfüggvénytétel

A következő állítás, az inverzfüggvénytétel hasonlít a 2.1.13. állításhoz abban, hogy egy függvény diffeomorfizmus voltáról szól, ugyan csak lokális diffeomorfizmus voltáról. Ugyanakkor az a nagy különbség a két állítás között, hogy nem kell feltenni az inverzfüggvény létezését, sőt az inverzfüggvénytétel igazi mondanivalója az, hogy elegendő feltételt ad nyílt halmazon értelmezett inverzfüggvény létezésére, ami egyébként differenciálható is lesz.

2.1.16. Állítás (inverzfüggvénytétel, lokális diffeomorfizmus-tétel). *Legyenek* $(X, \|.\|)$ *és* $(Y, \|.\|)$ *Banach terek, továbbá* $D \subseteq X$ *adott halmaz.*

Ha egy $f : D \to Y$ *függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:*

(1) *folytonosan differenciálható egy* $a \in \mathrm{int}\, D$ *pontban,*

(2) $f'(a) \in \mathrm{Reg}(X,Y)$, *azaz reguláris folytonos lineáris leképezés,*

akkor az f *függvény lokális diffeomorfizmus az* a *pontban, ami azt jelenti, hogy:* $\exists\, U \in \tau(a)$ *nyílt környezete az* a *pontnak és* $V \in \tau(f(a))$ *nyílt környezete az* $f(a)$ *pontnak, hogy az* $f|_U : U \to V$ *függvény bijektív, valamint az* $f|_U$ *függvény és az* $(f|_U)^{-1}$ *inverzfüggvény is differenciálható.*

Bizonyítás. Jelölje
$$A \doteq f'(a) \in \mathrm{Reg}(X,Y)\,.$$
Az f függvény folytonosan differenciálható az a pontban, ez azt jelenti, hogy $\exists\, U_0 \in \tau(a)$ környezet, hogy az $f|_{U_0} : U_0 \to Y$ függvény differenciálható, és az $f' : U_0 \to L(X,Y)$ deriváltfüggvény folytonos az a pontban. Emiatt az $\varepsilon \doteq \frac{1}{2\|A\|^{-1}} > 0$ számhoz $\exists\, \delta > 0$, hogy az a pont $U \doteq B(a,\delta) \in \tau(a)$ gömbi környezete $\forall\, x \in U$ pontja esetén
$$\|f'(x) - A\| \leq \frac{1}{2\|A\|^{-1}}\,. \tag{2.1}$$
Tekintsük az
$$F \doteq A^{-1} \circ f|_U = [f'(a)]^{-1} \circ f|_U : U \to X$$
függvényt, ami nyilván differenciálható, és $\forall\, x \in U$ esetén
$$F'(x) = (A^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = A^{-1} \cdot f'(x) \in L(X)\,.$$
Legyen
$$G \doteq \mathscr{R}(F) = A^{-1}(f(U)) \subseteq X\,.$$
Belátjuk, hogy az $F : U \to G$ függvény homeomorfizmus. Mivel szürjektív, továbbá differenciálható, így folytonos is, ezért ehhez elég belátni, hogy

(1) injektív,

(2) az $F^{-1} : G \to U$ inverzfüggvény folytonos.

Legyen $g \doteq I|_U - F : U \to X$ (ahol $I \doteq \mathrm{id}_X$), azaz $\forall\, x \in U$ esetén
$$g(x) \doteq x - F(x) = x - A^{-1}(f(x))\,.$$
Mivel F differenciálható, ezért g is differenciálható, és $\forall\, x \in U$ esetén
$$g'(x) = I - F'(x) = I - A^{-1} \cdot f'(x) = A^{-1}(A - f'(x)) \in L(X)\,,$$
így a (2.1) egyenlőtlenség alapján $\forall\, x \in U$ esetén
$$\|g'(x)\| = \|A^{-1}(A - f'(x))\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - f'(x)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \frac{1}{2\|A\|^{-1}} = \frac{1}{2}\,,$$
azaz $\forall\, x \in U$ esetén
$$\|g'(x)\| \leq \frac{1}{2}\,. \tag{2.2}$$
Legyenek x_1 és $x_2 \in U$ tetszőleges pontok. Mivel $U \subseteq X$ konvex halmaz, ezért $[x_1,x_2] = \mathrm{co}\{x_1,x_2\} \subseteq U$. Mivel ezen g-re fennállnak a Lagrange-egyenlőtlenség feltételei, ezért
$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \sup_{x \in [x_1,x_2]} \|g'(x)\| \cdot \|x_1 - x_2\|\,,$$

ebből pedig (2.2) alapján következik, hogy

$$\|g(x_1)-g(x_2)\| \le \frac{1}{2}\cdot\|x_1-x_2\|, \tag{2.3}$$

ami azt jelenti, hogy a g függvény kontrakció. Mivel a g függvény definíciója szerint $F = I|_U - g : U \to X$, ezért ebből a (2.3) egyenlőtlenség alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\|F(x_1)-F(x_2)\| &= \|(x_1-x_2)-(g(x_1)-g(x_2))\| \\
&\ge \|x_1-x_2\| - \|g(x_1)-g(x_2)\| \\
&\ge \|x_1-x_2\| - \frac{1}{2}\cdot\|x_1-x_2\| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\|x_1-x_2\|.
\end{aligned}$$

Ebből az egyenlőtlenségből két dolog is következik:

egyrészt az $F : U \to G$ függvény injektív, azaz

$$\forall\, x_1, x_2 \in U,\ x_1 \ne x_2 \quad \text{esetén} \quad F(x_1) \ne F(x_2),$$

másrészt $\forall\, y_1$ és $y_2 \in G$ esetén $x_1 \doteq F^{-1}(y_1)$ és $x_2 \doteq F^{-1}(y_2)$ mellett

$$\|y_1-y_2\| \ge \frac{1}{2}\cdot\|F^{-1}(y_1)-F^{-1})(y_2)\|,$$

azaz

$$\|F^{-1}(y_1)-F^{-1}(y_2)\| \le 2\cdot\|y_1-y_2\|,$$

ez pedig azt jelenti, hogy $F^{-1} : G \to U$ függvény Lipschitz-folytonos, így folytonos is.

Belátjuk, hogy a $G = \mathscr{R}(F) \subseteq X$ halmaz nyílt.

Legyen $y_0 \in G$ tetszőleges. Ekkor $\exists!\ x_0 \in U = B(a,\delta)$, hogy $y_0 = F(x_0)$. Legyen $0 < \gamma < \delta - \|x_0 - a\|$ tetszőleges, ekkor $\bar{B}(a,\gamma) \subseteq B(a,\delta) = U$.

Azt fogjuk belátni, hogy $B(y_0, \frac{\gamma}{2}) \subseteq G$, amiből következik, hogy $y_0 \in \operatorname{int} G$, amiből pedig az következik, hogy $G \subseteq X$ nyílt halmaz.

Legyen tehát $y \in B(y_0, \frac{\gamma}{2})$ tetszőleges pont.
Legyen $h : \bar{B}(x_0,\gamma) \to X$ az a függvény, amelyre $\forall\, x \in \bar{B}(x_0,\gamma)$ esetén

$$h(x) \doteq g(x) + y.$$

A γ szám választása miatt $\bar{B}(x_0,\gamma) \subseteq B(a,\delta) = U$, ezért a (2.3) egyenlőtlenség szerint $\forall\, x_1, x_2 \in \bar{B}(x_0,\gamma)$ esetén teljesül, hogy

$$\|h(x_1)-h(x_2)\| = \|g(x_1)+y-g(x_2)-y\| = \|g(x_1)-g(x_2)\| \le \frac{1}{2}\cdot\|x_1-x_2\|,$$

ami azt jelenti, hogy h is kontrakció.

Továbbá $\mathscr{R}(h) \subseteq \bar{B}(x_0,\gamma)$.
Ugyanis $g(x_0) = x_0 - F(x_0) = x_0 - y_0$, emiatt $\forall\, x \in \bar{B}(x_0,\gamma)$ esetén

$$\begin{aligned} h(x) - x_0 &= g(x) + y - x_0 = g(x) - g(x_0) + g(x_0) + y - x_0 \\ &= (g(x) - g(x_0)) + x_0 - y_0 + y - x_0 \\ &= (g(x) - g(x_0)) + y - y_0 \,. \end{aligned}$$

Mivel $\|x - x_0\| \le \gamma$ és $\|y - y_0\| \le \frac{\gamma}{2}$, ezért a most kapottak alapján, újra a (2.3) egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} \|h(x) - x_0\| &\le \|g(x) - g(x_0)\| + \|y - y_0\| \\ &\le \frac{1}{2} \cdot \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \le \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma, \end{aligned}$$

azaz $h(x) \in \bar{B}(x_0,\gamma)$.

A $(\bar{B}(x_0,\gamma), d_{\|.\|}|_{\bar{B}(x_0,\gamma)\times\bar{B}(x_0,\gamma)})$ metrikus tér nyilvánvalóan teljes, hiszen az $(X,\|.\|)$ normált tér (azaz az $(X, d_{\|.\|})$ metrikus tér) teljes, és a $\bar{B}(x_0,\gamma) \subseteq X$ halmaz zárt.

Mindezek szerint a $h : \bar{B}(x_0,\gamma) \to \bar{B}(x_0,\gamma)$ függvény egy teljes metrikus téren értelmezett kontrakció, ezért a Banach-féle fixponttétel szerint létezik pontosan egy fixpontja, azaz

$$\exists!\ z_0 \in \bar{B}(x_0,\gamma),\ \text{hogy } h(z_0) = z_0\,,$$

ami azt jelenti, hogy

$$z_0 = g(z_0) + y = z_0 - F(z_0) + y,\ \text{azaz } F(z_0) = y.$$

Ezek szerint $y \in \mathscr{R}(F) = G$, így $B(y_0, \frac{\gamma}{2}) \subseteq G$, emiatt $y_0 \in \operatorname{int} G$, tehát a $G \subseteq X$ halmaz nyílt.

Jelölje $V \doteq A(G) = [f'(a)](G)$.

Látható, hogy az $f|_U : U \to V$ leképezés homeomorfizmus, ugyanis:
Először is $F = A^{-1} \circ (f|_U) : U \to G$, emiatt $f|_U = A \circ F : U \to V (= A(G))$.
Továbbá $A \in \operatorname{Reg}(X,Y)$ és $G \subseteq X$ nyílt, ezért

$$(f|_U)(U) = (A \circ F)(U) = A(F(U)) = A(G)) = V$$

nyílt halmaz.
Mivel A és F folytonos, ezért $f|_U = A \circ F$ is folytonos. Mivel A és F invertálható, ezért $f|_U = A \circ F$ is invertálható, és

$$(f|_U)^{-1} = F^{-1} \circ A^{-1} : V \to U\,.$$

Mivel pedig A^{-1} és F^{-1} folytonos, ezért $(f|_U)^{-1}$ is folytonos.

Hátravan még annak a bizonyítása, hogy az $(f|_U)^{-1} : V \to U$ inverzfüggvény differenciálható. Ehhez belátjuk, hogy az $f|_U : U \to V$ függvényre teljesülnek inverzfüggvény deriválásának globális változatára vonatkozó 2.1.13. állítás feltételei, mely szerint e függvény

(1) homeomorfizmus,

(2) differenciálható,

(3) $\forall\, x \in U$ esetén $f'(x) \in \mathrm{Reg}(X,Y)$ reguláris folytonos lineáris leképezés.

Az (1) feltételt az előbb láttuk be. A (2) feltétel az U_0 halmaz választásából következik. A (3) feltétel a $\mathrm{Reg}(X,Y)$ halmaz nyíltságából adódik. Ugyanis $\forall\, x \in U$ esetén a (2.1) szerint

$$\|f'(x) - A\| \leq \frac{1}{2\|A\|^{-1}} < \frac{1}{\|A\|^{-1}},$$

és $A \in \mathrm{Reg}(X,Y)$, ezért a 2.1.9. állítás (1) szerint $f'(x) \in \mathrm{Reg}(X,Y)$.

A 2.1.13. állítás alapján pedig az $f|_U : U \to V$ függvény diffeomorfizmus. □

2.1.17. Megjegyzés. 1. A 2.1.16. állítás (2) feltételében nem kellett feltenni, miszerint az a pont egy U_0 környezetében teljesül, hogy $\forall\, x \in U_0$ esetén $f'(x) \in \mathrm{Reg}(X,Y)$, mert a bizonyításban láttuk, hogy ez következik a $\mathrm{Reg}(X,Y)$ halmaz nyíltságából.

2. A 2.1.16. állítás (1) feltételéből az f' deriváltfüggvény a pontbeli folytonossága nem hagyható el, mint ahogy ezt a következő példában látni fogjuk:

2.1.18. Példa. Tekintsük azt az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) \doteq \begin{cases} x + 2x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases},$$

ekkor f differenciálható $\mathbb{R}$-en, és

$$f'(x) \doteq \begin{cases} 1 + 4x \cdot \sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Az f függvényre a 0 pontban teljesülnek a 2.1.16. állítás feltételei annak a kivételével, hogy az f' deriváltfüggvény 0 pontban folytonos. Mivel az f' deriváltfüggvény 0 pont minden környezetében végtelen sokszor tűnik el, ezért az f függvény a 0 pont egy környezetében sem invertálható.

2.1.19. Megjegyzés. A 2.1.16. állítás lokális jellegű. Abból, hogy egy $f : D \to Y$, $(D \subseteq X)$ függvényre egy $G \subseteq X$ halmaz minden pontjában fennállnak a 2.1.16. állítás feltételei, még nem következik, hogy az $f|_G$ függvény invertálható:

2.1.20. Példa. Legyen $X \doteq \mathbb{R}^2$ és $G \doteq \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}$. Tekintsük azt az $f : G \to \mathbb{R}^2$ függvényt, amelyre $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$f(x,y) \doteq (x \cdot \cos y, x \cdot \sin y).$$

Erre a függvényre $\forall\, (x,y) \in G$ pontban teljesülnek a 2.1.16. állítás feltételei, ugyanakkor globálisan nem injektív.

A beágyazási tétel és az implicitfüggvény-tétel

Arra a kérdésre keressük a választ, hogy ha az x és y (vektor)változók közötti kapcsolatot adott a és b pontok mellett egy $(x,y) \mapsto f(x,y)$ „kétváltozós” (két vektorváltozós) függvénnyel kifejezett

$$f(x,y) = f(a,b)$$

egyenlet adja meg, akkor az y változó tekinthető-e az x változó „implicit módon” megadott függvényének?
Másképpen fogalmazva, egy $f : X \times Y \to Z$ függvénynek egy (a,b) ponthoz tartozó

$$f^{-1}(f(a,b)) = \{(x,y) \in X \times Y \ : \ f(x,y) = f(a,b)\} \subset X \times Y$$

szintvonala függvényt alkot-e , azaz van-e olyan g függvény, amelyre fennáll az

$$f^{-1}(f(a,b)) = g$$

egyenlőség?

Az implicitfüggvény-tétel bizonyításának az első része önmaga is fontos eredmény, aminek számos következménye van, ezért külön megfogalmazzuk.

2.1.21. Állítás (beágyazási tétel). *Legyenek $(X,\|.\|)$, $(Y,\|.\|)$ és $(Z,\|.\|)$ Banach terek, $D \subseteq X \times Y$ adott halmaz.*

Ha egy $f : D \to Z$ függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:

(1) folytonosan differenciálható egy $(a,b) \in \operatorname{int} D \subseteq X \times Y$ pontban,

(2) $\partial_2 f(a,b) \in \operatorname{Reg}(Y,Z)$,

akkor $\exists\ F : D \to X \times Z$ függvény, amely lokális diffeomorfizmus az (a,b) pontban, valamint

$$f = Q_2 \circ F\,,$$

ahol $Q_2 \in L(X \times Z, Z)$ az $X \times Z$ térnek a Z térre való projekciója.

Bizonyítás. Legyen $P_1 \in L(X \times Y, X)$, az $X \times Y$ térnek az X térre való projekciója, azaz amelyre $\forall\ (x,y) \in X \times Y$ esetén

$$P_1(x,y) = x\,.$$

Mivel $P_1 \in L(X \times Y, X)$ folytonos lineáris leképezés, ezért $\forall\ (x,y) \in X \times Y$ pontban differenciálható, sőt folytonosan differenciálható, és mátrixos írásmóddal

$$P_1'(x,y) = [\partial_1 P_1(x,y), \partial_2 P_1(x,y)] = [I_X, \mathbf{0}_{L(X,Y)}]\,.$$

Legyen

$$F \doteq \begin{bmatrix} P_1 \\ f \end{bmatrix} : X \times Y \to X \times Z\,,$$

tehát az a függvény, amelyre $\forall\ (x,y) \in X \times Y$ esetén

$$F(x,y) = (x, f(x,y)) .$$

Nyilván $\forall\ (x,y) \in D$ esetén

$$f(x,y) = Q_2(x, f(x,y)) = Q_2(F(x,y)) ,$$

azaz

$$f = Q_2 \circ F .$$

Mivel a P_1 projekció folytonosan differenciálható, valamint a feltétel szerint az $f : D \to Z$ függvény folytonosan differenciálható az (a,b) pontban, ezért az F függvény is folytonosan differenciálható az (a,b) pontban, továbbá

$$\begin{aligned} F'(a,b) &= \begin{bmatrix} P_1'(a,b) \\ f'(a,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 P_1(a,b) & \partial_2 P_1(a,b) \\ \partial_1 f(a,b) & \partial_2 f(a,b) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_X & \mathbf{0}_{L(X,Y)} \\ \partial_1 f(a,b) & \partial_2 f(a,b) \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Mivel pedig $I_X \in \mathrm{Reg}(X,X)$ és a feltétel szerint $\partial_2 f(a,b) \in \mathrm{Reg}(Y,Z)$, ezért a 2.1.11. állítás szerint $F'(a,b) \in \mathrm{Reg}(X \times Y, X \times Z)$. Ezek alapján az $F : X \times Y \to X \times Z$ függvényre az (a,b) pontban fennállnak az inverzfüggvénytétel (2.1.16. állítás) feltételei, ezért lokális diffeomorfizmus az (a,b) pontban. □

2.1.22. Állítás (implicitfüggvény-tétel)**.** *Legyenek $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ és $(Z, \|.\|)$ Banach terek, $D \subseteq X \times Y$ adott halmaz.*

Ha egy $f : D \to Z$ függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:

(1) folytonosan differenciálható egy $(a,b) \in \mathrm{int}\, D \subseteq X \times Y$ pontban,

(2) $\partial_2 f(a,b) \in \mathrm{Reg}(Y,Z)$, azaz reguláris folytonos lineáris leképezés,

akkor az $a \in X$ pontnak $\exists\ U \in \tau(a)$ környezete, és $\exists!\ g : U \to Y$ függvény, hogy

(a) $\forall\ x \in U$ esetén $f(x, g(x)) = f(a,b)$,

(b) az $(a,b) \in D$ pontnak $\exists\ G \in \tau(a,b)$ környezete, hogy

$$G \cap f^{-1}(f(a,b)) = g ,$$

(c) $g(a) = b$,

(d) a $g : U \to Y$ függvény differenciálható, és $\forall\ x \in U$ esetén

$$g'(x) = -[\partial_2 f(x, g(x))]^{-1} \cdot \partial_1 f(x, g(x)) .$$

Bizonyítás. Az állítás feltételei azonosak a beágyazási tétel (2.1.21. állítás) feltételeivel. Tekintsük annak a bizonyításában bevezetett

$$F \doteq \begin{bmatrix} P_1 \\ f \end{bmatrix} : X \times Y \to X \times Z$$

függvényt, azaz amelyre $\forall\ (x,y) \in X \times Y$ esetén

$$F(x,y) = (x, f(x,y))\,.$$

Láttuk, hogy F lokális diffeomorfizmus az (a,b) pontban, ami azt jelenti, hogy az $(a,b) \in D \subseteq X \times Y$ pontnak $\exists\ G \in \tau(a,b)$ nyílt környezete valamint az $F(a,b) = (a, f(a,b)) \in X \times Z$ pontnak $\exists\ H \in \tau(a, f(a,b))$ nyílt környezete, hogy

$$F|_G : G \to H$$

diffeomorfizmus. Feltehető, hogy $H = U \times W$, ahol $U \in \tau(a)$ az $a \in X$ pont nyílt környezete, $W \in \tau(f(a,b))$ pedig az $f(a,b) \in Z$ pont nyílt környezete.
Ekkor

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} p \\ h \end{bmatrix} : U \times W \to X \times Y\,,$$

alakú, ahol $p : U \times W \to X$ és $h : U \times W \to Y$.
Ezek szerint $\forall\ (x,z) \in H = U \times W$ esetén

$$\begin{aligned} (x,z) &= F(F^{-1}(x,z)) = F(p(x,z), h(x,z)) \\ &= (p(x,z), f(p(x,z), h(x,z)))\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

így $x = p(x,z)$, azaz $p = Q_1 \in L(X \times Z, X)$ az $X \times Z$ térnek az X térre való projekciója.
Emiatt egyrészt

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ h \end{bmatrix} : U \times W \to X \times Y$$

alakú, azaz $\forall\ (x,z) \in H = U \times W \subseteq X \times Z$ esetén

$$F^{-1}(x,z) = (x, h(x,z))\,.$$

Másrészt (2.4) úgy írható, hogy $\forall\ (x,z) \in U \times W$ esetén

$$(x,z) = (x, f(x, h(x,z)))\,, \qquad \text{amiből} \qquad f(x, h(x,z)) = z\,,$$

speciálisan a $z = f(a,b) \in W$ pontra $\forall\ x \in U$ esetén

$$f(x, h(x, f(a,b))) = f(a,b)\,. \tag{2.5}$$

Legyen $g \doteq h(., f(a,b)) : U \to Y$, azaz az a függvény, amelyre $\forall\ x \in U$ esetén

$$g(x) = h(x, f(a,b))\,.$$

Gondoljuk meg ezek után a g függvény tulajdonságait.

Először is (2.5) szerint $\forall\, x \in U$ esetén

$$f(x,g(x)) = f(a,b)\,,$$

ezzel beláttuk a g függvény (a) tulajdonságát. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy $\forall\, x \in U$ esetén

$$(x,g(x)) \in f^{-1}(f(a,b))\,, \quad \text{azaz} \quad g \subseteq f^{-1}(f(a,b))\,.$$

Ugyanakkor az F és az F^{-1} leképezések másik sorrendű inverzkapcsolata szerint $\forall\, (x,y) \in G$ esetén

$$\begin{aligned}(x,y) &= F^{-1}(F(x,y)) = F^{-1}(x,f(x,y))\\ &= (x,h(x,f(x,y)))\,,\end{aligned}$$

így

$$h(x,f(x,y)) = y\,.$$

Emiatt $\forall\, (x,y) \in G$ pontra, amelyre $f(x,y) = f(a,b)$, fennáll, hogy

$$g(x) = h(x,f(a,b)) = h(x,f(x,y)) = y\,, \tag{2.6}$$

másképpen fogalmazva $\forall\, (x,y) \in G \cap f^{-1}(f(a,b))$ esetén $(x,y) \in g$, ami pedig azt jelenti, hogy

$$G \cap f^{-1}(f(a,b)) \subseteq g\,.$$

Ebből és a g függvény (a) tulajdonságából következik a g függvény (b) tulajdonsága:

$$G \cap f^{-1}(f(a,b)) = g\,.$$

Speciálisan ebből a g függvény egyértelműsége is adódik.

Továbbá (2.6) az $(x,y) = (a,b)$ pontra a

$$g(a) = h(a,f(a,b)) = b$$

egyenlőséget adja, amivel beláttuk a g függvény (c) tulajdonságát.

Hátravan még a g függvény (d) tulajdonságának a bizonyítása.

Mivel az F^{-1} függvény differenciálható, ezért a h függvény is differenciálható, emiatt viszont a g függvény is az. Ezek szerint $f \circ (I,g)$ differenciálható függvények kompozíciója, így önmaga is diffrenciálható.
A már igazolt (a) szerint $\forall\, x \in U$ esetén

$$(f \circ (I,g))(x) = f(x,g(x)) = f(a,b)\,,$$

tehát az $f \circ (I,g)$ függvény konstans, ezek szerint a deriváltja minden pontban $\mathbf{0} \in L(X,Z)$. Ezek szerint $\forall\, x \in U$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= (f\circ(I,g))'(x) = f'(x,g(x))\cdot(I,g)'(x)\\
&= [\partial_1 f(x,g(x)),\partial_2 f(x,g(x))]\cdot\begin{bmatrix} I'(x)\\ g'(x)\end{bmatrix}\\
&= [\partial_1 f(x,g(x)),\partial_2 f(x,g(x))]\cdot\begin{bmatrix} I\\ g'(x)\end{bmatrix}\\
&= \partial_1 f(x,g(x))+\partial_2 f(x,g(x))\cdot g'(x)\,,
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\partial_1 f(x,g(x))+\partial_2 f(x,g(x))\cdot g'(x) = \mathbf{0}\,. \tag{2.7}$$

Mivel $\partial_2 f(a,b)\in \mathrm{Reg}(Y,Z)$, és a $\mathrm{Reg}(Y,Z)$ halmaz nyílt, ezért az $(a,b)=(a,g(a))$ pontnak van olyan környezete, hogy $\forall\ (x,y)$ pontra ebből a környezetből $\partial_2 f(x,y)\in \mathrm{Reg}(Y,Z)$. Mivel a g függvény folytonos, ezért az a pontnak van olyan környezete – feltehető, hogy az U környezetet már eleve ennek megfelelően választottuk –, hogy $\forall\, x\in U$ esetén

$$\partial_2 f(x,g(x))\in \mathrm{Reg}(Y,Z)\,.$$

Ezek szerint az (2.7) egyenlőség alapján $\forall\, x\in U$ esetén

$$g'(x) = -[\partial_2 f(x,g(x))]^{-1}\cdot\partial_1 f(x,g(x))\,. \qquad \square$$

2.1.23. Megjegyzés. A tétel fő mondanivalója az, hogy ha az x és y (vektor)változók közötti kapcsolatot adott a és b pontok mellett egy $(x,y)\mapsto f(x,y)$ „kétváltozós” (két vektorváltozós) függvénnyel kifejezett

$$f(x,y)=f(a,b)$$

egyenlet adja meg, akkor a fenti feltételek teljesülése mellett az (a,b) egy G környezetében az y változó az x változó függvénye:

$$\forall\ (x,y)\in G \quad \text{esetén} \quad y=g(x)\,.$$

Ezek szerint ebben az esetben az $f(x,y)=f(a,b)$ egyenlet az x és y közötti függvénykapcsolatot *implicit* módon adja meg.

A g függvényt az f függvény és az (a,b) pont által meghatározott *implicit függvénynek* nevezzük.

A fentieket másképpen is megfogalmazhatjuk: Egy f függvénynek egy (a,b) ponthoz tartozó

$$f^{-1}(f(a,b)) = \{(x,y)\in X\times Y\ :\ f(x,y)=f(a,b)\}\subset X\times Y$$

szintvonala (ami egy reláció) a tétel értelmében lokálisan egy függvény, ami azt jelenti, hogy $\exists\ G$ környeze az (a,b) pontnak, hogy

$$G\cap f^{-1}(f(a,b)) = g\,,$$

ahol g az $a\in X$ egy környezetében értelmezett függvény.

Az viszont nem igaz, hogy az egész $f^{-1}(f(a,b)) \subseteq X \times Y$ szintvonal függvény, csak egy környezetben az.

A tétel csak azt állítja, hogy van ilyen g függvény, de nem adja meg *explicit* módon az $y = g(x)$ összefüggést.

A tételből az is ismert azonban, hogy a g függvény differenciálható is, sőt a g deriváltja és f parciális deriváltjai között egy jólmeghatározott összefüggés áll fenn:

$$g'(x) = -[\partial_2 f(x,g(x))]^{-1} \cdot \partial_1 f(x,g(x))\,.$$

Ebből az összefüggésből esetenként a g függvény explicit módon is meghatározhazó.

Ugyanakkor ebből az összefüggésből az a pontban $g'(a)$ explicite is ismert, ugyanis $g(a) = b$ alapján

$$g'(a) = -[\partial_2 f(a,b)]^{-1} \cdot \partial_1 f(a,b)\,.$$

2.1.24. Megjegyzés. A g függvény (b) tulajdonsága egy kicsit akkurátusabban is megfogalmazható, miszerint feltehető, hogy az (a,b) pont G környezete $U \times V$ szorzat alakú, nevezetesen:

az $a \in X$ pontnak $\exists\, U \in \tau(a)$ környezete, és a $b \in Y$ pontnak $\exists\, V \in \tau(b)$ környezete, valamint $\exists!\; g : U \to V$ függvény, hogy

$$(U \times V) \cap f^{-1}(f(a,b)) = g\,.$$

Ugyanis: Az (a,b) pont G környezetéhez az $a \in X$ pontnak $\exists\, U_1 \in \tau(a)$ környezete, és a $b \in Y$ pontnak $\exists\, V \in \tau(b)$ környezete, hogy

$$U_1 \times V \subseteq G\,.$$

Láttuk, hogy a $g : U \to Y$ függvényre teljesül, hogy $G \cap f^{-1}(f(a,b)) = g$, ezért $\forall\, x \in U_1$ esetén $(x,g(x)) \in G$. De lehet olyan $x \in U_1$, amelyre $(x,g(x)) \notin U_1 \times V$, azaz $g(x) \notin V$. Mivel a g függvény differenciálható, így folytonos, ezért az $a \in X$ pontnak $\exists\, U_2 \in \tau(a)$ környezete, hogy $g(U_2) \subseteq V$, így $\forall\, x \in U_2$ esetén $(x,g(x)) \in U_2 \times V$. Ezek szerint a $g|_{U_2} : U_2 \to V$ függvényre teljesül, hogy

$$(U_2 \times V) \cap f^{-1}(f(a,b)) = g|_{U_2}\,.$$

2.2. Az érintőhalmaz és a Ljusztyernyik-tétel

Az érintőhalmaz

A differenciálható függvények gráfjához húzott érintő általánosítása az érintőhalmaz fogalma.

Ebben a szakaszban legyen $(X, \|.\|)$ normált tér.

2.2.1. Definíció. 1. Egy $r : \mathbb{R} \to X$ függvényt a 0 pontban kisrendűnek nevezünk, ha

(1) $r(0) = \mathbf{0}_X$, és

(2) $\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} r(\lambda) = \mathbf{0}_X$.

Mivel az r függvénynek csak a 0 pont egy környezetében való viselkedése érdekes, ezért elég, ha $r : (-\delta, \delta) \to X$, ahol $\delta > 0$.

2. Egy $r : \mathbb{R}_+ \to X$ függvényt a 0 pontban jobbról kisrendűnek nevezünk, ha

(1) $r(0) = \mathbf{0}_X$, és

(2) $\lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{\lambda} r(\lambda) = \mathbf{0}_X$.

Mivel az r függvénynek csak a 0 pont egy jobboldali környezetében való viselkedése érdekes, ezért elég, ha $r : [0, \delta) \to X$, ahol $\delta > 0$.

2.2.2. Definíció (érintővektor, érintőhalmaz)**.** Egy $v \in X$ vektort egy $A \subseteq X$ halmaz $x \in A$ pontjához tartozó *érintővektorának* nevezzük, ha $\exists\ r : \mathbb{R}_+ \to X$ a 0 pontban jobbról kisrendű függvény, hogy

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ esetén } x + \lambda v + r(\lambda) \in A\,.$$

Mivel az r függvénynek csak a 0 pont egy jobboldali környezetében való viselkedése érdekes, ez ekvivalens a következővel:

Egy $v \in X$ vektor egy $A \subseteq X$ halmaz $x \in A$ pontjához tartozó *érintővektora*, ha $\exists\ \delta > 0$ szám és $\exists\ r : [0, \delta) \to X$ a 0 pontban jobbról kisrendű függvény, hogy

$$\forall\, \lambda \in [0, \delta) \text{ esetén } x + \lambda v + r(\lambda) \in A\,.$$

Egy $A \subseteq X$ halmaz $x \in A$ pontjához tartozó *érintőhalmazának* nevezzük az érintővektorainak a halmazát:

$$T_A(x) \doteq \{v \in X\ : \exists\ r : \mathbb{R}_+ \to X,\ \text{j.k.r.},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+,\ x + \lambda v + r(\lambda) \in A\}\,.$$

Ha egy érintőhalmazról ismert, hogy altér, akkor az érintővektor definíciója a következőképpen alakul:

2.2.3. Állítás (ekvivalens definíció speciális esetben)**.** *Tegyük fel, hogy egy $A \subseteq X$ halmaz egy $x \in A$ pontjához tartozó $T_A(x) \subseteq X$ érintőhalmaza altér. Ezesetben egy $v \in X$ vektor pontosan akkor érintővektor, ha $\exists\ r : \mathbb{R} \to X$ a 0 pontban kisrendű függvény, amelyre*

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \ \textit{esetén}\ x + \lambda v + r(\lambda) \in A\,.$$

Mivel az r függvénynek csak a 0 pont egy környezetében való viselkedése érdekes, ez ekvivalens a következővel:

$\exists\ \delta > 0$ *szám és* $\exists\ r : (-\delta, \delta) \to X$ *a* 0 *pontban kisrendű függvény, amelyre*

$$\forall\ \lambda \in (-\delta, \delta) \ \text{ esetén } \ x + \lambda v + r(\lambda) \in A\,.$$

Bizonyítás. Az elégségesség nyilvánvaló. Szükségesség: Legyen $v \in T_A(x)$ tetszőleges, ami azt jelenti, hogy $\exists\ r_1 : \mathbb{R}_+ \to X$ a 0 pontban jobbról kisrendű függvény,

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+ \ \text{ esetén } \ x + \lambda v + r(\lambda) \in A\,.$$

Mivel a $T_A(x) \subseteq X$ érintőhalmaz most altér, ezért $-v \in T_A(x)$ is teljesül, ami azt jelenti, hogy $\exists\ r_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ a 0 pontban jobbról kisrendű függvény, azaz amelyre $r_2(0) = \mathbf{0}$, és $\lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{\lambda} r_2(\lambda) = \mathbf{0}_X$, hogy

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+ \ \text{ esetén } \ x + \lambda(-v) + r_2(\lambda) = x + (-\lambda)v + r_2(\lambda) \in A\,.$$

Legyen $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ a következő függvény:

$$r(\lambda) \doteq \begin{cases} r_1(\lambda) & : \lambda \geq 0 \\ r_2(-\lambda) & : \lambda < 0 \end{cases}$$

Ekkor a fentiek szerint r a 0 pontban kisrendű függvény, és $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_0 + \lambda v + r(\lambda) \in A\,. \qquad \square$$

Az érintőhalmaz a deriválható függvény érintőjének az általánosítása:

2.2.4. Állítás. *Legyenek* $(X, \|.\|)$ *és* $(Y, \|.\|)$ *normált terek. Ha* $f : X \to Y$ *egy* $a \in X$ *pontban differenciálható függvény, akkor a gráfja* $(a, f(a))$ *pontjához tartozó érintőhalmaza megegyezik az* $(a, f(a))$ *pontbeli érintőjének az origóba való eltoltjával (ami az* $f'(a)$ *leképezés gráfja):*

$$T_{\operatorname{graph} f}(a, f(a)) = \{(u, [f'(a)]u) \ : \ u \in X\}\,.$$

Bizonyítás. Az f függvény $(a, f(a))$ pontjához tartozó érintőjének a gráfja:

$$(a, f(a)) + \{(u, [f'(a)]u) \ : \ u \in X\}\,,$$

aminek az origóba való eltoltja

$$\{(u, [f'(a)]u) \ : \ u \in X\}\,,$$

továbbá teljesül, hogy

$$f(a+u) = f(a) + [f'(a)]u + r(u)\,,$$

ahol az r függvény a $\mathbf{0}_X$ pontban kisrendű.

Az f függvény $(a, f(a))$ pontjához tartozó $T_{\operatorname{graph} f}(a, f(a))$ érintőhalmaza pedig olyan (u, v) pontokból áll, amelyekhez $\exists\ r_0 = (r_1, r_2) : \mathbb{R}_+ \to X \times Y$ a 0 pontban jobbról kisrendű függvény, hogy $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$(a, f(a)) + \lambda(u, v) + (r_1, r_2)(\lambda) \in \operatorname{graph} f\,,$$

ami pedig azt jelenti, hogy

$$f(a + \lambda u + r_1(\lambda)) = f(a) + \lambda v + r_2(\lambda)\,.$$

Legyen (u, v) az érintő origóba való eltoltjának a pontja. Legyen $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén $r_1(\lambda) \doteq \mathbf{0}_Y$, valamint $r_2(\lambda) \doteq r(\lambda u)$, ekkor r_1 és r_2 a 0 pontban jobbról kisrendű függvények, továbbá $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned} f(a + \lambda u + r_1(\lambda)) &= f(a + \lambda u) = f(a) + [f'(a)](\lambda u) + r(\lambda u) \\ &= f(a) + \lambda v + r_2(\lambda)\,, \end{aligned}$$

ami viszont azt jelenti, hogy (u, v) az érintőhalmaznak is pontja.

Megfordítva, tegyük fel, hogy (u, v) az érintőhalmaznak a pontja. Ekkor az iménti jellemzés miatt (az f függvény a-beli differenciálhatóságára vonatkozó fentebbi egyenlőséget is használva) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned} f(a) + \lambda v + r_2(\lambda) &= f(a + \lambda u + r_1(\lambda)) \\ &= f(a) + [f'(a)](\lambda u + r_1(\lambda)) + r(\lambda u + r_1(\lambda)) \\ &= f(a) + \lambda [f'(a)]u + [f'(a)]r_1(\lambda)) + r(\lambda u + r_1(\lambda))\,, \end{aligned}$$

azaz $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$v = [f'(a)]u + [f'(a)]\left(\frac{r_1(\lambda)}{\lambda}\right) + \frac{r(\lambda u + r_1(\lambda))}{\lambda} - \frac{r_2(\lambda)}{\lambda}\,.$$

Mivel az $r(\lambda u + r_1(\lambda))$ kifejezés a láncszabály értelmében a $\lambda = 0$ pontban jobbról kisrendű, ezért innen $\lambda \to 0+$ határátmenettel kapjuk, hogy $v = [f'(a)]u$, ami viszont azt jelenti, hogy (u, v) az érintőhalmaznak is pontja. $\square$

2.2.5. Állítás. *Egy $A \subseteq X$ halmaz $x \in A$ pontjához tartozó $T_A(x)$ érintőhalmaza a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

(1) ha $x \in \operatorname{int} A$, akkor $T_A(x) = X$;

(2) a $T_A(x)$ halmaz (nem feltétlenül konvex) kúp:
ha $v \in T_A(x)$, akkor $\forall\ \alpha \geq 0$ esetén $\alpha v \in T_A(x)$.

(3) ha $A \subseteq X$ konvex halmaz, akkor $T_A(x)$ halmaz konvex kúp.

Bizonyítás. (1) és (2) a definícióból közvetlenül következnek.

(3) Belátjuk, hogy $T_A(x)$ konvex halmaz, amiből (3) alapján következik, hogy konvex kúp.
Legyenek $u, v \in T_A(x)$, azaz $\exists\ r_1, r_2 : \mathbb{R}_+ \to X$ a 0 pontban jobbról kisrendű függvények, hogy $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$x + \lambda u + r_1(\lambda) \in A\,, \text{ és } x + \lambda v + r_2(\lambda) \in A\,.$$

Legyen $\alpha \in [0,1]$ tetszőleges, valamint $r \doteq \alpha r_1 + (1-\alpha) r_2 : \mathbb{R}_+ \to X$, ez a függvény is jobbról kisrendű a 0 pontban. Mivel az A halmaz konvex, ezért $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$x + \lambda(\alpha u + (1-\alpha)v) + r(\lambda) = \alpha(x + \lambda u + r_1(\lambda)) + (1-\alpha)(x + \lambda v + r_2(\lambda)) \in A\,. \ \square$$

Az érintőhalmaz távolságfüggvénnyel való jellemzése

2.2.6. Definíció. Legyen $A \subseteq X$ egy adott halmaz. Egy $x \in X$ pontnak a távolsága az A halmaztól:

$$d_A(x) \doteq \inf_{a \in A} \|x - a\|\,.$$

Az A halmaztól való távolság függvénye: $d_A : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d_A(x)$.

2.2.7. Megjegyzés. A definícióból közvetlenül következnek az alábbi tulajdonságok.

1. $d_A(x) = d_{\mathrm{cl}A}(x)$
2. $x \in \mathrm{cl}A \iff d_A(x) = 0$, ezek szerint
   ha $A \subseteq X$ zárt halmaz, akkor $x \in A \iff d_A(x) = 0$.

2.2.8. Állítás. *A $d_A : X \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény Lipschitz-folytonos $\alpha = 1$ állandóval:*

$$\forall\ x,\ y \in X \ \textit{ esetén } \ |d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|\,.$$

Bizonyítás. Legyen $x,\ y \in X$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor $\exists\ a \in A$, hogy $\|y - a\| < d_A(y) + \varepsilon$, ezért

$$d_A(x) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\| < \|x - y\| + d_A(y) + \varepsilon\,,$$

amiből $\varepsilon > 0$ tetszőleges volta miatt adódik, hogy

$$d_A(x) - d_A(y) \leq \|x - y\|\,.$$

Az x és y szerepét felcserélve adódik az állítás. $\square$

2.2.9. Állítás. *Ha $A \subseteq X$ konvex halmaz, akkor a $d_A : X \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény konvex.*

Bizonyítás. Legyen $x,\ y \in X$ és $\lambda \in [0,1]$ tetszőleges. Ekkor $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén

$$\exists\ a \in A\,,\ \text{hogy}\ \|x-a\| < d_A(x)+\varepsilon\,,\ \text{és}\ \exists\ b \in A\,,\ \text{hogy}\ \|y-b\| < d_A(y)+\varepsilon\,.$$

Mivel $\lambda a + (1-\lambda)b \in A$, ezért

$$\begin{aligned}
\lambda d_A(x) + (1-\lambda)d_A(y) &> \lambda\|x-a\| + (1-\lambda)\|y-b\| - (\lambda + (1-\lambda))\varepsilon \\
&\geq \|\lambda x - \lambda a\| + \|(1-\lambda)y - (1-\lambda)b\| - \varepsilon \\
&\geq \|(\lambda x + (1-\lambda)y) - (\lambda a + (1-\lambda)b\| - \varepsilon \\
&\geq d_A(\lambda x + (1-\lambda)y) - \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Mivel ez $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén végigvihető, ezért

$$\lambda d_A(x) + (1-\lambda)d_A(y) \geq d_A(\lambda x + (1-\lambda)y)\,. \qquad \square$$

2.2.10. Állítás (az érintőhalmaz ekvivalens definíciója)**.** *Egy $A \subseteq X$ halmaz $x \in A$ pontjához tartozó érintőhalmaza megegyezik a következővel:*

$$T_A(x) = \{v \in X\ :\ d_v^+ d_A(x) = 0\}\,,$$

ahol $d_v^+ d_A(x)$ a $d_A(x)$ távolságfüggvény x pontbeli jobboldali v iránymenti deriváltját jelöli.

Bizonyítás. Szükségesség: Legyen $v \in T_A(x)$ tetszőleges érintővektor, azaz $\exists\ r : \mathbb{R}_+ \to X$, $\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} r(\lambda) = \mathbf{0}_X$ függvény, hogy $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$x + \lambda v + r(\lambda) \in A\,,\ \ \text{így}\ \ d_A(x+\lambda v) \leq \|r(\lambda)\|\,,$$

emiatt

$$0 \leq \lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} d_A(x+\lambda v) \leq \lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda}\|r(\lambda)\| = 0\,,$$

ezért

$$d_v^+ d_A(x) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda}(d_A(x+\lambda v) - d_A(x)) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} d_A(x+\lambda v) = 0\,.$$

Elégségesség: Legyen a $v \in X$ vektor olyan, amelyre teljesül, hogy

$$d_v^+ d_A(x) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} d_A(x+\lambda v) = 0\,.$$

A d_A távolságfüggvény definíciója szerint $\forall\ \lambda > 0$ esetén $\exists\ u_\lambda \in A$, hogy

$$\|x + \lambda v - u_\lambda\| < d_A(x+\lambda v) + \lambda^2\,.$$

Legyen $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\forall\ \lambda > 0$ esetén

$$r(\lambda) \doteq -(x + \lambda v - u_\lambda)\,,$$

ekkor egyrészt nyilván

$$x + \lambda v + r(\lambda) = x + \lambda v - (x + \lambda v - u_\lambda) = u_\lambda \in A,$$

másrészt az r függvény a 0 pontban jobbról kisrendű, ugyanis $r(0) = \mathbf{0}_X$, továbbá a fentiek szerint

$$0 \leq \lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{\lambda} \|r(\lambda)\| = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{\lambda} \|x + \lambda v - u_\lambda\| \leq \lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{\lambda} (d_A(x + \lambda v) + \lambda^2) = 0. \quad \square$$

2.2.11. Állítás. *Egy $A \subseteq X$ halmaz $x \in A$ pontjához tartozó $T_A(x)$ érintőhalmaza megegyezik a lezárásának az érintőhalmazával:*

$$T_A(x) = T_{\mathrm{cl}A}(x).$$

Bizonyítás. Az érintőhalmaz ekvivalens definíciója alapján abból következik, hogy egy halmaztól vett távolságfüggvény megegyezik a halmaz lezárásától vett távolságfüggvénnyel: $d_A = d_{\mathrm{cl}A}$. □

Leképezés szinthalmazának az érintőhalmaza

Az egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat megoldásához szükséges egy függvény szintvonala érintőhalmazának a jellemzése, amelyet a Ljusztyernyik tétel ad meg.

A Ljusztyernyik-tétel az implicitfüggvény-tételből

A Ljusztyernyik-tételt az alábbiakban az implicitfüggvény-tétel segítségével fogjuk bizonyítani. Az alkalmazhatóságához vagy azt kell feltennünk, hogy az értékkészlet egy véges dimenziós térben van, vagy azt, hogy az értelmezési tartomány egy Hilbert-tér egy részhalmaza. Az állítás egyébként igaz tetszőleges Banach-terek közötti leképezésekre, de akkor a bizonyításban az imlicitfüggvény-tétel alkalmazása helyett egy jóval bonyolultabb technikájú felépítést szokás követni, amit a következő szakaszban teszünk meg.

Legelőször tegyünk egy lineáris algebrai észrevételt:

2.2.12. Állítás. *Legyenek X és Y (ugyanazon test feletti) vektorterek. Ha egy $A : X \to Y$ lineáris leképezés* $\mathrm{im}(A)$ *képtere véges dimenziós, akkor $\exists\, M \subseteq X$ olyan véges dimenziós altér, amelyre*

$$\ker A \oplus M = X.$$

Bizonyítás. Legyen $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq \mathrm{im}(A)$ egy bázis. Ekkor $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $\exists\ u_i \in X$, amelyre $A(u_i) = v_i$. Legyen $B : Y \to X$ az az (egyértelműen létező) lineáris leképezés, amelyre $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $B(v_i) \doteq u_i$. Ekkor nyilván

$$A \circ B = I_{\mathrm{im}(A)},$$

emiatt viszont rövid úton

$$\ker A \oplus \mathrm{im}(B) = X,$$

tehát $M \doteq \mathrm{im}(B)$ választással teljesül az állítás. □

2.2.13. Állítás (Ljusztyernyik-tétel, szinthalmaz érintőhalmaza)**.** *Legyenek* $(X, \|.\|)$ *és* $(Y, \|.\|)$ *Banach-terek,* $D \subseteq X$ *adott halmaz. Tegyük fel még továbbá a következő feltételek egyikét:*

(a) $(Y, \|.\|)$ *véges dimenziós,*

(b) $(X, \langle .,. \rangle)$ *Hilbert-tér.*

Ha egy $F : D \to Y$ *függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:*

(1) folytonosan differenciálható egy $x_0 \in \mathrm{int}\, D$ *pontban,*

(2) az $F'(x_0) \in L(X, Y)$ *folytonos lineáris leképezés szürjektív:* $\mathrm{im}\, F'(x_0) = Y$,

akkor az

$$F^{-1}(F(x_0)) = \{x \in D\ :\ F(x) = F(x_0)\}$$

szinthalmaz x_0 *pontjához tartozó érintőhalmaza az* $F'(x_0) \in L(X, Y)$ *folytonos lineáris leképezés magtere:*

$$T_{F^{-1}(F(x_0))}(x_0) = \ker F'(x_0).$$

Bizonyítás. Mivel az F függvény folytonosan differenciálható az x_0 pontban, ezért $x_0 \in \mathrm{int}\, D$, emiatt feltehető, hogy $D = X$.

„$\subseteq$": (Ez az irány könnyen látható.)
Legyen $v \in T_{F^{-1}(F(\bar{x}))}(x_0)$ tetszőleges érintővektor, ami a definícó szerint azt jelenti,

hogy $\exists\, r_1 : \mathbb{R}_+ \to X$ a 0 pontban jobbról kisrendű függvény, azaz amelyre $r(0) = \mathbf{0}_X$ és $\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda} r(\lambda) = \mathbf{0}_X$, hogy $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$x_0 + \lambda v + r_1(\lambda) \in F^{-1}(F(x_0)), \text{ azaz } F(x_0 + \lambda v + r_1(\lambda)) = F(x_0).$$

Mivel az F függvény differenciálható az x_0 pontban, ezért $\exists\, r_2 : X \to Y$, a $\mathbf{0}_X$ pontban kisrendű függvény, hogy $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= F(x_0 + \lambda v + r_1(\lambda)) - F(x_0) \\
&= [F'(x_0)](\lambda v + r_1(\lambda)) + r_2(\lambda v + r_1(\lambda)) \\
&= \lambda [F'(x_0)]v + [F'(x_0)]r_1(\lambda) + r_2(\lambda v + r_1(\lambda)),
\end{aligned}$$

ebből

$$\lambda [F'(x_0)]v = -[F'(x_0)]r_1(\lambda) - r_2(\lambda v + r_1(\lambda)),$$

azaz

$$\begin{aligned}
[F'(x_0)]v &= -\frac{1}{\lambda}([F'(x_0)]r_1(\lambda) + r_2(\lambda v + r_1(\lambda))) \\
&= -[F'(x_0)]\left(\frac{r_1(\lambda)}{\lambda}\right) - \frac{r_2(\lambda v + r_1(\lambda))}{\lambda},
\end{aligned}$$

ez igaz $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén. Mivel a láncszabály alapján

$$\lim_{\lambda\to 0+}\left([F'(x_0)]\left(\frac{r_1(\lambda)}{\lambda}\right) + \frac{r_2(\lambda v + r_1(\lambda))}{\lambda}\right) = [F'(x_0)]\mathbf{0}_X + \mathbf{0}_Y = \mathbf{0}_Y,$$

ezért $[F'(x_0)]v = \mathbf{0}_Y$, azaz $v \in \ker F'(x_0)$.

Ehhez a tartalmazáshoz nem használtuk az Y véges dimenziós voltát, valamint az $F'(x_0)$ folytonos lineáris leképezés szürjektivitását sem.

„$\supseteq$”: (Ezt az irányt nehezebb belátni, ehhez használjuk fel a pluszfeltételeket.)

1. lépés: Belátjuk, hogy az (a) és (b) feltételek bármelyikének a teljesülése esetén $\exists\, M \subseteq X$ zárt altér, amelyre

$$\ker F'(x_0) \oplus M = X.$$

(a) Abban az esetben, amikor az $(Y, \|.\|)$ normált tér véges dimenziós, akkor az $F'(x_0) \in L(X,Y)$ folytonos lineáris leképezés $\operatorname{im}(F'(x_0))$ képtere nyilván véges dimenziós, ezért az előző lineáris algebrabeli 2.2.12. állítás szerint $\exists\, M \subseteq X$ olyan véges dimenziós, emiatt zárt altér, amelyre

$$\ker F'(x_0) \oplus M = X.$$

(b) Abban az esetben, amikor $(X, \langle .,. \rangle)$ Hilbert-tér, akkor ismert, hogy minden zárt altérnek van zárt ortokomplementuma. Mivel $F'(x_0) \in L(X,Y)$ folytonos lineáris leképezés, így a $\ker F'(x_0) \subseteq X$ altér zárt, ezért ebben az esetben is az $M \doteq (\ker F'(x_0))^{\perp} \subseteq X$ zárt altérre

$$\ker F'(x_0) \oplus M = X\,.$$

2. lépés: Belátjuk, hogy az $F'(x_0)|_M \in L(M,Y)$ folytonos lineáris leképezés reguláris:

$$F'(x_0)|_M \in \operatorname{Reg}(M,Y)\,. \tag{2.8}$$

Mivel feltettük, hogy $\operatorname{im} F'(x_0) = Y$, ezért a direkt összeg reláció miatt teljesül az is, hogy

$$\operatorname{im}\big(F'(x_0)|_M\big) = \operatorname{im} F'(x_0) = Y\,,$$

azaz az $F'(x_0)|_M \in L(M,Y)$ folytonos lineáris leképezés is szürjektív. Továbbá injektív is, ugyanis nyilván

$$\ker(F'(x_0)|_M) = \ker F'(x_0) \cap M = \{\mathbf{0}\}\,.$$

Ezek szerint lineáris bijekció, azaz izomorfia.

(a) Abban az esetben, amikor az $(Y, \|.\|)$ normált tér véges dimenziós, akkor láttuk, hogy az $M \subseteq X$ altér is véges dimenziós, ekkor az $(F'(x_0)|_M)^{-1} \in L(Y,M)$ lineáris leképezés is folytonos.

(b) Abban az esetben, amikor az $(X, \langle .,. \rangle)$ Hilbert-tér, akkor az $F'(x_0)|_M \in L(M,Y)$ szürjektív folytonos lineáris leképezés a Banach-féle nyíltleképezés-tétel szerint nyílt leképezés, ezért az inverze, az $(F'(x_0)|_M)^{-1} \in L(Y,M)$ leképezés is folytonos.

3. lépés: Az implicitfüggvény-tétel alkalmazása:
Legyen $h : \ker F'(x_0) \times M \to Y$ az a leképezés, amelyre $\forall\,(u,v) \in \ker F'(x_0) \times M$ esetén

$$h(u,v) \doteq F(x_0 + u + v)\,.$$

Ez azt jelenti, hogy $h = F \circ (x_0 + C)$, ahol $C \in L(\ker F'(x_0) \times M, X)$ az a folytonos lineáris leképezés, amelyre $\forall\,(u,v) \in \ker F'(x_0) \times M$ esetén

$$C(u,v) \doteq u + v\,.$$

A h függvény definíciójából és abból, hogy az F függvény folytonosan differenciálható az x_0 pontban, következik, hogy a h függvény folytonosan differenciálható a $(\mathbf{0}_{\ker F'(x_0)}, \mathbf{0}_M) \in \ker F'(x_0) \times M$ pontban, és

$$h'(\mathbf{0},\mathbf{0}) = F'(x_0) \cdot C\,.$$

Ebből pedig az következik, hogy

$$\partial_1 h(\mathbf{0},\mathbf{0}) = F'(x_0)|_{\ker F'(x_0)} = \mathbf{0} \in L(\ker F'(x_0), Y)\,, \tag{2.9}$$

valamint, (2.8)-et is felhasználva,

$$\partial_2 h(\mathbf{0},\mathbf{0}) = F'(x_0)|_M \in \mathrm{Reg}(M,Y)\,. \tag{2.10}$$

Ezek szerint a h függvényre a $(\mathbf{0}_{\ker F'(x_0)}, \mathbf{0}_M) \in \ker F'(x_0) \times M$ pontban fennállnak az implicitfüggvény-tétel feltételei:

(1) folytonosan differenciálható a $(\mathbf{0},\mathbf{0}) \in \ker F'(x_0) \times M$ pontban,

(2) $\partial_2 h(\mathbf{0},\mathbf{0}) \in \mathrm{Reg}(Y,Z)$, azaz reguláris folytonos lineáris leképezés.

Ezért az $\mathbf{0} \in \ker F'(x_0)$ pontnak $\exists\ U \subseteq \ker F'(x_0)$ környezete, és $\exists\ g : U \to M$ függvény, amelyre

(a) $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

(b) $\forall\ u \in U$ esetén $h(u, g(u)) = h(\mathbf{0},\mathbf{0})$,

(c) a g függvény differenciálható, és $\forall\ u \in U$ esetén

$$g'(u) = -[\partial_2 h(u,g(u))]^{-1} \cdot \partial_1 h(u,g(u))\,.$$

A h függvény definíciója szerint (b) részletesen azt jelenti, hogy $\forall\ u \in U$ esetén

$$F(x_0 + u + g(u)) = F(x_0)\,, \quad \text{azaz} \quad x_0 + u + g(u) \in F^{-1}(F(x_0))\,. \tag{2.11}$$

Továbbá a (c) speciálisan a $\mathbf{0} \in \ker F'(x_0)$ pontban

$$g'(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in L(\ker F'(x_0), M)\,, \tag{2.12}$$

ugyanis az (2.9) alapján:

$$\begin{aligned} g'(\mathbf{0}) &= -[\partial_2 h(\mathbf{0}, g(\mathbf{0}))]^{-1} \cdot \partial_1 h(\mathbf{0}, g(\mathbf{0})) \\ &= -[\partial_2 h(\mathbf{0},\mathbf{0})]^{-1} \cdot \partial_1 h(\mathbf{0},\mathbf{0}) \\ &= -[\partial_2 h(\mathbf{0},\mathbf{0})]^{-1} \cdot \mathbf{0}_{L(\ker F'(x_0),Y)} \\ &= \mathbf{0}_{L(\ker F'(x_0),M)}\,. \end{aligned}$$

4. lépés: A tartalmazás belátása: Legyen $v \in \ker F'(x_0)$ tetszőleges. Belátjuk, hogy

$$v \in T_{F^{-1}(F(x_0))}(x_0)\,.$$

Mivel az U halmaz a $\mathbf{0} \in \ker F'(x_0)$ pont környezete, ezért $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ \lambda \in (-\delta,\delta)$ esetén $\lambda v \in U$, ezért (2.11) szerint

$$x_0 + \lambda v + g(\lambda v) \in F^{-1}(F(x_0))\,.$$

Legyen $r : (-\delta,\delta) \to X$ az a függvény, amelyre $\forall\ \lambda \in (-\delta,\delta)$ esetén

$$r(\lambda) \doteq g(\lambda v) \in M \subseteq X\,.$$

Belátjuk, hogy az r függvény a 0 pontban kisrendű.

Ugyanis: Először is

$$r(0) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Továbbá, mivel a $g : U \to M$ függvény differenciálható, ezért $\exists\ r_1 : U \to M$ a $\mathbf{0} \in \ker F'(x_0)$ pontban kisrendű függvény, hogy $\forall\ \lambda v \in U$ esetén, azaz $\forall\ \lambda \in (-\delta, \delta)$ esetén

$$g(\lambda v) = g(\mathbf{0}) + g'(\mathbf{0})(\lambda v) + r_1(\lambda v).$$

Mivel a g függvényre egyrészt teljesül, hogy $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, másrészt az (2.12) szerint $g'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}_{L(\ker F'(x_0), M)}$, ezért

$$g(\lambda v) = r_1(\lambda v).$$

Ezek szerint

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} r(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} g(\lambda v) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} r_1(\lambda v) = \mathbf{0}.$$

Összefoglalva: azt kaptuk, hogy $\exists\ r : (-\delta, \delta) \to X$ a 0 pontban kisrendű függvény, hogy $\forall\ \lambda \in (-\delta, \delta)$ esetén

$$x_0 + \lambda v + r(\lambda) \in F^{-1}(F(x_0)),$$

ami az érintővektor 2.2.2. definíciója szerint azt jelenti, hogy $v \in T_{F^{-1}(F(x_0))}(x_0)$. □

A Ljusztyernyik-tétel Banach terek között

A Ljusztyernyik-tételt az alábbiakban tetszőleges Banach-terek közötti leképezésekre látjuk be. Sajnos az implicitfüggvény-tétel most nem használható, pedig egyelőre az tűnik a bizonyítás természetes eszközének. A bizonyítás során az implicitfüggvény-tétel bizonyításában használt Banach-féle fixponttétel helyett a vele analóg Nadler-féle fixponttételt használjuk.

Először a Ljusztyernyik-tétel egy absztrakcióját bizonyítjuk be, aminek speciális eseteként adódik a Ljusztyernyik-tétel.

2.2.14. Állítás (a Ljusztyernyik-tétel absztrakciója)**.** *Legyenek $(X, \|.\|)$ és $(Y, \|.\|)$ Banach-terek, $D \subseteq X$ adott halmaz.*
Ha egy $F : D \to Y$ függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:

(1) folytonosan differenciálható egy $x_0 \in \operatorname{int} D$ pontban,

(2) az $F'(x_0) \in L(X, Y)$ folytonos lineáris leképezés szürjektív:
$\operatorname{im} F'(x_0) = Y$,

akkor létezik az x_0-nak olyan $U \subseteq D$ környezete, és olyan $\alpha > 0$ szám, valamint $\forall\ u \in U$ esetén olyan $x_u \in X$ pont, amelyre

(a) $F(u + x_u) = F(x_0)$, azaz $u + x_u \in F^{-1}(F(x_0))$,

(b) $\|x_u\| \leq \alpha \cdot \|F(u) - F(x_0)\|$.

Bizonyítás. A továbbiakban a rövidség kedvéért jelölje

$$A \doteq F'(x_0) \in L(X,Y).$$

Mivel $(X, \|.\|)$ és $(Y, \|.\|)$ Banach-terek, és az $A \in L(X,Y)$ folytonos lineáris leképezés szürjektív, ezért a 6.5.15. állítás szerint az $A^{-1} : Y \to X/\ker A$ inverzoperátor (ami lineáris bijekció) folytonos is, így értelmezhető annak

$$\|A^{-1}\|_{L(Y,X/\ker A)} \in \mathbb{R}$$

normája. Legyen $\delta > 0$ olyan szám, amelyre

$$\delta < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}, \quad \text{azaz} \quad \|A^{-1}\| \cdot \delta < \frac{1}{2}.$$

Mivel az F leképezés folytonosan differenciálható az x_0 pontban, ezért $\exists\, U_1 \in \tau(x_0)$, $U_1 \subseteq \operatorname{int} D$ konvex környezet, hogy $\forall\, x \in U_1$ esetén

$$\|F'(x) - A\| = \|F'(x) - F'(x_0)\| < \delta.$$

A Lagrange-egyenlőtlenséget az $F - A : U_1 \to Y$ leképezésre alkalmazva kapjuk, hogy $\forall\, x_1, x_2 \in U_1$ esetén

$$\begin{aligned} \|F(x_1) - A(x_1) - (F(x_2) - A(x_2))\| &\leq \sup_{z \in [x_1, x_2]} (\|F'(z) - A\| \cdot \|x_1 - x_2\|) \\ &\leq \delta \cdot \|x_1 - x_2\|). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Legyen $r > 0$ olyan, hogy $B(x_0, 2r) \subseteq U_1$.

Mivel az F leképezés differenciálható x_0-ban, ezért ott folytonos is. Ezek szerint x_0-nak $\exists\, U_2 \subseteq B(x_0, r)$ környezete, hogy $\forall\, x \in U_2$ esetén

$$\|A^{-1}\| \cdot \sup_{x \in U} \|F(x) - F(x_0)\| \leq \frac{r}{2}. \tag{2.14}$$

Ekkor

$$U_2 \subseteq B(x_0, r) \subseteq B(x_0, 2r) \subseteq U_1 \subseteq D.$$

Legyen $u \in U_2$ tetszőleges rögzített pont, és legyen $\Psi_u : B(\mathbf{0}, r) \to X/\ker A$ az a leképezés, amelyre $\forall\, x \in B(\mathbf{0}, r)$ esetén

$$\Psi_u(x) \doteq x - A^{-1}(F(u+x) - F(x_0)).$$

Mivel $u \in U_2 \subseteq B(x_0, r)$, így $\forall\, x \in B(\mathbf{0}, r)$ esetén $u + x \in B(x_0, 2r) \subseteq D$, ezért $F(u+x)$ értelmes. Mivel pedig $\operatorname{im} A = Y$, ezért

$$A^{-1}(F(u+x) - F(x_0)) \neq \emptyset,$$

valamint $A \in L(X,Y)$ folytonos lineáris leképezés volta miatt zárt affin halmaz. Ezek szerint $\forall\, x \in B(\mathbf{0},r)$ esetén $\Psi_u(x) \subseteq X$ nemüres zárt affin halmaz, méghozzá a $\ker A$ eltoltja, azaz az $X/\ker A$ faktortér eleme. Ekkor $\forall\, x_1,\ x_2 \in B(\mathbf{0},r)$ esetén

$$
\begin{aligned}
& d_{X/M}(\Psi_u(x_1),\Psi_u(x_2)) = \|\Psi_u(x_1) - \Psi_u(x_2)\| \\
= \quad & \|x_1 - A^{-1}(F(u+x_1) - F(x_0)) - x_2 + A^{-1}(F(u+x_2) - F(x_0))\| \\
= \quad & \|A^{-1}\,(A(x_1) - F(u+x_1) + F(x_0) - A(x_2) + F(u+x_2) - F(x_0))\,\| \\
= \quad & \|A^{-1}\,(A(x_1) - F(u+x_1) - A(x_2) + F(u+x_2))\,\| \\
\leq \quad & \|A^{-1}\| \cdot \|A(x_1) - F(u+x_1) - A(x_2) + F(u+x_2)\| \\
= \quad & \|A^{-1}\| \cdot \|A(x_1) + A(u) - F(u+x_1) - A(x_2) - A(u) + F(u+x_2)\| \\
= \quad & \|A^{-1}\| \cdot \|A(u+x_1) - F(u+x_1) - A(u+x_2) + F(u+x_2)\| \\
\leq \quad & \|A^{-1}\| \cdot \delta \cdot \|x_2 - x_1\| = \|A^{-1}\| \cdot \delta \cdot d_{\|.\|}(x_1,x_2)\,,
\end{aligned}
$$

ahol felhasználtuk, hogy $u+x_1,\ u+x_2 \in B(x_0,2r) \subseteq U_1$, így fennáll a (2.13) egyenlőtlenség. Ez azt jelenti, hogy Ψ_u leképezés kontrakció, ugyanis a

$$
\lambda \doteq \|A^{-1}\| \cdot \delta \in (0,1/2)
$$

állandó mellett $\forall\, x_1,x_2 \in B(\mathbf{0},r)$ esetén

$$
d_{X/M}(\Psi_u(x_1),\Psi_u(x_2)) \leq \lambda \cdot d_{\|.\|}(x_1,x_2)\,. \tag{2.15}
$$

Továbbá felhasználva (2.14)-et, és azt, hogy $\lambda < \frac{1}{2}$, azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
d_{\|.\|}(\mathbf{0},\Psi_u(\mathbf{0})) \quad &= \quad \|\mathbf{0} - \Psi_u(\mathbf{0})\| = \|A^{-1}(F(u+\mathbf{0}) + F(x_0))\| \\
&\leq \quad \|A^{-1}\| \cdot \|F(u) + F(x_0))\| \\
&\leq \quad \frac{r}{2} < (1-\lambda)r\,.
\end{aligned}
$$

Ez azt jelenti, hogy

$$
d_{\|.\|}(\mathbf{0},\Psi_u(\mathbf{0})) \leq \|A^{-1}\| \cdot \|F(u) + F(x_0))\| < (1-\lambda)r\,. \tag{2.16}
$$

A (2.15) és (2.16) összefüggések szerint fennállnak a Nadler-féle fixponttétel (6.5.16. állítás) feltételei, ezért a $\Psi_u : B(\mathbf{0},r) \to X/\ker A$ halmazértékű leképezésnek $\exists\ x_u \in B(\mathbf{0},r)$ fixpontja:

$$
\begin{aligned}
& \Psi_u(x_u) = x_u\,, \quad \text{azaz} \\
& \Psi_u(x_u) = x_u + \ker A\,, \quad \text{részletesen} \\
& x_u - A^{-1}(F(u+x_u) - F(x_0)) = x_u + \ker A\,, \quad \text{azaz} \\
& A^{-1}(F(u+x_u) - F(x_0)) = \ker A\,, \quad \text{ami azt jelenti, hogy} \\
& F(u+x_u) = F(x_0)\,.
\end{aligned}
$$

Továbbá a (2.16) összefüggést újra felhasználva a Nadler-féle fixponttétel második része alapján az $x_u \in B(\mathbf{0},r)$ fixpontra teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\|x_u\| &= d_{\|.\|}(x_u,\mathbf{0}) \le \frac{2}{1-\lambda} d_{\|.\|}(\mathbf{0},\Psi(\mathbf{0}))\\ &\le \frac{2}{1-\lambda}\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|F(x_0)-F(u)\|\\ &= \alpha\cdot\|F(x_0)-F(u)\|.\end{aligned}$$

ahol $\alpha \doteq \frac{2}{1-\lambda}\cdot\|A^{-1}\|$. □

Ezek után bizonyítsuk be a Ljusztyernyik-tétel Banach terek közötti változatát.

2.2.15. Állítás (Ljusztyernyik-tétel, szinthalmaz érintőhalmaza)**.** *Legyenek* $(X,\|.\|)$ *és* $(Y,\|.\|)$ *Banach-terek,* $D \subseteq X$ *adott halmaz.*
Ha egy $F : D \to Y$ *függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:*

(1) folytonosan differenciálható egy $x_0 \in \operatorname{int} D$ *pontban,*

(2) az $F'(x_0) \in L(X,Y)$ *folytonos lineáris leképezés szürjektív:* $\operatorname{im} F'(x_0) = Y$*,*

akkor az

$$F^{-1}(F(x_0)) = \{x \in D \;:\; F(x) = F(x_0)\}$$

szinthalmaz x_0 *pontjához tartozó érintőhalmaza az* $F'(x_0) \in L(X,Y)$ *folytonos lineáris leképezés magtere:*

$$T_{F^{-1}(F(x_0))}(x_0) = \ker F'(x_0).$$

Bizonyítás. „$\subseteq$”: Ez az irány könnyen látható, és ugyanúgy adódik, mint a korábbi Ljusztyernyik-tétel (a 2.2.13. állítás) bizonyításában.

„$\supseteq$”: Legyen $v \in \ker F'(x_0)$ tetszőleges.
Mivel az állítás feltételei megegyeznek az előző 2.2.14. állítás feltételeivel, ezért $\exists\, U \in \tau(x_0)$, $U \subseteq D$ környezet, $\exists\, \alpha > 0$ szám, továbbá $\forall\, u \in U$ esetén $\exists\, x_u \in X$ pont, amelyre

(a) $F(u+x_u) = F(x_0)$, azaz $u+x_u \in F^{-1}(F(x_0))$,

(b) $\|x_u\| \le \alpha\cdot\|F(u)-F(x_0)\|$.

Ekkor $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, \lambda \in (-\delta,\delta)$ esetén $x_0+\lambda v \in U$, ezért $\exists\, x_{x_0+\lambda v} \in X$, pont, amelyre

(a) $F(x_0+\lambda v + x_{x_0+\lambda v}) = F(x_0)$, azaz $x_0+\lambda v+x_{x_0+\lambda v} \in F^{-1}(F(x_0))$,

(b) $\|x_{x_0+\lambda v}\| \le \alpha\cdot\|F(x_0+\lambda v)-F(x_0)\|$.

Legyen $r : (-\delta, \delta) \to X$ az a leképezés, amelyre $\forall\, \lambda \in (-\delta, \delta)$ esetén

$$r(\lambda) \doteq x_{x_0+\lambda v}\,.$$

Ekkor (a) azt jelenti, hogy $\forall\, \lambda \in (-\delta, \delta)$ esetén

$$x_0 + \lambda v + r(\lambda) \in F^{-1}(F(x_0))\,.$$

Az $r : (-\delta, \delta) \to X$ függvény a 0 pontban kisrendű.
Ugyanis: A (b) szerint egyrészt

$$\|r(0)\| = \|x_{x_0}\| \leq \alpha \cdot \|F(x_0) - F(x_0)\| = 0 \quad \text{így} \quad r(0) = \mathbf{0}\,,$$

másrészt, felhasználva azt is, hogy $v \in \ker F'(x_0)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \cdot \|r(\lambda)\| &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \cdot \|x_{x_0+\lambda v}\| \\
&\leq \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \cdot \alpha \cdot \|F(x_0 + \lambda v) - F(x_0)\| \\
&= \alpha \cdot \|d_v F(x_0)\| \quad (\text{ez } \exists, \text{ mert } \exists\, F'(x_0)) \\
&= \alpha \cdot \|F'(x_0)v\| = 0\,.
\end{aligned}$$

Ezek szerint $v \in T_{F^{-1}(F(x_0))}$. □

2.3. A következménytétel és a Farkas-tétel

Látni fogjuk, hogy az egyenlőségekkel korlátozott feltételes szélsőértékfeladatra vonatkozó Lagrange-féle multiplikátor-tétel bizonyítása a Ljusztyernyik-tételen és a homogén lineáris egyenletekre vonatkozó következménytételen alapszik.
Szép észrevétel [13], hogy ehhez hasonló módon az egyenlőtlenségekkel korlátozott feltételes szélsőértékfeladatra vonatkozó Fritz John-tétel a homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó következménytétel segítségével igazolható. A következménytétel pedig a homogén lineáris egyenletekre vonatkozó tétel bizonyításával analóg módon bizonyítható. Ez a következménytétel nem más, mint a véges kúpok polárisára vonatkozó nevezetes Farkas-tétel, ezek alapján nem túlzás azt állítani, hogy ily módon ennek a fontos tételnek a lehető legegyszerűbb bizonyítását nyerjük.
További szép eredmény az is, hogy a Fritz John-tételben szereplő regularitási feltétel a Lagrange-multiplikátortételbeli regularitási feltételhez hasonló módon fogalmazható meg.

Következménytétel a homogén lineáris egyenletekre

Az alábbiakban áttekintjük a homogén lineáris egyenletekre és egyenlőtlenségekre vonatkozó következménytételeket.

2.3.1. Állítás. *Legyen* $(X,+,\cdot)$ *tetszőleges* $\mathbb{F}$ *test feletti vektortér. Az* f *és* $g \in X'$ *lineáris funkcionálokra*

$$\ker f \subseteq \ker g \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{F},\ \textit{amelyre}\ g = \lambda \cdot f\,.$$

Bizonyítás. Szükségesség:
1. eset: $\ker f = X$, ekkor $f = g = \mathbf{0}_{X'}$.
2. eset: $\exists\, v \in X$, amelyre $f(v) \neq 0$. Ekkor $\forall\, x \in X$ esetén

$$f\left(f(v)x - f(x)v\right) = f(v)f(x) - f(x)f(v) = 0\,,$$

azaz

$$f(v)x - f(x)v \in \ker f\,, \quad \text{így} \quad f(v)x - f(x)v \in \ker g\,,$$

azaz

$$0 = g\left(f(v)x - f(x)v\right) = f(v)g(x) - f(x)g(v)\,,$$

amiből

$$g(x) = \frac{g(v)}{f(v)} \cdot f(x)\,,$$

ami azt jelenti, hogy $\lambda = \frac{g(v)}{f(v)}$ mellett fennáll a $g = \lambda \cdot f$ egyenlőség.

Elégségesség: Nyilvánvaló. $\square$

2.3.2. Állítás (következménytétel a homogén lineáris egyenletekre)**.** *Legyen* $(X,+,\cdot)$ *tetszőleges* $\mathbb{F}$ *test feletti vektortér. Az* $f, f_1, \ldots, f_m \in X'$ *lineáris funkcionálokra*

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i \subseteq \ker f\,, \quad \textit{azaz} \quad f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0\,,$$

akkor és csak akkor, ha

$$f \in \operatorname{lin}\{f_1, \ldots, f_m\}\,.$$

Bizonyítás. Elégségesség: (Ez nyilvánvaló.) Ha $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, hogy

$$f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i\,,$$

akkor $\forall\, x \in \bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i$ esetén

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x) = 0\,, \quad \text{azaz} \quad x \in \ker f\,.$$

Szükségesség: m-re vonatkozó teljes indukcióval.

$m = 1$: Ez éppen a 2.3.1. állítás.

Tegyük fel, hogy az állítás m-re igaz. Belátjuk, hogy $m+1$-re is igaz. Tegyük fel, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{m+1} \ker f_i \subseteq \ker f\,.$$

1. eset:

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i \subseteq \ker f\,.$$

ekkor az indukciós feltétel szerint

$$f \in \operatorname{lin}\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq \operatorname{lin}\{f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}\}\,.$$

2. eset:

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i \not\subseteq \ker f\,.$$

Mivel viszont $\bigcap\limits_{i=1}^{m+1} \ker f_i \subseteq \ker f$, ezért

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{m} \ker\left(f_i|_{\ker f_{m+1}}\right) &= \ker f_{m+1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i\right) \\ &= \ker f_{m+1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m+1} \ker f_i\right) \\ &\subseteq \ker f_{m+1} \cap \ker f \\ &= \ker\left(f|_{\ker f_{m+1}}\right)\,. \end{aligned}$$

Ezért az indukciós feltevés miatt

$$f|_{\ker f_{m+1}} \in \operatorname{lin}\{f_1|_{\ker f_{m+1}}, \ldots, f_m|_{\ker f_{m+1}}\}\,,$$

ami azt jelenti, hogy $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, hogy

$$f|_{\ker f_{m+1}} = \lambda_1 \cdot f_1|_{\ker f_{m+1}} + \ldots + \lambda_m \cdot f_m|_{\ker f_{m+1}}\,,$$

azaz

$$\left(f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i\right)|_{\ker f_{m+1}} = \mathbf{0}\,.$$

Ez azt jelenti, hogy $\forall\ x \in \ker f_{m+1}$ esetén

$$\left(f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i\right)(x) = 0\,,$$

azaz

$$\ker f_{m+1} \subseteq \ker\left(f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i\right),$$

ezért az előző 2.3.1. állítás értelmében $\exists\ \lambda_{m+1} \in \mathbb{R}$, hogy

$$f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i = \lambda_{m+1} \cdot f_{m+1}, \quad \text{azaz} \quad f = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot f_i. \qquad \square$$

A következménytétel skaláris szorzatos térben

Érdemes a 2.3.2. állítást megfogalmazni speciálisan skaláris szorzatos térben is.

2.3.3. Állítás (következménytétel skaláris szorzatos térben)**.** *Legyen* $(X, \langle .,. \rangle)$ *skaláris szorzatos tér. Az* $a, a_1, \ldots, a_m \in X$ *vektorokra*

$$\bigcap_{i=1}^{m} a_i^{\perp} \subseteq a^{\perp}, \qquad \textit{azaz} \qquad (\langle a_1, x\rangle = 0, \ldots, \langle a_m, x\rangle = 0 \Rightarrow \langle a, x\rangle = 0)$$

akkor és csak akkor, ha

$$a \in \operatorname{lin}\{a_1, \ldots, a_m\}.$$

Idézzük fel a véges dimenziós alterekre vonatkozó ortogonalitási tételt.

2.3.4. Állítás (véges dimenziós alterek ortogonalitási tétele)**.** *Legyen* $(X, \langle .,. \rangle)$ *skaláris szorzatos tér. Ha* $L \subseteq X$ *véges dimenziós altér, akkor*

$$L = L^{\perp\perp}.$$

Bizonyítás. „$\subseteq$”: (A definícióból következik.) Legyen $x \in L$ tetszőleges, ekkor $\forall\ y \in L^{\perp}$ esetén $\langle y, x\rangle = 0$. Mivel

$$L^{\perp\perp} = \{z \in X \ : \ \langle y, z\rangle = 0,\ y \in L^{\perp}\},$$

ezért $x \in L^{\perp\perp}$.

„$\supseteq$”: Legyen $x \in L^{\perp\perp} \subset X$ tetszőleges. Mivel $L \subseteq X$ véges dimenziós altér, ezért x-nek

$$\exists\ x_0 = P_L(x) \in L \subseteq L^{\perp\perp}$$

ortogonális projekciója, ekkor persze $x - x_0 \in L^{\perp}$. Mivel x és $x_0 \in L^{\perp\perp}$, ezért $x - x_0 \in L^{\perp\perp}$. Így

$$x - x_0 \in L^{\perp} \cap L^{\perp\perp} = \{\mathbf{0}\},$$

azaz $x = x_0$, emiatt viszont $x \in L$. $\square$

2.3.5. Állítás. *A homogén lineáris egyenlőségekre vonatkozó következménytétel skaláris szorzattérbeli alakja és a véges dimenziós alterek ortogonalitási tétele (pontosabban ezek nemtriviális irányai) ekvivalensek, amin azt értjük, hogy egy $(X, \langle .,. \rangle)$ skaláris szorzatos térben az alábbi állításokat egymásból bebizonyítjuk:*

(1) Az $a, a_1, \dots, a_m \in X$ vektorokra

$$\bigcap_{i=1}^{m} a_i^{\perp} \subseteq a^{\perp} \;\Rightarrow\; a \in \operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_m\}\,.$$

(2) Ha $L \subseteq X$ véges dimenziós altér, akkor

$$L^{\perp\perp} \subseteq L\,.$$

Bizonyítás. Az

$$L \doteq \operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_m\}$$

jelöléssel L véges dimenziós altér, amelyre

$$L^{\perp} = (\operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_m\})^{\perp} = \{a_1, \dots, a_m\}^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{m} a_i^{\perp}\,.$$

(1) $\Rightarrow$ (2): Legyen $a \in L^{\perp\perp} = \left(\bigcap_{i=1}^{m} a_i^{\perp}\right)^{\perp}$, ekkor felhasználva a tényt, hogy $M \subseteq M^{\perp\perp}$, továbbá, hogy $a \in M \;\Rightarrow\; M^{\perp} \subseteq a^{\perp}$, azt kapjuk, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{m} a_i^{\perp} \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{m} a_i^{\perp}\right)^{\perp\perp} \subseteq a^{\perp}\,,$$

ezért a következménytétel szerint

$$a \in \operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_m\} = L\,.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Tegyük fel, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{m} a_i^{\perp} \subseteq a^{\perp}\,.$$

Ez azt jelenti, hogy $L^{\perp} \subseteq a^{\perp}$, ezért a feltevés szerint

$$a \in a^{\perp\perp} \subseteq L^{\perp\perp} \subseteq L = \operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_m\}\,. \qquad \square$$

2.3.6. Megjegyzés. A fentiekkel a homogén lineáris egyenlőségekre vonatkozó következménytételre, illetve az ortogonalitási tételre újabb bizonyítást adtunk azáltal, hogy az ekvivalenciájuk miatt a bizonyításaik a másik állítást is igazolják.

A következménytétel $\mathbb{R}^n$-ben

Érdemes a 2.3.2. állítást megfogalmazni speciálisan $\mathbb{R}^n$-ben is. Ebben az esetben ez az állítás a rangtétel segítségével is bebizonyítható volna.

2.3.7. Állítás (következménytétel $\mathbb{R}^n$-ben)**.** *Az $a, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok mellett az*

$$\begin{cases} \langle a_1, x \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle = 0 \end{cases}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor következménye az $\langle a, x \rangle = 0$ homogén lineáris egyenlet, ha

$$a \in \operatorname{lin}\{a_1, \ldots, a_m\}.$$

Bevezetve az

$$A \doteq \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

jelölést a tétel a következő módon fogalmazható át:

$$(Ax = \mathbf{0} \Rightarrow \langle a, x \rangle = 0) \;\; \textit{akkor és csak akkor, ha} \;\; \exists\, y \in \mathbb{R}^m, \;\; \textit{hogy} \;\; y^T A = a^T.$$

Az állítás a következő alternatíva-alakban is megfogalmazható.

2.3.8. Állítás (alternatíva-tétel)**.** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $c \in \mathbb{R}^n$. Az alábbi állítások közül pontosan az egyik teljesül:*

(1) $\exists\, y \in \mathbb{R}^m,\ y^T A = c^T,$

(2) $\exists\, x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = \mathbf{0},\ \langle c, x \rangle \neq 0.$

Másképpen (az A mátrix transzponáltjára felírva):
Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^m$. Az alábbi állítások közül pontosan az egyik teljesül:

(1') $\exists\, x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,$

(2') $\exists\, y \in \mathbb{R}^m,\ y^T A = \mathbf{0},\ \langle y, b \rangle \neq 0.$

Bizonyítás. A fenti következménytétel azt mondja, hogy (1) ekvivalens (2) tagadásával.
□

Következménytétel a homogén lineáris egyenlőtlenségekre

A homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó tétel bizonyítását a homogén lineáris egyenlőségekre vonatkozó tétel bizonyításával teljesen analóg módon végezhetjük el.

2.3.9. Állítás (köv.-tétel a hom. lin. egyenlőtlenségekre, Farkas-tétel)**.** *Legyen* $(X,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$ *feletti vektortér. Az* $f, f_1, \ldots, f_m \in X'$ *lineáris funkcionálokra*

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-)\,, \quad \textit{azaz} \quad (f_1(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0)$$

akkor és csak akkor, ha

$$f \in \operatorname{con}\{f_1, \ldots, f_m\}\,.$$

Bizonyítás. Elégségesség: Nyilvánvaló: Ha $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+$, hogy

$$f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i\,,$$

akkor $\forall\ x \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)$ esetén

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot f_i(x) \leq 0\,, \quad \text{azaz} \ \ x \in f^{-1}(\mathbb{R}_-)\,.$$

Szükségesség: m-re vonatkozó teljes indukcióval.
$m = 1$: Ha $f = \mathbf{0}_{X'}$, akkor nyilván $f = 0 \cdot f_1$.
Tegyük fel, hogy $f \neq \mathbf{0}_{X'}$, továbbá $f_1^{-1}(\mathbb{R}_-) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-)$. Ekkor

$$\ker f_1 \subseteq \ker f\,.$$

Ugyanis: Legyen $x \in \ker f_1$, azaz $f_1(x) = 0$. Mivel $\ker f_1 = f_1^{-1}(0) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-)$, ezért $f(x) \leq 0$. Ugyanakkor $0 = f_1(x) = -f_1(x) = f_1(-x)$, ezért a feltétel szerint $-f(x) = f(-x) \leq 0$, amiből $f(x) = 0$.
Tehát $\ker f_1 \subseteq \ker f$, ezért a 2.3.1. állítás szerint $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$f = \lambda f_1\,.$$

Mivel $f \neq \mathbf{0}_{X'}$ és $f = \lambda f_1$, ezért $f_1 \neq \mathbf{0}_{X'}$, azaz $\exists\ x \in X$, hogy $f_1(x) < 0$, ekkor a feltétel szerint $f(x) \leq 0$, így $\lambda \cdot f_1(x) \leq 0$, emiatt $\lambda \geq 0$.

Tegyük fel, hogy az állítás m-re igaz. Belátjuk, hogy $m+1$-re is igaz. Tegyük fel, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{m+1} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-)\,.$$

1. eset:

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-)\,.$$

ekkor az indukciós feltétel szerint

$$f \in \operatorname{con}\{f_1,\ldots,f_m\} \subseteq \operatorname{con}\{f_1,\ldots,f_m,f_{m+1}\}\,.$$

2. eset:

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \not\subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-)\,,$$

azaz

$$\exists\, x \in X\,,\ \text{ hogy } \ \forall\, i=1,\ldots,m \ \text{ esetén } \ f_i(x) \le 0\,,\ \text{ de } \ f(x) > 0\,. \tag{2.17}$$

Mivel $\ker f_{m+1} \subseteq f_{m+1}^{-1}(\mathbb{R}_-)$, és $\bigcap\limits_{i=1}^{m+1} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-)$, ezért

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{m} \left(f_i|_{\ker f_{m+1}}\right)^{-1}(R_-) &= \ker f_{m+1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)\right)\\
&= \ker f_{m+1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m+1} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)\right)\\
&\subseteq \ker f_{m+1} \cap f^{-1}(\mathbb{R}_-)\\
&= \left(f|_{\ker f_{m+1}}\right)^{-1}(\mathbb{R}_-)\,.
\end{aligned}$$

Ekkor az indukciós feltevést alkalmazva

$$f|_{\ker f_{m+1}} \in \operatorname{con}\{f_1|_{\ker f_{m+1}},\ldots,f_m|_{\ker f_{m+1}}\}\,,$$

ami azt jelenti, hogy $\exists\, \lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{R}_+$, hogy

$$f|_{\ker f_{m+1}} = \lambda_1 \cdot f_1|_{\ker f_{m+1}} + \ldots + \lambda_m \cdot f_m|_{\ker f_{m+1}}\,,$$

azaz

$$\left(f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i\right)|_{\ker f_{m+1}} = \mathbf{0}|_{\ker f_{m+1}}\,.$$

Emiatt

$$\ker f_{m+1} \subseteq \ker \left(f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i \right),$$

ezért a 2.3.1. állítás értelmében $\exists\ \lambda_{m+1} \in \mathbb{R}$, hogy

$$f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i = \lambda_{m+1} \cdot f_{m+1}, \quad \text{azaz} \quad f = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot f_i .$$

Belátjuk még, hogy

$$\lambda_{m+1} \geq 0 .$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\lambda_{m+1} < 0$. Mivel (2.17) szerint

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot f_i(x) \ = \ f(x) \ > \ 0 \ \geq \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x),$$

ezért $\lambda_{m+1} \cdot f_{m+1}(x) > 0$. Mivel pedig $\lambda_{m+1} < 0$, ezért $f_{m+1}(x) < 0$, emiatt viszont

$$x \in \bigcap_{i=1}^{m+1} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-),$$

azaz $f(x) \leq 0$, ami ellentmondás. Tehát $\lambda_{m+1} \geq 0$. □

A következménytétel skaláris szorzatos térben

Érdemes a 2.3.9. állítást megfogalmazni speciálisan skaláris szorzatos térben is.

2.3.10. Állítás (következménytétel skaláris szorzatos térben)**.** *Legyen $(X, \langle .,. \rangle)$ skaláris szorzatos tér. Az $a, a_1, \ldots, a_m \in X$ vektorokra*

$$\bigcap_{i=1}^{m} a_i^- \subseteq a^-, \quad \textit{azaz} \quad \langle a_1, x \rangle \leq 0, \ldots, \langle a_m, x \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle a, x \rangle \leq 0$$

akkor és csak akkor, ha

$$a \in \operatorname{con}\{a_1, \ldots, a_m\}.$$

E következménytételből a véges kúpokra polaritási tétele is könnyen igazolható.

2.3.11. Állítás (véges kúpok polaritási tétele, Farkas-tétel)**.** *Legyen $(X, \langle .,. \rangle)$ skaláris szorzatos tér. Ha $C \subseteq X$ véges kúp, akkor*

$$C = C^{--}.$$

Bizonyítás. „$\subseteq$”: (A definícióból következik.) Legyen $x \in C$ tetszőleges, ekkor $\forall\, y \in C^-$ esetén $\langle y, x\rangle \leq 0$. Mivel

$$C^{--} = \{z \in X \;:\; \langle y, z\rangle \leq 0,\ y \in C^-\},$$

ezért $x \in C^{--}$.

„$\supseteq$”: Az alábbi 2.3.12. állításból fog következni. □

2.3.12. Állítás. *A homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó következménytételnek a skaláris szorzatos térbeli alakja és a véges kúpok polaritási tétele (pontosabban ezek nemtriviális irányai) ekvivalensek, amin azt értjük, hogy egy $(X, \langle .,.\rangle)$ skaláris szorzatos térben az alábbi állításokat egymásból bebizonyítjuk:*

(1) Az $a, a_1, \ldots, a_m \in X$ vektorokra

$$\bigcap_{i=1}^{m} a_i^- \subseteq a^- \;\Rightarrow\; a \in \operatorname{con}\{a_1, \ldots, a_m\}.$$

(2) Ha $C \subseteq X$ véges kúp, akkor

$$C^{--} \subseteq C.$$

Bizonyítás. A

$$C \doteq \operatorname{con}\{a_1, \ldots, a_m\}$$

jelöléssel C véges kúp, amelyre

$$C^- = (\operatorname{con}\{a_1, \ldots, a_m\})^- = \{a_1, \ldots, a_m\}^- = \bigcap_{i=1}^{m} a_i^-.$$

(1) $\Rightarrow$ (2): Legyen $a \in C^{--} = \left(\bigcap_{i=1}^{m} a_i^-\right)^-$, ekkor

$$\bigcap_{i=1}^{m} a_i^- \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{m} a_i^-\right)^{--} \subseteq a^-,$$

ezért a következménytétel szerint

$$a \in \operatorname{con}\{a_1, \ldots, a_m\} = C.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Tegyük fel, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{m} a_i^- \subseteq a^-,$$

ez azt jelenti, hogy $C^- \subseteq a^-$, ezért a feltettek szerint

$$a \in a^{--} \subseteq C^{--} = C \subseteq \operatorname{con}\{a_1, \ldots, a_m\}.$$ □

2.3.13. Megjegyzés. Az ekvivalencia miatt jogos, hogy mind a véges kúpok polaritási tételét, mind a homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó következménytételt Farkas-tételnek nevezzük.

A fentiek szerint a véges kúpok polaritási tételét a homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó következménytétellel bizonyítottuk. Számos egyéb bizonyítása is ismert, például a zárt kúpok polaritási tételén keresztül. Meggyőződésünk, hogy a most bemutatott bizonyítás a legegyszerűbb igazolása a Farkas-tételnek.

A következménytétel $\mathbb{R}^n$-ben

Érdemes a 2.3.9. állítást megfogalmazni speciálisan $\mathbb{R}^n$-ben is.

2.3.14. Állítás (következménytétel $\mathbb{R}^n$-ben)**.** *Az $a, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ vektorok mellett az*

$$\begin{cases} \langle a_1, x\rangle \le 0 \\ \vdots \\ \langle a_m, x\rangle \le 0 \end{cases}$$

homogén lineáris egyenlőtlenség-rendszernek pontosan akkor következménye az

$$\langle a, x\rangle \le 0$$

homogén lineáris egyenlőtlenség, ha

$$a \in \operatorname{con}\{a_1, \ldots, a_m\}\,.$$

Bevezetve az

$$A \doteq \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

jelölést, a tétel a következő módon fogalmazható át:

$$(Ax \le \mathbf{0} \Rightarrow \langle a, x\rangle \le 0)\,, \ \textit{akkor és csak akkor, ha} \ \exists\, y \ge \mathbf{0}\,, \ \textit{hogy} \ y^T A = a^T\,.$$

Az állítás a következő alternatíva-alakban is megfogalmazható.

2.3.15. Állítás (alternatíva-tétel, Farkas-tétel)**.** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $c \in \mathbb{R}^n$.*
Az alábbi állítások közül pontosan az egyik teljesül:

(1) $\exists\, y \in \mathbb{R}^m\,,\ y \ge \mathbf{0}\,,\ y^T A = c^T\,,$

(2) $\exists\, x \in \mathbb{R}^n\,,\ Ax \le \mathbf{0}\,,\ \langle c, x\rangle > 0.$

Másképpen (az A mátrix transzponáltjára felírva):
Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $b \in \mathbb{R}^m$. Az alábbi állítások közül pontosan az egyik teljesül:

(1') $\exists\, x \in \mathbb{R}^n\,,\ x \geq \mathbf{0}\,,\ Ax = b,$

(2') $\exists\, y \in \mathbb{R}^m\,,\ y^T A \leq \mathbf{0}\,,\ \langle y, b\rangle > 0\,.$

Bizonyítás. A fenti következménytétel azt mondja, hogy (1) ekvivalens (2) tagadásával. □

2.3.16. Megjegyzés. 1. Ez tulajdonképpen a legismertebb alakja a Farkas-tételnek, mert a lineáris programozásban ennek a segítségével lehet a dualitási tételeket belátni. Egyébként éppen azért fogalmaztuk meg az A mátrix transzponáltjára is felírva, mert ebben az alakban szokták felhasználni a lineáris programozásban.

2. Az állítás a véges kúpok polaritási tétele segítségével is igazolható:

Jelölje C az A mátrix sorvektorainak a kúpburkát:

$$C \doteq \{a_1^T, \ldots, a_m^T\} = \{y^T A \ :\ y \geq \mathbf{0}\}\,.$$

Ekkor vagy $c^T \in C$, vagy $c^T \notin C$.
A $c^T \in C$ feltétel nyilván (1)-et jelenti:

$$\exists\, y \in \mathbb{R}^m\,,\ y \geq \mathbf{0}\,,\ y^T A = c^T\,.$$

A $c^T \notin C$ pedig (2)-t jelenti, ugyanis a polaritási tétel szerint

$$c^T \notin C = C^{--} = \{b \in \mathbb{R}^n \ :\ Ax \leq \mathbf{0} \Rightarrow \langle b, x\rangle \leq 0\}\,,$$

azaz

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq \mathbf{0},\ \langle c, x\rangle > 0\,.$$

A következménytétel élesítése

2.3.17. Állítás (következménytétel a hom. lin. egyenlőtlenségekre, élesített változat)**.** *Legyen* $(X, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ *feletti vektortér, és legyenek* $f, f_1, \ldots, f_m \in X'$ *lineáris funkcionálok. Tegyük fel, hogy*

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_{--}) \neq \emptyset\,.$$

Ha

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_{--}) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_{-})\,,\ \ \text{azaz}\ \ f_1(x) < 0, \ldots, f_m(x) < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0\,,$$

akkor

$$f \in \operatorname{con}\{f_1, \ldots, f_m\}\,.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy teljesülnek a homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó következménytétel (2.3.9. állítás) feltételei, nevezetesen

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-)\,,$$

amiből következik a tétel.

Legyen $x \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)$ tetszőleges. A feltevés szerint $\exists\ v \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_{--})$, ami azt jelenti, hogy $\forall\ i = 1,\ldots,m$ esetén

$$f_i(v) < 0\,.$$

Legyen $\lambda > 0$ tetszőleges szám. Ekkor $\forall\ i = 1,\ldots,m$ esetén

$$f_i(x+\lambda v) = f_i(x) + \lambda \cdot f_i(v) < 0\,, \text{ azaz } x+\lambda v \in f_i^{-1}(\mathbb{R}_{--})\,,$$

ezek alapján, és az állítás feltétele szerint

$$x+\lambda v \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_{--}) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}_-)\,,$$

ami azt jelenti, hogy

$$f(x) + \lambda \cdot f(v) = f(x+\lambda v) \leq 0\,.$$

Mivel ez igaz $\forall\ \lambda > 0$ szám esetén, ezért

$$f(x) \leq 0\,, \text{ azaz } x \in f^{-1}(\mathbb{R}_-)\,. \qquad \square$$

Kúpfüggetlenség

2.3.18. Definíció. Legyen $(X,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Az $x_1,\ldots,x_n$ vektorokat *kúpfüggetleneknek*, másképpen *szektoroid helyzetűeknek* nevezzük, ha a $\mathbf{0} \in X$ vektor nem áll elő nemtriviális kúpkombinációként:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = \mathbf{0}\,,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}_+ \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 0,\ldots,\lambda_n = 0\,.$$

2.3.19. Megjegyzés. A definícióból nyilvánvaló, hogy ha az $x_1,\ldots,x_n$ vektorok kúpfüggetlenek, akkor

$$\mathbf{0} \notin \{x_1,\ldots,x_n\}\,.$$

2.3.20. Állítás (ekvivalens definíció)**.** *Az $x_1,\ldots,x_n \in X$ nemnulla vektorok kúpfüggetlensége ekvivalens a következő két feltétel mindegyikével:*

(1) A kúpburkuk nem tartalmaz egyenest:

$$\nexists\ a \in X,\ a \neq \mathbf{0}\,,\ \textit{hogy}\ \ \mathrm{lin}\{a\} \subseteq \mathrm{con}\{x_1,\ldots,x_n\}\,.$$

(2) A konvex burkuk nem tartalmazza az origót:

$$\mathbf{0} \notin \operatorname{co}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Bizonyítás. (1) Szükségesség: Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\exists\, a \in X,\ a \neq \mathbf{0},\ \text{ hogy } \operatorname{lin}\{a\} \subseteq \operatorname{con}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Ekkor

$$a, -a \in \operatorname{con}\{x_1, \dots, x_n\},$$

ezek szerint $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n,\ \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_+$ nem mind nullák, hogy

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \ \text{ és } \ -a = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot x_i,$$

amiből következik, hogy

$$\mathbf{0} = a + (-a) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \cdot x_i,$$

ahol $\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n \in \mathbb{R}_+$ és nem mind nullák, ami azt jelenti, hogy az $x_1, \dots, x_n \in X$ vektorok kúpösszefüggők.

Elégségesség: Indirekt módon tegyük fel, hogy az $x_1, \dots, x_n \in X$ vektorok kúpösszefüggők, azaz $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ nem mind nullák, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = \mathbf{0}$$

Tegyük fel, hogy például $\lambda_1 > 0$, ekkor azonnal

$$x_1, -x_1 \in \operatorname{con}\{x_1, \dots, x_n\},$$

ezért

$$\operatorname{lin}\{x_1\} \subseteq \operatorname{con}\{x_1, \dots, x_n\},$$

ahol $x_1 \neq \mathbf{0}$, ami ellentmondás.

(2) Könnyen látható, hogy (1) ekvivalens (2)-vel. □

2.3.21. Megjegyzés. Az (1) ekvivalens definícióbeli jellemzés a síkon úgy szemléltethető, hogy a kúpfüggetlen vektorok egy $\alpha < \pi$ szögtartományba esnek. Ezért nevezzük a kúpfüggetlen vektorokat szektoroid helyzetűeknek.

Lineáris funkcionálok kúpfüggetlenségének a jellemzése

2.3.22. Állítás. *Legyen* $(X,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$ *feletti vektortér. Az* $f_1,\ldots,f_m \in X'$ *lineáris funkcionálok pontosan akkor kúpfüggetlenek, ha*

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_{--}) \neq \emptyset\,,$$

másképpen:

$$\exists\, v \in X\,,\ \ \textit{amelyre}\ \ \forall\, i=1,\ldots,m\ \ \textit{esetén}\ \ f_i(v) < 0\,.$$

Bizonyítás. Szükségesség: Először belátjuk, hogy $\forall\, k=1,\ldots,m$ esetén

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_{-}) \nsubseteq \ker f_k\,.$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\, k=1,\ldots,m$, amelyre

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_{-}) \subseteq \ker f_k \subseteq (-f_k)^{-1}(\mathbb{R}_{-})\,.$$

Ekkor a homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó következménytétel (2.3.9. állítás) szerint

$$-f_k \in \operatorname{con}\{f_1,\ldots,f_m\}\,,$$

ami azt jelenti, hogy $\exists\, \lambda_1,\ldots,\lambda_m \geq 0\,, \lambda_k > 0$, hogy

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + 1\cdot f_k + \ldots + \lambda_m f_m = \mathbf{0}\,.$$

Így az $f_1,\ldots,f_m \in X'$ lineáris funkcionálok nem kúpfüggetlenek, ami ellentmondás.
Ezek szerint $\forall\, k=1,\ldots,m$ esetén

$$\exists\, v_k \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_{-}) \setminus \ker f_k\,,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\forall\, i=1,\ldots,m\ \ \text{esetén}\ \ f_i(v_k) \leq 0\,,\ \ \text{ráadásul}\ \ f_k(v_k) < 0\,.$$

Legyen

$$v \doteq v_1 + \ldots + v_m\,,$$

ekkor $\forall\, i=1,\ldots,m$ esetén

$$f_i(v) = f_i(v_1+\ldots+v_m) = f_i(v_1)+\ldots+f_i(v_i)+\ldots+f_i(v_m) < 0\,.$$

Elégségesség: Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ nemnegatív számokra

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m = \mathbf{0},$$

ekkor azon $v \in X$ vektorra, amelyre $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $f_i(v) < 0$, szintén teljesül, hogy

$$0 = (\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m)(v) = \lambda_1 f_1(v) + \ldots + \lambda_m f_m(v),$$

amiből következik, hogy $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$. □

2.4. A szeparációs tétel véges dimenzióban

Szeparáció Hilbert-térben

2.4.1. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér.
1. Egy $x \in X$ pontnak egy nemüres $A \subseteq X$ halmaztól való *távolsága*:

$$d_A(x) \doteq \inf_{a \in A} d(x, a).$$

2. Egy $x \in X$ pont mellett azt az $a_x \in A$ pontot, amelyre

$$d(x, a_x) = d_A(x),$$

az A halmaznak az x ponthoz *legközelebbi pontjának* nevezzük, feltéve, hogy létezik pontosan egy ilyen pont.

2.4.2. Állítás (legközelebbipont-tétel, Riesz-tétel)**.** *Legyen $(X, \langle .,. \rangle)$ teljes skaláris szorzatos tér, azaz Hilbert-tér. Ha $A \subseteq X$ nemüres, zárt, konvex halmaz, akkor $\forall\ x \in X$ ponthoz létezik legközelebbi pontja:*

$$\forall\ x \in X \ \textit{ esetén } \ \exists!\ a_x \in A \ \textit{ amelyre } \ d(x, a_x) = d_A(x).$$

Bizonyítás. Ismert, hogy tetszőleges skaláris szorzatos térben teljesül az úgynevezett paralelogramma-szabály: $\forall\ x, y \in X$ esetén

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Belátjuk, hogy $\forall\ a, a' \in A$ és $\forall\ x \in X$ esetén

$$\|a' - a\|^2 \leq 2(\|x - a\|^2 + \|x - a'\|^2) - 4 \cdot d_A^2(x). \tag{2.18}$$

Ugyanis: Alkalmazzuk a paralelogramma-szabályt az $x - a$ és az $x - a' \in A$ vektorokra:

$$\|(x - a) - (x - a')\|^2 + \|(x - a) + (x - a')\|^2 = 2(\|x - a\|^2 + \|x - a'\|^2),$$

azaz

$$\begin{aligned}\|a'-a\|^2 &= 2(\|x-a\|^2+\|x-a'\|^2)-\|2x-a-a'\|^2 \\ &= 2(\|x-a\|^2+\|x-a'\|^2)-4\cdot\|x-(1/2)a-(1/2)a'\|^2 \\ &\leq 2(\|x-a\|^2+\|x-a'\|^2)-4\cdot d_A^2(x)\,,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk azt, hogy mivel az $A\subseteq X$ halmaz konvex, ezért

$$(1/2)a+(1/2)a'\in A\,,\ \text{ emiatt } d_A^2(x)\leq\|x-(1/2)a-(1/2)a'\|^2\,.$$

Mivel $d_A(x)=\inf_{a\in A}d(x,a)$, ezért $\exists\ (a_n)$ A-beli sorozat, amelyre

$$d_A(x)=\lim d(x,a_n)=\lim\|x-a_n\|\,. \tag{2.19}$$

Látható, hogy (a_n) Cauchy-sorozat. Ugyanis $\forall\ \varepsilon>0$ esetén $\exists\ n_0\in\mathbb{N}$, hogy $\forall\ n>n_0$ esetén

$$\|x-a_n\|^2\leq d_A^2(x)+\frac{\varepsilon^2}{4}\,,$$

ezért a fenti (2.18) összefüggés szerint $\forall\ m,n>n_0$ esetén

$$\|a_m-a_n\|^2\leq 2(\|x-a_m\|^2+\|x-a_n\|^2)-4\cdot d_A^2(x)\leq\varepsilon^2\,,$$

azaz

$$\|a_m-a_n\|\leq\varepsilon\,.$$

Mivel az $(X,\langle .,.\rangle)$ skaláris szorzatos tér teljes, ezért az (a_n) Cauchy-sorozat konvergens, azaz $\exists\ a_x\doteq\lim a_n\in X$.
Mivel az (a_n) sorozat A-beli, és az $A\subseteq X$ halmaz zárt, ezért $a_x=\lim a_n\in A$.
Mivel pedig a $d(x,.)=\|x-.\|:X\to\mathbb{R}$ távolságfüggvény folytonos, ezért

$$d_A(x)=\lim d(x,a_n)=d(x,\lim a_n)=d(x,a_x)\,.$$

Végül megmutatjuk, hogy egyetlen ilyen $a_x\in A$ pont van. Ugyanis tegyük fel, hogy egy $a'\in A$ pontra $d_A(x)=d(x,a')$. Ekkor újra a fenti (2.18) összefüggés szerint

$$\begin{aligned}\|a'-a_x\|^2 &\leq 2(\|x-a'\|^2+\|x-a_x\|^2)-4\cdot d_A^2(x) \\ &= 2(d_A^2(x)+d_A^2(x))-4\cdot d_A^2(x)=0\,,\end{aligned}$$

azaz $a'=a_x$. Tehát $a_x\in A$ egyértelmű. □

2.4.3. Állítás (tompaszögtétel)**.** *Legyen* $(X,\langle .,.\rangle)$ *teljes skaláris szorzatos tér, azaz Hilbert-tér. Ha* $A\subseteq X$ *zárt, konvex halmaz, akkor* $\forall\ a\in A$ *pont, valamint* $\forall\ x\in X$ *és az* x*-hez legközelebbi* $a_x\in A$ *pont esetén*

$$\langle x-a_x,a-a_x\rangle\leq 0\,.$$

Bizonyítás. Az előző legközelebbipont-tétel (2.4.2. állítás) szerint

$$\forall\, x \in X \ \text{ esetén } \ \exists!\ a_x \in A \ \text{ amelyre } \ d(x,a_x) = d_A(x)\,.$$

Legyen $\alpha \in (0,1)$. Mivel az $A \subseteq X$ halmaz konvex, ezért $\alpha a + (1-\alpha)a_x \in A$, ezért

$$\begin{aligned}
\|x-a_x\|^2 &= d_A^2(x) \leq \|x-(\alpha a+(1-\alpha)a_x)\|^2 \\
&= \|(x-a_x)+\alpha(a_x-a)\|^2 \\
&= \langle (x-a_x)+\alpha(a_x-a),(x-a_x)+\alpha(a_x-a)\rangle \\
&= \|x-a_x\|^2 + 2\alpha\langle x-a_x, a_x-a\rangle + \alpha^2\|a_x-a\|^2\,,
\end{aligned}$$

emiatt

$$0 \leq 2\alpha\langle x-a_x,a_x-a\rangle + \alpha^2\|a_x-a\|^2\,.$$

Mivel $\alpha > 0$, ezért

$$0 \leq 2\langle x-a_x,a_x-a\rangle + \alpha\|a_x-a\|^2\,,$$

ez pedig $\forall\ \alpha > 0$ esetén igaz, ezért

$$0 \leq \langle x-a_x,a_x-a\rangle \ \text{ azaz } \ \langle x-a_x,a-a_x\rangle \leq 0\,. \qquad \square$$

2.4.4. Állítás (zárt konvex halmaz és külső pont szigorú szeparációja)**.** *Legyen $(X,\langle .,.\rangle)$ teljes skaláris szorzatos tér, azaz Hilbert-tér. Ha $A \subseteq X$ zárt konvex halmaz és $x \in A^c$ tetszőleges pont, akkor hipersíkkal szigorúan szeparálhatók, ami azt jelenti, hogy $\exists\, y \in X$, $y \neq \mathbf{0}$ vektor és $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ szám, hogy a $H = \{z \in X\ :\ \langle y,z\rangle = \alpha\}$ hipersík szigorúan szétválasztja az A halmazt és az x pontot:*

$$\forall\, a \in A \ \ \textit{esetén} \ \ \langle y,a\rangle \leq \alpha < \langle y,x\rangle\,,$$

azaz

$$\sup_{a\in A}\, \langle y,a\rangle < \langle y,x\rangle\,.$$

Bizonyítás. Ez tulajdonképpen a tompaszögtétel (2.4.3. állítás) átfogalmazása. Ugyanis a tompaszögtétel szerint $\forall\ a \in A$ pont, valamint $\forall\ x \in A^c$, és az x-hez legközelebbi $a_x \in A$ pont esetén

$$\langle x-a_x,a-a_x\rangle \leq 0\,, \ \text{ azaz } \ \langle x-a_x,a\rangle \leq \langle x-a_x,a_x\rangle\,.$$

Ugyanakkor mivel $x \in A^c$ és $a_x \in A$, így $x-a_x \neq \mathbf{0}$, ezért

$$0 < \|x-a_x\|^2 = \langle x-a_x,x-a_x\rangle\,, \ \text{ azaz } \ \langle x-a_x,a_x\rangle < \langle x-a_x,x\rangle\,.$$

Ezek szerint

$$\langle x-a_x,a\rangle \leq \langle x-a_x,a_x\rangle < \langle x-a_x,x\rangle\,.$$

Jelölje $y \doteq x-a_x$ és $\alpha \doteq \langle x-a_x,a_x\rangle$, ekkor $y \neq \mathbf{0}$, és $\forall\ a \in A$ pont esetén

$$\langle y,a\rangle \leq \alpha < \langle y,x\rangle\,. \qquad \square$$

2.4.5. Állítás. *Legyen* $(X, \langle ., . \rangle)$ *teljes skaláris szorzatos tér, azaz Hilbert-tér. Egy* $A \subseteq X$ *halmaz pontosan akkor zárt és konvex, ha előáll zárt félterek metszeteként, nevezetesen*

$$A = \bigcap_{x \in A^c} \{z \in X \;:\; \langle y_x, z \rangle \leq \alpha\},$$

ahol $\forall\; x \in A^c$ *és az* x*-hez legközelebbi* $a_x \in A$ *pont esetén* $y_x \doteq x - a_x$ *és* $\alpha_x \doteq \langle x - a_x, a_x \rangle$.

Bizonyítás. Szükségesség: Legyen $x \in A^c$ tetszőleges pont, $a_x \in A$ az x-hez legközelebbi A-beli pont, $y_x \doteq x - a_x$ és $\alpha_x \doteq \langle x - a_x, a_x \rangle$. Ekkor a zárt konvex halmaz és külső pont szigorú szeparációja (2.4.4. állítás) szerint

$$A \subseteq \{z \in X \;:\; \langle y_x, z \rangle \leq \alpha_x\}, \quad \text{valamint} \quad x \notin \{z \in X \;:\; \langle y_x, z \rangle \leq \alpha_x\},$$

ezek szerint egyrészt

$$A \subseteq \bigcap_{v \in A^c} \{z \in X \;:\; \langle y_v, z \rangle \leq \alpha_v\},$$

másrészt

$$x \notin \bigcap_{v \in A^c} \{z \in X \;:\; \langle y_v, z \rangle \leq \alpha_v\}.$$

Mivel itt $x \in A^c$ tetszőleges, ezért ebből következik, hogy

$$A^c \cap \left(\bigcap_{v \in A^c} \{z \in X \;:\; \langle y_v, z \rangle \leq \alpha_v\} \right) = \emptyset, \qquad \text{azaz}$$

$$A \supseteq \bigcap_{v \in A^c} \{z \in X \;:\; \langle y_v, z \rangle \leq \alpha_v\}.$$

Összevetve

$$A = \bigcap_{v \in A^c} \{z \in X \;:\; \langle y_v, z \rangle \leq \alpha_v\}.$$

Elégségesség: A zárt félterek zárt és konvex halmazok, így a metszetük is az. □

2.4.6. Megjegyzés. Az állítás erősíthető azzal, hogy a metszet indexhalmaza gyanánt az A^c tetszőleges sűrű részhalmaza is választható.

Szeparáció véges dimenziós térben

A következőkben legyen $(X, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ feletti véges dimenziós vektortér. Nyilván X-ben $\exists\; \langle ., . \rangle$ skaláris szorzat, amellyel $(X, \langle ., . \rangle)$ teljes skaláris szorzatos tér is, így a fenti állítások érvényben maradnak.

2.4.7. Megjegyzés. Ha $\{b_1,\ldots,b_n\} \subseteq X$ bázis, valamint $\{f_1,\ldots,f_n\} \subseteq X'$ az ehhez tartozó duális bázis, akkor $\forall\, x \in X$ esetén

$$x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i \,.$$

A reprezentációs $f_i = \langle a_i, . \rangle$ összefüggések alapján ez úgy írható, hogy

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i, x \rangle b_i \,.$$

2.4.8. Állítás. *Ha* $A \subseteq X$ *konvex halmaz és* $\mathbf{0} \notin A$, *akkor* $\exists\, (x_n)$ $(\mathrm{cl} A)^c$*-beli sorozat, amelyre* $\lim x_n = \mathbf{0}$, *azaz* $\lim \|x_n\| = 0$.

Bizonyítás. A $\mathbf{0} \notin \mathrm{cl} A$ eset $x_n \doteq \mathbf{0}$ választással nyilvánvaló.
Tegyük fel, hogy $\mathbf{0} \in \mathrm{cl} A$. Legyen $\{b_1,\ldots,b_m\} \subseteq A$ a $\mathrm{lin} A$ altér egy bázisa, valamint $\{f_1,\ldots,f_m\} \subseteq (\mathrm{lin} A)'$ a hozzátartozó duális bázis. Mivel $\mathrm{lin} A$ véges dimenziós, ezért $\forall\, i = 1,\ldots,m$ esetén f_i folytonos.
Belátjuk, hogy $\forall\, \alpha > 0$ esetén

$$(-\alpha) \cdot (b_1 + \cdots + b_m) \notin \mathrm{cl} A \,.$$

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\, \alpha > 0$, hogy

$$v \doteq (-\alpha) \cdot (b_1 + \cdots + b_m) \in \mathrm{cl} A \,.$$

Ekkor $\exists\, (y_n)$ A-beli sorozat, amelyre $\lim y_n = v$. Legyen $1 \le i \le m$ tetszőleges. Mivel f_i folytonos, ezért

$$\begin{aligned} \lim f_i(y_n) &= f_i(\lim y_n) = f_i(v) = f_i((-\alpha) \cdot (b_1 + \cdots + b_m)) \\ &= (-\alpha) \cdot (f_i(b_1) + \cdots + f_i(b_m)) = -\alpha < 0 \,, \end{aligned}$$

emiatt viszont $\exists\, n_i \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_i$ esetén $f_i(y_n) < 0$. Ezek szerint $\forall\, n > \max\{n_1,\ldots,n_m\}$ esetén, $\forall\, i = 1,\ldots,m$ mellett $f_i(y_n) < 0$. Legyen $n > \max\{n_1,\ldots,n_m\}$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor az

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m} f_i(y_n)} \,, \ \frac{-f_1(y_1)}{1 - \sum_{i=1}^{m} f_i(y_n)} \,, \ \ldots \ , \frac{-f_m(y_n)}{1 - \sum_{i=1}^{m} f_i(y_n)}$$

számok nemnegatívak és az összegük 1, ezért az $y_n, b_1, \ldots, b_m \in A$ vektoroknak az általuk képzett kombinációja konvex kombináció:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m} f_i(y_n)} \cdot y_n + \sum_{k=1}^{m} \frac{-f_k(y_n)}{1 - \sum_{i=1}^{m} f_i(y_n)} \cdot b_k \\ = \quad & \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m} f_i(y_n)} \cdot \left(y_n - \sum_{i=1}^{m} f_i(y_n) \cdot b_i \right) = \mathbf{0} \,. \end{aligned}$$

Mivel az $A \subseteq X$ halmaz konvex, ezért $\mathbf{0} \in A$, ami ellentmondás. Tehát $\forall\, \alpha > 0$ esetén

$$(-\alpha) \cdot (b_1 + \cdots + b_m) \notin \mathrm{cl} A\,.$$

Legyen $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n \doteq -\frac{1}{n} \cdot (b_1 + \cdots + b_n) \notin \mathrm{cl} A\,.$$

A fentiek szerint (x_n) $(\mathrm{cl} A)^c$-beli sorozat, és nyilván $\lim x_n = \mathbf{0}$. $\square$

2.4.9. Állítás (szeparáció véges dimenzióban)**.** *1. Ha $A \subseteq X$ nemüres, konvex halmaz és $\mathbf{0} \notin A$, akkor hipersíkkal szeparálhatók:*
$\exists\, y \in X,\ y \neq \mathbf{0}$ *vektor, hogy a* $y^{\perp} = \{z \in X\ :\ \langle y, z\rangle = 0\}$ *hipersík (maximális altér) szétválasztja (ún. gyenge módon) az A halmazt és a $\mathbf{0}$ pontot:*

$$\forall\, a \in A \ \ \textit{esetén}\ \ \langle y, a\rangle \leq 0\ (= \langle y, \mathbf{0}\rangle)\,,$$

másképpen

$$\sup_{a \in A} \langle y, a\rangle \leq 0\,.$$

2. Ha $A, B \subseteq X$ nemüres, diszjunkt és konvex halmazok, akkor hipersíkkal szeparálhatók:
$\exists\, y \in X,\ y \neq \mathbf{0}$ *vektor és* $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ *szám, hogy a* $\{z \in X\ :\ \langle y, z\rangle = \alpha\}$ *hipersík szétválasztja az A és B halmazt:*

$$\forall\, a \in A,\ b \in B \ \ \textit{esetén}\ \ \langle y, a\rangle \leq (\alpha \leq)\, \langle y, b\rangle\,,$$

másképpen

$$\sup_{a \in A} \langle y, a\rangle \leq \inf_{b \in B} \langle y, b\rangle\,.$$

Bizonyítás. 1. Az előző 2.4.8 állítás szerint $\exists\ (x_n)$ $(\mathrm{cl} A)^c$-beli sorozat, amelyre $\lim x_n = \mathbf{0}$, azaz $\lim \|x_n\| = 0$.
Mivel X véges dimenziós vektortér, így $(X, \langle .,. \rangle)$ teljes skaláris szorzatos tér is, ezért a zárt konvex halmaz és pont szigorú szeparációjára vonatkozó 2.4.4. állítás szerint $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén az $x_n \in (\mathrm{cl} A)^c$ pont és a $\mathrm{cl} A \subseteq X$ zárt konvex halmaz szigorúan szeparálhatók:
$\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\, y_n \in X$, $y_n \neq \mathbf{0}$, így feltehető, hogy $\|y_n\| = 1$, vektor, hogy

$$\forall\, a \in \mathrm{cl} A \ \ \text{esetén}\ \ \langle y_n, a\rangle < \langle y_n, x_n\rangle\,. \tag{2.20}$$

Mivel $(X, \langle .,. \rangle)$ véges dimenziós skaláris szorzatos tér, és $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $\|y_n\| = 1$, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle tétel szerint az (y_n) sorozatnak $\exists\ (y_{n_k})$ $\|.\|$-ban konvergens részsorozata, jelölje ekkor $y \doteq \lim y_{n_k}$.

Ekkor egyrészt $\|y\| = 1$, másrészt $\forall\, a \in \mathrm{cl} A$ esetén (de így nyilván $\forall\, a \in A$ esetén is) a (2.20) és a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} \langle y, a \rangle &= \langle \lim y_{n_k}, a \rangle = \lim \langle y_{n_k}, a \rangle \\ &\leq \lim \langle y_{n_k}, x_{n_k} \rangle \\ &\leq \lim \|y_{n_k}\| \cdot \|x_{n_k}\| = 0, \end{aligned}$$

ugyanis $\forall\, n_k \in \mathbb{N}$ esetén $\|y_{n_k}\| = 1$, valamint $\lim \|x_{n_k}\| = 0$.

2. Alkalmazzuk 1-et az $A - B$ halmazra:
Mivel A és B konvex halmazok, ezért $A - B$ is konvex, mivel pedig $A \cap B = \emptyset$, ezért $\mathbf{0} \notin A - B$. Így a már igazolt 1. pont szerint $\exists\, y \in X,\ y \neq \mathbf{0}$ vektor, hogy

$$\forall\, a \in A,\ b \in B \text{ esetén } \langle y, a - b \rangle \leq 0, \text{ azaz } \langle y, a \rangle \leq \langle y, b \rangle. \qquad \square$$

2.5. Szubderivált. Félig folytonos függvények

Kiterjesztett valós értékű függvények

2.5.1. Definíció. Legyen X tetszőleges halmaz. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvény *effektivitási tartományának* nevezzük a következő halmazt:

$$\mathrm{Dom}\, f \doteq \{x \in X \ :\ f(x) < +\infty\}.$$

2.5.2. Definíció. Legyen X tetszőleges halmaz. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt *valódinak* nevezünk, ha

$$-\infty \notin \mathscr{R}(f) \neq \{+\infty\},$$

részletesebben: $\forall\, x \in X$ esetén $-\infty < f(x)$, valamint $\exists\, x \in X$ hogy $f(x) < +\infty$, azaz $\mathrm{Dom}\, f \neq \emptyset$.

2.5.3. Definíció. Legyen X egy tetszőleges alaphalmaz. Egy $A \subseteq X$ halmaz *indikátorfüggvényének* nevezzük azt a $\delta_A = \delta(.|A) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amelyre $\forall\, x \in X$ esetén

$$\delta_A(x) \doteq \begin{cases} 0 & \text{, ha } \quad x \in A \\ +\infty & \text{, ha } \quad x \notin A \end{cases}.$$

2.5.4. Megjegyzés. A definícióból közvetlenül adódnak:

1. $\mathrm{Dom}\, \delta_A = A$.

2. Egy $A \subseteq X$ halmaz pontosan akkor nemüres, ha a $\delta_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ indikátorfüggvénye valódi.

2.5.5. Megjegyzés. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvénynek egy $A \subseteq X$ halmazra való leszűkítése lényegében az

$$f + \delta_A : X \to \overline{\mathbb{R}},$$

függvény, ugyanis ekkor $\mathrm{Dom}(f + \delta_A) \subseteq A$.
Ez a leszűkítési fogalom formálisan különbözik a klasszikustól, mert $\mathscr{D}(f + \delta_A) = X$, míg $\mathscr{D}(f|A) \subseteq A$.

2.5.6. Definíció (függvény epigráfja és hipográfja)**.** Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvény *epigráfjának* (gráf feletti halmazának) illetve *hipográfjának* (gráf alatti halmazának) nevezzük a következő halmazokat:

$$\mathrm{epi}\, f \doteq \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \ : \ x \in X,\ \alpha \geq f(x)\} \ \subseteq\ X \times \mathbb{R},$$

illetve

$$\mathrm{hypo}\, f \doteq \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \ : \ x \in X,\ \alpha \leq f(x)\} \ \subseteq\ X \times \mathbb{R}.$$

A konvex függvények folytonossága

2.5.7. Állítás. *Legyen* $(X, \|.\|)$ *normált tér, továbbá* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *konvex függvény. Ha* $\exists\, x_0 \in X$, *hogy* $f(x_0) = -\infty$, *akkor* $\forall\, x \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$ *esetén* $f(x) = -\infty$. *Átfogalmazva:*
Ha $\exists\, x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$, *hogy* $f(x_0) \neq -\infty$, *akkor* $\forall\, x \in X$ *esetén* $f(x) \neq -\infty$.

Bizonyítás. Ha $\exists\, x_0 \in X$, hogy $f(x_0) = -\infty$, akkor $\forall\, x \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$ esetén $\exists\, \delta > 1$, hogy az

$$y \doteq x_0 + \delta(x - x_0) \in \mathrm{Dom}\, f, \quad \text{azaz} \quad f(y) < +\infty.$$

Mivel $\frac{1}{\delta} \in (0,1)$, és $x = \frac{1}{\delta} y + (1 - \frac{1}{\delta}) x_0$, ezért f konvexitása miatt

$$f(x) = f\left(\frac{1}{\delta} y + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) x_0\right) \leq \frac{1}{\delta} f(y) + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) f(x_0) = -\infty. \qquad \square$$

2.5.8. Megjegyzés. Az állítás alapján érthető, hogy miért zártuk ki a valódi függvények értékkészleteiből a $-\infty$ értéket. Konkáv függvényekre éppen fordított a helyzet. Mivel elég az egyik típust vizsgálni, és közülük a konvex függvényeket választottuk, ezért definiáltuk így a valódi függvényt.

2.5.9. Definíció. 1. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt *lokálisan felülről korlátosnak* nevezünk egy $x_0 \in X$ pontban, ha $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ szám és $\exists\, U$ környezete az x_0 pontnak, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $f(x) \leq \alpha$.

2. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt *lokálisan felülről korlátosnak* nevezünk egy $D \subseteq X$ halmazon, ha $\forall\, x \in D$ pontban lokálisan felülről korlátos.

2.5.10. Állítás (konvex függvények folytonossága)**.** *Legyen* $(X, \|.\|)$ *normált tér, továbbá* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *konvex függvény. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *Az f függvény lokálisan felülről korlátos valamely $x_0 \in X$ pontban.*

(2) $\mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f) \neq \emptyset$, *és az f függvény lokálisan felülről korlátos az* $\mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$ *halmazon.*

(3) *Az f függvény folytonos valamely $x_0 \in X$ pontban.*

(4) $\mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f) \neq \emptyset$, *és az f függvény folytonos az* $\mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$ *halmazon.*

(5) $\mathrm{int}(\mathrm{epi}\, f) \neq \emptyset$.

A fentiek fennállása esetén az is teljesül, hogy

$$\mathrm{int}(\mathrm{epi}\, f) = \{(x, \alpha) \ : \ x \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f),\ f(x) < \alpha\}.$$

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (1) és (4) $\Rightarrow$ (3): nyilvánvaló.

(1) $\Rightarrow$ (2): Legyen az f függvény lokálisan felülről korlátos egy $x_0 \in X$ pontban, azaz $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ szám és $\exists\ U$ környezete az x_0 pontnak, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $f(x) \leq \alpha$.

$\mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f) \neq \emptyset$: A fentiek szerint $\forall\, x \in U$ esetén $f(x) \leq \alpha < +\infty$ ez azt jelenti, hogy $U \subseteq \mathrm{Dom}\, f$, ezért $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$, így $\mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f) \neq \emptyset$.

Lokális felülről korlátosság az $\mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$ halmazon: Legyen $x \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$ tetszőleges pont, ekkor $\exists\ \delta > 1$, hogy

$$y \doteq x_0 + \delta(x - x_0) \in \mathrm{Dom}\, f, \quad \text{azaz} \quad f(y) < +\infty.$$

Jelölje $\gamma \doteq \frac{1}{\delta}$, ekkor $\gamma \in (0,1)$. Tekintsük az x pont $x + (1-\gamma)(U - x_0)$ környezetét, és legyen $z \in x + (1-\gamma)(U - x_0)$ tetszőleges. Ekkor $\exists\, u \in U$, hogy $z = x + (1-\gamma)(u - x_0)$, valamint

$$\begin{aligned}
\gamma y + (1-\gamma)\, u &= \gamma(x_0 + \delta(x - x_0)) + (1-\gamma)\, u \\
&= x - (1-\gamma)\, x_0 + (1-\gamma)\, u \\
&= x - (1-\gamma)(u - x_0) = z.
\end{aligned}$$

Mivel az f függvény konvex, és $\gamma \in (0,1)$, ezért

$$f(z) = f(\gamma y + (1-\gamma) u) \leq \gamma f(y) + (1-\gamma) f(u) \leq \gamma f(y) + (1-\gamma)\alpha \doteq \alpha_y \in \mathbb{R}.$$

Ezek szerint $\forall\, z \in x + (1-\gamma)(U - x_0)$ esetén $f(z) \leq \alpha_y$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Legyen az f függvény folytonos egy $x_0 \in X$ pontban, azaz $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, U$ környezete az x_0 pontnak, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Ekkor $\forall\, x \in U$ esetén

$$f(x) \leq |f(x)| \leq |f(x_0)| + \varepsilon \doteq \alpha.$$

(1) $\Rightarrow$ (3): Ha $f(x_0) = -\infty$, akkor a 2.5.7. állítás szerint $\forall\ x \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$ esetén $f(x) = -\infty$, ezért folytonos az x_0 pontban, sőt az egész $\mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$ halmazon.

Tegyük fel, hogy $f(x) \in \mathbb{R}$. Toljuk be az f függvényt az $(x_0, f(x_0))$ pontból az origóba, azaz legyen $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ az a függvény, amelyre $\forall\, x \in X$ esetén

$$g(x) \doteq f(x+x_0) - f(x_0)\,.$$

Nyilván a g függvény lokálisan felülről korlátos a $\mathbf{0}$ pontban, azaz $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ szám és $\exists\, U$ környezete a $\mathbf{0}$ pontnak, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $g(x) \le \alpha$.
Belátjuk, hogy $\forall\ 0 < \varepsilon < \alpha$ esetén a $\mathbf{0}$ pont

$$V_\varepsilon \doteq \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}U\right) \cap \left(-\frac{\varepsilon}{\alpha}U\right)$$

környezete mellett $\forall\, x \in V_\varepsilon$ esetén

$$|g(x)| \le \varepsilon\,, \quad \text{azaz} \quad |f(x+x_0) - f(x_0)| \le \varepsilon\,,$$

ami azt jelenti, hogy az f függvény folytonos az x_0 pontban.
Ugyanis: Legyen $x \in V_\varepsilon$ tetszőleges.
Ekkor egyrészt $x \in \frac{\varepsilon}{\alpha}U$, azaz $\frac{\alpha}{\varepsilon}x \in U$, ezért a fentiek szerint $g(\frac{\alpha}{\varepsilon}x) \le \alpha$. Mivel

$$x = \frac{\varepsilon}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}x\right) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\mathbf{0}\,, \ \text{ahol}\ \frac{\varepsilon}{\alpha} \in (0,1)\,,$$

ezért a g függvény konvexitása miatt

$$g(x) = g\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}x\right) + \left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\mathbf{0}\right) \le \frac{\varepsilon}{\alpha}g\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}x\right) + \left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)g(\mathbf{0}) \le \frac{\varepsilon}{\alpha}\alpha = \varepsilon\,.$$

Másrészt $x \in -\frac{\varepsilon}{\alpha}U$, azaz $-\frac{\alpha}{\varepsilon}x \in U$, ezért a fentiek szerint $g(-\frac{\alpha}{\varepsilon}x) \le \alpha$. Mivel

$$\mathbf{0} = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}x + \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha}}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}x\right)\,, \quad \text{ahol}$$

$$\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}\,, \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha}}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}} \ge 0\,,\ \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}} + \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha}}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}} = 1\,,$$

ezért a g függvény konvexitása miatt

$$\begin{aligned}
0 \quad &= \quad g(\mathbf{0}) = g\left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}x + \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha}}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}x\right)\right) \\
&\le \quad \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}g(x) + \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha}}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}g\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}x\right) \le \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}g(x) + \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha}}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}\alpha \\
&= \quad \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}g(x) + \frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}\,,
\end{aligned}$$

amiből

$$g(x) \ge -\frac{\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}} \cdot \left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) = -\varepsilon\,.$$

$(2) \Leftrightarrow (4)$: Mivel $(1) \Leftrightarrow (3)$, valamint a (2) illetve a (4) állítás az (1) illetve a (3) állítás kiterjesztése az $\operatorname{int}(\operatorname{Dom} f)$ halmazra, ezért $(2) \Leftrightarrow (4)$.

$(1) \Rightarrow (5)$: Legyen az f függvény lokálisan felülről korlátos egy $x_0 \in X$ pontban, azaz $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ szám és $\exists\ U$ környezete az x_0 pontnak, hogy $\forall\ x \in U$ esetén $f(x) \leq \alpha$, emiatt

$$U \times [\alpha, +\infty) \subseteq \operatorname{epi} f\,,$$

ezért $\forall\ \beta > \alpha$ esetén $(x_0, \beta) \in \operatorname{int}(\operatorname{epi} f)$, így $\operatorname{int}(\operatorname{epi} f) \neq \emptyset$.

$(5) \Rightarrow (1)$: Legyen $\operatorname{int}(\operatorname{epi} f) \neq \emptyset$, ekkor $\exists\, x_0 \in X$ pont és U környezete az x_0 pontnak, valamint $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta$, hogy

$$U \times (\alpha, \beta) \subseteq \operatorname{epi} f\,,$$

ekkor $\forall\ x \in U$ esetén $f(x) \leq \alpha$, azaz az f függvény lokálisan felülről korlátos az $x_0 \in X$ pontban.

Végül belátjuk, hogy az (1)-(5) tulajdonságok teljesülése esetén

$$\operatorname{int}(\operatorname{epi} f) = \{(x, \alpha)\ :\ x \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} f),\ f(x) < \alpha\}\,.$$

„$\subseteq$”: Ha $(x, \alpha) \in \operatorname{int}(\operatorname{epi} f)$, akkor az x pontnak $\exists\, U \subseteq X$ környezete, és $\exists\, \beta \in \mathbb{R},\ \beta < \alpha$, hogy $U \times (\beta, \infty) \subseteq \operatorname{epi} f$, ezért $\forall\ x \in U$ esetén $f(x) \leq \beta$, így $U \subseteq \operatorname{Dom} f$. Ezek szerint $x \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} f)$, és $f(x) < \alpha$.

„$\supseteq$”: Ha $x \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom} f)$, és $f(x) < \alpha$, akkor $\exists\, \beta \in \mathbb{R},\ f(x) < \beta < \alpha$. Mivel a (4) feltétel értelmében az f függvény folytonos az x pontban, ezért $\exists\, U \subseteq X$ környezete, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $f(x) < \beta$, emiatt $U \times (\beta, \infty) \subseteq \operatorname{epi} f$. Ezek szerint $(x, \alpha) \in \operatorname{int}(\operatorname{epi} f)$.
$\square$

A szubderivált

Ebben a szakaszban legyen $(X, \|.\|)$ normált tér.

2.5.11. Definíció (szubderivált)**.** Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ valódi konvex függvény egy $x \in \operatorname{Dom} f$ pontbeli szubderiváltja a

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^*\ :\ \langle x^*, z - x\rangle \leq f(z) - f(x),\ \forall\ z \in X\} \subseteq X^*$$

halmaz.

A szubderiválási szabályok

2.5.12. Megjegyzés. A szubderiválttal való számoláshoz hasonló számolási szabályokra lenne szükségünk, mint a differenciálható függvények körében ismert deriválási szabályok:

(1) homogenitás: $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$,

(2) additivitás: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

A szubderiválás is rendelkezik hasonló tulajdonságokkal. Egyrészt pozitív homogén, másrészt szuperadditív. E tulajdonságok könnyen beláthatók. Nem túl erős feltétel mellett azonban igaz az additivitás is. A bizonyításhoz felhasználjuk a normált terekre vonatkozó Hahn-Banach-tételt.

2.5.13. Állítás (a szubderivált pozitív homogenitása)**.** *Legyen* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *valódi konvex függvény. Ekkor* $\forall\, \lambda > 0$ *esetén a* $\lambda \cdot f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *függvény szubdifferenciáltja egy* $x \in \operatorname{Dom} f$ *pontban*

$$\partial(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot \partial f(x).$$

Bizonyítás. A definícióból következik. □

2.5.14. Állítás (Moreau-Rockafellar-tétel, a szubderivált additivitása)**.** *I. Legyenek* f *és* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *valódi konvex függvények.*
(1) *Ekkor* $\forall\, x \in X$ *pontban*

$$\partial(f+g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x).$$

(2) *Ha* $\exists\, x_0 \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ *pont, hogy az egyik (például az* f*) függvény folytonos az* x_0 *pontban, akkor* $\forall\, x \in X$ *pontban*

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

II. Legyenek $f_1, \ldots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *valódi konvex függvények.*
(1) Ekkor $\forall\, x \in X$ *pontban*

$$\partial(f_1 + \ldots + f_n)(x) \supseteq \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_n(x).$$

(2) Ha $\exists\, x_0 \in \operatorname{Dom} f_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Dom} f_n$ *pont, hogy az legfeljebb egy kivételével mindegyik függvény folytonos az* x_0 *pontban, akkor* $\forall\, x \in X$ *pontban*

$$\partial(f_1 + \ldots + f_n)(x) = \partial f_1(x) + \ldots + \partial f_n(x).$$

Bizonyítás. Mivel I.⇒II. könnyen bizonyítható teljes indukcióval, ezért csak az I.-t bizonyítjuk. Legyen $x \in X$ tetszőleges pont.

(1) Legyen $x^* \in \partial f(x) + \partial g(x)$ tetszőleges, azaz

$$\exists\, x_1^* \in \partial f(x) \quad \text{és} \quad \exists\, x_2^* \in \partial g(x), \quad \text{hogy} \quad x^* = x_1^* + x_2^*,$$

azaz a definíció szerint $\forall\, z \in X$ esetén

$$\langle x_1^*, z - x\rangle \le f(z) - f(x), \quad \text{és} \quad \langle x_2^*, z - x\rangle \le g(z) - g(x), \quad \text{hogy} \quad x^* = x_1^* + x_2^*,$$

ekkor pedig

$$\begin{aligned} \langle x^*, z - x\rangle &= \langle x_1^* + x_2^*, z - x\rangle = \langle x_1^*, z - x\rangle + \langle x_2^*, z - x\rangle \\ &\le f(z) - f(x) + g(z) - g(x) = (f+g)(z) - (f+g)(x), \end{aligned}$$

azaz az ekvivalens definíció szerint $x^* \in \partial(f+g)(x)$.

(2) Elég belátni (1) miatt, hogy

$$\partial(f+g)(x) \subseteq \partial f(x) + \partial g(x)\,.$$

Legyen $x^* \in \partial(f+g)(x)$ tetszőleges, ekkor a szubderivált definíciója szerint $\forall\, z \in X$ esetén

$$\langle x^*, z-x\rangle \leq (f+g)(z) - (f+g)(x).$$

Legyen

$$\begin{aligned} C_1 &\doteq \operatorname{epi} f - (x, f(x)) \\ &= \{(v,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \,:\, \alpha \geq f(x+v) - f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Mivel az f függvény konvex, azaz az $\operatorname{epi} f$ halmaz konvex, ezért a C_1 halmaz is konvex. Mivel feltettük, hogy az f függvény folytonos egy x_0 pontban, ami a konvex függvények folytonosságáról szóló 2.5.10. állítás (5) pontja szerint ekvivalens azzal, hogy $\operatorname{int}\operatorname{epi} f \neq \emptyset$, ezért $\operatorname{int} C_1 \neq \emptyset$.

Legyen

$$\begin{aligned} C_2 &\doteq \operatorname{hypo}(-g+x^*) \setminus \operatorname{graph}(-g+x^*) - (x, (-g+x^*)(x)) \\ &= \{(v,\alpha) \in X \times \mathbb{R} \,:\, \alpha < -g(x+v) + \langle x^*, v\rangle + g(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Mivel a g és a $-x^*$ függvény konvex, így a $\operatorname{hypo}(-g+x^*) \setminus \operatorname{graph}(-g+x^*)$ halmaz konvex, ezért a C_2 halmaz is konvex.

Gondoljuk meg, hogy $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.
Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\, (v,\alpha) \in C_1 \cap C_2$, ekkor

$$\begin{aligned} &f(x+v) - f(x) \leq \alpha < -g(x+v) + \langle x^*, v\rangle + g(x)\,, \quad \text{azaz} \\ &\langle x^*, v\rangle > f(x+v) + g(x+v) - f(x) - g(x)\,, \end{aligned}$$

ekkor a $z \doteq x+v \in X$ vektorra

$$\langle x^*, z-x\rangle > (f+g)(z) - (f+g)(x)\,,$$

ami azt jelenti, hogy $x^* \notin \partial(f+g)(x)$, ami ellentmondás.

Mindezek alapján a Hahn-Banach-tétel szerint a C_1 és $C_2 \subseteq X \times \mathbb{R}$ konvex halmazok szeparálhatóak, azaz $\exists\, (y^*, \beta) \subseteq X^* \times \mathbb{R}$ nemnulla folytonos lineáris funkcionál, hogy

$$\sup_{(v,\alpha)\in C_1} (\langle y^*, v\rangle + \beta\cdot\alpha) \leq \inf_{(v,\alpha)\in C_2} (\langle y^*, v\rangle + \beta\cdot\alpha)\,. \tag{2.21}$$

Gondoljuk meg, hogy $\beta \neq 0$.

Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\beta = 0$. Ekkor az y^* nemnulla lineáris funkcionál, azaz $\exists\, y_0$, hogy $\langle y^*, y_0\rangle > 0$. Az előző (2.21) kifejezés a következő alakot ölti:

$$\sup_{(v,\alpha)\in C_1} \langle y^*, v\rangle \le \inf_{(v,\alpha)\in C_2} \langle y^*, v\rangle\,.$$

Mivel

$$v \in \operatorname{Dom} f - x \;\Leftrightarrow\; \exists\, \alpha,\ \text{hogy}\ (v,\alpha)\in C_1\,,$$

hasonlóan

$$v \in \operatorname{Dom} g - x \;\Leftrightarrow\; \exists\, \alpha,\ \text{hogy}\ (v,\alpha)\in C_2\,,$$

ezért a fenti egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\sup_{v\in \operatorname{Dom} f - x} \langle y^*, v\rangle \le \inf_{v\in \operatorname{Dom} g - x} \langle y^*, v\rangle\,. \tag{2.22}$$

Feltettük, hogy $\exists\, x_0 \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ pont, amelyben az f függvény folytonos. Ekkor az f függvény az x_0 pont egy egész környezetében is felülről korlátos, így $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{Dom} f$. Ezért $\exists\, \lambda > 0$, amelyre $x_0 + \lambda y_0 \in \operatorname{Dom} f$, következésképp

$$\begin{aligned}
\inf_{v\in \operatorname{Dom} g - x} \langle y^*, v\rangle &\le \langle y^*, x_0 - x\rangle \\
&< \langle y^*, x_0 + \lambda y_0 - x\rangle \\
&\le \sup_{v\in \operatorname{Dom} f - x} \langle y^*, v\rangle\,,
\end{aligned}$$

ami ellentmond (2.22)-nek.

Ezek után gondoljuk meg, hogy $\beta < 0$.
Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\beta > 0$. Ekkor a (2.21) kifejezés baloldala $+\infty$, mert a baloldalon α tetszőleges nagy lehet, ez pedig ellentmodás.

Osszuk el a (2.21) kifejezést $|\beta|$-kel. Mivel $\frac{\beta}{|\beta|} = -1$, ezért a $(|\beta|^{-1} y^*, -1) \in X^* \times \mathbb{R}$ (nemnulla) lineáris funkcionál szeparálja a C_1 és C_2 halmazokat:

$$\sup_{(v,\alpha)\in C_1} \Big(\langle |\beta|^{-1} y^*, v\rangle - \alpha \Big) \le \inf_{(v,\alpha)\in C_2} \Big(\langle |\beta|^{-1} y^*, v\rangle - \alpha \Big)\,.$$

Mivel pedig

$$(v,\alpha)\in C_1 \;\Leftrightarrow\; v \in \operatorname{Dom} f - x \ \text{ és }\ \alpha \ge f(x+v) - f(x)\,,$$

hasonlóan

$$(v,\alpha)\in C_2 \;\Leftrightarrow\; v \in \operatorname{Dom} g - x \ \text{ és }\ \alpha < -g(x+v) + \langle x^*, v\rangle + g(x)\,,$$

ezért

$$\begin{aligned}
& \sup_{v\in \mathrm{Dom}\, f - x} \Big(\langle |\beta|^{-1} y^*, v\rangle - (f(x+v) - f(x)) \Big) \\
\leq \quad & \sup_{(v,\alpha)\in C_1} \Big(\langle |\beta|^{-1} y^*, v\rangle - \alpha \Big) \\
\leq \quad & \inf_{(v,\alpha)\in C_2} \Big(\langle |\beta|^{-1} y^*, v\rangle - \alpha \Big) \\
\leq \quad & \inf_{v\in \mathrm{Dom}\, g - x} \Big(\langle |\beta|^{-1} y^*, v\rangle - (-g(x+v) + \langle x^*, v\rangle + g(x)) \Big) \,.
\end{aligned}$$

Mivel $x \in \mathrm{Dom}\, g$, ezért ennek az egyenlőtlenség-sorozatnak a végén az infimum mögötti kifejezés speciálisan $v = \mathbf{0} \in \mathrm{Dom}\, g - x$ esetén 0, emiatt ennek az egyenlőtlenségsorozatnak az elején a szuprémum mögötti kifejezésre $\forall\, v \in \mathrm{Dom}\, f - x$ esetén teljesül, hogy

$$\langle |\beta|^{-1} y^*, v\rangle - (f(x+v) - f(x)) \leq 0\,, \text{ azaz } \langle |\beta|^{-1} y^*, v\rangle \leq f(x+v) - f(x)\,,$$

ami a szubderivált definíciója azt jelenti, hogy

$$|\beta|^{-1} y^* \in \partial f(x)\,.$$

Mivel pedig $x \in \mathrm{Dom}\, f$, ezért a szóbanforgó egyenlőtlenség-sorozatnak az elején a szuprémum mögötti kifejezés speciálisan $v = \mathbf{0} \in \mathrm{Dom}\, f - x$ esetén 0, emiatt ennek az egyenlőtlenség-sorozatnak a végén az infimum mögötti kifejezésre $\forall\, v \in \mathrm{Dom}\, g - x$ esetén teljesül, hogy

$$\langle |\beta|^{-1} y^*, v\rangle - (-g(x+v) + \langle x^*, v\rangle + g(x)) \geq 0\,, \text{ azaz}$$

$$\langle x^* - |\beta|^{-1} y^*, v\rangle \leq g(x+v) - g(x)\,,$$

ami a szubderivált definíciója szerint azt jelenti, hogy

$$x^* - |\beta|^{-1} y^* \in \partial g(x)\,.$$

Így

$$x^* = |\beta|^{-1} y^* + (x^* - |\beta|^{-1} y^*) \in \partial f(x) + \partial g(x)\,. \qquad \square$$

Speciális függvények szubderiváltjai

2.5.15. Példa (abszolútérték)**.** A $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abszolútérték szubderiváltja:

$$\partial |.|(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha} \quad x > 0 \\ [-1, 1] & \text{, ha} \quad x = 0 \\ -1 & \text{, ha} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Ugyanis: Ha $x \neq 0$, akkor $|.|$ differenciálható.

Legyen $x = 0$, ekkor a szubderivált definíciója szerint $\forall\, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$\partial |.|(0) = \{x^* \in \mathbb{R} \;:\; x^* \cdot z \leq |z|\,,\; \forall z \in \mathbb{R}\} = [-1,1]\,.$$

Itt felhasználtuk, hogy $z > 0$ esetén $x^* z \leq z \;\Leftrightarrow\; x^* \leq 1$, illetve $z < 0$ esetén $x^* z \leq -z \;\Leftrightarrow\; x^* \geq -1$.

2.5.16. Példa (norma)**.** Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér. A $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ norma szubderiváltja:

$$\partial \|.\|(x) = \begin{cases} \overline{B}^*(\mathbf{0},1) = \{x^* \in X^* \;:\; \|x^*\| \leq 1\} & \text{, ha} \quad x = \mathbf{0} \\ \{x^* \in X^* \;:\; \|x^*\| = 1,\; \langle x^*, x\rangle = \|x\|\}, & \text{, ha} \quad x \neq \mathbf{0} \end{cases}.$$

Ugyanis: Legyen $x = \mathbf{0}$. A szubderivált definíciója szerint

$$\begin{aligned} \partial \|.\|(\mathbf{0}) &= \{x^* \in X^* \;:\; \langle x^*, z - \mathbf{0}\rangle \leq \|z\| - \|\mathbf{0}\|,\; \forall\, z \in X\}, \\ &= \{x^* \in X^* \;:\; \langle x^*, z\rangle \leq \|z\|,\; \forall\, z \in X\}, \\ &= \{x^* \in X^* \;:\; \langle x^*, \frac{1}{\|z\|} z\rangle \leq 1,\; \forall\, z \in X \setminus \{\mathbf{0}\}\}, \\ &= \{x^* \in X^* \;:\; \|x^*\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Az utolsó lépéshez felhasználtuk, hogy $\|x^*\| = \sup_{\|z\|=1} \langle x^*, z\rangle$.

Legyen $x \neq \mathbf{0}$.
Tegyük fel, hogy x^* benne van a jobboldali halmazban, azaz legyen $\|x^*\| = 1$ és $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$, ekkor $\forall\, z \in X$ esetén

$$\langle x^*, z\rangle \leq \|x^*\| \cdot \|z\| = \|z\|\,,$$

ezek szerint

$$\langle x^*, z - x\rangle = \langle x^*, z\rangle - \langle x^*, x\rangle \leq \|z\| - \|x\|\,,$$

ami a szubderivált definíciója szerint azt jelenti, hogy $x^* \in \partial \|.\|(x)$.
Megfordítva, most tegyük fel, hogy $x^* \in \partial \|.\|(x)$. Ekkor

$$\begin{aligned} -\|x\| &= \|\mathbf{0}\| - \|x \geq \langle x^*, \mathbf{0} - x\rangle = -\langle x^*, x\rangle\,, \\ \|x\| &= \|2x\| - \|x \geq \langle x^*, 2x - x\rangle = \langle x^*, x\rangle\,, \end{aligned}$$

ezek szerint

$$\|x\| = \langle x^*, x\rangle\,. \tag{2.23}$$

Továbbá $\forall\, z \in X$ és $\lambda > 0$ esetén

$$\lambda \langle x^*, z\rangle = \langle x^*, \lambda z\rangle \leq \|x + \lambda z\| - \|x\|\,, \quad \text{azaz}$$

$$\langle x^*, z\rangle \leq \|(1/\lambda)x + z\| - (1/\lambda)\|x\|\,,$$

innen $\lambda \to \infty$ mellett azt kapjuk, hogy $\forall\, z \in X,\ z \neq \mathbf{0}$ esetén

$$\langle x^*, z\rangle \leq \|z\|\,, \quad \text{azaz} \quad \langle x^*, (1/\|z\|)z\rangle \leq 1\,,$$

ezért $\|x^*\| = \sup_{\|z\|=1}\langle x^*, z\rangle \leq 1$. Ugyanakkor (2.23) alapján

$$\langle x^*, (1/\|x\|)x\rangle = (1/\|x\|)\cdot\langle x^*, x\rangle = (1/\|x\|)\cdot\|x\| = 1\,,$$

összességében tehát $\|x^*\| = 1$.

2.5.17. Megjegyzés. Ha $(X, \langle .,.\rangle)$ Hilbert tér, akkor az $X = X^*$ azonosítás alapján a kapottakból könnyen látható, hogy

$$\partial\|.\|(x) = \begin{cases} \overline{B}(\mathbf{0},1) & \text{, ha} \quad x = \mathbf{0} \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{, ha} \quad x \neq \mathbf{0} \end{cases}\,.$$

Halmaz normális kúpja

Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér.

2.5.18. Definíció. Legyen $A \subseteq X$ adott halmaz, $x \in A$ pedig adott pont.

1. Egy $x^* \in X^*$ folytonos lineáris funkcionált az A halmaz x pontbeli *támaszfunkcionáljának* nevezzük, ha

$$\forall\, z \in A \;\text{ esetén } \langle x^*, z\rangle \leq \langle x^*, x\rangle\,.$$

Ha x^* nemnulla folytonos lineáris funkcionál, akkor ez azt jelenti, hogy gyengén szeparálja az A halmazt az x ponttól.

2. Az A halmaz x pontbeli *normális halmaza*:

$$N_A(x) \doteq \{x^* \in X^* \;:\; \langle x^*, z\rangle \leq \langle x^*, x\rangle,\ \forall\, z \in A\}\,.$$

2.5.19. Állítás. *Tetszőleges $x \in A \subseteq X$ esetén az $N_A(x) \subseteq X^*$ halmaz*

(1) *zárt,*

(2) *konvex kúp,*

(3) *ha $x \in \operatorname{int} A$, akkor $N_A(x) = \{\mathbf{0}_X^*\}$*

Bizonyítás. A definícióból következnek. ☐

2.5.20. Állítás. *Ha $A \subseteq X$ affin halmaz, azaz $A = L + x_0$, ahol $L \subseteq X$ altér, $x_0 \in A$ tetszőleges, akkor $\forall\, x \in A$ esetén*

$$N_A(x) = L^- \doteq \{x^* \in X^* \;:\; \langle x^*, v\rangle \leq 0,\ \forall\, v \in L\}\,.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} N_A(x) &= \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, z\rangle \le \langle x^*, x\rangle, \ \forall\, z \in L + x_0\} \\ &= \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, z - x\rangle \le 0, \ \forall\, z, \ z - x_0 \in L\} \\ &= \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, v\rangle \le 0, \ \forall\, v \in L\}. \end{aligned}$$

□

2.5.21. Példa (indikátorfüggvény)**.** Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér. Egy $A \subseteq X$ halmaz $\delta_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ indikátorfüggvényének $\forall\, x \in \operatorname{Dom}\delta_A = A$ pontban a szubderiváltja:

$$\partial\delta_A(x) = \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, z\rangle \le \langle x^*, x\rangle, \ \forall\, z \in A\} = N_A(x).$$

Ugyanis: A szubderivált definíciója szerint:

$$\begin{aligned} \partial\delta_A(x) &= \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, z - x\rangle \le \delta_A(z) - \delta_A(x), \ \forall\, z \in X\} \\ &= \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, z - x\rangle \le 0, \ \forall\, z \in A\} \\ &= \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, z\rangle \le \langle x^*, z\rangle, \ \forall\, z \in A\} = N_A(x). \end{aligned}$$

Az alulról és felülről félig folytonos függvények

A kiterjesztett valós számok alsó és felső topológiái

2.5.22. Definíció (a kiterjesztett valós számok topologizálása)**.** Az $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjeszett valós számok halmazán — kitüntetve a többi később bevezetett topológia között — közönséges topológiának nevezzük azt a τ topológiát, amelyet a

$$\{(\alpha, \beta), \ (\alpha, \infty], \ [-\infty, \beta) \ : \ \alpha, \ \beta \in \overline{\mathbb{R}}\} \cup \{\overline{\mathbb{R}}\} \cup \{\emptyset\},$$

halmazrendszer mint bázis generál.

Az előzőekben bevezetett közönséges topológia mellett, azzal szoros kapcsolatban lévő, két másik topológiát is bevezetünk.

2.5.23. Definíció (az alsó és felső topológiák a kiterjesztett valós számokon)**.** 1. Az $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjeszett valós számok halmazán alsó topológiának nevezzük azt a τ_a topológiát, amelyben a nyílt halmazok összessége:

$$\tau_a \doteq \{(\alpha, +\infty] \ : \ \alpha \in \overline{\mathbb{R}}\} \cup \{\overline{\mathbb{R}}\} \cup \{\emptyset\}.$$

2. Az $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjeszett valós számok halmazán felső topológiának nevezzük azt a τ_f topológiát, amelyben a nyílt halmazok összessége:

$$\tau_f \doteq \{[-\infty, \alpha) \ : \ \alpha \in \overline{\mathbb{R}}\} \cup \{\overline{\mathbb{R}}\} \cup \{\emptyset\}.$$

2.5.24. Megjegyzés. 1. Könnyen látható, hogy a definícióban megadott halmazrendszerek valóban topológiát adnak, azaz zártak a tetszőleges unió és véges metszet képzésére.
Ugyanis: Az alsó topológia egyrészt végesmetszetzárt:

$$\bigcap_{i=1}^{n}(\alpha_i,+\infty] = (\max_{1\le i\le n}\alpha_i,+\infty] \in \tau_a\,,$$

másrészt tetszőleges számú unióra nézve zárt:

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(\alpha_\gamma,+\infty] = (\inf_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma,+\infty] \in \tau_a\,.$$

2. A fenti topológiák a következőképpen is felírhatók:

$$\tau_a = \{(\alpha,+\infty]\ :\ \alpha\in\overline{\mathbb{R}}\}\cup\{\overline{\mathbb{R}}\}\,,$$

illetve

$$\tau_f = \{[-\infty,\alpha)\ :\ \alpha\in\overline{\mathbb{R}}\}\cup\{\overline{\mathbb{R}}\}\,,$$

ugyanis az üres halmaz előáll $\emptyset = (+\infty,+\infty]$ illetve $\emptyset = [-\infty,-\infty)$ alakban.
A fenti topológiák egy-egy bázisa pedig:

$$\{(\alpha,+\infty]\ :\ \alpha\in\overline{\mathbb{R}}\}\,,$$

illetve

$$\{[-\infty,\alpha)\ :\ \alpha\in\overline{\mathbb{R}}\}\,,$$

ugyanis $\overline{\mathbb{R}} = \cup(\alpha,+\infty]$ illetve $\overline{\mathbb{R}} = \cup[-\infty,-\alpha)$.

3. Az alsó és felső topológiák a rendezés megfordításával kaphatók meg egymásból, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy az $x\mapsto -x$ leképezés bijekciója az $\overline{\mathbb{R}}$ egyenesnek, továbbá az alsó topológiát a felsőbe viszi, és megfordítva. Emiatt a továbbiakban csak az alsó topológiával foglalkozunk részletesen, mert minden könnyen átfogalmazható a felső topológiára.

4. A kiterjesztett valós számok az alsó illetve a felső topológiával ellátva nem Hausdorff-terek.
Ugyanis: Például a $0\in\overline{\mathbb{R}}$ pont minden τ_a-környezete tartalmazza az 1-et, mert tartalmaz egy $(-\alpha,+\infty]$, $(\alpha>0)$ félegyenest.

5. Mivel ezek a topologikus terek nem Hausdorff-terek, ezért nem is metrizálhatók.

2.5.25. Állítás (az alsó és felső topológiák együtt a közönséges topológia)**.** *Az $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjesztett számokon definiált τ_a alsó és τ_f felső topológiák uniója, mint szubbázis által generált $\tau_a\vee\tau_f$ topológia megegyezik az 2.5.22. definicióban megadott közönséges τ topológiával.*

Bizonyítás. Az alsó és felső topológiák nyílt halmazai nyílt halmazok a közönséges topológiában, ezért elégséges azt megmutatnunk, hogy az uniójuk által generált topológia tartalmazza a közönséges topológia egy bázisát. Ez viszont egyszerűen látható, hiszen két $[-\infty,\beta)$ és $(\alpha,\infty]$ félegyenes metszeteként minden (α,β) nyílt intervallum megkapható, a $-\infty$ és ∞ körüli félegyenesek pedig benne vannak az alsó illetve felső topológiában. □

Konvergencia az alsó és felső topológiában

A kiterjesztett valós számok az alsó illetve a felső topológiával ellátva nem Hausdorff-terek, ezért ezekben a terekben a határérték nem egyértelmű, emiatt pedig a sorozatok vizsgálatánál óvatosan kell eljárni.

2.5.26. Állítás (Konvergencia az alsó topológiában). *Legyen (x_n) tetszőleges sorozat az $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjesztett valós számok halmazában. Ekkor az alsó topológiában való konvergenciára az alábbiak igazak.*

(1) *Az (x_n) sorozat tart a $-\infty$ értékhez:*

$$-\infty \in \tau_a - \lim x_n \, .$$

(2) *Ha az (x_n) sorozat tart az x számhoz, akkor tart minden, az x-nél kisebb számhoz:*

$$x \in \tau_a - \lim x_n \, , \; y < x \qquad \Rightarrow \qquad y \in \tau_a - \lim x_n \, .$$

(3) *Az x_n sorozat alsó topológiában vett határértékei között van maximális:*

$$\exists \; \max \left(\tau_a - \lim x_n\right).$$

(4) *Az x_n sorozat alsó topológiában vett határértékeinek a maximuma megegyezik a sorozat limesz inferiorjával:*

$$\max \left(\tau_a - \lim x_n\right) = \liminf x_n \, .$$

(5) *Az (x_n) sorozat alsó topológiában vett határértékeinek a maximuma megegyezik a torlódási pontjainak a minimumával.*

(6) *Összefoglalva:*

$$\tau_a - \lim x_n = [-\infty, \liminf x_n] \, .$$

Bizonyítás. (1): A $-\infty$ (egyetlen) környezete a τ_a topológiában az $\overline{\mathbb{R}}$, és ebbe a környezetbe az (x_n) sorozat minden tagja beleesik.

(2): Legyen az $x \in \tau_a - \lim x_n$, $y < x$. Ha az $(\alpha, +\infty]$ tetszőleges környezete az y pontnak, akkor $y \in (\alpha, +\infty]$. Megmutatjuk, hogy ebbe a környezetbe beleesnek a sorozat tagjai véges soktól eltekintve: Mivel $y < x$, ezért $x \in (\alpha, +\infty]$, tehát $(\alpha, +\infty]$ környezete az x pontnak is. Mivel $x \in \tau_a - \lim x_n$, ezért beleesik a sorozat minden tagja, véges soktól eltekintve.

(3): A sorozat τ_a limeszei halmazának van felső határa, és azt kell megmutatnunk, hogy ez a felső határ is τ_a-limesz. Jelölje $\alpha \doteq (\sup \tau_a - \lim x_n) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Ha $\alpha = -\infty$, akkor a $-\infty$ az (1) szerint limesz.
Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor legyen $\beta < \alpha$ tetszőleges szám, ekkor egyrészt a felső határ definíciója szerint a β számnál van nagyobb limesz, ezért a $(\beta, +\infty]$ egy limesz környezete, így a sorozatnak véges soktól eltekintve minden tagja beleesik ebbe a környezetbe, másrészt a $(\beta, +\infty]$ intervallum tetszőleges környezete az α pontnak, tehát az α maga is limeszpont.
Ha végezetül $\alpha = +\infty$, azaz tetszőlegesen nagy szám limeszpont, akkor minden $(\alpha, +\infty]$ környezetbe beleesnek a sorozat tagjai véges sok indexűtől eltekintve, ami viszont azt jelenti, hogy $+\infty$ limeszpont.

(4): Egy (x_n) sorozat limesz inferiorját a következőképpen értelmeztük:

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \doteq \sup_m \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\} = \lim_{m\to\infty} \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\},$$

ahol a limesz a közönséges topológiában való limeszt jelöli.

Az állítás igazolásához azt látjuk be, hogy

(a) $\liminf x_n \in \tau_a - \lim x_n$, másrészt

(b) a $\liminf x_n$, számnál nincs nagyobb τ_a limesze a sorozatnak.

(a): Tekintsük a $\liminf x_n$ számnak egy tetszőleges $(\alpha, +\infty]$ τ_a-környezetét, ekkor $\alpha < \liminf x_n$, ezért a $\liminf x_n$ definíciója és az $(\inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\})$ sorozat monoton növekedése miatt $\exists\, m \in \mathbb{N}$, hogy $\alpha < \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$, így az x_n sorozat tagjai is véges sok indexűtől eltekintve elemei az $(\alpha, +\infty]$ környezetnek. Ez utóbbi pedig azt jelenti, hogy a $\liminf x_n$ τ_a-limesz.

(b): Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\exists\, \beta \in \tau_a - \lim x_n \quad \text{amelyre} \quad \liminf x_n < \beta.$$

Legyen $\liminf x_n < \alpha < \beta$ tetszőleges szám. Ekkor az $(\alpha, +\infty]$ a β környezete, ezért az (x_n) sorozatnak minden tagját tartalmazná véges soktól eltekintve, emiatt eléggé nagy m-re $\alpha \le \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}$, így $\alpha \le \liminf x_n$, ami ellentmondás.

(5): Ismert, hogy egy sorozat limesz inferiorja megegyezik a sorozat minimális torlódási pontjával, ezért ez (4) átfogalmazása.

(6): Ez a fentiek összefoglalása. $\square$

2.5.27. Állítás (Konvergencia a felső topológiában)**.** *Legyen (x_n) tetszőleges sorozat az $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjesztett valós számok halmazában. Ekkor a felső topológiában való konvergenciára az alábbiak igazak.*

(1) *Az (x_n) sorozat tart a $+\infty$ értékhez:*

$$+\infty \in \tau_f - \lim x_n .$$

(2) *Ha az (x_n) sorozat tart az x számhoz, akkor tart minden, az x-nél nagyobb számhoz:*

$$x \in \tau_f - \lim x_n \,,\; x < y \,,\; \Rightarrow \; y \in \tau_a - \lim x_n .$$

(3) *Az x_n sorozat felső topológiában vett határértékei között van minimális.*

(4) *Az x_n sorozat felső topológiában vett határértékeinek a minimuma megegyezik a sorozat limesz szuperiorjával:*

$$\min\; \tau_f - \lim x_n = \limsup x_n .$$

(5) *Az (x_n) sorozat felső topológiában vett határértékeinek a minimuma megegyezik a torlódási ponjainak a maximumával.*

(6) *Összefoglalva:*

$$\tau_f - \lim x_n = [\limsup x_n, +\infty] .$$

Bizonyítás. Az előzőhöz szórul-szóra hasonlóan látható. □

2.5.28. Állítás (Konvergencia a közönséges topológiában)**.** *A kiterjesztett valós számok egy (x_n) sorozata pontosan akkor konvergens a közönséges topológiában, ha a sorozat alsó topológiában vett határértékeinek a maximuma megegyezik a sorozat felső topológiában vett határértékeinek a minimumával.*

Bizonyítás. A kiterjesztett valós számok egy (x_n) sorozata pontosan akkor konvergál a közönséges topológiában, ha a limesz szuperiorja megegyezik a limesz inferiorjával, ezért az állítás következik az előző két állításból. □

Kompakt és összefüggő halmazok az alsó és felső topológiában

Minden konkrét topologikus térnél alapvető két kérdés: mely halmazok kompaktak és melyek összefüggőek. Az alsó topológia mellett erre ad választ a következő két állítás.

2.5.29. Állítás (Kompakt halmazok az alsó topológia mellett)**.** *A kiterjesztett valós számok egy nemüres $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ részhalmaza pontosan akkor kompakt az alsó topológia esetében, ha van minimális eleme, azaz tartalmazza az alsó határát:*

$$K \in \tau_a\text{-kompakt} \;\Leftrightarrow\; \exists \; \min K .$$

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ nemüres halmaz.

Ha az alsó határ eleme a K halmaznak, akkor az a nyílt halmaz (félegyenes), amelyik tartalmazza az alsó határt, lefedi a K halmazt is, tehát a K halmaz kompakt.

Ha pedig az alsó határ nem eleme a K halmaznak, akkor véve egy $\inf K$-hoz szigorúan fogyólag tartó (x_n) sorozatot, az $(x_n, +\infty]$ félegyenesek lefedik a K halmazt, de ezekből nem választható ki véges sok, amelyek lefednék a K halmazt. □

2.5.30. Állítás (Összefüggő halmazok az alsó topológia mellett)**.** *A kiterjesztett valós számok minden $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ részhalmaza összefüggő az alsó topológia mellett.*

Bizonyítás. Egy $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ halmaz nem fedhető le két diszjunkt nemüres nyílt halmazzal, hiszen az alsó topológiában nem létezik két diszjunkt nemüres nyílt halmaz.
(Ha két nem üres nyílt halmazt, azaz például két jobbról végtelen félegyenest tekintünk, akkor a metszetük nem üres, közös elemük például a $+\infty$. □

A felső topológia esetében is megfogalmazzuk az állításokat. A bizonyítások az előzőkhöz teljesen hasonlók.

2.5.31. Állítás (Kompakt halmazok a felső topológia mellett)**.** *A kiterjesztett valós számok egy nemüres $K \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ részhalmaza pontosan akkor kompakt a felső topológia esetében, ha van maximális eleme, azaz tartalmazza a felső határát:*

$$K \in \tau_f\text{-kompakt} \;\Leftrightarrow\; \exists \; \max K\,.$$

2.5.32. Állítás (Összefüggő halmazok a felső topológia mellett)**.** *A kiterjesztett valós számok minden $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ részhalmaza összefüggő a felső topológia mellett.*

Az alulról és felülről félig folytonos függvények

A kiterjesztett valós értékű függvények körében a szuprémum operáció akárhány tag mellett is nagyon regulárisan viselkedik. Hasonlóan: a pontonként monoton növekedő vagy fogyó függvénysorozatoknak mindig van limesze. A folytonosság tulajdonsága azonban problémát vet fel: például a közönséges folytonosság a monoton konvergencia révén nyert limeszre nem öröklődik. Lássunk erre egy közismert példát. Vegyük a $\overline{\mathbb{R}}$ kiterjeszett valós számokon az 2.5.22. definícióban megadott közönséges topológiát, és tekintsük az

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha} \quad x < 0 \\ x^n & \text{, ha} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{, ha} \quad x > 1 \end{cases}$$

folytonos függvényekből álló monoton fogyó sorozatot. Ennek a pontonkénti (monoton fogyó) limesze az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha} \quad x < 1 \\ 1 & \text{, ha} \quad 1 \leqq x \end{cases}$$

függvény, amely az 1 pontban nem folytonos.

Látni fogjuk, hogy a közönséges topológiával szemben az alsó illetve felső topológiák harmonikusabban illeszkednek a kiterjesztett valós értékű függvényeken bevezetett szuprémum és infimum műveletekhez, monoton konvergenciához és egyéb operációkhoz. Olyan $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényekkel foglalkozunk, amelyek abban az értelemben folytonosak, hogy a kiterjesztett valós számokon az alsó vagy a felső topológiákat vesszük. Az első definícióban rögzítjük az elnevezéseket.

2.5.33. Definíció (alulról illetve felülről félig folytonos függvények)**.** Legyen (X,τ) topologikus tér.

1. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvényt egy $x_0 \in X$ pontban illetve az X halmazon alulról félig folytonosnak (rövidítve: a.f.f.-nak) nevezzük, ha (τ, τ_a)-folytonos az x_0 pontban illetve az X halmazon.

2. Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvényt egy $x_0 \in X$ pontban illetve az X halmazon felülről félig folytonosnak (rövidítve: f.f.f.-nak) nevezzük, ha (τ, τ_f)-folytonos az x_0 pontban illetve az X halmazon.

Megjegyezzük, hogy a „félig” elnevezés félrevezető, mert „rendes” *folytonos* függvényről van szó, csak a kiterjesztett valós számokon nem a közönséges topológia, hanem az alsó topológia van megadva. A „félig” elnevezés oka az, hogy az alulról és felülről való folytonosság együttesen adja a közönséges topológia melletti folytonosságot:

2.5.34. Állítás (folytonosság és félig folytonosságok)**.** *Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. függvény pontosan akkor folytonos egy $x_0 \in X$ pontban illetve az X halmazon, ha alulról és felülről félig folytonos az x_0 pontban illetve az X halmazon.*

Bizonyítás. Ha f folytonos, akkor alulról és felülről is folytonos, mivel az alsó és felső topológiák durvábbak, mint a közönséges topológia. Megfordítva: ha f folytonos a τ_a és τ_f topológiák mellett, akkor folytonos az uniójuk által generált közönséges topológia mellett is. □

Az alulról félig folytonos függvények jellemzése

2.5.35. Állítás (a pontbeli alulról félig folytonosság ekvivalens definíciója)**.** *Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor alulról félig folytonos egy $x_0 \in X$ pontban, ha*

(*a*) *amennyiben $f(x_0) \in \mathbb{R}$ (véges), úgy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, U \in \tau(x_0)$ környezete az x_0 pontnak, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$,*

(*b*) *amennyiben $f(x_0) = +\infty$, úgy $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\, U \in \tau(x_0)$ környezete az x_0 pontnak, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $f(x) > \alpha$,*

(*c*) *amennyiben $f(x_0) = -\infty$, akkor automatikusan.*

Bizonyítás. A definíció szerint az f függvény pontosan akkor alulról félig folytonos az x_0 pontban, ha az $f(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ pont $\forall\, V \in \tau_a(f(x_0))$ környezetéhez $\exists\, U \in \tau(x_0)$ környezete az $x_0 \in X$ pontnak, amelyre $f(U) \subseteq V$.

Egy $f(x_0) \in \mathbb{R}$ pont nemtriviális τ_a-környezetei $(\alpha, +\infty]$, $\alpha < f(x_0)$ alakúak, másképpen $(f(x_0) - \varepsilon, +\infty]$, alakúak, ahol $\varepsilon > 0$, így az $f(U) \subseteq V$ tartalmazás azt jelenti, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.

Az $f(x_0) = +\infty$ pont nemtriviális τ_a-környezetei $(\alpha, +\infty]$ alakúak, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$, így az $f(U) \subseteq V$ tartalmazás azt jelenti, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $f(x) > \alpha$.

Az $f(x_0) = -\infty$ pontnak csak egyetlen τ_a-környezete van, méghozzá az $\overline{\mathbb{R}}$, és $\forall\, U \in \tau(x_0)$ környezet esetén $f(U) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. □

Az (a)-beli tulajdonság miatt kapta az alulról félig folytonosság az „alulról" jelzőt, mert a folytonosság definíciójában szereplő $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) - \varepsilon$ egyenlőtlenségből csak az *alsó* teljesülését követeljük meg.

A következő állításban a globálisan alulról félig folytonos függvényeket jellemezzük. Nem teszünk mást, csak leírjuk azt, hogy az alsó topológiában nyílt halmaz inverz képe nyílt. Ezek a karakterizációk definícióként is szolgálnak akkor, amikor nem vezetik be az alsó és felső topológiákat.

2.5.36. Állítás (az alulról félig folytonosság ekvivalens definíciója)**.** *Egy* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *függvény pontosan akkor alulról félig folytonos, ha az alábbi feltételek bármelyike teljesül:*

(1) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *esetén az* $f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in X \;:\; f(x) > \alpha\}$ *felső nívóhalmaz nyílt,*

(2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *esetén az* $f^{-1}([-\infty, \alpha]) = \{x \in X \;:\; f(x) \leq \alpha\}$ *alsó nívóhalmaz zárt.*

Bizonyítás. (1): A „nyílt halmaz inverzképe nyílt" lényegében azt jelenti, hogy $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $(\alpha, \infty]$ halmaz

$$f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in X \;:\; f(x) > \alpha\}$$

inverzképe nyílt.

(Az $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ és az $f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) = X$ halmaz nyíltsága minden függvényre teljesül.)

(2): Az (1) állítás komplementer megfogalmazása, tehát ekvivalens (1)-gyel. □

A következő állításban szereplő jellemzés különösen fontos, mert a függvény alulról félig folytonosságát az epigráfjával jellemezzük. Emiatt az ekvivalens jellemzés miatt az alulról félig folytonos függvényeket *alulról zárt függvényeknek* is szokták nevezni.

2.5.37. Állítás (az alulról félig folytonosság ekv. definíciója: zárt epigráf)**.** *Egy* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *függvény pontosan akkor alulról félig folytonos, ha alulról zárt, amin azt értjük, hogy az* $\operatorname{epi} f \subseteq X \times \mathbb{R}$ *epigráf zárt halmaz.*

Bizonyítás. Az 2.5.36. állítással (ekvivalens definícióval) való ekvivalenciát bizonyítjuk. Lássuk be először azt, hogy a függvény felső nívóhalmazainak a nyíltságából következik az epigráfjának a zártsága, azaz az $(\operatorname{epi} f)^c \subseteq X \times \mathbb{R}$ komplementum nyíltsága. Legyen $(x, \alpha) \in (\operatorname{epi} f)^c$ tetszőleges pont, azaz $\alpha < f(x)$. Ekkor $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy $\alpha + \varepsilon < f(x)$ azaz $x \in f^{-1}(\alpha + \varepsilon, +\infty]$. Mivel az $f^{-1}(\alpha + \varepsilon, +\infty]$ halmaz nyílt, azért $\exists\, U$ környezete az x pontnak, hogy $U \subseteq f^{-1}(\alpha + \varepsilon, +\infty]$, azaz $\forall\, z \in U$ esetén $\alpha + \varepsilon < f(z)$, amiből következik, hogy az (x, α) pont $U \times (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ környezete benne van az $(\operatorname{epi} f)^c$ halmazban.

A másik irányhoz megmutatjuk, hogy a függvény epigráfjának a zártságából következik a felső nívóhalmazainak a nyíltsága.
Legyen $\alpha \in R$ tetszőleges, és tekintsük az $f^{-1}(\alpha, +\infty] \subseteq X$ halmazt. Erről kell belátnunk, hogy τ-nyílt, azaz minden pontjának környezete. Legyen $x \in f^{-1}(\alpha, +\infty]$ tetszőleges, azaz $f(x) > \alpha$. Ekkor $(x, \alpha) \notin \operatorname{epi} f$, azaz $(x, \alpha) \in (\operatorname{epi} f)^c$, ahonnan $(\operatorname{epi} f)^c \subseteq X \times \mathbb{R}$ nyílt volta miatt $\exists\; U \times (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subseteq (\operatorname{epi} f)^c$ környezete az (x, α) pontnak, ezzel pedig $U \times \{\alpha\} \subseteq (\operatorname{epi} f)^c$, így $\forall\, z \in U$ esetén $\alpha < f(z)$, ezért $U \subseteq f^{-1}(\alpha, +\infty]$. □

2.5.38. Állítás (az alulról félig folytonosság halmazértékű jellemzése)**.** *Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvény pontosan akkor alulról félig folytonos, ha az az $F : X \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\, x \in X$ esetén*

$$F(x) \doteq \{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; f(x) \le \alpha\}\,,$$

zárt értékű és felsőzártkonvergencia-folytonos.

Bizonyítás. Szükségesség: Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges nemüres kompakt halmaz, ekkor

$$\begin{aligned} & \{x \in X \;:\; F(x) \cap K = \emptyset\} \\ = \;& \{x \in X \;:\; \{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; f(x) \le \alpha\} \cap K = \emptyset\} \\ = \;& \{x \in X \;:\; \max K < f(x)\}\,, \end{aligned}$$

ami nyílt halmaz.

Elégségesség: A zárt értékűség miatt nyilvánvaló. □

Az a.f.f. leképezések néhány tulajdonságát gyűjtöttük egybe a következő állításba.

2.5.39. Állítás (az alulról félig folytonos leképezések tulajdonságai)**.** *Legyen az (X, τ) topologikus tér.*

1. Ha egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, függvénynek egy $x_0 \in X$ pontban lokális minimuma van, akkor ott alulról félig folytonos.

2. Ha az (X, τ) topologikus tér kompakt, és az $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény alulról félig folytonos, akkor létezik minimuma (felveszi az infimumát).

3. Egy $A \subseteq X$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha a $\chi_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ karakterisztikus függvénye alulról félig folytonos.

4. Egy $A \subseteq X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha a $\delta_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ indikátor-függvénye alulról félig folytonos.

Bizonyítás. 1. Az 2.5.35. állítás (a) részét kell ellenőrizni, ami triviálisan teljesül: Mivel az $x_0 \in X$ pontban az f fügvénynek lokális minimuma van, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, U \in \tau(x_0)$ környezete az x_0 pontnak, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.

2. Legyen az f a.f.f. függvény. Ha a $K \subseteq X$ kompakt, akkor az $f(K)$ képe is kompakt az alsó topológiában, ami az 2.5.29. állítás szerint azt jelenti, hogy az alsó határa eleme a halmaznak, azaz minimuma van.

3. Az $A \subseteq X$ halmaz $\chi_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ karakterisztikus függvényére

$$\chi_A^{-1}((\alpha,\infty]) = \{x \in X \;:\; \chi_A(x) \in (\alpha,\infty]\} = \begin{cases} X & ,\text{ha} \quad \alpha < 0 \\ A & ,\text{ha} \quad 0 \le \alpha < 1 \\ \emptyset & ,\text{ha} \quad \alpha \ge 1 \end{cases} .$$

Ebből pedig látható, hogy a karakterisztikus függvény pontosan akkor alulról félig folytonos, ha az A halmaz nyílt.

4. Az $A \subseteq X$ halmaz $\delta_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ indikátorfüggvényére

$$\delta_A^{-1}((\alpha,\infty]) = \{x \in X \;:\; \delta_A(x) \in (\alpha,\infty]\} = \begin{cases} X & ,\text{ha} \quad \alpha < 0 \\ A^c & ,\text{ha} \quad 0 \le \alpha < +\infty \\ \emptyset & ,\text{ha} \quad \alpha = +\infty \end{cases} .$$

Ebből pedig adódik, hogy az indikátor függvény pontosan akkor alulról félig folytonos, ha az A^c halmaz nyílt, azaz az A halmaz zárt. □

2.5.40. Megjegyzés. Az alulról félig folytonosság a határértékkel is jellemezhető. Mint ismert az alsó (és felső) topológiában a limesz nem egyértelmű, de ez nem okoz gondot, mert a limesz inferior (és szuperior) használata ezt pótolja.

Vezessük be egy f függvény egy x pontban vett limesz inferiorját a következőképpen:

$$\liminf_{y \to x} f(y) \doteq \sup \left(\inf_{U \in \mathscr{U}} \{f(y) \;:\; y \in U \setminus \{a\}\} \right),$$

ahol $\mathscr{U}$ az x pont egy környezetbázisa (vagy a környezetrendszere).

Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor alulról félig folytonos egy $x_0 \in X$ pontban, ha

$$f(x_0) \le \liminf_{x \to x_0} f(x) .$$

A felülről félig folytonos függvények jellemzése

Az alulról félig folytonos függvényre vonatkozó állításokat a $-f$ függvényre alkalmazva a felülről félig folytonos függvényekre vonatkozó analóg állításokat kapunk.

2.5.41. Állítás (a pontbeli felülről félig folytonosság ekvivalens definíciója)**.** *Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor felülről félig folytonos egy $x_0 \in X$ pontban, ha*

(a) *amennyiben $f(x_0) \in \mathbb{R}$ (véges), úgy $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ U \in \tau(x_0)$ környezete az x_0 pontnak, hogy $\forall\ x \in U$ esetén $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$,*

(b) *amennyiben $f(x_0) = -\infty$, úgy $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\exists\ U \in \tau(x_0)$ környezete az x_0 pontnak, hogy $\forall\ x \in U$ esetén $f(x) < \alpha$,*

(c) *amennyiben $f(x_0) = +\infty$, akkor automatikusan.*

2.5.42. Állítás (a felülről félig folytonosság ekvivalens definíciója)**.** *Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor felülről félig folytonos, ha alábbi feltételek bármelyike teljesül:*

(1) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *esetén az* $f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{x \in X\ :\ f(x) < \alpha\}$ *alsó nívóhalmaz nyílt,*

(2) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *esetén az* $f^{-1}([\alpha, +\infty]) = \{x \in X\ :\ f(x) \geq \alpha\}$ *felső nívóhalmaz zárt.*

2.5.43. Állítás (a felülről félig folytonosság másik ekvivalens definíciója: zárt hipográf)**.** *Egy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor felülről félig folytonos, ha felülről zárt, amin azt értjük, hogy a* $\operatorname{hypo} f \subseteq X \times \mathbb{R}$ *hipográf zárt halmaz.*

III.

FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK-FELADATOK, MULTIPLIKÁTOR-TÉTELEK II.

3.1. Egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat

Véges sok egyenlőségi feltétel

3.1.1. Definíció. Legyen X (egyelőre) tetszőleges halmaz, $D \subseteq X$ adott részhalmaz, továbbá $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ adott függvény. A következő feladatot *egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatnak* nevezzük:

$$\begin{cases} f_0(x) \to \min\ (\max) \\ f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0 \\ x \in D \end{cases} . \tag{3.1}$$

Az f_0 függvényt a feladat *célfüggvényének* nevezzük.
A feladat *feltételi halmaza* vagy más néven a *lehetséges megoldások halmaza*:

$$\{x \in D\ :\ f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(0)\,.$$

A feladatot *simának* nevezzük, ha $(X, \|.\|)$ valós normált tér, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, valamint $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

3.1.2. Megjegyzés. Bevezetve az

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$$

jelölést, azaz ahol $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ az F függvény i-edik koordinátafüggvénye, akkor a fenti feladat a következő alakú:

$$\begin{cases} f_0(x) \to \min\ (\max) \\ F(x) = \mathbf{0} \\ x \in D \end{cases} .$$

A feladat feltételi halmaza:

$$\{x \in D\ :\ F(x) = \mathbf{0}\} = F^{-1}(\mathbf{0}_Y)\,.$$

Ezek szerint a (3.1) feladat nem más, mint a célfüggvényt egy függvény adott szinthalmazára leszűkítjük, és ennek a függvénynek keressük a szélsőértékét:

$$f_0|_{F^{-1}(\mathbf{0})} \to \min\ (\max)\,.$$

3.1.3. Definíció. Egy $x_0 \in X$ pontot a (3.1) feladat (*optimális*) *megoldásának* nevezünk, ha az $f_0|_{F^{-1}(\mathbf{0})} : F^{-1}(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ függvény minimumhelye (illetve maximumhelye), azaz

(1) x_0 lehetséges megoldás, vagyis $x_0 \in \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(0)$,

(2) $\forall\, x \in \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(0)$ lehetséges megoldás esetén $f_0(x_0) \le f_0(x)$ (illetve $f_0(x_0) \ge f_0(x)$).

Mint a feltételes szélsőérték-feladatokat általában, az egyenlőségekkel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatot is úgy oldjuk meg, hogy visszavezetjük a feladatot a Lagrange-függvénye feltétel nélküli szélsőértékének a vizsgálatára.

3.1.4. Definíció. Az (3.1) feladat *Lagrange-függvénye* az az $\mathscr{L} : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\, x \in D$ és $\forall\, l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x,l) &= \mathscr{L}(x,(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)) \\ &\doteq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f_i(x) = f_0(x) + \langle l, F(x) \rangle . \end{aligned}$$

Az $l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ vektort *Lagrange-multiplikátornak* nevezzük.

Maximumfeladat esetén a feltételi rész levonása célszerű:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x,l) &= \mathscr{L}(x,(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)) \\ &\doteq f_0(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f_i(x) = f_0(x) - \langle l, F(x) \rangle . \end{aligned}$$

3.1.5. Megjegyzés. 1. Ha $\forall\, i = 0, 1, \ldots, m$ mellett az f_i függvény differenciálható egy $x \in D$ pontban, akkor $\forall\, l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\partial_1 \mathscr{L}(x_0, l) = \partial_1 \mathscr{L}(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) = f_0'(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f_i'(x) .$$

2. Nyilván $\forall\, x \in D$ és $\forall\, l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ pontban $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén

$$\partial_{\lambda_i} \mathscr{L}(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) = f_i(x) .$$

Multiplikátor-tétel a sima szélsőérték-feladatra, véges sok egyenlőségi feltétel mellett

Ebben az alfejezetben az egyenlőséggel korlátozott sima feltételes szélsőérték-feladat megoldására adunk szükséges feltételt.

Mivel a célfüggvénynek egy adott függvény szintvonalára való leszűkítését vizsgáljuk, ezért a bizonyítás során fontos szerepet játszik a szintvonalhoz tartozó érintőhalmaz, amit a Ljusztyernyik-tétel jellemez.

3.1.6. Állítás (Lagrange-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen* $(X, \|.\|)$ *Banach-tér,* $D \subseteq X$ *nyílt halmaz, legyen* $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$ *esetén* $f_i : D \to \mathbb{R}$ *egy* $x_0 \in D$ *pontban differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy teljesül még a következő két regularitási feltétel (constraint qualification):*

(1) $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén az* $f_i : D \to \mathbb{R}$ *függvény folytonosan differenciálható az* $x_0 \in D$ *pontban,*

(2) *az* $f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0) \in X^*$ *vektorok lineárisan függetlenek.*

Ha $x_0 \in D$ *megoldása az egyenlőséggel korlátozott* (3.1) *sima feltételes szélsőérték-feladatnak, akkor* $\exists\ l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ *Lagrange-multiplikátor, hogy*

$$\mathscr{L}'(x_0, l) = (\mathbf{0}_{X^*}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}),$$

ami azt jelenti, hogy

(a) $\partial_1 \mathscr{L}(x_0, l) = \mathbf{0}_{X^*}$ *(Euler-Lagrange-egyenlet), részletesen:*

$$f_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{X^*},$$ *másképpen megfogalmazva:*

$$f_0'(x_0) \in \operatorname{lin}\{f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)\},$$

(b) $\partial_2 \mathscr{L}(x_0, l) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^m}$, *részletesen:*

$\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén* $\partial_{\lambda_i} \mathscr{L}'(x_0, (\lambda_1, \ldots \lambda_m)) = f_i(x_0) = 0.$

Bizonyítás. A bizonyítás során csak a minimumfeladatra szorítkozunk.
Az előzőekben bevezettük az

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$$

jelölést, ahol $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ az F függvény koordinátafüggvénye, ekkor

$$F'(x_0) = \begin{bmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{bmatrix} \in L(X, \mathbb{R}^m),$$

továbbá a regularitási feltételek a következőkkel ekvivalensek:

(a) az $F : D \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonosan differenciálható az $x_0 \in \mathbb{R}^m$ pontban,

(b) az $F'(x_0) \in L(X, \mathbb{R}^m)$ folytonos lineáris leképezés szürjektív:
$\operatorname{im} F'(x_0) = \mathbb{R}^m$.

1. lépés: Belátjuk, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i'(x_0) \subseteq \ker f_0'(x_0)\,, \tag{3.2}$$

ami az előző jelölést használva azt jelenti, hogy

$$\ker F'(x_0) \subseteq \ker f_0'(x_0)\,.$$

Legyen $v \in \ker F'(x_0)$ tetszőleges. Mivel a regularitási feltételek szerint teljesülnek a Ljusztyernyik-tétel (2.2.13. állítás) feltételei, ezért

$$\ker F'(x_0) = T_{F^{-1}(F(x_0))}(x_0) = T_{F^{-1}(\mathbf{0})}(x_0)\,. \tag{3.3}$$

Emiatt $v \in T_{F^{-1}(\mathbf{0})}(x_0)$. Mivel (3.3) szerint a $T_{F^{-1}(\mathbf{0})}(x_0)$ érintőhalmaz most altér, ezért az érintőhalmaz 2.2.3. állításbeli ekvivalens definíciója szerint ez azt jelenti, hogy $\exists\ r : \mathbb{R} \to X$ a 0 pontban kisrendű függvény (ami azt jelenti, hogy $r(0) = \mathbf{0}$, és $\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} r(\lambda) = \mathbf{0}_X$), amelyre

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ esetén } x + \lambda v + r(\lambda) \in F^{-1}(\mathbf{0})\,.$$

Legyen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi(\lambda) \doteq f_0(x_0 + \lambda v + r(\lambda))\,.$$

Mivel egyrészt az x_0 pont a (3.1) feladat megoldása, azaz az $f_0|_{F^{-1}(\mathbf{0})}$ függvény minimumhelye, másrészt $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $x_0 + \lambda v + r(\lambda) \in F^{-1}(\mathbf{0})$, ezért a $\lambda = 0$ pont a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minimumhelye, így a szélsőérték szükséges feltétele szerint $\varphi'(0) = 0$. Ez viszont az előzőek szerint a láncszabály alapján azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(0) \\ &= f_0'(x_0 + 0v + r(0)) \cdot \frac{d}{d\lambda}(x_0 + \lambda v + r(\lambda u))|_{\lambda=0} \\ &= [f_0'(x_0)]v\,. \end{aligned}$$

Emiatt $v \in \ker f_0'(x_0)$, amivel beláttuk, hogy

$$\ker F'(x_0) \subseteq \ker f_0'(x_0)\,.$$

2. lépés: A multiplikátor-szabályok leolvasása. A (3.2) tartalmazás szerint az $f_0'(x_0), f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0) \in X^*$ folytonos lineáris funkcionálokra teljesülnek a homogén lineáris egyenletekre vonatkozó következménytétel (2.3.2. állítás) feltételei, ezért

$$f_0'(x_0) \in \operatorname{lin}\{f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)\}\,,$$

ami nyilván azzal ekvivalens, hogy $\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}$ számok, hogy

$$f_0'(x_0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i'(x_0)=\mathbf{0}_{X^*}\,.$$

A 3.1.5. megjegyzés 1. pontja szerint ez azt jelenti, hogy

$$\partial_1\mathscr{L}(x_0,l)=f_0'(x_0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i'(x_0)=\mathbf{0}_{X^*}\,.$$

Továbbá mivel $\forall\ i=1,\dots,m$ esetén $f_i(x_0)=0$, ezért a 3.1.5. megjegyzés 2. pontja szerint

$$\partial_{\lambda_i}\mathscr{L}(x_0,(\lambda_1,\dots,\lambda_m))=f_i(x_0)=0\,.$$

Emiatt

$$\mathscr{L}'(x_0,l)=(\mathbf{0}_{X^*},\mathbf{0}_{\mathbb{R}^m})\,.$$

□

Végtelen sok egyenlőségi feltétel

A fenti (3.1) feltételes szélsőérték-feladatnak felírható egy olyan általánosítása, amely a végtelen sok egyenlőségi feltétel esetét is magába foglalja.

3.1.7. Definíció. Legyen X egyelőre tetszőleges halmaz, $D\subseteq X$ adott részhalmaz, $(Y,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$ feletti vektortér, valamint $f_0: D\to\mathbb{R}$ és $F: D\to Y$ adott függvények. A következő feladatot szintén *egyenlőséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatnak* nevezzük:

$$\left\{\begin{array}{l} f_0(x)\to \min\ (\max)\\ F(x)=\mathbf{0}\\ x\in D\end{array}\right. . \qquad (3.4)$$

Az f_0 függvényt a feladat *célfüggvényének* nevezzük.
A feladat *feltételi halmaza* vagy más néven a *lehetséges megoldások halmaza*:

$$\{x\in D\ :\ F(x)=\mathbf{0}\}=F^{-1}(\mathbf{0}_Y)\,.$$

A feladatot *simának* nevezzük, ha $(X,\|.\|)$ és $(Y,\|.\|)$ valós normált terek, $D\subseteq X$ nyílt halmaz, valamint $f_0: D\to\mathbb{R}$ és $F: D\to Y$ differenciálható függvények.

3.1.8. Megjegyzés. Ezek szerint a (3.4) feladat nem más, mint a célfüggvényt egy adott függvény szinthalmazára leszűkítjük, és ennek a függvénynek keressük a szélsőértékét:

$$f_0|_{F^{-1}(\mathbf{0})}\to \min\ (\max)\,.$$

3.1.9. Definíció. Egy $x_0\in X$ pontot a (3.4) feladat (*optimális*) *megoldásának* nevezünk, ha az $f_0|_{F^{-1}(\mathbf{0})}: F^{-1}(\mathbf{0})\to\mathbb{R}$ függvény minimumhelye (illetve maximumhelye), azaz

(1) x_0 lehetséges megoldás, vagyis $x_0 \in F^{-1}(\mathbf{0})$,

(2) $\forall\ x \in F^{-1}(\mathbf{0})$ lehetséges megoldás esetén $f_0(x_0) \leq f_0(x)$ (illetve $f_0(x_0) \geq f_0(x)$).

3.1.10. Definíció. A (3.4) feladat *Lagrange-függvénye* az az $\mathscr{L} : X \times Y^* \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\, x \in X$ vektor és $\forall\, l \in Y^*$ folytonos lineáris funkcionál esetén

$$\mathscr{L}(x,l)) \doteq f_0(x) + \langle l, F(x) \rangle .$$

Az $l \in Y^*$ folytonos lineáris funkcionált *Lagrange-multiplikátornak* nevezzük.

Maximumfeladat esetén a feltételi rész levonása célszerű:

$$\mathscr{L}(x,l)) \doteq f_0(x) - \langle l, F(x) \rangle .$$

3.1.11. Megjegyzés. 1. Ha f_0 és F differenciálhatók egy $x \in D$ pontban, akkor $\forall\, l \in Y^*$ folytonos lineáris funkcionál esetén

$$\partial_1 \mathscr{L}(x,l)) = f_0'(x) + [F'(x)]^* l, \quad \text{azaz}$$

$$\langle l, F(.) \rangle'(x) = [F'(x)]^* l .$$

Ugyanis: $\langle l, F(.) \rangle = \langle l, . \rangle \circ F$, így a láncszabály miatt

$$\langle l, F(.) \rangle'(x) = (\langle l, . \rangle \circ F)'(x) = \langle l, . \rangle'(F(x)) \circ F'(x) = \langle l, . \rangle \circ F'(x) .$$

Mivel pedig $\forall\, v \in X$ esetén

$$(l \circ F'(x))(v) = l([F'(x)]v) = \langle l, [F'(x)]v \rangle = \langle [F'(x)]^* l, v \rangle ,$$

ezért $\langle l, F(.) \rangle'(x) = [F'(x)]^* l$.

2. Nyilván $\forall\, x \in D$ vektor és $\forall\, l \in Y^*$ folytonos lineáris funkcionál esetén

$$\partial_2 \mathscr{L}(x,l) = \langle ., F(x) \rangle'(l) = F(x) .$$

3.1.12. Megjegyzés. A (3.1) feladat nyilván a (3.4) feladat speciális esete $Y = \mathbb{R}^m$ mellett. Ekkor a feltételben szereplő függvény

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} : D \to \mathbb{R}^m$$

alakú, ahol $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ az F függvény i-edik koordinátafüggvénye.

Multiplikátor-tétel a sima szélsőérték-feladatra, végtelen sok egyenlőségi feltétel mellett

3.1.13. Állítás (Lagrange-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyenek* $(X,\|.\|)$ *és* $(Y,\|.\|)$ *Banach-terek,* $D\subseteq X$ *nyílt halmaz, legyenek* $f_0 : D\to\mathbb{R}$ *és* $F : D\to Y$ *egy* $x_0\in D$ *pontban differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy teljesül még a következő két regularitási feltétel (constraint qualification):*

(1) *az* $F : D\to Y$ *függvény folytonosan differenciálható az* $x_0\in D$ *pontban,*

(2) *az* $F'(x_0)\in L(X,Y)$ *folytonos lineáris leképezés szürjektív:* $\operatorname{im}F'(x_0)=Y$.

Ha $x_0\in D$ *megoldása az egyenlőséggel korlátozott* (3.4) *sima feltételes szélsőérték-feladatnak, akkor* $\exists\ l\in Y^*$ *Lagrange-multiplikátor, hogy*

$$\mathscr{L}'(x_0,l)=(\mathbf{0}_{X^*},\mathbf{0}_Y)\,,$$

ami azt jelenti, hogy

(a) $\partial_1\mathscr{L}(x_0,l)=\mathbf{0}_{X^*}$ *(Euler-Lagrange-egyenlet), részletesen:*
$f_0'(x_0)+[F'(x_0)]^*y^*=\mathbf{0}_{X^*}$,

(b) $\partial_2\mathscr{L}(x_0,l)=F(x_0)=\mathbf{0}_Y$.

Bizonyítás. A bizonyítás során csak a minimumfeladatra szorítkozunk.
1. lépés: Belátjuk, hogy

$$f_0'(x_0)\in\left(\ker F'(x_0)\right)^{\perp}\,, \tag{3.5}$$

(ahol $\perp$ az annullátorhalmazra utal), ami azt jelenti, hogy

$$\ker F'(x_0)\subseteq\ker f_0'(x_0)\,.$$

Legyen $v\in\ker F'(x_0)$ tetszőleges. Mivel a regularitási feltételek szerint teljesülnek a Ljusztyernyik-tétel (2.2.15. állítás) feltételei, ezért

$$\ker F'(x_0)=T_{F^{-1}(F(x_0))}(x_0)=T_{F^{-1}(\mathbf{0})}(x_0)\,. \tag{3.6}$$

Ezek szerint $v\in T_{F^{-1}(\mathbf{0})}(x_0)$. Mivel (3.6) szerint a $T_{F^{-1}(\mathbf{0})}(x_0)$ érintőhalmaz most altér, ezért az érintőhalmaz 2.2.3. állításbeli ekvivalens definíciója szerint ez azt jelenti, hogy $\exists\ r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ a 0 pontban kisrendű függvény, tehát amelyre $r(0)=\mathbf{0}$, és $\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}r(\lambda)=\mathbf{0}_X$, hogy

$$\forall\ \lambda\in\mathbb{R}\ \text{ esetén }\ x+\lambda v+r(\lambda)\in F^{-1}(\mathbf{0})\,.$$

Legyen $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ esetén

$$\varphi(\lambda)\doteq f_0(x_0+\lambda v+r(\lambda))\,.$$

Mivel egyrészt az x_0 pont a (3.1) feladat megoldása, azaz az $f_0|_{F^{-1}(\mathbf{0})}$ függvény minimumhelye, másrészt $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ esetén $x_0+\lambda v+r(\lambda)\in F^{-1}(\mathbf{0})$, ezért a $\lambda=0$ pont a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minimumhelye, így a szélsőérték szükséges feltétele szerint $\varphi'(0) = 0$. Ez az előzőek szerint a láncszabály alapján azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(0) \\ &= f_0'(x_0 + 0v + r(0)) \cdot \frac{d}{d\lambda}(x_0 + \lambda v + r(\lambda u))|_{\lambda=0} \\ &= [f_0'(x_0)]v\,. \end{aligned}$$

Ezek szerint $v \in \ker f_0'(x_0)$, amivel beláttuk, hogy

$$\ker F'(x_0) \subseteq \ker f_0'(x_0)\,.$$

2. lépés: A multiplikátor-szabályok leolvasása. Az annullátortétel szerint

$$\big(\ker F'(x_0)\big)^{\perp} = \operatorname{im}[F'(x_0)]^*\,,$$

ezért a (3.5) tartalmazás szerint

$$f_0'(x_0) \in \operatorname{im}[F'(x_0)]^*\,,$$

ami azt jelenti, hogy $\exists\, l \in Y^*$, hogy

$$f_0'(x_0) = -[F'(x_0)]^* l\,, \quad \text{azaz} \quad f_0'(x_0) + [F'(x_0)]^* l = \mathbf{0}_{X^*}\,.$$

A 3.1.11. megjegyzés 1. pontja miatt ez pedig azt jelenti, hogy

$$\partial_1 \mathscr{L}(x_0, l) = \lambda_0 \cdot f_0'(x_0) + [F'(x_0)]^* l = \mathbf{0}_{X^*}\,.$$

Továbbá mivel $F(x_0) = \mathbf{0}_Y$, ezért az 3.1.11. megjegyzés 2. pontja értelmében

$$\partial_2 \mathscr{L}(x, l) = F(x_0) = \mathbf{0}_Y\,.$$

Emiatt

$$\mathscr{L}'(x_0, l) = (\mathbf{0}_{X^*}, \mathbf{0}_Y)\,. \qquad \square$$

3.2. Egyenlőtlenséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladat

3.2.1. Definíció. Legyen X egyelőre tetszőleges halmaz, $D \subseteq X$ adott részhalmaz, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ adott függvény. A következő feladatot *egyenlőtlenséggel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatnak* nevezzük:

$$\begin{cases} f_0(x) \to \min\ (\max) \\ f_1(x) \le 0, \ldots, f_m(x) \le 0 \\ x \in D \end{cases} . \tag{3.7}$$

Az f_0 függvényt a feladat *célfüggvényének* nevezzük.

A feladat *feltételi halmaza* vagy más néven a *lehetséges megoldások halmaza*:

$$\{x \in D \;:\; f_1(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0\} = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)\,.$$

A burkolófüggvény felhasználásával a feltétel egyetlen egyenlőtlenséggel is felírható:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m} f_i\right)(x) \leq 0\,,$$

ez a felírás azonban nem egyszerűsíti a megoldást.

A feladatot

1. *simának* nevezzük, ha $(X, \|.\|)$ valós normált tér, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, valamint $\forall\; i = 0, 1, \dots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

2. *konvexnek* nevezzük, ha $(X, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ feletti vektortér, $D \subseteq X$ konvex halmaz, valamint $\forall\; i = 0, 1, \dots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ konvex függvény,

Ez a feladat a lineáris programozási feladat általánosítása, ezért *matematikai programozási feladatnak* is szokták nevezni, sima esetben *sima programozási feladatnak*, konvex esetben pedig *konvex programozási feladatnak*.

3.2.2. Definíció. Egy $x_0 \in X$ pontot a (3.7) feladat (*optimális*) *megoldásának* nevezzük, ha az $f_0|_{\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)} : \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \to \mathbb{R}$ függvény minimumhelye (illetve maximumhelye), azaz

(1) x_0 lehetséges megoldás, vagyis $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)$,

(2) $\forall\; x \in \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(\mathbb{R}_-)$ lehetséges megoldás esetén $f_0(x_0) \leq f_0(x)$ (illetve $f_0(x_0) \geq f_0(x)$).

Mint az egyenlőségekkel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatokat, az egyenlőtlenségekkel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatot is úgy oldjuk meg, hogy visszavezetjük a feladatot a Lagrange-függvénye feltétel nélküli szélsőértékének a vizsgálatára.

3.2.3. Definíció. A (3.7) feladat *Lagrange-függvénye* az az $\mathscr{L} : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\, x \in D$ és $\forall\; l = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x, l) &= \mathscr{L}(x, (\lambda_1, \dots, \lambda_m)) \\ &\doteq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\,. \end{aligned}$$

Az $l = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ vektort *Lagrange-multiplikátornak* nevezzük.

Maximumfeladat esetén a feltételi rész hozzáadása célszerű:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x,l) &= \mathscr{L}(x,(\lambda_1,\dots,\lambda_m)) \\ &\doteq f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot f_i(x)\,.\end{aligned}$$

Multiplikátor-tétel a sima programozási feladatra

3.2.4. Állítás (Fritz John-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen* $(X,\|.\|)$ *valós normált tér,* $D\subseteq X$ *nyílt halmaz, legyen továbbá* $\forall\ i=0,1,\dots,m$ *esetén* $f_i:D\to\mathbb{R}$ *egy* $x_0\in D$ *pontban differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy teljesül még a következő regularitási feltétel (constraint qualification): az*

$$\{f_i'(x_0)\in X^*\ :\ f_i(x_0)=0\,,\ i=1,\dots,m\}\subseteq X^*$$

folytonos lineáris funkcionálok kúpfüggetlenek.
Ha $x_0\in D$ *megoldása az egyenlőtlenséggel korlátozott* (3.7) *feltételes szélsőérték-feladatnak (a sima programozási feladatnak), akkor* $\exists\ l=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\mathbb{R}_+^m$ *nemnegatív Lagrange-multiplikátor, hogy*

(*a*) $\partial_1\mathscr{L}(x_0,l)=\mathbf{0}_{X^*}$ (*Euler-Lagrange-egyenlet*), *részletesen:*
$f_0'(x_0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i'(x_0)=\mathbf{0}_{X^*}$ *ami azt jelenti, hogy:*
$-f_0'(x_0)\in\operatorname{con}\{f_1'(x_0),\dots,f_m'(x_0)\}$),

(*b*) $\forall\ i=1,\dots,m$ *esetén* $\lambda_i\cdot f_i(x_0)=0$ (*komplementaritási feltétel*).

Bizonyítás. A bizonyítás során csak a minimumfeladatra szorítkozunk.
Vezessük be a következő indexhalmazokat:

$$\begin{aligned}I_1 &\doteq \{i=1,\dots,m\ :\ f_i(x_0)=0\}\,,\\ I_2 &\doteq \{i=1,\dots,m\ :\ f_i(x_0)<0\}\,.\end{aligned}$$

A regularitási feltétel ezeket felhasználva úgy írható, hogy az

$$\{f_i'(x_0)\in X^*\ :\ i\in I_1\}\subseteq X^*$$

folytonos lineáris funkcionálok kúpfüggetlenek. Ez a lineáris funkcionálok kúpfüggetlenségét jellemző 2.3.22. állítás szerint azzal ekvivalens, hogy

$$\bigcap_{i\in I_1}[f_i'(x_0)]^{-1}(\mathbb{R}_{--})\neq\emptyset\,. \tag{3.8}$$

Belátjuk, hogy

$$\bigcap_{i\in I_1}[f_i'(x_0)]^{-1}(\mathbb{R}_{--})\subseteq[-f_0'(x_0)]^{-1}(\mathbb{R}_{-})\,. \tag{3.9}$$

Legyen $v\in\bigcap_{i\in I_1}[f_i'(x_0)]^{-1}(\mathbb{R}_{--})$ tetszőleges vektor.

Legyen $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$ esetén $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}$ a $0 \in \mathbb{R}$ pont egy U_i környezetén értelmezett függvény, amelyre $\forall\ \lambda \in U_i$ esetén

$$\varphi_i(\lambda) \doteq f_i(x_0 + \lambda v)\,.$$

Ekkor egyrészt

$$\varphi_i(0) = f_i(x_0)\,,$$

másrészt mivel f_i differenciálható x_0-ban, ezért φ_i differenciálható 0-ban, és

$$\varphi_i'(0) = [f_i'(x_0)]v\,.$$

Legyen $i \in I_1$ tetszőleges. Mivel $v \in [f_i'(x_0)]^{-1}(\mathbb{R}_{--})$, ezért

$$\varphi_i'(0) = [f_i'(x_0)]v < 0\,,$$

emiatt pedig $\exists\ [0, \delta_i)$ jobboldali környezet, hogy $\forall\ \lambda \in (0, \delta_i)$ esetén

$$f_i(x_0 + \lambda v) = \varphi_i(\lambda) < \varphi_i(0) = f_i(x_0) = 0\,.$$

Legyen $\delta' \doteq \min\limits_{i \in I_1} \delta_i$. Ekkor $\forall\ i \in I_1$ esetén $\forall\ \lambda \in (0, \delta')$ pontban

$$f_i(x_0 + \lambda v) < 0\,.$$

Legyen $i \in I_2$ tetszőleges. Ekkor

$$\varphi_i(0) = f_i(x_0) < 0\,.$$

Mivel φ_i differenciálható 0-ban, ezért folytonos is 0-ban, emiatt pedig $\exists\ (-\delta_i, \delta_i)$ környezet, hogy $\forall\ \lambda \in (-\delta_i, \delta_i)$ esetén

$$f_i(x_0 + \lambda v) = \varphi_i(\lambda) < 0\,.$$

Legyen $\delta'' \doteq \min\limits_{i \in I_2} \delta_i$. Ekkor $\forall\ i \in I_2$ esetén $\forall\ \lambda \in (-\delta'', \delta'')$ pontban

$$f_i(x_0 + \lambda v) < 0\,.$$

Legyen $\delta \doteq \min\{\delta', \delta''\}$, ekkor $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $\forall\ \lambda \in (0, \delta)$ pontban

$$f_i(x_0 + \lambda v) < 0\,,$$

ez pedig azt jelenti, hogy $\forall\ \lambda \in [0, \delta)$ mellett $x_0 + \lambda v$ lehetséges megoldás. Mivel x_0 megoldása a feladatnak, ezért $\forall\ \lambda \in [0, \delta)$ esetén

$$f_0(x_0) \leq f_0(x_0 + \lambda v)\,, \ \text{ azaz } \ \varphi_0(0) \leq \varphi_0(\lambda)\,,$$

ami azt jelenti, hogy a $\lambda = 0$ pont a φ_0 függvény jobboldali minimumhelye. Mivel φ_0 differenciálható 0-ban, ezért

$$0 \leq \varphi_0'(0) = [f_0'(x_0)]v\,, \ \text{ azaz } [-f_0'(x_0)]v \leq 0\,,$$

tehát

$$v \in [-f_0'(x_0)]^{-1}(\mathbb{R}_-)\,.$$

A (3.8) és (3.9) formulák szerint teljesülnek a homogén lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó következménytétel élesítésének (2.3.17. állítás) feltételei, emiatt

$$-f_0'(x_0) \in \operatorname{con}\{f_i'(x_0) \in X^* \ : \ i \in I_1\}\,,$$

azaz $\forall\ i \in I_1$ esetén $\exists\ \lambda_i \geq 0$ számok, hogy

$$f_0'(x_0) + \sum_{i \in I_1} \lambda_i f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{X^*}\,.$$

Legyen $\forall\ i \in I_2$ esetén $\lambda_i \doteq 0$, ekkor

$$f_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{X^*}\,.$$

Ha $i \in I_1$, akkor $f_i(x_0) = 0$, ha pedig $i \in I_2$, akkor $\lambda_i = 0$, így $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén

$$\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0\,. \qquad \square$$

3.2.5. Megjegyzés. Ahogy már a bizonyítás során is említettük, a tételbeli regularitási feltétel, miszerint az

$$\{f_i'(x_0) \in X^* \ : \ i = 1, \ldots, m, \ f_i(x_0) = 0\} \subseteq X^*$$

folytonos lineáris funkcionálok kúpfüggetlenek, a következő ekvivalens módon is megfogalmazható a lineáris funkcionálok kúpfüggetlenségét jellemző 2.3.22. állítás szerint:

$$\bigcap_{\{i \,:\, f_i(x_0)=0\}} [f_i'(x_0)]^{-1}(\mathbb{R}_{--}) \neq \emptyset\,,$$

azaz részletesebben:

$$\exists\ v \in X\,, \text{ hogy } \forall\ i = 1, \ldots, m, \text{ ha } f_i(x_0) = 0 \ \Rightarrow\ d_v f_i(x_0) = [f_i'(x_0)]v < 0\,.$$

3.2.6. Megjegyzés. 1. A Fritz John-féle multiplikátor-tétel nagyon hasonlít a Lagrange-féle multiplikátor-tételre. A különbség közöttük tulajdonképpen csak annyi, hogy először is a regularitási feltételben a feltételi függvények deriváltjainak a lineáris függetlensége helyett a jóval gyengébb kúpfüggetlensége szerepel, továbbá az állításban a célfüggvény deriváltjának a -1-szerese nem a feltételi függvények deriváltjainak a lineáris burkában, hanem a kúp-burkában van, valamint a feltételi függvények nulla voltát a komplementaritási feltétel helyettesíti. Ez utóbbi kissé megnehezíti a Fritz John-féle multiplikátor-tétel alkalmazását a Lagrange-féle multiplikátor-tételhez képest.

2. A (3.7) feladat Lagrange-függvényének a definíciójában fontos, hogy a minimumfeladat esetén hozzáadjuk, maximumfeladat esetén pedig levonjuk a feltételi részt, mert a multiplikátorok nemnegativitása ezáltal biztosítható.

Multiplikátor-tétel a sima és konvex programozási feladatra

Ha a célfüggvényre feltesszük, hogy konvex (illetve konkáv), akkor csak a minimumfeladat (illetve csak a maximumfeladat) releváns. Ebben a szakaszban konvexitási feltevéseket vizsgálunk, ezért az egyenlőtlenséggel korlátozott (3.7) feltételes szélsőértékfeladatban csak minimumot keresünk:

$$\begin{cases} f_0(x) \to \min \\ f_1(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0 \\ x \in D \end{cases} . \tag{3.10}$$

Ha a feladatban szereplő függvények mindegyike konvex és differenciálható, akkor a Fritz John-féle multiplikátor-tételben a megoldásra vonatkozó szükséges feltételek egyben elégségesek is. Ebben az esetben a Fritz John-tételbeli regularitási feltétel egy sokkal könnyebben ellenőrizhető feltétellel, a Slater-feltétellel helyettesíthető. A következő állítás a sima és egyben konvex programozási feladatra vonatkozó multiplikátor-tétel.

3.2.7. Állítás (Kuhn-Tucker-Fritz John-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen* $(X, \|.\|)$ *valós normált tér,* $D \subseteq X$ *nyílt, konvex halmaz, legyen továbbá* $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$ *esetén* $f_i : D \to \mathbb{R}$ *konvex függvény, amely egy* $x_0 \in D$ *pontban differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy teljesül még a következő regularitási feltétel (constraint qualification), amit Slater-feltételnek is neveznek:*

$$\exists\ \tilde{x} \in D\,,\ \textit{amelyre}\ \forall\ i = 1, \ldots, m\ \textit{esetén}\ f_i(\tilde{x}) < 0\,.$$

Egy $x_0 \in D$ *vektor pontosan akkor megoldása az egyenlőtlenséggel korlátozott* (3.10) *feltételes szélsőérték-feladatnak, pontosabban a sima és konvex programozási feladatnak, ha* $\exists\ l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$ *nemnegatív Lagrange-multiplikátor, hogy*

(a) $\partial_1 \mathscr{L}(x_0, l) = \mathbf{0}_{X^*}$ *(Euler-Lagrange-egyenlet), részletesen:*

$$f_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{X^*}\ \textit{másképpen megfogalmazva:}$$

$$-f_0'(x_0) \in \operatorname{con}\{f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)\}\,,$$

(b) $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén* $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$ *(komplementaritási feltétel).*

Az (a), (b) feltételek a következő nyeregponti alakban is megfogalmazhatók:

$$\min_{x\in D}\mathscr{L}(x,l)=\mathscr{L}(x_0,l)=\max_{s\in\mathbb{R}^m_+}\mathscr{L}(x_0,s)\,.$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az (a) feltétel, az Euler-Lagrange-egyenlet a nyeregpont 1. egyenlőségével, a (b) feltétel, a komplementaritás pedig a nyeregpont 2. egyenlőségével ekvivalens.

Mivel feltettük, hogy $\forall\, i=0,1,\dots,m$ esetén az $f_i : D\to\mathbb{R}$ függvény konvex, ezért a feladat Lagrange-függvénye az x változójában konvex, azaz az

$$\mathscr{L}(.,l)=f_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot f_i : D\to\mathbb{R}$$

függvény konvex. Ekkor az (a) feltétel, az Euler-Lagrange-egyenlet, miszerint $\partial_1\mathscr{L}(x_0,l)=\mathbf{0}_{R^{1\times n}}$, azaz a Lagrange-függvény deriváltja az x_0 pontban $\mathbf{0}_{R^{1\times n}}$, azzal ekvivalens, hogy x_0 a Lagrange-függvény minimumhelye:

$$\min_{x\in D}\mathscr{L}(x,l)=\mathscr{L}(x_0,l)\,,\quad \text{azaz}\quad \forall\, x\in D\quad \text{esetén}\quad \mathscr{L}(x_0,l)\le\mathscr{L}(x,l)\,.$$

A (b) feltétel, a komplementaritási feltétel, miszerint $\forall\, i=1,\dots,m$ esetén $\lambda_i\cdot f_i(x_0)=0$ pedig azzal ekvivalens, hogy $\forall\, s=(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in\mathbb{R}^m_+$ mellett $\forall\, i=1,\dots,m$ esetén

$$\lambda_i\cdot f_i(x_0)=0\ge\sigma_i\cdot f_i(x_0)\,,\quad \text{azaz}$$

$$\mathscr{L}(x_0,l)=f_0(x_0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\cdot f_i(x_0)=f_0(x_0)\le f_0(x_0)+\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\cdot f_i(x_0)=\mathscr{L}(x_0,s)\,,$$

másként írva

$$\mathscr{L}(x_0,l)=\min_{s\in\mathbb{R}^m_+}\mathscr{L}(x_0,s)\,.$$

Térjünk most a lényegi rész bizonyítására.

Szükségesség: Belátjuk, hogy a Slater-feltételből következik a 3.2.4. állításban megkövetelt regularitási tulajdonság, azaz belátjuk, hogy az

$$\{f_i'(x_0)\in X^*\ :\ i=1,\dots,m,\ f_i(x_0)=0\}\subseteq X^*$$

folytonos lineáris funkcionálok kúpfüggetlenek.

Indirekt módon tegyük fel, hogy kúp-összefüggőek. Bevezetve az

$$I \doteq \{i = 1, \ldots, m \ : \ f_i(x_0) = 0\}$$

indexhalmazt, mint a fentiekben, ez azt jelenti, hogy $\exists\ (\lambda_i \in \mathbb{R}_+ \ : \ i \in I)$ nem mind nullából álló véges nemnegatív együttható-sorozat, hogy

$$\mathbf{0} = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i'(x_0) = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i f_i \right)' (x_0)\,.$$

Mivel $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ konvex függvény, ezért a

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f_i : D \to \mathbb{R}$$

függvény konvex, emiatt a deriváltja nulla voltából következik, hogy x_0 a minimumhelye, amiből a Slater-feltétel alapján adódik, hogy

$$0 = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot 0 = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x_0) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\tilde{x}) < \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot 0 = 0\,,$$

ami ellentmondás. Tehát a mondott funkcionálok kúpfüggetlenek. Ezek alapján a Fritz-John-tételből következik az (a) és (b) feltétel.

Elégségesség: Láttuk, hogy az (a) feltétel, az Euler-Lagrange-egyenlet, azzal ekvivalens, hogy x_0 a Lagrange-függvény minimumhelye:

$$\forall\, x \in D \quad \text{esetén} \quad \mathscr{L}(x_0, l) \leq \mathscr{L}(x, l)\,,$$

a (b) feltétel, a komplementaritási feltétel szerint pedig $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$. Ezek szerint $\forall\, x \in D$ lehetséges megoldás esetén

$$\begin{aligned} f_0(x_0) &= f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x_0) = \mathscr{L}(x_0, l) \leq \mathscr{L}(x, l) \\ &= f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\,. \end{aligned}$$

Mivel $\forall\, x \in D$ lehetséges megoldás mellett $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén $f_i(x) \leq 0$, ezért $\lambda_i \geq 0$ volta miatt

$$\lambda_i \cdot f_i(x) \leq 0\,.$$

Ezek alapján $\forall\ x \in D$ lehetséges megoldás esetén

$$f_0(x_0) \leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x) \leq f_0(x)\,,$$

ami azt jelenti, hogy x_0 optimális megoldás. □

3.2.8. Megjegyzés. Ennek az állításnak a lineáris programozásbeli nyeregponttétel a speciális esete. Ugyanis: Tekintsük a standard maximumfeladatot:

$$\begin{cases} \langle c,x\rangle \to \max \\ Ax \le b \\ \mathbf{0} \le x \end{cases}, \tag{3.11}$$

a feladat Lagrange-függvénye az az $\mathscr{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ és $\forall\, y = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\mathscr{L}(x,y) = \langle c,x\rangle - \sum_{i=1}^{m} \eta_i \cdot (\langle a_{i.},x\rangle - \beta_i) = \langle c,x\rangle - y^T Ax + \langle y,b\rangle\,.$$

A tétel szerint egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vektor pontosan akkor megoldása a (3.11) standard maximumfeladatnak, ha $\exists\, y_0 \in \mathbb{R}^m_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátor, hogy

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}^n_+} \Big(\langle c,x\rangle - y_0^T Ax + \langle y_0,b\rangle \Big) &= \langle c,x_0\rangle - y_0^T Ax_0 + \langle y_0,b\rangle \\ &= \min_{y\in\mathbb{R}^m_+} \Big(\langle c,x_0\rangle - y^T Ax_0 + \langle y,b\rangle \Big)\,. \end{aligned}$$

Tekintsük a standard minimumfeladatot:

$$\begin{cases} \langle y,b\rangle \to \min \\ y^T A \ge c \\ \mathbf{0} \le y \end{cases}, \tag{3.12}$$

a feladat Lagrange-függvénye az az $\mathscr{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\, y \in \mathbb{R}^m$ és $\forall\, x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\mathscr{L}(x,y) = \langle y,b\rangle + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot (\gamma_j - \langle y,a_{.j}\rangle) = \langle y,b\rangle - y^T Ax + \langle c,x\rangle$$

azaz a fenti függvény, azzal a különbséggel, hogy a változók és a Lagrange-multiplikátorok helyet cseréltek. A tétel szerint egy $y_0 \in \mathbb{R}^m$ vektor pontosan akkor megoldása a fenti (3.12) standard minimumfeladatnak, ha $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^m_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátor, hogy

$$\begin{aligned} \max_{x\in\mathbb{R}^n_+} \Big(\langle c,x\rangle - y_0^T Ax + \langle y_0,b\rangle \Big) &= \langle c,x_0\rangle - y_0^T Ax_0 + \langle y_0,b\rangle \\ &= \min_{y\in\mathbb{R}^m_+} \Big(\langle c,x_0\rangle - y^T Ax_0 + \langle y,b\rangle \Big)\,. \end{aligned}$$

Mivel a nyeregponti feltétel szükséges és elégséges, valamint a maximum- és minimumfeladatra vonatkozó nyeregponti feltételek azonosak, ezért ezek szerint az $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vektor megoldása a fenti (3.11) standard maximumfeladatnak, és az $y_0 \in \mathbb{R}^m$ vektor megoldása a fenti (3.12) standard minimumfeladatnak pontosan akkor, ha $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ nyeregpontja a feladatok közös Lagrange-függvényének:

$$\begin{aligned}\max_{x\in\mathbb{R}^n_+}\Big(\langle c,x\rangle - y_0^T Ax + \langle y_0,b\rangle\Big) &= \langle c,x_0\rangle - y_0^T Ax_0 + \langle y_0,b\rangle \\ &= \min_{y\in\mathbb{R}^m_+}\Big(\langle c,x_0\rangle - y^T Ax_0 + \langle y,b\rangle\Big)\,.\end{aligned}$$

Multiplikátor-tétel a konvex programozási feladatra

Az előző szakaszban már említettük, hogy ha a célfüggvényre feltesszük, hogy konvex (illetve konkáv), akkor csak a minimumfeladat (illetve csak a maximumfeladat) releváns. Ebben az alfejezetben az egyenőtlenséggel korlátozott (3.7) feltételes szélsőérték-feladat függvényeire feltesszük, hogy konvexek, ezért csak a minimumfeladatra szorítkozunk. Tehát az egyenlőtlenségekkel korlátozott (3.10) feltételes szélsőérték-feladat, azaz a

$$\begin{cases} f_0(x) \to \min \\ f_1(x) \le 0, \ldots, f_m(x) \le 0 \\ x \in D \end{cases}$$

feladat megoldására konvex esetben, azaz a konvex programozási feladat megoldására adunk szükséges illetve elégséges feltételeket.

Az optimalitás geometriai feltétele

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a (3.10) feladat optimális értéke nulla, azaz ha az $x_0 \in D$ pont a (3.10) feladat megoldása, akkor

$$f_0(x_0) \doteq 0\,.$$

(A f_0 függvény helyett tekintsük az $x \mapsto f_0(x) - f_0(x_0)$ függvényt.)

3.2.9. Megjegyzés. Vezessük be a

$$f \doteq \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} : D \to \mathbb{R}^{m+1}$$

jelölést, azaz ahol $\forall\ i = 0,1,\ldots,m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ az f függvény koordinátafüggvénye.

Legyen továbbá

$$\begin{aligned} W &\doteq \{\, y = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \ :\ \eta_0 < 0,\ \eta_1 \le 0, \ldots, \eta_m \le 0 \,\} \\ &= \mathbb{R}_{--} \times \mathbb{R}^m_-\,. \end{aligned}$$

Látható, hogy a $W \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ halmaz

(1) konvex,

(2) $\operatorname{int} W = \mathbb{R}_{--}^{m+1}$, így nemüres,

(3) $\operatorname{cl} W = \mathbb{R}_{-}^{m+1}$,

(4) $\mathbf{0} \notin W$.

3.2.10. Állítás (az optimalitás geometriai feltétele)**.** *Egy $x_0 \in D$ pont a* (3.7) *feladatnak pontosan akkor megoldása, ha*

(1) $f(x_0) \in \operatorname{cl} W = \mathbb{R}_{-}^{m+1}$, *azaz* $f(x_0) \le \mathbf{0}$,

(2) $f(D) \cap W = \emptyset$.

Bizonyítás. Egy $x_0 \in D$ pont a (3.7) feladatnak pontosan akkor megoldása, ha egyrészt x_0 lehetséges megoldás, ami $x_0 \in D$ miatt azzal ekvivalens, hogy

$$f_1(x_0) \le 0, \dots, f_m(x_0) \le 0, \quad \text{azaz} \quad (f_1(x_0), \dots, f_m(x_0)) \in \mathbb{R}_{-}^{m},$$

ez pedig $f_0(x_0) = 0$ miatt azzal ekvivalens, hogy

$$f(x_0) = (f_0(x_0), f_1(x_0), \dots, f_m(x_0)) \in \mathbb{R}_{-}^{m+1},$$

ami éppen az (1) feltétel;

másrészt $\forall\, x$ lehetséges megoldás esetén $f_0(x_0) \le f_0(x)$, ami azzal ekvivalens, hogy $\nexists\, x$ lehetséges megoldás, amelyre $f_0(x) < f_0(x_0)$, ez pedig azt jelenti, hogy

$$\nexists\, x \in D, \quad \text{amelyre} \quad f_1(x) \le 0, \dots, f_m(x) \le 0 \quad \text{és} \quad f_0(x) < f_0(x_0) = 0,$$

azaz

$$\nexists\, x \in D, \text{ amelyre } f(x) \in W, \quad \text{másképpen} \quad \forall\, x \in D, \text{ esetén } f(x) \notin W,$$

ezek szerint $f(D) \cap W = \emptyset$, ami pedig éppen a (2) feltétel. □

3.2.11. Megjegyzés. A fenti állítás szerint, ha $x_0 \in D$ megoldása a (3.7) feladatnak, akkor

$$f(D) \cap W = \emptyset.$$

A W halmaz konvex, ezért ha az $f(D)$ halmaz is az volna, akkor a szeparációs tétel szerint el lehetne választani őket hipersíkal. Mivel ez általában nem áll fenn, ezért ha használni akarjuk a szeparációt, akkor konstruálni kell egy olyan V halmazt, amelyre teljesül, hogy

(1) konvex,

(2) $V \cap W = \emptyset$,

(3) $f(D) \subseteq V$.

3.2.12. Megjegyzés. A multiplikátor-tétel bizonyításában a szeparációs tételt (2.4.9. állítást) fogjuk használni, melynek során a (3.7) feladat $\mathscr{L} : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvényének egy módosítását vizsgáljuk, nevezetesen azt a függvényt, amelyre $\forall\, x \in D$ és $\forall\, (\lambda_0, l) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ esetén

$$\begin{aligned}\langle(\lambda_0, l), f(x)\rangle &= \lambda_0 \cdot f_0(x) + \lambda_1 \cdot f_1(x) + \ldots + \lambda_m \cdot f_m(x) \\ &= \lambda_0 \cdot f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\,.\end{aligned}$$

A Lagrange-függvény ennek a függvénynek a $\lambda_0 = 1$ helyen felvett értéke:

$$\mathscr{L}(x, l) \quad = \quad \langle(1, l), f(x)\rangle = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\,.$$

Ezekből következően a multiplikátor-tétel bizonyításában fontos lesz annak az igazolása, hogy $\lambda_0 = 1$. A Lagrange-féle és a Fritz John-féle multiplikátor-tétel bizonyítása során erre nem kellett külön kitérnünk. Első lépésben tehát a multiplikátor-tétel egy gyengébb változatát igazoljuk.

3.2.13. Állítás (Karush-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen* $(X, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ *feletti vektortér,* $D \subseteq X$ *konvex halmaz, legyen továbbá* $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$ *esetén* $f_i : D \to \mathbb{R}$ *konvex függvény.*
Ha $x_0 \in D$ *megoldása az egyenlőtlenségekkel korlátozott* (3.10) *feltételes szélsőérték-feladatnak (azaz a konvex programozási feladatnak), akkor* $\exists\ (\lambda_0, l) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ *nemnegatív és nemnulla vektor (ami azt jelenti, hogy a* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *számok nemnegatívak és nem mind nullák), hogy*

(1) $\langle(\lambda_0, l), f(x_0)\rangle = \min\limits_{x \in D} \langle(\lambda_0, l), f(x)\rangle$ (*Kuhn–Tucker-feltétel*), *részletesen:*

$$\lambda_0 \cdot f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x_0) = \min_{x \in D} \left(\lambda_0 \cdot f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\right),$$

(2) $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén* $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$ (*komplementaritási feltétel*).

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in D$ megoldása a (3.7) feladatnak.

Első lépés: Konvexifikáció. Legyen

$$W \doteq \mathbb{R}_{--} \times \mathbb{R}_-^m\,.$$

a 3.2.9. megjegyzésbeli halmaz, továbbá a 3.2.11. megjegyzésbeli V halmaz legyen

$$V \doteq f(D) + \mathbb{R}_+^{m+1}\,.$$

Belátjuk, hogy az $f(D) + \mathbb{R}_+^{m+1} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ halmaz

(1) konvex,

(2) $\left(f(D)+\mathbb{R}_{+}^{m+1}\right) \cap W=\emptyset$,

(3) $f(D) \subseteq \left(f(D)+\mathbb{R}_{+}^{m+1}\right)$.

Ugyanis:
(1) (Ez éppen az f függvény ún. Ky Fan-konvexitása.) Legyenek $y_1,\ y_2 \in f(D)+\mathbb{R}_{+}^{m+1}$ tetszőlegesek, ekkor $\exists\, x_1,\ x_2 \in D,\ v_1,\ v_2 \in \mathbb{R}_{+}^{m+1}$, hogy

$$y_1=f(x_1)+v_1\,,\ y_2=f(x_2)+v_2\,, \quad \text{ezért} \quad f(x_1) \leq y_1\,,\ f(x_2) \leq y_2\,.$$

Mivel az f függvény konvex, pontosabban minden koordinátafüggvénye konvex, ezért $\forall\, \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}_{+},\ \alpha_1+\alpha_2=1$ esetén

$$f(\alpha_1 \cdot x_1+\alpha_2 \cdot x_2) \leq \alpha_1 \cdot f(x_1)+\alpha_2 \cdot f(x_2)\,.$$

A fentiek miatt ebből következik, hogy

$$f(\alpha_1 \cdot x_1+\alpha_2 \cdot x_2) \leq \alpha_1 \cdot y_1+\alpha_2 \cdot y_2\,,$$

ezért

$$\alpha_1 \cdot y_1+\alpha_2 \cdot y_2 \in f(D)+\mathbb{R}_{+}^{m+1}\,.$$

(2) Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\exists\, y=(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m) \in \left(f(D)+\mathbb{R}_{+}^{m+1}\right) \cap W\,,$$

ez azt jelenti, hogy egyrészt $y \in f(D)+\mathbb{R}_{+}^{m+1}$, azaz $\exists\, x \in D$, hogy

$$f(x) \leq y\,,\ \text{azaz}\ f_0(x) \leq \eta_0,\ f_1(x) \leq \eta_1\,,\ \ldots, f_m(x) \leq \eta_m\,,$$

másrészt

$$y \in W=\mathbb{R}_{--} \times \mathbb{R}_{-}^{n}\,,\ \text{azaz}\ \eta_0<0=f_0(x_0),\ \eta_1 \leq 0,\ \ldots, \eta_m \leq 0\,,$$

ezekből pedig

$$f_0(x) \leq \eta_0<f_0(x_0),\ f_1(x) \leq \eta_1 \leq 0,\ \ldots, f_m(x) \leq \eta_m \leq 0,\ \text{azaz}$$

$$f_0(x)<f_0(x_0),\ f_1(x) \leq 0,\ \ldots, f_m(x) \leq 0\,,$$

így x_0 nem megoldása az (3.7) feladatnak. Ez ellentmondás.

(3) Mivel $\mathbf{0} \in \mathbb{R}_{+}^{m+1}$, ezért ez nyilván teljesül.

Második lépés: Szeparáció. A fentiek szerint az

$$f(D)+\mathbb{R}_{+}^{m+1} \quad \text{és} \quad W$$

$\mathbb{R}^{m+1}$-beli diszjunkt, konvex halmazok, így hipersíkkal szétválaszthatók. Mivel

$$f(D) \subseteq (f(D)+\mathbb{R}_{+}^{m+1}) \quad \text{és} \quad \mathrm{cl}\, W = \mathbb{R}_{-}^{m+1},$$

ezért az

$$f(D) \ \text{és} \ \mathbb{R}_{-}^{m+1}$$

halmazok szintén szétválaszthatók ugyanezen hipersíkkal, ez azt jelenti, hogy $\exists\ (\lambda_0, l) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor és $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\begin{aligned}
&\forall\ y \in \mathbb{R}_{-}^{m+1} \ \text{esetén} \ \langle (\lambda_0, l), y \rangle \le \alpha\,, \\
&\forall\ y \in f(D) \ \text{esetén} \ \alpha \le \langle (\lambda_0, l), y \rangle\,, \ \text{azaz} \\
&\forall\ x \in D \ \text{esetén} \ \alpha \le \langle (\lambda_0, l), f(x) \rangle\,.
\end{aligned}$$

Mivel a 3.2.10. állítás (1) feltétele szerint $f(x_0) \in \mathbb{R}_{-}^{m+1}$, valamint nyilván $f(x_0) \in f(D)$, ezért $\langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle = \alpha$, eszerint a fenti egyenlőtlenségek a következő alakúak:

$$\forall\ y \in \mathbb{R}_{-}^{m+1} \ \text{esetén} \ \langle (\lambda_0, l), y \rangle \le \langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle\,, \tag{3.13}$$

$$\forall\ x \in D \ \text{esetén} \ \langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle \le \langle (\lambda_0, l), f(x) \rangle\,. \tag{3.14}$$

Gondoljuk meg, hogy $(\lambda_0, l) \ge \mathbf{0}$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ \lambda_i < 0$, ekkor

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \langle (\lambda_0, l), \alpha \cdot e_i \rangle = \infty\,,$$

de $\forall\ \alpha < 0$ esetén $\alpha \cdot e_i \in \mathbb{R}_{-}^{m+1}$, ezért az (3.13) egyenlőtlenség szerint

$$\langle (\lambda_0, l), \alpha \cdot e_i \rangle \le \langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle\,,$$

ami ellentmondás.

Harmadik lépés: A multiplikátor-szabályok leolvasása.

(1) A (3.14) egyenlőtlenség éppen azt állítja, hogy

$$\langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle = \min_{x \in D} \langle (\lambda_0, l), f(x) \rangle\,.$$

(2) Először is $\forall\ i = 1, \dots, m$ esetén $\lambda_i \ge 0$ és $f_i(x_0) \le 0$, emiatt

$$\lambda_i \cdot f_i(x_0) \le 0\,.$$

Továbbá a 3.2.10. állítás (1) pontja szerint

$$f(x_0) \in \mathbb{R}_{-}^{m+1}\,,$$

így $\forall\, i = 1, \dots, m$ esetén

$$f(x_0) - \frac{1}{2} f_i(x_0) \cdot e_i = \left(f_0(x_0), f_1(x_0), \dots, \frac{1}{2} f_i(x_0), \dots, f_m(x_0)\right) \in \mathbb{R}_-^{m+1},$$

ezért a fenti (3.13) egyenlőtlenség miatt

$$\left\langle (\lambda_0, l), f(x_0) - \frac{1}{2} f_i(x_0) \cdot e_i \right\rangle \leq \langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle,$$

amiből

$$-\frac{1}{2} \langle (\lambda_0, l), f_i(x_0) \cdot e_i \rangle \leq 0, \quad \text{azaz} \quad \lambda_i \cdot f_i(x_0) \geq 0.$$

Ez a fentivel együtt azt jelenti, hogy $\forall\, i = 1, \dots, m$ esetén

$$\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0. \qquad \square$$

3.2.14. Állítás (Kuhn-Tucker-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen* $(X, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ *feletti vektortér,* $D \subseteq X$ *konvex halmaz, legyen továbbá* $\forall\, i = 0, 1, \dots, m$ *esetén* $f_i : D \to \mathbb{R}$ *konvex függvény. Tegyük fel, hogy teljesül még a következő regularitási feltétel (constraint qualification), amit Slater-feltételnek is neveznek:*

$$\exists\, \tilde{x} \in D, \text{ amelyre } \forall\, i = 1, \dots, m \text{ esetén } f_i(\tilde{x}) < 0.$$

Egy $x_0 \in D$ *vektor pontosan akkor megoldása megoldása az egyenlőtlenségekkel korlátozott* (3.10) *feltételes szélsőérték-feladatnak (a konvex programozási feladatnak), ha* $\exists\, l = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m$ *nemnegatív Lagrange-multiplikátor, amelyre*

(1) $\mathscr{L}(x_0, l) = \min\limits_{x \in D} \mathscr{L}(x, l)$ (*Kuhn–Tucker-feltétel*)*, részletesen:*

$$f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x_0) = \min_{x \in D} \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x) \right),$$

(2) $\forall\, i = 1, \dots, m$ *esetén* $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$ (*komplementaritási feltétel*)*.*

A fenti feltételek a következő nyeregponti alakban is megfogalmazhatók:

$$\min_{x \in D} \mathscr{L}(x, l) = \mathscr{L}(x_0, l) = \max_{s \in \mathbb{R}_+^m} \mathscr{L}(x_0, s).$$

Bizonyítás. Szükségesség: Az állítás azzal ekvivalens, hogy az előző Karush-féle multiplikátor-tétel, a 3.2.13. állítás (1) és (2) feltételét kielégítő $(\lambda_0, l) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ nemnegatív és nemnulla vektorok között van olyan, amelyben

$$\lambda_0 > 0,$$

így (alkalmas osztással) $\lambda_0 = 1$-nek választható.

Indirekt módon tegyük fel, hogy a regularitási feltétel teljesülése esetén is a 3.2.13. állítás (1) és (2) feltételét kielégítő $\forall\,(\lambda_0, l) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ nemnegatív és nemnulla vektorra az áll fenn, hogy

$$\lambda_0 = 0\,.$$

Az (1) feltétel, a Kuhn-Tucker-feltétel azt jelenti, hogy $\forall\, x \in D$ esetén

$$\langle(\lambda_0, l), f(x_0)\rangle \le \langle(\lambda_0, l), f(x)\rangle\,,$$

azaz részletesen:

$$\lambda_0 \cdot f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x_0) \le \lambda_0 \cdot f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\,.$$

Mivel $\lambda_0 = 0$, ezért

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x_0) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\,,$$

továbbá a (2) komplementaritási feltétel szerint $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$, emiatt

$$0 \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)\,.$$

Legyen $x \in D$ lehetséges megoldás, ekkor $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén $f_i(x) \le 0$, így $\lambda_i \ge 0$ volta miatt

$$\lambda_i \cdot f_i(x) \le 0\,,$$

amiből

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x) \le 0\,.$$

Ez az előzőekkel együtt azt jelenti, hogy $\forall\, x \in D$ lehetséges megoldás esetén

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x) = 0\,.$$

Speciálisan a regularitási feltételbeli $\tilde{x} \in D$ lehetséges megoldásra is, amelyre $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén $f_i(\tilde{x}) < 0$, szintén teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(\tilde{x}) = 0\,,$$

ez pedig csak úgy lehet, hogy $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén $\lambda_i = 0$, így

$$(\lambda_0, l) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{0}\,,$$

ami ellentmondás. Tehát feltehető, hogy $\lambda_0 = 1$.

Az (1) feltétel nyeregponti alakja csak az első egyenlőtlenséggel bővebb, de ez voltaképpen nyilvánvaló. Ugyanis, mivel $\forall\, i=1,\dots,m$ esetén $f_i(x_0)\le 0$, ezért felhasználva a (2) komplementaritási feltételt, az adódik, hogy $\forall\ (\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in\mathbb{R}^m_+$ esetén

$$f_0(x_0)+\sum_{i=1}^m \sigma_i\cdot f_i(x_0)\le f_0(x_0)=f_0(x_0)+\sum_{i=1}^m \lambda_i\cdot f_i(x_0)\,.$$

Elégségesség: Ha $\exists\ l=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátor, amely kielégíti az (1), (2) feltételeket egy $x_0\in D$ pontban, akkor $\forall\ x\in D$ esetén

$$f_0(x_0)=\mathscr{L}(x_0,l)\le\mathscr{L}(x,l)=f_0(x)+\sum_{i=1}^m \lambda_i\cdot f_i(x)\,.$$

Legyen $x\in D$ tetszőleges lehetséges megoldás, ekkor $\forall\ i=1,\dots,m$ esetén $f_i(x)\le 0$, így $\lambda_i\ge 0$ miatt

$$\lambda_i\cdot f_i(x)\le 0\,,$$

amiből

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\cdot f_i(x)\le 0\,.$$

Ezek szerint $\forall\ x\in D$ lehetséges megoldás esetén

$$f_0(x_0)\le f_0(x)\,,$$

ami azt jelenti, hogy x_0 optimális megoldás. □

3.2.15. Megjegyzés. A 3.2.8. megjegyzésben láttuk, hogy a lineáris programozás nyeregponttétele következik a Kuhn-Tucker-Fritz John-tételből. A fentiek alapján viszont világos, hogy már a Kuhn-Tucker-tételből is következik.

3.2.16. Állítás. *A 3.2.14. állításbeli regularitási feltétel (constraint qualification) más alakban is megfogalmazható, nevezetesen a következő feltételek ekvivalensek:*

(*a*) $\exists$ *olyan* $\tilde{x}\in D$, *amelyre* $\forall\ i=1,\dots,m$ *esetén* $f_i(\tilde{x})<0$ (*Slater-feltétel*).

(*b*) *A feltételi halmazon* $\forall\ i=1,\dots,m$ *esetén az* f_i *függvény nem azonosan nulla, azaz* $\forall\ j=1,\dots,m$ *esetén* $\exists\, x_j\in D$, *amelyre* $\forall\ i=1,\dots,m$ *esetén*

$$f_i(x_j)\le 0\,,\ \ \textit{és}\ \ f_j(x_j)<0\,.$$

Bizonyítás. (a) $\Rightarrow$ (b): Nyilvánvaló. Ugyanis mivel az $\tilde{x}\in D$ pontban $\forall\ i=1,\dots,m$ esetén $f_i(\tilde{x})<0$, ezért f_i nem azonosan nulla a feltételi halmazon.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ha teljesül az (b) feltétel, akkor $\forall\ j = 1,\dots,m$ esetén $\exists\ x_j \in D$, amelyre $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén

$$f_i(x_j) \le 0\,, \text{ és } f_j(x_j) < 0\,,$$

ezért

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} f_i(x_j) < 0\,.$$

Mivel $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén a f_i függvény konvex, ezért az $\tilde{x} \doteq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} x_j$ pontra

$$f_i(\tilde{x}) = f_i\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} x_j\right) \le \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} f_i(x_j) < 0\,,$$

így $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén

$$f_i(\tilde{x}) < 0\,. \qquad \square$$

Multiplikátor-tétel a sima és konvex programozási feladatra

Ha a feladatban szereplő függvényekről feltesszük, hogy még differenciálhatók is, akkor a Kuhn-Tucker-féle multiplikátor-tételnek természetes következményeként kapjuk a sima és egyben konvex programozási feladatra vonatkozó Kuhn-Tucker-Fritz John-féle multiplikátor-tételt, amit már egyszer bebizonyítottunk a Fritz John-féle multiplikátor-tétel következményeként. Lássuk tehát újra a 3.2.7. állítást.

3.2.17. Állítás (Kuhn-Tucker-Fritz John-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen $(X, \|.\|)$ valós normált tér, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, legyen továbbá $\forall\ i = 0,1,\dots,m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ konvex függvény, amely egy $x_0 \in D$ pontban differenciálható. Tegyük fel, hogy teljesül még a következő regularitási feltétel (constraint qualification), amit Slater-feltételnek is neveznek:*

$$\exists\ \tilde{x} \in D\,, \textit{ amelyre } \forall\ i = 1,\dots,m \textit{ esetén } f_i(\tilde{x}) < 0\,.$$

Egy $x_0 \in D$ vektor pontosan akkor megoldása az egyenlőtlenségekkel korlátozott (3.7) feltételes szélsőérték-feladatnak (a sima programozási feladatnak), ha $\exists\ l = (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátor, hogy

(1) $\partial_1 \mathscr{L}(x_0, l) = \mathbf{0}_{X^*}$ *(Euler-Lagrange-egyenlet), részletesen:*

$$f_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{X^*}\,, \textit{ másképpen megfogalmazva:}$$

$$-f_0'(x_0) \in \operatorname{con}\{f_1'(x_0),\dots,f_m'(x_0)\})\,,$$

(2) $\forall\ i = 1,\dots,m$ *esetén* $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$ *(komplementaritási feltétel).*

Bizonyítás. Mivel feltettük, hogy $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$ esetén az $f_i : D \to \mathbb{R}$ függvény konvex, ezért a feladat Lagrange-függvénye az első változójában konvex, azaz az

$$\mathscr{L}(., l) = f_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i : D \to \mathbb{R}$$

függvény konvex. Ezért az (1) Euler-Lagrange-egyenlet, miszerint

$$\partial_1 \mathscr{L}(x_0, l) = \mathbf{0}_{X^*},$$

azzal ekvivalens, hogy

$$\mathscr{L}(x_0, l = \min_{x \in D} \mathscr{L}(x, l).$$

Ezért az állítás adódik a Kuhn-Tucker-multiplikátor-tételből (3.2.14. állítás). □

Multiplikátor-tétel a konvex programozási feladatra, szubderivált alak

3.2.18. Megjegyzés. Ismert, hogy egy konvex függvénynek egy pontban pontosan akkor van minimuma, ha a nulla lineáris funkcionál eleme az ehhez a ponthoz tartozó szubderiváltjának. Ez a tény módot ad arra, hogy a fenti (3.10)

$$\begin{cases} f_0(x) \to \min \\ f_1(x) \le 0, \ldots, f_m(x) \le 0 \\ x \in D \end{cases}.$$

konvex programozási feladatra vonatkozó eredményeket a szubderivált segítségével is megfogalmazzuk.

Ebben az esetben még arra is lehetőségünk nyílik, hogy az $x \in D$ korlátozás teljesülésére is feltételt adjunk. Ehhez módosítsuk úgy a feladat Lagrange-függvényét, hogy hozzáadjuk a D halmaz δ_D indikátorfüggvényét.

3.2.19. Definíció. A (3.7) feladat *módosított Lagrange-függvénye* az az $\mathscr{L}_D : X \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, amely az eredeti Lagrange függvény és a D halmaz indikátorfüggvényének az összege, azaz amelyre $\forall\ x \in X$ és $\forall\ l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_D(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) &\doteq \mathscr{L}(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) + \delta_D(x) \\ &= f_0(x) + \lambda_1 \cdot f_1(x) + \ldots + \lambda_m \cdot f_m(x) + \delta_D(x) \\ &= f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x) + \delta_D(x). \end{aligned}$$

3.2.20. Állítás (Kuhn-Tucker-féle multiplikátor-tétel, szubderivált alak)**.** *Legyen $(X, \|.\|)$ valós normált tér, $D \subseteq X$ konvex halmaz, legyen $\forall\ i = 0, 1, \ldots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ konvex függvény, amelyek mindegyike folytonos legalább egy $\hat{x} \in D$ pontban.*

Tegyük fel, hogy teljesül még a következő regularitási feltétel (constraint qualification), amit Slater-feltételnek is neveznek:

$$\exists\, \tilde{x} \in D\,,\ \textit{amelyre}\ \forall\ i = 1,\dots,m\ \textit{esetén}\ f_i(\tilde{x}) < 0\,.$$

Egy $x_0 \in X$ *vektor pontosan akkor megoldása az egyenlőtlenségekkel korlátozott* (3.10) *feltételes szélsőérték-feladatnak (a konvex programozási feladatnak), ha* $\exists\ l = (\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$ *nemnegatív Lagrange-multiplikátor, amelyre*

(1) $\mathbf{0}_{X^*} \in \partial_1 \mathscr{L}_D(x_0,l)$ *(Kuhn–Tucker-feltétel), részletesen:*

$$\mathbf{0}_{X^*} \in \partial f_0(x_0) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial f_i(x_0) + N_D(x_0)\,,$$

(2) $\forall\ i = 1,\dots,m$ *esetén* $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$ *(komplementaritási feltétel).*

Bizonyítás. A Kuhn-Tucker-tétel (3.2.20. állítás) szerint egy $x_0 \in D$ vektor pontosan akkor megoldása a (3.7) konvex programozási feladatnak, ha $\exists\ l \in \mathbb{R}^m_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátor, amelyre

(1) $\mathscr{L}(x_0,l) = \min_{x\in D} \mathscr{L}(x,l)$ (Kuhn–Tucker-feltétel),

(2) $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$ (komplementaritási feltétel).

Emiatt egy $x_0 \in X$ vektor pontosan akkor megoldása a (3.7) konvex programozási feladatnak, ha egyrészt $x_0 \in D$, ami azzal ekvivalens, hogy $\delta_D(x_0) = 0$, másrészt teljesülnek az előző feltételek. A Kuhn-Tucker-feltétel az indikátorfüggvény definíciója szerint azzal ekvivalens, hogy

$$\mathscr{L}(x_0,l) + \delta_D(x_0) = \min_{x\in X} \mathscr{L}(x,l) + \delta_D(x_0)\,, \ \text{ azaz }\ \mathscr{L}_D(x_0,l) = \min_{x\in D} \mathscr{L}_D(x,l)\,.$$

Mivel $\forall\, i = 0,1,\dots,m$ esetén a $f_i : D \to \mathbb{R}$ függvény konvex, továbbá a $D \subseteq X$ halmaz konvexitása miatt a $\delta_D : X \to \overline{\mathbb{R}}$ indikátorfüggvény is konvex, ezért az $\mathscr{L}_D(.,l) : D \to \overline{\mathbb{R}}$ Lagrange-függvény is konvex, emiatt pedig a Kuhn-Tucker-feltétel azzal ekvivalens, hogy

$$\mathbf{0}_{X^*} \in \partial_1 \mathscr{L}_A(x_0,l)\,.$$

Mivel $\forall\, i = 0,1,\dots,m$ esetén az $f_i : X \to \mathbb{R}$ függvény folytonos ugyanazon $\hat{x} \in D \subseteq X$ pontban, továbbá $\hat{x} \in \mathrm{Dom}\,\delta_D$, azaz az indikátorfüggvény effektivitási tartományának is pontja, ezért a Moreau-Rockafellar-tétel szerint

$$\partial_1 \mathscr{L}_D(x_0,l) = \partial_1 \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x_0) + \delta_D(x_0) \right) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial f_i(x_0) + \partial \delta_D(x_0)\,,$$

amiből következik, hogy

$$\mathbf{0}_{X^*} \in \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial f_i(x_0) + \partial \delta_D(x_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \partial f_i(x_0) + N_D(x_0)\,. \qquad \square$$

Multiplikátor-tétel a sima programozási feladatra a szeparációs tétel felhasználásával

Ebben az alfejezetben az egyenlőtlenséggel korlátozott (3.7) feltételes szélsőérték-feladat, azaz a

$$\begin{cases} f_0(x) \to \min\ (\max) \\ f_1(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0 \\ x \in D \end{cases}$$

feladat megoldására sima esetben, azaz a sima programozási feladat megoldására vonatkozó Fritz John-féle multiplikátortételt a Kuhn-Tucker-féle multiplikátor-tétel bizonyításával analóg módon, a szeparációs tétellel bizonyítjuk. Ugyanúgy, mint a Kuhn-Tucker-féle multiplikátor-tételnél, első lépésben csak egy gyengébb változatot igazolunk. Itt is éljünk 3.2.9. megjegyzésbeli jelöléssel:

$$f \doteq \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} : D \to \mathbb{R}^{m+1}$$

ahol $\forall\, i = 0, 1, \ldots, m$ esetén $f_i : D \to \mathbb{R}$ az f függvény koordinátafüggvénye.

3.2.21. Állítás (Fritz John-féle multiplikátor-tétel, gyenge változat)**.** *Legyen* $(X, \|.\|)$ *valós normált tér,* $D \subseteq X$ *nyílt halmaz, továbbá legyen* $\forall\, i = 0, 1, \ldots, m$ *esetén* $f_i : D \to \mathbb{R}$ *egy* $x_0 \in D$ *pontban differenciálható függvény.*
Ha $x_0 \in D$ *megoldása a* (3.7) *egyenlőtlenségekkel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatnak, akkor* $\exists\ (\lambda_0, l) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ *nemnegatív és nemnulla vektor (ami azt jelenti, hogy a* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *számok nemnegatívak és nem mind nullák), hogy*

(1) $\langle(\lambda_0, l), f(.)\rangle'(x_0) = \mathbf{0}_{X^*}$ (*Euler-Lagrange-egyenlet*), *részletesen:*

$$\lambda_0 \cdot f_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{X^*},$$

(2) $\forall\, i = 1, \ldots, m$ *esetén* $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$ (*komplementaritási feltétel*).

Bizonyítás. A bizonyítás során csak a minimumfeladatra szorítkozunk.
Feltehető, hogy a D nyílt halmaz konvex, ugyanis vehető helyette az x_0 pont egy D halmazba eső nyílt gömbi környezete.

Első lépés: Konvexifikáció. Legyen

$$W \doteq \mathbb{R}_{--} \times \mathbb{R}^m_-.$$

a 3.2.9. megjegyzésbeli halmaz, továbbá a 3.2.11. megjegyzésbeli V halmaz legyen

$$V \doteq f(x_0) + f'(x_0)(D - x_0).$$

Belátjuk, hogy a $V = f(x_0) + f'(x_0)(D - x_0) \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ halmaz

(1) konvex,

(2) $V \cap \operatorname{int} W = \emptyset$, azaz $(f(x_0) + f'(x_0)(D - x_0)) \cap \mathbb{R}^{m+1}_{--} = \emptyset$.

Ugyanis:
(1) Az $f(x_0) + f'(x_0)(D - x_0) \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ halmaz egy konvex halmaz affin képe, ezért konvex.

(2) Mivel az $f : D \to \mathbb{R}^{m+1}$ függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ezért $\exists\, q : D \to \mathbb{R}^{m+1}$ x_0-ban folytonos, $q(x_0) = \mathbf{0}$, így $\lim_{x \to x_0} q(x) = \mathbf{0}$ tulajdonságú függvény, hogy $\forall\, x \in D$ esetén

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + q(x) \cdot \|x - x_0\| .$$

A továbbiakban, a pont bizonyítása során, az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy

$$x_0 \doteq \mathbf{0}_X .$$

Ekkor a fenti egyenlőség szerint $\forall\, x \in D$ esetén

$$f(x) = f(\mathbf{0}_X) + f'(\mathbf{0}_X)(x) + q(x) \cdot \|x\| . \tag{3.15}$$

Indirekt módon tegyük föl, hogy

$$\begin{aligned}
&(f(x_0) + f'(x_0)(D - x_0)) \cap \operatorname{int} W \neq \emptyset, \text{ azaz} \\
&(f(\mathbf{0}_X) + f'(\mathbf{0}_X)(D)) \cap \mathbb{R}^{m+1}_{--} \neq \emptyset, \text{ azaz} \\
&\exists\, x \in D, \text{ hogy } f(\mathbf{0}_X) + f'(\mathbf{0}_X)(x) < \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{m+1}} .
\end{aligned}$$

Mivel $\lim\limits_{\alpha \to 0} q(\alpha x) = \mathbf{0}$, ezért $\exists\, \alpha \in (0,1)$, hogy

$$f(\mathbf{0}_X) + f'(\mathbf{0}_X)(x) + q(\alpha x) \cdot \|x\| < \mathbf{0} .$$

Mivel $\alpha > 0$, ezért

$$\begin{aligned}
&\alpha(f(\mathbf{0}_X) + f'(\mathbf{0}_X)(x) + q(\alpha x) \cdot \|x\|) < \mathbf{0}, \text{ azaz} \\
&\alpha f(\mathbf{0}_X) + f'(\mathbf{0}_X)(\alpha x) + q(\alpha x) \cdot \|\alpha x\| < \mathbf{0},
\end{aligned}$$

mivel pedig a 3.2.10. állítás (1) pontja szerint $f(\mathbf{0}_X) \in \mathbb{R}^{m+1}_{-}$, ezért a fenti $\alpha \in (0,1)$ esetén $f(\mathbf{0}_X) \leq \alpha f(\mathbf{0}_X)$, így az előzőek szerint

$$f(\mathbf{0}_X) + f'(\mathbf{0}_X)(\alpha x) + q(\alpha x) \cdot \|\alpha x\| < \mathbf{0} .$$

Mivel a D halmaz konvex, ezért $\alpha x \in D$, ekkor (3.15) szerint

$$f(\alpha x) = f(\mathbf{0}_X) + f'(\mathbf{0}_X)(\alpha x) + q(\alpha x) \cdot \|\alpha x\| ,$$

ezért a fentiek alapján

$$f(\alpha x) < \mathbf{0}, \text{ azaz } f(\alpha x) \in \operatorname{int} W \subseteq W ,$$

de a 3.2.10. állítás (2) feltétele szerint $f(D) \cap W = \emptyset$, ami ellentmondás.

Második lépés: Szeparáció. A fentiek szerint

$$f(x_0) + f'(x_0)(D - x_0) \quad \text{és} \quad \operatorname{int} W = \mathbb{R}^{m+1}_{--}$$

$\mathbb{R}^{m+1}$-beli diszjunkt konvex halmazok, ezért hipersíkkal szétválaszthatók, így az

$$f(x_0) + f'(x_0)(D - x_0) \quad \text{és} \quad \operatorname{cl} W = \mathbb{R}^{m+1}_{-}$$

halmazok szintén szétválaszthatók ugyanezen hipersíkkal, ez azt jelenti, hogy $\exists\ (\lambda_0, l) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $(\lambda_0, l) \neq \mathbf{0}$, és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}
&\forall\, y \in \mathbb{R}^{m+1}_{-} \ \text{ esetén } \ \langle (\lambda_0, l), y \rangle \leq \alpha\,,\\
&\forall\, y \in f(x_0) + f'(x_0)(D - x_0) \ \text{ esetén } \ \langle (\lambda_0, l), y \rangle \geq \alpha\,, \ \text{ azaz}\\
&\forall\, x \in D \ \text{ esetén } \ \langle (\lambda_0, l), f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \rangle \geq \alpha\,.
\end{aligned}$$

Mivel a 3.2.10. állítás (1) pontja szerint $f(x_0) \in \mathbb{R}^{m+1}_{-}$, valamint nyilván $x_0 \in D$, ezért

$$\alpha \leq \langle (\lambda_0, l), f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) \rangle = \langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle \leq \alpha\,,$$

ezért

$$\langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle = \alpha\,,$$

eszerint a fenti egyenlőtlenségek a következő alakúak:

$$\begin{aligned}
&\forall\, y \in \mathbb{R}^{m+1}_{-} \ \text{ esetén } \ \langle (\lambda_0, l), y \rangle \leq \langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle\,, && (3.16)\\
&\forall\, x \in D \ \text{ esetén } \ \langle (\lambda_0, l), f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \rangle \geq \langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle\,, \ \text{ azaz}\\
&\forall\, x \in D \ \text{ esetén } \ \langle (\lambda_0, l), f'(x_0)(x - x_0) \rangle \geq 0\,. && (3.17)
\end{aligned}$$

Nyilván $(\lambda_0, l) \geq \mathbf{0}$. Ugyanis indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ \lambda_i < 0$, ekkor

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \langle (\lambda_0, l), \alpha \cdot e_i \rangle = \infty\,,$$

ugyanakkor $\forall\ \alpha < 0$ esetén $\alpha \cdot e_i \in \mathbb{R}^{m+1}_{-}$, így a (3.16) egyenlőtlenség szerint

$$\langle (\lambda_0, l), \alpha \cdot e_i \rangle \leq \langle (\lambda_0, l), f(x_0) \rangle\,,$$

ami ellentmondás.

Harmadik lépés: A multiplikátor-szabályok leolvasása.

(1) Mivel D az x_0 pont környezete, ezért $\exists\, B(x_0,\delta)\subseteq D$, ekkor $\forall\, x\in B(\mathbf{0},\delta)$, azaz $\forall\, x+x_0\in B(x_0,\delta)$ esetén $-x+x_0\in B(x_0,\delta)$, ezért a fenti (3.17) egyenlőtlenség szerint

$$\langle(\lambda_0,l),f'(x_0)(x+x_0-x_0)\rangle=\langle(\lambda_0,l),f'(x_0)(x)\rangle\geq 0\,,$$

valamint

$$\langle(\lambda_0,l),f'(x_0)(-x+x_0-x_0)\rangle=-\langle(\lambda_0,l),f'(x_0)(x)\rangle\geq 0\,,$$

ezért

$$\begin{aligned}0 &= \langle(\lambda_0,l),f'(x_0)(x)\rangle\\ &= \langle(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m),([f_0'(x_0)](x),[f_1'(x_0)](x),\ldots,[f_m'(x_0)](x))\rangle\\ &= \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\cdot[f_i'(x_0)](x)\\ &= \langle(\lambda_0,l),[f'(x_0)](x)\rangle\,,\end{aligned}$$

ez igaz $\forall\, x\in B(\mathbf{0},\delta)$ esetén, ezért

$$\langle(\lambda_0,l),f(.)\rangle'(x_0)=\mathbf{0}_{X^*}\,,\quad \text{azaz}\quad \lambda_0\cdot f_0'(x_0)+\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\cdot f_i'(x_0)=\mathbf{0}_{X^*}\,.$$

(2) Mivel $\mathbf{0}\in\mathbb{R}_-^{m+1}$, ezért a (3.16) egyenlőtlenség szerint

$$0=\langle(\lambda_0,l),\mathbf{0}\rangle\leq\langle(\lambda_0,l),f(x_0)\rangle\,.$$

Mivel pedig $(\lambda_0,l)\geq\mathbf{0}$, továbbá a 3.2.10. állítás (1) pontja szerint $f(x_0)\in\mathbb{R}_-^{m+1}$, ezért

$$0\geq\langle(\lambda_0,l),f(x_0)\rangle\,,$$

ami a fentiekkel együtt azt jelenti, hogy

$$0=\langle(\lambda_0,l),f(x_0)\rangle=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x_0)\,.$$

Továbbá $(\lambda_0,l)\geq\mathbf{0}$, és $\forall\, i=1,\ldots,m$ esetén $f_i(x_0)\leq 0$, emiatt

$$\lambda_i\cdot f_i(x_0)\leq 0\,,$$

ezekből pedig következik, hogy $\forall\, i=1,\ldots,m$ esetén

$$\lambda_i\cdot f_i(x_0)=0\,. \qquad \square$$

3.2.22. Állítás (Fritz John-féle multiplikátor-tétel)**.** *Legyen* $(X,\|.\|)$ *valós normált tér,* $D\subseteq X$ *nyílt halmaz, legyen továbbá* $\forall\, i=0,1,\ldots,m$ *esetén* $f_i:D\to\mathbb{R}$ *egy* $x_0\in D$

pontban differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy teljesül még a következő regularitási feltétel (constraint qualification): az

$$\{f_i'(x_0) \in X^* \ : \ i=1,\dots,m,\ f_i(x_0)=0\} \subseteq X^*$$

folytonos lineáris funkcionálok kúpfüggetlenek.
Ha $x_0 \in D$ megoldása a (3.7) egyenlőtlenségekkel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatnak (a sima programozási feladatnak), akkor $\exists\ l=(\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$ nemnegatív Lagrange-multiplikátor, hogy

(1) $\partial_1 \mathscr{L}(x_0,(\lambda_1,\dots\lambda_m)) = \mathbf{0}_{X^*}$ *(Euler-Lagrange-egyenlet), részletesen:*

$$f_0'(x_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{X^*} \text{ ami azt jelenti, hogy:}$$

$$-f_0'(x_0) \in \operatorname{con}\{f_1'(x_0),\dots,f_m'(x_0)\}),$$

(2) $\forall\ i=1,\dots,m$ *esetén* $\lambda_i \cdot f_i(x_0) = 0$ (*komplementaritási feltétel*).

Bizonyítás. A bizonyítás során csak a minimumfeladatra szorítkozunk.
Az állítás ekvivalens azzal, hogy a 3.2.21. állítás (1) és (2) feltételét kielégítő $(\lambda_0,l) = (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ nemnulla vektorok között van olyan, amelyben

$$\lambda_0 > 0\,,$$

így $\lambda_0 = 1$-nek választható. Az alábbiakban ezt bizonyítjuk be.

Indirekt módon tegyük fel, hogy a regularitási feltétel teljesülése esetén is a 3.2.21. állítás (1) és (2) feltételét kielégítő $\forall\ (\lambda_0,l) = (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ nemnegatív és nemnulla vektorra az áll fenn, hogy

$$\lambda_0 = 0\,.$$

Ebben az esetben az (1) Euler-Lagrange-egyenlet a következő alakú:

$$\mathbf{0}_{X^*} = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(x_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i'(x_0)\,.$$

Jelölje

$$I_1 \doteq \{i=1,\dots,m \ : \ f_i(x_0)=0\} \ \text{és}\ I_2 \doteq \{i=1,\dots,m \ : \ f_i(x_0)<0\}\,.$$

A (2) komplementaritási feltétel szerint, ha $i \in I_2$, azaz $f_i(x_0) < 0$, akkor $\lambda_i = 0$, ezért a fenti egyenlőség a következőképpen írható:

$$\sum_{i\in I_1} \lambda_i f_i'(x_0) = \mathbf{0}_{X^*}\,. \tag{3.18}$$

A regularitási feltétel pedig úgy fogalmazható meg, hogy az

$$\{f_i'(x_0) \in X^* \ : \ i \in I_1\} \subseteq X^*$$

folytonos lineáris funkcionálok kúpfüggetlenek, ez a lineáris funkcionálok kúpfüggetlenségét jellemző 2.3.22. állítás szerint azzal ekvivalens, hogy

$$\bigcap_{i \in I_1} [f_i'(x_0)]^{-1}(\mathbb{R}_{--}) \neq \emptyset,$$

azaz

$$\exists\, v \in X\,,\ \text{hogy}\ \forall\, i \in I_1 \ \text{ esetén } \ [f_i'(x_0)]v < 0\,.$$

A (3.18) egyenlőség miatt erre a $v \in X$ vektorra is

$$\sum_{i \in I_1} \lambda_i [f_i'(x_0)]v = 0\,.$$

Mivel $\forall\ i \in I_1$ esetén $[f_i'(x_0)]v < 0$, valamint $(\lambda_0, l) \geq \mathbf{0}$, ezért $\forall\ i \in I_1$ esetén $\lambda_i \cdot [f_i'(x_0)]v \leq 0$, így a fenti egyenlőségben nempozitív számokat adunk össze, emiatt viszont $\forall\, i \in I_1$ esetén $\lambda_i \cdot [f_i'(x_0)]v = 0$. Újra felhasználva, hogy $\forall\, i \in I_1$ esetén $[f_i'(x_0)]v < 0$, kapjuk, hogy $\lambda_i = 0$. Ezek szerint

$$\forall\, i = 0, 1, \ldots, m \ \text{ esetén } \ \lambda_i = 0\,, \ \text{ azaz } \ (\lambda_0, l) = \mathbf{0}\,,$$

ami ellentmondás. □

IV.

HALMAZÉRTÉKŰ LEKÉPEZÉSEK

Az (X,τ_X) és (Y,τ_Y) topologikus terek közötti $f:X\to Y$ függvényt egy $a\in X$ pontban közismerten akkor nevezünk folytonosnak, ha

> az $f(a)$ pont $\forall\, V\in\tau_Y(f(a))$ környezetéhez $\exists\, U\in\tau_X(a)$ környezete az a pontnak, hogy $\forall\, x\in U$ esetén $f(x)\in V$,

vagy ezzel ekvivalens módon:

> $\forall\, G\in\tau_Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $f(a)\in G$, $\exists\, U\in\tau_X(a)$ környezete az a pontnak, hogy $\forall\, x\in U$ esetén $f(x)\in G$.

Ennek az analógiájára egy $F:X\to\mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés folytonosságára egy $a\in X$ pontban többféle értelmezés is adódik:

(a) $\forall\, G\in\tau_Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(a)\cap G\neq\emptyset$, $\exists\, U\in\tau_X(a)$ környezete az a pontnak, hogy $\forall\, x\in U$ esetén $F(x)\cap G\neq\emptyset$, illetve

(b) $\forall\, G\in\tau_Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(a)\subseteq G$, $\exists\, U\in\tau_X(a)$ környezete az a pontnak, hogy $\forall\, x\in U$ esetén $F(x)\subseteq G$.

Kérdés, hogy tekinthető-e a fenti két értelmezés valamelyike valóban folytonosságnak, azaz lehet-e az Y részhalmazain olyan topológiát definiálni, amely melletti folytonosság éppen a fentiek valamelyikét adja.

Ismert továbbá, hogy az úgynevezett átviteli elv szerint az (X,d_X) és (Y,d_Y) metrikus terek közötti $f:X\to Y$ függvény egy $a\in X$ pontban pontosan akkor folytonos, ha

> $\forall\,(x_n)$ X-beli $\lim x_n=a$ sorozat esetén $\lim f(x_n)=f(a)$.

Ennek az analógiájára egy $F:X\to\mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés folytonosságára egy $a\in X$ pontban sorozatokkal a következő értelmezés adódik:

(a) $\forall\,(x_n)$ X-beli $\lim x_n=a$ tulajdonságú sorozat, valamint $b\in F(a)$ esetén $\exists\, y_n\in F(x_n)$ sorozat, amelyre $\lim y_n=b$,

illetve egy másik lehetőség a zártgráfúsággal való analógia:

(b) $\forall\,(x_n)$ X-beli $\lim x_n=a$ tulajdonságú sorozat, valamint $y_n\in F(x_n)$, $\lim y_n=b$ sorozat esetén $b\in F(a)$.

Kérdés, hogy tekinthető-e ezen értelmezések valamelyike valóban folytonosságnak, továbbá ekvivalens-e a fenti feltételek egyikével valamilyen feltétel mellett.

4.1. Részhalmazrendszerek topologizálása

Az alábbiakban a halmazértékű leképezések természetes folytonossági fogalmait vezetjük be. Ebből a célból egy X topologikus tér részhalmazainak a $\mathscr{P}(X)$ rendszerén szeretnénk topológiákat definiálni. Topológia megadására sok lehetőség van, hiszen a „topológiának lenni” burokképző tulajdonság, ezért a $\mathscr{P}(X)$ részhalmazai tetszőleges rendszerének metszetzárt és felszálló burka generál egy topológiát. Emiatt a következő topológiákat egy bázisukkal vagy egy szubbázisukkal adjuk meg.

Vietoris- és zárt-konvergencia-topológiák

Az alábbiakban legyen (X,τ) topologikus tér.

4.1.1. Jelölés. Mint szokásos, jelölje az X halmaz részhalmazainak az összességét $\mathscr{P}(X)$, illetve röviden $\mathscr{P}$; zárt részhalmazainak az összességét $\mathscr{F}(X)$, illetve röviden $\mathscr{F}$; nyílt részhalmazainak az összességét $\mathscr{G}(X)$, illetve röviden $\mathscr{G}$; ezek szerint $\mathscr{G}=\tau$, végül kompakt részhalmazainak az összességét $\mathscr{K}(X)$, illetve röviden $\mathscr{K}$.

Az X halmaz részhalmazainak egy $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$ rendszere esetén $\forall\, H\subseteq X$ halmaz mellett jelölje

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_H &\doteq \{A\in\mathscr{A} \,:\, A\cap H\neq\emptyset\},\\ \mathscr{A}^H &\doteq \{A\in\mathscr{A} \,:\, A\cap H=\emptyset\}=\{A\in\mathscr{A}:A\subseteq H^c\}=\mathscr{A}\setminus\mathscr{A}_H\,.\end{aligned}$$

Szavakban: Az $\mathscr{A}_H$ az $\mathscr{A}$ azon elemeinek a összességét jelenti, amelyek metszik a H halmazt. Az $\mathscr{A}^H$ pedig az $\mathscr{A}$ azon elemeinek az összességét jelenti, amelyek diszjunktak a H halmaztól, másképpen mondva, azon elemeinek az összességét, amelyek részei a H halmaz komplementumának.

Vietoris-topológiák

Az alábbi topológiák a leggyakrabban használtak közé tartoznak. Első bevezetőjükről [21] Vietoris-topológiáknak fogjuk őket nevezni, de használatos még az exponenciális topológia elnevezés is. Az első részletes és máig erősen hivatkozott tárgyalás E. Michael dolgozatában található [18].

A továbbiakban egy τ topológia egy bázisára a β szimbólumot, míg egy szubbázisára a σ szimbólumot fogjuk használni.

4.1.2. Definíció (alsó-Vietoris-topológia). Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X)=\mathscr{P}$ összességén *alsó-Vietoris-topológiának*, röviden *a-V-topológiának* nevezzük azt a $\tau_{a-V}\subseteq\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ topológiát, amelynek egy szubbázisa

$$\begin{aligned}\sigma_{a-V} &= \{\mathscr{P}_G \,:\, G\in\mathscr{G}\}\\ &= \{\{C\in\mathscr{P} \,:\, C\cap G\neq\emptyset\} \,:\, G\in\mathscr{G}\}\\ &= \{\mathscr{P}\setminus\{C\in\mathscr{P} \,:\, C\subseteq F\} \,:\, F\in\mathscr{F}\}\;\subseteq\;\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))\,.\end{aligned}$$

4.1.3. Megjegyzés. 1. E halmazrendszerek összessége nem metszetzárt, a topológiának egy bázisa:

$$\{\mathscr{P}_{G_1} \cap \ldots \cap \mathscr{P}_{G_n} \; : \; G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{G}, \; n \in \mathbb{N}\}$$

2. Egy $A \in \mathscr{P}$ halmaz egy τ_{a-V}-szubbáziskörnyezete egy olyan $\mathscr{P}_G$ halmazrendszer, amelyre $G \in \mathscr{G}$, $A \in \mathscr{P}_G$, részletesebben

$$\{C \in \mathscr{P} \; : \; C \cap G \neq \emptyset\}, \text{ ahol } G \in \mathscr{G}, \; A \cap G \neq \emptyset.$$

3. Egy $A \in \mathscr{P}$ halmaz egy τ_{a-V}-báziskörnyezete egy olyan $\mathscr{P}_{G_1} \cap \ldots \cap \mathscr{P}_{G_n}$ halmazrendszer, amelyre $G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{G}$, $A \in \mathscr{P}_{G_1} \cap \ldots \cap \mathscr{P}_{G_n}$, részletesebben

$$\{C \in \mathscr{P} \; : \; C \cap G_1, \ldots, C \cap G_n \neq \emptyset\}, \text{ ahol } G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{G}, \; A \cap G_1, \ldots, A \cap G_n \neq \emptyset.$$

4.1.4. Definíció (felső-Vietoris-topológia)**.** Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X) = \mathscr{P}$ összességén *felső-Vietoris-topológiának*, röviden *f-V-topológiának* nevezzük azt a $\tau_{f-V} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ topológiát, amelynek egy bázisa

$$\begin{aligned} \beta_{f-V} &= \{\mathscr{P}^F \; : \; F \in \mathscr{F}\} \\ &= \{\{C \in \mathscr{P} \; : \; C \cap F = \emptyset\} \; : \; F \in \mathscr{F}\} \\ &= \{\{C \in \mathscr{P} \; : \; C \subseteq G\} \; : \; G \in \mathscr{G}\} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)). \end{aligned}$$

4.1.5. Megjegyzés. 1. E halmazrendszerek összessége metszetzárt, ugyanis látható, hogy $\forall \, F_1, \, F_2 \in \mathscr{F}$ esetén $\mathscr{P}^{F_1} \cap \mathscr{P}^{F_2} = \mathscr{P}^{F_1 \cup F_2}$, valamint $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$. Ezért β_{f-V} bázis, és nem csak szubbázis.

2. Egy $A \in \mathscr{P}$ halmaz egy τ_{f-V}-báziskörnyezete egy olyan $\mathscr{P}^F$ halmazrendszer, amelyre $F \in \mathscr{F}$, $A \in \mathscr{P}^F$, részletesebben

$$\{C \in \mathscr{P} \; : \; C \cap F = \emptyset\}, \text{ ahol } F \in \mathscr{F}, \; A \cap F = \emptyset, \text{ másként}$$

$$\{C \in \mathscr{P} \; : \; C \subseteq G\}, \text{ ahol } G \in \mathscr{G}, \; A \subseteq G.$$

4.1.6. Definíció (Vietoris-topológia)**.** Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X) = \mathscr{P}$ összességén az alsó-Vietoris-topológia szubbázisa és a felső-Vietoris-topológia bázisa által együttesen generált topológiát Vietoris-topológiának, röviden V-topológiának nevezzük.

Zártkonvergencia-topológiák

4.1.7. Definíció (alsó- és felső-zártkonvergencia-topológia)**.** 1. Az *alsó-zártkonvergencia-topológia*, röviden *a-ZK-topológia* megegyezik az alsó-Vietoris-topológiával.
2. Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X) = \mathscr{P}$ összességén *felső-zártkonvergencia-topológiának*, röviden *f-ZK-topológiának* nevezzük azt a $\tau_{f-V} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ topológiát, amelynek egy bázisa

$$\begin{aligned} \beta_{f-ZK} &= \{\mathscr{P}^K \; : \; K \in \mathscr{K}\} \\ &= \{\{C \in \mathscr{P} \; : \; C \cap K = \emptyset\} \; : \; K \in \mathscr{K}\}. \end{aligned}$$

4.1.8. Megjegyzés. 1. E halmazrendszerek összessége metszetzárt, ugyanis $\forall\, K_1,\, K_2 \in \mathscr{K}$ esetén $\mathscr{P}^{K_1} \cap \mathscr{P}^{K_2} = \mathscr{P}^{K_1 \cup K_2}$, valamint $K_1 \cup K_2 \in \mathscr{K}$. Ezért β_{f-V} bázis, és nem csak szubbázis.

2. Egy $A \in \mathscr{P}$ halmaz egy τ_{f-ZK}-báziskörnyezete egy olyan $\mathscr{P}^K$ halmazrendszer, amelyre $K \in \mathscr{K}$, $A \in \mathscr{P}^K$, részletesebben

$$\{C \in \mathscr{P} \;:\; C \cap K = \emptyset\}, \quad \text{ahol } K \in \mathscr{K},\ A \cap K = \emptyset\,.$$

4.1.9. Definíció (zárt-konvergencia-topológia)**.** Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X) = \mathscr{P}$ összességén az alsó-Vietoris-topológia szubbázisa és a felső-zártkonvergencia-topológia bázisa által együttesen generált topológiát zártkonvergencia-topológiának, röviden ZK-topológiának, másképpen Kuratowski-topológiának nevezzük.

Hausdorff-topológiák

Az alábbiakban legyen (X,d) metrikus tér.

4.1.10. Definíció. Egy $x \in X$ pontnak egy $A \subseteq X$ halmaztól való távolsága:

$$d_A(x) \doteq \inf_{a \in A} d(x,a)\,.$$

Az $A \subseteq X$ halmaztól való távolság függvénye: $d_A : X \to \mathbb{R}$.

4.1.11. Állítás. *Tetszőleges $A \subseteq X$ halmaz esetén a $d_A : X \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény Lipschitz-folytonos $\alpha = 1$ állandóval:*

$$\forall\, x,\ y \in X \ \ \textit{esetén} \ \ |d_A(x) - d_A(y)| \le d(x,y)\,.$$

Bizonyítás. Legyen $x,\ y \in X$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor $\exists\, a \in A$, hogy $d(y,a) \le d_A(y) + \varepsilon$, ezért

$$d_A(x) \le d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a) \le d(x,y) + d_A(y) + \varepsilon\,,$$

amiből $\varepsilon > 0$ tetszőleges volta miatt adódik, hogy

$$d_A(x) - d_A(y) \le d(x,y)\,.$$

Az x és y szerepét felcserélve adódik az állítás. □

Paralleltartomány

4.1.12. Definíció. Egy $A \subseteq X$ halmaz $\varepsilon > 0$ melletti ε-sugarú paralleltartománya az A halmaz „körüli” ε-sugarú „gömb”:

$$\begin{aligned} B(A,\varepsilon) &\doteq \{x \in X \;:\; d_A(x) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in X \;:\; \exists\, a \in A,\ d(x,a) < \varepsilon\} \\ &= \bigcup_{x \in A} B(x,\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

4.1.13. Állítás. *Ha* $A \subseteq B(B,\varepsilon_1)$ *és* $B \subseteq B(C,\varepsilon_2)$, *akkor* $A \subseteq B(C,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.

Bizonyítás. A definíció szerint

$$A \subseteq B(B,\varepsilon_1) \;\Leftrightarrow\; \forall\, a \in A \text{ esetén } \exists\, b \in B,\; d(a,b) < \varepsilon_1\,,$$

$$B \subseteq B(C,\varepsilon_2) \;\Leftrightarrow\; \forall\, b \in B \text{ esetén } \exists\, c \in C,\; d(b,c) < \varepsilon_2\,,$$

ekkor $\forall\, a \in A$ esetén $\exists\, c \in C$, hogy

$$d(a,c) \le d(a,b) + d(b,c) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2\,,$$

így a definíció szerint $A \subseteq B(C,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$. □

4.1.14. Állítás. *Tetszőleges* $A \subseteq X$ *halmaz esetén*

$$\mathrm{cl}A = \bigcap_{\varepsilon>0} B(A,\varepsilon)\,.$$

Bizonyítás. „$\subseteq$”: Gondoljuk meg, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén

$$\mathrm{cl}A \subseteq B(A,\varepsilon)\,.$$

Ugyanis: $\forall\, \varepsilon > 0$ és $\forall\, x \in \mathrm{cl}A$ esetén $\exists\, a \in A$, hogy $x \in B(a,\varepsilon)$, emiatt $x \in B(A,\varepsilon)$, ezzel pedig $\mathrm{cl}A \subseteq B(A,\varepsilon)$.
Mivel ez igaz $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén, ezért

$$\mathrm{cl}A \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} B(A,\varepsilon)\,.$$

„$\supseteq$”: Legyen $x \in \bigcap_{\varepsilon>0} B(A,\varepsilon)$ tetszőleges, ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $x \in B(A,\varepsilon)$, azaz $B(x,\varepsilon) \cap A \ne \emptyset$, ezért $x \in \mathrm{cl}A$. □

Túlnyúlás

4.1.15. Definíció. Egy $A \subseteq X$ halmaz egy $B \subseteq X$ halmaz feletti *túlnyúlása*:

$$\begin{aligned} e(A,B) &= \sup_{a\in A} d_B(a) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b) && (4.1)\\ &= \inf\{\rho > 0 \;:\; A \subseteq B(B,\rho)\}\,. && (4.2) \end{aligned}$$

A definíciók ekvivalenciája:

(4.1) $\leq$ (4.2): Ha $A \subseteq B(B,\rho)$, akkor $\forall\ a \in A$ esetén $d_B(a) < \rho$, így

$$\sup_{a\in A} d_B(a) \leq \rho\,,$$

amiből

$$\sup_{a\in A} d_B(a) \leq \inf\{\rho\ :\ A \subseteq B(B,\rho)\}\,.$$

(4.2) $\leq$ (4.1): Mivel $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\forall\ a_0 \in A$ mellett

$$d_B(a_0) \leq \sup_{a\in A} d_B(a) < \sup_{a\in A} d_B(a) + \varepsilon\,,$$

ezért $A \subseteq B(B, \sup_{a\in A} d_A(b) + \varepsilon)$, eszerint pedig

$$\inf\{\rho\ :\ A \subseteq B(B,\rho)\} \leq \sup_{a\in A} d_A(b) + \varepsilon\,,$$

amiből $\varepsilon > 0$ tetszőleges volta miatt

$$\inf\{\rho\ :\ A \subseteq B(B,\rho)\} \leq \sup_{a\in A} d_A(b)\,. \qquad \square$$

4.1.16. Definíció. Az $A,B \subseteq X$ halmazok *Hausdorff-távolsága*:

$$d_H(A,B) \doteq \max\{e(A,B), e(B,A)\}\,.$$

Hausdorff-topológiák

4.1.17. Megjegyzés. Emlékeztetünk rá, hogy az (X,d_X) és (Y,d_Y) metrikus terek közötti $f : X \to Y$ függvényt egy $a \in X$ pontban folytonosnak nevezünk, ha

> $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in X,\ d_X(x,a) < \delta$ pontra teljesül, hogy $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$, másképpen ezzel ekvivalens módon:
>
> $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in B(a,\delta)$ esetén $f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$.

Ennek az analógiájára egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés folytonosságát egy $a \in X$ pontban többféleképpen is értelmezhetjük. Először a túlnyúlás fogalmát felhasználva:

(a) $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in X,\ d_X(x,a) < \delta$ pontra teljesül, hogy $e_Y(F(x), F(a)) < \varepsilon$,

illetve a túlnyúlás aszimmetriája miatt fordítva:

(b) $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in X,\ d_X(x,a) < \delta$ pontra teljesül, hogy $e_Y(F(a), F(x)) < \varepsilon$.

Majd ugyanez a paralleltartomány fogalmát felhasználva:

(a) $\forall\,\varepsilon > 0$ esetén $\exists\,\delta > 0$, hogy $\forall\,x \in X,\ d_X(x,a) < \delta$ esetén $F(x) \subseteq B(F(a),\varepsilon)$,

illetve fordítva:

(b) $\forall\,\varepsilon > 0$ esetén $\exists\,\delta > 0$, hogy $\forall\,x \in X,\ d_X(x,a) < \delta$ esetén $F(a) \subseteq B(F(x),\varepsilon)$.

Kérdés, hogy tekinthető-e a fenti értelmezések valamelyike valóban folytonosságnak, azaz lehet-e az Y részhalmazain olyan topológiát definiálni, amely melletti folytonosság éppen a fentiek valamelyikét adja.

4.1.18. Definíció (alsó-Hausdorff-„környezetbázis”)**.** 1. Egy $A \in \mathscr{P}(X)$ halmaznak egy adott $\varepsilon > 0$ melletti *alsó-Hausdorff-báziskörnyezete*:

$$\mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon) \doteq \{C \in \mathscr{P}(X)\ :\ A \subseteq B(C,\varepsilon)\} \subseteq \mathscr{P}(X)\,.$$

2. Egy $A \in \mathscr{P}(X)$ halmaz *alsó-Hausdorff-környezetbázisa*:

$$\begin{aligned}\beta_{a-H}(A) &\doteq \{\mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon)\ :\ \varepsilon > 0\}\\ &= \{\{C \in \mathscr{P}(X)\ :\ A \subseteq B(C,\varepsilon)\}\ :\ \varepsilon > 0\} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))\,.\end{aligned}$$

4.1.19. Állítás. *Tetszőleges $A \in \mathscr{P}(X)$ halmaz esetén a $\beta_{a-H}(A) \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ halmazrendszer*
1. láncot alkot a $(\mathscr{P}(\mathscr{P}(X)),\subseteq)$ parciálisan rendezett halmazban,
2. az A halmazra ileszkedő rácsot (filterbázist) alkot:

(1) *illeszkedik az A halmazra,*

(2) *metszetzárt.*

Bizonyítás. 1. Legyen $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, ha $A \subseteq B(C,\varepsilon_1)$, akkor $A \subseteq B(C,\varepsilon_2)$, ezek szerint

$$\mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon_1) \subseteq \mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon_2)\,.$$

2. (1) Nyilván $\forall\,\varepsilon > 0$ esetén $A \subseteq B(A,\varepsilon)$, emiatt $A \in \mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon)$.
(2) $\forall\,\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 > 0$ esetén, feltéve például, hogy $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, az 1. pont szerint teljesül, hogy $\mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon_1) \subseteq \mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon_2)$, ezért

$$\mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon_1) \cap \mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon_2) = \mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon_1)\,. \qquad \square$$

4.1.20. Állítás. *Legyen $\mathscr{T}_{a-H} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ az a leképezés, amelyre $\forall\,A \in \mathscr{P}(X)$ halmaz esetén*

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_{a-H}(A) &\doteq [\beta_{a-H}(A)]^f\\ &= \{\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))\ :\ \exists\,\varepsilon > 0,\ \mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon) \subseteq \mathscr{U}\} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))\,.\end{aligned}$$

1. $\forall\,A \in \mathscr{P}(X)$ halmaz esetén a $\mathscr{T}_{a-H}(A) = [\beta_{a-H}(A)]^f \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ halmazrendszer az A halmazra illeszkedő szűrő (filter):

(1) felszálló,

(2) metszetzárt,

(3) az A halmazra illeszkedik,

továbbá teljesül a T-axióma (a topológia axiómája):

(4) $\forall\, \mathscr{U} \in \mathscr{T}_{a-H}(A)$ *esetén* $\exists\, \mathscr{V} \in \mathscr{T}_{a-H}(A)$, *hogy* $\forall\, B \in \mathscr{V}$ *esetén* $\mathscr{U} \in \mathscr{T}_{a-H}(B)$.

2. $\exists!\ \tau_{a-H} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ *topológia, amelyre* $\forall\, A \in \mathscr{P}(X)$ *halmaz esetén*

$$\begin{aligned}&\tau_{a-H}(A) = \mathscr{T}_{a-H}(A) = [\beta_{a-H}(A)]^f\,, \qquad \textit{azaz}\\ &[(\tau_{a-H})_A)]^f = \mathscr{T}_{a-H}(A) = [\beta_{a-H}(A)]^f\,.\end{aligned}$$

Bizonyítás. 1. Legyen $A \in \mathscr{P}(X)$ tetszőleges. Az előző állítás szerint $\beta_{a-H}(A)$ az A halmazra illeszkedő rács, ezért $[\beta_{a-H}(A)]^f$ az A halmazra illeszkedő szűrő. Ezzel teljesül (1)-(3).

(4) Legyen $\mathscr{U} \in [\beta_{a-H}(A)]^f$ tetszőleges környezet, ekkor a definíció szerint $\exists\, \mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon) \subseteq \mathscr{U}$. Legyen

$$\mathscr{V} \doteq \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} \mathscr{U}_{a-H}(A,\delta)\,.$$

Ekkor egyrészt $\exists\, \mathscr{U}_{a-H}(A,\delta) \subseteq \mathscr{V}$, ezért

$$\mathscr{V} \in [\beta_{a-H}(A)]^f = \tau_{a-H}(A)\,,$$

másrészt az előző állítás 1. pontja szerint $\forall\, 0 < \delta < \varepsilon$ esetén teljesül, hogy

$$\mathscr{U}_{a-H}(A,\delta) \subseteq \mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon)\,,$$

ezért

$$\mathscr{V} = \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} \mathscr{U}_{a-H}(A,\delta) \subseteq \mathscr{U}_{a-H}(A,\varepsilon) \subseteq \mathscr{U}\,.$$

Belátjuk, hogy $\forall\, B \in \mathscr{V}$ esetén

$$\mathscr{V} \in [\beta_{a-H}(B)]^f\,, \ \text{ amiből } \ \mathscr{U} \in [\beta_{a-H}(B)]^f = \tau_{a-H}(B)\,.$$

Ugyanis: Legyen $B \in \mathscr{V}$ tetszőleges, ekkor $\exists\, 0 < \delta < \varepsilon$, hogy $B \in \mathscr{U}_{a-H}(A,\delta)$, azaz $A \subseteq B(B,\delta)$. Ekkor $\exists\, \alpha > 0$, hogy $0 < \delta < \delta + \alpha < \varepsilon$.

Gondoljuk meg, hogy

$$\mathscr{U}_{a-H}(B,\alpha)\subseteq\mathscr{V}.$$

Legyen

$$C_0\in\mathscr{U}_{a-H}(B,\alpha)=\{C\in\mathscr{P}(X)\ :\ B\subseteq B(C,\alpha)\},$$

ami azt jelenti, hogy $B\subseteq B(C_0,\alpha)$. Mivel $A\subseteq B(B,\delta)$, ezért a 4.1.13. állítás alapján $A\subseteq B(C_0,\delta+\alpha)$, tehát $C_0\in\mathscr{U}_{a-H}(A,\delta+\alpha)$. Mivel pedig $0<\delta+\alpha<\varepsilon$, ezért

$$C_0\in\bigcup_{0<\delta<\varepsilon}\mathscr{U}_{a-H}(A,\delta)=\mathscr{V}.$$

Ezzel meggondoltuk, hogy $\mathscr{U}_{a-H}(B,\alpha)\subseteq\mathscr{V}$, viszont $\mathscr{U}_{a-H}(B,\alpha)\in\beta_{a-H}(B)$, ezért

$$\mathscr{V}\in[\beta_{a-H}(B)]^f.$$

2. Következik 1.-ből (a topológiák szokásos felépítése alapján). □

4.1.21. Definíció (alsó-Hausdorff-topológia)**.** Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X)$ összességén értelmezett $\tau_{a-H}\subseteq\mathscr{P}(\mathscr{P}))$ topológiát *alsó-Hausdorff-topológiának*, röviden *a-H-topológiának* nevezzük.

4.1.22. Definíció (felső-Hausdorff-környezetbázis)**.** 1. Egy $A\in\mathscr{P}(X)$ halmaznak egy adott $\varepsilon>0$ melletti *felső-Hausdorff báziskörnyezete*:

$$\begin{aligned}\mathscr{U}_{f-H}(A,\varepsilon) &\doteq \{C\in\mathscr{P}(X)\ :\ C\subseteq B(A,\varepsilon)\}\\ &= \mathscr{P}(B(A,\varepsilon))\subseteq\mathscr{P}(X).\end{aligned}$$

2. Egy $A\in\mathscr{P}(X)$ halmaz *felső-Hausdorff környezetbázisa*:

$$\begin{aligned}\beta_{f-H}(A) &\doteq \{\mathscr{U}_{f-H}(A,\varepsilon)\ :\ \varepsilon>0\}\\ &= \{\{C\in\mathscr{P}(X)\ :\ C\subseteq B(A,\varepsilon)\}\ :\ \varepsilon>0\}\\ &= \{\mathscr{P}(B(A,\varepsilon))\ :\ \varepsilon>0\}\subseteq\mathscr{P}(\mathscr{P}(X)).\end{aligned}$$

4.1.23. Megjegyzés. Az alsó-Hausdorff-topológia bevezetéséhez belátott 4.1.20. állításhoz hasonlóan látható, hogy $\exists!\ \tau_{f-H}\subseteq\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ topológia, amelyre $\forall A\in\mathscr{P}(X)$ halmaz esetén

$$\begin{aligned}\tau_{f-H}(A) &\doteq [\beta_{f-H}(A)]^f\\ &= \{\mathscr{U}\subseteq\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))\ :\ \exists\,\varepsilon>0,\ \mathscr{U}_{f-H}(A,\varepsilon)\subseteq\mathscr{U}\}\subseteq\mathscr{P}(\mathscr{P}(X)).\end{aligned}$$

4.1.24. Definíció (felső-Hausdorff-topológia)**.** Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X)$ összességén a $\tau_{f-H}\subseteq\mathscr{P}(\mathscr{P}))$ topológiát *felső-Hausdorff-topológiának*, röviden *f-H-topológiának* nevezzük.

4.1.25. Definíció (Hausdorff-topológia)**.** Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X)$ összességén az alsó- és a felső-Hausdorff-topológia által együttesen generált $\tau_H\subseteq\mathscr{P}(\mathscr{P}))$ topológiát *Hausdorff-topológiának*, röviden *H-topológiának* nevezzük.

4.1.26. Megjegyzés. A Hausdorff-topológiát a $\mathscr{K}(X)$ halmazrendszeren éppen a Hausdorff-távolság mint metrika indukálja.

A topológiák összehasonlítása

Ebben az alfejezetben a fenti topológiák közötti kapcsolatokat vizsgáljuk meg.

4.1.27. Állítás. *Legyen (X,d) metrikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X)$ összességén az a-V-topológia durvább, mint az a-H-topológia:*

$$\tau_{a-V} \subseteq \tau_{a-H}\,.$$

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\, A \in \mathscr{P}(X)$ halmaz esetén az A halmaz egy adott a-V-környezetszubbázisának tetszőleges eleme egyúttal a-H-környezete is:

$$\sigma_{a-V}(A) \subseteq \tau_{a-H}(A)\,,$$

amiből következik, hogy

$$[[\sigma_{a-V}(A)]^{\cap}]^{f} \subseteq \tau_{a-H}(A)\,, \text{ azaz } \tau_{a-V}(A) \subseteq \tau_{a-H}(A)\,.$$

Legyen $A \in \mathscr{P}(X)$ tetszőleges halmaz, tekintsük az A halmaznak egy tetszőleges a-V-szubbáziskörnyezetét, azaz egy olyan

$$\mathscr{P}_G = \{C \in \mathscr{P}(X) : C \cap G \neq \emptyset\}$$

halmazrendszert, ahol $G \in \mathscr{G}$ olyan nyílt halmaz, amelyre $A \cap G \neq \emptyset$. Mivel $A \cap G \neq \emptyset$, azért $\exists\, x \in A \cap G,$. Mivel $G \in \mathscr{G}$ nyílt, ezért $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, hogy

$$B(x,\varepsilon_0) \subseteq G\,.$$

Tekintsük az $A \in \mathscr{P}(X)$ halmaznak a következő a-H-báziskörnyezetét:

$$\{C \in \mathscr{P}(X) \;:\; A \subseteq B(C,\varepsilon_0)\} \in \beta_{a-H}(A)\,.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\{C \in \mathscr{P}(X) \;:\; A \subseteq B(C,\varepsilon_0)\} \subseteq \{C \in \mathscr{P}(X) \;:\; C \cap G \neq \emptyset\}\,,$$

így a $\{C \in \mathscr{P}(X) \;:\; C \cap G \neq \emptyset\}$ halmazrendszer az $A \in \mathscr{P}(X)$ halmaznak a-H-környezete is:

$$\{C \in \mathscr{P}(X) \;:\; C \cap G \neq \emptyset\} \in [\beta_{a-H}(A)]^{f} = \tau_{a-H}(A)\,.$$

Ugyanis: Legyen $C_0 \in \{C \in \mathscr{P}(X) : A \subseteq B(C,\varepsilon_0)\}$ tetszőleges, azaz $C_0 \in \mathscr{P}(X)$ tetszőleges olyan halmaz, amelyre $A \subseteq B(C_0,\varepsilon_0)$. Mivel $x \in A \cap G \subseteq A$, ezért

$$x \in B(C_0,\varepsilon_0) = \{z \in X \;:\; d_{C_0}(z) < \varepsilon_0\}\,, \text{ amiből}$$

$$d_{C_0}(x) = \inf\{d(x,c) \;:\; c \in C\} < \varepsilon_0\,.$$

Ezek szerint $\exists\, y \in C_0$, hogy $d(x,y) < \varepsilon_0$, azaz $y \in B(x,\varepsilon_0)$. Mivel $B(x,\varepsilon_0) \subseteq G$, ezért $y \in G$, így $y \in C_0 \cap G$, ezért $C_0 \cap G \neq \emptyset$, azaz $C_0 \in \{C \in \mathscr{P} : C \cap G \neq \emptyset\}$. $\square$

4.1.28. Állítás. *Legyen (X,d) metrikus tér. Az X-beli kompakt részhalmazok $\mathscr{K}(X)$ összességén az a-V-topológia megegyezik az a-H-topológiával:*

$$\tau_{a-V}|_{\mathscr{K}(X)} = \tau_{a-H}|_{\mathscr{K}(X)}\,.$$

Bizonyítás. Az előző 4.1.27 állításban már láttuk, hogy az a-V-topológia durvább, mint az a-H-topológia:

$$\tau_{a-V} \subseteq \tau_{a-H}\,.$$

Az ellenkező irány azt jelenti, hogy

$$\tau_{a-H}|_{\mathscr{K}(X)} \subseteq \tau_{a-V}|_{\mathscr{K}(X)}\,.$$

Ehhez azt mutatjuk meg, hogy $\forall\ A \in \mathscr{K}(X)$ halmaz esetén az A halmaz egy a-H-báziskörnyezete egyúttal a-V-környezete is:

$$\beta_{a-H}(A) \subseteq [\beta_{a-V}(A)]^f = \tau_{a-V}(A)\,.$$

Legyen $A \in \mathscr{K}(X)$ tetszőleges kompakt halmaz, és tekintsük egy tetszőleges a-H-báziskörnyezetét:

$$\{C \in \mathscr{K}(X)\ :\ A \subseteq B(C,\varepsilon)\}\,,\ \text{ ahol } \varepsilon > 0 \quad \text{tetszőlegesen adott.}$$

Mivel az A halmaz kompakt, ezért teljesen korlátos, így $\exists\ \{x_1,\dots,x_n\} \subseteq A$ véges halmaz, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon/3)\,.$$

Mivel egyrészt $B(x_k,\varepsilon/3)$ nyílt halmaz, másrészt $A \cap B(x_k,\varepsilon/3) \neq \emptyset$, ezért a

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{C \in \mathscr{K}(X) : C \cap B(x_k,\varepsilon/3) \neq \emptyset\}$$

halmazrendszer az $A \in \mathscr{K}(X)$ halmaznak a-V-báziskörnyezete.

Megmutatjuk, hogy

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{C \in \mathscr{K}(X) : C \cap B(x_k,\varepsilon/3) \neq \emptyset\} \ \subseteq\ \{C \in \mathscr{K}(X)\ :\ A \subseteq B(C,\varepsilon)\},$$

így a $\{C \in \mathscr{K}(X)\ :\ A \subseteq B(C,\varepsilon)\}$ halmazrendszer az $A \in \mathscr{K}(X)$ halmaznak a-V-környezete is:

$$\{C \in \mathscr{K}(X)\ :\ A \subseteq B(C,\varepsilon)\} \in [\beta_{a-V}(A)]^f = \tau_{a-V}(A)\,.$$

Ugyanis: Legyen $C_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} \{C \in \mathscr{K}(X) : C \cap B(x_k,\varepsilon/3) \neq \emptyset\}$, azaz $C_0 \in \mathscr{P}(X)$ olyan halmaz, amelyre $\forall\ i = 1,\dots,n$ esetén

$$C_0 \cap B(x_i,\varepsilon/3) \neq \emptyset\,.$$

Azt kell belátnunk, hogy $C_0 \in \{C \in \mathscr{K}(X) \; : \; A \subseteq B(C,\varepsilon)\}$, azaz

$$A \subseteq B(C_0,\varepsilon)\,.$$

Legyen e célból $x \in A$ tetszőleges. Mivel a fentiek szerint $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon/3)$, ezért $\exists\; 1 \le k \le n$ index, hogy $x \in B(x_k,\varepsilon/3)$, azaz $d(x,x_k) < \varepsilon/3$. Mivel $C_0 \cap B(x_k,\varepsilon/3) \neq \emptyset$, ezért $\exists\; y \in C_0$ hogy $d(x_k,y) < \varepsilon/3$. Ezek szerint

$$d(x,y) < d(x,x_k) + d(x_k,y) < \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon\,,$$

amiből következik, hogy $x \in B(C_0,\varepsilon)$. □

4.1.29. Állítás. *1. Legyen (X,τ) T2 topologikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X)$ összességén az f-ZK-topológia durvább, mint az f-V-topológia:*

$$\tau_{f-ZK} \subseteq \tau_{f-V}\,.$$

2. Legyen (X,d) metrikus tér. Az X-beli részhalmazok $\mathscr{P}(X)$ összességén az f-H-topológia durvább, mint az f-V-topológia:

$$\tau_{f-H} \subseteq \tau_{f-V}\,.$$

3. Legyen (X,d) metrikus tér. Az X-beli zárt részhalmazok $\mathscr{F}(X)$ összességén az f-ZK-topológia durvább, mint az f-H-topológia:

$$\tau_{f-ZK}|_{\mathscr{F}(X)} \subseteq \tau_{f-H}|_{\mathscr{F}(X)}\,.$$

Bizonyítás. 1. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\; A \in \mathscr{P}(X)$ halmaz esetén $\beta_{f-ZK}(A) \subseteq \beta_{f-V}(A)$. Legyen

$$\{C \in \mathscr{P}(X) : C \cap K = \emptyset\}\,,\;\; \text{ahol } K \in \mathscr{K}(X),\; A \cap K = \emptyset$$

az A halmaz egy tetszőleges f-ZK-báziskörnyezete. Mivel T2 topologikus térben minden kompakt halmaz zárt, ezért ez a halmazrendszer az A halmaznak f-H-báziskörnyezete is.

2. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\, A \in \mathscr{P}(X)$ halmaz esetén $\beta_{f-H}(A) \subseteq \beta_{f-V}(A)$. Legyen

$$\{C \in \mathscr{P}(X) \; : \; C \subseteq B(A,\varepsilon)\}\,,\;\; \text{ahol } \varepsilon > 0$$

az A halmaz egy tetszőleges f-H-báziskörnyezete. Mivel $B(A,\varepsilon) \in \mathscr{G}(X)$ nyílt halmaz és $A \subseteq B(A,\varepsilon)$, ezért ez a halmazrendszer az A halmaznak f-V-környezete is.

3. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\, A \in \mathscr{F}(X)$ zárt halmaz esetén

$$\beta_{f-ZK}(A)|_{\mathscr{F}(X)} \subseteq [\beta_{f-H}(A)]^f|_{\mathscr{F}(X)} = \tau_{f-H}(A)|_{\mathscr{F}(X)}\,.$$

Legyen

$$\{C \in \mathscr{F}(X) : C \cap K = \emptyset\}\,,\;\; \text{ahol } K \in \mathscr{K}(X),\; A \cap K = \emptyset$$

az A zárt halmaz egy tetszőleges f-ZK-báziskörnyezete.

Belátjuk, hogy az A zárt halmaznak létezik olyan

$$\{C \in \mathscr{F}(X) \ : \ C \subseteq B(A,\varepsilon_0)\} \in \beta_{f-H}(A)|_{\mathscr{F}(X)}$$

f-H-báziskörnyezete, amelyre

$$\{C \in \mathscr{F}(X) \ : \ C \subseteq B(A,\varepsilon_0)\} \subseteq \{C \in \mathscr{F}(X) \ : \ C \cap K = \emptyset\},$$

amiből következik, hogy $\{C \in \mathscr{F}(X) \ : \ C \cap K = \emptyset\} \in [\beta_{f-H}(A)]^f|_{\mathscr{F}(X)}$.
1. eset: $K \neq \emptyset$. Mivel $A \in \mathscr{F}(X)$ zárt és $K \in \mathscr{K}(X)$ kompakt halmaz, valamint $A \cap K = \emptyset$, ezért

$$\varepsilon_0 \doteq \inf_{x \in A, y \in K} d(x,y) > 0\,.$$

Ezek szerint $\forall\, C \subseteq B(A,\varepsilon_0)$ esetén $C \cap K = \emptyset$, emiatt

$$\{C \in \mathscr{F}(X) \ : \ C \subseteq B(A,\varepsilon_0)\} \subseteq \{C \in \mathscr{F}(X) \ : \ C \cap K = \emptyset\}\,.$$

2. eset: $K = \emptyset$. Mivel $\{C \in \mathscr{F}(X) \ : \ C \cap \emptyset = \emptyset\} = \mathscr{F}(X)$, ezért nyilván $\forall\, \varepsilon_0 > 0$ esetén fennáll a fenti tartalmazás. $\square$

4.1.30. Állítás. *Legyen (X,d) metrikus tér. Az X-beli kompakt részhalmazok $\mathscr{K}(X)$ összességén az f-V-topológia megegyezik az f-H-topológiával:*

$$\tau_{f-V}|_{\mathscr{K}(X)} = \tau_{f-H}|_{\mathscr{K}(X)}\,.$$

Bizonyítás. A fenti 4.1.29 állítás 2. pontjában már láttuk, hogy az f-H-topológia durvább, mint az f-V-topológia.

Az ellenkező irányhoz azt mutatjuk meg, hogy $\forall\, A \in \mathscr{K}(X)$ kompakt halmaz esetén

$$\beta_{f-V}(A)|_{\mathscr{K}(X)} \subseteq [\beta_{f-H}(A)]^f|_{\mathscr{K}(X)} = \tau_{f-H}(A)|_{\mathscr{K}(X)}\,.$$

Tekintsük e célból az A kompakt halmaz egy tetszőleges

$$\{C \in \mathscr{K}(X) : C \cap F = \emptyset\}, \text{ ahol } F \in \mathscr{F}(X),\ A \cap F = \emptyset$$

f-V-báziskörnyezetét.
Belátjuk, hogy az A kompakt halmaznak létezik olyan

$$\{C \in \mathscr{K}(X) \ : \ C \subseteq B(A,\varepsilon_0)\} \in \beta_{f-H}(A)|_{\mathscr{K}(X)}$$

f-H-báziskörnyezete, amelyre

$$\{C \in \mathscr{K}(X) \ : \ C \subseteq B(A,\varepsilon_0)\} \subseteq \{C \in \mathscr{K}(X) \ : \ C \cap F = \emptyset\},$$

amiből következik, hogy

$$\{C \in \mathscr{K}(X) \ : \ C \cap F = \emptyset\} \in [\beta_{f-H}(A)]^f|_{\mathscr{K}(X)}\,.$$

1. eset: $F \neq \emptyset$. Mivel $A \in \mathscr{K}(X)$ kompakt és $F \in \mathscr{F}(X)$ zárt halmaz, valamint $A \cap F = \emptyset$, ezért

$$\varepsilon_0 \doteq \inf_{x \in A, y \in F} d(x,y) > 0\,.$$

Ezek szerint $\forall\, C \subseteq B(A,\varepsilon_0)$ esetén $C \cap F = \emptyset$, emiatt

$$\{C \in \mathscr{K}(X) \;:\; C \subseteq B(A,\varepsilon_0)\} \subseteq \{C \in \mathscr{K}(X) \;:\; C \cap F = \emptyset\}\,.$$

2. eset: $F = \emptyset$. Mivel

$$\{C \in \mathscr{K}(X) \;:\; C \cap \emptyset = \emptyset\} = \mathscr{K}(X)\,,$$

ezért nyilván $\forall\, \varepsilon_0 > 0$ esetén fennáll a fenti tartalmazás. □

4.2. A halmazértékű leképezések folytonosságai

A halmazértékű leképezések alapvető fogalmai

Az alábbiakban legyenek X és Y tetszőleges halmazok.

4.2.1. Megjegyzés (ismétlés)**.** Egy $R \subseteq X \times Y$ reláció esetén ismertek a következő fogalmak.

1. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció szerinti

(1) *direktképe* egy $A \subseteq X$ halmaznak:

$$R(A) \doteq \{y \in Y \;:\; \exists\, x \in A,\; xRy\}\,,$$

(2) *inverzképe* egy $B \subseteq Y$ halmaznak:

$$R^{-1}(B) \doteq \{x \in X \;:\; \exists\, y \in B,\; xRy\}\,,$$

ami nem más, mint az $R^{-1} \subseteq X \times Y$ inverz reláció szerinti direkt képe a $B \subseteq Y$ halmaznak.

2. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció

(1) $\forall\, x \in X$ melletti *vertikális metszete (szelete, felső nívóhalmaza)*:

$$R_x \doteq R(x) = \{y \in Y \;:\; xRy\} \subseteq Y\,,$$

(2) $\forall\, y \in Y$ melletti *horizontális metszete (szelete, alsó nívóhalmaza)*:

$$R^y \doteq R^{-1}(y) = \{x \in X \;:\; xRy\} \subseteq X\,.$$

4.2.2. Definíció. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ leképezést *halmazértékűnek* nevezünk.

4.2.3. Definíció. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezést *valódinak* nevezünk, ha nemüres értékű: $\forall\, x \in X$ esetén $F(x) \neq \emptyset$.

4.2.4. Definíció. 1. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezéshez tartozó $R_F \subseteq X \times Y$ reláció:

$$R_F \doteq \{(x,y) \in X \times Y \ : \ x \in X,\ y \in F(x)\}\,.$$

2. Egy $R \subseteq X \times Y$ relációhoz tartozó $F_R : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés az a leképezés, amelyre $\forall\, x \in X$ esetén

$$F_R(x) \doteq R_x = \{y \in Y \ : \ xRy\}\,.$$

4.2.5. Megjegyzés. A fenti megfeleltetések bijekciók a $\mathscr{P}(Y)^X$-beli halmazértékű leképezések valamint az $X \times Y$-beli relációk között:

$$F_{R_F} = F \ \text{ és } \ R_{F_R} = R\,.$$

4.2.6. Megjegyzés. Mint minden leképezésre, speciálisan a halmazértékű leképezésekre is értelmezettek a következő fogalmak:

1. Az $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés klasszikus értelemben vett *gráfja*:

$$\{(x,B) \in X \times \mathscr{P}(Y) \ : \ x \in X,\ B = F(X)\} \subseteq X \times Y\,,$$

ami nem más, mint maga az F halmazértékű leképezés.

2. Az $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés szerinti *inverzképe* vagy *ősképe* egy $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(Y)$ halmazrendszernek:

$$F^{-1}(\mathscr{B}) = \{x \in X \ : \ F(x) \in \mathscr{B}\} \subseteq X\,,$$

speciálisan: Az $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés szerinti *inverzképe* vagy *ősképe* egy $B \subseteq Y$ halmaznak, pontsabban egy $\{B\} \subseteq \mathscr{P}(Y)$ egyelemű halmazrendszernek:

$$F^{-1}(B) = \{x \in X \ : \ F(x) = B\} \subseteq X\,.$$

E fogalmakat azonban nem nagyon használjuk, hanem ezek helyett könnyebben kezelhető fogalmakat vezetünk be a halmazértékű leképezéseknek megfeleltetett relációk segítségével.

4.2.7. Definíció. 1. Az $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés gyenge értelemben vett *gráfjának* nevezzük a leképezéshez tartozó relációt:

$$\begin{aligned}\operatorname{graph} F \ &\doteq\ R_F = \{(x,y) \in X \times Y \ : \ xR_F y\}\\ &=\ \{(x,y) \in X \times Y \ : \ x \in X,\ y \in F(x)\} \subseteq X \times Y\,.\end{aligned}$$

2. Az $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés szerinti gyenge értelemben vett *inverzképe* vagy *ősképe* egy $B \subseteq Y$ halmaznak a reláció szerinti inverzképe:

$$\begin{aligned}F^{-}(B) \ &\doteq\ R_F^{-1}(B) = \{x \in X \ : \ \exists\, y \in B,\ xR_F y\}\\ &=\ \{x \in X \ : \ F(x) \cap B \neq \emptyset\} \subseteq X\,.\end{aligned}$$

A halmazértékű leképezések folytonosságai a fenti topológiákban

Az alábbiakban legyen (X, τ_X) topologikus tér, valamint néha (Y, τ_Y) topologikus tér, néha pedig (Y, d) metrikus tér.

A halmazértékű leképezéseknek annyiféle folytonossági fogalma definiálható, ahány topológia definiálható a részhalmazrendszereken.

4.2.8. Definíció. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezést egy $a \in X$ pontban illetve az X halmazon alsó-Vietoris-, felső-Vietoris-, Vietoris-folytonosnak, alsó-zártkonvergencia-, felső-zártkonvergencia-, zártkonvergencia-folytonosnak, továbbá alsó-Hausdorff-, felső-Hausdorff-, Hausdorff-folytonosnak (röviden a-V-, f-V-, V-, a-ZK-, f-ZK-, ZK-, a-H-, f-H-, H-folytonosnak) nevezünk, ha az F halmazértékű leképezés folytonos az $a \in X$ pontban illetve az X halmazon, miközben az Y-beli részhalmazok $\mathscr{P}(Y)$ összességén rendre az a-V-, f-V-, V-, a-ZK-, f-ZK-, ZK-, a-H-, f-H-, H-topológia van definiálva.

4.2.9. Megjegyzés. A fentiek szerint látható, hogy egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontban illetve az X halmazon

1. pontosan akkor Vietoris-folytonos, ha alsó-Vietoris- és felső-Vietoris-folytonos,
2. pontosan akkor Hausdorff-folytonos, ha alsó-Hausdorff- és felső-Hausdorff-folytonos.

4.2.10. Állítás. *Legyen (X, τ_X) topologikus tér és (Y, d) metrikus tér.*
1. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontban illetve az X halmazon

(1) ha alsó-Hausdorff-folytonos, akkor alsó-Vietoris-folytonos is,

(2) ha felső-Vietoris-folytonos, akkor felső-Hausdorff-folytonos is.

2. Egy $F : X \to \mathscr{K}(Y)$ kompakt halmaz értékű leképezés egy $a \in X$ pontban illetve az X halmazon

(1) pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha alsó-Hausdorff-folytonos,

(2) pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha felső-Hausdorff-folytonos,

(3) pontosan akkor Vietoris-folytonos, ha Hausdorff-folytonos.

Bizonyítás. 1. (1) Az 4.1.27. állítás szerint az a-V-topológia durvább, mint az a-H-topológia.

1. (2) Az 4.1.29 állítás 2. pontja szerint a f-H-topológia durvább, mint az f-V-topológia.

2. (1) Az 4.1.28 állítás szerint a kompakt halmazokon az a-V-topológia megegyezik az a-H-topológiával.

2. (2) Az 4.1.30 állítás szerint a kompakt halmazokon a f-V-topológia megegyezik a f-H-topológiával.

2. (3) A fenti megjegyzés alapján következik 1.-ből és 2.-ből. □

A következőkben a fenti folytonossági fogalmakat jellemezzük.

A Vietoris-folytonosságok jellemzése

4.2.11. Állítás (az a-V-folytonosság ekvivalens definíciója)**.** *Legyenek (X,τ_X) és (Y,τ_Y) topologikus terek.*
1. Egy $F:X\to\mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a\in X$ pontban pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha $\forall\, G\subseteq Y$ τ_Y-nyílt halmazra, amelyre $F(a)\cap G\neq\emptyset$, $\exists\, U_a\in\tau_X(a)$ környezete az $a\in X$ pontnak, hogy $\forall\, x\in U_a$ esetén $F(x)\cap G\neq\emptyset$.

2. Egy $F:X\to\mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés az X halmazon pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha $\forall\, G\subseteq Y$ τ_Y-nyílt halmaz F-szerinti gyenge értelemben vett

$$F^-(G)=\{x\in X\ :\ F(x)\cap G\neq\emptyset\}\subseteq X$$

inverzképe τ_X-nyílt halmaz.

Bizonyítás. 1. Egy $F:X\to\mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a\in X$ pontban pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha az $F(a)\in\mathscr{P}(Y)$ halmaz

$$\forall\ \mathscr{P}(Y)_G=\{C\in\mathscr{P}(Y)\ :\ C\cap G\neq\emptyset\},\ G\in\mathscr{G}(Y),\ F(a)\cap G\neq\emptyset$$

a-V-szubbáziskörnyezetéhez $\exists\, U_a\in\tau(a)$ környezete az $a\in X$ pontnak, hogy $\forall\, x\in U_a$ esetén az $F(x)$ halmaznak a $\mathscr{P}(Y)_G=\{C\in\mathscr{P}(Y)\ :\ C\cap G\neq\emptyset\}$ halmazrendszer szintén környezete, azaz $\forall\, x\in U_a$ esetén $F(x)\cap G\neq\emptyset$.

2. Egy $F:X\to\mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés az X halmazon pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha $\forall$ $\mathscr{P}(Y)$-beli a-V-nyílt halmaz F-szerinti inverzképe τ_X-nyílt halmaz, ami, mint ismert, ekvivalens azzal, hogy a $\mathscr{P}(Y)$-beli a-V-szubbázis bármely elemének F-szerinti inverzképe τ_X-nyílt halmaz. A definíció szerint ez azt jelenti, hogy $\forall\, G\in\mathscr{G}(Y)$ τ_Y-nyílt halmaz esetén a

$$\mathscr{P}(Y)_G=\{C\in\mathscr{P}(Y)\ :\ C\cap G\neq\emptyset\}$$

halmazrendszer $F^{-1}(\mathscr{P}(Y)_G)\subseteq X$ F-szerinti inverzképe τ_X-nyílt. A definíciók szerint azonban

$$\begin{aligned}F^{-1}(\mathscr{P}(Y)_G) &= \{x\in X\ :\ F(x)\in\mathscr{P}(Y)_G\}\\ &= \{x\in X\ :\ F(x)\cap G\neq\emptyset\}=F^-(G),\end{aligned}$$

ezek szerint a fentiek azzal ekvivalensek, hogy $\forall\ G\subseteq Y$ τ_Y-nyílt halmaz esetén az $F^-(G)=\{x\in X\ :\ F(x)\cap G\neq\emptyset\}\subseteq X$ halmaz F-szerinti gyenge értelmben vett inverzképe τ_X-nyílt halmaz. □

4.2.12. Állítás (az f-V-folytonosság ekvivalens definíciója)**.** *Legyenek* (X,τ_X) *és* (Y,τ_Y) *topologikus terek.*
1. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ *halmazértékű leképezés egy* $a \in X$ *pontban pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha*

> $\forall\ Z \subseteq Y$ τ_Y*-zárt halmazra, amelyre* $F(a)\cap Z = \emptyset$, $\exists\ U_a \in \tau_X(a)$ *környezete az* $a \in X$ *pontnak, hogy* $\forall\ x \in U_a$ *esetén* $F(x)\cap Z = \emptyset$*, illetve ezzel ekvivalens módon:*
>
> $\forall\ G \subseteq Y$ τ_Y*-nyílt halmazra, amelyre* $F(a) \subseteq G$, $\exists\ U_a \in \tau_X(a)$ *környezete az* $a \in X$ *pontnak, hogy* $\forall\ x \in U_a$ *esetén* $F(x) \subseteq G$*.*

2. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ *halmazértékű leképezés az* X *halmazon pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha*

> $\forall\ Z \subseteq Y$ τ_Y*-zárt halmaz esetén az* $\{x \in X\ :\ F(x)\cap Z = \emptyset\}$ *halmaz* τ_X*-nyílt, illetve*
>
> $\forall\ G \subseteq Y$ τ_Y*-nyílt halmaz esetén az* $\{x \in X\ :\ F(x) \subseteq G\}$ *halmaz* τ_X*-nyílt.*

Bizonyítás. 1. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontban pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha az $F(a) \in \mathscr{P}(Y)$ halmaz

$$\forall\ \mathscr{P}(Y)^Z = \{C \in \mathscr{P}(Y)\ :\ C\cap Z = \emptyset\},\ Z \in \mathscr{F}(Y),\ F(a)\cap Z = \emptyset$$

f-V-báziskörnyezetéhez $\exists\ U_a \in \tau(a)$ környezete az $a \in X$ pontnak, hogy $\forall\ x \in U_a$ esetén az $F(x)$ halmaznak a $\mathscr{P}(Y)^Z = \{C \in \mathscr{P}(Y)\ :\ C\cap Z = \emptyset\}$ halmazrendszer szintén környezete, azaz $\forall\ x \in U_a$ esetén $F(x)\cap Z = \emptyset$.
Az előzőeknek a $G \doteq Z^c$ nyílt halmazokkal való átfogalmazásával kapjuk a másik jellemzést.

2. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés az X halmazon pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha $\forall$ $\mathscr{P}(Y)$-beli f-V-nyílt halmaz F-szerinti inverzképe τ_X-nyílt halmaz, ami, mint ismert, ekvivalens azzal, hogy $\mathscr{P}(Y)$-beli f-V-bázis bármely elemének F-szerinti inverzképe τ_X-nyílt halmaz. A definíció szerint ez azt jelenti, hogy $\forall\ Z \in \mathscr{F}(Y)$ τ_Y-zárt halmaz esetén a

$$\mathscr{P}(Y)^Z = \{C \in \mathscr{P}(Y)\ :\ C\cap Z = \emptyset\}$$

halmazrendszer $F^{-1}(\mathscr{P}(Y)^Z) \subseteq X$ F-szerinti inverzképe τ_X-nyílt. A definíciók szerint azonban

$$F^{-1}(\mathscr{P}(Y)^Z) = \{x \in X\ :\ F(x) \in \mathscr{P}(Y)^Z\} = \{x \in X\ :\ F(x)\cap Z = \emptyset\},$$

ezek szerint a fentiek azzal ekvivalensek, hogy $\forall\ Z \subseteq Y$ τ_Y-zárt halmaz esetén az $\{x \in X\ :\ F(x)\cap Z = \emptyset\}$ halmaz τ_X-nyílt.
Az előzőeknek a $G \doteq Z^c$ nyílt halmazokkal való átfogalmazásával kapjuk a másik jellemzést. $\square$

4.2.13. Megjegyzés. A fentiek szerint sikerült válaszolni a fejezet elején feltett első kérdésre, miszerint a topologikus terek közötti (pontértékű) leképezések folytonossága analógiájára a halmazértékű leképezésekre bevezetett kétféle folytonossági fogalomhoz sikerült az Y részhalmazain olyan topológiákat definiálni, amely melletti folytonosság éppen a fenti fogalmakat adja.

Emlékeztetőül, egy $F: X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontbeli folytonosságát a következő módon szerettük volna értelmezni:

(a) $\forall\, G \in \tau_Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(a) \cap G \neq \emptyset$, $\exists\, U \in \tau_X(a)$ környezete az a pontnak, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $F(x) \cap G \neq \emptyset$, illetve

(b) $\forall\, G \in \tau_Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(a) \subseteq G$, $\exists\, U \in \tau_X(a)$ környezete az a pontnak, hogy $\forall\, x \in U$ esetén $F(x) \subseteq G$.

Ezek szerint az (a)-beli fogalom az alsó-Vietoris-folytonosság, amit szoktak alulról félig folytonosságnak is nevezni, a (b)-beli fogalom pedig a felső-Vietoris-folytonosság, amit szoktak felülről félig folytonosságnak is nevezni.

Érdekes tartalma van még a globális alsó-Vietoris-folytonosságnak. Egy topologikus terek között értelmezett függvény pontosan akkor folytonos, ha bármely nyílt halmaz inverzképe nyílt. Egy halmazértékű leképezés pedig alsó-Vietoris-folytonos, ha bármely nyílt halmaz gyenge értelemben vett inverzképe nyílt.

A Vietoris-folytonosságok jellemzése sorozatokkal

4.2.14. Állítás (az a-V-folytonosság ekv. definíciója sorozatokkal, átviteli elv)**.** *Legyenek (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek.*
Egy $F: X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontban pontosan akkor alsó-Vietoris-folytonos, ha $\forall$ (x_n) X-beli $\lim x_n = a$ sorozat, valamint $b \in F(a)$ esetén $\exists\, y_n \in F(x_n)$ sorozat, amelyre $\lim y_n = b$.

Bizonyítás. Szükségesség: Legyen (x_n) X-beli sorozat, amelyre $\lim x_n = a$, valamint $b \in F(a)$ adott. A halmaztól való távolság definíciója szerint $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\, y_n \in F(x_n)$, amelyre

$$d(b, y_n) < d(b, F(x_n)) + \frac{1}{n}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel az F halmazértékű leképezés az $a \in X$ pontban alsó-Vietoris-folytonos, valamint $b \in F(a) \cap B(b, \varepsilon/2)$, ezért $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_0$ esetén $F(x_n) \cap B(b, \varepsilon/2) \neq \emptyset$, emiatt

$$d(b, F(x_n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezek szerint $\forall\, n > \max\left\{n_0, \frac{2}{\varepsilon}\right\}$ esetén

$$d(b, y_n) < d(b, F(x_n)) + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy, $\lim y_n = b$.

Elégségesség: Indirekt módon tegyük fel, hogy az F halmazértékű leképezés az $a \in X$ pontban nem alsó-Vietoris-folytonos, ami azt jelenti, hogy $\exists\ G \in \tau_Y$ nyílt halmaz, amelyre $F(a) \cap G \neq \emptyset$, de az a pont $\forall\ U \in \tau_X(a)$ környezetében $\exists\ x \in U$, amelyre $F(x) \cap G = \emptyset$. Legyen $b \in F(a) \cap G$, ekkor $G \in \tau_Y(b)$, azaz a b pont környezete. A fentiek szerint $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\ x_n \in U_n \doteq B(a, 1/n)$, amelyre $F(x_n) \cap G = \emptyset$, ezek alapján $\lim x_n = a$, de $\forall\ y_n \in F(x_n)$ esetén $y_n \notin G$, emiatt pedig $\nexists\ y_n \in F(x_n)$ sorozat, amelyre $\lim y_n = b$, ami ellentmondás. □

Kompakt metrikus téz zárt részhalmazaiba képező halmazértékű leképezések esetén az f-V-folytonosságra nagyon egyszerű jellemzés létezik:

4.2.15. Állítás (az f-V-folytonosság ekvivalens definíciója sorozatokkal)**.** *Legyen (X, d_X) tetszőleges metrikus tér, (Y, d_Y) kompakt metrikus tér.*
1. Egy $F : X \to \mathscr{F}(Y)$ zárt halmaz értékű leképezés egy $a \in X$ pontban pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha $\forall\ (x_n)$ X-beli $\lim x_n = a$ sorozat, valamint $y_n \in F(x_n)$, $\lim y_n = b$ sorozat esetén $b \in F(a)$,
2. Egy $F : X \to \mathscr{F}(Y)$ zárt halmaz értékű leképezés az X halmazon pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha $\forall\ (x_n)$ X-beli és (y_n) Y-beli konvergens sorozat esetén, amelyre $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $y_n \in F(x_n)$, teljesül, hogy

$$\lim y_n \in F(\lim x_n), \ \textit{azaz}\ \lim(x_n, y_n) \in \operatorname{graph} F.$$

Bizonyítás. 1. Szükségesség (ehhez az irányhoz nem kell az Y kompaktsága): Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ (x_n)$ X-beli sorozat, amelyre $\lim x_n = a$, és $\exists\ y_n \in F(x_n)$ Y-beli sorozat, amelyre $\lim y_n = b$, de $b \notin F(a)$.
Mivel $F(a) \subseteq Y$ zárt halmaz, azaz $(F(a))^c \subseteq Y$ nyílt, ezért $\exists\, \bar{B}(b, \varepsilon)$ zárt gömb, amelyre $\bar{B}(b, \varepsilon) \subseteq (F(a))^c$, azaz $F(a) \cap \bar{B}(b, \varepsilon) = \emptyset$. Mivel az F halmazértékű leképezés az $a \in X$ pontban felső-Vietoris-folytonos, ezért $\exists\ U \in \tau_X(a)$ környezete az a pontnak, hogy $\forall\ x \in U$ esetén $F(x) \cap \bar{B}(b, \varepsilon) = \emptyset$.
Mivel $\lim x_n = a$, ezért $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n > n_0$ esetén $x_n \in U$, így $F(x_n) \cap \bar{B}(b, \varepsilon) = \emptyset$, emiatt $\lim y_n \neq b$, ami ellentmondás.

Elégségesség: Indirekt módon tegyük fel, hogy az F halmazértékű leképezés az $a \in X$ pontban nem felső-Vietoris-folytonos, ami azt jelenti, hogy $\exists\ Z \subset Y$ zárt halmaz, amelyre $F(a) \cap Z = \emptyset$, de az a pont $\forall\ U \in \tau_X(a)$ környezetében $\exists\ x \in U$, amelyre $F(x) \cap Z \neq \emptyset$, speciálisan $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\ x_n \in U_n \doteq B(a, 1/n)$, amelyre $F(x_n) \cap Z \neq \emptyset$.
Legyen $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $y_n \in F(x_n)$. Mivel Y kompakt, így sorozatkompakt, ezért az (y_n) sorozatnak $\exists\ (y_{n_k})$ konvergens részsorozata, jelölje $b \doteq \lim y_{n_k}$.
Mivel $\lim x_n = a$, ezért $\lim x_{n_k} = a$, valamint $y_{n_k} \in F(x_{n_k})$, amelyre teljesül, hogy $\lim y_{n_k} = b$, emiatt a feltétel szerint $b \in F(a)$. Továbbá $y_{n_k} \in Z$, $\lim y_{n_k} = b$, és $Z \subset Y$ zárt halmaz, ezért $b \in Z$. Ezek szerint $b \in F(a) \cap Z$, ami ellentmondás.

2. nyilvánvalóan következik 1.-ből. □

4.2.16. Megjegyzés. Ha (Y, d_Y) nem kompakt metrikus tér, akkor nem igaz az ekvivalencia. Például az

$$f(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\}, & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ \{0\}, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}.$$

függvényre teljesülnek az állítás feltételei, de nem felső-Vietoris-folytonos a 0-ban.

4.2.17. Megjegyzés. A fentiek szerint sikerült válaszolni a fejezet elején feltett másik kérdésre is, miszerint a metrikus terek közötti (pont értékű) leképezések sorozatokkal megfogalmazott folytonosságának analógiájára a halmazértékű leképezésekre bevezetett kétféle értelmezés közül az egyik az alsó-, a másik a felső-Vietoris-folytonosság.

Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontbeli folytonosságát sorozatokkal a következő módokon szerettük volna értelmezni:

(a) $\forall\, (x_n)$ X-beli $\lim x_n = a$ sorozat, valamint $b \in F(a)$ esetén $\exists\, y_n \in F(x_n)$ sorozat, amelyre $\lim y_n = b$, illetve

(b) $\forall\, (x_n)$ X-beli $\lim x_n = a$ sorozat, valamint $y_n \in F(x_n)$, $\lim y_n = b$ sorozat esetén $b \in F(a)$.

A fentiek alapján az (a)-beli fogalom az alsó-Vietoris-folytonossággal, a (b)-beli fogalom pedig speciális esetben a felső-Vietoris-folytonossággal ekvivalens.

Érdekes tartalma van még a globális felső-Vietoris-folytonosságnak. Ez azt jelenti, hogy a halmazértékű leképezés gyenge értelemben vett gráfja zárt halmaz. A következő szakaszban ezt részletesebben is megvizsgáljuk.

Zárt gráfú halmazértékű leképezések

4.2.18. Definíció. Legyenek (X, τ_X) és (Y, τ_Y) topologikus terek. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezést zárt gráfúnak nevezzük, ha a

$$\operatorname{graph} F = \{(x,y) \in X \times Y \ : \ x \in X,\ y \in F(x)\} \subseteq X \times Y$$

gyenge értelemben vett gráfja zárt halmaz.

4.2.19. Megjegyzés. Ha egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés zárt gráfú, akkor zárt értékű is.
Ugyanis: $\forall\, x \in X$ esetén az

$$f_x : Y \to X \times Y\,, \quad f_x(y) \doteq (x,y)$$

folytonos függvényre

$$F(x) = f_x^{-1}(\operatorname{graph} F)\,,$$

ami zárt halmaz.

Az állítás fordítva nem igaz.
Például kompakt Y esetén egy $f : X \to Y$ nem folytonos függvény mint $f : X \to \mathscr{P}(Y)$ szingleton értékű leképezés zárt értékű, de nem zárt gráfú.

4.2.20. Állítás (f-V-folytonosság és zárt gráfúság)**.** *Legyen (X,d_X) tetszőleges metrikus tér, (Y,d_Y) pedig kompakt metrikus tér.*
Egy $F : X \to \mathscr{F}(Y)$ zárt halmaz értékű leképezés az X halmazon pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha zárt gráfú.

Bizonyítás. A 4.2.15. állítás 2. éppen ezt állítja, ugyanis az, hogy $\forall\ (x_n)$ X-beli és (y_n) Y-beli konvergens sorozat esetén, amelyre $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén $y_n \in F(x_n)$, teljesül, hogy

$$\lim y_n \in F(\lim x_n)\,,$$

azzal ekvivalens, hogy $\forall\ (x_n, y_n)$ $\operatorname{graph} F$-beli konvergens sorozat esetén

$$\lim(x_n, y_n) \in \operatorname{graph} F\,,$$

ami pedig éppen a $\operatorname{graph} F \subseteq X \times Y$ halmaz zártságát jelenti. □

4.2.21. Állítás (f-V-folytonosság és zárt gráfúság topologikus térben)**.** *Legyenek (X,τ_X) és (Y,τ_Y) topologikus terek.*

1. Legyen (Y,τ_Y) reguláris topologikus tér. Ha egy $F : X \to \mathscr{F}(Y)$ zárt halmaz értékű leképezés felső-Vietoris-folytonos, akkor zárt gráfú.

2. Legyen (Y,τ_Y) kompakt topologikus tér. Ha $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ zárt gráfú halmazértékű leképezés, akkor felső-Vietoris-folytonos.

3. Legyen (Y,τ_Y) kompakt és reguláris topologikus tér. Egy $F : X \to \mathscr{F}(Y)$ zárt (azaz kompakt) halmaz értékű leképezés pontosan akkor felső-Vietoris-folytonos, ha zárt gráfú.

Bizonyítás. 1. Megmutatjuk, hogy a $(\operatorname{graph} F)^c \subseteq X \times Y$ halmaz nyílt.
Legyen $(x,y) \in (\operatorname{graph} F)^c$ tetszőleges pont, azaz $y \notin F(x)$. Mivel $F(x) \subseteq Y$ zárt halmaz, és az (Y,τ_Y) topologikus tér reguláris, azért $\exists\ V \in \tau_Y(y)$ zárt környezet, hogy $F(x) \cap V = \emptyset$. Mivel pedig az $F : X \to \mathscr{F}(Y)$ halmazértékű leképezés f-V-folytonos, ezért az f-V-folytonosság 4.2.12 állításbeli ekvivalens definíciója szerint $\exists\ U \in \tau_X(x)$ környezet, hogy

$$\forall\ z \in U \quad \text{esetén} \quad F(z) \cap V = \emptyset\,.$$

Ezek szerint $\forall\ u \in U$ és $\forall\ v \in V$ esetén $v \notin F(u)$, azaz $(u,v) \in (\operatorname{graph} F)^c$, így $U \times V \subseteq (\operatorname{graph} F)^c$. Ez azt jelenti, hogy $(\operatorname{graph} F)^c \subseteq X \times Y$ nyílt halmaz.

2. Legyen $x \in X$ tetszőleges. Belátjuk, hogy az $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés f-V-folytonos az x pontban.
Legyen $Z \in \mathscr{F}(Y)$ τ_Y-zárt halmaz, amelyre $F(x) \cap Z = \emptyset$. Belátjuk, hogy $\exists\ U_x \in \tau_X(x)$ környezete az $x \in X$ pontnak, amelyre

$$\forall\ z \in U_x \quad \text{esetén} \quad F(z) \cap Z = \emptyset\,,$$

azaz teljesül az f-V-folytonosság 4.2.12. állításbeli ekvivalens definíciója.

Tekintsük az (Y,τ_Y) topologikus térnek a következő τ_Y-nyílt halmazokból álló lefedését:

$$\{(\mathrm{cl}\,F(U)\cap Z)^c \ : \ U\in\tau_X(x)\}\cup\{Z^c\}\,.$$

Ez a halmazrendszer valóban lefedése az Y halmaznak:

$$\bigcup_{U\in\tau_X(x)}(\mathrm{cl}\,F(U)\cap Z)^c\cup Z^c=Y\,.$$

Ugyanis: Legyen $y\in Y$ tetszőleges.
Tegyük fel először, hogy $y\in F(x)$. Mivel $F(x)\cap Z=\emptyset$, ezért $y\in Z^c$.
Tegyük fel másodszor, hogy $y\notin F(x)$. Ebben az esetben $(x,y)\notin\mathrm{graph}\,F$, azaz $(x,y)\in(\mathrm{graph}\,F)^c$. Mivel $\mathrm{graph}\,F\subseteq X\times Y$ zárt halmaz, azaz $(\mathrm{graph}\,F)^c\subseteq X\times Y$ nyílt halmaz, ezért az (x,y) pontnak $\exists\,W\in\tau_{X\times Y}(x,y)$ környezete, amelyre $W\subseteq(\mathrm{graph}\,F)^c$, emiatt $\exists\,U\in\tau_X(x)$ és $\exists\,V\in\tau_Y(y)$ nyílt környezet, hogy

$$U\times V\subseteq W\subseteq(\mathrm{graph}\,F)^c\,.$$

Ezek szerint $\forall\,z\in U,\ v\in F(z)$ esetén $v\notin V$, tehát $F(U)\subseteq V^c$, azaz

$$V\subseteq(F(U))^c\,.$$

Mivel $V\subseteq Y$ nyílt halmaz, ezért $V\subseteq\mathrm{int}(F(U))^c$, azonban

$$\mathrm{int}(F(U))^c=(\mathrm{cl}\,F(U))^c\subseteq(\mathrm{cl}\,F(U)\cap Z)^c\,,$$

ezek miatt

$$V\subseteq(\mathrm{cl}\,F(U)\cap Z)^c\,.$$

Mivel pedig $V\in\tau_Y(y)$, így $y\in V$, ezért

$$y\in(\mathrm{cl}\,F(U)\cap Z)^c\,.$$

Ezek szerint $\exists\,U\in\tau_X(x)$ környezet, hogy $y\in(\mathrm{cl}\,F(U)\cap Z)^c$.

Az (Y,τ_Y) topologikus tér kompakt volta miatt, a fenti lefedésből kiválasztható véges lefedés, azaz $\exists\,U_1,\ldots,U_n\in\tau_X(x)$ véges sok környezet, hogy

$$Y=\bigcup_{i=1}^{n}(\mathrm{cl}\,F(U_i)\cap Z)^c\cup Z^c\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(F(U_i)\cap Z)^c\cup Z^c\,.$$

Innen $\cap F(U_i)\supseteq F(\cap U_i)$ miatt

$$\emptyset=\left(\bigcup_{i=1}^{n}(F(U_i)\cap Z)^c\cup Z^c\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}(F(U_i)\cap Z)\cap Z\supseteq F\left(\bigcap_{i=1}^{n}U_i\right)\cap Z\,.$$

Ezek szerint az $U_x\doteq\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\tau_X(x)$ környezetre teljesül, hogy $F(U_x)\cap Z=\emptyset$, azaz $\forall\,z\in U_x$ esetén $F(z)\cap Z=\emptyset$.

3. Következik 1.-ből és 2.-ből. □

A Hausdorff-folytonosságok jellemzése

4.2.22. Állítás (az a-H-folytonosság ekvivalens definíciója)**.** *Legyen* (X,τ_X) *topologikus tér,* (Y,d) *metrikus tér.*
Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ *halmazértékű leképezés egy* $a \in X$ *pontban pontosan akkor alsó-Hausdorff-folytonos, ha*

(1) $\forall\, \varepsilon > 0$ *esetén,* $\exists\, U_a \in \tau_X(a)$ *környezete az* $a \in X$ *pontnak, hogy* $\forall\, x \in U_a$ *esetén* $F(a) \subseteq B(F(x),\varepsilon)$*, illetve ezzel ekvivalens módon:*

(2) $\forall\, \varepsilon > 0$ *esetén,* $\exists\, U_a \in \tau_X(a)$ *környezete az* $a \in X$ *pontnak, hogy* $\forall\, x \in U_a$ *esetén* $e(F(a),F(x)) < \varepsilon$*.*

Bizonyítás. (1) Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontban pontosan akkor alsó-Hausdorff-folytonos, ha az $F(a) \in \mathscr{P}(Y)$ halmaz

$$\forall\, \{C \in \mathscr{P}(Y)\ : F(a) \subseteq B(C,\varepsilon)\}$$

a-H-báziskörnyezetéhez $\exists\, U_a \in \tau(a)$ környezete az $a \in X$ pontnak, hogy $\forall\, x \in U_a$ esetén

$$F(x) \in \{C \in \mathscr{P}(Y)\ : F(a) \subseteq B(C,\varepsilon)\},$$

ami azt jelenti, hogy $F(a) \subseteq B(F(x),\varepsilon)$.

(2) A túlnyúlás 4.1.15. definíciójának (4.2) ekvivalens megfogalmazása szerint

$$e(F(a),F(x)) = \inf\{\rho > 0\ :\ F(a) \subseteq B(F(x),\rho)\}.$$

Ezek szerint egyrészt, ha $F(a) \subseteq B(F(x),\varepsilon)$, akkor

$$e(F(a),F(x)) < \varepsilon),$$

másrészt, ha $e(F(a),F(x)) < \varepsilon/2)$, akkor

$$F(a) \subseteq B(F(x),\varepsilon),$$

ezekből pedig következik (1) és (2) ekvivalenciája. □

4.2.23. Állítás (az f-H-folytonosság ekvivalens definíciója)**.** *Legyen* (X,τ_X) *topologikus tér, legyen* (Y,d) *metrikus tér.*
Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ *halmazértékű leképezés egy* $a \in X$ *pontban pontosan akkor felső-Hausdorff-folytonos, ha*

(1) $\forall\, \varepsilon > 0$ *esetén,* $\exists\, U_a \in \tau_X(a)$ *környezete az* $a \in X$ *pontnak, hogy* $\forall\, x \in U_a$ *esetén* $F(x) \subseteq B(F(a),\varepsilon)$*, illetve ezzel ekvivalens módon:*

(2) $\forall\, \varepsilon > 0$ *esetén,* $\exists\, U_a \in \tau_X(a)$ *környezete az* $a \in X$ *pontnak, hogy* $\forall\, x \in U_a$ *esetén* $e(F(x),F(a)) < \varepsilon$*.*

Bizonyítás. (1) Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontban pontosan akkor felső-Hausdorff-folytonos, ha az $F(a) \in \mathscr{P}(Y)$ halmaz

$$\forall \{C \in \mathscr{P}(Y) \ : C \subseteq B(F(a), \varepsilon)\}$$

f-H-báziskörnyezetéhez $\exists\ U_a \in \tau(a)$ környezete az $a \in X$ pontnak, hogy $\forall\ x \in U_a$ esetén

$$F(x) \in \{C \in \mathscr{P}(Y) \ : C \subseteq B(F(a), \varepsilon)\},$$

ami azt jelenti, hogy $F(x) \subseteq B(F(a), \varepsilon)$.

(2) A túlnyúlás 4.1.15. definíciójának (4.2) ekvivalens megfogalmazása szerint

$$e(F(x), F(a)) = \inf\{\rho > 0 \ : \ F(x) \subseteq B(F(a), \rho)\}.$$

Ezek szerint egyrészt, ha $F(x) \subseteq B(F(a), \varepsilon)$, akkor

$$e(F(x), F(a)) < \varepsilon,$$

másrészt, ha $e(F(x), F(a)) < \varepsilon/2$, akkor

$$F(x) \subseteq B(F(a), \varepsilon),$$

amikből következik (1) és (2) ekvivalenciája. □

4.2.24. Megjegyzés. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontban pontosan akkor Hausdorff-folytonos, ha

> $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén, $\exists\ U_a \in \tau_X(a)$ környezete az $a \in X$ pontnak, hogy $\forall\ x \in U_a$ esetén
> $$d(F(x), F(a)) = \max\{e(F(x), F(a)), e(F(a), F(x))\} < \varepsilon.$$

Ugyanis: Mivel F pontosan akkor Hausdorff-folytonos, ha alsó-Hausdorff- és felső-Hausdorff-folytonos, ezért ez következik az előző állításokból.

4.2.25. Megjegyzés. A fentiek szerint sikerült válaszolni a 4.1.17. megjegyzésben feltett kérdésre, miszerint a metrikus terek közötti (pontértékű) leképezések folytonossága analógiájára a halmazértékű leképezésekre a túlnyúlás segítségével bevezetett kétféle folytonossági fogalomhoz, illetve a paralleltartomány fogalma segítségével kétféle folytonossági fogalomhoz sikerült az Y részhalmazain olyan topológiákat definiálni, amely melletti folytonosság éppen a fenti fogalmakat adja:
Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezés egy $a \in X$ pontbeli folytonosságára a következő definíciókat adtuk: Először a túlnyúlás fogalmát felhasználva:

(a) $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in X,\ d_X(x, a) < \delta$ pontra teljesül, hogy $e_Y(F(x), F(a)) < \varepsilon$, illetve a túlnyúlás aszimmetriája miatt fordítva:

(b) $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in X,\ d_X(x, a) < \delta$ pontra teljesül, hogy $e_Y(F(a), F(x)) < \varepsilon$.

Másodszor a parallel tartomány fogalmát felhasználva:

(a) $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in X,\ d_X(x,a) < \delta$ esetén $F(x) \subseteq B(F(a),\varepsilon)$, illetve fordítva:

(b) $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in X,\ d_X(x,a) < \delta$ esetén $F(a) \subseteq B(F(x),\varepsilon)$.

Ezek szerint az (a)-beli fogalmak mindkét esetben a felső-Hausdorff-folytonosságot, a (b)-beli fogalmak pedig mindkét esetben az alsó-Hausdorff-folytonosságot adják.

4.2.26. Állítás. *Legyen (X,τ) topologikus tér, és legyenek $(Y_1,\|.\|_1),\ldots,(Y_n,\|.\|_n)$, normált terek. Ha $\forall\ i = 1,\ldots,n$ esetén az $F_i : X \to \mathscr{P}(Y_i)$ halmazértékű leképezés felső-Hausdorff-folytonos, akkor az*

*(1) $F_1 \otimes \ldots \otimes F_n : X \to \mathscr{P}(Y_1 \times \ldots \times Y_n)$,
ahol $(F_1 \otimes \ldots \otimes F_n)(x) = F_1(x) \times \ldots \times F_1(x)$, illetve az*

(2) $F_1 + \ldots + F_n : X \to \mathscr{P}(Y_1 \times \ldots \times Y_n)$

halmazértékű leképezések is felső-Hausdorff-folytonosak.

Ha $\forall\ i = 1,\ldots,n$ esetén az $F_i : X \to \mathscr{K}(Y_i)$ kompakt halmaz értékű leképezés, akkor a felső-Hausdorff-folytonoság helyett felső-Vietoris-folytonosság mellett is igaz marad.

Bizonyítás. Elég $n = 2$-re igazolnunk.

Legyen $a \in X$ tetszőleges pont. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor a felső-Hausdorff folytonosság fenti ekvivalens definíciója szerint esetén, $\exists\ U_1, U_2 \in \tau_X(a)$ környezetei az $a \in X$ pontnak, hogy

$$\begin{aligned} &\forall\ x \in U_1 \quad \text{esetén} \quad F_1(x) \subseteq B(F_1(a),\varepsilon)\,, \quad \text{és} \\ &\forall\ x \in U_2 \quad \text{esetén} \quad F_2(x) \subseteq B(F_2(a),\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Ekkor $\forall\ x \in U_1 \cap U_2$ esetén

$$F_(x) \times F_2(x) \subseteq B(F_1(a),\varepsilon) \times B(F_2(a),\varepsilon) \subseteq B(F_1(a) \times F_2(a),\varepsilon)\,,$$

ami a fenti ekvivalens definíció szerint azt jelenti, hogy az $F_1 \otimes F_2$ halmazértékű leképezés felső-Hausdorff-folytonos az $a \in X$ pontban, így ennek tetszőleges volta miatt az egész X halmazon is az.

Mivel

$$F_1 + F_2 = + \circ (F_1 \times F_2)\,,$$

ezért az $F_1 + F_2$ halmazértékű leképezés folytonos leképezések kompozíciója, így maga is felső-Hausdorff-folytonos.

Végül, a 4.2.10. állítás szerint egy kompakt halmaz értékű leképezésekre pontosan akkor felső-Hausdorff-folytonos, ha felső-Vietoris-folytonos, ezért marad igaz az állítás ekkor. $\square$

4.3. A Berge-tétel

Legyenek (T,τ_T) és (X,τ_X) topologikus terek. Legyen $H : T \to \mathscr{P}(X)$ egy halmazértékű leképezés, ezt a továbbiakban feltételi leképezésnek nevezzük; legyen $f :$ $\operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ egy függvény, ezt a továbbiakban célfüggvénynek nevezzük; valamint tekintsük a következő, $t \in T$ paraméterrel paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{cases} f(t,x) \to \max \\ x \in H(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

Az (4.3) feladatsereg értékfüggvényének azt az $f^{\vee} : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt nevezzük, amelyre $\forall\, t \in T$ paraméter esetén

$$f^{\vee}(t) \doteq \sup_{H(t)} f(t,.) = \sup_{x \in H(t)} f(t,x)\,.$$

Az (4.3) feladatsereg megoldásleképezésének nevezzük azt az $\mathscr{X} : T \to \mathscr{P}(X)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\, t \in T$ paraméter esetén

$$\begin{aligned} \mathscr{X}(t) &\doteq \operatorname*{argmax}_{H(t)} f(t,.) \\ &= \{x \in H(t) : \ f(t,x) = f^{\vee}(t)\} = f^{-1}(t,.)(\{f^{\vee}(t)\})\,. \end{aligned}$$

Ha $\mathscr{X}(t) \neq \emptyset$, akkor nyilván $f^{\vee}(t) = f(t,x)$, ahol $x \in \mathscr{X}(t)$.

4.3.1. Állítás (Berge-tétel)**.** *1.a. Ha a $H : T \to \mathscr{P}(X)$ halmazértékű leképezés alsó-Vietoris-folytonos, valamint az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos, akkor az $f^{\vee} : T \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is alulról félig folytonos.*

1.b. Ha a $H : T \to \mathscr{K}(X)$ kompakt értékű leképezés és felső-Vietoris-folytonos, valamint az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos, akkor az $f^{\vee} : T \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is felülről félig folytonos.

1.c. Ha a $H : T \to \mathscr{K}(X)$ kompakt értékű leképezés és Vietoris-folytonos, valamint az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor az $f^{\vee} : T \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény is folytonos.

2.a. Ha a $H : T \to \mathscr{K}(X)$ kompakt értékű leképezés és felső-Vietoris-folytonos, az $f :$ $\operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos, valamint az $f^{\vee} : T \to \mathbb{R}$ értékfüggvény folytonos, akkor az $\mathscr{X} : T \to \mathscr{P}(X)$ megoldásleképezés is kompakt értékű és felső-Vietoris-folytonos.

2.b. Ha a $H : T \to \mathscr{K}(X)$ kompakt értékű leképezés és Vietoris-folytonos, valamint az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor az $\mathscr{X} : T \to \mathscr{P}(X)$ megoldásleképezése is kompakt értékű és felső-Vietoris-folytonos.

Bizonyítás. 1.a. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $(f^{\vee})^{-1}((\alpha,\infty]) \subseteq T$ halmaz nyílt.

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Legyen $t_0 \in (f^\vee)^{-1}((\alpha,\infty])$ tetszőlegesen adott, azaz

$$\alpha < f^\vee(t_0) = \sup_{x \in H(t_0)} f(t_0,x)\,.$$

Ekkor $\exists\, x_0 \in H(t_0)$, amelyre $\alpha < f(t_0,x_0)$, azaz

$$(t_0,x_0) \in f^{-1}((\alpha,\infty])\,.$$

Mivel f a.f.f., ezért $\exists\, W \in \tau_{T\times X}(t_0,x_0)$ környezet, hogy

$$\forall\ (t,x) \in \operatorname{graph} H \cap W \text{ esetén } (t,x) \in f^{-1}(\alpha,\infty]\,, \text{ azaz } \alpha < f(t,x)\,. \tag{4.4}$$

Ekkor $\exists\, U \in \tau_T(t_0)$ és $\exists\, V \in \tau_X(x_0)$ nyílt környezet, hogy $U \times V \subseteq W$.
Mivel $x_0 \in H(t_0)$ és $x_0 \in V$, ezért $V \cap H(t_0) \neq \emptyset$. Mivel feltettük, hogy a $H : T \to \mathscr{P}(X)$ halmazértékű leképezés a-V-folytonos, továbbá a $V \subseteq X$ halmaz nyílt, ezért $\exists\, U_0 \in \tau_T(t_0)$, $U_0 \subseteq U$ környezet, hogy $\forall\, t \in U_0$ esetén $V \cap H(t) \neq \emptyset$, így $\exists\, x \in V \cap H(t)$. Ezzel

$$(t,x) \in \operatorname{graph} H \cap (U_0 \times V) \subseteq \operatorname{graph} H \cap (U \times V) \subseteq \operatorname{graph} H \cap W\,,$$

emiatt (4.4) alapján $\alpha < f(t,x)$. Ezek szerint $\forall\, t \in U_0$ esetén $\exists\, x \in H(t)$, hogy

$$\alpha < f(t,x) \le \sup_{z \in H(t)} f(t,z) = f^\vee(t)\,.$$

Ezek szerint a t_0 pont $U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezetére teljesül, hogy

$$U_0 \subseteq (f^\vee)^{-1}((\alpha,\infty])\,.$$

Ez azt jelenti, hogy $t_0 \in \operatorname{int}(f^\vee)^{-1}((\alpha,\infty])$, és ezt akartuk látni.

1.b. Azt mutatjuk meg, hogy $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $(f^\vee)^{-1}([-\infty,\alpha)) \subseteq T$ halmaz nyílt.
Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Legyen $t_0 \in (f^\vee)^{-1}([-\infty,\alpha))$ tetszőlegesen adott, azaz

$$f^\vee(t_0) = \sup_{x \in H(t_0)} f(t_0,x) < \alpha\,.$$

1. eset: $H(t_0) = \emptyset$. Mivel a $H : T \to \mathscr{K}(X)$ halmazértékű leképezés f-V-folytonos, $H(t_0) \subseteq \emptyset$, és az $\emptyset$ halmaz nyílt, ezért a fenti ekvivalens definíció szerint $\exists\, U \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\, t \in U$ esetén $H(t) \subseteq \emptyset$, azaz $H(t) = \emptyset$. Ezért $\forall\, t \in U$ esetén

$$f^\vee(t) = \sup_{x \in H(t)} f(t,x) = -\infty < \alpha\,.$$

Ezek szerint a t_0 pont $U \in \tau_T(t_0)$ környezetére teljesül, hogy

$$U \subseteq (f^\vee)^{-1}([-\infty,\alpha))\,.$$

Ez azt jelenti, hogy $t_0 \in \operatorname{int}(f^\vee)^{-1}([-\infty,\alpha))$.

2. eset: $H(t_0) \neq \emptyset$. Ekkor $\exists\, \beta \in \mathbb{R}$, hogy

$$f^{\vee}(t_0) = \sup_{x \in H(t_0)} f(t_0, x) < \beta < \alpha\,,$$

így $\forall\, x \in H(t_0)$ esetén $f(t_0, x) < \beta$, azaz

$$(t_0, x) \in f^{-1}([-\infty, \beta))\,.$$

Mivel f f.f.f., ezért $\forall\, x \in H(t_0)$ esetén $\exists\, W_x \in \tau_{T \times X}(t_0, x)$ környezet, hogy

$$\forall\,(t,z) \in \operatorname{graph} H \cap W_x \text{ esetén } (t,z) \in f^{-1}([-\infty, \beta))\,,\ \text{azaz } f(t,z) < \beta\,. \tag{4.5}$$

Ekkor persze esetén $\exists\, U_x \in \tau_T(t_0)$ és $\exists\, V_x \in \tau_X(x_0)$ nyílt környezet, hogy $U_x \times V_x \subseteq W_x$.
Mivel

$$\{V_x \,:\, x \in H(t_0)\}$$

nyílt fedése a $H(t_0) \subseteq X$ kompakt halmaznak, ezért $\exists\, x_1, \ldots, x_n \in H(t_0)$, hogy

$$H(t_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}\,.$$

Mivel a $H : T \to \mathscr{K}(X)$ halmazértékű leképezés f-V-folytonos, ezért a fenti ekvivalens definíció szerint $\exists\, U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\, t \in U_0$ esetén

$$H(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}\,.$$

Legyen

$$U \doteq U_0 \cap U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n}\,.$$

Mivel $U_0,\ U_{x_1}, \ldots, U_{x_n} \in \tau_T(t_0)$ és $\tau_T(t_0)$ véges metszetzárt, ezért $U \in \tau_T(t_0)$. Mivel pedig $U \subseteq U_0$, ezért $\forall\, t \in U$ esetén is

$$H(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}\,,$$

ezért $\forall\, x \in H(t)$ esetén $\exists\, 1 \leq k \leq n$, hogy $x \in V_{x_k}$ így

$$(t, x) \in U \times V_{x_k} \subseteq U_{x_k} \times V_{x_k} \subseteq W_{x_k}\,.$$

Ezek szerint $\forall\, t \in U$ és $\forall\, x \in H(t)$ esetén

$$(t, x) \in \operatorname{graph} H \cap W_{x_k}\,,$$

emiatt pedig (4.5) alapján $f(t,x) < \beta$. Ebből következik, hogy $\forall\, t \in U$ esetén

$$f^{\vee}(t) = \sup_{x\in H(t)} f(t,x) \le \beta < \alpha\,,$$

Ezek szerint a t_0 pont $U \in \tau_T(t_0)$ környezetére teljesül, hogy

$$U \subseteq (f^{\vee})^{-1}([-\infty,\alpha))\,.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $t_0 \in \operatorname{int}\,(f^{\vee})^{-1}([-\infty,\alpha))$.
(A $\beta < \alpha$ számot azért vezettük be, mert közvetlenül csak azt tudtuk megmutatni, hogy a t_0 pontnak $\exists\, U \in \tau_T(t_0)$ környezete, hogy $\forall\, t \in U$ esetén $f^{\vee}(t) \le \beta$, és a $f^{\vee}(t) \le \alpha$ nem lett volna elég.)

1.c. Ez következik 1.a.-ból és 1.b.-ből.

2.a. Először is megjegyezzük , hogy az $f^{\vee} : T \to \mathbb{R}$ értékfüggvényről elég lenne az alulról félig folytonosságot feltenni, de a többi feltételből az 1.b. alapján következik a felülről félig folytonosság is.

Kompakt értékűség: Legyen $t \in T$ tetszőleges pont. A definíció szerint

$$\mathscr{X}(t) = f^{-1}(t,.)(\{f^{\vee}(t)\}) = f^{-1}(t,.)\left(\left[f^{\vee}(t),+\infty)\right]\right) \subseteq H(t)\,,$$

ami $f(t,.) : H(t) \to \mathbb{R}$ felülről félig folytonos volta miatt zárt részhalmaza a $H(t)$ kompakt halmaznak, így maga is kompakt.

Felső-Vietoris-folytonosság: Legyen $t_0 \in T$ tetszőleges pont. Legyen $G \subseteq X$ tetszőleges olyan τ_X-nyílt halmaz, amelyre $\mathscr{X}(t_0) \subseteq G$. Belátjuk, hogy $\exists\, U \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\, t \in U$ esetén $\mathscr{X}(t) \subseteq G$, ami a 4.2.11. állításbeli ekvivalens definíció szerint azt jelenti, hogy az $\mathscr{X}$ halmazértékű leképezés felső-Vietoris-folytonos a t_0 pontban.

1. eset: $\mathscr{X}(t_0) = H(t_0)$.
Mivel $H(t_0) = \mathscr{X}(t_0) \subseteq G$ és a $H : T \to \mathscr{P}(X)$ halmazértékű leképezés f-V-folytonos, ezért $\exists\, U \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\, t \in U$ esetén $H(t) \subseteq G$, így

$$\mathscr{X}(t) \subseteq H(t) \subseteq G\,.$$

2. eset: $\mathscr{X}(t_0) \ne H(t_0)$.

Legyen $x \in H(t_0) \setminus \mathscr{X}(t_0)$ tetszőleges, ekkor

$$f(t_0,x) < \sup_{H(t_0)} f(t_0,.) = f^{\vee}(t_0)\,,$$

ezért $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(t_0,x) < \alpha < f^{\vee}(t_0)\,.$$

Mivel az f függvény felülről félig folytonos a (t_0,x) pontban, ezért az ekvivalens definíció szerint $\exists\ W \in \tau_{T\times X}(t_0,x)$ környezet, hogy $\forall\ (t,z) \in W \cap \operatorname{graph} H$ esetén

$$f(t,z) < \alpha\,.$$

Ekkor $\exists\ U_1 \in \tau_T(t_0)$ és $\exists\ V_x \in \tau_X(x)$ nyílt környezet, hogy $U_1 \times V_x \subseteq W$.
Mivel az $f^{\vee}$ függvény a.f.f. a t_0 pontban, ezért az ekvivalens definíció szerint $\exists\ U_2 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\ t \in U_2$ esetén

$$\alpha < f^{\vee}(t)\,.$$

Legyen $U_x \doteq U_1 \cap U_2 \in \tau_T(t_0)$, ekkor $\forall\ (t,z) \in (U_x \times V_x) \cap \operatorname{graph} H$ esetén

$$f(t,z) < f^{\vee}(t)\,. \tag{4.6}$$

Mivel $\mathscr{X}(t_0) \subseteq G$, ezért $H(t_0) \subseteq (H(t_0) \setminus \mathscr{X}(t_0)) \cup G$, így

$$H(t_0) \subseteq \left(\bigcup_{x \in H(t_0) \setminus \mathscr{X}(t_0)} V_x \right) \cup G\,,$$

ahol $\forall\ x \in H(t_0) \setminus \mathscr{X}(t_0)$ esetén $V_x \in \tau_X(x)$ a fent definiált környezet.
Mivel $\forall\ x \in H(t_0) \setminus \mathscr{X}(t_0)$ esetén $V_x \in \tau_X(x)$ nyílt halmaz, így a

$$\{V_x : x \in H(t_0) \setminus \mathscr{X}(t_0)\} \cup \{G\}$$

halmazrendszer nyílt lefedése a $H(t_0) \subseteq X$ kompakt halmaznak, ezért kiválasztható belőle véges lefedés, azaz

$$\exists\ x_1, \ldots, x_n \in H(t_0) \setminus \mathscr{X}(t_0)\,,\ \text{hogy}\ H(t_0) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G\,.$$

Mivel az $\bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G \subseteq X$ halmaz nyílt, valamint a $H : T \to \mathscr{K}(X)$ halmazértékű leképezés felső-Vietoris-folytonos t_0-ban, ezért $\exists\ U_0 \in \tau_T(t_0)$ környezet, hogy $\forall\ t \in U_0$ esetén

$$H(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G\,.$$

Mivel pedig $\mathscr{X}(t) \subseteq H(t)$, ezért

$$\mathscr{X}(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G.$$

Legyen

$$U \doteq U_0 \cap U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n} \in \tau_T(t_0),$$

ahol $\forall\ x_i \in H(t_0) \setminus \mathscr{X}(t_0)$ esetén $U_{x_i} \in \tau_X(x_i)$ a fentebbiekben definiált környezet. Ekkor $\forall\ t \in U$ esetén

$$\mathscr{X}(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G.$$

Belátjuk, hogy $\forall\ t \in U$ esetén $\mathscr{X}(t) \subseteq G$.
Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ t \in U$, amelyre $\exists\ z \in \mathscr{X}(t)$, de $z \notin G$. Mivel

$$\mathscr{X}(t) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k} \cup G,$$

ezért $\exists\ 1 \le k \le n$, hogy $z \in V_{x_k}$. Mivel $t \in U \subseteq U_{x_k}$, ezért $(t,z) \in U_{x_k} \times V_{x_k}$. Mivel pedig $z \in \mathscr{X}(t) \subseteq H(t)$, ezért

$$(t,z) \in (U_{x_k} \times V_{x_k}) \cap \operatorname{graph} H,$$

így (4.6) szerint $f(t,z) < f^{\vee}(t)$, emiatt $z \notin \mathscr{X}(t)$, ami ellentmondás.

2.b. Ez következik 2.a.-ból és 1.c.-ből. □

4.3.2. Megjegyzés. Az általános egyensúlyelméleti alkalmazások során az állításnak a 2.b részére hivatkoznak a leggyakrabban.

4.4. Approximációs szelekciók

4.4.1. Definíció. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ nemüres halmaz értékű leképezés, azaz valódi halmazértékű leképezés *szelekciójának* nevezzük azt az $f : X \to Y$ (pontértékű) leképezést, amelyre

$$\forall\, x \in X \ \text{ esetén } \ f(x) \in F(x),$$

illetve ezzel ekvivalens módon, amelyre

$$\operatorname{graph} f \subseteq \operatorname{graph} F.$$

4.4.2. Megjegyzés (kiválasztási axióma)**.** A halmazelméletben szereplő kiválasztási axióma éppen azt mondja ki, hogy egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ nemüres halmaz értékű leképezésnek $\exists\ f : X \to Y$ szelekciója.

Ezt az axiómát gyakran halmazértékű leképezés helyett halmazcsaláddal szokták megfogalmazni:

Tetszőleges $(F(x))_{x\in X} \subseteq \mathscr{P}(Y)$ halmazcsaládra teljesül, hogy

$$\forall\, x \in X \quad \text{esetén} \quad \exists\, f(x) \in F(x)\,.$$

Ez azonban csak megfogalmazásbeli különbség, hiszen egy $(F(x))_{x\in X} \subseteq \mathscr{P}(Y)$ halmazcsalád megegyezik az $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezéssel.

A felső-Vietoris folytonos halmazértékű leképezések approximációs szelekciói

4.4.3. Megjegyzés. Egy felső-Vietoris folytonos halmazértékű leképezésnek nem feltétélenül létezik folytonos szelekciója.

Legyen például

$$F(x) \doteq \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ [0,1] & : x = 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases},$$

ez a halmazértékű leképezés felső-Vietoris-folytonos, de nyilván nincs folytonos szelekciója.

4.4.4. Definíció. Az (X,d_X) és (Y,d_Y) metrikus terek *direkt szorzatának* azt az $(X\times Y, d_{X\times Y})$ metrikus teret nevezzük, ahol $d_{X\times Y} : (X\times Y)\times(X\times Y) \to \mathbb{R}$ az a metrika, amelyre $\forall\,(x,y),(u,v) \in X\times Y$ esetén

$$d_{X\times Y}\left((x,y),(u,v)\right) \doteq \max\{d_X(x,u), d_Y(y,v)\}\,.$$

4.4.5. Megjegyzés. 1. Könnyen ellenőrizhető, hogy $d_{X\times Y}$ valóban metrika.

2. A fenti definícióban a $\mathbb{R}^2$-beli d_∞ metrika helyett tetszőleges $d_{\mathbb{R}^2}$ metrikát használhatnánk:

$$d_{X\times Y}\left((x,y),(u,v)\right) \doteq d_{\mathbb{R}^2}\left(d_X(x,y), d_Y(u,v)\right)\,.$$

4.4.6. Definíció. Legyenek (X,d_X) és (Y,d_Y) metrikus terek. Egy $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ nemüres halmaz értékű leképezés, azaz valódi halmazértékű leképezés egy adott $\varepsilon > 0$ melletti *ε-közelítő (approximációs) szelekciójának*, röviden *ε-szelekciójának* nevezünk egy olyan $f_\varepsilon : X \to Y$ (pontértékű) leképezést, amelyre

$$\operatorname{graph} f_\varepsilon \subseteq B_{X\times Y}(\operatorname{graph} F, \varepsilon)\,,$$

azaz ezzel ekvivalens módon:

$\forall\, x \in X$ esetén az $(x, f_\varepsilon(x)) \in X\times Y$ ponthoz $\exists\, z \in X$ és $\exists\, y \in F(z)$, hogy

$$d_{X\times Y}((x, f_\varepsilon(x)),(z,y)) < \varepsilon\,.$$

4.4.7. Megjegyzés. 1. Lényegesen erősebb lenne a következő feltétel:

$$\forall\, x \in X \ \text{ esetén } \ f_\varepsilon(x) \in B(F(x), \varepsilon)\,,$$

de ilyet nem tudunk garantálni.

2. Az ε-szelekció létezése még zárt gráfú halmazértékű leképezések esetén sem jelenti a szelekció létezését, mert más-más $\varepsilon > 0$ esetén más-más $x \in X$ melletti $(x, f_\varepsilon(x))$ lesz közel $\operatorname{graph} F$-hez, ezért egy adott $x \in X$ esetén egy (ε_n) sorozat sorozat melletti $(f_{\varepsilon_n}(x))$ sorozat nem feltétlenül konvergens.

Az egységosztás

4.4.8. Definíció. Egy tetszőleges X halmazon értelmezett $f : X \to \mathbb{R}$ valós értékű függvény *tartója* (support):

$$\operatorname{supp} f \doteq \{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}\,.$$

Az a 2.2.6. definíció mintájára tetszőleges (X, d) metrikus térben is értelmezhető pont halmaztól vett távolsága.

4.4.9. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér és $A \subseteq X$ egy adott halmaz. Egy $x \in X$ pontnak a távolsága az A halmaztól:

$$d_A(x) \doteq \inf_{a \in A} d(x, a)\,.$$

Az A halmaztól való távolság függvénye: $d_A : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d_A(x)$.

4.4.10. Megjegyzés. A definícióból közvetlenül következnek az alábbi tulajdonságok:

1. $d_A(x) = d_{\operatorname{cl} A}(x)$
2. $x \in \operatorname{cl} A \ \Leftrightarrow \ d_A(x) = 0$, ezek szerint
   ha $A \subseteq X$ zárt halmaz, akkor $x \in A \ \Leftrightarrow \ d_A(x) = 0$.

Továbbá érvényben marad a 2.2.8. állítás is, a bizonyítása teljesen analóg módon megy.

4.4.11. Állítás. *A $d_A : X \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény Lipschitz-folytonos $\alpha = 1$ állandóval:*

$$\forall\, x,\ y \in X \ \textit{ esetén } \ |d_A(x) - d_A(y)| \le d(x, y)\,.$$

4.4.12. Definíció (egységosztás)**.** Egy (X, τ) topologikus tér *egységosztásának* nevezünk egy

$$\{f_\gamma \in [0,1]^X \ : \ \gamma \in \Gamma\}$$

függvényhalmazt (Γ tetszőleges nemüres indexhalmaz), ha

(1) $\forall\, \gamma \in \Gamma$ esetén az $f_\gamma : X \to [0,1]$ függvény folytonos,

(2) $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma = \mathbf{1}$,

(3) a $\{\operatorname{supp} f_\gamma \;:\; \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathscr{P}(X)$ halmazrendszer az X halmaz lokálisan véges lefedése: $\forall\, x \in X$ esetén véges sok $\gamma \in \Gamma$ kivételével $f_\gamma(x) = 0$.

(Emiatt a (2)-beli összeg minden egyes pontban véges sok tag összegét jelenti.)

4.4.13. Állítás (véges egységosztás)**.** *Legyen (X,d) metrikus tér, valamint $K \subseteq X$ nemüres, korlátos halmaz. Tegyük fel, hogy az $x_1,\dots,x_n \in K$ és $\delta_1,\dots,\delta_n > 0$ mellett*

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\delta_i)\,.$$

Ekkor $\exists\, \{g_i : K \to [0,1] \;:\; i = 1,\dots,n\}$ e fedésnek alárendelt véges egységosztása a $(K, d_{K\times K})$ metrikus térnek, ami azt jelenti, hogy

(1) $\forall\, i = 1,\dots,n$ esetén a $g_i : K \to [0,1]$ függvény folytonos,

(2) $\sum_{i=1}^{n} g_i = \mathbf{1}$,

(3) $\forall\, i = 1,\dots,n$ esetén $\operatorname{supp} g_i = B_K(x_i,\delta_i)$, azaz $g_i(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in B_K(x_i,\delta_i)$.

(Nyilván $\{\operatorname{supp} g_i \;:\; i = 1,\dots,n\} \subseteq \mathscr{P}(K)$ a K halmaz véges lefedése.)

Bizonyítás. Legyen $\forall\, i = 1,\dots,n$ esetén

$$d_i \doteq d_{K\setminus B_K(x_i,\delta_i)} : K \to \mathbb{R}\,, \quad \text{azaz} \quad \forall\, x \in K \text{ esetén } d_i(x) \doteq d_{K\setminus B_K(x_i,\delta_i)}(x)\,.$$

Előfordulhat, hogy valamelyik $K \setminus B_K(x_i,\delta_i) = \emptyset$, emiatt az üres halmaztól való távolságot jelen esetben értelmezzük a K korlátos halmaz átmérőjének: Legyen $\forall\, x \in K$ esetén

$$d_\emptyset(x) \doteq \operatorname{diam}(K)\,.$$

A 4.4.11. állítás szerint $\forall\, A \subseteq X$ esetén a $d_A : X \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény Lipschitz-folytonos, így $\forall\, i = 1,\dots,n$ esetén a $d_i : X \to \mathbb{R}$ függvény folytonos.
Mivel a $B_K(x_i,\delta_i) \subseteq K$ halmaz nyílt, így a $K \setminus B_K(x_i,\delta_i) \subseteq K$ halmaz zárt, ezért

$$d_{K\setminus B_K(x_i,\delta_i)}(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in K \setminus B_K(x_i,\delta_i)\,, \qquad \text{azaz} \qquad d_i(x) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in B_K(x_i,\delta_i)\,.$$

Mivel $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_K(x_i,\delta_i)$, ezért $\forall\, x \in K$ esetén $\sum_{i=1}^{n} d_i(x) > 0$. Legyen $\forall\, i = 1,\dots,n$ esetén

$$g_i \doteq \frac{d_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i} : K \to [0,1]\,.$$

A fentiek szerint:

(1) $\forall\, i = 1,\dots,n$ esetén a $d_i : X \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, így a $g_i : X \to [0,1]$ függvény folytonos,

(2) $\sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\sum_{j=1}^{n} d_j} = \mathbf{1}$,

(3) $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén $g_i(x) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; d_i(x) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in B_K(x_i, \delta_i)$.

□

A Cellina-féle approximációs szelekciós tétel

4.4.14. Állítás (Cellina-féle approximációs szelekciós tétel)**.** *Legyen (K,d) kompakt metrikus tér, $(Y, \|.\|)$ normált tér. Ha $F : K \to \mathscr{P}_{\mathrm{co}}(Y)$ nemüres konvex halmaz értékű, felső-Hausdorff-folytonos (speciálisan felső-Vietoris-folytonos) leképezés, akkor $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, f_\varepsilon : X \to Y$ folytonos ε-szelekciója:*

$$\operatorname{graph} f_\varepsilon \subseteq B_{X\times Y}(\operatorname{graph} F, \varepsilon)\,.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.
Mivel az $F : K \to \mathscr{P}_{\mathrm{co}}(Y)$ halmazértékű leképezés felső-Hausdorff-folytonos, ezért $\forall\, x \in K$ esetén $\exists\, 0 < \delta_x < \varepsilon$, amelyre $\forall\, z \in B(x, \delta_x)$ esetén

$$F(z) \subseteq B(F(x), \varepsilon)\,. \tag{4.7}$$

Mivel pedig a (K,d) kompakt metrikus térnek a $\{B(x, \delta_x/2) \;:\; x \in K\}$ halmazrendszer nyílt lefedése, ezért $\exists\, x_1, \ldots, x_n \in K$, hogy

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta_{x_i}/2)\,.$$

Ekkor az egységosztásra vonatkozó 4.4.13. állítás szerint a (K,d) kompakt metrikus térnek $\exists\, \{g_i : K \to [0,1] \;:\; i = 1, \ldots, n\}$ olyan egységosztása, amelyre

(1) $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén a $g_i : K \to [0,1]$ függvény folytonos,

(2) $\sum_{i=1}^{n} g_i = \mathbf{1}$,

(3) $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén a $g_i(x) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in B(x_i, \delta_{x_i}/2)$.

Legyen $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén $y_i \in F(x_i) (\neq \emptyset)$ tetszőleges. Legyen

$$f_\varepsilon \doteq \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot y_i : K \to Y\,,$$

azaz $\forall\, x \in K$ esetén

$$f_\varepsilon(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \cdot y_i = \sum_{g_i(x) \neq 0} g_i(x) \cdot y_i\,.$$

Mivel $\forall\, x \in K$ esetén $\forall\, i = 1, \ldots, n$ mellett $g_i(x) \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$, ezért

$$f_\varepsilon(x) \in \operatorname{co}\{y_1, \ldots, y_n\}\,, \quad \text{sőt} \quad f_\varepsilon(x) \in \operatorname{co}\{y_i \;:\; g_i(x) \neq 0\}\,. \tag{4.8}$$

Legyen ezek után $x \in K$ tetszőleges adott. Legyen k olyan index, amelyre

$$\delta_{x_k} = \max\{\delta_{x_i} \ : \ g_i(x) \neq 0, \ i = 1, \dots, n\}.$$

Ekkor $\forall\, i = 1, \dots, n$ esetén, amelyre $g_i(x) \neq 0$, azaz amelyre $x \in B(x_i, \delta_{x_i}/2)$, fennáll, hogy

$$d(x_i, x_k) \leq d(x_i, x) + d(x, x_k) \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} \leq 2 \cdot \frac{\delta_{x_k}}{2} = \delta_{x_k}, \qquad \text{azaz}$$

$$x_i \in B(x_k, \delta_{x_k}).$$

Emiatt (4.7) szerint $\forall\, i = 1, \dots, n$ esetén, amelyre $g_i(x) \neq 0$, teljesül, hogy

$$F(x_i) \subseteq B(F(x_k), \varepsilon), \ \text{ így } \ y_i \in \ B(F(x_k), \varepsilon).$$

Mivel az F konvex halmaz értékű leképezés, így az $F(x_k) \subseteq Y$ halmaz konvex, emiatt pedig a $B(F(x_k), \varepsilon) \subseteq Y$ halmaz is az, ezért (4.8) miatt

$$f_\varepsilon(x) \in \mathrm{co}\{y_i \ : \ g_i(x) \neq 0\} \subseteq B(F(x_k), \varepsilon).$$

Ezek szerint $\exists\, y \in F(x_k)$, hogy

$$d_Y(f_\varepsilon(x), y) = \|f_\varepsilon(x) - y\| < \varepsilon.$$

Ugyanakkor $x \in B(x_k, \delta_{x_k})$, azaz $d(x, x_k) < \delta_{x_k}$, ezért

$$\begin{aligned} d_{K\times Y}((x, f_\varepsilon(x)), \mathrm{graph}\, F) &\leq d_{K\times Y}((x, f_\varepsilon(x)), (x_k, y)) \\ &= \max\{d(x, x_k), d_{\|.\|}(f_\varepsilon(x), y)\} \\ &< \max\{\delta_{x_k}, \varepsilon\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ezek alapján $\forall\, x \in K$ esetén az $(x, f_\varepsilon(x))$ ponthoz $\exists\, x_k \in K$ és $\exists\, y \in F(x_k)$, hogy

$$d_{\max}((x, f_\varepsilon(x)), (x_k, y)) < \varepsilon,$$

ami éppen azt jelenti, hogy

$$\mathrm{graph}\, f_\varepsilon \subseteq B_{X\times Y}(\mathrm{graph}\, F, \varepsilon). \qquad \square$$

V.

A BROUWER-FÉLE FIXPONTTÉTEL

5.1. Bevezetés

Az alábbiakban a matematikai analízis egyik legalapvetőbb tételét, a Brouwer-féle fixponttételt bizonyítjuk be. E tétel a mindenki által tanult klasszikus analízis bevezető tételeihez képest határozottan nehezebb fajsúlyú nak számít, jóllehet maga a tétel kimondása abszolúte nem nehéz, amely a következő: *Legyen K egy véges dimenziós X euklideszi térnek nemüres konvex kompakt részhalmaza. Ekkor a K halmaz tetszőleges folytonos $f: K \to K$ transzformációjának van fixpontja, azaz olyan $x \in K$ pont, amelyre $f(x) = x$.*

Tehát ha például a sík egy körlapját egy folytonos leképezés önmagába transzformálja, akkor e transzformációnak van legalább egy fixpontja. (Egynél több már nincs is feltétlenül, gondoljunk pl. a középpont körüli valamilyen elforgatásra.) Az állítás körlap helyett négyzetlappal vagy háromszöglappal is igaz. De ugyanúgy igaz háromdimenzióban gömbre, kockára vagy tetraéderre, stb.

A bizonyításban lényegében a Harold W. Kuhn 1960-ban megjelent dolgozatában [15] szereplő, az elsősorban a formalizmus aspektusából való egyszerűséget és eleganciát megcélozó gondolatmenetet követjük. (Ez nem feltétlenül esik egybe a képi megjelenítéshez köthető gondolatmenet igényével!) Kuhn eredeti dolgozata érett matematikusok számára írt, tömör kombinatorikai nyelvezetű publikáció. Ehhez képest mi azt tekintjük elsődleges célunknak, hogy ez a Kuhn által valóban szépen kicsiszolt gondolat az undergraduális oktatásban megszokott, és abban potenciálisan használható kirészletezettséggel jelenjék meg, *de még inkább*, hogy mindezen túlmenően ne csak a kombinatorikában, de a matematikai analízisben szokásos igényesség is teret kapjon. Ki kell emelnünk, hogy egy oktatási anyagban a kombinatorikai igényesség *nem pótolja* az analízisbeli igényességet, pláne ha elsősorban a matematikai analízisben lépten-nyomon alkalmazott tételről van szó. A „steril" gráfelmélet tételei tehát bármennyire szépek, bennünket önmagukban nem fognak kihúzni a csávából. Ha azonban elég „ügyesek" vagyunk, akkor nem csak a kombinatorikai, de a „strukturális" nehézségeket is sikerülhet oly kicsire redukálnunk, hogy elkerüljük azon logikai csapdákat, amelyekbe különösen ezen a területen amúgy is nagyon könnyű beleesni.

Koncepciónk tehát elsődlegesen az, hogy a szemléletesen nyilvánvaló igazságokat a matematikai analízisben megszokott egzaktsági szinten jelenítsük meg a számunkra elérhető leglényegretörőbb módon; akár annak árán is, hogy e megjelenítés a maga helyén távol is kerüljön a konvencionális szemléletmódtól, és legalábbis e felépítés tartamára felül is írja a szimplexek hagyományos definícióját.

Azaz a hangsúly a szemlélettel való összhang átláthatóságáról *a formális egzaktság aspektusából való* átláthatóságra és eleganciára tevődik át. Fontos odafigyelnünk arra, hogy **ha** már egyáltalán annyi igaz, hogy **nem kínálja föl eleve magát** egy **a szemléletet követő természetes gondolatmenet**ű egzakt bizonyítás, akkor nincs is értelme a szemlélettel való összhangot erőltetnünk, sokkalta inkább olyan gondolatokat keresnünk, amelyek matematikailag ügyesen és egyszerűen megragadhatók.

Nem hallgathatjuk ugyanakkor el, hogy maga a „szemléletes" kifejezés is nagyon viszonylagos; a kialakult köztudatban leginkább „geometriailag látható”-t jelent, jóllehet sokkal inkább azt kellene szemléletesnek neveznünk, amely a nyiladozó gyermeki értelem számára leginkább megragadható. Tehát például a játékos logika „igen-nem”, „bal-jobb” nyelvezetét inkább lehetne szemléletesnek neveznünk, mint a fejlett térlátást. Ebből a szemszögből az alább tárgyalandó felépítés sokkal „szemléletesebb”, mint például a Sperner- és Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-lemmákra épülő, amúgy is jóval több logikai buktatóval járó út.

A tétel egydimenzióban persze banalitás: a klasszikus Bolzano-féle közbülsőponttétel egy variánsa csupán. Tanulságos lehet, ha az alább tárgyalandó felépítést valaki két dimenzióban, ábrákon szemléltetve külön is megvizsgálja. Ám mivel felépítésünk nem szemléletkövető, s a geometriai látásmód helyett az algebrai és relációelméleti nyelvezet hatékonyságát igyekszik kihasználni, nem érdemes a speciális esetekkel túl sokat vesződni. Ennek esetleg akkor nőhetne meg a szerepe, ha ezt a felépítést valamikor valamilyen módon „középiskolás fokon” is meg szeretnénk jeleníteni.

Zárjuk le bevezetésünket az egydimenziós esettel, amely a mi jelen aspektusunkból nem igazán érdemel külön alcímet. A számegyenes konvex kompakt részhalmazai éppen a korlátos zárt intervallumok.

5.1.1. Állítás. *Legyen $h : [a,b] \to [a,b]$ folytonos függvény. Ekkor h-nak van fixpontja, azaz létezik olyan $x \in [a,b]$ pont, amelyre $h(x) = x$.*

Bizonyítás. A $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := h(x) - x$$

függvény folytonos, továbbá $h(a), h(b) \in [a,b]$ alapján triviálisan $\varphi(a) \geq 0$ és $\varphi(b) \leq 0$. Így a Bolzano-tétel szerint van olyan $x \in [a,b]$ pont, amelyre $\varphi(x) = 0$; ezzel persze $h(x) = x$. □

5.2. Rendezés és szimplexek $\mathbb{Z}^n$-ben

E szakasz elején előrebocsátjuk, hogy a szimplexek (háromszögek, tetraéderek stb.) alábbi bevezetése messze nem a szokásos definíciót takarja; abból éppen csak annyit emel ki, amennyi elegendő lesz a Brouwer-tétel (relatíve) könnyed igazolásához. Az alábbiakban geometriai szemléletmódtól az algebrai irányába történő elmozdulás is az egzakt bizonyítás gördülékenységét szolgálja.

Legyen $n \in \mathbb{N}$. A továbbiakban $x \in \mathbb{R}^n$ esetén automatikusan

$$x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{bmatrix},$$

tehát az $x^{(j)}$ számok ($1 \leq j \leq n$) az x vektor komponensei. $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\widehat{\alpha} := \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \, .$$

5.2.1. Definíció. $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\begin{array}{rcc} x \leq y & \text{ha} & \forall 1 \leq j \leq n\text{-re } x^{(j)} \leq y^{(j)} \; ; \\ x < y & \text{ha} & x \leq y \quad \text{és} \quad x \neq y \qquad ; \\ x \ll y & \text{ha} & \forall 1 \leq j \leq n\text{-re } x^{(j)} < y^{(j)} \; . \end{array}$$

A fordított irányú relációkat természetszerűleg használjuk mint inverz relációkat. Az x vektor nemnegatív, ha $x \geq \widehat{0}$. x szemipozitív, ha $x > \widehat{0}$. x pozitív, ha $x \gg \widehat{0}$.

Innentől kezdve egy jó darabig $\mathbb{R}^n$ helyett a $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazban dolgozunk. ($\mathbb{Z}^n$ elemeinek neve: *rácspontok*.) A továbbiakban egy véges H halmaz elemszámát $|H|$-kel jelöljük.

5.2.2. Definíció. Egy $H \subseteq \mathbb{Z}^n$ halmazt *szimplex*nek mondunk, ha

- minden $x, y \in H$ esetén $x \leq y$ vagy $y \leq x$;
- van olyan $x \in H$, hogy minden $y \in H$-ra $x \leq y \leq x + \widehat{1}$.

Ha $0 < |H| = k$, akkor azt is mondjuk, hogy H egy $(k-1)$*-szimplex* $\mathbb{Z}^n$-ben.

5.2.3. Példa. $n = 2$ esetén a fenti definíció szerinti szimplexek mindig a rácspont csúcsú egységoldalú négyzetekben jelennek meg. Egy rácspont csúcsú egységnégyzetben négy 0-szimplex van: éppen a négyzet csúcsai; 1-szimplexből öt van: a négyzet oldalai és az $y = x$ egyenessel párhuzamos átlója. (Itt szakasz alatt persze a végpontjai halmazát értjük.) 2-szimplexből pedig kettő van: az a két háromszög, amely a négyzetből az $y = x$ egyenessel párhuzamos átlóval való szétvágáskor keletkezik. (Háromszög alatt is persze a csúcsai halmazát értjük.)

5.1. *Feladat.* Keressük meg az $n = 3$ esethez tartozó, egy rácspont csúcsú egységkockába eső szimplexeket! (0-szimplexből nyolc van, 1-szimplexből tizenkilenc, 2-szimplexből tizennyolc, míg 3-szimplexből hat.)

5.2.4. Megjegyzés. Mivel egy $H \subseteq \mathbb{Z}^n$ szimplex elemei rácspontok, ezért növekedés szerinti felsoroláskor H egy eleméről a következőre térve

1. mindig valamely komponens(ek)ben történik ugrás (egyszerre akár több komponensben is);

2. az $x \leq y \leq x + \widehat{1}$ feltétel miatt minden komponensben legfeljebb egyetlen lépés során jöhet szóba ugrás, mégpedig egységnyi ugrás;

3. H emiatt legfeljebb $n+1$ elemű (azaz n-szimplex).

5.2.5. Következmény. *Ha $H = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ n-szimplex, akkor szükségszerűen $x_n = x_0 + \widehat{1}$. Továbbá nincs olyan $1 \leq j \leq n$ index, hogy H minden elemének j-edik komponense ugyanaz a szám volna.(A szimplex elemeinek növekedés szerinti felsorolásakor minden lépésben más-más komponensben történik ugrás, s ez most az összes komponenst érinti.)*

5.2.6. Következmény. *Egy $\mathbb{Z}^n$-beli H $(n-1)$-szimplex esetén legfeljebb egyetlen olyan $1 \leq j \leq n$ index létezik, hogy H minden elemének j-edik komponense ugyanaz a szám. Ez pontosan akkor történik, ha H elemein növekedés szerint haladva minden lépésben egyetlen komponensben történik ugrás. (Az $n-1$ lépés ekkor nyilván érintetlenül hagy egy komponenst.) Ilyenkor H legnagyobb és legkisebb elemének különbsége $n-1$ komponensben 1, míg a fennmaradó komponensben 0. Ezesetben hívjuk a H $(n-1)$-szimplexet* másodrendűnek*. A másik eset az, hogy H elemein növekedés szerint haladva van olyan lépés, ahol* egyszerre két komponensben *történik ugrás; az összes többi lépésben pedig egy-egy komponensben. (Ekkor az ugrások összességében mind az n db komponenst érintik, tehát H elemei egyik komponensben sem alkotnak konstans n-hosszú sorozatot.) Ilyenkor szükségszerű, hogy H legnagyobb és legkisebb eleme közti különbség éppen $\widehat{1}$ legyen. Ezesetben mondjuk azt, hogy a H $(n-1)$-szimplex* elsőrendű.

Az $\mathbb{R}^n$-beli standard bázist (az egységmátrix oszlopaiból álló bázist) jelölje $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Persze e vektorok $\mathbb{Z}^n$-beliek is.

5.2.7. Állítás. *Legyen $H \subseteq \mathbb{Z}^n$ $(n-1)$-szimplex és $x = \min\limits_{\leq} H$. Ekkor H pontosan két különböző módon terjeszthető ki n-szimplexszé, továbbá az alábbi két eset közül pontosan az egyik teljesül:*

1. *$\max\limits_{\leq} H = x + \widehat{1}$. Ezesetben H elsőrendű $(n-1)$-szimplex, továbbá H-nak mindkét n-szimplexszé való kiterjesztésének legkisebb eleme x, legnagyobb pedig $x + \widehat{1}$.*

2. *van olyan $1 \leq j \leq n$ index, hogy $\max\limits_{\leq} H = x + \widehat{1} - e_j$. Ezesetben H másodrendű $(n-1)$-szimplex, továbbá H egyik n-szimplexszé való kiterjesztését $x + \widehat{1}$ hozzávételével nyerjük, a másikat pedig $x - e_j$ hozzávételével.*

Bizonyítás. Elegendő meggondolnunk, hogy H elsőrendűsége maga után vonja 1.-et, másodrendűsége pedig 2.-t (mindkét esetre kimutatva, hogy a kiterjesztés pontosan kétféleképpen történhet).

Ha H elsőrendű, akkor legyen $H = \{x_1 < \cdots < x_n\}$; H-nak ekkor van olyan x_ℓ eleme, hogy a sorban következő eleme $x_\ell + e_j + e_k$ alakú (alkalmas különböző $1 \leq j, k \leq n$

indexekkel). Így $H \cup \left\{x_\ell + e_j\right\}$ és $H \cup \{x_\ell + e_k\}$ két különböző n-szimplex. A fenti következmény értelmében $\max\limits_{\leq} H = x + \widehat{1}$. Ezért H-nak bármely n -szimplexszé való kiterjesztését x és $x + \widehat{1}$ fogja közre; így aztán növekedés szerinti első ℓ eleme is szükségszerűen ugyanaz, mint H-nak; és utolsó $n - \ell$ eleme is ugyanaz, mint H-nak. (Egészen egyszerűen nem fér közbe új rácspont.) No de x_ℓ és $x_\ell + e_j + e_k$ közé a már felsoroltakon kívül szintén nem illeszthető rácspont, így a felírt két n-szimplexszé való kiterjesztésen kívül nincs is több.

Ha H másodrendű, akkor a 2. pont első állítása a fenti következményből adódik. Persze, hogy ekkor $H \cup \{x\}$ és $H \cup \left\{x + \widehat{1}\right\}$ két különböző n-szimplexszé való kiterjesztés. Mivel H elemeit a legkisebb x-től a legnagyobb $x + \widehat{1} - e_j$-ig $n - 1$ db különböző komponensben való ugrással kapjuk meg, ezért közéjük nem fér újabb rácspont. Csak x alá vagy $x + \widehat{1}$ fölé. No de a szimplex definíciója miatt minden „új” rácspontnak is $x - e_j$ $(= \left(x + \widehat{1} - e_j\right) - \widehat{1})$ és $x + \widehat{1}$ közé kell esnie. Ilyenek tényleg csak $x - e_j$ és $x + \widehat{1}$, amelyekkel való kiterjesztéseket már fölírtuk. □

5.3. A nullkomponens-lemma

Jelölje tetszőleges $n, p \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{0, \ldots, p\}^n := \left\{x \in \mathbb{Z}^n : \widehat{0} \leq x \leq \widehat{p}\right\} .$$

$\{0, \ldots, p\}^n$ neve: *n-dimenziós p-kockarács*. A továbbiakban legyen $n, p \in \mathbb{N}$ rögzített.

5.3.1. Állítás. *Legyen $H \subseteq \{0, \ldots, p\}^n$ $(n-1)$-szimplex, $x = \min\limits_{\leq} H$ és $y = \max\limits_{\leq} H$. Ekkor az alábbi négy eset közül pontosan az egyik teljesül:*

1. *van olyan $1 \leq j \leq n$ index, hogy $y^{(j)} = 0$, ekkor persze minden $a \in H$-ra is $a^{(j)} = 0$. Továbbá H egyértelműen terjeszthető ki $\{0, \ldots, p\}^n$-ben fekvő szimplexszé, mégpedig $x + \widehat{1}$ hozzávételével.*

2. *van olyan $1 \leq j \leq n$ index, hogy $x^{(j)} = p$, ekkor persze minden $a \in H$-ra is $a^{(j)} = p$. Továbbá H megint csak egyértelműen terjeszthető ki $\{0, \ldots, p\}^n$-ben fekvő szimplexszé, mégpedig $y - \widehat{1}$ hozzávételével.*

3. *van olyan $1 \leq j \leq n$ index és $0 < q < p$ egész, hogy minden $a \in H$-ra $a^{(j)} = q$. Ekkor H-nak mindkét n-szimplexszé való kiterjesztése ($x + \widehat{1}$, illetve $y - \widehat{1}$ hozzávételével) $\{0, \ldots, p\}^n$-ben fekszik.*

4. *H elemeinek egyetlen $1 \leq j \leq n$ index mentén vett komponensei sem alkotnak konstanst. Ekkor is H-nak mindkét n-szimplexszé való kiterjesztése $\{0, \ldots, p\}^n$-ben fekszik.*

Bizonyítás. A fenti négy állítás első mondatai teljes esetfelsorolást alkotnak. Így csak azt kell igazolnunk, hogy mindegyik állítás első mondatából a többi is következik.

1.: mivel H elemei nemnegatívak és y köztük a legnagyobb, ezért valóban minden $a \in H$-ra is $a^{(j)} = 0$. Ezzel viszont H másodrendű $(n-1)$-szimplex. A legutóbbi állítás 2. pontja alapján ekkor H egyik n-szimplexszé való kiterjesztése egy $x - e_j$ alakú vektor hozzávételével történik, ami nincs $\{0,\ldots,p\}^n$-ben. A másik kiterjesztés viszont $x + \widehat{1}$ hozzávételével történik, ami eleme $\{0,\ldots,p\}^n$-nek. Így H-nak egyetlenegy olyan n-szimplexszé való kiterjesztése létezik, amely $\{0,\ldots,p\}^n$-ben fekszik.

2.: ez a $\widehat{p} - H$ szimplexre az előző eset; márpedig az $M \mapsto \widehat{p} - M$ involúció k-szimplexnek k-szimplexet feleltet meg (és fordítja a rendezést).

3.: Ekkor $0 < q < p$ miatt $x - e_j,\ y + e_j \in \{0,\ldots,p\}^n$. No de H megint csak másodrendű, így a legutóbbi állítás 2. pontja alapján $y = \max_{\leq} H = x + \widehat{1} - e_j$, azaz $x + \widehat{1} = y + e_j \in \{0,\ldots,p\}^n$. Emiatt H mindkét n-szimplexszé való kiterjesztése $\{0,\ldots,p\}^n$-ben fekszik. (S ekkor persze $y - \widehat{1} = x - e_j$.)

4.: Az előző szakasz második következménye alapján H elsőrendű. Így a legutóbbi állítás 1. pontja alapján $y = \max_{\leq} H = x + \widehat{1}$. Ezzel $x,\ x + \widehat{1} \in \{0,\ldots,p\}^n$, így ugyanezen 1. pontra hivatkozva H-nak mindkét n-szimplexszé való kiterjesztése $\{0,\ldots,p\}^n$-ben fekszik. □

5.3.2. Definíció. Legyen $H \subseteq \{0,\ldots,p\}^n$ $(n-1)$-szimplex. Ha H a fenti állítás 1. pontjának felel meg, akkor $\{0,\ldots,p\}^n$-beli *alsó határmintá*nak, ha a 2. pontnak felel meg, akkor $\{0,\ldots,p\}^n$-beli *felső határmintá*nak nevezzük, ha pedig az állítás 3. vagy 4. pontjának felel meg, akkor $\{0,\ldots,p\}^n$-beli *belső mintá*nak hívjuk.

Tehát egy $\{0,\ldots,p\}^n$-beli $(n-1)$-szimplex vagy határminta, vagy belső minta; továbbá egy $\{0,\ldots,p\}^n$-beli határminta *pontosan egyetlen* $\{0,\ldots,p\}^n$-beli n-szimplexnek lesz részhalmaza, egy $\{0,\ldots,p\}^n$-beli belső minta pedig *pontosan két különböző* $\{0,\ldots,p\}^n$-beli n-szimplexhez tartozik.

5.3.3. Megjegyzés. Legyen $f : \{0,\ldots,p\}^n \to \{0,1\}^n$. Ekkor nyilvánvalóan ekvivalensek az alábbiak:

1. a $g(x) := x - 2f(x) + \widehat{1}$ hozzárendelésre $g(\{0,\ldots,p\}^n) \subseteq \{0,\ldots,p\}^n$;
2. minden $x \in \{0,\ldots,p\}^n$ esetén $\frac{x+\widehat{1}-\widehat{p}}{2} \leq f(x) \leq \frac{x+\widehat{1}}{2}$;
3. ha valamely $x \in \{0,\ldots,p\}^n$ valamely komponense 0, akkor $f(x)$ megfelelő komponense is 0; hasonlóan ha valamely $x \in \{0,\ldots,p\}^n$ valamely komponense p, akkor $f(x)$ megfelelő komponense 1.

E 3. pont szemléletes tartalma az, hogy az x rácspont valahányszor a $\{0,\ldots,p\}^n$ kockarácsnak megfelelő kocka valamely extremális részhalmazára (ami $n = 1$ esetben a szakaszvégpontokat, $n = 2$ esetben a négyzet csúcsait és oldalait, $n = 3$ esetben a kocka csúcsait, éleit és lapjait jelenti stb.) illeszkedik, akkor $f(x)$ is az egységkocka megfelelő extremális részhalmazába esik.

5.3.4. Definíció. Egy $f:\{0,\dots,p\}^n \to \{0,1\}^n$ függvényt *illeszkedő*nek mondunk, ha minden $x \in \{0,\dots,p\}^n$-re

$$\frac{x+\widehat{1}-\widehat{p}}{2} \le f(x) \le \frac{x+\widehat{1}}{2}$$

(azaz a fenti megjegyzés 1., 2. 3. pontjainak bármelyike teljesül).

A szakasz fő technikai lemmájához szükségünk lesz egy fontos kombinatorikai észrevételre:

5.3.5. Megjegyzés (transzparitás elve)**.** Legyenek A,B véges halmazok és $\mathscr{R} \subseteq A \times B$ reláció. Ekkor az

$$A_1 := \{a \in A : \{b \in B : a\mathscr{R}b\} \text{ páratlan}\}$$

$$B_1 := \{b \in B : \{a \in A : a\mathscr{R}b\} \text{ páratlan}\}$$

halmazok azonos paritásúak.

Bizonyítás. n db páratlan szám összege n-nel azonos paritású; n db páros szám összege pedig páros. Emiatt $\mathscr{R} \cap (A_1 \times B)$ azonos paritású A_1-gyel, $\mathscr{R} \cap ((A \setminus A_1) \times B)$ pedig páros. Ezért A_1 azonos paritású $\mathscr{R}$-rel. Ugyanígy B_1 azonos paritású $\mathscr{R}^{-1}$-gyel. No de $\mathscr{R}$ és $\mathscr{R}^{-1}$ elemszáma azonos. □

5.3.6. Lemma (nullkomponens-lemma)**.** *Legyen* $f:\{0,\dots,p\}^n \to \{0,1\}^n$ *illeszkedő függvény. Jelölje* $x \in \{0,\dots,p\}^n \setminus \left\{\widehat{0}\right\}$ *esetén*

$$N(x) := \min\left\{1 \le j \le n : x^{(j)} \ne 0\right\} - 1$$

és $N\left(\widehat{0}\right) := n$. *(Tehát* $N(x)$ *azt méri, hogy az* x *mint szám-*n*-es hány* 0*-val kezdődik.* $N(x)$ *pontosan akkor* 0*, ha* x *nem* 0*-val kezdődik.) Ekkor*

$$\{H \subseteq \{0,\dots,p\}^n : H \text{ egy } n\text{-szimplex és } N(f(H)) = \{0,1,\dots,n\}\}$$

páratlan elemszámú halmaz.

Bizonyítás. n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Az $n=1$ eset a következő: a $0,\dots,p$ egész számok mindegyikére ráírjuk a 0 és az 1 számok valamelyikét úgy, hogy a 0-ra 1-et írunk, a p-re pedig 0-t. (Azért fordítva, mert N most éppen megcseréli a 0-t és az 1-et.) Azt kell látnunk, hogy azon egységszakaszok száma páratlan, amelyek egyik végpontjára 0, a másikra pedig 1 van írva. Pásztázzuk végig 0-tól p-ig az egészeket, azon szempontból, hogy 0 vagy 1 van-e rájuk írva. Számunkra az osztószakaszok közül pont azok az érdekesek, ahol váltás történik a címkében. Ám 1-gyel indítva csak úgy juthatunk 0-val való befejezéshez, ha közben *páratlan sokszor* váltottunk. Nota bene: a keresett szakaszok száma tényleg páratlan.

Most tegyük föl, hogy az állítás $n-1$-re igaz, és ebből bizonyítsunk n-re ($n > 1$).

Legyen $f : \{0,\dots,p\}^n \to \{0,1\}^n$ illeszkedő függvény. Tetszőleges $1 \le k \le n$ esetén nevezzünk egy $H \subseteq \{0,\dots,p\}^n$ k-szimplexet f-*teljes*nek, ha

$$N(f(H)) = \{0,1,\dots,k\} .$$

Emiatt az állításban szereplő halmazrendszer éppen az f-teljes n-szimplexek összessége. Először gondoljuk meg, hogy ha egy $\{0,\dots,p\}^n$-beli H n-szimplexen $N \circ f$ nem injektív, akkor a H-ban fekvő f-teljes $(n-1)$-szimplexek száma páros. Valóban, ezesetben van két különböző $x, y \in H$, hogy $N(f(x)) = N(f(y))$. H-nak persze így $\{x,y\}$-t tartalmazó részhalmazai között nincs f-teljes, ezért H-ban f-teljes $(n-1)$-szimplex csak $H \setminus \{x\}$ és $H \setminus \{y\}$ közül kerülhet ki. Igen ám, de $N(f(x)) = N(f(y))$ miatt

$$N(f(H \setminus \{x\})) = N(f(H)) = N(f(H \setminus \{y\})) .$$

Így $H \setminus \{x\}$ és $H \setminus \{y\}$ közül vagy mindkettő f-teljes, vagy egyikük sem. Azaz tényleg ilyenkor a H-ban fekvő f-teljes $(n-1)$-szimplexek száma vagy 2, vagy 0.

Ha most $H \subseteq \{0,\dots,p\}^n$ olyan n-szimplex, amely páratlan sok f-teljes $(n-1)$-szimplexet tartalmaz, akkor a fentiek miatt $N \circ f$ injektív H-n, azaz H triviálisan f-teljes. Megfordítva, ha H-ról azt tesszük föl, hogy f-teljes n-szimplex, akkor persze pontosan egyetlen f-teljes $(n-1)$-szimplexet tartalmaz.

Összefoglalva: egy $\{0,\dots,p\}^n$-beli n-szimplex pontosan akkor f-teljes, ha páratlan sok f-teljes $(n-1)$-szimplexet tartalmaz. Alkalmazzuk most a fenti megjegyzést a $\{0,\dots,p\}^n$-beli n-szimplexek A halmazára, a $\{0,\dots,p\}^n$-beli f-teljes $(n-1)$-szimplexek B halmazára és azon $\mathscr{R} \subseteq A \times B$ relációra, amelyre minden $(H,K) \in A \times B$ esetén

$$H \mathscr{R} K \iff K \subseteq H .$$

A legutóbb kapottak éppen azt jelentik, hogy a megfelelő A_1 halmazt éppen az f-teljes n-szimplexek alkotják. A határminták definíciója után közvetlenül írtak szerint viszont a megfelelő B_1 halmaz éppen a $\{0,\dots,p\}^n$-beli f-teljes *határ*minták összessége. E két halmazrendszer a transzparitás elve szerint azonos paritású; tehát most már elegendő megmutatnunk, hogy a $\{0,\dots,p\}^n$-beli f-teljes határminták száma páratlan.

Először is gondoljuk meg, hogy az alsó határminták nincsenek B_1-ben. Legyen ugyanis H egy alsó határminta. Ekkor van olyan $1 \le j \le n$ index, hogy H elemeinek a j-edik komponense 0. f illeszkedő volta miatt ekkor $f(H)$ elemeinek j-edik komponense is 0. Ezért $f(H)$ egyetlen eleme sem kezdődhet *pontosan* $j-1$ db 0-val, azaz $j-1 \notin N(f(H))$, amiért is H nem f-teljes. Tehát az alsó határminták között nincs f-teljes.

Most már tehát csak az f-teljes felső határminták között válogatunk. Legyen H egy f-teljes felső határminta. Ekkor van olyan $1 \le j \le n$ index, hogy H elemeinek a j-edik komponense p. Innen f illeszkedő volta miatt $f(H)$ elemeinek j-edik komponense 1. No de az f-teljesség miatt $f(H)$-nak olyan eleme is van, amelynek az első $n-1$ komponense 0. Így szükségképp $j = n$. Tehát azt kaptuk, hogy az f-teljes felső határminták minden elemének n-edik komponense p.

Jelölje most $\widehat{f} : \{0,\ldots,p\}^{n-1} \to \{0,1\}^{n-1}$,

$$\widehat{f}(x) := \begin{bmatrix} \left[f\left(\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}\right)\right]^{(1)} \\ \left[f\left(\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}\right)\right]^{(2)} \\ \vdots \\ \left[f\left(\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}\right)\right]^{(n-1)} \end{bmatrix} .$$

E definíció szerint magától értetődően $\widehat{f}$ egy az $n-1$ esetnek megfelelő illeszkedő függvény. Továbbá az f-teljes felső határmintákra legutóbb látottak miatt azonnal adódik, hogy H pontosan akkor f-teljes felső határminta, ha $H = K \times \{p\}$ alakú, ahol K $\widehat{f}$-teljes $(n-1)$-szimplex. Tehát az f-teljes felső határminták száma azonos az $\widehat{f}$-teljes $(n-1)$-szimplexek számával. Az indukciós feltétel miatt e szám páratlan; ezért B_1 páratlan elemszámú halmaz. Így a transzparitás elve szerint A_1 is páratlan, azaz az f-teljes n-szimplexek valóban páratlan sokan vannak. □

5.3.7. Lemma (Kuhn-Sperner)**.** *Legyen $f : \{0,\ldots,p\}^n \to \{0,1\}^n$ illeszkedő függvény. Ekkor van olyan $H = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\} \subseteq \{0,\ldots,p\}^n$ n-szimplex, amelyre*

$$\widehat{0} \ll f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_n) \ll \widehat{n+1} .$$

Bizonyítás. Az előző lemma jelöléseit használva, maga a lemma miatt az $N(f(H)) = \{0,1,\ldots,n\}$ tulajdonságú H n-szimplexek száma páratlan. Tehát létezik legalább egy ilyen tulajdonságú H n-szimplex. Gondoljuk meg, hogy ez teljesíti az állításban foglaltakat. Tetszőleges $1 \le k \le n$ egészre a fentiek szerint az $n+1$ elemű $f(H)$-nak $n-k+1$ eleme legalább k db 0-val kezdődik, azaz legalább $n-k+1$ elemnek lesz a k-adik komponense 0. Így $\sum\limits_{x\in H} f(x)$ k-adik komponense legfeljebb k (hiszen $f(H)$ elemei csupa 0-1 rácspontok). Ezért $\sum\limits_{x\in H} f(x) \ll \widehat{n+1}$. Ugyanakkor minden $1 \le k \le n$ mellett $k-1 \in N(f(H))$ miatt van olyan $z \in f(H)$, amelynek k-adik komponense 1. Ezért $\sum\limits_{x\in H} f(x)$ k-adik komponense legalább 1. Azaz $\sum\limits_{x\in H} f(x) \ge \widehat{1} \gg \widehat{0}$. □

5.4. A Brouwer-tétel az n-dimenziós kockára

Az alábbiakban legyen

$$[0,1]^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \widehat{0} \le x \le \widehat{1} \right\}$$

az n-dimenziós egységkocka. Innentől kezdve ismertnek tételezzük fel az euklideszi norma és távolság, valamint a gömbök, a környezetek, nyílt, zárt, korlátos és kompakt halmazok, korlátos és konvergens sorozatok fogalmát, továbbá az euklideszi terekre vonatkozó Bolzano-Weierstraß-féle kiválasztási tételt. Azt is ismertnek tételezzük föl, hogy $\mathbb{R}^n$-ben a természetes euklideszi struktúra mellett $[0,1]^n$ kompakt halmaz. Mindezeken túlmenően, ismertnek tételezzük föl az euklideszi terek közötti függvények folytonosságának fogalmát, az ahhoz kapcsolódó legelemibb ismeretekkel (formális szabályok, nívóhalmazok nyíltsága, zártsága, átviteli elv, kompakt halmazok képe) együtt.

5.4.1. Tétel (Brouwer)**.** *Legyen $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ folytonos függvény. Ekkor f-nek létezik $x \in [0,1]^n$ fixpontja.*

Bizonyítás. Tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ mellett jelölje $g_p : \{0,\dots,p\}^n \to \{0,1\}^n$,

$$\left(g_p(x)\right)^{(j)} := \begin{cases} 0 \quad \text{ha} \quad \left(f\left(\frac{x}{p}\right)\right)^{(j)} \geq \frac{x^{(j)}}{p} \neq 1\,; \\ \\ 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{egyébként.} \end{cases}$$

Innen tüstént látszik, hogy az $x \mapsto x - 2g_p(x) + \widehat{1}$ hozzárendelés a $\{0,\dots,p\}^n$ kockarácsot önmagába képezi. Tehát g_p illeszkedő függvény. A Kuhn-Sperner-lemma miatt ekkor van olyan $H_p \subseteq \{0,\dots,p\}^n$ n-szimplex, amelyre

$$\widehat{0} \ll \sum_{x \in H_p} g_p(x) \ll \widehat{n+1}\,.$$

Jelölje H_p legkisebb elemét x_p, legnagyobb elemét pedig y_p. Ezt minden p-re elvégezve nyerjük az $\left(x_p\right)$ és $\left(y_p\right)$ sorozatokat. Ekkor $\left(\frac{x_p}{p}\right) \subseteq [0,1]^n$ miatt a Bolzano-Weiersrtaß-féle kiválasztási tétel alapján van olyan szigorúan növő (p_k) indexsorozat és $x_* \in [0,1]^n$ vektor, hogy az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben $\frac{x_{p_k}}{p_k}$ tart x_*-hoz. Innen $y_{p_k} = x_{p_k} + \widehat{1}$ alapján $\frac{y_{p_k}}{p_k}$ is tart x_*-hoz.

Indirekt tegyük föl, hogy $f(x_*) \neq x_*$, azaz valamely $1 \leq j \leq n$ indexre $(f(x_*))^{(j)} \neq x_*^{(j)}$.

Ha most $(f(x_*))^{(j)} < x_*^{(j)}$, akkor f folytonossága miatt x_*-nak egy $\delta > 0$ sugarú $[0,1]^n$-beli környezetében levő x-ekre is $(f(x))^{(j)} < x^{(j)}$. Ugyanakkor $\frac{x_{p_k}}{p_k} \to x_*$ és $\frac{y_{p_k}}{p_k} \to x_*$ alapján egy k_0 index után $\frac{x_{p_k}}{p_k}$ és $\frac{y_{p_k}}{p_k}$ az x_* $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$ sugarú környezetébe esik, s mivel $\frac{1}{p_k} \cdot H_{p_k}$ minden elemét ezek fogják közre, ezért $k \geq k_0$ esetén az egész $\frac{1}{p_k} \cdot H_{p_k}$ a δ sugarú környezetben fekszik. Emiatt minden $k \geq k_0$ és $x \in H_{p_k}$ esetén

$$\left(f\left(\frac{x}{p_k}\right)\right)^{(j)} < \left(\frac{x}{p_k}\right)^{(j)},$$

azaz $\left(g_{p_k}(x)\right)^{(j)} = 1$. Eszerint viszont

$$\left(\sum_{x\in H_{p_k}} g_{p_k}(x)\right)^{(j)} = n+1 \ ,$$

ellentétben a H_{p_k} halmazok $\sum_{x\in H_{p_k}} g_{p_k}(x) \ll \widehat{n+1}$ tulajdonságával.

Ha pedig $(f(x_*))^{(j)} > x_*^{(j)}$, akkor a fentihez teljesen hasonló módon az adódik, hogy egy index után

$$\left(\sum_{x\in H_{p_k}} g_{p_k}(x)\right)^{(j)} = 0 \ ,$$

ellentétben a H_{p_k} halmazok $\sum_{x\in H_{p_k}} g_{p_k}(x) \gg \widehat{0}$ tulajdonságával. Tehát mégis $f(x_*) = x_*$.

□

5.4.2. Definíció. Legyen X euklideszi tér. Egy $H \subseteq X$ halmazt n-dimenziós *paralelepipedon*nak nevezünk, ha van olyan $A : \mathbb{R}^n \to X$ injektív lineáris leképezés és $y \in X$, hogy $H = y + A([0,1]^n)$.

Egy paralelepipedon nyilván konvex és kompakt halmaz.

5.4.3. Következmény. *Legyen X euklideszi tér és $H \subseteq X$ (valamilyen dimenziós) paralelepipedon. Ekkor tetszőleges $f : H \to H$ folytonos függvénynek létezik $x \in H$ fixpontja.*

Bizonyítás. Kölcsönvéve a fenti definíció jelöléseit, alkalmazzuk az előző tételt a $h(x) := A^{-1}(f(y+Ax) - y)$ függvényre, használva a lineáris leképezések folytonosságát. □

5.5. A Brouwer-tétel legklasszikusabb alakjai

Az eddigieken túl innét ismertnek tételezzük föl az euklideszi térbeli véges ortonormált rendszerek és bázisok fogalmát és az ortonormált bázisokra vonatkozó Parseval-formulát, a halmazoktól vett távolságot, valamint Riesz Frigyes legközelebbipont-tételét és az ún. tompaszög-lemmát: *egy véges dimenziós X euklideszi térben egy nemüres konvex zárt M halmaznak tetszőleges $x \in X$ vektorhoz (egyértelműen) létezik legközelebbi $P_M(x)$ pontja. Ezzel tetszőleges $y \in M$ mellett $\langle y - P_M(x) \mid x - P_M(x)\rangle \leq 0$.*

A továbbiakban legyen X véges dimenziós euklideszi tér.

5.5.1. Állítás. *Tetszőleges $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex zárt halmaz esetén a $P_M : X \to M$, $x \mapsto P_M(x)$ leképezés folytonos.*

Bizonyítás. Tetszőleges $x, y \in X$ esetén a tompaszög-lemmát is használva,

$$\begin{aligned}
\|y - P_M(x)\|^2 &= \\
&= \|(y - P_M(y)) - (P_M(x) - P_M(y))\|^2 = \\
&= \|y - P_M(y)\|^2 - 2\langle y - P_M(y) \mid P_M(x) - P_M(y)\rangle + \\
&+ \|P_M(x) - P_M(y)\|^2 \geq \\
&\geq \|y - P_M(y)\|^2 + \|P_M(x) - P_M(y)\|^2 \ ,
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
\|P_M(x) - P_M(y)\|^2 &\leq \|y - P_M(x)\|^2 - \|y - P_M(y)\|^2 \leq \\
&\leq (d(x,M) + \|y - x\|)^2 - d^2(y,M) \ ,
\end{aligned}$$

tehát $\|y - x\| \leq d(x,M)$ esetén

$$\begin{aligned}
\|P_M(x) - P_M(y)\|^2 &\leq (d(x,M) + \|y - x\|)^2 - (d(x,M) - \|y - x\|)^2 \\
&\leq 4d(x,M) \cdot \|y - x\| \ ;
\end{aligned}$$

míg $\|y - x\| > d(x,M)$ esetén triviálisan

$$\|P_M(x) - P_M(y)\|^2 \leq (2\|y - x\|)^2 = 4\|y - x\|^2 \ ;$$

tehát mindegyik esetben

$$\|P_M(x) - P_M(y)\|^2 \leq 4d(x,M) \cdot \|y - x\| + 4\|y - x\|^2 \ .$$

Ebből már azonnal adódik a P_M függvény x-beli folytonossága. □

5.5.2. Megjegyzés. Legyen $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \subseteq X$ ortonormált bázis. Jelölje $U : \mathbb{R}^n \to X$ azt az unitér leképezést, amely az $\mathbb{R}^n$ tér standard bázisvektorainak rendre az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vektorokat felelteti meg. Jelölje $c = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{2}$. Azonnal látszik, hogy a $H := U([0,1]^n)$ paralelepipedon tartalmazza a $B\left(c, \frac{1}{2}\right)$ euklideszi gömböt. (Ugyanis a gömb tetszőleges pontjának az adott bázisra vonatkozó bármely koordinátája triviálisan 0 és 1 közé esik.) Innen alkalmas eltolással és nagyítással adódik, hogy tetszőleges $K \subseteq X$ korlátos halmaz belefoglalható egy X-beli paralelepipedonba.

5.5.3. Tétel (Brouwer)**.** *Legyen $K \subseteq X$ nemüres konvex kompakt halmaz és $f : K \to K$ folytonos függvény. Ekkor f-nek létezik $x \in K$ fixpontja.*

Bizonyítás. Foglaljuk be a K halmazt egy $H \subseteq X$ paralelepipedonba. Mivel P_K folytonos, ezért az $f \circ P_K$ függvény H-ra való leszűkítése egy folytonos $H \to H$ transzformáció. A paralelepipedonokra vonatkozó, már igazolt Brouwer-tétel (a legutóbbi következmény) miatt e folytonos transzformációnak van fixpontja. Azaz létezik $x \in H$ pont, hogy $x = f(P_K(x))$. No de f értékei K-ból valók, ezért $x \in K$. Emiatt viszont $P_K(x) = x$. Azaz $x = f(x)$. □

A továbbiakban legyen $\mathscr{B}$ az X tér zárt egységgömbje és S ennek felülete, azaz az X-beli egységszféra.

5.5.4. Tétel (Bohl). *Tetszőleges $f : \mathscr{B} \to X$ folytonos függvénynek vagy van $\mathscr{B}$ belsejében fixpontja, vagy van olyan $x \in S$ pont és $0 < \alpha \leq 1$ szám, hogy $x = \alpha \cdot f(x)$.*

Bizonyítás. $P_{\mathscr{B}} \circ f$ folytonos transzformációja a $\mathscr{B}$ konvex kompakt halmaznak. Így a Brouwer-tétel szerint van olyan $x \in \mathscr{B}$ pont, amelyre $x = P_{\mathscr{B}}(f(x))$. Ha most $\|x\| = \|P_{\mathscr{B}}(f(x))\| < 1$, akkor $f(x)$ nem lehet a $\mathscr{B}$ halmazon kívül, tehát $P_{\mathscr{B}}(f(x)) = f(x)$, így x valóban a $\mathscr{B}$ belsejében fekvő fixpontja f-nek. Ha pedig $x = P_{\mathscr{B}}(f(x)) \in S$, akkor triviálisan $\|f(x)\| \geq 1$ és

$$x = P_{\mathscr{B}}(f(x)) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|},$$

így az $\alpha = \frac{1}{\|f(x)\|}$ választás igazolja is állításunkat. □

5.5.5. Tétel (Borsuk). *Nincs olyan $f : \mathscr{B} \to S$ folytonos függvény, amelyre $f_{|S} = \mathrm{id}_S$ teljesülne.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy mégis létezik egy a szóbanforgó tulajdonságú f. Ekkor formálisan $-f : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ folytonos függvény, amelynek a Brouwer-tétel miatt van egy $x \in \mathscr{B}$ fixpontja. A $-f(x) = x$ feltétel miatt persze $x \in S$, ahonnan $-x = x$, azaz $x = \mathbf{0}_X$, ami ellentmondás. □

A Borsuk-tétel szerint tehát például egy tömör gömb nem vetíthető rá folytonosan a felületére (azaz nem képezhető rá a felületre folytonosan úgy, hogy a felület minden pontja helyben maradjon). Ezzel a matematikai analízisben szokásos egzaktsági szinten mutattuk meg azon szemléletesen nyilvánvaló, sőt a szemléletben tautológiává olvadó tényt, miszerint egy tömör anyagban egy lyuk képződése nem írható le folytonos függvénnyel. A fenti tényt egyébként úgy is ki szokták fejezni, hogy egy véges dimenziós euklideszi térbeli gömb felülete *nem retraktuma* magának a gömbnek.

5.5.6. Megjegyzés. A legutóbbi megállapítások annál is inkább érdekesek, mert végtelen dimenziós terekben már nem maradnak érvényben, jóllehet rendszerint e terek vizsgálatakor is szemléletünk vezérfonalát szoktuk követni. Az alábbi példa szépen mutatja, hogy nagyon is helytelenül. Alaposan számot kell hát vetnünk azzal, hogy a szemléletünk mikor jelent számunkra mankót és mikor korlátot.

5.5.7. Példa. Tekintsük a négyzetesen felösszegezhető valós sorozatok ℓ^2 vektorterét, amely a szokásos skalárszorzattal közismerten valós Hilbert-tér. Legyen a ℓ^2 Hilbert-tér egységgömbje $\mathscr{B}$. Jelölje $\mathbf{x} \in \mathscr{B}$,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots \quad \dots \quad)$$

esetén

$$f(\mathbf{x}) := \left(\sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}, x_1, x_2, x_3, \dots \quad \dots \quad \right).$$

Ezzel definiáltunk egy $f : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ transzformációt. f nyilván folytonos. Indirekt tegyük föl, hogy f-nek van egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots \quad)$ fixpontja. Ekkor persze $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, ami a definíció alapján azt vonja maga után, hogy az (x_j) sorozat konstans. Ez a négyzetes felösszegezhetőség miatt azzal egyenértékű, hogy mindegyik $x_j = 0$. No de ekkor $\|\mathbf{x}\| = 0$, ahonnan szintén $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ miatt

$$x_1 = \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2} = 1 \ ,$$

ami ellentmondás. Tehát f-nek nincs fixpontja. (Azaz az ℓ^2 egységgömbjére nem működik a Brouwer-tétel.) Namost jelölje $g : \mathscr{B} \to X$,

$$g(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})\|^2} \cdot (\mathbf{x} - f(\mathbf{x})) \ .$$

Persze g folytonos és $\|\mathbf{x}\| = 1$ esetén $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Az $f(\mathbf{x}) = 1$ azonosság segítségével leellenőrizhető, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathscr{B}$ esetén $\|g(\mathbf{x})\| = 1$. Legyen S a $\mathscr{B}$ egységgömb felülete. Ezzel $g : \mathscr{B} \to S$ folytonos retrakció. Létezik tehát folytonos „lyukképződés”, még ha véges dimenzióban nem is!

Véges dimenzióban a következő tétel is igaz (a fenti példa szerint végtelen dimenzióban már nem):

5.5.8. Tétel. *Ha $f : \mathscr{B} \to X$ olyan folytonos függvény, amely az S szférát bijektíven képezi sajátmagára, akkor $\mathscr{B} \subseteq f(\mathscr{B})$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük föl, hogy van olyan $y \in \mathscr{B}$ pont, amely nincs f értékkészletében. Persze $f(S) = S$ miatt $\|y\| < 1$. Jelölje ekkor $t : \mathscr{B} \to \mathbb{R}_+$,

$$t(x) := \frac{\langle y \mid y - f(x)\rangle + \sqrt{\langle y \mid y - f(x)\rangle^2 + \|y - f(x)\|^2 \cdot \left(1 - \|y\|^2\right)}}{\|y - f(x)\|^2} \ .$$

Ez persze folytonos függvénye x-nek. A másodfokú egyenlet megoldóképlete értelmében nyilván minden $x \in \mathscr{B}$ mellett $t = t(x)$ egyértelmű megoldása az

$$(1) \qquad \begin{cases} \|y + t \cdot (f(x) - y)\|^2 & = & 1 \\ t & > & 0 \end{cases}$$

feltételrendszernek. Így persze minden $x \in \mathscr{B}$ esetén $\|y + t(x) \cdot (f(x) - y)\| = 1$, azaz $g : \mathscr{B} \to S$,

$$g(x) := y + t(x) \cdot (f(x) - y)$$

folytonos függvény. Namost $x \in S$ esetén $\|f(x)\| = 1$ és így

$$\|y + 1 \cdot (f(x) - y)\|^2 = 1,$$

ahonnan az (1) feltételrendszerre megfogalmazott egyértelműség miatt szükségképp $t(x) = 1$, innen azonnal

$$g(x) = y + 1 \cdot (f(x) - y) = f(x) \ ,$$

azaz $g_{|S} = f_{|S}$. Namost legyen h az $f_{|S}$ bijekció folytonos $S \to S$ inverze. Ekkor $h \circ g$: $\mathscr{B} \to S$ olyan folytonos függvény, amelyre $(h \circ g)_{|S} = \mathrm{id}_S$, ami ellentmondásban áll Borsuk tételével. □

5.5.9. Megjegyzés. A legutóbbi tétel triviálisan implikálja Borsuk tételét. E legutóbbi tétel bizonyításához hasonlóan egyszerűen adódik (a fenti képletekben $f(x)$ helyébe x-et, majd y helyébe $f(x)$-et írva), hogy Borsuk tétele is elemi módon implikálja Brouwer tételét, legalábbis a $\mathscr{B}$ halmazon. Innen persze tetszőleges $K \subseteq \mathscr{B}$ konvex kompakt halmazra is adódik a Brouwer-tétel, a legutóbbit az $f \circ P_K$ függvényre alkalmazva.

5.5.10. Megjegyzés. A legutóbbi tételnél talán elsőre azt gondolnánk, hogy egy f : $\mathscr{B} \to X$ folytonos függvénynél az $S \subseteq f(\mathscr{B})$ feltétel már implikálja a $\mathscr{B} \subseteq f(\mathscr{B})$ feltételt. Ez nyilvánvalóan nem igaz: tekintsük például az $f : \mathscr{B}_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2$,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \cos \pi x \\ \sin \pi x \end{bmatrix}$$

függvényt. Ennek értékkészlete éppen az egységkörvonal.

5.5.11. Tétel. *Egy $f : X \to X$ folytonos és korlátos transzformációnak létezik fixpontja.*

Bizonyítás. A korlátosság miatt van olyan $\alpha > 0$ szám, hogy $f(X) \subseteq \alpha \cdot \mathscr{B}$. Így Brouwer tétele alkalmazható az $f_{|\alpha \cdot \mathscr{B}}$ leszűkítésre. □

5.6. A Brouwer-tétel egyensúlyi alakja

Legyen X véges dimenziós euklideszi tér.

5.6.1. Definíció. Legyen $\emptyset \neq K \subseteq X$ és $x \in K$. Egy $v \in X$ vektort a K halmaz egy x-beli *érintővektorának* mondunk, ha

$$\liminf_{t \to 0+} \frac{d(x + t \cdot v, K)}{t} = 0 \,.$$

A K halmaz x-beli érintővektorainak összességét jelölje $T_K(x)$. Ezen $T_K(x)$ halmazt a K halmaz x-beli *Bouligand–féle érintőkúp*jának nevezzük.

5.6.2. Megjegyzés. Ha x belső pontja a K halmaznak, akkor triviálisan $T_K(x) = X$.

5.6.3. Példa. Egy $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum érintőkúpja az intervallum belső pontjaiban $\mathbb{R}$, míg az a pontban $[0,+\infty)$, a b pontban pedig $(-\infty,0]$.

5.6.4. Példa. Tekintsük az X tér

$$\mathscr{B} := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

zárt egységgömbjét. Ekkor $\mathscr{B}$ tetszőleges x határpontjára

$$T_{\mathscr{B}}(x) = \{v \in X : \langle x \mid v \rangle \leq 0\} \,.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $u \in X$ vektorra nyilván $d(u, \mathscr{B}) = (\|u\| - 1)_+$, ahol tetszőleges α valós számra $\alpha_+ := \frac{1}{2}(|\alpha| + \alpha)$ az α szám *pozitív része*. Így bármely $v \in X$ és $t > 0$ esetén $\|x\| = 1$ miatt

$$\begin{aligned} \frac{d(x+t\cdot v, K)}{t} &= \frac{(\|x+t\cdot v\| - 1)_+}{t} = \left(\frac{\|x+t\cdot v\|^2 - 1}{t\cdot(\|x+t\cdot v\| + 1)}\right)_+ = \\ &= \left(\frac{2\langle x \mid v\rangle + t\cdot\|v\|^2}{\|x+t\cdot v\| + 1}\right)_+ , \end{aligned}$$

ami $t \to 0+$ határátmenettel a $\left(\frac{2\langle x|v\rangle}{\|x\|+1}\right)_+$ értékhez tart. Ez pontosan $\langle x \mid v\rangle \le 0$ esetén lesz 0, azaz $T_{\mathscr{B}}(x)$ pontosan azon $v \in X$ vektorokból áll, amelyekre $\langle x \mid v\rangle \le 0$. □

5.6.5. Lemma. *Legyen $\emptyset \neq K \subseteq X$ nemüres zárt halmaz, továbbá $x \in K$, $y \in X$ olyanok, hogy*

$$y \in x + T_K(x) \quad \textit{és} \quad x = P_K(y) .$$

Ekkor szükségképpen $x = y$.

Bizonyítás. Elegendő igazolnunk, hogy $d(y, K) = 0$. Indirekt tegyük föl, hogy $d(y, K) > 0$. Mivel $y - x \in T_K(x)$, ezért

$$\liminf_{t\to 0+} \frac{d(x+t\cdot(y-x), K)}{t} = 0 ,$$

ezért $\exists 0 < t < \frac{1}{3}$, hogy

$$d(x+t\cdot(y-x), K) < \frac{d(y,K)}{2}\cdot t .$$

Ekkor van olyan $z \in K$, hogy

$$\|x+t\cdot(y-x) - z\| < \frac{d(y,K)}{2}\cdot t,$$

ahonnan $\|y - x\| = d(y, K)$ alapján

$$\begin{aligned} d(y,K) &\le \|y-z\| \le \|y-(x+t\cdot(y-x))\| + \|x+t\cdot(y-x)-z\| \le \\ &\le (1-t)\cdot\|y-x\| + \frac{d(y,K)}{2}\cdot t \le (1-t)\cdot d(y,K) + \frac{d(y,K)}{2}\cdot t = \\ &= \left(1-\frac{t}{2}\right)\cdot d(y,K), \end{aligned}$$

ami ellentmondás. □

5.6.6. Tétel (egyensúlyi tétel). *Legyen $K \subseteq X$ nemüres konvex kompakt halmaz és $f : K \to X$ olyan folytonos függvény, amelyre minden $x \in K$ mellett*

$$f(x) \in T_K(x) \ .$$

Ekkor f-nek létezik egyensúlyi pontja, azaz olyan $x \in K$ pont, amelyre $f(x) = \mathbf{0}_X$.

Bizonyítás. A $g(x) := P_K(x + f(x))$ nyilván folytonos transzformációja a K halmaznak. A Brouwer-tétel miatt így van olyan $x \in K$ pont, amelyre $g(x) = x$, azaz $P_K(x + f(x)) = x$. Ezért $y := x + f(x)$ választással tételünk feltétele és a legutóbbi lemma alapján $x = x + f(x)$, azaz $f(x) = \mathbf{0}_X$. □

5.6.7. Megjegyzés. A fenti tételben szereplő „egyensúlyi pont” elnevezést az indokolja, hogy egy $f(x) = \mathbf{0}_X$ feltételű $x \in K$ pont az $x' = f(x)$ differenciálegyenlet-rendszernek éppen egy konstans (egyensúlyi) megoldását jelenti. Tehát az $f(x) \in T_K(x)$ „érintőfeltétel” garantálja a dinamikai egyensúly létezését.

5.6.8. Megjegyzés. A fenti tétel $X = \mathbb{R}$ és $K = [a,b]$ speciális esetben (az egyik fenti megjegyzés értelmében) éppen a Bolzano-tétel klasszikus alakját adja vissza: ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre $f(a) \geq 0$ és $f(b) \leq 0$, akkor olyan $x \in [a,b]$ pont is létezik, amelyre $f(x) = 0$.

5.6.9. Megjegyzés. $K = \mathscr{B}$ speciális esetben a fenti tétel a következő alakú: Legyen $f : \mathscr{B} \to X$ olyan folytonos függvény, amelyre minden $x \in X$, $\|x\| = 1$ esetén $\langle x \mid f(x) \rangle \leq 0$. Ekkor van olyan $x \in \mathscr{B}$ pont, amelyre $f(x) = \mathbf{0}_X$.

5.2. *Feladat.* Az egyensúlyi tételből hozzuk ki a Brouwer-tétel klasszikus alakját! (*Ötlet*: $g(x) := f(x) - x$.)

VI.

TOVÁBBI FIXPONTTÉTELEK

6.1. A Schauder- és a Kakutani-féle fixponttétel

A Schauder-féle fixponttétel

6.1.1. Állítás. *Legyen* $(X, \|.\|)$ *normált tér, valamint* $K \subseteq X$ *konvex és teljesen korlátos (speciálisan kompakt) halmaz. Ekkor* $\forall\, \varepsilon > 0$ *esetén* $\exists\, K' \subseteq K$ *konvex, kompakt halmaz, amelyre* $\operatorname{lin} K' \subseteq X$ *véges dimenziós altér, és* $\exists\, g : K \to K'$ *folytonos függvény, amelyre*

$$\|id_K - g\|_{C(K)} = \sup_{x \in K} \|x - g(x)\| < \varepsilon\,, \quad \textit{azaz}$$

$$\forall\, x \in K \ \ \textit{esetén} \ \ \|x - g(x)\| < \varepsilon\,.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $K \neq \emptyset$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel a $K \subseteq X$ halmaz teljesen korlátos, ezért létezik véges sok $x_1, \ldots, x_n \in K$, hogy $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$, így $K = \cup_{i=1}^{n} B_K(x_i, \varepsilon)$. Legyen

$$K' \doteq \operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_n\}\,.$$

Mivel $x_1, \ldots, x_n \in K$, és $K \subseteq X$ konvex halmaz, ezért

$$K' = \operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K\,.$$

Mivel továbbá

$$\operatorname{lin} K' = \operatorname{lin} \operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}\,,$$

ezért $\operatorname{lin} K' \subseteq X$ véges dimenziós altér.
A $K' = \operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_n\}$ halmaz nyilván konvex, korlátos és zárt, emellett benne van a $\operatorname{lin} K' \subseteq X$ véges dimenziós altérben, ezért kompakt is.
A K halmaznak a 4.4.13. állítás szerint $\exists\, \{g_i : K \to [0,1] \,:\, i = 1, \ldots, n\}$ egységosztása:

(1) $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén a $g_i : K \to [0,1]$ függvény folytonos,

(2) $\sum_{i=1}^{n} g_i = \mathbf{1}$,

(3) $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén $g_i(x) \neq 0 \iff x \in B_K(x_i, \varepsilon)$.

Legyen

$$g \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g_i : K \to X \ \ \text{azaz} \ \ \forall\, x \in K \ \ \text{esetén} \ \ g(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \cdot x_i\,.$$

Mivel $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén g_i folytonos, ezért g folytonos.

Mivel pedig $\forall\, x \in K$ pontban $\forall\, i = 1, \ldots, n$ esetén

$$g_i(x) \geq 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1\,,$$

ezért

$$\mathscr{R}(g) \subseteq K' = \operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_n\}\,, \ \text{ azaz } \ g : K \to K'\,.$$

Ekkor $\forall\, x \in K$ pontban

$$x - g(x) = x \cdot 1 - g(x) = x \cdot \sum_{i=1}^{n} g_i(x) - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i) \cdot g_i(x)\,,$$

ezért

$$\begin{aligned}
\|x - g(x)\| &= \|\sum_{i=1}^{n} (x - x_i) \cdot g_i(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x - x_i\| \cdot g_i(x) \\
&\leq \sum_{\{i\,:\,x \in B(x_i,\varepsilon)\}} \|x - x_i\| \cdot g_i(x) + \sum_{\{i\,:\,x \notin B(x_i,\varepsilon)\}} \|x - x_i\| \cdot g_i(x) \\
&= \sum_{\{i\,:\,x \in B(x_i,\varepsilon)\}} \|x - x_i\| \cdot g_i(x) \\
&< \sum_{\{i\,:\,x \in B(x_i,\varepsilon)\}} \varepsilon \cdot g_i(x) = \varepsilon \cdot \sum_{\{i\,:\,x \in B(x_i,\varepsilon)\}} g_i(x) \leq \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

összefoglalva: $\|x - g(x)\| < \varepsilon$. □

6.1.2. Állítás (Schauder-Leray-Tyihonov-féle fixponttétel)**.** *Legyen* $(X, \|.\|)$ *normált tér. Ha* $K \subseteq X$ *nemüres, konvex és kompakt halmaz, valamint* $f : K \to K$ *folytonos függvény, akkor az* f *függvénynek létezik fixpontja:*

$$\exists\, x_0 \in K\,, \ \textit{hogy} \ f(x_0) = x_0\,.$$

Bizonyítás. Legyen (ε_n) egy $\mathbb{R}_{++}$-beli, $\lim \varepsilon_n = 0$ tulajdonságú számsorozat. Az előző 6.1.1. állítás szerint $\forall\, \varepsilon_n$ esetén $\exists\, K_n \subseteq K$ konvex, kompakt halmaz, amelyre $\operatorname{lin} K_n \subseteq X$ véges dimenziós altér, és $\exists\, g_n : K \to K_n$ folytonos függvény, amelyre

$$\forall\, x \in K \ \text{ esetén } \ \|x - g_n(x)\| < \varepsilon_n\,. \tag{6.1}$$

A Brouwer-féle fixponttétel (5.5.3. állítás) szerint $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén a $g_n \circ f|_{K_n} : K_n \to K_n$ folytonos fügvénynek létezik fixpontja:

$$\exists\, x_n \in K_n\,, \ \text{hogy} \ g_n(f(x_n)) = (g_n \circ f)(x_n) = x_n\,. \tag{6.2}$$

A fenti (6.1) egyenlőtlenség szerint $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén az $f(x_n)$ pontra is

$$\|f(x_n) - g_n(f(x_n))\| < \varepsilon_n\,,$$

így (6.2) szerint

$$\|f(x_n) - x_n\| < \varepsilon_n \,. \tag{6.3}$$

Tekintsük az (x_n) K-beli sorozatot. Mivel a K halmaz kompakt, így sorozatkompakt, ezért az (x_n) sorozatnak $\exists$ (x_{n_k}) K-ban konvergens részsorozata:

$$\exists \; x_0 \doteq \lim x_{n_k} \in \; K \,.$$

Ekkor az f függvény folytonossága miatt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \,,$$

így az (6.3) egyenlőtlenség alapján

$$\|f(x_0) - x_0\| = \lim_{k\to\infty} \|f(x_{n_k}) - x_{n_k}\| \le \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{n_k} = 0 \,,$$

tehát $f(x_0) = x_0$. □

A Schauder-féle fixponttétel általánosítása

6.1.3. Állítás (Mazur-lemma)**.** *Legyen* $(X, \|.\|)$ *normált tér. Ha egy* $K \subseteq X$ *halmaz teljesen korlátos, akkor a* $\operatorname{co} K \subseteq X$ *konvex burka is teljesen korlátos.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $K \neq \emptyset$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Belátjuk, hogy létezik véges sok $b_1, \dots, b_n \in K$, hogy

$$\operatorname{co} K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(b_j, \varepsilon) \,.$$

Mivel a $K \subseteq X$ halmaz teljesen korlátos, ezért létezik véges sok $a_1, \dots, a_m \in K$, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(a_i, \varepsilon/2) \,.$$

Látható, hogy a $\operatorname{co}\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq X$ halmaz teljesen korlátos.

Ugyanis: Egyrészt nyílván teljesül, hogy $\operatorname{co}\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \operatorname{lin}\{a_1, \dots, a_m\}$, másrészt a $\operatorname{co}\{a_1, \dots, a_m\}$ halmaz korlátos, ezek szerint egy véges dimenziós térbeli korlátos halmaz, ezért teljesen korlátos.

Ezek szerint létezik véges sok $b_1,\dots,b_n \in \operatorname{co} K$, hogy

$$\operatorname{co}\{a_1,\dots,a_m\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(b_i,\varepsilon/2).$$

Belátjuk, hogy

$$\operatorname{co} K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(b_j,\varepsilon).$$

Ugyanis: Legyen $x \in \operatorname{co} K$ tetszőleges. Ekkor $\exists\, x_1,\dots,x_s \in K$, $\alpha_1,\dots,\alpha_s \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = 1$, hogy

$$x = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot x_k.$$

Mivel $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(a_i,\varepsilon/2)$, ezért $\forall\, k = 1,\dots,s$ esetén $\exists\, 1 \le i_k \le m$ index, hogy $x_k \in B(a_{i_k},\varepsilon/2)$. Legyen

$$y \doteq \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot a_{i_k}.$$

Ekkor egyrészt nyilván $y \in \operatorname{co}\{a_1,\dots,a_m\}$, másrészt

$$\begin{aligned} \|x-y\| &= \|\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot x_k - \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot a_{i_k}\| = \|\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot (x_k - a_{i_k})\| \\ &\le \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot \|x_k - a_{i_k}\| \le \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Mivel $y \in \operatorname{co}\{a_1,\dots,a_m\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(b_i,\varepsilon/2)$, ezért $\exists\, j = 1,\dots,n$, hogy $y \in B(b_j,\varepsilon/2)$, azaz $\|y-b_j\| < \varepsilon/2$.
Ezek szerint

$$\|x-b_j\| \le \|x-y\| + \|y-b_j\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

azaz $x \in B(b_j,\varepsilon)$, így $x \in \bigcup_{j=1}^{n} B(b_j,\varepsilon)$. □

6.1.4. Definíció. Legyenek (X,τ_X) és (Y,τ_Y) topologikus terek. Egy $f : X \to Y$ leképezést kompaktnak nevezünk, ha folytonos, továbbá a $\operatorname{cl}\mathscr{R}(f) \subseteq Y$ halmaz kompakt.

6.1.5. Állítás (Schauder-Leray-Tyihonov-féle fixponttétel, élesített forma)**.** *Legyen $(X,\|.\|)$ Banach-tér. Ha $F \subseteq X$ nemüres, konvex és zárt halmaz, valamint $f : F \to F$ kompakt függvény, akkor az f függvénynek létezik fixpontja:*

$$\exists\, x_0 \in K, \ \textit{hogy}\ f(x_0) = x_0.$$

Bizonyítás. Legyen

$$K \doteq \operatorname{cl}\operatorname{co}\mathscr{R}(f) \subseteq Y.$$

Mivel az f függvény kompakt, azaz a $\operatorname{cl}\mathscr{R}(f) \subseteq Y$ halmaz kompakt, vagyis az $\mathscr{R}(f) \subseteq Y$ halmaz teljesen korlátos, ezért az előző 6.1.3. állítás (Mazur-tétel) szerint a $\operatorname{co}\mathscr{R}(f) \subseteq Y$ halmaz is teljesen korlátos, emiatt a $K = \operatorname{cl}\operatorname{co}\mathscr{R}(f)$ halmaz teljesen korlátos és zárt. Mivel az $(X, \|.\|)$ normált tér teljes, ezért a $K = \operatorname{cl}\operatorname{co}\mathscr{R}(f)$ halmaz kompakt, valamint nyilván konvex is. Mivel pedig az $f : F \to F$ függvény folytonos, ezért az $f|_K : K \to \mathscr{R}(f) \subseteq K$ függvény is folytonos, ezért az 6.1.2. állítás (Schauder-tétel) szerint $\exists\, x_0 \in K \subseteq F$ fixpontja: $f|_K(x_0) = x_0$. Ez az x_0 nyilván az eredeti f-nek is fixpontja. $\square$

A Kakutani-féle fixponttétel

6.1.6. Definíció. Legyen X tetszőleges halmaz. Egy $F : X \to \mathscr{P}(X)$ függvény *fixpontjának* nevezzük az $x_0 \in X$ pontot, ha

$$x_0 \in F(x_0)\,.$$

6.1.7. Állítás (Kakutani-féle fixponttétel)**.** *Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér. Ha $K \subseteq X$ nemüres, konvex és kompakt halmaz, valamint az $F : K \to \mathscr{P}(K)$ halmazértékű leképezés*

(1) nemüres, konvex, kompakt halmaz értékű $(F : K \to \mathscr{K}_{\mathrm{co}}(K) \setminus \{\emptyset\})$,

(2) felső-Vietoris folytonos,

akkor az F halmazértékű leképezésnek létezik fixpontja:

$$\exists\, x_0 \in K\,, \ \ \textit{hogy} \ \ x_0 \in F(x_0)\,.$$

Bizonyítás. Mivel az $(X, \|.\|)$ normált tér, így reguláris topologikus tér is, ezért az $F : K \to \mathscr{P}(K)$ f-V-folytonos és zárt halmaz értékű leképezés zárt gráfú.
Továbbá az $F : K \to \mathscr{P}(K)$ halmazértékű leképezés f-V-folytonos, emiatt f-H-folytonos is, továbbá nemüres, konvex értékű, ezért a Cellina-féle szelekciós tétel (4.4.14. állítás) szerint $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, f_\varepsilon : K \to K$ folytonos ε-szelekciója:

$$\operatorname{graph} f_\varepsilon \subseteq B(\operatorname{graph} F, \varepsilon)\,. \tag{6.4}$$

Mivel pedig $K \subseteq X$ konvex és kompakt halmaz, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén az $f_\varepsilon : K \to K$ folytonos függvénynek a Schauder-féle fixponttétel (6.1.2. állítás) szerint létezik fixpontja:

$$\exists\, x_\varepsilon \in K\,, \ \ \text{hogy} \ \ f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon\,.$$

Emiatt (6.4) alapján

$$(x_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \operatorname{graph} f_\varepsilon \subseteq B(\operatorname{graph} F, \varepsilon)\,.$$

Ezek szerint $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén (speciálisan $\varepsilon_n \doteq \frac{1}{n}$ mellett) $\exists\, x_n \in K$, hogy

$$(x_n, x_n) \in B(\operatorname{graph} F, 1/n)\,,$$

ezért $\exists\ (z_n, y_n) \in \operatorname{graph} F$, hogy

$$\|(x_n, x_n) - (z_n, y_n)\|_{\max} = \max\{\|x_n - z_n\|, \|x_n - y_n\|\} < \frac{1}{n}. \tag{6.5}$$

Mivel $K \subseteq X$ kompakt halmaz, ezért az (x_n) K-beli sorozatnak $\exists\ (x_{n_k})$ K-ban konvergens részsorozata:

$$\exists\ x_0 \doteq \lim x_{n_k} \in K.$$

Továbbá

$$\exists\ \|.\|_{\max} - \lim(x_{n_k}, x_{n_k}) \text{ és } = (x_0, x_0).$$

Ugyanis:

$$\|(x_{n_k}, x_{n_k}) - (x_0, x_0)\|_{\max} = \|x_{n_k} - x_0\|.$$

A (z_n, y_n) $\operatorname{graph} F$-beli sorozat (z_{n_k}, y_{n_k}) részsorozatára

$$\exists\ \|.\|_{\max} - \lim(z_{n_k}, y_{n_k}) \text{ és } = (x_0, x_0).$$

Ugyanis:

$$\begin{aligned} & \|(z_{n_k}, y_{n_k}) - (x_0, x_0)\|_{\max} \\ \leq\quad & \|(z_{n_k}, y_{n_k}) - (x_{n_k}, x_{n_k})\|_{\max} + \|(x_{n_k}, x_{n_k}) - (x_0, x_0)\|_{\max}, \end{aligned}$$

és az egyenlőtlenség jobboldala az előző limesz és az (6.5) egyenlőtlenség szerint nullához tart.

Mivel az F halmazértékű leképezés zárt gráfú, azaz a $\operatorname{graph} F \subseteq X \times X$ zárt halmaz, ezért

$$(x_0, x_0) = \|.\|_{\max} - \lim(z_{n_k}, y_{n_k}) \in \operatorname{graph} F, \quad \text{azaz } x_0 \in F(x_0). \qquad \square$$

6.2. A Ky Fan-féle metszettétel

A Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-tétel

Először az eredeti Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-tételt, röviden: KKM-tételt ismertetjük, és megmutatjuk, hogy ekvivalens a Brouwer-féle fixponttétellel. A KKM-tételt eredetileg arra szánták a szerzők, hogy a Brouwer-tételre egyszerűbb bizonyítást adjanak. Ez kevésbbé sikerült, de a KKM-tétel nagyon jó szolgálatot tesz az alkalmazás technikájában.

6.2.1. Jelölés. Az $\mathbb{R}^n_+$-beli *standard szimplex*:

$$S_n \doteq \operatorname{co}\{e_1, \dots, e_n\} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \xi_1 + \cdots + \xi_n = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n_+.$$

6.2.2. Definíció. Az $S_n \subseteq \mathbb{R}^n_+$ standard szimplex zárt részhalmazaiból álló

$$\{F_1,\ldots,F_n\} \subseteq \mathscr{F}(S_n)$$

halmazrendszert *Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-tulajdonságúnak* (röviden: KKM-tulajdonságúnak) nevezzük, ha

$$\forall\ I \subseteq \{1,\ldots,n\} \text{ esetén } \operatorname{co}\{e_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i\in I} F_i\,. \tag{6.6}$$

6.2.3. Megjegyzés. A definíció szerint $\forall\ i = 1,\ldots,n$ esetén $e_i \in F_i$, így $F_i \neq \emptyset$.

6.2.4. Állítás (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-tétel)**.** *Ha az* $\{F_1,\ldots,F_n\} \subseteq \mathscr{F}(S_n)$ *halmazrendszer KKM-tulajdonságú, akkor*

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset\,.$$

Bizonyítás. A Brouwer-tételből bizonyítjuk:
Indirekt módon tegyük fel, hogy az $\{F_1,\ldots,F_n\} \in \mathscr{P}(S_n)$ zárt halmazokból álló rendszerre $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$, azaz

$$\bigcup_{i=1}^{n} (S_n \setminus F_i) = S_n \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_i = S_n\,.$$

A kompakt metrikus tér egységosztásához hasonló egységosztást konstruálunk. Tekintsük $\forall\ i = 1,\ldots,n$ esetén a következő távolságfüggvényt:

$$d_{F_i} : S_n \to \mathbb{R}_+\,, \text{ azaz amelyre } \forall\ x \in S_n \text{ esetén } d_{F_i}(x) = d(x,F_i)\,.$$

Mivel $\forall\ i = 1,\ldots,n$ esetén a KKM-tulajdonság miatt $F_i \neq \emptyset$, ezért a 2.2.8. állítás szerint a $d_{F_i} : X \to \mathbb{R}_+$ távolságfüggvény Lipschitz-folytonos.
Mivel pedig $\forall\ i = 1,\ldots,n$ az $F_i \subseteq S_n$ halmaz zárt, ezért

$$d_{F_i}(x) > 0 \ \Leftrightarrow\ x \notin F_i\,.$$

Továbbá $S_n = \bigcup_{i=1}^n (S_n \setminus F_i)$, ezért $\forall\ x \in S_n$ esetén

$$\sum_{i=1}^{n} d_{F_i}(x) > 0\,.$$

Legyen $\forall\ i = 1,\ldots,n$ esetén

$$g_i \doteq \frac{d_{F_i}}{\sum_{i=1}^n d_{F_i}} : S_n \to \mathbb{R}_+\,.$$

A fentiek szerint:

(1) $\forall\, i = 1,\ldots,n$ esetén a $g_i : S_n \to \mathbb{R}_+$ függvény folytonos,

(2) $\sum_{i=1}^n g_i = \mathbf{1}$,

(3) $\forall\, i = 1,\ldots,n$ esetén $g_i(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \notin F_i$.

Legyen

$$f \doteq \sum_{i=1}^n e_i \cdot g_i : S_n \to S_n\,, \quad \text{azaz} \;\; \forall\, x \in S_n \;\; \text{esetén} \;\; f(x) \doteq \sum_{i=1}^n g_i(x) \cdot e_i\,.$$

Mivel $\forall\, i = 1,\ldots,n$ esetén $\forall\, x \in S_n$ pontban $g_i(x) \geq 0$ és $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$, ezért valóban

$$\mathscr{R}(f) \subseteq \mathrm{co}\{e_1,\ldots,e_n\} = S_n\,.$$

Továbbá $\forall\, i = 1,\ldots,n$ esetén g_i folytonos, így $f : S_n \to S_n$ folytonos függvény, valamint $S_n \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex kompakt halmaz, ezért a Brouwer-féle fixponttétel (5.5.3. állítás) szerint létezik fixpontja:

$$\exists\, x_0 \in S_n\,, \;\; \text{hogy} \;\; f(x_0) = x_0\,.$$

Tekintsük a következő indexhalmazt:

$$I \doteq \{i \;:\; g_i(x_0) > 0\}\,.$$

Mivel $\sum_{i\in I} g_i(x) = 1$, ezért

$$x_0 = f(x_0) = \sum_{i=1}^n g_i(x) \cdot e_i = \sum_{i\in I} g_i(x) \cdot e_i \in \mathrm{co}\{e_i \;:\; i \in I\}\,.$$

Ugyanakkor a fentiek szerint, ha $i \in I$, azaz $g_i(x_0) > 0$, akkor $x_0 \notin F_i$, ezért

$$x_0 \notin \bigcup_{i\in I} F_i$$

Ezek szerint az $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ indexhalmazra

$$\mathrm{co}\{e_i \;:\; i \in I\} \;\not\subseteq\; \bigcup_{i\in I} F_i\,,$$

azaz a $\{F_1,\ldots,F_n\} \subseteq \mathscr{F}(S_n)$ halmazrendszer nem KKM-tulajdonságú, ami ellentmondás. □

6.2.5. Állítás (KKM és a Brouwer-fixponttétel ekvivalenciája)**.** *A Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-tétel ekvivalens a Brouwer-fixponttétellel, amin azt értjük, hogy mindkettőt bebizonyítjuk a másik állításból.*

Bizonyítás. A KKM-tételt a Brouwer-féle fixponttételből bizonyítottuk be.

A fordított irányhoz megmutatjuk a KKM-tétel segítségével, hogy ha $f : S_n \to S_n$ folytonos transzformáció, akkor van fixpontja.
Legyen $f : S_n \to S_n$ folytonos transzformáció, ekkor $f = (f_1, \ldots, f_n)$, ahol $\forall\ i = 1, \ldots, n$ esetén $f_i : S_n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.
Definiáljuk $\forall\ i = 1, \ldots, n$ esetén az F_i halmazokat a következőképpen:

$$F_i \doteq \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in S_n \ : \ f_i(x) \le \xi_i\} \subseteq S_n\,.$$

Mivel $\forall\ i = 1, \ldots, n$ esetén az f_i függvény folytonos, ezért az F_i halmaz zárt.

Belátjuk, hogy az $\{F_1, \ldots, F_n\}$ halmazrendszer KKM-tulajdonságú.
Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy valamilyen nemüres $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ indexhalmazra

$$\mathrm{co}\{e_i \ : \ i \in I\} \not\subseteq \bigcup_{i \in I} F_i\,,$$

ekkor van olyan $\tilde{x} \in \mathrm{co}\{e_i \ : \ i \in I\}$, amelyre $\tilde{x} \notin \bigcup_{i \in I} F_i$, azaz $\tilde{x} \in \bigcap_{i \in I} F_i^c$, azaz

$$\forall\ i \in I \text{ esetén } \tilde{\xi}_i < f_i(\tilde{x})\,.$$

Az $\tilde{x} = (\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n)$ vektor választása miatt $\forall\ i \notin I$ esetén $\tilde{\xi}_i = 0$, ugyanakkor $\forall\ i \in I$ esetén $0 \le \tilde{\xi}_i < f_i(\tilde{x})$, ezért ezeket összegezve azt kapjuk, hogy:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_i = \sum_{i \in I} \tilde{\xi}_i < \sum_{i \in I} f_i(\tilde{\xi}_i) \le \sum_{i=1}^{n} f_i(\tilde{\xi}_i) = 1\,,$$

ami ellentmondás. Tehát az $\{F_1, \ldots, F_n\}$ halmazrendszer KKM-tulajdonságú.

A 6.2.4. KKM-tétel szerint $\exists\ x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$, azaz

$$\forall\ i = 1, \ldots, n \ \text{ esetén } \ f_i(x_0) \le \xi_i^0\,.$$

Erre az x_0 pontra teljesül, hogy

$$f(x_0) = x_0\,, \ \text{ azaz } \ \forall\ i = 1, \ldots, n \ \text{ esetén } \ f_i(x_0) = \xi_i^0\,.$$

Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ i = 1, \ldots, n$, hogy $f_i(x_0) < \xi_i^0$, ekkor

$$1 = f_1(x_0) + \ldots + f_n(x_0) < \xi_1^0 + \ldots + \xi_n^0 = 1\,,$$

ami ellentmondás. Tehát valóban $f(x_0) = x_0$. □

A KKM-leképezési elv

Ebben az alpontban a KKM-tételnek egy olyan általánosítását írjuk le, amely igen előnyösen alkalmazható. Az alkalmazhatóság felfedezése, és a tételnek egy ehhez megfelelő formában való átfogalmazása, Ky Fan érdeme [10]. Enélkül a megközelítés nélkül a KKM tételnek nem lenne olyan centrális a szerepe, és alkalmazása jóval korlátozottabb lenne.

6.2.6. Definíció (halmazértékű leképezés KKM-tulajdonsága)**.** Legyen $(X,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$ feletti vektortér, továbbá $A \subseteq X$ egy nemüres halmaz. Egy $F : A \to \mathscr{P}(A)$ halmazértékű leképezést KKM-tulajdonságúnak nevezünk, ha $\forall\ \{x_1,\dots,x_s\} \subseteq A$ véges részhalmazra teljesül, hogy

$$\mathrm{co}\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i)\,. \tag{6.7}$$

6.2.7. Állítás (KKM-tulajdonság affinfüggetlen pontokra, ekvivalens definíció)**.** *Egy $F : A \to \mathscr{P}(A)$ halmazértékű leképezés pontosan akkor KKM-tulajdonságú, ha $\forall\ \{x_1,\dots,x_n\} \subseteq A$ affinfüggetlen véges halmaz esetén teljesül az (6.7) tartalmazás.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló.
Elégségesség: Legyen $\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq A$ tetszőleges véges részhalmaz. Ekkor a Caratheodory-tétel szerint

$$\begin{aligned} & \mathrm{co}\{x_1,\dots,x_n\} \\ = \quad & \bigcup \{\mathrm{co}\{x_i : i \in I\} : I \subseteq \{1,\dots,n\},\ \{x_i : i \in I\} \text{ affinfüggetlen}\}\,. \end{aligned}$$

Ha a (6.7) tartalmazás affinfüggetlen részhalmazokra teljesül, akkor a most kapottakból

$$\begin{aligned} & \mathrm{co}\{x_1,\dots,x_n\} \\ \subseteq \quad & \bigcup \left\{ \bigcup_{i\in I} F(x_i)\ :\ I \subseteq \{1,\dots,n\},\ \{x_i\ :\ i \in I\} \text{ affinfüggetlen} \right\}, \end{aligned}$$

ami viszont nyilvánvalóan része az $\bigcup_{i=1}^{n} F(x_i)$ uniónak. □

6.2.8. Definíció (végesen zárt halmaz)**.** Legyen $(X,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Egy $A \subseteq X$ halmazt *végesen zártnak* nevezzük, ha $\forall\ L \subseteq X$ véges dimenziós affin halmaz esetén az $L \cap A \subseteq L$ metszethalmaz zárt, ahol az $L \subseteq X$ véges dimenziós affin halmazokon természetesen a véges dimenziós terek szokásos norma-topológiáját vesszük.

6.2.9. Megjegyzés. Mivel minden véges dimenziós affin halmaz zárt, ezért ha valamilyen vektortér-topológia mellett az $A \subseteq X$ halmaz zárt, akkor az $A \cap L$ metszet is zárt. Így a végesen zártság fogalma általánosabb bármely vektortér-topológiabeli zártságnál.

6.2.10. Definíció (véges metszet tulajdonság)**.** Legyen X egy tetszőleges halmaz és Γ egy tetszőleges indexhalmaz.

1. Egy $\{A_\gamma \subseteq X \ : \ \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathscr{P}(X)$ halmazrendszert *véges metszet tulajdonságúnak* (centráltnak) nevezünk, ha $\forall \, \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ véges részhalmaz esetén teljesül, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\gamma_i} \neq \emptyset .$$

2. Egy $F : X \to \mathscr{P}(X)$ halmazértékű leképezést *véges metszet tulajdonságúnak* nevezünk, ha az értékkészlete véges metszet tulajdonságú:
$\forall \, \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ véges részhalmaz esetén teljesül, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{n} F(x_i) \neq \emptyset .$$

6.2.11. Állítás (KKM-leképezési elv)**.** *Legyen* $(X, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ *feletti vektortér, továbbá* $A \subseteq X$ *egy nemüres halmaz. Ha egy* $F : A \to \mathscr{P}(A)$ *halmazértékű leképezés végesen zárt értékű és KKM-tulajdonságú, akkor véges metszet tulajdonságú.*

Bizonyítás. Legyen $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ egy tetszőleges véges halmaz. Belátjuk, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{n} F(x_i) \neq \emptyset .$$

Legyen e célból $f : S_n \to \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\}$ az a függvény, amelyre $\forall \, l = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in S_n$ esetén

$$f(l) \doteq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n .$$

Ekkor

$$\mathscr{R}(f) = \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X .$$

Tekintsük a $\mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ véges dimenziós teret, valamint az $S_n \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazt is a szokásos topológiával. Az f függvény nyilván folytonos.

Megmutatjuk, hogy az

$$\{f^{-1}(F(x_1)), \dots, f^{-1}(F(x_n))\} \subseteq \mathscr{P}(S_n)$$

halmazrendszer KKM-tulajdonságú, nevezetesen:

(1) $\forall \, i = 1, \dots, n$ esetén $f^{-1}(F(x_i))$ zárt halmaz,

(2) $\forall \, I \subseteq \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathrm{co}\{e_i : i \in I\} \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$.

(1): Mivel az F halmazértékű leképezés végesen zárt értékű, ezért $\forall\ i = 1,\dots,n$ esetén $F(x_i) \cap \mathrm{lin}\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq \mathrm{lin}\{x_1,\dots,x_n\}$ zárt halmaz, ezért az

$$F(x_i) \cap \mathrm{co}\{x_1,\dots,x_n\} \subseteq \mathrm{lin}\{x_1,\dots,x_n\}$$

halmaz zárt. Továbbá az $f : S_n \to \mathrm{co}\{x_1,\dots,x_n\}$ függvény folytonos, ezért az

$$f^{-1}(F(x_i)) = f^{-1}(F(x_i) \cap \mathrm{co}\{x_1,\dots,x_n\}) \subseteq S_n\,.$$

halmaz is zárt.

(2): Legyen $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ tetszőleges. Mivel az F halmazértékű leképezés KKM-zulajdonságú, ezért

$$\mathrm{co}\{x_i\ :\ i \in I\} \subseteq \bigcup_{i\in I} F(x_i)\,,$$

amiből

$$f^{-1}(\mathrm{co}\{x_i\ :\ i \in I\}) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} F(x_i)\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(F(x_i))\,.$$

Mivel $\forall\, i = 1,\dots,n$ esetén $f(e_i) = 1\cdot x_i = x_i$, így $e_i \in f^{-1}(x_i)$, valamint az $f^{-1}(\mathrm{co}\{x_i\ :\ i \in I\})$ halmaz konvex, ezért az előzőek szerint

$$\mathrm{co}\{e_i\ :\ i \in I\} \subseteq f^{-1}(\mathrm{co}\{x_i\ :\ i \in I\}) \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(F(x_i))\,.$$

Ezért a

$$\{f^{-1}(F(x_1)),\dots,f^{-1}(F(x_n))\} \subseteq \mathscr{P}(S_n)$$

halmazrendszer KKM-tulajdonságú. Emiatt a KKM-tétel (6.2.4. állítás) szerint

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F(x_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}\left(F(x_i)\right) \neq \emptyset\,,$$

amiből $\bigcap_{i=1}^{n} F(x_i) \neq \emptyset$. □

A Ky Fan-féle metszettétel

6.2.12. Állítás. *Legyen (X,τ) topologikus tér és Γ tetszőleges indexhalmaz.*
1. Ha $\{F_\gamma \subseteq X\ :\ \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathscr{F}(X)$ zárt halmazokból álló halmazrendszer, amely véges metszet tulajdonságú: $\forall\ \{\gamma_1,\dots,\gamma_n\} \subseteq \Gamma$ véges részhalmaz esetén teljesül, hogy $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\gamma_i} \neq \emptyset$, valamint $\exists\ \gamma_0 \in \Gamma$, hogy $F_{\gamma_0} \subseteq X$ kompakt halmaz, akkor

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma \neq \emptyset\,.$$

2. Ha $F:\Gamma\to\mathscr{F}(X)$ zárt halmaz értékű leképezés, amely véges metszet tulajdonságú: $\forall\ \{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}\subseteq\Gamma$ véges részhalmaz esetén teljesül, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{n} F(\gamma_i)\neq\emptyset,$$

valamint $\exists\ \gamma_0\in\Gamma$, hogy $F(\gamma_0)\subseteq X$ kompakt halmaz, akkor

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F(\gamma)\neq\emptyset.$$

3. Legyen speciálisan $(X,\langle .,.\rangle)$ Hilbert-tér.
Ha $F:\Gamma\to\mathscr{F}(X)$ konvex és zárt halmaz értékű leképezés, amely véges metszet tulajdonságú: $\forall\ \{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}\subseteq\Gamma$ véges részhalmaz esetén teljesül, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{n} F(\gamma_i)\neq\emptyset,$$

valamint $\exists\ \gamma_0\in\Gamma$, hogy $F(\gamma_0)\subseteq X$ korlátos halmaz, akkor

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} F(\gamma)\neq\emptyset.$$

Bizonyítás. 1. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}F_\gamma=\emptyset$, azaz $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}F_\gamma^c=X$. Emiatt $F_{\gamma_0}\subseteq\bigcup_{\gamma\in\Gamma}F_\gamma^c$. Mivel $\forall\ \gamma\in\Gamma$ esetén az F_γ halmaz zárt, így az F_γ^c halmaz nyílt, ezért az $\{F_\gamma\ :\ \gamma\in\Gamma\}$ halmazrendszer az F_{γ_0} halmaz egy nyílt lefedése. Mivel pedig az F_{γ_0} halmaz kompakt, ezért $\exists\ \{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}\subseteq\Gamma$ véges részhalmaz, hogy $F_{\gamma_0}\subseteq\bigcup_{\gamma=1}^{n}F(\gamma)^c$. Emiatt

$$\emptyset=F_{\gamma_0}\cap\left(\bigcup_{\gamma=1}^{n}F(\gamma)^c\right)^c=F_{\gamma_0}\cap\left(\bigcap_{\gamma=1}^{n}F(\gamma)\right)=\left(\bigcap_{\gamma=0}^{n}F(\gamma)\right).$$

Ezek szerint az $\{F_\gamma\subseteq X\ :\ \gamma\in\Gamma\}\subseteq\mathscr{F}(X)$ zárt halmazokból álló halmazrendszer nem véges metszet tulajdonságú, ami ellentmondás.

2. Ez csak 1. átfogalmazása.

3. Ha az $(X,\langle .,.\rangle)$ Hilbert-teret a gyenge topológiával látjuk el, akkor ennek vonatkozásában fennállnak a 2. pont feltételei: a konvex és zárt halmazok gyengén is zártak, a konvex, zárt és korlátos halmazok pedig gyengén kompaktak. $\square$

A KKM-leképzési elvnek azonnali következménye Ky Fan alábbi nevezetes és jól alkalmazható tétele. Az állítást normált térben és Hilbert-térben is megfogalmazzuk.

6.2.13. Állítás (Ky Fan-féle metszettétel, 1961)**.** *1. Legyen $(X,\|.\|)$ normált tér. $A\subseteq X$ egy nemüres halmaz.*
Ha az $F:A\to\mathscr{F}(A)$ halmazértékűleképezés

(1) zárt értékű,

(2) KKM-tulajdonságú,

(3) $\exists\, x_0 \in A$, amelyre $F(x_0) \subseteq X$ kompakt halmaz,

akkor

$$\bigcap_{x\in A} F(x) \neq \emptyset\,.$$

2. Legyen $(X, \langle .,. \rangle)$ Hilbert-tér. $A \subseteq X$ egy nemüres halmaz.
Ha az $F : A \to \mathscr{F}(A)$ halmazértékűleképezés

(1) konvex és zárt értékű,

(2) KKM-tulajdonságú,

(3) $\exists\, x_0 \in A$, amelyre $F(x_0) \subseteq X$ korlátos halmaz,

akkor

$$\bigcap_{x\in A} F(x) \neq \emptyset\,.$$

Bizonyítás. Az (1) és (2) feltételek alapján a KKM-leképezési elv (6.2.11. állítás) szerint az F halmazértékű leképezés véges metszet tulajdonságú.
Az 1. illetve 2. pont (3) feltétele alapján az előző 6.2.12. állítás 2. illetve 3. pontja szerint $\bigcap_{x\in A} F(x) \neq \emptyset$. □

6.3. A Ky Fan-féle metszettétel alkalmazásai

6.3.1. Definíció (reláció metszete, ismétlés)**.** Legyenek X és Y tetszőleges halmazok. Egy $R \subseteq X \times Y$ reláció

1. $\forall\, x \in X$ melletti *metszete (szelete, felső nívóhalmaza)*:

$$R_x \doteq \{y \in Y \;:\; xRy\}\,,$$

2. $\forall\, y \in Y$ melletti *metszete (szelete, alsó nívóhalmaza)*:

$$R^y \doteq \{x \in X \;:\; xRy\}\,,$$

3. az $F_R : X \to \mathscr{P}(Y)$ halmazértékű leképezése az a leképezés, amelyre $\forall\, x \in X$ esetén

$$F_R(x) \doteq R_x = \{y \in Y \;:\; xRy\}\,.$$

Ky Fan-féle fixponttétel

6.3.2. Állítás (Ky Fan-lemma)**.** *Legyen* $(X,+,\cdot)$ $\mathbb{R}$ *feletti vektortér.*

1. Legyen $K \subseteq X$ *nemüres konvex halmaz. Ha egy* $R \subseteq K \times K$ *reláció*

(1) irreflexív,

(2) $\forall\, y \in K$ *esetén* $R^y \subseteq K$ *konvex,*

akkor az R^c *komplementer relációhoz tartozó* $F_{R^c} : K \to \mathscr{P}(K)$ *halmazértékű leképezés KKM-tulajdonságú:* $\forall\, \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq K$ *véges részhalmazra teljesül, hogy*

$$\mathrm{co}\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F_{R^c}(x_i) = \bigcup_{i=1}^{n} R^c_{x_i}\,.$$

2. Legyen $K \subseteq X$ *nemüres konvex halmaz. Ha egy* $R \subseteq K \times K$ *reláció*

(1) reflexív,

(2) komplementer-konkáv: $\forall\, \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq K$ *halmaz,* $\forall\, \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_n = 1$ *számok esetén*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i R^c_{x_i} \subseteq \left(R_{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}\right)^c \quad \text{azaz} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_{R^c}(x_i) \subseteq F_{R^c}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right),$$

akkor az R *relációhoz tartozó* $F_R : K \to \mathscr{P}(K)$ *halmazértékű leképezés KKM-tulajdonságú:* $\forall\, \{x_1,\ldots,x_s\} \subseteq K$ *véges részhalmazra teljesül, hogy*

$$\mathrm{co}\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F_R(x_i) = \bigcup_{i=1}^{n} R_{x_i}\,.$$

Bizonyítás. 1. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\, \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq K$, továbbá $\exists\, \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_n = 1$, hogy

$$y \doteq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} (R_{x_i})^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} R_{x_i}\,,$$

azaz $\forall\, i = 1,\ldots,n$ esetén

$$y \in R_{x_i}\,, \ \text{azaz} \ x_i R y\,, \ \text{azaz} \ x_i \in R^y\,.$$

Mivel az R^y halmaz konvex, ezért $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in R^y$, azaz yRy, de az R reláció irreflexív, ezért ez ellentmondás.

2. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq K$, továbbá $\exists\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=1$, hogy

$$y \doteq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} R_{x_i}\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (R_{x_i})^c\,,$$

azaz $\forall\ i=1,\ldots,n$ esetén $y \in (R_{x_i})^c$, így az R reláció komplementer-konkáv volta miatt

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y \in \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (R_{x_i})^c \subseteq (R_{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i})^c = (R_y)^c\,,$$

azaz $yR^c y$, de az R reláció reflexív, ezért ez ellentmondás. □

6.3.3. Állítás (Ky Fan-egyenlőtlenség)**.** *Legyen $(X,\|.\|)$ normált tér. Ha $K \subseteq X$ nemüres, konvex, kompakt halmaz, valamint $f: K \to X$ folytonos leképezés, $g: K \times X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre teljesül továbbá az is, hogy $\forall\ z \in X$ esetén a $g(.,z): K \to \mathbb{R}$ függvény konvex, akkor $\exists\ x_0 \in K$, amely a $g(.,f(x_0)): K \to \mathbb{R}$ függvény minimumhelye:*

$$\forall\ x \in K \ \textit{ esetén }\ g(x_0,f(x_0)) \le g(x,f(x_0))\,.$$

Speciálisan: A $g \doteq d_{\|.\|}|_{K\times X}$ függvény esetén $\exists\ x_0 \in K$, amelyre

$$\forall\ x \in K \ \textit{ esetén }\ \|x_0 - f(x_0)\| \le \|x - f(x_0)\|\,,$$

ami azt jelenti, hogy az $f(x_0) \in X$ ponthoz legközelebbi K-beli pont az x_0.

Bizonyítás. Legyen $R \subseteq K \times K$ a következő reláció:

$$R \doteq \{(x,y) \in K \times K \ :\ g(y,f(y)) > g(x,f(y))\}\,.$$

Az R reláció irreflexív, ugyanis a $>$ reláció irreflexív.
Az R relációnak $\forall\ y \in K$ melletti metszete:

$$R^y = \{x \in K \ :\ xRy\} = \{x \in K \ :\ g(y,f(y)) > g(x,f(y))\}\,.$$

Látható, hogy $\forall\ y \in K$ esetén az $R^y \subseteq K$ halmaz konvex.
Ugyanis: Legyen $y \in K$ tetszőleges, legyenek $x_1,x_2 \in R^y$, azaz

$$g(y,f(y)) > g(x_1,f(y)) \ \text{ és }\ g(y,f(y)) > g(x_2,f(y))\,.$$

Mivel az $g(.,f(y))$ függvény konvex, ezért $\forall\ \lambda \in [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} g(y,f(y)) &= \lambda g(y,f(y)) + (1-\lambda)g(y,f(y)) \\ &> \lambda g(x_1,f(y)) + (1-\lambda)g(x_1,f(y)) \\ &\ge g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, f(y))\,, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in R^y$.

Tekintsük az $F_{R^c} : K \to \mathscr{P}(K)$ halmazértékű leképezést, azaz amelyre $\forall\, x \in K$ esetén

$$\begin{aligned} F_{R^c}(x) &= (R^c)_x = \{y \in R^c \ : \ xR^c y\} \\ &= \{y \in K \ : \ g(y, f(y)) \leq g(x, f(y))\} \\ &= \{y \in K \ : \ [g(., f(.)) - g(x, f(.))](y) \leq 0\}\,. \end{aligned}$$

Mivel az R reláció irreflexív, és $\forall\, y \in K$ esetén az $R^y \subseteq K$ halmaz konvex, ezért a Ky Fan-lemma (6.3.2. állítás) szerint az F_{R^c} halmazértékű leképezés KKM-tulajdonságú. Mivel az f és g függvények folytonosak, ezért az $F_{R^c}(x) \subseteq K$ halmaz zárt. Mivel pedig a $K \subseteq X$ halmaz kompakt, ezért az $F_{R^c}(x) \subseteq K$ halmaz kompakt. Ezek szerint teljesülnek az F_{R^c} halmazértékű leképezésre teljesülnek a Ky Fan-féle metszettétel (6.2.13. állítás) feltételei, ezért

$$\bigcap_{x \in K} F_{R^c} = \bigcap_{x \in K} \{y \in K \ : \ g(y, f(y)) \leq g(x, f(y))\} \neq \emptyset\,,$$

ami azt jelenti, hogy $\exists\, x_0$, hogy $\forall\, x \in K$ esetén $g(x_0, f(x_0)) \leq g(x, f(x_0))$. □

6.3.4. Megjegyzés. Az előző állítás speciális esete és a tompaszögtétel alapján igaz a következő állítás:

Legyen $(X, \langle ., . \rangle)$ Hilbert-tér. Ha $K \subseteq X$ nemüres, konvex, kompakt halmaz, valamint $f : K \to X$ folytonos leképezés, akkor $\exists\, x_0 \in K$, amelyre

$$\forall\, x \in K \text{ esetén } \langle f(x_0) - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0\,.$$

6.3.5. Állítás (Ky Fan-féle fixponttétel)**.** *Legyen $(X, \|.\|)$ normált tér. Ha $K \subseteq X$ nemüres, konvex, kompakt halmaz, valamint $f : K \to X$ olyan folytonos leképezés, amelyre*

$$\forall\, x \in K\,,\ x \neq f(x) \quad \textit{esetén az} \quad [x, f(x)] \cap K \quad \textit{halmaz legalább két elemű}\,,$$

akkor az f leképezésnek létezik fixpontja:

$$\exists\, x_0 \in K\,, \ \textit{hogy} \ f(x_0) = x_0\,.$$

Bizonyítás. A Ky Fan-egyenlőtlenség (6.3.3. állítás) szerint $\exists\, x_0 \in K$, amelyre

$$\forall\, x \in K \text{ esetén } \|x_0 - f(x_0)\| \leq \|x - f(x_0)\|\,. \tag{6.8}$$

Belátjuk, hogy $f(x_0) = x_0$.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $f(x_0) \neq x_0$. Az állítás feltétele értelmében emiatt $\exists\, x \in [x_0, f(x_0)] \cap K$, $x \neq x_0$. Ekkor $\exists\, \lambda \in (0,1)$, hogy $x = \lambda x_0 + (1-\lambda) f(x_0)$. Mivel $x \in K$, ezért az (6.8) egyenlőtlenség szerint, valamint $\lambda \in (0,1)$ volta miatt

$$\begin{aligned} \|x_0 - f(x_0)\| &\leq \|x - f(x_0)\| \\ &= \|\lambda x_0 + (1-\lambda) f(x_0) - f(x_0)\| \\ &= \|\lambda x_0 - \lambda f(x_0)\| \\ &= \lambda \|x_0 - f(x_0)\| \\ &< \|x_0 - f(x_0)\|\,, \end{aligned}$$

ami ellentmondás. □

A minimaxtétel

A Ky Fan-féle koincidencia-tétel

6.3.6. Állítás (Ky Fan-féle koincidencia-tétel)**.** *Legyenek* $(X, \|.\|)$ *és* $(Y, \|.\|)$ *normált terek,* $C \subseteq X$ *és* $D \subseteq Y$ *nemüres, konvex, kompakt halmazok, legyenek* $A \subseteq C \times D$ *és* $B \subseteq C \times D$ *olyan relációk, amelyekre*

$$\forall\, x \in C \text{ esetén } A_x \subseteq D \text{ nyílt, } B_x \subseteq D \text{ nemüres, konvex halmaz,}$$

$$\forall\, y \in D \text{ esetén } A^y \subseteq C \text{ nemüres, konvex, } B^y \subseteq C \text{ nyílt halmaz.}$$

Ekkor

$$\exists\, (x_0, y_0) \in C \times D\,, \ \text{hogy} \ (x_0, y_0) \in A \cap B\,, \ \text{azaz} \ x_0 A y_0 \text{ és } x_0 B y_0\,,$$

átfogalmazva: $\exists\, x_0 \in C$, *hogy*

$$A_{x_0} \cap B_{x_0} \neq \emptyset\,, \ \text{azaz} \ \exists\, y_0 \in A_{x_0} \cap B_{x_0}\,.$$

Bizonyítás. Legyen $(u, v) \in C \times D$ tetszőleges.
Mivel $B_u \neq \emptyset$, ezért $\exists\, y \in D$, hogy $y \in B_u$, azaz uBy, azaz $u \in B^y$.
Mivel $A^v \neq \emptyset$, ezért $\exists\, x \in C$, hogy $x \in A^v$, azaz xAv, azaz $v \in A_x$.
Ezek szerint $(u, v) \in B^y \times A_x$.
Mivel $(u, v) \in C \times D$ tetszőleges, ezért

$$C \times D = \bigcup_{(x,y) \in C \times D} B^y \times A_x\,,$$

emiatt

$$\begin{aligned}
\emptyset &= (C \times D) \setminus \bigcup_{(x,y) \in C \times D} B^y \times A_x \\
&= (C \times D) \cap \left(\bigcup_{(x,y) \in C \times D} B^y \times A_x \right)^c \\
&= (C \times D) \cap \left(\bigcap_{(x,y) \in C \times D} (B^y \times A_x)^c \right) \\
&= \bigcap_{(x,y) \in C \times D} (C \times D) \cap (B^y \times A_x)^c\,.
\end{aligned}$$

Legyen $F : C \times D \to \mathscr{P}(C \times D)$ az a halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\, (x, y) \in C \times D$ esetén

$$F(x, y) \doteq (C \times D) \cap (B^y \times A_x)^c\,.$$

Az előzőek szerint
$$\bigcap_{(x,y)\in C\times D} F(x,y)=\emptyset\,. \tag{6.9}$$
Látható, hogy $\forall\,(x,y)\in C\times D$ esetén $F(x,y)\subseteq X\times Y$ kompakt halmaz.
Ugyanis: Mivel $C\subseteq X$ és $D\subseteq Y$ kompakt, ezért $C\times D\subseteq X\times Y$ kompakt halmaz. Mivel $\forall\,(x,y)\in C\times D$ esetén $A_x\subseteq Y$ és $B^y\subseteq X$ nyílt halmazok, ezért $B^y\times A_x\subseteq X\times Y$ nyílt, így $(B^y\times A_x)^c\subseteq X\times Y$ zárt halmaz. Ezért $(C\times D)\cap(B^y\times A_x)^c\subseteq X\times Y$ kompakt halmaz.
Az F halmazértékű leképezés nem KKM-tulajdonságú. Ugyanis ellenkező esetben fennállnának a Ky Fan-féle metszettétel, azaz az 6.2.13.állítás feltételei, amely értelmében
$$\bigcap_{(x,y)\in C\times D} F(x,y)\neq\emptyset\,.$$
volna, ami (6.9) szerint ellentmondás.
Ez azt jelenti, hogy $\exists\,\{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}\subseteq C\times D$, hogy
$$\mathrm{co}\{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}\nsubseteq\bigcup_{i=1}^{n}F(x_i,y_i)\,,$$
azaz $\exists\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n=1$, hogy
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i,y) &\in \left(\bigcup_{i=1}^{n}F(x_i,y_i)\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}(F(x_i,y_i))^c\\ &= \bigcap_{i=1}^{n}[(C\times D)\cap(B^{y_i}\times A_{x_i})^c]^c\\ &= (C\times D)^c\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}(B^{y_i}\times A_{x_i})\right).\end{aligned}$$
Mivel $\forall\,i=1,\ldots,n$ esetén $(x_i,y_i)\in C\times D$, valamint C és D konvex halmazok, ezért $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i,y_i)\in C\times D$, így az előzőek szerint
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i,y_i)\in\bigcap_{i=1}^{n}(B^{y_i}\times A_{x_i})\,,$$
ezek szerrint pedig $\forall\,i=1,\ldots,n$ esetén
$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x_j,y_j)\in B^{y_i}\times A_{x_i}\,.$$
Jelölje
$$x_0\doteq\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx_j\ \text{ és }\ y_0\doteq\sum_{j=1}^{n}\alpha_jy_j\,.$$

Az előzőekből $\forall\ i = 1, \ldots, n$ esetén

$$x_0 \in B^{y_i}\,, \ \text{azaz} \ (x_0, y_i) \in B\,, \ \text{azaz} \ y_i \in B_{x_0}\,,$$

illetve

$$y_0 \in A_{x_i}\,, \ \text{azaz} \ (x_i, y_0) \in A\,, \ \text{azaz} \ x_i \in A^{y_0}\,.$$

Mivel B_{x_0} és A^{y_0} konvex halmazok, ezért

$$y_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \in B_{x_0}\,, \ \text{azaz} \ x_0 B y_0\,,$$

illetve

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \in A^{y_0}\,, \ \text{azaz} \ x_0 A y_0\,,$$

ami bizonyítja az állítást. □

Kvázikonvex függvények

A továbbiakban legyen $(X, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ feletti vektortér.

6.3.7. Állítás. *Ha egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény konvex, akkor $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ esetén az*

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \{x \in X \ : \ f(x) \le \alpha\} \subseteq X$$

halmaz konvex.

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $\forall\ x, y \in f^{-1}(-\infty, \alpha]$, azaz $f(x) \le \alpha$ és $f(y) \le \alpha$, valamint $\forall\ \lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \le \lambda \alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha\,,$$

azaz $\lambda x + (1-\lambda) y \in f^{-1}(-\infty, \alpha]$. □

6.3.8. Definíció. Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt *kvázikonvexnek* nevezünk, ha $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \{x \in X \ : \ f(x) \le \alpha\} \subseteq X$$

halmaz konvex.

6.3.9. Állítás (ekvivalens definíció)**.** *Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor kvázikonvex, ha $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ esetén az*

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = \{x \in X \ : \ f(x) < \alpha\} \subseteq X$$

halmaz konvex.

Bizonyítás. Szükségesség:

$$f^{-1}(-\infty,\alpha) = f^{-1}\left(\bigcup_{\beta<\alpha}(-\infty,\beta]\right) = \bigcup_{\beta<\alpha} f^{-1}(-\infty,\beta]\,,$$

és konvex halmazok bővülő uniója konvex.
Elégségesség:

$$f^{-1}(-\infty,\alpha] = f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha<\beta}(-\infty,\beta)\right) = \bigcap_{\alpha<\beta} f^{-1}(-\infty,\beta)\,,$$

és konvex halmazok metszete konvex. □

6.3.10. Állítás (ekvivalens definíció)**.** *Egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor kvázikonvex, ha $\forall\, x,y \in X$ és $\forall\, \lambda \in [0,1]$ esetén*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}\,,$$

átfogalmazva:

$$f(x) \leq f(y) \;\Rightarrow\; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(y)\,.$$

Bizonyítás. Szükségesség: Legyenek $x,y \in X$ tetszőlegesek, legyen továbbá $\alpha \doteq \max\{f(x), f(y)\}$, ekkor $x,y \in f^{-1}(-\infty,\alpha]$, mivel az $f^{-1}(-\infty,\alpha]$ halmaz konvex, ezért $\forall\, \lambda \in [0,1]$ esetén $\lambda x + (1-\lambda)y \in f^{-1}(-\infty,\alpha]$, azaz

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \alpha = \max\{f(x), f(y)\}\,.$$

Elégségesség: Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor $\forall\, x,y \in f^{-1}(-\infty,\alpha]$ és $\forall\, \lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha\,.$$

így $\lambda x + (1-\lambda)y \in f^{-1}(-\infty,\alpha]$. □

6.3.11. Megjegyzés. Nagyon sokféle függvény lehet kvázikonvex. Például, ha egy valós függvény monoton növő, akkor kvázikonvex. Speciálisan, ha monoton növő és konkáv, akkor is kvázikonvex.

A minimax-tétel

6.3.12. Állítás (minimax-állítás)**.** *Legyenek C és D tetszőleges halmazok, $f : C \times D \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, ekkor*

$$\sup_{x\in C}\inf_{y\in D} f(x,y) \leq \inf_{y\in D}\sup_{x\in C} f(x,y)\,.$$

Bizonyítás. (Könnyen látható.) Legyen $y_0 \in D$ tetszőleges, ekkor $\forall\, x \in C$ esetén

$$\inf_{y \in C} f(x,y) \le f(x,y_0)\,.$$

Ezért $\forall\, y_0 \in D$ esetén

$$\sup_{x \in C} \inf_{y \in D} f(x,y) \le \sup_{x \in C} f(x,y_0)\,,$$

emiatt

$$\sup_{x \in C} \inf_{y \in D} f(x,y) \le \inf_{y \in D} \sup_{x \in C} f(x,y)\,. \qquad \square$$

6.3.13. Állítás (Sion-féle minimax-tétel)**.** *Legyenek* $(X,\|.\|)$ *és* $(Y,\|.\|)$ *normált terek. Ha* $C \subseteq X$ *és* $D \subseteq Y$ *nemüres, konvex, kompakt halmazok, és egy* $f : C \times D \to \mathbb{R}$ *függvényre*

(1) $\forall\, x \in C$ *esetén* $f(x,.) : D \to \mathbb{R}$ *alulról félig folytonos és kvázikonvex függvény* ($\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *esetén* $f^{-1}(x,.)(-\infty,\alpha] \subseteq D$ *zárt és konvex halmaz),*

(2) $\forall\, y \in D$ *esetén* $f(.,y) : C \to \mathbb{R}$ *felülről félig folytonos és kvázikonkáv függvény* ($\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *esetén* $f^{-1}(.,y)[\alpha,\infty) \subseteq D$ *zárt és konvex halmaz),*

akkor

$$\max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x,y) = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x,y)\,.$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy

$$\exists\ \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x,y) \ \text{ és } \ \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x,y)\,.$$

Ugyanis: Látható, hogy

$$\sup_{x \in C} \inf_{y \in D} f(x,y) = \sup_{x \in C} \left(\bigwedge_{y \in D} f(.,y) \right)(x)\,.$$

Mivel $\forall\, y \in D$ esetén az $f(.,y)$ függvény f.f.f., ezért az $\bigwedge_{y \in D} f(.,y)$ alsó burkolója is f.f.f.. Mivel a $C \subseteq X$ halmaz kompakt, ezért $\exists\ \max_{x \in C} \bigwedge_{y \in D} f(.,y)$, azaz $\exists\ x_0 \in C$, hogy

$$\sup_{x \in C} \left(\bigwedge_{y \in D} f(.,y) \right) = \bigwedge_{y \in D} f(.,y)(x_0) = \inf_{y \in D} f(x_0,y)\,.$$

Mivel az állítás feltételei szerint $f(x_0,.)$ függvény a.f.f., és a $D \subseteq Y$ halmaz kompakt, ezért $\exists\ \min_{y \in D} f(x_0,y)$, azaz $\exists\ y_0 \in D$, hogy

$$\inf_{y \in D} f(x_0,y) = f(x_0,y_0)\,.$$

Ezek szerint

$$\sup_{x \in C} \inf_{y \in D} f(x,y) = \inf_{y \in D} f(x_0,y) = f(x_0,y_0)\,, \ \text{ azaz } \exists\ \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x,y)\,.$$

Hasonlóan látható, hogy $\exists\ \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x,y)$.

Az előző, 6.3.12. állítás szerint

$$\max_{x\in C}\min_{y\in D} f(x,y) \le \min_{y\in D}\max_{x\in C} f(x,y)\,.$$

Belátjuk, hogy

$$\max_{x\in C}\min_{y\in D} f(x,y) = \min_{y\in D}\max_{x\in C} f(x,y)\,.$$

Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\max_{x\in C}\min_{y\in D} f(x,y) < \min_{y\in D}\max_{x\in C} f(x,y)\,.$$

Ekkor $\exists\ \alpha\in\mathbb{R}$, hogy

$$\max_{x\in C}\min_{y\in D} f(x,y) < \alpha < \min_{y\in D}\max_{x\in C} f(x,y)\,.$$

Legyen

$$\begin{aligned} A &\doteq f^{-1}(\alpha,\infty) = \{(x,y)\in C\times D\ :\ f(x,y)>\alpha\}\,,\\ B &\doteq f^{-1}(-\infty,\alpha) = \{(x,y)\in C\times D\ :\ f(x,y)<\alpha\}\,. \end{aligned}$$

Ekkor fennállnak a Ky Fan-féle koincidencia-tétel (6.3.6. állítás) feltételei:
Feltettük, hogy $C\subseteq X$ és $D\subseteq Y$ nemüres, konvex, kompakt halmazok.
Továbbá $\forall\ x\in C$ esetén

$$\begin{aligned} A_x &= \{y\in D\ :\ (x,y)\in A\} = \{y\in D\ :\ f(x,y)>\alpha\}\\ &= (f(x,.))^{-1}(\alpha,\infty),\\ B_x &= \{y\in D\ :\ (x,y)\in B\} = \{y\in D\ :\ f(x,y)<\alpha\}\\ &= (f(x,.))^{-1}(-\infty,\alpha). \end{aligned}$$

Mivel $\forall\ x\in C$ esetén az $f(x,.):D\to\mathbb{R}$ függvény egyrészt a.f.f., ezért az A_x halmaz nyílt, másrészt kvázikonvex, ezért a B_x halmaz konvex.
Mivel $\exists\ (x_0,y_0)\in C\times D$, hogy

$$f(x_0,y_0) = \max_{x\in C}\min_{y\in D} f(x,y)\,,$$

ezért az indirekt feltétel szerint $\forall\ x\in C$ esetén $f(x,y_0)\le f(x_0,y_0)<\alpha$, azaz $y_0\in B_x$, így $B_x\neq\emptyset$.
Látható, hogy $\forall\ y\in D$ esetén

$$\begin{aligned} A^y &= \{x\in C\ :\ (x,y)\in A\} = \{x\in C\ :\ f(x,y)>\alpha\}\\ &= (f(.,y))^{-1}(\alpha,\infty),\\ B^y &= \{x\in C\ :\ (x,y)\in B\} = \{x\in C\ :\ f(x,y)<\alpha\}\\ &= (f(x,.))^{-1}(-\infty,\alpha). \end{aligned}$$

Mivel $\forall\ y\in D$ esetén az $f(.,y):C\to\mathbb{R}$ függvény egyrészt kvázikonkáv, ezért az A^y halmaz konvex, másrészt f.f.f., ezért a B^y halmaz nyílt.

Mivel $\exists\ (x_0, y_0) \in C \times D$, hogy

$$f(x_0, y_0) = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x, y)\,,$$

ezért az indirekt feltétel szerint $\forall\ y \in D$ esetén $f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) > \alpha$, azaz $x_0 \in A^y$, így $A^y \neq \emptyset$.
Mindezekkel fennállnak a Ky Fan-féle koincidencia-tétel (6.3.6. állítás) feltételei, ezért $\exists\ (x_0, y_0) \in A \cap B$ azaz

$$\exists\ (x_0, y_0) \in C \times D,\ \text{ hogy }\ f(x_0, y_0) < \alpha f(x_0, y_0)\,,$$

ami ellentmondás. Tehát $\max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x, y) = \min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x, y)$. □

Egy reláció jellemzése

6.3.14. Állítás. *Ha egy $R \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ reláció*

(1) teljes,

(2) monoton: $x \ll y \Rightarrow yR^c x$, azaz mivel R teljes, ezért xRy,

(3) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ esetén $R_x \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex,

(4) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ esetén $R_x \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt,

akkor az R relációhoz tartozó $F_R : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ halmazértékű leképezés KKM-tulajdonságú: $\forall\ \{x_1, \ldots, x_s\} \subseteq \mathbb{R}^n$ véges részhalmazra teljesül, hogy

$$\mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_n\} \ \subseteq\ \bigcup_{i=1}^{n} R_{x_i}\,.$$

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ \{x_1, \ldots, x_s\} \subseteq \mathbb{R}^n$ és $\exists\ x \in \mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_s\}$, hogy $x \notin \bigcup_{i=1}^n R_{x_i}$, azaz

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} R_{x_i}^c\,.$$

Mivel (4) szerint $\forall\ i = 1, \ldots, n$ esetén $R_{x_i} \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt, ezért $R_{x_i}^c \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, így $\bigcap_{i=1}^n R_{x_i}^c$ nyílt, emiatt $\exists\ y \in \mathbb{R}^n,\ x \ll y$, hogy $y \in \bigcap_{i=1}^n R_{x_i}^c$, azaz

$$\forall\ i = 1, \ldots, n\ \text{ esetén }\ y \in R_{x_i}^c\,,\ \text{ azaz }\ x_i R^c y\,.$$

Mivel (1) szerint R teljes, ezért ez ekvivalens azzal, hogy

$$\forall\ i = 1, \ldots, n\ \text{ esetén }\ yRx_i\,,\ \text{ azaz }\ x_i \in R_y\,.$$

Mivel (4) szerint R konvex, ezért $\mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq R_y$. Továbbá mivel $x \in \mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_n\}$, ezért $x \in R_y$, azaz yRx. Mivel $x \ll y$, és (3) szerint R monoton, ezért $yR^c x$, ami ellentmondás. □

6.3.15. Állítás. *Ha egy $R \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ reláció teljes, monoton, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ esetén $R_x \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex és zárt halmaz, valamint egy $K \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz nemüres, konvex, kompakt (korlátos és zárt), akkor a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaznak létezik az R reláció szerinti maximális eleme:*

$$\exists\, x_0 \in K \;\; hogy \;\; \forall\, x \in K \;\; esetén \;\; xRx_0 \,.$$

Bizonyítás. Legyen $F : K \to \mathscr{P}(K)$ az a halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\, x \in K$ esetén

$$F(x) \doteq F_R(x) \cap K = R_x \cap K \,.$$

Mivel az R relációra fennállnak az előző 6.3.14. állítás szerint az $F_R : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ halmazértékű leképezés KKM-tulajdonságú: $\forall\, \{x_1, \ldots, x_s\} \subseteq \mathbb{R}^n$ véges részhalmazra

$$\mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_n\} \;\subseteq\; \bigcup_{i=1}^{n} R_{x_i} \,.$$

Mivel K halmaz konvex, ezért $\forall\, \{x_1, \ldots, x_s\} \subseteq K$ véges részhalmazra

$$\mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_n\} \;\subseteq\; \left(\bigcup_{i=1}^{n} R_{x_i} \right) \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} (R_{x_i} \cap K) = \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i) \,.$$

ami azt jelenti, hogy az F halmazértékű leképezés KKM-tulajdonságú.
Mivel $\forall\, x \in K$ esetén R_x zárt halmaz, valamint a K halmaz kompakt, ezért $F(x) = R_x \cap K$ kompakt halmaz.
Ezek alapján fennálnak a Ky Fan-féle metszettétel, azaz az 6.2.13. állítás feltételei, ezért

$$\bigcap_{x \in K} F(x) \neq \emptyset, \;\; \text{azaz } \exists\, x_0 \in \bigcap_{x \in K} F(x) = \bigcap_{x \in K} R_x \cap K \,,$$

azaz $\exists\, x_0 \in K$, hogy $\forall\, x \in K$ esetén $x_0 \in R_x$, azaz xRx_0. □

6.3.16. Megjegyzés. Nincs feltéve, hogy R tranzitív, hanem az, hogy monoton.

A variációs feladat

6.3.17. Definíció. Legyen $(X, \langle .,. \rangle)$ skaláris szorzatos tér, $K \subseteq X$ nemürers halmaz valamint $f : K \to X$ leképezés.
A (K, f) párt *variációs feladatnak* nevezzük.
Egy $x_0 \in K$ pontot a (K, f) variációs feladat *megoldásának* nevezünk, ha kielégíti a következő *variációs egyenlőtlenséget*:

$$\forall\, x \in K \;\; \text{esetén} \;\; \langle f(x_0), x_0 - x \rangle \leq 0 \,.$$

Jelölés: $x_0 \in VI(K, f)$.

6.3.18. Definíció. Legyen $(X,\langle .,.\rangle)$ skaláris szorzatos tér. Egy $f:K\to X$ leképezést *monoton növőnek* nevezünk, ha $\forall\, x,y\in X$ esetén

$$\langle f(y)-f(x),y-x\rangle \geq 0\,,$$

másképpen

$$\langle f(x),y-x\rangle \leq \langle f(y),y-x\rangle\,.$$

6.3.19. Megjegyzés. 1. Az X halmazon nem definiáltunk rendezést.
2. Egy $f:D\to\mathbb{R}$ $(D\subseteq\mathbb{R})$ függvény pontosan akkor monoton növő, ha $\forall\, x,y\in D$ esetén

$$(f(y)-f(x))\cdot(y-x)\geq 0\,.$$

6.3.20. Definíció. Legyen $(X,\langle .,.\rangle)$ skaláris szorzatos tér. Egy $f:K\to X$ $(K\subseteq X)$ leképezést *lineárisan (egyenesek mentén) folytonosnak* nevezünk, ha $\forall\, x,y\in K$ mellett az

$$A\doteq \operatorname{aff}\{x,y\}=\{\lambda x+(1-\lambda)y\ :\ \lambda\in\mathbb{R}\}=x+\operatorname{lin}\{y-x\}$$

egyenesen (egydimenziós affin halmazon) az $f|_A:A\cap K\to X$ leképezés folytonos.

6.3.21. Állítás. *Legyen $(X,\langle .,.\rangle)$ Hilbert-tér. Ha $K\subseteq X$ nemüres, konvex, korlátos és zárt halmaz, valamint $f:K\to X$ monoton és lineárisan folytonos, akkor a (K,f) variációs feladatnak létezik megoldása:*

$$\exists\, x_0\in K,\ \ \textit{hogy}\ \ \forall\, x\in K\ \ \textit{esetén}\ \ \langle f(x_0),x_0-x\rangle\leq 0\,.$$

Bizonyítás. 1. lépés: Legyen $G:K\to\mathscr{P}(K)$ az a halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\, x\in K$ esetén

$$G(x)\doteq\{y\in K\ :\ \langle f(y),y-x\rangle\leq 0\}\,.$$

Azt látjuk be, hogy

$$\bigcap_{x\in K}G(x)\neq\emptyset,\ \text{azaz}\ \exists\, x_0\in\bigcap_{x\in K}G(x)\,,$$

amiből következik az állítás, mert ekkor G definíciója szerint

$$\forall\, x\in K\ \ \text{esetén}\ \ \langle f(x_0),x_0-x\rangle\leq 0\,.$$

Ehhez először is gondoljuk meg, hogy a $G:K\to\mathscr{P}(K)$ halmazértékű leképezés KKM-tulajdonságú.

Ugyanis: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists \, \{x_1,\dots,x_n\} \subseteq K$ véges halmaz, hogy

$$\mathrm{co}\{x_1,\dots,x_n\} \not\subseteq \bigcup_{x\in K} G(x)\,,$$

azaz $\exists \, \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}_+ \;\; \alpha_1+\ldots+\alpha_n = 1$ hogy

$$y \doteq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (G(x_i))^c\,,$$

azaz $\forall \; i=1,\dots,n$ esetén $y \notin G(x_i)$, ami azt jelenti, hogy $\langle f(y), y-x_i\rangle > 0$, így

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle f(y), y-x_i\rangle = \langle f(y), y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\rangle = \langle f(y), \mathbf{0}\rangle = 0\,,$$

ami ellentmondás.

Mivel az f függvényről nem tettük fel, hogy folytonos, csak azt, hogy lineárisan folytonos, ezért még nem biztos, hogy G-re fennállnak a Ky Fan-féle metszettétel feltételei.

2. lépés: Legyen $H: K \to \mathscr{P}(K)$ az a halmazértékű leképezés, amelyre $\forall \, x \in K$ esetén

$$H(x) \doteq \{y \in K \;:\; \langle f(x), y-x\rangle \le 0\} = \langle f(x), .\rangle^{-1}(-\infty, \langle f(x), x\rangle] \cap K\,.$$

A H halmazértékű leképezés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(1) $\forall \, x \in K$ esetén $G(x) \subseteq H(x)$,

(2) $\bigcap_{x\in K} G(x) = \bigcap_{x\in K} H(x)$ (persze most még nem tudjuk, hogy nemüresek),

(3) KKM-tulajdonságú,

(4) $\forall \, x \in K$ esetén a $H(x) \subseteq X$ halmaz konvex, korlátos és zárt.

Ugyanis: (1) Legyen $y \in G(x)$ tetszőleges, azaz $\langle f(y), y-x\rangle \le 0$. Mivel az f fügvény monoton növő, ami azt jelenti, hogy $\langle f(x), y-x\rangle \le \langle f(y), y-x\rangle$, ezért $\langle f(x), y-x\rangle \le 0$, azaz $y \in H(x)$.

(2) „$\subseteq$": Az (1) szerint teljesül.
„$\supseteq$": Ha $\bigcap_{x\in K} H(x) = \emptyset$, akkor nyilván igaz a tartalmazás. Tegyük fel, hogy $\bigcap_{x\in K} H(x) \ne \emptyset$, és legyen $y \in \bigcap_{x\in K} H(x)$, azaz $\forall \; x \in K$ esetén $\langle f(x), y-x\rangle \le 0$.

Mivel a $K \subseteq X$ halmaz konvex és $x, y \in K$, így $\forall\, \lambda \in [0,1]$ esetén $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$, ezért az előzőek szerint

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle f(\lambda x + (1-\lambda)y), y - (\lambda x + (1-\lambda)y)\rangle \\ &= \langle f(\lambda x + (1-\lambda)y), \lambda(y-x)\rangle \\ &= \lambda\langle f(\lambda x + (1-\lambda)y), (y-x)\rangle\,. \end{aligned}$$

Ekkor $\forall\, \lambda \in (0,1]$ esetén $\lambda\langle f(\lambda x + (1-\lambda)y), (y-x)\rangle \leq 0$, ezért

$$\langle f(\lambda x + (1-\lambda)y), (y-x)\rangle \leq 0\,,$$

amiből az f függvény lineárisan folytonossága miatt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{\lambda \to 0+} \langle f(\lambda x + (1-\lambda)y), y - x\rangle \\ &= \langle \lim_{\lambda \to 0+} f(\lambda x + (1-\lambda)y), y - x\rangle \\ &= \langle f(\lim_{\lambda \to 0+} (\lambda x + (1-\lambda)y)), y - x\rangle \\ &= \langle f(y), y - x\rangle\,. \end{aligned}$$

Az előzőek szerint $\forall\, x \in K$ esetén $\langle f(y), y-x\rangle \leq 0$, azaz $y \in G(x)$, ami azt jelenti, hogy

$$y \in \bigcap_{x \in K} G(x)\,.$$

(3) Mivel G KKM-tulajdonságú, ezért az (1) szerint $\forall\, \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ véges halmaz esetén

$$\operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} H(x_i)\,.$$

(4) Mivel $\forall\, x \in K$ esetén $H(x)$ egy zárt féltér és a K konvex, korlátos és zárt halmaz metszete, ezért a $H(x)$ halmaz is konvex, korlátos és zárt.

Mivel (3) és (4) szerint az $(X, \langle ., . \rangle)$ Hilbert-térben a H halmazértkű leképezésre fennállnak a Ky Fan-metszettétel (6.2.13. állítás) 2. pontjának a feltételei, ezért

$$\bigcap_{x \in K} H(x) \neq \emptyset\,.$$

Továbbá (2) értelmében

$$\bigcap_{x \in K} G(x) = \bigcap_{x \in K} H(x)\,,$$

ezért

$$\bigcap_{x \in K} G(x) \neq \emptyset\,,$$

ami igazolja az állítást. □

6.4. A Tarski-féle fixponttétel

6.4.1. Megjegyzés. A következő fixponttétel rendezett halmazok közötti leképezésre vonatkozik, nincs folytonossági és kompaktsági feltevés.

6.4.2. Állítás (Tarski-féle fixponttétel, 1950)**.** *Legyen* $(X,\leq)$ *teljes háló. Ha* $f : X \to X$ *rendezéstartó (monoton növő) leképezés, akkor az* f *leképezésnek létezik fixpontja:*

$$\exists\, x_0 \in K\,, \;\; \textit{hogy} \;\; f(x_0) = x_0\,.$$

Speciálisan: Ha $f : [0,1] \to [0,1]$ *monoton növő, akkor létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $b \in X$ az X legkisebb eleme: $\forall\, x \in X$ esetén $b \leq x$. Legyen

$$X_0 \doteq \{x \in X \;:\; x \leq f(x)\}\,.$$

Ekkor $X_0 \neq \emptyset$, ugyanis: $b \in X_0$. Emiatt $\exists\, x_0 \doteq \sup X_0$. Belátjuk, hogy

$$f(x_0) = x_0\,.$$

Ugyanis: „$\geq$”: Legyen $x \in X_0$ tetszőleges, ekkor egyrészt az X_0 definíciója szerint $x \leq f(x)$, másrészt $x \leq x_0 (= \sup X_0)$. Mivel f rendezéstartó, ezért $f(x) \leq f(x_0)$, ezek szerint $x \leq f(x) \leq f(x_0)$. Mivel ez igaz $\forall\, x \in X_0$ esetén, ezért $f(x_0)$ felső korlátja X_0-nak, így $x_0 \leq f(x_0)$.

„$\geq$”: Mivel $x_0 \leq f(x_0)$, ezért f rendezéstartása miatt $f(x_0) \leq f(f(x_0))$, emiatt X_0 definíciója miatt $f(x_0) \in X_0$, így $f(x_0) \leq \sup X_0 = x_0$.

Összevetve: $f(x_0) = x_0$. □

6.4.3. Állítás (Tarski)**.** *Legyen* $(X,\leq)$ *teljes háló, legyen* $f : X \to X$ *rendezéstartó (monoton növő) leképezés. Jelölje a fixpontjainak a halmazát:*

$$E \doteq \{x \in X \;:\; f(x) = x\}\,.$$

Ekkor $(E, \leq|_{E\times E})$ *teljes háló.*

Bizonyítás. A Tarski-fixponttétel (6.4.2. állítás) szerint $E \neq \emptyset$. Legyen $H \subseteq E$, $H \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. Ekkor $\exists\, a \doteq \sup_X H \in X$.

Belátjuk, hogy $\exists\, \sup_E H \in E$.

Látható, hogy $a \leq f(a)$.
Ugyanis: Legyen $x \in H$ tetszőleges, ekkor $x \leq a$. Mivel az f függvény rendezéstartó, ezért $f(x) \leq f(a)$. Mivel $H \subseteq E$, ezért $f(x) = x$, így $x \leq f(a)$. Ezek szerint $\forall\, x \in H$ esetén $x \leq f(a)$, ezért $a = \sup H \leq f(a)$.

Jelölje

$$X_a \doteq \{x \in X \;:\; a \le x\},$$

nyilván ez is teljes háló, továbbá $a \le f(a)$ és f rendezéstartása miatt teljesül, hogy $\forall\; x \in X_a$ esetén $f(x) \in X_a$. Így X_a és f vonatkozásában alkalmazható a Tarski-fixponttételt (6.4.2. állítás), eszerint $\exists\, x_0 \in X_a$, amelyre $f(x_0) = x_0$.

Tekintsük a következő halmazt:

$$X_a \cap E = \{x \in X \;:\; a \le x = f(x)\}.$$

Az előzőek szerint $x_0 \in X_a \cap E$, így $X_a \cap E \ne \emptyset$, emiatt $\exists\, b \doteq \inf X_a \cap E$.

Látható, hogy $f(b) \le b$.
Ugyanis: Legyen $x \in X_a \cap E$ tetszőleges, ekkor egyrészt $b \le x$. Mivel az f függvény rendezéstartó, ezért $f(b) \le f(x)$, másrészt $f(x) = x$, így $f(b) \le x$. Mivel pedig $\forall\, x \in X_a \cap E$ esetén $f(b) \le x$, ezért $f(b) \le \inf(X_a \cap E) = b$.

Látható, hogy $a \le b$.
Ugyanis: $\forall\, z \in X_a \cap E = \{x \in X \;:\; a \le x = f(x)\}$ esetén $a \le z$, ezért $a \le \inf(X_a \cap E) = b$.

Továbbá $a \le f(a) \le f(b) \le b$.
Ugyanis: Egyrészt $a \le b$, innen az f függvény rendezéstartása miatt $f(a) \le f(b)$. Másrészt a korábbiak alapján $a \le f(a)$ és $f(b) \le b$.

Jelölje

$$[a,b] \doteq \{x \in X \;:\; a \le x \le b\}.$$

Nyilván

$$([a,b], \le|_{[a,b]\times[a,b]})$$

teljes háló. Mivel az előzőek értelmében $f|_{[a,b]} : [a,b] \to [a,b]$, továbbá rendezéstartó, ezért a Tarski-fixponttétel (6.4.2. állítás) szerint létezik fixpontja: $\exists\; u \in [a,b]$, hogy $f(u) = u$.

Gondoljuk meg, hogy $u = b$, amiből $f(b) = b$. azaz $b \in E$.
Ugyanis: Mivel $u \in [a,b]$, ezért $u \le b$ és $a \le u$. Mivel pedig $f(u) = u$, ezért

$$u \in \{x \in X \;:\; a \le x = f(x)\} = X_a \cap E,$$

emiatt $b = \inf(X_a \cap E) \le u$ is teljesül.

Látható, hogy $\forall\, x \in H$ esetén $x \le b$.
Ugyanis: $\forall\, x \in H$ esetén $x \le \sup H = a \le b$.

Végül gondoljuk meg, hogy $\forall\, z \in E$ esetén, amelyre $\forall\, x \in H$ mellett $x \le z$, teljesül az is, hogy $b \le z$.
Ugyanis: Mivel $\forall\; x \in H$ esetén $x \le z$, ezért $a = \sup H \le z$. Mivel pedig $z \in E$, ezért $f(z) = z$, emiatt viszont $a \le z = f(z)$. Ez azt jelenti, hogy $z \in X_a \cap E$, emiatt $b = \inf X_a \cap E \le z$.

A három utolsó észrevétel azt jelenti, hogy az $(E, \le|_{E\times E})$ részbenrendezett halmazban $\sup_E H = b$, így $\exists\; \sup_E H$. Ezzel $(E, \le|_{E\times E})$ valóban teljes háló. $\square$

6.4.4. Állítás (Cantor-Berstein-tétel, ismétlés)**.** *Legyenek X és Y tetszőleges halmazok. Ha $\exists\, f : X \to Y$ injekció és $\exists\, g : Y \to X$ injekció, akkor $\exists\, h : X \to Y$ bijekció.*

Bizonyítás. (Tarski-fixponttétellel)
Tekintsük a $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ teljes hálót. (Ebben egy halmazrendszer sup-ja éppen az uniója, inf-je pedig a metszete.) Legyen $F : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ az a leképezés, amelyre $\forall\, A \in \mathscr{P}(X)$ esetén

$$F(A) \doteq g(f(A)^c)^c .$$

Az F leképezés rendezéstartó.
Ugyanis: Legyen $A_1 \subseteq A_2$, ekkor $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, így $f(A_1)^c \supseteq f(A_2)^c$, amiből $g(f(A_1)^c) \supseteq g(f(A_2)^c)$, ezek szerint $g(f(A_1)^c)^c \subseteq g(f(A_2)^c)^c$.
Ezért az 6.4.2. állítás, azaz a Tarski-fixponttétel szerint $\exists\, A_0 \in \mathscr{P}(X)$, amelyre

$$A_0 = F(A_0) = g(f(A_0)^c)^c ,$$

így $A_0^c = g(f(A_0)^c) \subseteq \mathscr{R}(g)$. Legyen $h : X \to Y$ az a leképezés, amelyre $\forall\, x \in X$ esetén

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha} \quad x \in A_0 \\ g^{-1}(x) & \text{ha} \quad x \in A_0^c (\subseteq \mathscr{R}(g)) \end{cases} ,$$

ami nyilván bijekció. □

6.5. Kontrakciók

Az inverzfüggvénytétel bizonyításában felhasználtuk a Banach-féle fixponttételt, és a reguláris leképezéseknek azt a jellemzését, miszerint a reguláris leképezések halmaza nyílt a folytonos lineáris leképezések halmazában. A Banach-féle fixponttételnek a halmazértékű leképezésekre vonatkozó egyik általánosítása a Nadler-féle fixponttétel, amit a Ljusztyernyik-tétel legáltalánosabb változatának a bizonyításában használunk fel az implicitfüggvény-tétel, tehát közvetve a Banach-féle fixponttétel helyett.

A Banach-féle fixponttétel

6.5.1. Definíció (iteráció)**.** Legyen X tetszőleges halmaz. Egy $f : X \to X$ függvény mellett egy (x_n) X-beli sorozatot *iterációnak* illetve *iterációs sorozatnak* nevezünk, ha tetszőlegesen adott $x_1 \in X$, és $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n+1} \doteq f(x_n) .$$

6.5.2. Megjegyzés. Legyen (X,d) metrikus tér. Ha $f : X \to X$ folytonos függvény, valamint egy (x_n) X-beli, az f függvény melleti iterációs sorozat konvergens, akkor az $x_0 \doteq \lim x_n \in X$ pont az $f : X \to X$ függvény fixpontja.
Ugyanis: az f függvény folytonossága alapján

$$f(x_0) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = \lim x_n = x_0 .$$

6.5.3. Definíció (kontrakció)**.** Legyenek (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek. Egy $f : X \to Y$ függvényt *kontrakciónak* nevezünk, ha valamely $\lambda \in (0,1)$ konstanssal Lipschitz-folytonos:

$$\exists\, \lambda \in (0,1), \text{ hogy } \forall\, x,y \in X \text{ esetén } d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d_X(x,y).$$

6.5.4. Megjegyzés (speciális eset)**.** Legyenek $(X, \|.\|)$ és $(Y, \|.\|)$ normált terek, $D \subseteq X$ konvex halmaz.

Ha $f : D \to Y$ differenciálható és $\forall\, x \in D$ esetén $\|f'(x)\| \leq \lambda < 1$, akkor az f függvény kontrakció.

Ugyanis: Következik a Lagrange-egyenlőtlenségből.

6.5.5. Állítás (Banach-féle fixponttétel)**.** *Legyen* (X, d)*, teljes metrikus tér.*

Ha egy $f : X \to X$ *függvény kontrakció, akkor*

(1) $\forall\, (x_n)$ *iterációs sorozat konvergens,*

(2) az f *függvénynek létezik pontosan egy fixpontja.*

Bizonyítás. Tekintsük egy (x_n) iterációs sorozatot, azaz legyen $x_1 \in X$ tetszőleges, legyen $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n+1} \doteq f(x_n).$$

(1) Belátjuk, hogy ez az iterációs sorozat Cauchy-sorozat.

Mivel az f függvény kontrakció, azaz

$$\exists\, \lambda \in (0,1), \text{ hogy } \forall\, x,y \in X \text{ esetén } d(f(x) - f(y)) \leq \lambda \cdot d(x,y),$$

ezért $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \lambda \cdot d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \lambda \cdot d(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq \lambda^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &= \lambda^2 \cdot d(f(x_{n-3}), f(x_{n-2})) \leq \ldots \leq \lambda^{n-1} \cdot d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Emiatt $\forall\, m,n \in \mathbb{N}$, $m < n$ esetén a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \lambda^{m-1} \cdot d(x_1, x_2) + \lambda^m \cdot d(x_1, x_2) + \ldots + \lambda^{n-2} \cdot d(x_1, x_2) \\ &= d(x_1, x_2) \cdot \sum_{k=m-1}^{n-2} \lambda^k. \end{aligned}$$

Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\lambda \in (0,1)$, ezért a $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ geometriai sor konvergens, emiatt Cauchy-feltétel szerint az $\frac{\varepsilon}{1+d(x_1,x_2)} > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall\, m,n > n_0$ esetén

$$\sum_{k=m-1}^{n-2} \lambda^k < \frac{\varepsilon}{1 + d(x_1, x_2)},$$

ebből a fentiek szerint

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon\,,$$

ami azt jelenti, hogy az (x_n) sorozat valóban Cauchy-sorozat.

Mivel (X,d) teljes metrikus tér, ezért az (x_n) sorozat konvergens.

(2) Az $x_0 \doteq \lim x_n \in X$ pont az $f : X \to X$ függvény fixpontja. Ugyanis az f függvény folytonossága miatt

$$f(x_0) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = \lim x_n = x_0\,.$$

Egyértelműség: Legyen $z_0 \in X$ az $f : X \to X$ függvény egy tetszőleges fixpontja:

$$f(z_0) = z_0\,,$$

ekkor

$$d(x_0, z_0) = d(f(x_0), f(z_0)) \leq \lambda d(x_0, z_0)\,,$$

ahol $\lambda \in (0,1)$, ezért $d(x_0, z_0) = 0$, így $x_0 = z_0$. □

6.5.6. Megjegyzés. Az állítás nem igaz $\lambda = 1$ Lipschitz-konstansú függvényekre.

6.5.7. Példa. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) \doteq x + \frac{\pi}{2} - \arctan x\,.$$

Ez a függvény $\lambda = 1$ konstanssal Lipschitz-tulajdonságú. Ugyanis: Mivel

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0\,,$$

ezért $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén $0 \leq |f'(x)| < 1$, továbbá

$$\sup |f'(x)| = \sup(1 - \frac{1}{1+x^2}) = \lim_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{1+x^2}) = 1\,,$$

emiatt az f függvény $\lambda = 1$ konstanssal Lipschitz-tulajdonságú.

Az f függvénynek ugyanakkor nem létezik fixpontja.
Ugyanis:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} - \arctan x = x \Leftrightarrow \arctan x = \frac{\pi}{2}\,,$$

és $\nexists\, x \in \mathbb{R}$, amire ez teljesülne.

Normált tér faktortere

A szokásosos módon jelölje $\mathbb{K} \doteq \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$.

6.5.8. Definíció (vektortér faktortere, ismétlés)**.** Egy $(X,+,\cdot)$ $\mathbb{K}$ feletti vektortér $M \subseteq X$ altere szerinti faktortere az az $(X/M,+,\cdot)$ $\mathbb{K}$ feletti vektortér, ahol

$$X/M \doteq \{x+M \ : \ x \in M\},$$
$$(x+M)+(y+M) \doteq (x+y)+M,$$
$$\lambda \cdot (x+M) \doteq (\lambda \cdot x)+M.$$

6.5.9. Megjegyzés. Látható, hogy

$$x' \in x+M \ \Leftrightarrow \ x'-x \in M \ \Leftrightarrow \ x'+M = x+M.$$

Ezek alapján az is látható, hogy a megadott műveletek függetlenek $x, y \in X$ választásától.
Ugyanis: Legyen $x' \in x+M$, $y' \in y+M$, azaz $x'-x \in M$, $y'-y \in M$, emiatt $(x'+y')-(x+y) \in M$, ami a fentiek szerint ekvivalens azzal, hogy

$$(x+y)+M = (x'+y')+M.$$

Hasonlóan látható be a szorzás jóldefiniált volta.

6.5.10. Definíció (normált tér faktortere)**.** Legyen $(X, \|.\|)$ $\mathbb{K}$ feletti normált tér, továbbá $M \subseteq X$ zárt altér. Értelmezzük az $(X/M,+,\cdot)$ faktortéren a következő $\|.\|_{X/M} : X/M \to \mathbb{K}$ normát: Legyen $\forall\, x+M \in X/M$ esetén

$$\|x+M\|_{X/M} \doteq \inf_{u \in M} \|x+u\| = \inf_{z \in x+M} \|z\|.$$

6.5.11. Megjegyzés. 1. Könnyen látható, hogy $\|.\|_{X/M} : X/M \to \mathbb{K}$ valóban norma.

2. A fenti norma által indukált metrikára $\forall\, x+M,\ y+M \in X/M$ esetén

$$\begin{aligned} d_{X/M}(x+M, y+M) &\doteq \|(x+M)-(y+M)\|_{X/M} = \|(x-y)+M\|_{X/M} \\ &= \inf_{u \in M} \|x-y+u\| \\ &= \inf\{\|x'-y'\| \ : \ x' \in x+M,\ y' \in y+M\}. \end{aligned}$$

3. Ebből az is következik, hogy $\forall\, x \in X,\ y+M \in X/M$ esetén

$$d_{\|.\|}(x, y+M) = d_{X/M}(x+M, y+M),$$

ugyanis:

$$\begin{aligned} d_{\|.\|}(x, y+M) &\doteq \inf_{y' \in y+M} \|x-y'\| = \inf_{u \in M} \|x-y'+u\| \\ &= d_{X/M}(x+M, y+M). \end{aligned}$$

Az inverzoperátor

6.5.12. Definíció (inverzoperátor)**.** Legyen $(X,\|.\|)$ és $(Y,\|.\|)$ $\mathbb{K}$ feletti normált tér, $A\in L(X,Y)$ folytonos lineáris leképezés, ekkor $\ker A\subseteq X$ zárt altér. Legyen $A\in L(X,Y)$ szürjektív folytonos lineáris leképezés, azaz $\operatorname{im} A=Y$, ekkor $\forall\ y\in Y$ esetén $\exists\ x\in X$, hogy

$$A^{-1}(y)=x+\ker A\in X/\ker A \quad (\text{ahol } Ax=y)\,.$$

Az $A\in L(X,Y)$ folytonos lineáris leképezés *inverzoperátorának* nevezzük a következő leképezést:

$$A^{-1}:Y\to X/\ker A\,,\quad y\mapsto A^{-1}(y)\doteq x+\ker A\,.$$

6.5.13. Megjegyzés. Az $A^{-1}:Y\to X/\ker A$ inverzoperátor formálisan nem az $A\in L(X,Y)$ folytonos lineáris leképezés inverze, sőt ez utóbbi általában nem is létezik. Az inverzoperátor voltaképpen egy halmazértékű leképezés, csakhogy a képhalmazok speciálisan most zárt affin halmazok, azaz az $X/\ker A$ faktortér pontjai.

Speciálisan $\ker A=\{\mathbf{0}\}$ mellett $X/\{\mathbf{0}\}=X$ azonosítással visszakapjuk az eredeti inverzfogalmat.

6.5.14. Állítás. *Legyen $(X,\|.\|)$ és $(Y,\|.\|)$ $\mathbb{K}$ feletti normált tér, $A\in L(X,Y)$ szürjektív folytonos lineáris leképezés. Ekkor az $A^{-1}:Y\to X/\ker A$ inverzoperátor izomorfia, azaz lineáris bijekció.*

Bizonyítás. Additív: Legyen $y_1,y_2\in Y$ tetszőleges. Mivel $A\in L(X,Y)$ szürjektív, ezért $\exists\ x_1,x_2\in X$, hogy $Ax_1=y_1$, $Ax_2=y_2$. Ekkor egyrészt

$$A^{-1}(y_1)=x_1+\ker A,\quad A^{-1}(y_2)=x_2+\ker A\,,$$

másrészt

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=y_1+y_2\,,$$

ezek alapján és az összeg definíciója szerint

$$\begin{aligned} A^{-1}(y_1+y_2) &= x_1+x_2+\ker A=(x_1+\ker A)+(x_2+\ker A)\\ &= A^{-1}(y_1)+A^{-1}(y_2)\,. \end{aligned}$$

A homogenitás bizonyítása ezzel analóg. Ezzel $A^{-1}:Y\to X/\ker A$ lineáris.

Szürjektív: Tetszőleges $x+\ker A\in X/\ker A$ esetén

$$A^{-1}(Ax)=x+\ker A\,.$$

Injektív:

$$\ker A^{-1}=\{y\in Y\ :\ A^{-1}(y)=\mathbf{0}_{X/\ker A}=\ker A\}=\{\mathbf{0}_Y\}\,. \qquad \square$$

6.5.15. Állítás. *Legyenek* $(X, \|.\|)$ *és* $(Y, \|.\|)$ $\mathbb{K}$ *feletti Banach-terek, továbbá* $A \in L(X,Y)$ *szürjektív folytonos lineáris leképezés. Ekkor az* $A^{-1} : Y \to X/\ker A$ *inverz-operátor folytonos lineáris bijekció.*

Bizonyítás. Mivel fennállnak a Banach-féle nyíltleképezés-tétel feltételei, ezért nyílt halmaz A-szerinti képe nyílt, például az

$$A(B(\mathbf{0},1)) \subseteq Y$$

halmaz nyílt (mivel $\mathbf{0}_Y \in A(B_X(\mathbf{0}_X,1))$, ezért belső pont), így $\exists\, \delta > 0$, hogy

$$\overline{B}(\mathbf{0},\delta) \subseteq A(B(\mathbf{0},1)),$$

ami azt jelenti, hogy $\forall\, y \in Y$, $\|y\| \le \delta$ esetén $\exists\, x \in X$, $\|x\| < 1$, hogy $Ax = y$. Legyen $y \in Y$, $y \neq \mathbf{0}$ tetszőleges. Ekkor $\delta \cdot \frac{y}{\|y\|} \in \overline{B}(\mathbf{0},\delta)$, így $\exists\, x \in X$, $\|x\| < 1$, hogy

$$Ax = \delta \cdot \frac{y}{\|y\|}, \qquad \text{azaz} \qquad A\left(\frac{\|y\|}{\delta} \cdot x\right) = y.$$

Ezek alapján a faktortérbeli norma definíciója szerint

$$\begin{aligned} \|A^{-1}(y)\|_{X/\ker A} &= \inf_{z \in A^{-1}(y)} \|z\| = \inf_{Az=y} \|z\| \\ &\le \|\frac{\|y\|}{\delta} \cdot x\| = \frac{1}{\delta} \cdot \|y\| \cdot \|x\| \\ &\le \frac{1}{\delta} \cdot \|y\| \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az $A^{-1} : Y \to X/\ker A$ lineáris leképezés folytonos, sőt

$$\|A^{-1}\| \le \frac{1}{\delta}. \qquad \square$$

A Nadler-féle fixponttétel

A Banach-féle fixponttétellel rokon állítás a faktortér értékű leképezésekre vonatkozó Nadler-féle fixponttétel.

6.5.16. Állítás (Nadler-féle fixponttétel)**.** *Legyen* $(X, \|.\|)$ *Banach-tér,* $M \subseteq X$ *zárt altér, legyen* $x_1 \in X$*, és* $r \in \mathbb{R}_{++}$.

Ha egy $F : B(x_1,r) \to X/M$ *faktortér értékű leképezés egy* $\lambda \in (0,1)$ *konstanssal*

(a) kontrakció: $\forall\, x,y \in X$ *esetén* $d_{X/M}(F(x),F(y)) \le \lambda \cdot d_{\|.\|}(x,y)$,

(b) $d_{\|.\|}(x_1, F(x_1)) < (1-\lambda)r$,

akkor létezik fixpontja:

$$\exists\, x_0 \in B(x_1, r)\,, \quad \textit{amelyre} \quad F(x_0) = x_0 + M\,, \quad \textit{azaz} \quad x_0 \in F(x_0)\,.$$

Sőt $\forall\, r_1 \in \mathbb{R}_{++}$ *esetén, amelyre*

$$\frac{r_1}{2} \le d_{\|.\|}(x_1, F(x_1)) < r_1 < (1-\lambda)r\,,$$

az is teljesül, hogy

(1) $\exists\, x_0 \in \overline{B}(x_1, \frac{r_1}{1-\lambda}) \subseteq B(x_1, r)$ *fixpont:*

$$F(x_0) = x_0 + M\,, \quad \textit{azaz} \quad x_0 \in F(x_0)\,,$$

(2) $d_{\|.\|}(x_0, x_1) \le \frac{2}{1-\lambda}\, d_{\|.\|}(x_1, F(x_1))$.

Bizonyítás. A bizonyítás során jelölje az egyszerűség kedvéért $d \doteq d_{\|.\|}$.
Ha $d(x_1, F(x_1)) = 0$, akkor $F(x_1)$ zártsága miatt $x_1 \in F(x_1)$, így $x_0 = x_1$, nyilván a (2)-beli feltétel is teljesül. Tegyük fel hát, hogy $d(x_1, F(x_0)) > 0$.
Rögzítsünk egy tetszőleges olyan $r_1 \in \mathbb{R}_{++}$ számot, amelyre

$$\frac{r_1}{2} \le d(x_1, F(x_1)) < r_1 < (1-\lambda)r\,.$$

(1) Az $x_1 \in B(x_1, r)$ pontból kiindulva rekurzióval konstruálunk egy (x_n) $B(x_1, r)$-beli iterációs sorozatot, amelyre $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n+1} \in F(x_n)\,,$$
$$d(x_n, x_{n+1}) < \lambda^n \cdot r_1\,,$$
$$x_n \in B(x_1, \tfrac{r_1}{1-\lambda}) \subseteq B(x_1, r)\,.$$

A rekurzió a következő: Tegyük fel, hogy $x_1, \ldots, x_n$-et már kiválasztottuk az adott feltételeknek megfelelően, ekkor F kontrakció volta miatt

$$d_{X/M}(F(x_{n-1}), F(x_n)) \quad \le \quad \lambda \cdot d(x_{n-1}, x_n) < \lambda \cdot \lambda^{n-1} \cdot r_1 = \lambda^n \cdot r_1\,.$$

Ezek szerint

$$d_{X/M}(F(x_{n-1}), F(x_n)) < \lambda^n \cdot r_1\,,$$

ezért $\exists\, x_{n+1} \in F(x_n))$, amelyre

$$d(x_n, x_{n+1}) < \lambda^n \cdot r_1\,,$$

továbbá emiatt

$$\begin{aligned} d(x_1, x_{n+1}) \quad &\le \quad d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_n, x_{n+1}) \\ &< \quad \lambda \cdot r_1 + \ldots + \lambda^n \cdot r_1 \\ &= \quad \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{1-\lambda} \cdot r_1 < \frac{r_1}{1-\lambda}\,, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $x_n \in B(x_1, \frac{r_1}{1-\lambda}) \subseteq B(x_1, r)$. Ezzel az iteráció kész és teljesíti a fenti kívánalmakat.

Belátjuk, hogy (x_n) Cauchy-sorozat. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A fentiekhez hasonlóan $\forall\, m,n \in \mathbb{N}$, $m < n$ esetén

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m+1}) + \ldots + d(x_{n-1},x_n) \\ &< \lambda^m \cdot r_1 + \ldots + \lambda^{n-1} \cdot r_1 = r_1 \cdot \sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k . \end{aligned}$$

Innen $\lambda \in (0,1)$ alapján a $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ geometriai sor konvergens, emiatt az $\varepsilon / r_1 > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n_0 \leq m < n$ esetén

$$\sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k < \varepsilon / r_1 , \quad \text{így} \quad d(x_m,x_n) < \varepsilon .$$

Ezért (x_n) valóban Cauchy-sorozat.
Mivel az $(X, \|.\|)$ normált tér (azaz az (X,d) metrikus tér) teljes, ezért az (x_n) sorozat konvergens, azaz

$$\exists\, x_0 \doteq \lim x_n .$$

Mivel pedig $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in B(x_1, \frac{r_1}{1-\lambda})$, azaz $d(x_n,x_1) < \frac{r_1}{1-\lambda}$, ezért a d metrika folytonossága miatt

$$d(x_0,x_1) = d(\lim x_n, x_1) = \lim d(x_n,x_1) \leq \frac{r_1}{1-\lambda} < r ,$$

ami azt jelenti, hogy

$$x_0 \in \overline{B}(x_1, \frac{r_1}{1-\lambda}) \subseteq B(x_1, r) .$$

Továbbá $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} \in F(x_n)$ és F kontrakció volta alapján

$$d(x_{n+1}, F(x_0)) \quad = \quad d_{X/M}(F(x_n), F(x_0)) \leq \lambda \cdot d(x_n, x_0) \to 0 ,$$

emiatt viszont $d(x_0, F(x_0)) = 0$. Innen az $F(x_0)$ halmaz zárt volta miatt

$$x_0 \in F(x_0) .$$

(2) Mivel az $r_1 > 0$ számra feltettük, hogy

$$\frac{r_1}{2} \leq d(x_1, F(x_1)) < r_1 < (1-\lambda) r ,$$

ezért (1) szerint $\exists\, x_0 \in \overline{B}(x_1, \frac{r_1}{1-\lambda})$, amelyre $x_0 \in F(x_0)$, amiből

$$d(x_0,x_1) \leq \frac{r_1}{1-\lambda} < \frac{1}{1-\lambda} \cdot 2 \cdot d(x_1, F(x_1)) . \qquad \square$$

A Nadler-féle fixponttétel halmazértékű leképezésre

A Nadler-féle fixponttétel tetszőleges teljes metrikus téren értelmezett, annak nemüres, zárt halmazaiba képező leképezéseire analóg módon megfogalmazható a Hausdorff-távolság felhasználásával, a bizonyítás is lényegében azonos marad.

6.5.17. Definíció (iteráció)**.** Legyen X tetszőleges halmaz. Egy $F : X \to \mathscr{P}(X)$ halmazértékű leképezés mellett egy (x_n) X-beli sorozatot *iterációnak* illetve *iterációs sorozatnak* nevezzünk ha tetszőleges adott $x_1 \in X$, és $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n+1} \in F(x_n)\,.$$

6.5.18. Definíció (kontrakció)**.** Legyen (X, d_X) metrikus tér. Egy $F : X \to \mathscr{P}(X)$ halmazértékű leképezést *kontrakciónak* nevezünk, ha valamely $\lambda \in (0,1)$ konstanssal Lipschitz-folytonos a Hausdorff-távolságra nézve:

$$\exists\, \lambda \in (0,1), \text{ hogy } \forall\, x, y \in X \text{ esetén } d_H(F(x), F(y)) \le \lambda \cdot d_X(x,y)\,.$$

6.5.19. Állítás (Nadler-féle fixponttétel)**.** *Legyen (X, d) teljes metrikus tér, legyen $x_1 \in X$, és $r \in \mathbb{R}_{++}$.*

Ha egy $F : B(x_1, r) \to \mathscr{F}(X)$ halmazértékű leképezés

(a) nemüres, zárt értékű,

(b) kontrakció,

(c) $d_{F(x_1)}(x_1) < (1-\lambda)r$,

akkor létzik fixpontja:

$$\exists\, x_0 \in B(x_1, r)\,, \quad \textit{amelyre} \quad x_0 \in F(x_0)\,.$$

Sőt $\forall\, r_1 \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, amelyre

$$\frac{r_1}{2} \le d_{F(x_1)}(x_1) < r_1 < (1-\lambda)r\,,$$

az is teljesül, hogy

(1) $\exists\, x_0 \in \overline{B}(x_1, \frac{r_1}{1-\lambda}) \subseteq B(x_1, r)$ fixpont:

$$x_0 \in F(x_0)\,,$$

(2) $d(x_0, x_1) \le \frac{2}{1-\lambda}\, d_{F(x_1)}(x_1)$.

Bizonyítás. Ha $d(x_1, F(x_1)) = 0$, akkor $F(x_1)$ zártsága miatt $x_1 \in F(x_1)$, így $x_0 = x_1$, nyilván a (2)-beli feltétel is teljesül. Tegyük fel hát, hogy $d(x_1, F(x_0)) > 0$.

Rögzítsünk egy tetszőleges olyan $r_1 \in \mathbb{R}_{++}$ számot, amelyre

$$\frac{r_1}{2} \le d(x_1, F(x_1)) < r_1 < (1-\lambda)r.$$

(1) Az $x_1 \in B(x_1, r)$ pontból kiindulva rekurzióval konstruálunk egy (x_n) $B(x_1, r)$-beli iterációs sorozatot, amelyre $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n+1} \in F(x_n),$$

$$d(x_n, x_{n+1}) < \lambda^n \cdot r_1,$$

$$x_n \in B(x_1, \tfrac{r_1}{1-\lambda}) \subseteq B(x_1, r).$$

A rekurzió a következő: Tegyük fel, hogy $x_1, \dots, x_n$-et már kiválasztottuk az adott feltételeknek megfelelően, ekkor F kontrakció volta miatt

$$\begin{aligned} d_H(F(x_{n-1}), F(x_n)) &\le \lambda \cdot d(x_{n-1}, x_n) \le \lambda \cdot d_H(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})) \\ &\le \lambda^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{n-1}) \le \dots \\ &\le \lambda^{n-1} \cdot d(x_1, x_2) < \lambda^{n-1} \cdot \lambda \cdot r_1 = \lambda^n \cdot r_1 . \end{aligned}$$

Ezek szerint

$$d_H(F(x_{n-1}), F(x_n)) < \lambda^n \cdot r_1,$$

ezért $\exists\, x_{n+1} \in F(x_n))$, amelyre

$$d(x_n, x_{n+1}) < \lambda^n \cdot r_1,$$

továbbá emiatt

$$\begin{aligned} d(x_1, x_{n+1}) &\le d(x_1, x_2) + \dots + d(x_n, x_{n+1}) \\ &< \lambda \cdot r_1 + \dots + \lambda^n \cdot r_1 \\ &= \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{1-\lambda} \cdot r_1 < \frac{r_1}{1-\lambda}, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $x_n \in B(x_1, \tfrac{r_1}{1-\lambda}) \subseteq B(x_1, r)$. Ezzel az iteráció kész, és teljesíti a fenti kívánalmakat.

Belátjuk, hogy (x_n) Cauchy-sorozat. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A fentiekhez hasonlóan $\forall\, m,n \in \mathbb{N}$, $m < n$ esetén

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m+1}) + \ldots + d(x_{n-1},x_n) \\ &< \lambda^m \cdot r_1 + \ldots + \lambda^{n-1} \cdot r_1 = r_1 \cdot \sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k . \end{aligned}$$

Mivel $\lambda \in (0,1)$, ezért a $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ geometriai sor konvergens, emiatt az $\varepsilon / r_1 > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n_0 \leq m < n$ esetén $\sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k < \varepsilon / r_1$, így

$$d(x_m,x_n) < \varepsilon .$$

Ezért (x_n) valóban Cauchy-sorozat.
Mivel az (X,d) metrikus tér teljes, ezért az (x_n) sorozat konvergens, azaz

$$\exists\, x_0 \doteq \lim x_n .$$

Mivel pedig $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in B(x_1, \frac{r_1}{1-\lambda})$, azaz $d(x_n,x_1) < \frac{r_1}{1-\lambda}$, ezért a d metrika folytonossága miatt

$$d(x_0,x_1) = d(\lim x_n, x_1) = \lim d(x_n,x_1) \leq \frac{r_1}{1-\lambda} < r ,$$

ami azt jelenti, hogy

$$x_0 \in \overline{B}(x_1, \frac{r_1}{1-\lambda}) \subseteq B(x_1,r) .$$

Továbbá $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} \in F(x_n)$ és F kontrakció volta alapján

$$\begin{aligned} d_{F(x_0)}(x_{n+1}) &\leq \sup_{x \in F(x_n)} d_{F(x_0)}(x) = e(F(x_n),F(x_0)) \\ &\leq d_H(F(x_n),F(x_0)) \leq \lambda \cdot d(x_n,x_0) \to 0 , \end{aligned}$$

emiatt viszont $d_{F(x_0)}(x_0) = 0$. Innen az $F(x_0)$ halmaz zárt volta miatt

$$x_0 \in F(x_0) .$$

(2) Mivel az $r_1 > 0$ számra feltettük, hogy

$$\frac{r_1}{2} \leq d_{F(x_1)}(x_1) < r_1 < (1-\lambda) r ,$$

ezért (1) szerint $\exists\, x_0 \in \overline{B}(x_1, \frac{r_1}{1-\lambda})$, amelyre $x_0 \in F(x_0)$, amiből

$$d(x_0,x_1) \leq \frac{r_1}{1-\lambda} < \frac{1}{1-\lambda} \cdot 2 \cdot d_{F(x_1)}(x_1) . \qquad \square$$

VII.

AZ ÁLTALÁNOS EGYENSÚLYELMÉLETI MODELL

Az Arrow-Debreu modell a gazdasági szereplőket két csoportra osztja, termelőkre és fogyasztókra. Adam Smith elgondolása szerint minden szereplő a saját egyéni célját követi, tehát a termelők maximális profitra törekednek, a fogyasztók pedig a jövedelmük mellett elérhető maximális hasznosságra. Egyikőjük sem törődik a társadalom érdekével, ennek ellenére egy láthatatlan kéz jóvoltából, nevezetesen a piaci mechanizmusokon keresztül mégis létrejön társadalmi szinten egy jóléti optimum: a megtermelt termékek gazdára találnak, a fogyasztási igények pedig kielégülnek, a gazdaság egyensúlyba kerül, továbbá minden termelő maximális profitot, minden fogyasztó a rendelkezésére álló anyagi feltételek mellett maximális hasznot ér el.

Ez az egyensúlyi fogalom azonban nem feltétlenül jelenti a gazdasági szereplők ideális állapotát, hanem egy olyan nyeregpontot, sőt voltaképpen csapdahelyzetet jelent amiből külső segítség nélkül nem lehet kitörni. Az egyensúlyban az emberek nem feltétlenül boldogok, csak helyzetükön nem tudnak javítani.

Matematikai szempontból az elmélet a halmazértékű leképezések fixpontjára vonatkozó Kakutani-féle fixponttételre van felfűzve. Azt vizsgáljuk meg, hogy a gazdasági modellben milyen feltételeket kell feltenni a tétel alkalmazhatóságához. Külön nehézséget okoz a kapott halmazértékű leképezések folytonosságának a vizsgálata. A legnagyobb nehézséget azonban az okozza, hogy a matematikai szempontból elkerülhetetlen, közgazdasági szempontból viszont elfogadhatatlan korlátossági feltételt hogyan lehet kikerülni.

A modellt az elmúlt évtizedek kitartó és minden részletre kiterjedő vizsgálata sem koptatta meg, azonban továbbra is fennmarad az a kérdés, hogyan értékeljük a modell feltételeit.

7.1. A gazdasági modell és az egyensúly

A gazdasági modell

Egy gazdasági modellt építünk fel, amelyben termékek és gazdasági szereplők vannak. Háromféle szereplőt különböztetünk meg, termelőket, fogyasztókat, valamint egy fiktív szereplőt, a piacot.

A termékek és a termékek ára

Egy termék (áru, jószág) mennyiségét valós számmal írjuk le. Tegyük fel, hogy a gazdaságban l féle terméket termelnek illetve fogyasztanak.
A termékek tere: $\mathbb{R}^l$.

Egy termék ára egy nemnegatív valós szám, így a termékek ára a következő vektor, amit árvektornak nevezünk:

$$p \in \mathbb{R}^l_+ .$$

A modellben csak az árak egymáshoz viszonyított aránya fontos, ezért feltesszük, hogy $\|p\| = 1$, így az árvektorok halmaza a gömbfelszínnek a nemnegatív térnegyedbe eső része:

$$p \in \mathbb{R}^l_+ \cap S(\mathbf{0}, 1)\,.$$

Itt akármelyik $\mathbb{R}^n$-beli normát választhatjuk, szokás többnyire az $\|.\|_1$ normát választani. Ebben az esetben az árvektorok halmaza az l-dimenziós (standard) szimplex:

$$P^l = \{p \in \mathbb{R}^l \;:\; p \geq \mathbf{0},\; \langle p, x\rangle = 1\} = \mathrm{co}\{e_1, \ldots, e_l\}\,.$$

A gazdaság szereplői

1. *A termelők*:

Legyen a gazdaságban n számú termelő, legyen $j = 1, \ldots, n$ tetszőleges. A j-edik termelő rendelkezik egy $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$ *termelési (stratégia-) halmazzal*. Egy lehetséges termelési program: $y = (\eta_1, \ldots, \eta_l) \in Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$. Ha $\eta_k > 0$, akkor a k-adik terméket termelik, ha pedig $\eta_k < 0$, akkor a k-adik terméket felhasználják.

Természetes feltennünk, hogy $Y_j \neq \emptyset$, de ennél erősebb megkötésre lesz szükségünk, azt tesszük fel, hogy *a tétlenség lehetséges tevékenység*:

$$\mathbf{0} \in Y_j\,.$$

Az aggregált termelési halmaz:

$$Y \doteq \sum_{j=1}^{n} Y_j\,.$$

A termelők célja adott $p \in P^l$ árvektor mellett a profitjuk maximalizálása. Ezek szerint a j-edik termelő viselkedését a következő, $p \in P^l$ árvektorral paraméterezett feltételes szélsőérték-feladatsereg írja le:

$$\left\{\begin{array}{l} \langle p, y\rangle \to \max \\ y \in Y_j \end{array}\right. \tag{7.1}$$

Az j-edik termelő *profitfüggvényének* nevezzük (7.1) feladatsereg értékfüggvényét, azaz azt a $\pi_j : P^l \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amelyre $\forall\, p \in P^l$ árvektor esetén

$$\pi_j(p) = \sup_{Y_j} \langle p, .\rangle = \sup_{y \in Y_j} \langle p, y\rangle\,,$$

tehát az $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$ halmaz $\sigma_{Y_j} : P^l \to \overline{\mathbb{R}}$ támaszfunkcionálját.

Mivel feltettük, hogy $\mathbf{0} \in Y_j$, ezért a profit nemnegatív:

$$\pi_j(p) \geq 0 .$$

Az j-edik termelő *kínálati (termelési) leképezésének* nevezzük az (7.1) feladatsereg megoldásleképezését, azaz azt az $\mathscr{Y}_j : P^l \to \mathscr{P}(Y_j)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ p \in P^l$ árvektor esetén

$$\begin{aligned}
\mathscr{Y}_j(p) &\doteq \operatorname*{argmax}_{Y_j} \langle p,.\rangle = \langle p,.\rangle^{-1}(\{\pi_j(p)\}) \cap Y_j \\
&= \{y \in Y_j :\ \langle p,y\rangle = \pi_j(p)\} \subseteq Y_j .
\end{aligned}$$

2. *A fogyasztók*:

Legyen a gazdaságban m számú fogyasztó, és legyen $i = 1,\ldots,m$ tetszőleges. Az i-edik fogyasztó rendelkezik egy $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ fogyasztási (stratégia) halmazzal. Egy lehetséges fogyasztási program: $x = (\xi_1,\ldots,\xi_l) \in X_i \subseteq \mathbb{R}^l$. Ha $\xi_k > 0$, akkor a k-adik terméket fogyasztják, ha pedig $\xi_k < 0$, akkor a k-adik terméket szolgáltatják.

Természetes, feltennünk, hogy $X_i \neq \emptyset$, de ennél erősebb megkötésre lesz szükségünk, azt tesszük fel, hogy *a fogyasztó rendelkezik egy kezdőkészlettel*:

$$\exists\ a_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^l ,$$

és ez az i-edik fogyasztó tulajdona.

Az *aggregált fogyasztási halmaz*:

$$X \doteq \sum_{i=1}^{m} X_i .$$

Az i-edik fogyasztó rendelkezik egy $w_i : P^l \to \mathbb{R}$ jövedelemfüggvénnyel (vagyonfüggvénnyel). A vagyonfüggvényt a következőképpen értelmezzük egy tetszőleges $p \in P^l$ árvektor mellett:

– egyrészt a kezdőkészlet értékéből áll:

$$\langle p,a_i\rangle ,$$

– másrészt $\forall\ j = 1,\ldots,n$ esetén a j-edik termelő $\pi_j(p)$ profitjából $0 \leq \rho_{ij} \leq 1$ rész illeti meg. Feltesszük, hogy a profitot teljesen szétosztják a fogyasztók között:

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_{ij} = 1 .$$

Ezek szerint:

$$w_i(p) = \langle p,a_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\pi_j(p) ,$$

amely függvény

(1) folytonos,

(2) $\langle p, a_i \rangle \leq w_i(p)$.

Végül az i-edik fogyasztó rendelkezik egy $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel is.

A fogyasztók célja adott $p \in P^l$ árvektor (és $w_i(p) \in \mathbb{R}_+$ jövedelem) esetén a hasznosságuk maximalizálása. Ezek szerint az i-edik fogyasztó viselkedését a következő, $p \in P^l$ árvektorral paraméterezett feltételes szélsőértékfeladat-sereg írja le:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(x) \to \max \\ \langle p, x \rangle \leq w_i(p) \\ x \in X_i \end{array} \right. . \tag{7.2}$$

Az i-edik fogyasztó *költségvetési leképezésének* nevezzük azt a $\mathscr{B}_i : P^l \to \mathscr{P}(X_i)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\, p \in P^l$ árvektor esetén *a költségvetési halmaz*:

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_i(p) \quad &\doteq \quad \langle p, . \rangle^{-1}(-\infty, w_i(p)] \cap X_i \\ &= \quad \{\, x \in X_i \;:\; \langle p, x \rangle \leq w_i(p) \} \subseteq X_i \,. \end{aligned}$$

Mivel feltettük, hogy $\mathbf{0} \in Y_j$, így a profit nemnegatív, azaz $\pi_j(p) \geq 0$, ezért a $w_i(p)$ jövedelem definíciója szerint az $a_i \in X_i$ kezdőkészletre $\langle p, a_i \rangle \leq w_i(p)$. Emiatt a kezdőkészlet benne van a költségvetési halmazban, így ez nemüres:

$$a_i \in \mathscr{B}_i(p) \,, \quad \text{így} \quad \mathscr{B}_i(p) \neq \emptyset \,. \tag{7.3}$$

Ennek a segítségével a fenti feladat a következőképpen fogalmazható át:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(x) \to \max \\ x \in \mathscr{B}_i(p) \end{array} \right. \tag{7.4}$$

Az i-edik fogyasztó *indirekt hasznossági függvényének* nevezzük a (7.2) feladatsereg értékfüggvényét, azaz azt az $u_i^{\vee} : P^l \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amelyre $\forall\, p \in P^l$ árvektor esetén

$$u_i^{\vee}(p) \doteq \sup_{\mathscr{B}_i(p)} u_i = \sup_{x \in \mathscr{B}_i(p)} u_i(x) \,.$$

Az i-edik fogyasztó *keresleti leképezésének* nevezzük a (7.2) feladatsereg megoldásleképezését, azaz azt az $\mathscr{X}_i : P^l \to \mathscr{P}(X_i)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\, p \in P^l$ árvektor esetén

$$\begin{aligned} \mathscr{X}_i(p) \quad &\doteq \quad \operatorname*{argmax}_{\mathscr{B}(p)} u_i = u_i^{-1}(\{u_i^{\vee}(p)\}) \cap \mathscr{B}(p) \\ &= \quad \{x \in \mathscr{B}(p) : \; u_i(x) = u_i^{\vee}(p)\} \subseteq \mathscr{B}(p) \,. \end{aligned}$$

Látható, hogy ha $\mathscr{X}_i(p) \neq \emptyset$, akkor $u_i^{\vee}(p) = u_i(x)$, ahol $x \in \mathscr{X}_i(p)$.

3. *A piac*:

A modell legkülönösebb szereplője hétköznapi értelemben nem egy valódi, hanem a gazdaság működését, mechanizmusát megszemélyesítő „fiktív” szereplő, amit összefoglaló néven piacnak szoktunk nevezni. A modell ezen a szereplőn keresztül igyekszik megragadni a klasszikus közgazdaságtannak Adam Smith-hez köthető elképzelését, amely szerint csupán a saját egyéni érdekeiket követő termelők által megtermelt és szintén csak a saját egyéni hasznukat kereső fogyasztók által keresett javakat egy *láthatatlan kéz* egymásnak megfelelteti, társadalmi szinten egyfajta optimumot hozva létre.

Egy

$$(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)\in X_1\times\ldots\times X_m\times Y_1\times\ldots\times Y_n\subseteq\mathbb{R}^{(m+n)l}$$

vektort *tevékenységegyüttesnek*, másképpen *allokációnak* nevezünk.

Egy

$$(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)\in X_1\times\ldots\times X_m\times Y_1\times\ldots\times Y_n$$

tevékenységegyüttes melletti *túlkeresleti vektor*:

$$z\doteq\sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{j=1}^{n}y_j-\sum_{i=1}^{m}a_i\,.$$

A termelők és a fogyasztók *túlkeresleti halmaza*:

$$Z\doteq\sum_{i=1}^{m}X_i-\sum_{j=1}^{n}Y_j-\sum_{i=1}^{m}a_i\,.$$

A termelők és a fogyasztók a döntéseikkel a következő *túlkeresletet* keltik $\forall\ p\in P^l$ árvektor esetén:

$$\mathscr{Z}(p)\doteq\sum_{i=1}^{m}\mathscr{X}_i(p)-\sum_{j=1}^{n}\mathscr{Y}_j(p)-\sum_{i=1}^{m}a_i\,.$$

A termelők és a fogyasztók *túlkeresleti leképezése* a

$$\mathscr{Z}\doteq\sum_{i=1}^{m}\mathscr{X}_i-\sum_{j=1}^{n}\mathscr{Y}_j-\sum_{i=1}^{m}a_i:P^l\to\mathscr{P}(Z)$$

halmazértékű leképezés.

A piac adott

$$z=\sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{j=1}^{n}y_j-\sum_{i=1}^{m}a_i\in Z$$

túlkereslethez olyan árat rendel, hogy a túlkereslet a lehető legdrágább legyen. Ezek szerint a piac viselkedését a következő, $z\in Z$ túlkeresleti vektorral paraméterezett feltételes szélsőérték-feladatsereg írja le:

$$\begin{cases}\langle p,z\rangle\to\max\\ p\in P^l\end{cases}\tag{7.5}$$

A piac *árleképezésének* nevezzük a (7.5) feladatsereg megoldásleképezését, azaz azt az $\mathscr{A}:Z\to\mathscr{P}(P^l)$, halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ z\in Z$ túlkeresleti vektor esetén

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(z)\ &\doteq\ \operatorname*{argmax}_{P^l}\langle .,z\rangle=\langle .,z\rangle^{-1}(\{\max_{r\in P^l}\langle r,z\rangle\})\cap P^l\\ &=\ \{p\in P^l\ :\ \langle p,z\rangle=\max_{r\in P^l}\langle r,z\rangle\}\,.\end{aligned}$$

A ár-túlkeresleti leképezés

A gazdaság szereplőinek, a termelőknek, a fogyasztóknak és a piacnak a viselkedését együttesen az

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{Z}:P^l\times Z\to\mathscr{P}(P^l\times Z)\,,$$

halmazértékű leképezés, a gazdaság *ár-túlkeresleti leképezése* írja le, azaz amelyre $\forall\ (p,z)\in P^l\times Z$ ár-túlkereslet-vektor esetén

$$(\mathscr{A}\otimes\mathscr{Z})(p,z)\doteq\mathscr{A}(z)\times\mathscr{Z}(p)\,.$$

A gazdaság egyensúlya

7.1.1. Definíció. Egy

$$(\tilde{p},\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m,\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_n)\in P^l\times X_1\times\ldots\times X_m\times Y_1\times\ldots\times Y_n\subseteq\mathbb{R}^{(1+m+n)l}$$

árat és tevékenységegyüttest a gazdasági modell *egyensúlyi megoldásának* (röviden egyensúlyának) nevezünk, ha

(1) $\tilde{p}\in P^l$,

(2) (a) $\forall\ j=1,\dots,n$ esetén $\tilde{y}_j\in\mathscr{Y}_j(\tilde{p})$,

(b) $\forall\ i=1,\dots,m$ esetén $\tilde{x}_i\in\mathscr{X}_i(\tilde{p})$,

(3) $\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_i\le\sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_j+\sum_{i=1}^{m}a_i$ (naturális mérlegegyensúly),

(4) $\left\langle\tilde{p},\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_i\right\rangle=\langle\tilde{p},\sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_j\rangle+\langle\tilde{p},\sum_{i=1}^{m}a_i\rangle$ (szigorú értékegyensúly).

A (2) feltételt mikroszintű egyensúlynak, a (3) és (4) feltételeket makroszintű egyensúlynak tekinthetjük.

7.1.2. Állítás (az egyensúly ekvivalens definíciója)**.** *Egy*

$$(\tilde{p},\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m,\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)\in P^l\times X_1\times\ldots\times X_m\times Y_1\times\ldots\times Y_n\subseteq\mathbb{R}^{(1+m+n)l}$$

ár és tevékenységegyüttes pontosan akkor egyensúlya a gazdaság modellnek, ha a

$$\tilde{z}\doteq\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_i-\sum_{j=1}^{n}\tilde{y}_j-\sum_{i=1}^{m}a_i\in Z$$

túlkereslet mellett a $(\tilde{p},\tilde{z})\in P^l\times Z$ *úgynevezett* kereslet-kínálat egyensúlyt *alkot, amin azt értjük, hogy*

(1) $\tilde{p}\in P^l$*,*

(2) $\tilde{z}\in\mathscr{Z}(\tilde{p})$*,*

(3) $\tilde{z}\leq\mathbf{0}$ *(mérlegegyensúly),*

(4) $\langle\tilde{p},\tilde{z}\rangle=0$ *(szigorú értékegyensúly).*

Bizonyítás. A $\tilde{z}$ definíciója alapján ez a 7.1.1. definíció átfogalmazása. □

7.2. Az egyensúly létezése

Az egyensúlynak a 7.1.2. ekvivalens definícióbeli pontjai közül az (1) teljesülését nyilván el lehet érni. Érdekes módon a többi pont közül a legkönnyebben a (4), a szigorú értékegyensúly létezése látható be, bár ehhez egy további feltételnek, a lokális kielégíthetetlenségnek is fenn kell állnia. A (2) és (3) teljesülésének a belátása azonban a fentieknél lényegesen magvasabb probléma, a Kakutani-féle fixponttételen múlik.

A gyenge és az erős Walras-törvény

A gyenge Walras-törvény

7.2.1. Állítás (gyenge Walras-törvény)**.** *Legyen* $p\in P^l$ *tetszőleges árvektor. Ekkor* $\forall\ j=1,\ldots,n$ *melletti* $y_j\in\mathscr{Y}_j(p)$ *optimális termelési döntés és* $\forall\ i=1,\ldots,m$ *melletti* $x_i\in\mathscr{X}_i(p)$ *optimális fogyasztói döntés esetén teljesül az úgynevezett gyenge értékegyensúly:*

$$\langle p,\sum_{i=1}^{m}x_i\rangle\leq\langle p,\sum_{j=1}^{n}y_j\rangle+\langle p,\sum_{i=1}^{m}a_i\rangle\,,$$

illetve ezzel ekvivalens módon fogalmazva:

$$\forall\, z = \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \in \mathscr{Z}(p) \;\; \textit{túlkereslet esetén} \;\; \langle p, z\rangle \leq 0\,,$$

ami röviden azt jelenti, hogy $P^l \subseteq (\mathscr{Z}(p))^-$.

Bizonyítás. Mivel $\forall\, i = 1, \ldots, m$ mellett $x_i \in \mathscr{X}_i(p)$, ezért a jövedelemfüggvény definícióját felhasználva adódik, hogy

$$\langle p, x_i\rangle \leq w_i(p) = \langle p, a_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\pi_j(p) = \langle p, a_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\langle p, y_i\rangle\,,$$

ahol $\sum_{i=1}^{m} \rho_{ij} = 1$, amiből i-re való összegzéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \langle p, x_i\rangle &\leq \sum_{i=1}^{m} \langle p, a_i\rangle + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\langle p, y_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle p, a_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \rho_{ij}\right) \langle p, y_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle p, a_i\rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle p, y_i\rangle\,,
\end{aligned}$$

ebből pedig következik az állítás. □

7.2.2. Megjegyzés. A bizonyítás csupán a fogyasztók jövedelemének ügyes megfogalmazásán múlott.

A lokális kielégíthetetlenség és az erős Walras-törvény

A szigorú értékegyensúly létezése egy további feltétel, a lokális kielégíthetetlenség teljesülése mellett igazolható. Az igazolás teljesen analóg a gyenge Walras-törvényével.

7.2.3. Definíció (lokális kielégíthetetlenség)**.** Azt mondjuk, hogy az i-edik $(i = 1, \ldots, m)$ fogyasztó *lokálisan kielégíthetetlen* (lokálisan telíthetetlen), ha nem létezik lokális maximuma, azaz $\forall\, x \in X_i$ pont $\forall\, U \in \tau(x)$ környezetében $\exists\, x' \in U \cap X_i$ pont, amelyre

$$u_i(x) < u_i(x')\,.$$

7.2.4. Állítás. *Ha az i-edik* $(i = 1, \ldots, m)$ *fogyasztó lokálisan kielégíthetetlen, akkor* $\forall\, p \in P^l$ *árvektor esetén elkölti teljes jövedelmét:* $\forall\, x_i \in \mathscr{X}_i(p)$ *mellett*

$$\langle p, x_i\rangle = w_i(p)\,.$$

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\, x_i \in \mathscr{X}_i(p)$ megoldás, hogy

$$\langle p, x_i \rangle < w_i(p)\,.$$

Ekkor $\exists\, U \in \tau(x_i)$ környezet, hogy $\forall\, x \in U \cap X_i$ esetén

$$\langle p, x \rangle < w_i(p)\,.$$

Mivel az i-edik $(i = 1, \ldots, m)$ fogyasztó lokálisan kielégíthetetlen, ezért $\exists\, x' \in U \cap X_i$ pont, amelyre

$$u_i(x_i) < u_i(x')\,.$$

Mivel az előzőek szerint ekkor $\langle p, x' \rangle < w_i(p)$, ezért $x_i \notin \mathscr{X}_i(p)$, ami ellentmondás. □

7.2.5. Állítás (erős Walras-törvény)**.** *Tegyük fel, hogy $\forall\, i = 1, \ldots, m$ esetén az i-edik fogyasztó lokálisan kielégíthetetlen:*

> *$\forall\, x \in X_i$ pont $\forall\, U \in \tau(x)$ környezetében $\exists\, x' \in U \cap X_i$ pont, amelyre $u_i(x) < u_i(x')$ (lokális kielégíthetetlenség).*

Legyen $p \in P^l$ tetszőleges árvektor, ekkor $\forall\, j = 1, \ldots, n$ melletti $y_j \in \mathscr{Y}_j(p)$ optimális termelési döntés és $\forall\, i = 1, \ldots, m$ melletti $x_i \in \mathscr{X}_i(p)$ optimális fogyasztói döntés esetén teljesül a gazdasági egyensúly (4) pontja, a szigorú értékegyensúly:

$$\langle p, \sum_{i=1}^{m} x_i \rangle = \langle p, \sum_{j=1}^{n} y_j \rangle + \langle p, \sum_{i=1}^{m} a_i \rangle\,,$$

illetve ezzel ekvivalens módon fogalmazva:

$$\forall\, z = \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \in \mathscr{Z}(p) \ \text{ túlkereslet esetén } \ \langle p, z \rangle = 0\,,$$

ami röviden azt jelenti, hogy $P^l \subseteq (\mathscr{Z}(p))^{\perp}$.

Bizonyítás. Mivel $\forall\, i = 1, \ldots, m$ mellett az i-edik $(i = 1, \ldots, m)$ fogyasztó lokálisan kielégíthetetlen, ezért az előző 7.2.4. állítás szerint $\forall\, p \in P^l$ árvektor esetén elkölti teljes jövedelmét: $\forall\, x_i \in \mathscr{X}_i(p)$ mellett

$$\langle p, x_i \rangle = w_i(p)\,.$$

Innen a bizonyítás teljesen analóg a gyenge Walras-törvény, a 7.2.1. állítás bizonyításával. A jövedelemfüggvény definícióját felhasználva:

$$\langle p, x_i \rangle = w_i(p) = \langle p, a_i \rangle + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \pi_j(p) = \langle p, a_i \rangle + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \langle p, y_i \rangle\,,$$

ahol $\sum_{i=1}^{m} \rho_{ij} = 1$, amiből i-re összegezéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \langle p, x_i \rangle &= \sum_{i=1}^{m} \langle p, a_i \rangle + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \langle p, y_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle p, a_i \rangle + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \rho_{ij} \right) \langle p, y_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle p, a_i \rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle p, y_i \rangle ,\end{aligned}$$

ebből pedig következik az állítás. □

A gazdaság egyensúlya és az ár-túlkeresleti leképezés fixpontja

A további feltételek teljesülését a következő igen szép állítás egy fixpont problémára transzformálja át. A bizonyításában újra felhasználjuk a gyenge Walras-törvényt.

7.2.6. Állítás (fixpont és egyensúly)**.** *Ha egy* $(\tilde{p}, \tilde{z}) \in P^l \times Z$ *pont a gazdaság* $\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z} : P^l \times Z \to \mathscr{P}(P^l \times Z)$ *ár-túlkeresleti leképezésnek fixpontja:*

$$(\tilde{p}, \tilde{z}) \in (\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z})(\tilde{p}, \tilde{z}), \ \ \textit{azaz} \ \ \tilde{p} \in \mathscr{A}(\tilde{z}), \ \tilde{z} \in \mathscr{Z}(\tilde{p}),$$

akkor az teljesül az egyensúly definíciójának (1), (2) és (3) feltétele:

(1) $\tilde{p} \in P^l$,

(2) $\tilde{z} \in \mathscr{Z}(\tilde{p})$,

(3) $\tilde{z} \leq \mathbf{0}$.

Bizonyítás. (1) Nyilvánvalóan $\tilde{p} \in P^l$.
(2) A fixponttulajdonság egyik fele szerint teljesül, hogy

$$\tilde{z} \in \mathscr{Z}(\tilde{p}).$$

(3) A fixponttulajdonság másik fele szerint pedig

$$\tilde{p} \in \mathscr{A}(\tilde{z}) = \{ p \in P^l \ : \ \langle p, z \rangle = \max_{r \in P^l} \langle r, z \rangle \},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\langle \tilde{p}, \tilde{z} \rangle = \max_{p \in P^l} \langle p, \tilde{z} \rangle ,$$

így $\forall \ p \in P^l$ esetén

$$\langle \tilde{p}, \tilde{z} \rangle \geq \langle p, \tilde{z} \rangle . \tag{7.6}$$

Mivel $\tilde{z} \in \mathscr{Z}(\tilde{p})$, így a 7.2.1. állításbeli gyenge-Walras törvény szerint

$$\langle \tilde{p}, \tilde{z} \rangle \leq 0\,,$$

ezért az (7.6) alapján $\forall\ p \in P^l$ esetén

$$\langle p, \tilde{z} \rangle \leq 0\,.$$

Mivel $\forall\ k = 1, \ldots, l$ esetén $e_k \in P^l$, ezért $\langle e_k, \tilde{z} \rangle \leq 0$, azaz $\tilde{z} \leq \mathbf{0}$. □

7.2.7. Megjegyzés. A fenti 7.2.5. és 7.2.6. állítások együtt már biztosítják az egyensúly létezését. Az (1) feltétel nyilvánvalóan teljesül. A (4) feltétel, a szigorú értékegyensúly teljesüléséhez fel kell még tenni a lokális kielégíthetetlenség feltételét. A (2) és (3) feltétel teljesüléséhez viszont azt kell biztosítanunk, hogy az

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z} : P^l \times Z \to \mathscr{P}(P^l \times Z)\,,$$

a ár-túlkeresleti leképezésnek létezzen fixpontja. Ehhez az 5. fejezetben megismert, a halmazértékű leképezések fixpontjára vonatkozó Kakutani-féle fixponttételt (6.1.7. állítás) használjuk fel.

Az a feladatunk tehát, hogy megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett teljesülnek a Kakutani-fixponttétel feltételei a ár-túlkeresleti leképezésre. Azt lehet mondani, hogy a munka igazából ezen a ponton kezdődik. Kiindulásul idézzük fel a tételt:

7.2.8. Állítás (Kakutani-féle fixponttétel)**.** *Legyen* $(X, \|.\|)$ *normált tér. Ha* $K \subseteq X$ *konvex és kompakt halmaz, valamint az* $F : K \to \mathscr{P}(K)$ *halmazértékű leképezés*

(1) nemüres, konvex, zárt, azaz kompakt halmaz értékű $(F : K \to \mathscr{K}_{\mathrm{co}}(K))$,

(2) felső-Vietoris-folytonos, (azaz felső-Hausdorff-folytonos, azaz zárt gráfú),

akkor az F *halmazértékű leképezésnek létezik fixpontja:*

$$\exists\, x_0 \in K\,, \quad \textit{hogy} \quad x_0 \in F(x_0)\,.$$

7.3. A Kakutani-féle fixpontétel (1) feltétele

Az árleképezés vizsgálata

Tekintsük először az $\mathscr{A} : Z \to \mathscr{P}(P^l)$, árleképezést. Erre a halmazértékű leképezésre a Kakutani-féle fixponttétel (1) részében szereplő feltételei könnyű szerrel teljesülnek.

7.3.1. Állítás (árleképezés)**.** $\forall\ z \in Z$ *túlkeresleti vektor esetén az árleképezés*

$$\mathscr{A}(z) = \langle ., z \rangle^{-1}(\{\max_{r \in P^l} \langle r, z \rangle\}) \cap P^l \subseteq \mathbb{R}^l$$

értéke nemüres, konvex, zárt, sőt kompakt halmaz.

Bizonyítás. Mivel a Weierstass-tétel szerint folytonos függvény nemüres kompakt halmazon felveszi a maximumát, továbbá a $P^l \subseteq \mathbb{R}^l$ halmaz kompakt, a $\langle ., z\rangle$ pedig függvény folytonos, ezért a

$$\langle ., z\rangle^{-1}(\{\max_{r\in P^l}\langle r, z\rangle\}) \cap P^l \subseteq \mathbb{R}^l$$

halmaz nemüres.

Mivel konvex halmaz lineáris függvénnyel vett őse konvex, továbbá az egypontú halmaz konvex, és a $\langle ., z\rangle$ függvény lineáris, ezért a

$$\langle ., z\rangle^{-1}(\{\max_{r\in P^l}\langle r, z\rangle\}) \subseteq \mathbb{R}^l$$

halmaz konvex. Mivel konvex halmazok metszete konvex, továbbá a $P^l \subseteq \mathbb{R}^l$ halmaz konvex, ezért a

$$\langle ., z\rangle^{-1}(\{\max_{r\in P^l}\langle r, z\rangle\}) \cap P^l \subseteq \mathbb{R}^l$$

halmaz konvex.

Mivel zárt halmaz folytonos függvénnyel vett őse zárt, továbbá az egypontú halmaz zárt, és a $\langle ., z\rangle$ függvény folytonos, ezért a

$$\langle ., z\rangle^{-1}(\{\max_{r\in P^l}\langle r, z\rangle\}) \subseteq \mathbb{R}^l$$

halmaz zárt. Mivel pedig zárt és kompakt halmaz metszete kompakt, továbbá a $P^l \subseteq \mathbb{R}^l$ halmaz is kompakt, ezért a

$$\langle ., z\rangle^{-1}(\{\max_{r\in P^l}\langle r, z\rangle\}) \cap P^l \subseteq \mathbb{R}^l$$

halmaz is kompakt. □

A túlkeresleti leképezés vizsgálata

Tekintsük a továbbiakban a

$$\mathscr{Z} \doteq \sum_{i=1}^{m} \mathscr{X}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathscr{Y}_j - \sum_{i=1}^{m} a_i : P^l \to \mathscr{P}(Z)$$

túlkeresleti leképezést.

7.3.2. Állítás. *Legyen $p \in P^l$ tetszőleges árvektor.*

1. $\forall\ j = 1,\ldots,n$ esetén teljesülnek a következők:

(a) Ha az $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$ termelési halmaz konvex, akkor a kínálati leképezés $\mathscr{Y}_j(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ értéke konvex halmaz.

(b) *Ha az* $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$ *termelési halmaz zárt, akkor a kínálati leképezés* $\mathscr{Y}_j(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *értéke zárt halmaz.*

(c) *Ha az* $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$ *termelési halmaz nemüres, korlátos és zárt, (azaz kompakt), akkor a kínálati leképezés* $\mathscr{Y}_j(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *értéke nemüres, korlátos és zárt, (azaz kompakt) halmaz.*

2. $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén teljesülnek a következők:*

(a) *Ha az* $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ *fogyasztási halmaz konvex, akkor a költségvetési leképezés* $\mathscr{B}_i(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *értéke konvex halmaz.*

(b) *Ha az* $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ *fogyasztási halmaz zárt, akkor a költségvetési leképezés* $\mathscr{B}_i(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *értéke zárt halmaz.*

(c) *Ha az* $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ *korlátos és zárt, (azaz kompakt), akkor a költségvetési leképezés* $\mathscr{B}_i(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *értéke korlátos és zárt, (azaz kompakt) halmaz.*

3. $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén teljesülnek a következők:*

(a) *Ha az* $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ *fogyasztási halmaz konvex, és az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény kvázikonkáv, akkor a keresleti leképezés* $\mathscr{X}_i(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *értéke konvex halmaz.*

(b) *Ha az* $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ *fogyasztási halmaz zárt, és az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos, akkor a keresleti leképezés* $\mathscr{X}_i(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *értéke zárt halmaz.*

(c) *Ha az* $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ *fogyasztási halmaz korlátos és zárt, (azaz kompakt), az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos, valamint a* $\mathscr{B}_i(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *költségvetési halmaz nemüres, akkor a keresleti leképezés* $\mathscr{X}_i(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *értéke nemüres, korlátos és zárt, (azaz kompakt) halmaz.*

4. *A túlkeresleti halmazra és leképezésre teljesülnek a következők:*

(a) *Ha* $\forall\ j = 1, \ldots, n$ *esetén az* $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$ *termelési halmaz, valamint* $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén az* $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ *fogyasztási halmaz nemüres, konvex, korlátos és zárt, (azaz kompakt), akkor a*

$$Z = \sum_{i=1}^{m} X_i - \sum_{j=1}^{n} Y_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \subseteq \mathbb{R}^l$$

túlkeresleti halmaz nemüres, konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt).

(b) *Ha* $\forall\ j = 1, \ldots, n$ *esetén az* $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$ *termelési halmaz, valamint* $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén az* $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ *fogyasztási halmaz nemüres, konvex, korlátos és zárt, (azaz kompakt), az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos, valamint a* $\mathscr{B}_i(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ *költségvetési halmaz nemüres, akkor a túlkeresleti leképezés*

$$\mathscr{Z}(p) = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{X}_i(p) - \sum_{j=1}^{n} \mathscr{Y}_j(p) - \sum_{i=1}^{m} a_i \subseteq \mathbb{R}^l$$

értéke nemüres, konvex, korlátos és zárt, (azaz kompakt) halmaz.

Bizonyítás. 1. (a) Mivel konvex halmaz lineáris függvénnyel vett ősképe konvex, és az egypontú halmaz konvex, a $\langle p,.\rangle$ függvény lineáris, valamint feltettük, hogy Y_j konvex halmaz, ezért az

$$\mathscr{Y}_j(p) = \langle p,.\rangle^{-1}(\{\pi_j(p)\}) \cap Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$$

halmaz konvex.

(b) Mivel zárt halmaz folytonos függvénnyel vett ősképe zárt, és az egypontú halmaz zárt, a $\langle p,.\rangle$ függvény folytonos, valamint feltettük, hogy Y_j zárt halmaz, ezért az

$$\mathscr{Y}_j(p) = \langle p,.\rangle^{-1}(\{\pi_j(p)\}) \cap Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$$

halmaz zárt.

(c) Mivel az Y_j halmaz nemüres és kompakt, az $\langle p,.\rangle$ függvény folytonos, ezért a Weierstrass tétel alapján az

$$\mathscr{Y}_j(p) = \langle p,.\rangle^{-1}(\{\pi_j(p)\}) \cap Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$$

nemüres, az előző állítás szerint pedig zárt, és nyilván korlátos.

2. (a) Mivel konvex halmaz lineáris függvénnyel vett ősképe konvex, és egy valós félegyenes konvex, valamint feltettük, hogy X_i konvex halmaz, ezért az

$$\mathscr{B}_i(p) = \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty, w_i(p)] \cap X_i \subseteq \mathbb{R}^n$$

halmaz konvex.

(b) Mivel zárt halmaz folytonos függvénnyel vett ősképe zárt, és a fenti félegyenes zárt, valamint feltettük, hogy X_i zárt halmaz, ezért az

$$\mathscr{B}_i(p) = \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty, w_i(p)] \cap X_i \subseteq \mathbb{R}^n$$

halmaz zárt.

(c) A

$$\mathscr{B}_i(p) = \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty, w_i(p)] \cap X_i \subseteq \mathbb{R}^n$$

halmaz a 2.(2) szerint zárt, és nyilván korlátos.

3. (a) Mivel kvázikonkáv függvény felső nívóhalmazai konvexek, és

$$u_i^{-1}(\{u_i^{\vee}(p)\}) = u_i^{-1}([u_i^{\vee}(p), \infty),$$

valamint a 2.(1) szerint $\mathscr{B}_i(p)$ konvex halmaz, ezért az

$$\mathscr{X}_i(p) = u_i^{-1}(\{u_i^{\vee}(p)\}) \cap \mathscr{B}(p) \subseteq \mathbb{R}^n$$

halmaz konvex.

(b) Mivel zárt halmaz folytonos függvénnyel vett őseképe zárt, és az egypontú halmaz zárt, valamint a 2.(2) szerint $\mathscr{B}_i(p)$ zárt halmaz, ezért az

$$\mathscr{X}_i(p) = u_i^{-1}(\{u_i^{\vee}(p)\}) \cap \mathscr{B}(p) \subseteq \mathbb{R}^n$$

halmaz zárt.

(c) Mivel a $\mathscr{B}_i(p)$ költségvetési halmazról feltettük, hogy nemüres, a 2.(3) szerint pedig kompakt, az u_i hasznossági függvény folytonos, ezért a Weierstrass tétel alapján az

$$\mathscr{X}_i(p) = u_i^{-1}(\{u_i^{\vee}(p)\}) \cap \mathscr{B}(p) \subseteq \mathbb{R}^n$$

nemüres, továbbá a 3.(2) alapján egy zárt és egy kompakt halmaz metszete, így kompakt.

4. (a) Nyilvánvaló. (b) Következik az előző állításokból. □

7.3.3. Megjegyzés. Az előző, 7.3.2. állítás 3. pontja szerint, ha $\forall\ j = 1,\dots,n$ esetén az $Y_j \subseteq \mathbb{R}^l$ termelési halmaz, valamint $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén az $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$ fogyasztási halmaz nemüres, konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt), az $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos, valamint a $\mathscr{B}_i(p) \subseteq \mathbb{R}^l$ költségvetési halmaz nemüres, akkor a túlkeresleti leképezésre teljesül a Kakutani-féle fixponttétel (1) feltétele.

A termelési és a fogyasztási halmazokra valamint a hasznossági függvényekre a fenti tulajdonságokat fel kell tehát tenni, valamint biztosítani kell a költségvetési halmaz nemüres voltát is. Ezeket foglaljuk össze az alábbi állításban.

7.3.4. Állítás (túlkeresleti leképezés)**.** *Tegyük fel a termelőkről, hogy* $\forall\ j = 1,\dots,n$ *esetén*

(T_1^0) $\mathbf{0} \in Y_j$ *(a tétlenség lehetséges tevékenység, amiből következik a nemüresség),*

(T_2^0) *az* Y_j *termelési halmaz konvex, korlátos és zárt, (azaz kompakt),*

a fogyasztókról pedig azt, hogy $\forall\ i = 1,\dots,m$ *esetén*

(F_1^0) $a_i \in X_i$ *(a fogyasztó rendelkezik egy kezdőkészlettel, amiből következik a nemüresség),*

(F_2^0) *az* X_i *fogyasztási halmaz konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt),*

(F_3^0) *az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és kvázikonkáv.*

Ekkor a túlkeresleti leképezésre teljesül a Kakutani-féle fixponttétel (1) feltétele:

(a) a

$$Z = \sum_{i=1}^{m} X_i - \sum_{j=1}^{n} Y_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \subseteq \mathbb{R}^l$$

túlkeresleti halmaz nemüres, konvex, korlátos és zárt, (azaz kompakt), *(b)* $\forall\ p \in P^l$ *tetszőleges árvektor esetén a túlkeresleti leképezés*

$$\mathscr{Z}(p) = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{X}_i(p) - \sum_{j=1}^{n} \mathscr{Y}_j(p) - \sum_{i=1}^{m} a_i \subseteq \mathbb{R}^l$$

értéke nemüres, konvex, korlátos és zárt, (azaz kompakt) halmaz.

Bizonyítás. Következik a 7.3.2. állítás 4. pontjából, mert a termelési és a fogyasztási halmazokra feltettük a tétel feltételeit, továbbá, a modell definíciója során láttuk, hogy aza dolog, hogy a termelő számára a tétlenség lehetséges tevékenység, valamint az, hogy a fogyasztó rendelkezik egy kezdőkészlettel nemcsak azt biztosítják, hogy a termelési és fogyasztási halmazok nemüresek, hanem (7.3) értelmében azt is, hogy $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén a

$$\mathscr{B}_i(p) = \langle p, . \rangle^{-1}(-\infty, w_i(p)] \cap X_i \subseteq \mathbb{R}^n$$

költségvetési halmaz nemüres. □

Az ár-túlkeresleti leképezés

Az alábbi állításban összefoglaljuk az ár-túlkeresleti leképezés tulajdonságait az árleképezésre vonatkozó 7.3.1. és a túlkeresleti leképezésre vonatkozó 7.3.4. állítások alapján.

7.3.5. Állítás (ár-túlkeresleti leképezés)**.** *Álljanak fenn az előző 7.3.4. állítás feltételei: Tegyük fel a termelőkről, hogy* $\forall\ j = 1, \ldots, n$ *esetén*

(T_1^0) $\mathbf{0} \in Y_j$ *(a tétlenség lehetséges tevékenység, amiből következik a nemüresség),*

(T_2^0) *az* Y_j *termelési halmaz konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt),*

a fogyasztókról pedig azt, hogy $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén*

(F_1^0) $a_i \in X_i$ *(a fogyasztó rendelkezik egy kezdőkészlettel, amiből következik a nemüresség),*

(F_2^0) *az* X_i *fogyasztási halmaz konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt),*

(F_3^0) *az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és kvázikonkáv.*

Ekkor a gazdaság

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z} : P^l \times Z \to \mathscr{P}(P^l \times Z),$$

ár-túlkeresleti leképezésre teljesül a Kakutani-fele fixponttétel (1) feltétele:

(a) a

$$P^l \times Z \subseteq \mathbb{R}^{2l}$$

ár-túlkeresleti halmaz nemüres, konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt), *(b)* $\forall\,(p,z) \in P^l \times Z^0$ *ár-túlkereslet-vektor esetén az ár-túlkeresleti leképezés*

$$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z})(p,z) = \mathscr{A}(z) \times \mathscr{Z}(p) \subseteq \mathbb{R}^{2l}$$

értéke nemüres, konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt) halmaz.

Bizonyítás. (a) Az előző 7.3.4. állítás (a) pontja szerint a gazdaság $Z \subseteq \mathbb{R}^l$ túlkeresleti halmaza nemüres, konvex, kompakt, valamint a $P^l \subseteq \mathbb{R}^l$ árszimplex nyilván ugyanilyen, így ezek

$$P^l \times Z^0 \subseteq \mathbb{R}^{2l}$$

Descartes-zorzata is ilyen.

(b) A 7.3.1. állítás szerint $\forall\, z \in Z \subseteq Z$ túlkeresleti vektor esetén az árleképezés

$$\mathscr{A}(z) = \langle .,z\rangle^{-1}(\{\max_{r \in P^l}\langle r,z\rangle\}) \cap P^l \subseteq \mathbb{R}^l$$

értéke nemüres, konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt) halmaz, továbbá a 7.3.4. állítás (b) pontja szerint $\forall\, p \in P^l$ árvektor esetén a túlkeresleti leképezés

$$\mathscr{Z}(p) = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{X}_i(p) - \sum_{j=1}^{n} \mathscr{Y}_j(p) - \sum_{i=1}^{m} a_i \subseteq \mathbb{R}^l$$

értéke nemüres, konvex, korlátos és zárt, (azaz kompakt) halmaz, így az

$$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z})(p,z) = \mathscr{A}(z) \times \mathscr{Z}(p) \subseteq \mathbb{R}^{2l}$$

halmaz is az. □

7.3.6. Megjegyzés. Az ár-túlkeresleti-leképezésre a Kakutani-féle fixponttétel (1) feltételének a teljesülését a fenti feltételek mellett beláttuk. Ezen feltételeket azonban egyelőre nem vesszük górcső alá, de megemlítjük, hogy a későbbi vizsgálat hoz még fájdalmas meglepetést. Most továbbhaladunk a Kakutani-féle fixponttétel (2) feltétele teljesülésének vizsgálata felé.

7.4. A Kakutani-féle fixpontétel (2) feltétele

A továbbiakban az ár-túlkeresleti-leképezés felső-Vietoris-folytonosságát látjuk be. Mivel ez a leképezés szélsőérték-feladatok megoldásleképezéseiből tevődik össze, ezért a bizonyítás 4. fejezetben megismert Berge-tételen (4.3.1. állítás) fog alapulni. Először felidézzük a tételnek azt az alakját, amelyet használni fogunk:

Legyenek (T,τ_T) és (X,τ_X) topologikus terek. Legyen $H : T \to \mathscr{P}(X)$ egy halmazértékű leképezés, ezt a továbbiakban feltételi leképezésnek nevezzük, legyen f :

$\operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ egy függvény, ezt a továbbiakban célfüggvénynek nevezzük, valamint tekintsük a következő, $t \in T$ paraméterrel paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{cases} f(t,x) \to \max \\ x \in H(t) \end{cases} \tag{7.7}$$

Az (7.7) feladatsereg értékfüggvényének azt az $f^{\vee} : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt nevezzük, amelyre $\forall\, t \in T$ paraméter esetén

$$f^{\vee}(t) \doteq \sup_{H(t)} f(t,.) = \sup_{x \in H(t)} f(t,x)\,.$$

Az (7.7) feladatsereg megoldásleképezésének nevezzük azt az $\mathscr{X} : T \to \mathscr{P}(X)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\, t \in T$ paraméter esetén

$$\begin{aligned} \mathscr{X}(t) &\doteq \operatorname*{argmax}_{H(t)} f(t,.) \\ &= \{x \in H(t) :\ f(t,x) = f^{\vee}(t)\} = f^{-1}(t,.)(\{f^{\vee}(t)\})\,. \end{aligned}$$

Látható, hogy ha $\mathscr{X}(t) \neq \emptyset$, akkor $f^{\vee}(t) = f(t,x)$, ahol $x \in \mathscr{X}(t)$.

7.4.1. Állítás (Berge-tétel)**.** *Ha a $H : T \to \mathscr{K}(X)$ feltételi leképezés kompakt értékű és Vietoris-folytonos, valamint az $f : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor az $\mathscr{X} : T \to \mathscr{P}(X)$ megoldásleképezés felső-Vietoris-folytonos.*

Az árleképezés vizsgálata

7.4.2. Állítás (árleképezés)**.** *Az $\mathscr{A} : Z \to \mathscr{P}(P^l)$ árleképezés felső-Vietoris-folytonos.*

Bizonyítás. Az $\mathscr{A} : Z \to \mathscr{P}(P^l)$ árleképezés a piac viselkedését leíró, $z \in Z$ túlkeresleti vektorral paraméterezett

$$\begin{cases} \langle p,z \rangle \to \max \\ p \in P^l \end{cases},$$

feltételes szélsőérték-feladatsereg megoldásleképezése, azaz amelyre $\forall\, z \in Z$ túlkeresleti vektor esetén

$$\mathscr{A}(z) = \operatorname*{argmax}_{P^l} \langle .,z \rangle\,.$$

A feltételi leképezés az a $H : Z \to \mathscr{P}(P^l)$ konstans halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\, z \in Z$ túlkeresleti vektor esetén

$$H(z) = P^l\,,$$

így ez a leképezés nyilván kompakt értékű és Vietoris-folytonos. Továbbá nyilván a $\langle .,. \rangle : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ célfüggvény is folytonos. Ezért a Berge-tétel (7.4.1. állítás) szerint a megoldásleképezés, azaz az árleképezés felső-Vietoris-folytonos. $\square$

A túlkeresleti leképezés vizsgálata

Tekintsük a továbbiakban a

$$\mathscr{Z} = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{X}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathscr{Y}_j - \sum_{i=1}^{m} a_i : P^l \to \mathscr{P}(\mathrm{Z})$$

túlkeresleti leképezést. Ennek felső-Vietoris-folytonosságát tagonként látjuk be.

7.4.3. Megjegyzés. Legyen $i = 1, \ldots, m$ tetszőleges. A szigleton értékű konstans $a_i : P^l \to \mathscr{P}(X_i)$ leképezések nyilván felső-Vietoris-folytonosak.

A kínálati leképezés

7.4.4. Állítás (kínálati leképezés)**.** *Legyen* $j = 1, \ldots, n$ *tetszőleges. Tegyük fel, hogy*

(T_2^0) *az* Y_j *termelési halmaz korlátos és zárt (azaz kompakt).*

Ekkor az $\mathscr{Y}_j : P^l \to \mathscr{P}(Y_j)$ *kínálati leképezés felső-Vietoris-folytonos.*

Bizonyítás. A j-edik termelő $\mathscr{Y}_j : P^l \to \mathscr{P}(Y_j)$ kínálati leképezése a termelő viselkedését leíró, $p \in P^l$ árvektorral paraméterezett

$$\begin{cases} \langle p, y \rangle \to \max \\ y \in Y_j \end{cases}$$

feltételes szélsőérték-feladatsereg megoldásleképezése, azaz amelyre $\forall\, p \in P^l$ árvektor esetén

$$\mathscr{Y}_j(p) = \operatorname*{argmax}_{Y_j} \langle p, . \rangle \,.$$

A feltételi leképezés az a $H : P^l \to \mathscr{P}(Y_j)$ konstans halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\, p \in P^l$ árvektor esetén

$$H(p) = Y_j \,,$$

így ez a leképezés nyilván kompakt értékű és Vietoris-folytonos. Továbbá nyilván a $\langle ., . \rangle : \operatorname{graph} H \to \mathbb{R}$ célfüggvény is folytonos. Ezért a Berge-tétel (7.4.1. állítás) szerint a megoldásleképezés, azaz a kínálati leképezés felső-Vietoris-folytonos. □

A keresleti leképezés

7.4.5. Állítás (keresleti leképezés)**.** *Legyen* $i = 1, \ldots, m$ *tetszőleges. Tegyük fel, hogy*

(F_2^0) *az* X_i *fogyasztási halmaz korlátos és zárt (azaz kompakt),*

(F_3^0) *az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos,*

továbbá tegyük fel, hogy

a $\mathscr{B}_i : P^l \to \mathscr{P}(X_i)$*, költségvetési leképezés Vietoris-folytonos.*

Ekkor az $\mathscr{X}_i : P^l \to \mathscr{P}(X_i)$ *keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos.*

Bizonyítás. Az i-edik fogyasztó $\mathscr{X}_i : P^l \to \mathscr{P}(X_i)$ kínálati leképezése a fogyasztó viselkedését leíró, $p \in P^l$ árvektorral paraméterezett

$$\begin{cases} u_i(x) \to \max \\ x \in \mathscr{B}_i(p) \end{cases}$$

feltételes szélsőérték-feladatsereg megoldásleképezése, azaz amelyre $\forall\, p \in P^l$ árvektor esetén

$$\mathscr{X}_i(p) = \operatorname*{argmax}_{\mathscr{B}_i(p)} u_i\,.$$

A feltételi leképezés a $\mathscr{B}_i : P^l \to \mathscr{P}(X_i)$ költségvetési leképezés. A 7.3.2. állítás 2.(3) pontja szerint ez kompakt értékű, valamint feltettük, hogy Vietoris-folytonos. Azt is feltettük, hogy az $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ célfüggvény folytonos. Ezért a Berge-tétel (7.4.1. állítás) szerint a megoldásleképezés, azaz a keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos. □

7.4.6. Megjegyzés. Az állítás szerint a keresleti leképezés feső-Vietoris folytonosságához olyan feltételeket kell találnunk, amely mellett a költségvetési leképezés Vietoris-folytonos.

A költségvetési leképezés Vietoris-folytonossága

A fejezet legnehezebb része a költségvetési leképezés Vietoris-folytonosságának a belátása. Tulajdonképpen azt fogjuk belátni, hogy Hausdorff-folytonos, de mint ismert, kompakt halmaz értékű leképezésekre ezek a folytonossági fogalmak ekvivalensek. Az alsó- és felső-Hausdorff-folytonosságot külön fogjuk belátni, ezek közül az alsó-Hausdorff-folytonosság lényegesen magvasabb probléma. Ennek teljesüléséhez a fogyasztókról az

(F_1^0) $a_i \in X_i$, (a fogyasztó rendelkezik egy kezdőkészlettel),

feltételnek egy lényeges szigorítását kell feltenni:

(F_1^0) $a_i \in X_i$ és $\exists\, b_i \in X_i$, amelyre $b_i < a_i$, (létminimum-feltétel, másképpen szabad választás lehetőségének a feltétele).

Mivel a jövedelmet úgy értelmeztük hogy

$$w_i(p) = \langle p, a_i \rangle + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} \pi_j(p)\,,$$

ezért ebből a feltételből következik, hogy:

$$\forall\, p \in P^l \text{ esetén } \exists\, b_i^p \in X_i \,, \text{ amelyre } \langle p, b_i^p \rangle < w_i(p) \,.$$

Ez utóbbi feltételben a létminimum már nem globális, hanem p-től függ. A költségvetési leképezés folytonosságához elég ez a gyengébb feltétel is, de a későbbiekben kényelmesebb lesz az erősebb feltétel használata.

7.4.7. Állítás (költségvetési leképezés)**.** *Legyen $i = 1, \ldots, m$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy*

(F_1^0) *$\forall\, p \in P^l$ esetén $\exists\, b_i^p \in X_i$, amelyre $\langle p, b_i^p \rangle < w_i(p)$ (létminimum-feltétel),*

(F_2^0) *az X_i fogyasztási halmaz korlátos és zárt (azaz kompakt),*

ekkor a $\mathscr{B}_i : P^l \to \mathscr{P}(X_i)$ keresleti leképezés Vietoris-folytonos.

Bizonyítás. A 7.3.2. állítás szerint a költségvetési leképezés az (F_2^0) feltétel mellett kompakt értékű. Ismert, hogy kompakt halmaz értékű leképezésekre a Vietoris- és a Hausdorff-folytonosságok ekvivalensek. Azt fogjuk belátni, hogy a költségvetési leképezés Hausdorff-folytonos.

1. Felső-Hausdorff-folytonos (ehhez nem kell a létminimum-feltétel):
Legyen $p_0 \in P^l$ tetszőleges árvektor. Azt kell belátni, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, \|p - p_0\| < \delta$ árvektorra

$$\mathscr{B}_i(p) \subseteq B(\mathscr{B}_i(p_0), \varepsilon) \,,$$

ami azt jelenti, hogy $\forall\, x \in \mathscr{B}_i(p)$ esetén $\exists\, x_0 \in \mathscr{B}_i(p_0)$, amelyre $\|x - x_0\| < \varepsilon$.
Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\, \varepsilon > 0$, amelyre $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\, p_n \in P^l$, $\|p - p_0\| < \frac{1}{n}$ árvektor, amelyre

$$\exists\, x_n \in \mathscr{B}_i(p_n) \,, \quad \text{azaz} \quad \exists\, x_n \in X_i \,,\ \langle p_n, x_n \rangle \leq w(p_n) \,,$$

hogy

$$\forall\, x_0 \in \mathscr{B}_i(p_0) \,, \quad \text{azaz} \quad \forall\, x_0 \in X_i \,,\ \langle p_0, x_0 \rangle \leq w(p_0) \quad \text{esetén} \quad \|x_n - x_0\| \geq \varepsilon \,.$$

Mivel X_i kompakt, (így sorozatkompakt), ezért az (x_n) sorozatnak $\exists\, (x_{n_k})$ X_i-ben konvergens részsorozata, jelölje

$$x_0 \doteq \lim x_{n_k} \,.$$

Mivel a feltétel szerint $\lim p_n = p_0$, ezért $\lim p_{n_k} = p_0$. Ezek szerint a skalárszorzat folytonossága alapján

$$\lim\, \langle p_{n_k}, x_{n_k} \rangle = \langle p_0, x_0 \rangle \,.$$

Mivel a w jövedelemfüggvény folytonos, ezért

$$\langle p_0, x_0 \rangle = \lim\, \langle p_{n_k}, x_{n_k} \rangle \leq \lim w(p_{n_k}) = w(p_0) \,,$$

ami azt jelenti, hogy $x_0 \in \mathscr{B}_i(p_0)$, ezért a feltevés szerint teljesül rá, hogy $\forall n_k \in \mathbb{N}$ esetén $\|x_{n_k} - x_0\| \geq \varepsilon$, ami ellentmondás.

2. Alsó-Hausdorff-folytonos:
Legyen $p_0 \in P^l$ tetszőleges árvektor. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Azt kell belátni, hogy $\exists\, \delta > 0$, amelyre $\forall\, \|p - p_0\| < \delta$ árvektorra

$$\mathscr{B}_i(p_0) \subseteq B(\mathscr{B}_i(p), \varepsilon)\,,$$

ami azt jelenti, hogy $\forall\, x_0 \in \mathscr{B}_i(p_0)$ esetén $\exists\, x \in \mathscr{B}_i(p)$ amelyre $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$.

Legyen

$$x_0 \in \mathscr{B}_i(p_0)\,, \quad \text{azaz} \quad x_0 \in X_i\,, \quad \langle p_0, x_0\rangle \leq w(p_0)$$

tetszőleges. Legyen ezek után $\lambda \in (0,1)$ olyan rögzített szám, amelyre

$$\lambda \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{diam} X_i}\,,$$

továbbá legyen

$$x \doteq \lambda b_i + (1-\lambda) x_0\,.$$

Belátjuk, hogy

(1) $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$,

(2) $x \in \mathscr{B}_i(p)$.

(1) Mivel feltettük, hogy $\lambda \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{diam} X_i}$, ezért

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \|\lambda b_i + (1-\lambda)x_0 - x_0\| \\ &= \lambda \|b_i - x_0\| \\ &\leq \lambda \cdot \operatorname{diam} X_i < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

(2) Mivel feltettük, hogy X_i konvex halmaz, x pedig két X_i-beli vektor konvex kombinációja, ezért $x \in X_i$.

A legnehezebb annak a belátása, hogy

$$\langle p, x\rangle \leq w(p)\,.$$

A létminimum-feltétel szerint a $p_0 \in P^l$ árvektor esetén is $\exists\, b_i^0 \in X_i$, amelyre

$$\langle p_0, b_i^0\rangle < w_i(p_0)\,,$$

emiatt $\exists\, \alpha > 0$, hogy $\langle p_0, b_i^0\rangle < w_i(p_0) - \alpha$. Mivel w és $\langle ., b_i^0\rangle$ folytonos függvények, ezért $\exists\, \delta_1 > 0$, hogy $\forall\, p \in P^l$, $\|p - p_0\| < \delta_1$ esetén

$$\langle p, b_i^0\rangle < w_i(p) - \alpha\,. \tag{7.8}$$

Tekintsük ezek után a következő függvényeket

$$f(p,\delta) \doteq w(p_0) - \lambda(w(p) - w(p_0) - \alpha),$$
$$g(p,\delta) \doteq w(p) - (1-\lambda)\delta.$$

A $(p_0, 0)$ pontban:

$$f(p_0,0) = w(p_0) - \lambda - \alpha < w(p_0) = g(p_0,0).$$

Mivel ezek a függvények folytonosak, ezért a $(p_0,0)$ egy egész környezetben is teljesül ez az egyenlőtlenség: $\exists\ \delta_2 > 0,\ \delta_3 > 0$, hogy $\forall\ p \in P^l$, $\|p - p_0\| < \delta_2$ és $\forall\ \delta \leq \delta_3$ esetén

$$w(p_0) - \lambda(w(p) - w(p_0) - \alpha) < w(p) - (1-\lambda)\delta,$$

azaz átrendezve, speciálisan δ_3-ra, $\forall\ p \in P^l$, $\|p - p_0\| < \delta_2$ esetén

$$\lambda(w(p) - \alpha) + (1-\lambda)(w(p_0) + \delta_3) < w(p). \tag{7.9}$$

Végül $\langle ., x_0\rangle$ folytonossága miatt $\exists\ \delta_4 > 0$, hogy $\forall\ p \in P^l$, $\|p - p_0\| < \delta_4$ esetén

$$\langle p, x_0\rangle < \langle p_0, x_0\rangle + \delta_3 \leq w(p_0) + \delta_3. \tag{7.10}$$

Ezek alapján $\forall\ p \in P^l$, $\|p - p_0\| < \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_4$ esetén

$$\begin{aligned}
\langle p, x\rangle &= \langle p, \lambda b_i^0 + (1-\lambda)x_0\rangle \\
&= \lambda\langle p, b_i^0\rangle + (1-\lambda)\langle p, x_0\rangle \\
&\leq \lambda(w(p) - \alpha) + (1-\lambda)(w(p_0) + \delta_3) \\
&< w(p),
\end{aligned}$$

ahol a harmadik egyenlőtlenséghez a (7.8) és (7.10) egyenlőtlenségeket használtuk fel, a negyedik egyenlőtlenség pedig éppen a (7.9) egyenlőtlenség. □

Az ár-túlkeresleti leképezés

Az alábbi állításokban összefoglaljuk a túlkeresleti leképezés, majd az ár-túlkeresleti leképezés tulajdonságait.

7.4.8. Állítás (túlkeresleti leképezés)**.** *Tegyük fel a termelőkről, hogy* $\forall\ j = 1,\ldots,n$ *esetén*

(T_2^0) *az* Y_j *termelési halmaz korlátos és zárt (azaz kompakt),*

a fogyasztókról pedig azt, hogy $\forall\ i = 1,\ldots,m$ *esetén*

(F_1^0) $a_i \in X_i$ *és* $\exists\ b_i \in X_i$*, amelyre* $b_i < a_i$ *(létminimum-feltétel),*

(F_2^0) *az* X_i *fogyasztási halmaz korlátos és zárt (azaz kompakt),*

(F_3^0) *az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos.*

Ekkor a gazdaság túlkeresleti leképezésére teljesül a Kakutani-féle fixponttétel (2) feltétele: a

$$\mathscr{Z} = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{X}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathscr{Y}_j - \sum_{i=1}^{m} a_i : P^l \to \mathscr{P}(Z)$$

túlkeresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos.

Bizonyítás. A 7.4.3. megjegyzés, a 7.4.4. állítás és a 7.4.5. állítások szerint a leképezés minden tagja felső-Vietoris-folytonos. A keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonosságához felhasználtuk a költségvetési leképezés folytonosságára vonatkozó 7.4.7. állítást, amely állításnak a létminimumra vonatkozó (F_1^0) feltétele következik ennek az állításnak az (F_1^0) feltételéből.

Mivel a leképezés minden tagja felső-Vietoris-folytonos, ezért a 4.2.26. állítás szerint ezek összege is az. □

7.4.9. Állítás (ár-túlkeresleti leképezés)**.** *Álljanak fenn az előző, 7.4.8. állítás feltételei:*

Tegyük fel a termelőkről, hogy $\forall\ j = 1, \ldots, n$ *esetén*

(T_2^0) *az* Y_j *termelési halmaz korlátos és zárt (azaz kompakt),*

a fogyasztókról pedig azt, hogy $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén*

(F_1^0) $a_i \in X_i$ *és* $\exists\ b_i \in X_i$*, amelyre* $b_i < a_i$ *(létminimum feltétel)*

(F_2^0) *az* X_i *fogyasztási halmaz korlátos és zárt (azaz kompakt),*

(F_3^0) *az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos.*

Ekkor a gazdaság ár-túlkeresleti leképezésére teljesül a Kakutani-fele fixponttétel (2) feltétele: az

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z} : P^l \times Z \to \mathscr{P}(P^l \times Z),$$

ár-túlkeresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos.

Bizonyítás. A 7.4.2. állítás szerint az $\mathscr{A} : Z \to \mathscr{P}(P^l)$ árleképezés felső-Vietoris-folytonos, a 7.4.8. állítás szerint pedig a $\mathscr{Z} : P^l \to \mathscr{P}(Z)$ túlkeresleti leképezés is felső-Vietoris-folytonos, ezért a 4.2.26. állítás szerint ezek $\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z} : P^l \times Z \to \mathscr{P}(P^l \times Z)$ Descartes-szorzata, azaz az ár-túlkeresleti leképezés is felső-Vietoris-folytonos. □

7.5. A gazdaság egyensúlyának létezése a fenti feltételek mellett

Az előző két fejezetben elvégeztük a 7.2.7. megjegyzésben magunk elé kitűzött feladatot, megkerestük azokat a feltételeket, amelyek mellett az ár-túlkeresleti leképezésnek létezik fixpontja, azaz teljesülnek a Kakutani-fele fixponttétel feltételei, ami pedig a gazdaság egyensúlyának a létezését biztosítja. Először összefoglaljuk ezeket a feltételeket a 7.3.5. és a 7.4.9. állítások alapján, majd megfogalmazzuk a gazdaság egyensúlyának létezésére vonatkozó állítást.

7.5.1. Állítás (a Kakutani-féle fixponttétel az ár-túlkeresleti leképezésre)**.** *Álljanak fenn a 7.3.5. és a 7.4.9. állítás feltételei:*

Tegyük fel a termelőkről, hogy $\forall\ j=1,\dots,n$ *esetén*

(T_1^0) $\mathbf{0}\in Y_j$ *(a tétlenség lehetséges tevékenység, amiből következik a nemüresség),*

(T_2^0) *az* Y_j *termelési halmaz konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt),*

a fogyasztókról pedig azt, hogy $\forall\ i=1,\dots,m$ *esetén*

(F_1^0) $a_i\in X_i$ *és* $\exists\ b_i\in X_i$*, amelyre* $b_i<a_i$ *(létminimum-feltétel),*

(F_2^0) *az* X_i *fogyasztási halmaz konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt),*

(F_3^0) *az* $u_i : X_i\to\mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és kvázikonkáv.*

Ekkor a gazdaság

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{Z} : P^l\times Z\to\mathscr{P}(P^l\times Z)\,,$$

ár-túlkeresleti leképezésre teljesülnek a Kakutani-fele fixponttétel feltételei:

(0) a

$$P^l\times Z\subseteq\mathbb{R}^{2l}$$

ár-túlkeresleti halmaz nemüres, konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt),

(1) $\forall\ (p,z)\in P^l\times Z^0$ *ár-túlkereslet-vektor esetén a ár-túlkeresleti leképezés*

$$(\mathscr{A}\otimes\mathscr{Z})(p,z)=\mathscr{A}(z)\times\mathscr{Z}(p)\subseteq\mathbb{R}^{2l}$$

értékei nemüres, konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt) halmazok,

(2) az

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{Z} : P^l\times Z\to\mathscr{P}(P^l\times Z)\,,$$

ár-túlkeresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos.

Bizonyítás. Feltettük a 7.3.5. és a 7.4.9. állítások feltételeit, ezért a jelen állítás pontjai következnek belőlük. □

7.5.2. Megjegyzés. A 7.2.7. megjegyzés szerint ez az állítás a szigorú értékegyensúly fennállásával együtt már biztosítja a gazdaság egyensúlyának a létezését.

7.5.3. Állítás (a gazdaság egyensúlyának létezése)**.** *Álljanak fenn a 7.5.1. állítás feltételei és a lokális kielégíthetetlenség:*

Tegyük fel a termelőkről, hogy $\forall\ j = 1, \dots, n$ *esetén*

(T_1^0) $\mathbf{0} \in Y_j$ *(a tétlenség lehetséges tevékenység, amiből következik a nemüresség),*

(T_2^0) *az* Y_j *termelési halmaz konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt),*

a fogyasztókról pedig azt, hogy $\forall\ i = 1, \dots, m$ *esetén*

(F_1^0) $a_i \in X_i$ *és* $\exists\ b_i \in X_i$*, amelyre* $b_i < a_i$ *(létminimum-feltétel),*

(F_2^0) *az* X_i *fogyasztási halmaz konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt),*

(F_3^0) *az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és kvázikonkáv,*

(F_4^0) $\forall\ x \in X_i$ *pont* $\forall\ U \in \tau(x)$ *környezetében* $\exists\ x' \in U \cap X_i$ *pont, amelyre* $u_i(x) < u_i(x')$*, (lokális kielégíthetetlenség).*

Ekkor a gazdaságnak létezik egyensúlya.

Bizonyítás. A 7.5.1. állítás szerint az

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z} : P^l \times Z \to \mathscr{P}(P^l \times Z)$$

ár-túlkeresleti-leképezésre teljesülnek a Kakutani-féle fixponttétel feltételei, így a Kakutani-féle fixponttétel (7.2.8. állítás) alapján létezik egy $(\tilde{p}, \tilde{z}) \in P^l \times Z$ fixpontja:

$$(\tilde{p}, \tilde{z}) \in (\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z})(\tilde{z}, \tilde{p}), \text{ azaz } \tilde{p} \in \mathscr{A}(\tilde{z}),\ \tilde{z} \in \mathscr{Z}(\tilde{p}).$$

Emiatt a 7.2.6. állítás szerint teljesül az egyensúly a 7.1.2. állításbeli ekvivalens definíciójának (1), (2) és (3) feltétele:

(1) $\tilde{p} \in P^l$,

(2) $\tilde{z} \in \mathscr{Z}(\tilde{p})$,

(3) $\tilde{z} \leq \mathbf{0}$ (mérlegegyensúly).

Mivel fennáll a lokális kielégíthetetlenség feltétele is, ezért a 7.2.5. állításbeli Walras-törvény szerint teljesül a szigorú értékegyensúly is:

(4) $\langle \tilde{p}, \tilde{z} \rangle = 0$ (szigorú értékegyensúly).

□

7.6. A gazdaság szűkítése, a releváns döntések

A gazdaság egyensúlyának a létezését a fenti feltételek mellett beláttuk, és ezzel úgy tűnik, hogy a feladatunkat elvégeztük. Az maradt már csak hátra, hogy a fenti feltételeket közgazdasági szempontból interpretáljuk. Abbéli számításunkat, hogy ezek után kényelmesen hátradőlhetünk, azonban keresztülhúzza egy váratlan fejlemény: a korlátosság feltétele közgazdasági szempontból nem fogadható el.

A korlátosság feltételének a megkerülése, illetve annak más, közgazdasági szempontból elfogadható feltételekkel való helyettesítése az általános egyensúlyelmélet legszebb, legszofisztikáltabb, mondhatni legkörmönfontabb részének mondható.

A termelési halmazok korlátosságát és a fogyasztási halmazok felülről korlátosságát az aggregált termelési halmazok alábbi tulajdonságaival váltjuk ki:

(T_3) $Y \cap \mathbb{R}^l_+ = \emptyset$ (nincsen rózsa tövis nélkül),

(T_4) $Y \cap (-Y) = \mathbf{0}$ (az aggregált tevékenységek irreverzibilisek),

Releváns döntési allokációk

7.6.1. Definíció. Tetszőleges $j = 1, \ldots, n$ termelő egy $y_j \in Y_j$ döntését, illetve tetszőleges $i = 1, \ldots, m$ fogyasztó egy $x_i \in X_i$ döntését *relevánsnak* nevezzük, ha

$$\exists\ (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in X_1 \times \ldots \times X_m \times Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

az y_j-t illetve az x_i-t a megfelelő komponensben tartalmazó tevékenységegyüttes (allokáció), amelyre teljesül a mérlegegyensúly:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} a_i \,.$$

Nyilván a mérlegegyensúlyt teljesítő tevékenység együttes többi döntése is releváns.

Jelölje

(1) $\forall\ j = 1, \ldots, n$ esetén $R(Y_j)$ a j-edik termelő *releváns döntéseinek a termelési halmazát*, illetve

(2) $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $R(X_i)$ az i-edik fogyasztó *releváns döntéseinek a fogyasztási halmazát*.

7.6.2. Állítás (Arrow-Debreu-tétel)**.** *Tegyük fel a termelési halmazokra, hogy $\forall\ j = 1, \ldots, n$ esetén*

(T_1) $\mathbf{0} \in Y_j$ *(a tétlenség lehetséges tevékenység),*

(T_2) *az Y_j termelési halmaz konvex és zárt,* *az aggregált termelési halmazra pedig az, hogy*

(T_3) $Y \cap \mathbb{R}^l_+ = \emptyset$ *(nincsen rózsa tövis nélkül),*

(T_4) $Y \cap (-Y) = \mathbf{0}$ *(az aggregált tevékenységek irreverzibilisek),*

továbbá a fogyasztókra $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén az teljesül, hogy*

(F_1) $a_i \in X_i$ *és* $\exists\ b_i \in X_i$*, amelyre* $b_i < a_i$ *(létminimum feltétel)*

(F_2) *az* X_i *fogyasztási halmaz konvex, zárt, valamint alulról korlátos.*

Ekkor $\forall\ j = 1, \ldots, n$ *esetén az* $R(Y_j) \subseteq \mathbb{R}^l$ *releváns termelési halmaz, valamint* $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén az* $R(X_i) \subseteq \mathbb{R}^l$ *releváns fogyasztási halmaz*

(1) nemüres, például $\mathbf{0} \in R(Y_j)$*, valamint* $a_i \in R(X_i)$*, sőt* $b_i \in R(X_i)$*,*

(2) konvex,

(3) korlátos.

Bizonyítás. (1) A (T_1) és az (F_1) feltételek szerint

$$(a_1 \ldots, a_m, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) \in X_1 \times \ldots \times X_m \times Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

egy lehetséges tevékenységegyüttes, továbbá teljesül rá a mérlegegyensúly:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{0} + \sum_{i=1}^{m} a_i\,.$$

Hasonlóan a (T_1) és az (F_1) feltételek szerint

$$(b_1 \ldots, b_m, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) \in X_1 \times \ldots \times X_m \times Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

egy lehetséges tevékenységegyüttes, továbbá erre is teljesül a mérlegegyensúly:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i < \sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{0} + \sum_{i=1}^{m} a_i\,.$$

Ezért $\forall\ j = 1, \ldots, n$ esetén $\mathbf{0} \in R(Y_j)$ releváns termelési, és $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $a_i \in R(X_i)$ illetve $b_i \in R(X_i)$ releváns fogyasztási döntés, azaz a releváns termelési és fogyasztási halmazok nemüresek.

(2) A (T_2) és (F_2) feltételek szerint a termelési és fogyasztási halmazok konvexek. Ezt felhasználva könnyű számolással ellenőrizhető, hogy a

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} a_i$$

egyenlőtlenség a konvex kombinációra is érvényben marad, azaz a releváns termelési és fogyasztási halmazok konvexek.

(3) (a) Legyen először $1 \leq j_0 \leq n$ tetszőleges index. Belátjuk, hogy az

$$R(Y_{j_0}) \subseteq \mathbb{R}^l$$

releváns termelési halmaz korlátos.
Indirekt módon tegyük fel, hogy nem korlátos. Ekkor $\exists\ (y_{j_0}^k)$ $R(Y_{j_0})$-beli sorozat, amelyre

$$\lim \|y_{j_0}^k\| = \infty\,. \tag{7.11}$$

Mivel $\forall\, k \in \mathbb{N}$ esetén $y_{j_0}^k \in R(Y_{j_0})$ releváns döntés, ezért

$$\exists\ (x_1^k, \ldots, x_m^k, y_1^k, \ldots, y_n^k) \in X_1 \times \ldots \times X_m \times Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

az $y_{j_0}^k$-t (a megfelelő komponensben tartalmazó) olyan tevékenységegyüttes, amelyre teljesül a mérlegegyensúly:

$$\sum_{i=1}^m x_i^k \leq \sum_{j=1}^n y_j^k + \sum_{i=1}^m a_i\,.$$

Mivel pedig $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén az X_i fogyasztási halmaz alulról korlátos, nevezetesen: $\exists\ c_i \in \mathbb{R}^l$, amelyre $\forall\ x_i \in X_i$ esetén $c_i \leq x_i$, ezért $\forall\ k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{i=1}^m c_i \leq \sum_{i=1}^m x_i^k \leq \sum_{j=1}^n y_j^k + \sum_{i=1}^m a_i\,,$$

azaz

$$\sum_{j=1}^n y_j^k \geq \sum_{i=1}^m c_i - \sum_{i=1}^m a_i\,. \tag{7.12}$$

Legyen $\forall\ k \in \mathbb{N}$ esetén

$$l_k \doteq \max\{\|y_1^k\|, \ldots, \|y_n^k\|\}\,.$$

Az l_k szám definíciója szerint

$$\max\left\{\left\|\frac{1}{l_k} y_1^k\right\|, \ldots, \left\|\frac{1}{l_k} y_n^k\right\|\right\} = 1\,. \tag{7.13}$$

Mivel az $(\|y_{j_0}^k\|)$ sorozat az (l_k) sorozat minoráns sorozata, ezért (7.11) szerint

$$\lim l_k = \infty\,. \tag{7.14}$$

Ekkor $\exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ hogy $\forall\ k \geq k_0$ esetén $l_k > 1$, feltehető, hogy $k_0 = 1$. Mivel $\forall\ j = 1, \ldots, n$ esetén a (T1) feltétel szerint a tétlenség lehetséges tevékenység, azaz $\mathbf{0} \in Y_j$, a (T2) feltétel szerint pedig az Y_j termelési halmaz konvex, ezért $\forall\ k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{l_k} y_j^k = \frac{1}{l_k} y_j^k + \left(1 - \frac{1}{l_k}\right)\mathbf{0} \in Y_j\,.$$

Ezek szerint

$$\left(\frac{1}{l_k} y_j^k\right)$$

Y_j-beli sorozat, ami az (7.13) alapján korlátos, ezért a Bolzano-Weierstrass-tétel szerint létezik konvergens részsorozata. Mivel (T_2) feltétel szerint az Y_j termelési halmaz zárt, ezért (a részsorozatot ugyanúgy indexelve)

$$y_j^0 \doteq \lim \frac{1}{l_k} y_j^k \in Y_j \,.$$

Ezt felhasználva, (7.12) szerint

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n y_j^0 &= \sum_{j=1}^n \lim \frac{1}{l_k} y_j^k = \lim \frac{1}{l_k} \sum_{j=1}^n y_j^k \\
&\geq \lim \frac{1}{l_k} \left(\sum_{i=1}^m c_i - \sum_{i=1}^m a_i \right) = \mathbf{0} \,,
\end{aligned}$$

ugyanis (7.14) szerint $\lim \frac{1}{l_k} = 0$. Mivel

$$\sum_{j=1}^n y_j^0 \in Y \,,$$

és a (T_3) feltétel szerint $Y \cap \mathbb{R}^l_+ = \emptyset$, ezért

$$\sum_{j=1}^n y_j^0 = \mathbf{0} \,.$$

Legyen $j = 1, \ldots, n$ tetszőleges, ekkor

$$-y_j^0 = \sum_{h \neq j} y_h^0 \,.$$

Mivel a (T_1) feltétel szerint a tétlenség lehetséges tevékenység, azaz $\forall\ h = 1, \ldots, n$ esetén $\mathbf{0} \in Y_h$, ezért egyrészt

$$y_j^0 = \mathbf{0} + \ldots + y_j^0 + \ldots + \mathbf{0} \in Y \,,$$

másrészt

$$\sum_{h \neq j} y_h^0 = \sum_{h \neq j} y_h^0 + \mathbf{0} \in Y \,,$$

ami a fentiek szerint azt jelenti, hogy

$$-y_j^0 \in Y \,, \quad \text{azaz} \quad y_j^0 \in (-Y) \,.$$

Ezek szerint

$$y_j^0 \in Y \cap (-Y),$$

ugyanakkor a (T_4) feltétel szerint $Y \cap (-Y) = \mathbf{0}$, ezért

$$y_j^0 = \mathbf{0}.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\forall\ j = 1, \ldots, n$ esetén

$$y_j^0 = \mathbf{0},$$

ami ellentmond (7.13)-nak. Ez azt jelenti, hogy az $R(Y_{j_0}) \subseteq \mathbb{R}^l$ releváns termelési halmaz korlátos.

(b) Legyen ezek után $i_0 = 1, \ldots, m$ tetszőleges. Belátjuk, hogy az

$$R(X_{i_0}) \subseteq \mathbb{R}^l$$

releváns fogyasztási halmaz felülről korlátos.
Legyen $x_{i_0} \in R(X_{i_0})$ tetszőleges releváns döntés, ekkor

$$\exists\ (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in X_1 \times \ldots \times X_m \times Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

az x_{i_0}-t (a megfelelő komponensben tartalmazó) tartalmazó tevékenységegyüttes, amelyre teljesül a mérlegegyensúly:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Ekkor persze $\forall\ j = 1, \ldots, n$ esetén

$$y_j \in R(Y_{j_0}),$$

azaz releváns döntés. Mivel $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén az X_i fogyasztási halmaz alulról korlátos, azaz $\exists\ c_i \in \mathbb{R}^l$, amelyre $\forall\ x_i \in X_i$ esetén $c_i \leq x_i$, ezért

$$x_{i_0} \leq \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} c_i \leq \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} c_i .$$

Mivel pedig a releváns termelési halmazok korlátosak, ezért az $R(X_{i_0}) \subseteq \mathbb{R}^l$ releváns fogyasztási halmaz felülről korlátos. Mivel feltettük, hogy alulról korlátos, ezért korlátos is. □

A szűkített gazdaság

7.6.3. Definíció. Tegyük fel, hogy fennállnak a releváns termelési és fogyasztási halmazok korlátosságára vonatkozó Arrow-Debreu-tétel, (7.6.2. állítás) feltételei.
Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^l$ olyan konvex, kompakt (azaz korlátos és zárt) halmaz, amelyre $\forall\ j = 1,\dots,n$ és $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén

$$R(Y_j)\,,\ R(X_i) \subseteq \operatorname{int}(K)\,.$$

A fenti gazdasági modell *szűkített gazdaságának* nevezzük azt a gazdaságot, amelyben $\forall\ j = 1,\dots,n$ esetén a termelési halmaz

$$Y_j^0 \doteq Y_j \cap K\,,$$

és $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén a fogyasztási halmaz

$$X_i^0 \doteq X_i \cap K\,.$$

A lokális kielégíthetetlenség a szűkített gazdaságban

7.6.4. Állítás (a lokális kielégíthetetlenség a szűkített gazdaságban)**.** *Tegyük fel, hogy az eredeti gazdaságban $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén az i-edik fogyasztó lokálisan kielégíthetetlen:*

(F_4) *$\forall\ x \in X_i$ pont $\forall\ U \in \tau(x)$ környezetében $\exists\ x' \in U \cap X_i$ pont, amelyre $u_i(x) < u_i(x')$ (lokális kielégíthetetlenség).*

Ekkor a szűkített gazdaságban a releváns döntésekre is fennáll a lokális kielégíthetetlenség:

(F_4^0) *$\forall\ x \in R(X_i)$ pont $\forall\ U \cap X_i^0 \in \tau_0(x)$ X_i^0-beli tetszőleges környezetében $\exists\ x' \in U \cap X_i^0$ pont, amelyre $u_i(x) < u_i(x')$ (lokális kielégíthetetlenség).*

Bizonyítás. Legyen $i = 1,\dots,m$ tetszőleges. Legyen $x \in R(X_i) \subseteq X_i$ és legyen az x pontnak $U \cap X_i^0 \in \tau_0(x)$ egy $X_i^0 = X_i \cap K$-beli tetszőleges környezete, ahol $U \in \tau(x)$ egy $\mathbb{R}^l$-beli környezet. Mivel

$$R(X_i) \subseteq \operatorname{int}(K)\,,$$

ezért $U \cap \operatorname{int}(K) \in \tau(x)$ is $\mathbb{R}^l$-beli környezet, ezért az (F_4) szerint

$$\exists\ x' \in U \cap \operatorname{int}(K) \cap X_i \quad \text{pont, amelyre} \quad u_i(x) < u_i(x')\,.$$

Mivel

$$U \cap \operatorname{int}(K) \cap X_i \subseteq U \cap K \cap X_i = U \cap X_i^0\,,$$

ezért $x' \in U \cap X_i^0$. □

7.6.5. Megjegyzés. A gazdaság szűkítésének a definíciójában az iménti állításnak a kedvéért szerepel az $R(X_i) \subseteq \operatorname{int}(K)$ feltétel az $R(X_i) \subseteq K$ feltétel helyett.

Az ár-túlkeresleti leképezés a szűkített gazdaságban

Az alábbi állításban összefoglaljuk a szűkített gazdaság ár-túlkeresleti leképezésének a tulajdonságait. Ehhez az előző Arrow-Debreu-tétel feltételein kívül felhasználjuk még a hasznossági függvényekre vonatkozó (F_3) tulajdonságot is.

7.6.6. Állítás (a szűkített gazdaság ár-túlkeresleti leképezése)**.** *Álljanak fenn az Arrow-Debreu-tétel (7.6.2. állítás) feltételei, továbbá legyenek a hasznossági függvények folytonosak és kvázikonkávok:*

Tegyük fel, hogy az eredeti gazdaságban a termelési halmazokra $\forall\ j = 1,\dots,n$ *esetén teljesül, hogy*

(T_1) $\mathbf{0} \in Y_j$ *(a tétlenség lehetséges tevékenység),*

(T_2) *az* Y_j *termelési halmaz konvex és zárt,*

az aggregált termelési halmazra pedig az, hogy

(T_3) $Y \cap \mathbb{R}^l_+ = \emptyset$ *(nincsen rózsa tövis nélkül),*

(T_4) $Y \cap (-Y) = \mathbf{0}$ *(az aggregált tevékenységek irreverzibilisek),*

továbbá a fogyasztókra $\forall\ i = 1,\dots,m$ *esetén az teljesül, hogy*

(F_1) $a_i \in X_i$ *és* $\exists\ b_i \in X_i$*, amelyre* $b_i < a_i$ *(létminimum-feltétel)*

(F_2) *az* X_i *fogyasztási halmaz konvex, zárt, valamint alulról korlátos,*

(F_3) *az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és kvázikonkáv.*

Ekkor a szűkített gazdaság ár-túlkeresleti-leképezésre teljesülnek a Kakutani-féle fixponttétel feltételei:

(0) a

$$P^l \times Z^0 \subseteq \mathbb{R}^{2l}$$

ár-túlkeresleti halmaz nemüres, konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt),

(1) $\forall\ (p,z) \in P^l \times Z^0$ *ár-túlkereslet-vektor esetén az ár-túlkeresleti leképezés*

$$(\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z}^0)(p,z) = \mathscr{A}(z) \times \mathscr{Z}^0(p) \subseteq \mathbb{R}^{2l}$$

értéke nemüres, konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt) halmaz,

(2) az

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z}^0 : P^l \times Z^0 \to \mathscr{P}(P^l \times Z^0)\,,$$

ár-túlkeresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a szűkített gazdaságra tetjesülnek a 7.5.1. állítás feltételei:

A termelőkre $\forall\ j = 1,\dots,n$ esetén

(T_1^0) $\mathbf{0} \in Y_j^0$ (a tétlenség lehetséges tevékenység), ugyanis az Arrow-Debreu-tétel (7.6.2. állítás) (1) pontja szerint

$$\mathbf{0} \in R(Y_j) \subseteq Y_j \cap K = Y_j^0,$$

(T_2^0) az Y_j^0 termelési halmaz konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt), ugyanis Y_j konvex, zárt, K konvex, kompakt halmaz, így $Y_j^0 = Y_j \cap K$ konvex, kompakt halmaz.

A fogyasztókra $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén

(F_1^0) $a_i \in X_i^0$ és $\exists\ b_i \in X_i^0$, amelyre $b_i < a_i$, ugyanis az Arrow-Debreu-tétel (7.6.2. állítás) (1) pontja szerint

$$a_i, b_i \in R(X_i) \subseteq X_i \cap K = X_i^0,$$

(F_2^0) az X_i^0 fogyasztási halmaz konvex, korlátos és zárt (azaz kompakt), ugyanis X_i konvex, zárt, K konvex, kompakt halmaz, így $X_i^0 = X_i \cap K$ is konvex, kompakt halmaz,

(F_3^0) az $u_i|_{X_i^0} : X_i^0 \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény folytonos és kvázikonkáv, ugyanis az $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ folytonos és kvázikonkáv függvény leszűkítése X_i^0-ra.

□

Egyensúly a szűkített gazdaságban

Az előző, 7.6.6. állítás alapján a szűkített gazdaság ár-túlkeresleti leképezésének létezik fixpontja, ami a 7.2.6. állítás szerint a szűkített gazdaság egyensúlya lesz, feltéve, hogy fennáll rá a szigorú értékegyensúly is. A 7.6.4. állítás szerint a lokális kielégíthetetlenség csak a releváns döntésekre áll fenn, ezért a 7.5.3. állításból nem következik a szűkített gazdaság egyensúlyának a létezése, de a bizonyítás azzal párhuzamosan végigvihető.

7.6.7. Állítás (a szűkített gazdaság egyensúlyának létezése)**.** *Álljanak fenn a 7.6.6. állítás feltételei és a lokális kielégíthetetlenség:*

Tegyük fel, hogy az eredeti gazdaságban a termelési halmazokra $\forall\ j = 1, \ldots, n$ esetén teljesül, hogy

(T_1) $\mathbf{0} \in Y_j$ *(a tétlenség lehetséges tevékenység),*

(T_2) *az Y_j termelési halmaz konvex és zárt,*

az aggregált termelési halmazra pedig az, hogy

(T_3) $Y \cap \mathbb{R}_+^l = \emptyset$ *(nincsen rózsa tövis nélkül),*

(T_4) $Y \cap (-Y) = \mathbf{0}$ *(az aggregált tevékenységek irreverzibilisek),* *továbbá a fogyasztókra* $\forall\ i = 1,\dots,m$ *esetén az teljesül, hogy*

(F_1) $a_i \in X_i$ *és* $\exists\ b_i \in X_i$, *amelyre* $b_i < a_i$ *(létminimum-feltétel),*

(F_2) *az* X_i *fogyasztási halmaz konvex, zárt, valamint alulról korlátos,*

(F_3) *az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és kvázikonkáv,*

(F_4) $\forall\ x \in X_i$ *pont* $\forall\ U \in \tau(x)$ *környezetében* $\exists\ x' \in U \cap X_i$ *pont, amelyre* $u_i(x) < u_i(x')$ *(lokális kielégíthetetlenség).*

Ekkor a szűkített gazdaságnak létezik egyensúlya.

Bizonyítás. A 7.6.6. állítás szerint az

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z}^0 : P^l \times Z^0 \to \mathscr{P}(P^l \times Z^0)$$

ár-túlkeresleti-leképezésre teljesülnek a Kakutani-féle fixponttétel feltételei, így a Kakutani-féle fixponttétel (7.2.8. állítás) alapján létezik egy $(\tilde{p},\tilde{z}) \in P^l \times Z^0$ fixpontja:

$$(\tilde{p},\tilde{z}) \in (\mathscr{A} \otimes \mathscr{Z}^0)(\tilde{z},\tilde{p}), \text{ azaz } \tilde{p} \in \mathscr{A}(\tilde{z}),\ \tilde{z} \in \mathscr{Z}^0(\tilde{p}).$$

Emiatt a 7.2.6. állítás szerint teljesül az egyensúly a 7.1.2. állításbeli ekvivalens definíciójának (1), (2) és (3) feltétele:

(1) $\tilde{p} \in P^l$,

(2) $\tilde{z} \in \mathscr{Z}^0(\tilde{p})$,

(3) $\tilde{z} \le \mathbf{0}$ (mérlegegyensúly).

A (3) tulajdonság azt jelenti, hogy fennáll a mérlegegyensúly, emiatt a

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

túlkeresletet alkotó $\forall\ j = 1,\dots,n$ melletti $\tilde{y}_j \in \mathscr{Y}_j^0(\tilde{p})$ optimális termelési döntés és $\forall\ i = 1,\dots,m$ melletti $\tilde{x}_i \in \mathscr{X}_i^0(\tilde{p})$ optimális fogyasztói döntés releváns. Mivel a 7.6.4. állítás szerint a releváns döntésekre teljesül a lokális kielégíthetetlenség, ezért a 7.2.5. állításbeli Walras-törvény szerint teljesül a szigorú értékegyensúly:

(4) $\langle \tilde{p},\tilde{z} \rangle = 0$ (szigorú értékegyensúly).

Összefoglalva, ez azt jelenti, hogy $(\tilde{p},\tilde{z}) \in P^l \times Z^0$ a szűkített gazdaság egyensúlya. □

A gazdaság és a szűkített gazdaság ekvivalenciája

Az előzőekben az eredeti gazdaságra tett feltételek mellett a szűkített gazdaság egyensúlyának a létezését igazoltuk. Ennek a mi szempontunkból csak akkor van értelme, ha a szűkített gazdaság egyensúlya az eredeti gazdaságnak is egyensúlya marad. Ez igaz lesz, ha egyrészt fennállnak a releváns termelési és fogyasztási halmazok korlátosságára vonatkozó Arrow-Debreu-tétel (7.6.2. állítás) feltételei, továbbá a hasznossági függvényekre a kvázikonkavitásnál erősebb, szigorú kvázikonkavitást tesszük fel.

7.6.8. Állítás. *Álljanak fenn az Arrow-Debreu-tétel (7.6.2. állítás) feltételei, továbbá legyenek a hasznossági függvények szigorúan kvázikonkávok:*

Tegyük fel, hogy az eredeti gazdaságban a termelési halmazokra $\forall\ j = 1,\dots,n$ esetén teljesül, hogy

(T_1) $\mathbf{0} \in Y_j$ *(a tétlenség lehetséges tevékenység),*

(T_2) *az* Y_j *termelési halmaz konvex és zárt,*

az aggregált termelési halmazra pedig az, hogy

(T_3) $Y \cap \mathbb{R}^l_+ = \emptyset$ *(nincsen rózsa tövis nélkül),*

(T_4) $Y \cap (-Y) = \mathbf{0}$ *(az aggregált tevékenységek irreverzibilisek),*

továbbá a fogyasztókra $\forall\ i = 1,\dots,m$ esetén az teljesül, hogy

(F_1) $a_i \in X_i$ *és* $\exists\ b_i \in X_i$*, amelyre* $b_i < a_i$ *(létminimum-feltétel)*

(F_2) *az* X_i *fogyasztási halmaz konvex, zárt, valamint alulról korlátos,*

(F3) $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény szigorúan kvázikonkáv.*

Ekkor a gazdaság és a szűkített gazdaság az egyensúly szempontjából ekvivalensek, amin azt értjük, hogy

1. *a gazdaság minden egyensúlyi ár és tevékenységegyüttese egyensúlya a szűkített gazdaságnak is,*
2. *a szűkített gazdaság minden egyensúlyi ár és tevékenységegyüttese egyensúlya a gazdaságnak is.*

Bizonyítás. (Az állítás bizonyítása teljesen fonalas, csak a rend kedvéért szerepel részletesen.)

1. Legyen

$$(\tilde{p},\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m,\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_n) \in P^l \times X_1 \times \dots \times X_m \times Y_1 \times \dots \times Y_n \subseteq \mathbb{R}^{(1+m+n)l}$$

ár és tevékenységegyüttes a gazdasági modell egyensúlyi megoldása, ez azt jelenti, hogy

(1) $\tilde{p} \in P^l$,

(2) (a) $\forall\ j = 1, \dots, n$ esetén $\tilde{y}_j \in \mathscr{Y}_j(\tilde{p})$,

(b) $\forall\ i = 1, \dots, m$ esetén $\tilde{x}_i \in \mathscr{X}_i(\tilde{p})$,

(3) $\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \leq \sum_{j=1}^n \tilde{y}_j + \sum_{i=1}^m a_i$ (mérlegegyensúly),

(4) $\left\langle \tilde{p}, \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \right\rangle = \langle \tilde{p}, \sum_{j=1}^n \tilde{y}_j \rangle + \langle \tilde{p}, \sum_{i=1}^m a_i \rangle$ (szigorú értékegyensúly).

Mivel fennáll a mérlegegyensúly, ezért a tevékenységegyüttes minden tevékenysége releváns döntés, így a szűkített gazdaság tevékenysége is:
$\forall\ j = 1, \dots, n$ és $\forall\ i = 1, \dots, m$ esetén

$$\tilde{y}_j \in R(Y_j) \subseteq Y_j^0 \quad \text{és} \quad \tilde{x}_i \in R(X_i) \subseteq X_i^0 .$$

Emiatt az (1), (3) és (4) feltételek a szűkített gazdaságban is fennállnak.

Ezek után csupán a (2) feltételt kell belátni, azt, hogy ezek a tevékenységek a szűkített gazdaság kínálati és keresleti leképezés értékeiben tartózkodnak:
$\forall\ j = 1, \dots, n$ és $\forall\ i = 1, \dots, m$ esetén

$$\tilde{y}_j \in \mathscr{Y}_j^0(\tilde{p}) \quad \text{és} \quad \tilde{x}_i \in \mathscr{X}_i^0(\tilde{p}) .$$

(a): Legyen $j = 1, \dots, n$ tetszőleges. Mivel $\tilde{y}_j \in Y_j$ megoldása a

$$\begin{cases} \langle \tilde{p}, y \rangle \to \max \\ y \in Y_j \end{cases}$$

feladatnak, és $\tilde{y}_j \in Y_j^0 = Y_j \cap K$, ezért $\tilde{y}_j \in Y_j$ megoldása a

$$\begin{cases} \langle \tilde{p}, y \rangle \to \max \\ y \in Y_j^0 \end{cases}$$

feladatnak is, azaz

$$\tilde{y}_j \in \mathscr{Y}_j^0(\tilde{p}) .$$

(b): Legyen $i = 1, \dots, m$ tetszőleges. Az előzőek szerint $\forall\ j = 1, \dots, n$ esetén a termelő profitja a szűkített gazdaságban nem változik:

$$\pi_j(\tilde{p}) = \sup_{y \in Y_j} \langle \tilde{p}, y \rangle = \sup_{y \in Y_j^0} \langle \tilde{p}, y \rangle = \pi_j^0(\tilde{p}) ,$$

ezért a fogyasztó jövedelme nem változik:

$$w_i(\tilde{p}) = \langle \tilde{p}, a_i \rangle + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \pi_j(\tilde{p}) = \langle \tilde{p}, a_i \rangle + \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \pi_j^0(\tilde{p}) = w_i^0(\tilde{p}) .$$

Mivel $\tilde{x}_i \in X_i$ megoldása a

$$\begin{cases} u_i(x) \to \max \\ x \in \mathscr{B}_i(\tilde{p}) \end{cases}$$

feladatnak, és $\tilde{x}_i \in X_i^0 = X_i \cap K$, ezek szerint

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i \in \mathscr{B}_i^0(\tilde{p}) &= \{\, x \in X_i^0 \ : \ \langle p, x\rangle \le w_i^0(p)\} \\ &\subseteq \{\, x \in X_i \ : \ \langle p, x\rangle \le w_i(p)\} = \mathscr{B}_i(\tilde{p}), \end{aligned}$$

ezért $\tilde{x}_i \in X_i$ megoldása a

$$\begin{cases} u_i(x) \to \max \\ x \in \mathscr{B}_i^0(\tilde{p}) \end{cases}$$

feladatnak is, azaz

$$\tilde{x}_i \in \mathscr{X}_i(\tilde{p}).$$

2. Legyen most

$$\begin{aligned} (\tilde{p}, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n) &\in P^l \times X_1^0 \times \ldots \times X_m^0 \times Y_1^0 \times \ldots \times Y_n^0 \\ &\subseteq \mathbb{R}^{(1+m+n)l} \end{aligned}$$

ár és tevékenységegyüttes a szűkített gazdasági modell egyensúlyi megoldása. Ez azt jelenti, hogy

(1) $\tilde{p} \in P^l$,

(2) (a) $\forall\ j = 1, \ldots, n$ esetén $\tilde{y}_j \in \mathscr{Y}_j^0(\tilde{p})$,

(b) $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén $\tilde{x}_i \in \mathscr{X}_i^0(\tilde{p})$,

(3) $\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \le \sum_{j=1}^n \tilde{y}_j + \sum_{i=1}^m a_i$ (mérlegegyensúly),

(4) $\left\langle \tilde{p}, \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \right\rangle = \langle \tilde{p}, \sum_{j=1}^n \tilde{y}_j\rangle + \langle \tilde{p}, \sum_{i=1}^m a_i\rangle$ (szigorú értékegyensúly).

Nyilván ekkor ez a tevékenységegyüttes minden tevékenysége az eredeti gazdaság tevékenysége is:
$\forall\ j = 1, \ldots, n$ és $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén

$$\tilde{y}_j \in Y_j^0 \subseteq Y_j \quad \text{és} \quad \tilde{x}_i \in X_i^0 \subseteq X_i.$$

Emiatt az (1), (3) és (4) feltételek fennállnak.

Ezek után csupán a (2) feltételt kell belátni, azt, hogy ezek a tevékenységek az eredeti gazdaság kínálati és keresleti leképezés értékeiben tartózkodnak:

$\forall\ j = 1, \ldots, n$ és $\forall\ i = 1, \ldots, m$ esetén

$$\tilde{y}_j \in \mathscr{Y}_j(\tilde{p}) \quad \text{és} \quad \tilde{x}_i \in \mathscr{X}_i(\tilde{p}).$$

(a): Legyen $j = 1, \ldots, n$ tetszőleges. Ekkor $\tilde{y}_j \in Y_j^0$ megoldása a

$$\begin{cases} \langle \tilde{p}, y \rangle \to \max \\ y \in Y_j^0 \end{cases}$$

feladatnak. Indirekt módon tegyük fel, hogy nem megoldása a

$$\begin{cases} \langle \tilde{p}, y \rangle \to \max \\ y \in Y_j \end{cases}$$

feladatnak, azaz $\exists\ y_j \in Y_j$, amelyre

$$\langle \tilde{p}, \tilde{y}_j \rangle < \langle \tilde{p}, y_j \rangle. \tag{7.15}$$

Mivel $\tilde{y}_j \in Y_j^0 \subseteq Y_j$ és teljesül rá a mérlegegyensúly, ezért releváns döntés, így

$$\tilde{y}_j \in R(Y_j) \subseteq \operatorname{int}(K),$$

emiatt $\exists\ \lambda \in (0,1)$ amelyre

$$\lambda \tilde{y}_j + (1-\lambda) y_j \in \operatorname{int}(K) \subseteq K.$$

Mivel pedig $\tilde{y}_j, y_j \in Y_j$ és Y_j konvex halmaz, ezért

$$\lambda \tilde{y}_j + (1-\lambda) y_j \in Y_j \cap K = Y_j^0.$$

Ugyanakkor (7.15) alapján

$$\langle \tilde{p}, \tilde{y}_j \rangle < \langle \tilde{p}, \lambda \tilde{y}_j + (1-\lambda) y_j \rangle,$$

ami ellentmond annak, hogy $\tilde{y}_j \in Y_j^0$ megoldása a

$$\begin{cases} \langle \tilde{p}, y \rangle \to \max \\ y \in Y_j^0 \end{cases}$$

feladatnak, hiszen ez utóbbi azt jelenti, hogy

$$\tilde{y}_j \in \mathscr{Y}_j(\tilde{p}).$$

(b): Legyen $i = 1, \ldots, m$ tetszőleges. Ekkor $\tilde{x}_i \in X_i$ megoldása a

$$\begin{cases} u_i(x) \to \max \\ x \in \mathscr{B}_i^0(\tilde{p}) \end{cases}$$

feladatnak. Indirekt módon tegyük fel, hogy nem megoldása a

$$\begin{cases} u_i(x) \to \max \\ x \in \mathscr{B}_i(\tilde{p}) \end{cases}$$

feladatnak, azaz $\exists\; x_i \in \mathscr{B}_i(\tilde{p})$, amelyre

$$u_i(\tilde{x}_i) < u_i(x_i)\,. \tag{7.16}$$

Mivel $\tilde{x}_i \in X_i^0 \subseteq X_i$ és teljesül rá a mérlegegyensúly, ezért releváns döntés, így

$$\tilde{x}_i \in R(X_i) \subseteq \operatorname{int}(K)\,,$$

emiatt $\exists\; \lambda \in (0,1)$ amelyre

$$\lambda \tilde{x}_i + (1-\lambda)x_i \in \operatorname{int}(K) \subseteq K\,.$$

Mivel pedig $\tilde{x}_i, x_i \in X_i$ és X_i konvex halmaz, ezért

$$\lambda \tilde{x}_i + (1-\lambda)x_i \in X_i \cap K = X_i^0\,.$$

Az előzőek szerint $\forall\; j = 1,\ldots,n$ esetén a termelő profitja a szűkített gazdaságban nem változik:

$$\pi_j(\tilde{p}) = \sup_{y \in Y_j} \langle \tilde{p}, y\rangle = \sup_{y \in Y_j^0} \langle \tilde{p}, y\rangle = \pi_j^0(\tilde{p})\,,$$

ezért a fogyasztó jövedelme sem változik:

$$w_i(\tilde{p}) = \langle \tilde{p}, a_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\pi_j(\tilde{p}) = \langle \tilde{p}, a_i\rangle + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\pi_j^0(\tilde{p}) = w_i^0(\tilde{p})\,.$$

Mivel $\langle \tilde{p}, \tilde{x}_i\rangle \le w_i^0(\tilde{p})$ és $\langle \tilde{p}, x_i\rangle \le w_i(\tilde{p}) = w_i^0(\tilde{p})$, ezért $\langle \tilde{p}, \lambda\tilde{x}_i + (1-\lambda)x_i\rangle \le w_i^0(\tilde{p})$. Ezek szerint

$$\lambda \tilde{x}_i + (1-\lambda)x_i \in \mathscr{B}_i^0(\tilde{p}) = \{\, x \in X_i^0 \;:\; \langle \tilde{p}, x\rangle \le w_i^0(p)\}\,.$$

Mivel pedig az $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény szigorúan kvázikonkáv, ezért (7.16) alapján

$$u_i(\tilde{x}_i) < u_i(\lambda\tilde{x}_i + (1-\lambda)x_i)\,,$$

ami ellentmond annak, hogy $\tilde{x}_i \in \mathscr{B}_i^0(\tilde{p})$ megoldása a

$$\begin{cases} u_i(x) \to \max \\ x \in \mathscr{B}_i^0(\tilde{p}) \end{cases}$$

feladatnak. □

7.6.9. Állítás (a gazdaság egyensúlyának létezése)**.** *Álljanak fenn a 7.6.7. állítás feltételei, továbbá legyenek a hasznossági függvények szigorúan kvázikonkávok:*

Tegyük fel, hogy az eredeti gazdaságban a termelési halmazokra $\forall\ j = 1, \ldots, n$ *esetén teljesül, hogy*

(T_1) $\mathbf{0} \in Y_j$ *(a tétlenség lehetséges tevékenység),*

(T_2) *az* Y_j *termelési halmaz konvex és zárt,*

az aggregált termelési halmazra pedig az, hogy

(T_3) $Y \cap \mathbb{R}^l_+ = \emptyset$ *(nincsen rózsa tövis nélkül),*

(T_4) $Y \cap (-Y) = \mathbf{0}$ *(az aggregált tevékenységek irreverzibilisek),*

továbbá a fogyasztókra $\forall\ i = 1, \ldots, m$ *esetén az teljesül, hogy*

(F_1) $a_i \in X_i$ *és* $\exists\ b_i \in X_i$*, amelyre* $b_i < a_i$ *(létminimum-feltétel),*

(F_2) *az* X_i *fogyasztási halmaz konvex, zárt, valamint alulról korlátos,*

(F_3) *az* $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ *hasznossági függvény folytonos és szigorúan kvázikonkáv,*

(F_4) $\forall\ x \in X_i$ *pont* $\forall\ U \in \tau(x)$ *környezetében* $\exists\ x' \in U \cap X_i$ *pont, amelyre* $u_i(x) < u_i(x')$ *(lokálisan kielégíthetetlenség).*

Ekkor a gazdaságnak létezik egyensúlya.

Bizonyítás. A 7.6.7. állítás szerint a szűkített gazdaságnak létezik egyensúlya, ami a 7.6.8. állítás szerint az eredeti gazdaságnak is egyensúlya. □

7.6.10. Megjegyzés. Miután az 1. alfejezetben felállítottuk azt a matematikai modellt, amely érzésünk szerint a leghívebben tükrözi a gazdaságról és egyensúlyról alkotott közgazdasági gondolatainkat, a modell vizsgálata során már csupán a matematikai eszközök alkalmazhatósága lebegett a szemünk előtt. Az elemzés elkészülte után nyílik arra mód, hogy a felhasznált feltételeket értelmezzük, a kapott eredményeket pedig közgazdasági szempontból értékeljük, összevessük a várakozásainkkal.

Egyes feltételek közgazdasági nézőpontból is természetesnek mondhatók, míg más feltételek komoly korlátozásokat hordoznak magukban. Például a konvexitási feltétel a javak tetszőleges oszthatóságát jelenti. Felmerülhet az a probléma is, hogy ha túl erősnek gondoljuk a tett feltevéseket, akkor vajon tekinthetjük-e a modellt pozitív válasznak a feltett kérdésre? Az egyes feltételek interpretálásába azonban nem megyünk bele, mert meghaladná e könyv kereteit.

Arra ellenben felhívjuk a figyelmet, hogy az általános egyensúlyelmélet eleganciájához nagymértékben hozzájárul az a mód, amellyel a matematikai eszközök közvetlen alkalmazhatóságához szükséges, de a közgazdasági megfontolások szempontjából elfogadhatatlan korlátossági feltételtől sikerült megszabadulni.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Arrow, K. J. and Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22:265–290.

[2] Aubin, J.-P. and Cellina, A. (1984). *Differential inclusions*, volume 264 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin. Set-valued maps and viability theory.

[3] Berge, C. (1959). *Espaces topologiques: Fonctions multivoques*. Collection Universitaire de Mathématiques, Vol. III. Dunod, Paris.

[4] Brouwer, L. E. J. (1911). Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Math. Ann.*, 70(2):161–165.

[5] Clarke, F. H. (1983). *Optimization and nonsmooth analysis*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons, Inc., New York. A Wiley-Interscience Publication.

[6] Dancs, I. (1980). Halmazértékű leképezések analízise. kézirat.

[7] Dancs, I. (1981). Konvexitás algebra alapjai és alkalmazásai. kézirat.

[8] Dancs, I. (1983). Konvex analízis. kézirat.

[9] Dancs, I. (1992). Bevezetés a matematikai analízisbe. Aula Kiadó, Budapest.

[10] Fan, K. (1960/1961). A generalization of Tychonoff's fixed point theorem. *Math. Ann.*, 142:305–310.

[11] Ioffe, A. D. and Tihomirov, V. M. (1979). *Theory of extremal problems*, volume 6 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York. Translated from the Russian by Karol Makowski.

[12] Kakutani, S. (1941). A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Math. J.*, 8:457–459.

[13] Kánnai, Z. (2008). The sectoroid version of the Farkas lemma. *Math. Pannon.*, 19(1):117–124.

[14] Kánnai, Z. and Szabó, I. (1990). Viability theorems in Banach spaces. *Pure Math. Appl. Ser. B*, 1(1):25–38.

[15] Kuhn, H. W. (1960). Some combinatorial lemmas in topology. *IBM J. Res. Develop.*, 4:508–524.

[16] M.D. Mas-Colell, A. W. and Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford Univ. Press, New-York, Oxford.

[17] Medvegyev, P. (1977). Egyensúlyelmélet. TDK dolgozat.

[18] Michael, E. (1951). Topologies on spaces of subsets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71:152–182.

[19] Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J.

[20] Smith, A. (1904 (Originally published 1776)). *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. Edwin Cannan ed. London: Methuen and Co., Ltd.

[21] Vietoris, L. (1923). Monatschefte für Mathematik und Physik. *Bereiche zweiter ordnung*, 33:49–62.

#07

Az általános egyensúlyelmélet matematikai eszközei

Miért olvassam el?

Az általános egyensúlyelméleti modell a közgazdaságtan egyik legjelentősebb, egyszersmind legaxiomatizáltabb eredménye, amihez a legkiválóbb matematikusok úttörő munkájára volt szükség. E modell azóta is mintául szolgál a gazdaságról való gondolkodásra minden elméleti közgazdász számára.

A modell maradéktalan megértéséhez és elsajátításához nélkülözhetetlen a felhasznált meglehetősen mély matematikai eszköztár ismerete. Ennek az eszköztárnak a felépítésére vállalkozott ez a könyv. Várakozásunk szerint nagy hasznára lesz mind a graduális illetve doktori szintű közgazdászhallgatóknak, mind pedig az elméleti szakembereknek.