

Amikor nem érdemes győzni: a labdarúgás szabályainak váratlan következményei

„Gyertyát sem azért gyújtanak, hogy a véka alá, hanem hogy a gyertyatartóba tegyék és fényljk mindazoknak, a kik a házban vannak.”
(Máté 5:15)

Absztrakt

A cikk a labdarúgásban alkalmazott rangsorolási szabályok problémáit tárgyalja. Néhány vitát generáló mérkőzés felidézése mellett bemutatjuk a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjének manipulálhatóságát: 2017 októberében, a mérkőzések négyötödének lejátszását követően is megtörténhetett volna, hogy – az összes többi eredmény változatlansága mellett – egy csapat az utolsó mérkőzésén elért győzelemmel kiesik, döntetlennel viszont még kijuthat a világbajnokságra. Azonosítunk további nyolc, a csalásbiztosságot nem teljesítő világbajnoki és Európa-bajnoki selejtezőt, és javaslatot teszünk egy ezen axiómát minden körülmények között garantáló mechanizmusra, mely nem áll távol a selejtezők történelmileg kialakult elveitől. Munkánkkal szeretnénk felhívni a sportvezetés figyelmét, hogy a jövőbeli botrányok elkerülése érdekében elengedhetetlen a szabályok axiomatikus vizsgálata.¹

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C44, D71, L83.

Abstract

We discuss ranking rules applied in association football. Besides the presentation of some controversial matches, it is shown that the European qualifiers to the 2018 FIFA World Cup can be manipulated: it was possible even in October 2017, after four-fifths of all matches have already been played, that a team would be eliminated if it would win in the last matchday of group stage, but it would advance to play-offs by playing a draw, provided that all other results do not change. Eight further incentive incompatible qualifiers to recent UEFA European Championships and FIFA World Cups are identified and a strategy-proof mechanism is suggested for the design of similar qualifications. This way we want to persuade sport governing bodies that an axiomatic analysis of ranking rules is inevitable in order to avoid possible scandals.

Journal of Economic Literature (JEL) codes: C44, D71, L83.

Bevezetés

A társadalmi választások területén évtizedekkel ezelőtt megkezdődött a csalásbiztosság, manipulálhatóság, ösztönzés kompatibilitás néven ismert fogalom vizsgálata. A szavazásemélet híres Gibbard-Satterthwaite (Gibbard [1973], Satterthwaite [1975], magyarul lásd Tasnádi [2014]) tétele szerint az igazságosság összeegyeztethetetlen a csalásbiztossággal, minden „jól viselkedő” szavazási rendszerben található olyan szavazó, aki valós preferenciáit taktikai okok-

¹ A kutatást OTKA K 111797 pályázat, valamint az MTA Prémium Posztdoktori Kutató Program és a Pallas Athéné Domus Educationis Alapítvány támogatta.

Csató László, MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet Mérnöki és Üzleti Intelligencia Kutatólaboratórium Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport, Budapesti Corvinus Egyetem Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék (email: laszlo.csato@uni-corvinus.hu).

Petróczy Dóra Gréta, Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék (email: doragreta.petroczy@uni-corvinus.hu).

ból megváltoztatva önmaga számára kedvezőbb kimenetelt érhet el. Hazai kutatók is foglalkoztak a kérdéssel, például a magyar választási rendszer (Tasnádi [2008]), vagy egy tudomány-metriai mutató (Kóczy–Strobel [2009]) esetén. Ugyancsak érdekes, vitaébresztő téma a bírálati rendszerek csalásbiztosságának kérdése (Csató [2017h]).

A koncepció kézenfekvő módon kiterjeszthető a sport területére: a szabályok valóban garantálják-e, hogy minden résztvevő a lehető legnagyobb erőfeszítést teszi a minél nagyobb arányú győzelem eléréseért. Számos olyan helyzet képzelhető el, amikor egy csapat nem érdekelt ebben. Ezeket az eseteket négy kategóriába sorolhatjuk: (1) korrupció, a játékos(ok) pénzt kap(nak) azért, hogy ne nyújtsanak maximális teljesítményt; (2) a gyengén szereplő csapat a következő szezonban előnyösebb helyzetből indulhat; (3) a továbbjutó csapat által elért helyezéstől függ a következő ellenfele, egy rosszabb pozíció pedig kedvezőbb jövőbeli párosítást jelenthet; (4) a szabály nem szándékolt következményekhez vezet.

Az első eset független a szabályoktól, itt nem tárgyaljuk. A második esetben a döntéshozó éppen a rosszabban teljesítő csapatokat szeretné versenyképesebbé tenni, például az észak-amerikai profi kosárlabdaliga játékosbörzéjén (NBA draft). A harmadik eset elhíresült példája a 2012-es londoni olimpiai játékok női páros tollaslabdatornája, ahol minden csoportból az első két helyezett jutott tovább, ezért négy páros a következő, egyenes kiesés szakasz kedvezőbb párosítása érdekében az első helyett a második hely megszerzésére, szándékos vereségre törekedett (Kendall–Lenten [2017]). Az esemény több, manipulációs stratégiákat tárgyaló játékelméleti cikket inspirált, lásd például Pauly [2014] és Vong [2017]. Ez a manipuláció azonban valószínűségi háttérrel feltételez, hiszen a gyengébb ellenfelet ugyan nagyobb eséllyel lehet legyőzni, de ez a nyereség nem realizálódik automatikusan. Fő eredményünk a (4) esetre vonatkozik, ahol egy csapat minden körülmények között, *garantáltan jobban jár* a kisebb erőfeszítéssel.

Tanulmányunk több céllal született. Egyrészt szeretnénk az olvasóval néhány olyan mérközést tudományos szempontból megismertetni, amikor a labdarúgás szabályai furcsa következményekre vezettek. A kérdéstről átfogó áttekintést ad Kendall–Lenten [2017], az öt bemutatott esetből az utolsó a saját hozzájárulásunk. Másrészt, a csalásbiztosság problémájának tárgyalásával szeretnénk csatlakozni a sportban alkalmazott rangsorolási szabályok axiomatikus vizsgálatának irodalmához (Berker [2014], Csató [2017b,c,d], Vaziri és szerzőtársai [2017], Dagaev–Sonin [2017]). Végül, reményeink szerint a tanulmányunk felhívja egyes sportágak hazai – vagy akár nemzetközi – döntéshozóinak figyelmét az akadémiai szférával folytatott együttműködés fontosságára. Ezt ösztönözhetik a témában folyamatban levő kutatásaink is (Csató [2017a,e,f,g]).

A cikk felépítése a következő. A 2. fejezetben olyan labdarúgó mérkőzéseket mutatunk be, ahol egy vagy mindkét csapat „visszaélt” a szabályok adta lehetőségekkel. Az ezt követő részben egy potenciálisan még veszélyesebb manipulációt ismertetünk Dagaev–Sonin [2017] példáján keresztül. A 4. fejezet a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjét vizsgálja az ösztönzés kompatibilitás tükrében. Szintén itt foglalkozunk a kapott negatív eredmény kiterjeszhetőségével. Az 5. fejezetben egy csalásbiztos mechanizmust adunk a labdarúgó-világbajnokságok és Európa-bajnokságok selejtezőinek szervezésére. Tanulmányunkat rövid öszszegéssel zárjuk.

Fő eredményeink a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője manipulálhatóságának bizonyítása, a példa általánosíthatóságának vizsgálata, valamint egy csalásbiztosságot garantáló mechanizmus javaslata. A kérdéskör aktualitását véleményünk szerint alátámasztja a tárgyalt példa és a hivatkozott cikkek megjelenésének időpontja.

Néhány történelmi példa

Mind a nézőközönség, mind a lebonyolításért felelős szervezetek számára talán a legkínosabb fordulat, ha egy sporteseményen a játékosok a „természetes” elvárásokkal szemben viselkednek, például azért, mert valamilyen okból nem érdemes erőfeszítést tenniük a győzelemért. Az alábbiakban öt ilyen labdarúgó mérkőzést mutatunk be.

A labdarúgásban a győzelem három, a döntetlen egy, a vereség nulla pontot ér. A csapatokat az általuk megszerzett pontok száma alapján állítják sorba. Azonos pontszám esetén többnyire kétféle törési szabályt alkalmaznak.

Az egyik változatban elsősorban a gólkülönbség számít, a lexikografikus rangsor pontszám után következő szempontjai az alábbiak:

1. nagyobb gólkülönbség az összes lejátszott mérkőzésen;
2. több rúgott gól az összes lejátszott mérkőzésen.

A másik változat az egymás elleni eredményeken alapul:

1. több szerzett pont az azonos pontszámmal álló csapatok között lejátszott mérkőzéseken;
2. nagyobb gólkülönbség az azonos pontszámmal álló csapatok között lejátszott mérkőzéseken;
3. több rúgott gól az azonos pontszámmal álló csapatok között lejátszott mérkőzéseken.

NSZK–Ausztria (1982-es labdarúgó-világbajnokság)

Az 1982. június 25-én, Gijónban (Spanyolország) játszott, Nyugat-Németország (NSZK) és Ausztria közötti világbajnoki mérkőzés a „gijóni megneemtámadási szerződés” vagy „gijóni szégyen” néven vált ismertté. A csoport mérkőzés előtti állása az 1. táblázatban látható. A pontozott vonal jelzi a továbbjutást jelentő első két pozíciót. Ekkor a győzelem még csak két pontot ért, törési szabályként a gólkülönbséget alkalmazták.

1. táblázat

1982-es labdarúgó-világbajnokság 2. csoportjának eredménye az utolsó meccs nélkül

M: lejátszott meccsek száma; Gy: győzelmek, D: döntetlenek, V: vereségek; G+: szerzett gólok, G-: kapott gólok, Gk: gólkülönbség

Csapat	M	Gy	D	V	G+	G-	Gk	Pont
Ausztria	2	2	0	0	3	0	3	4
Algéria	3	2	0	1	5	5	0	4
NSZK	2	1	0	1	5	3	2	2
Chile	3	0	0	3	3	8	-5	0

Egy nyugat-német győzelemmel az első három csapat 4-4 pontot ért volna el. Ha az NSZK egy (két) góllal nyer, akkor gólkülönbsége +3-ra (+4-re) nő, míg Ausztriáé +2-re (+1-re) csökken, így mindkét ország továbbjut, Algéria kiesik. Ennél nagyobb gólkülönbség viszont Ausztria kieséséhez vezetett volna.

A mérkőzésen 10 perc játék után az NSZK Horst Hrubesch (jegyezzük meg) révén gólt szerzett, így a továbbiakban semmilyen ösztönzőjük nem volt, hogy újabb támadásokkal veszélyeztessék a továbbjutást. Hasonlóan, Ausztriának sem volt érdeke kockáztatni a gólszerzés érdekében. A végeredmény további 80 perc gólmentes játék volt. Az afrikai csapat megóvta a mérkőzést, a fellebbezést azonban elutasították, hiszen a két csapat semmilyen szabálytalanságot sem követett el. Valószínűleg e mérkőzés következményeként az 1984-es Európa-bajnokságtól és az 1986-os világbajnokságtól kezdődően a csoportkör utolsó mérkőzéseit azonos időpontban játsszák.

Barbados–Grenada (1994-es karibi kupa selejtezője)

Az 1994-es karibi kupa selejtezőjén az országok hármásával alkottak egy csoportot, és csupán a csoportelső jutott tovább. A mérkőzések eredménye nem lehetett döntetlen, a hosszabbításban szerzett, a mérkőzés végét jelentő aranygól duplán számított.

Az 1. csoport állása az 1994. január 25-én, Barbadoson lejátszott utolsó mérkőzés előtt a 2. táblázatban látható. Törési szabályként a gólkülönbséget használták, ezért Barbadosnak legalább két góllal kellett legyőznie Grenadát a továbbjutáshoz.

2. táblázat

1994-es karibi kupa 1. csoportjának eredménye az utolsó meccs nélkül

M: lejátszott meccsek száma; Gy: győzelmek, D: döntetlenek, V: vereségek; G+: szerzett gólok, G-: kapott gólok, Gk: gólkülönbség

Csapat	M	Gy	D	V	G+	G-	Gk	Pont
Grenada	1	1	0	0	2	0	2	3
Puerto Rico	2	1	0	1	1	2	-1	3
Barbados	1	0	0	1	0	1	-1	0

A mérkőzés során a 2-0-ra vezető Barbados megszerezte a továbbjutáshoz szükséges előnyt, azonban a 83. percben Grenadának sikerült gólt lőnie. Barbados megpróbált visszatámadni, de hamar belátták, az idő rövideje miatt célszerűbb öngólt rúgniuk, hiszen a hosszabbításban további 30 percük áll rendelkezésre, és egyetlen találattal a kétgólos előnyt is megszerzik.

A grenadai játékosok hamarosan szintén felismerték, hogy az aktuális 2-2-es állás esetén bármelyik kapuba lönek gólt, ők jutnak tovább, mivel Barbados győzelme esetén is csak egy gól lesz a különbség. A barbadosi játékosok fele ezért a saját kapujukat, míg a másik felük a grenadai kaput védte, így sikerült elérniük, hogy a mérkőzés a hosszabbításban fejeződjön be, ahol végül megnyerték a játékot és továbbjutottak.

A probléma gyökerét jelentő, a hosszabbításban szerzett gól(oka)t kétszeresen díjazó szabályt tudomásunk szerint soha többé nem alkalmazták.

Thaiföld–Indonézia (1998-as Délkelet-ázsiai labdarúgó-bajnokság)

3. táblázat

1998-as Délkelet-ázsiai labdarúgó-bajnokság A csoportjának eredménye az utolsó meccs nélkül

M: lejátszott meccsek száma; Gy: győzelmek, D: döntetlenek, V: vereségek; G+: szerzett gólok, G-: kapott gólok, Gk: gólkülönbség

Csapat	M	Gy	D	V	G+	G-	Gk	Pont
Indonézia	2	2	0	0	9	2	7	6
Thaiföld	2	1	1	0	4	2	2	4
Mianmar	3	1	1	1	8	9	-1	4
Fülöp-szigetek	3	0	0	3	3	11	-8	0

Az 1998-as Délkelet-ázsiai labdarúgó-bajnokságon a csoportok első két helyezettje jutott tovább. Az utolsó mérkőzéseket nem egy időpontban játszották, az A csoport állása az 1998. augusztus 31-én Ho Si Minh-városban lejátszott utolsó mérkőzés nélkül a 3. táblázatban látható. Indonézia mindenképp továbbjutó, és Thaiföld sem eshetett volna ki, ha legfeljebb két

góllal veszíti el a meccset. A csoportgyőztes Vietnám ellen játszik Hanoiban, míg a második a gyengébbnek tartott Szingapúrral, és maradhat Ho Si Minh-városban.

Az állás 90 perc után 2-2 volt, ami Indonézia csoportgyőzelmét jelentette volna. A hosszabbításban egy indonéz védő, a thai védelmi próbálkozás ellenére, öngólt rúgott, ezzel Thaiföldnek 3-2-es győzelmet és csoportelsőséget adva. A FIFA mindkét csapatot 40 000 amerikai dollárra büntette, az indonéz védőt egy évre eltiltotta a hazai, és örökre a nemzetközi mérkőzésektől. Az elődöntőben mind Thaiföld, mind Indonézia kikapott.

Dánia–Svédország (2004-es labdarúgó-Európa-bajnokság)

4. táblázat

2004-es labdarúgó-Európa-bajnokság, C csoport az utolsó csoportmérkőzések előtt

M: lejátszott meccsek száma; Gy: győzelmek, D: döntetlenek, V: vereségek; G+: szerzett gólok, G-: kapott gólok, Gk: gólkülönbség

Csapat	M	Gy	D	V	G+	G-	Gk	Pont
Svédország	2	1	1	0	6	1	5	4
Dánia	2	1	1	0	2	0	2	4
Olaszország	2	0	2	0	1	1	0	2
Bulgária	2	0	0	2	0	7	-7	0

A 2004-es labdarúgó-Európa-bajnokság C csoportjában Svédország és Dánia is győzött Bulgária ellen, valamint mindketten döntetlent játszottak Olaszországgal. Az utolsó két mérkőzés (Dánia–Svédország, illetve Olaszország–Bulgária), bármilyen eredménnyel zárulhatott, Bulgária kiesése biztos volt. Még ha nyertek volna Olaszország ellen, akkor is csak 3 ponttal végeznek, így nem kerülhettek a két továbbjutó közé.

A dán és svéd válogatottak számíthattak arra, hogy az olaszok győznek Bulgária ellen. Ebben az esetben Olaszországnak 5 pontja lenne, így a dán-svéd mérkőzés győztesével együtt jut tovább a következő fordulóba. Olaszország továbbjutása azonban megakadályozható, ha Svédország döntetlent játszik Dániával. Ekkor mindhárom országnak ugyanannyi pontja lenne, a törési szabály pedig az egymás elleni eredmény. Dánia 0-0-t, Svédország 1-1-et játszott Olaszországgal, tehát egy legalább 2-2-es döntetlennel mindkét skandináv ország továbbjutása biztosított. Ezek után már nem meglepő, hogy a 2004. június 22-én, Portóban (Portugália) lejátszott dán-svéd mérkőzés eredménye 2-2 lett. Mivel az olaszok 2-1-re nyertek, Dánia és Svédország is kiesett volna, ha kikap, sőt, Dánia 0-0-s döntetlennel sem juthatott volna tovább.

A két utolsó csoportmérkőzés ugyan egy időpontban játszódott, hogy a gijóni szégyenhez hasonló esetek ne forduljanak elő, ebben az esetben mégis előre tudhatták a játékosok, milyen eredményt kell elérniük a mérkőzésen a továbbjutásuk biztosításához. Amennyiben az egymás elleni eredmény helyett a gólkülönbséget használják törési szabályként (mint a labdarúgó-világbajnokságokon), az olaszok sorsa saját kezükben lett volna, egy legalább háromgólos győzelemmel garantáltan továbbjutnak.

Olaszország–Németország (2017-es U21-es labdarúgó-Európa-bajnokság)

5. táblázat

2017-es U21-es labdarúgó Európa-bajnokság, C csoport az utolsó csoportmérkőzések előtt

M: lejátszott meccsek száma; Gy: győzelmek, D: döntetlenek, V: vereségek; G+: szerzett gólok, G-: kapott gólok, Gk: gólkülönbség

Csapat	M	Gy	D	V	G+	G-	Gk	Pont
Németország	2	2	0	0	5	0	5	6
Csehország	2	1	0	1	3	3	0	3
Olaszország	2	1	0	1	3	3	0	3
Dánia	2	0	0	2	0	5	-5	0

A 2017-es U21-es labdarúgó Európa-bajnokságon a 12 résztvevőt három csoportba osztották. Az elődöntőbe a csoportelsők mellett a legjobb csoportmásodik kerül, a három csoportmásodikat az elért pontszám, majd a gólkülönbség alapján rangsorolják. A C csoport utolsó mérkőzései (Olaszország–Németország és Csehország–Dánia) előtti állás az 5. táblázatban látható, a pontozott vonal jelzi a biztos, a szaggatott vonal a lehetséges továbbjutó pozíciókat. Eddigre a többi csoportban befejeződtek a mérkőzések, így tudható, hogy a másik két csoportmásodik közül a jobb Szlovákia, hat ponttal és +3-as gólkülönbséggel (hat rúgott és három kapott góllal).

A 2017. június 24-én, Krakkóban (Lengyelország) lejátszott olasz-német mérkőzés 31. percében az olaszok megszerezték a vezetést. Érdeemes megvizsgálni a helyzetet, ha ez marad a végeredmény. Amennyiben a másik meccsen a csehek győznek, akkor három csapatnak lesz hat pontja, a németeknek, az olaszoknak és a cseheknek. A csoporton belül törési szabályként az egymás elleni eredményt alkalmazzák, így a Németországtól ugyan 0-2-re kikapó, de Olaszországot 3-1-re legyőző Csehország lesz a második, viszont Németország +4-es gólkülönbségével csoportelső marad.

Ha a másik meccs döntetlen vagy a dánok győznek, akkor Olaszországnak és Németországnak is hat pontja lesz, Olaszország a csoportelső, viszont Németország ebben az esetben csoportmásodikként is továbbjut.

Amennyiben viszont 1-0-s olasz vezetésnél bármelyik csapat gólt szerez, a másik kiesik, így egyiküknek sem volt érdekük kockázatos támadásokat vezetni (számos internetes összefoglalóban az olvasható, hogy bármilyen más eredmény esetén Szlovákia jutott volna tovább; ez azonban nem igaz, 4-2-es olasz győzelemnél Németország szintén csoportmásodik). Ráadásul a csoportelső a 2011-es és 2013-as győztes Spanyolországgal játssza az elődöntőt (bár maradhat Krakkóban), míg a csoportmásodik a gyengébb Angliával, ezért az sem elképzelhetetlen, hogy a németek szándékosan kaptak ki. A valós végeredmény Olaszország–Németország 1-0, Csehország–Dánia 2-4 lett. A torna győztese Németország, miután az elődöntőben – tizenegyesekkel – Angliát, a döntőben Spanyolországot búcsúztatta.

A mérkőzés komoly vitát generált, a szlovák edző gyalázatnak nevezte az eredményt, Robert Fico szlovák miniszterelnök pedig nyílt levélben szólította fel az UEFA-t az eset kivizsgálására és olyan szabályok megalkotására, amelyek sportszerű magatartásra ösztönöznek. A német futballszövetség sportigazgatója, az U-21-es ifjúsági válogatott 2000-2016 közötti szövetségi kapitánya, Horst Hrubesch – a gijóni szégyen gólszerzője – viszont teljes mértékben elfogadhatónak tartotta, hogy az utolsó percekben mindkét csapat óvatosan játszott.

Axiomatikus szempontból joggal kifogásolható a csoportban és a csoportmásodikkok között használt törési szabály eltérése. Utóbbi esetben nem értelmezhető az egymás elleni eredmény.

Miután Olaszország gólkülönbsége csupán +1, csoportmásodikként rosszabb lett volna Szlovákiánál. Vagyis a csoporton belüli törési szabály befolyásolhatja egy másik csoportban szereplő csapat továbbjutását, ami aligha indokolható.

UEFA-bajnokok ligája (BL) és Európa-liga (EL) kvalifikáció

Az ebben a fejezetben tárgyalt jelenség a korábbiaknál annival bonyolultabb, hogy nem egy, hanem két különböző bajnokságot is érint. A 2012/13-as idényben Oroszország két csapatot delegálhatott az UEFA-bajnokok ligájába (BL), és négy csapatot az UEFA Európa-ligába (EL). A bejutás két különböző 2012-es országos labdarúgó sorozat, a Premjer-Liga, az orosz labdarúgó-bajnokság első osztálya és az Orosz Kupa eredményei alapján dőlt el:

1. A Premjer-Liga bajnokság első két helyezettje továbbjut a BL-be;
2. A bajnokság harmadiktól ötödik helyezett csapata indulhat az EL-ben;
3. Az Orosz Kupa győztese szintén megszerzi a kvalifikációt az EL-be.

Amennyiben a kupagyőztes megszerzi a bajnokság első öt helyének valamelyikét, üresedés áll elő. Ekkor a továbbjutás a 6. táblázatban látható szabályok alapján történt.

6. táblázat

Európa-liga kvalifikáció a Premjer-Liga bajnokság eredményei alapján a 2012/13-as idényben

Orosz Kupa döntősök helyezése a bajnokságban		Európa-liga kvalifikációt érő helyezések a bajnokságban			
győztes	ezüstérmes				
1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. vagy 2.	3., 4., vagy 5.	3.	4.	5.	6.
1. vagy 2.	6., vagy annál rosszabb	3.	4.	5.	Kupa ezüstérmes
3.	bármely más	Kupa győztes	4.	5.	6.
4.	bármely más	Kupa győztes	3.	5.	6.
5.	bármely más	Kupa győztes	3.	4.	6.
6. vagy annál rosszabb	bármely más	Kupa győztes	3.	4.	5.

2012. május 8-án a Premjer-Liga bajnokságban még minden csapatnak hátravolt egy mérkőzése, míg az Orosz Kupa döntőjét a Dinamo Moszkva és a Rubin Kazany játszotta május 9-én. Tekintsük a következő hipotetikus forgatókönyvet, melynek első leírása Dr. Andrej Bricskin nevéhez fűződik (Dagaev és Sonin [2017], 5. végjegyzet). A Dinamo Moszkva megnyeri az Orosz Kupát. A Rubin Kazany és a CSZKA Moszkva a bajnokságban döntetlent játszanak. Ezután a Lokomotiv–Szpartak és az Anzsi–Zenit mérkőzések nélküli állás a 7. táblázatban látható.

Mivel pontegyenlőség esetén a több megnyert mérkőzés a döntő, ezért a Dinamo a CSZKA-t, és a Lokomotiv a Rubin-t megelőzi. Az Anzsi Mahacska–Zenit Szentpétervár mérkőzés végeredménye irreleváns, mivel a Zenit mindenképpen megnyerte a bajnokságot és az Anzsi továbbjutott az EL-be, hiszen már csak negyedik vagy ötödik helyezett lehet a Premjer-Ligában. Az egyetlen releváns meccs a Lokomotiv–Szpartak, három lehetséges kimenetellel, a Lokomotiv nyer, döntetlent játszik, vagy veszít.

7. táblázat

2012-es orosz Premjer-Liga hipotetikus végeredménye, a Lokomotiv–Szpartak és az Anzsi–Zenit mérkőzések nélkül

Helyezés	Csapat	Pont
1	Zenit Szentpétervár	85
2	Dinamo Moszkva	74
3	CSZKA Moszkva	74
4	Szpartak Moszkva	72
5	Anzsi Mahacskala	70
6	Lokomotiv Moszkva	66
7	Rubin Kazany	66
8	Kubany Krasznodar	60

Forrás: Dagaev-Sonin [2017] alapján

Ha a Lokomotiv megnyeri a Szpartak elleni mérkőzést, akkor 69 pontjával hatodik helyezettként végez. A Szpartak 72 ponttal negyedik lesz. Az első két helyet a Zenit és a Dinamo szerzi meg, a BL-ben indulhatnak. A kupadöntő eredményétől függetlenül a Rubin szerzi meg az EL kvalifikációt. Hasonló forgatókönyv játszódik le, ha a Lokomotiv–Szpartak mérkőzés végeredménye döntetlen. Ellenben, ha a Lokomotiv veszít, akkor a Szpartaknak 75 pontja lesz, amivel második helyre kerül a bajnokságban. A Dinamo a harmadik helyre csúszik, így a bajnokság hatodik helyezettje, a Lokomotiv indulhat az EL-ben, ha a Dinamo megnyeri az Orosz Kupát. Tehát 2012. május 8-án a Lokomotiv ösztönözve lehetett volna utolsó mérkőzésének elvesztésére annak érdekében, hogy az EL-be kerüljön. Hazai pályán valóban 2-0-ra kikapott a Szpartaktól, azonban a Rubin megnyerte utolsó mérkőzését és az Orosz Kupát is, így ez a csapat indulhatott az EL-ben.

A legtöbb európai labdarúgó-bajnokságban a BL és EL kvalifikáció két sorozat, a dupla körmérkőzéses (minden csapat egyszer otthon, egyszer idegenben játszik minden másikkal) alapú nemzeti bajnokság és az egyenes kieséses kupa alapján dől el, utóbbinak csak a győztese indulhat az Európa Ligában. Ez alól kivétel Liechtenstein, ahol nincs bajnokság, valamint Anglia és Franciaország, ahol két egyenes kieséses kupából lehet az Európa Ligába kerülni.

Amennyiben a kupagyőztes olyan helyezést ér el a bajnokságban, ami BL vagy EL indulásra is jogosítaná, üresedés áll elő. Dagaev–Sonin [2017] egy elméleti modell segítségével megmutatta, hogy kvalifikáció akkor és csak akkor lesz stratégiaileg biztos, mentes a manipuláció lehetőségétől, amennyiben az üres helyet mindig a bajnokságban hátrébb végző csapat kapja. Ellenkező esetben ugyanis előfordulhat, hogy a bajnokságban elszenvedett szándékos vereséggel olyan üresedést lehet generálni, ami a manipuláló csapatnak kedvez. A 2015/16-os szezon megelőzően számos országban – a bemutatott orosz példához hasonlóan – a kupagyőztes helyett a kupadöntő vesztese kapta, ha a kupagyőztes a bajnokság alapján a BL-be jutott, ezzel potenciálisan rossz ösztönzőket teremtve. Azóta az üresedést minden esetben a bajnokságon belül kezelik, a kvalifikáció ebből a szempontból stratégiaileg biztos.

A 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője

A fejezetben megmutatjuk, hogy a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője sem csalásbiztos: az utolsó játéknapon, 2017. októberében megtörténhetett volna, hogy egy csapat az 1-1-es döntetlennel részt vehet a második forduló pótselejtezőn, így megőrizve az esélyt a világbajnokságon történő részvételre, miközben egy 1-0-ás győzelem a kieséséhez vezetne.

A 21. labdarúgó-világbajnokságot 2018. június 14. és július 15. között Oroszországban rendezik meg. Az eseményen 32 nemzeti válogatott képviselheti magát, a rendező automatikusan

résztevő, a fennmaradó 31 helyért a Nemzetközi Labdarúgó-szövetség (FIFA) további 210 tagja verseng. A selejtezőket a FIFA hat kontinens – az interkontinentális pótsejtezőktől eltekintve – egymástól függetlenül bonyolítja le. Az európai selejtezőtornáról 13 csapat jut ki a világbajnokságra. A lebonyolítást az Európai Labdarúgó-szövetség (UEFA) 2015. március 22–23-i bécsi ülésén hagyta jóvá.

A 2015. július 25-én, Szentpéterváron elvégzett sorsoláson hét hatcsapatos (A–G) és két ötcsapatos (H–I) csoportot képeztek. Az 52 csapatot a 2015 júliusi FIFA-világranglistán elfoglalt helyezések alapján hat kalapba osztották: az első kalapba az 1-9., a második kalapba a 10-18., és így tovább, végül a hatodik kalapba a maradék hét, 46-52. helyezett csapatok kerültek. Minden csoportba egy-egy csapat kerül az első öt, az első hét csoportba pedig egy-egy a hatodik kalapból is. Miután 2016. május 13-án Gibraltár és Koszovó a FIFA tagja lett, a két utolsó csoportot kibővítették, Gibraltárt a H, Koszovót az I csoportba osztották be.

A csoportokat körmerkőzéses rendszerben szervezik, minden csapat minden másikkal egy-egy (összesen 10) mérkőzést játszik hazai és idegenbeli pályán. A sorozat végén a kilenc csoportelső automatikusan kijut a világbajnokságra, a nyolc legjobb csoportmásodik pedig oda-visszavágós pótsejtezőt játszik egymással, ezek győztesei szintén kijutnak. A kilencedik csoportmásodik kiesik.

A csoportmásodikok eltérő kezelése miatt szükség van az egymással egyébként nem játszó csapatok összehasonlítására. Ennél a rangsornál a hatodik helyezett csapat elleni eredményeket nem veszik figyelembe. A látszólag apró módosítás oka az UEFA indoklása szerint a Gibraltár és Koszovó késői beosztásából eredő, a csoportok közötti esetleges egyensúlytalanságok kiküszöbölése (UEFA [2017]). Ugyanakkor a hatodik helyezett elleni mérkőzések mellőzése folytán a csoportmásodikoknak – amennyiben ezt a pozíciójukat megőrzik – olyan csapatot érdemes az utolsó helyre juttatniuk, mely ellen kevés pontot szereztek. Ezt akár azon az áron is érdemes megtenni, hogy egy mérkőzésen szándékosan rosszabb eredményt érnek el, mint az egyébként lehetséges lenne.

A manipuláció módját a következő példával illusztráljuk. A csoportkör utolsó mérkőzéseit 2017. október 10-én játszották, tehát a csoportkör minden eredménye ismert, ezeket a B-I csoportokban adottnak vesszük. Az A csoportban az első nyolc játéknapon lejátszott mérkőzéseket szintén változatlanul hagyjuk. A 2017 októberében lejátszott mérkőzések fiktív eredményei legyenek az alábbiak:

- 2017. október 7., Svédország–Luxemburg: 0-5 (valójában 8-0);
- 2017. október 7., Fehéroroszország–Hollandia: 8-0 (valójában 1-3);
- 2017. október 7., Bulgária–Franciaország: 8-0 (valójában 0-1);
- 2017. október 10., Franciaország–Fehéroroszország: 1-0 (valójában 2-1);
- 2017. október 10., Luxemburg–Bulgária: 0-1 (valójában 1-3);
- 2017. október 10., Hollandia–Svédország: 2-0 (valójában 2-0).

A csoport végeredménye a 8. táblázatban látható. Törési szabályként a gólkülönbséget alkalmazták. A második helyezett a fenti fiktív forgatókönyv esetén Bulgária. A többi nyolc (B-I) csoport másodikkai között a legrosszabb Szlovákia, 12 ponttal és +5-ös gólkülönbséggel. Ennél az összehasonlításnál nem számít Bulgária utolsó helyezett, azaz Luxemburg elleni otthoni (4-3) és idegenbeli (0-1) mérkőzése, vagyis 12 pontja és +3-as gólkülönbsége lesz, így legrosszabb csoportmásodikként kiesik.

Bulgária utolsó csoportmérkőzését Luxemburg ellen játssza, idegenben. Amennyiben másodikként végez, ezen mérkőzés eredménye nem lesz figyelembe véve a csoportmásodikok rangsorában, tehát Bulgária hiába győz, a rúgott gólok számától függetlenül kiesik. Mi történik, ha 1-1-es döntetlent játszik? Ekkor Bulgária két pontot veszít a csoportban, gólkülönbsége eggyel rosszabb lesz, így Svédországgal azonos pontszámmal és gólkülönbséggel rendelkezik, de több rúgott gólja miatt második helyezett marad. A változtatás eredményeként azonban nem Lu-

xemburg, hanem Fehéroroszország lesz az utolsó (Luxemburnak több rúgott gólja van). Márpedig Bulgária Fehéroroszország ellen otthon ugyan nyert (1-0), idegenben viszont vereséget szenvedett (2-1), ezért a csoportmásodikok összehasonlításában Bulgáriának immár 13 pontja lesz, megelőzi Szlovákiát és pótsejtezőt játszhat. Vagyis Bulgária képes manipulálni a selejtezőt: a Luxemburg elleni mérkőzés utolsó percében egy öngólt rúgva, esetleg egy apró védelmi hibát elkövetve Szlovákia esne ki, míg Bulgária megőrizné esélyét a világbajnokságon történő részvételre.

8. táblázat

A 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője A csoportjának hipotetikus végeredménye
Gy: győzelmek, D: döntetlenek, V: vereségek; G+: szerzett gólok, G-: kapott gólok, Gk: gólkülönbség
Minden csapat 10 mérkőzést játszott
Az utolsó sor Bulgária csoportmásodikok összehasonlításánál figyelembe vett eredményét tartalmazza

Helyezés	Csapat	Gy	D	V	G+	G-	Gk	Pont
1	Franciaország	6	2	2	16	13	3	20
2	Bulgária	6	0	4	22	17	5	18
3	Svédország	5	1	4	18	14	4	16
4	Hollandia	5	1	4	18	19	-1	16
5	Fehéroroszország	2	2	6	12	17	-5	8
6	Luxemburg	2	2	6	12	18	-6	8
2	Bulgária	4	0	4	17	14	3	12

Az eredmények általánosíthatósága

A fenti elemzés nem foglalkozott az manipuláció idődimenziójával. A csoportok utolsó mérkőzéseit azonos időpontban játsszák, ezért Bulgária számára kockázatos stratégia lehet döntetlen játszani Luxemburggal, mivel egy győzelemmel – csoportelsőként – közvetlenül is kijuthat a világbajnokságra, amennyiben Franciaország vereséget szenvedne Fehéroroszországtól. Néhány korábban lejátszott mérkőzés módosításával Bulgária számára domináns stratégiává tehető a Luxemburg elleni döntetlen, miután egy győzelemmel garantáltan a legrosszabb csoportmásodik lesz és kiesik, döntetlennel viszont nem kizárt a pótsejtező elérése (Csató [2017a]).

Csató [2017e] egy matematikai modellbe illeszti a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjéhez hasonló, csoportalapú kvalifikációs rendszereket. A különböző csoportban szereplő csapatok összehasonlítása egy segédcsoport bevezetésével oldható meg. Az allokációs szabály a mérkőzések eredményeinek függvényében megadja, mely csapatok jutnak tovább közvetlenül, melyek kerülnek a következő selejtező fordulóba, és melyek esnek ki. A fő eredmény szerint a csoporton belüli és segédcsoportban alkalmazott rangsorolás monotonitása ugyan kizárja, hogy rosszabb teljesítménnyel jobb helyezést lehessen elérni az adott csoportban, de még nem garantálja a csalásbiztosságot, ha teljesülnek az alábbiak:

- 1) A csoportok száma legalább kettő (a tárgyalt példában kilenc);
- 2) A segédcsoportba sorolt csapatok – az allokációs szabály által meghatározott – sorsa különböző (a tárgyalt példában a csoportmásodikok közül a legrosszabb kiesett, a többi pótsejtezőt játszhatott);
- 3) A segédcsoportban található olyan csapat, melynek legalább egy, a csoportban legalább kettővel rosszabb helyezést elérő csapat elleni eredményét a segédcsoportban nem veszik figyelembe (a tárgyalt példában a második helyezettek hatodik elleni eredménye nem számít).

A tétel alkalmazásával belátható öt labdarúgó-világbajnokság (az 1998-as, a 2006-os, a 2010-es, a 2014-es és a 2018-as) európai selejtezőjének, valamint négy labdarúgó-Európa-bajnokság (az 1996-os, a 2000-es, a 2012-es és a 2016-os) selejtezőjének manipulálhatósága. Dagaev–Sonin [2017] egy mondatban említi, Dagaev–Sonin [2013] pedig részletesen bemutatja, hogy a 2014-es labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője sem csalásbiztos.

A tényleges manipulációnak két feltétele van. Egyrészt, a bizonyos mérkőzéseken elért rosszabb eredmény révén a szándékosan gól(oka)t kapó csapat jobb mutatókkal rendelkezzen a segédcsoportban. Másrészt, a javulásnak effektívnek kell lennie, vagyis a segédcsoportban elért előnyösebb helyzetnek gyakorlati előnyökkel kell járnia: kiesés vagy a következő selejtező fordulóba jutás helyett közvetlen kijutáshoz, esetleg kiesés helyett a következő selejtező fordulóba jutáshoz kell vezetnie. Az 1996-os labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjének 1. csoportjában Franciaország kedvezőbb eredménnyel szerepelhetett volna a csoportmásodikok között, ha az utolsó, Izrael elleni csoportmérkőzésének végén, 2-0-s vezetésnél két öngólt vét (Csató [2017f]). Ez a változás azonban nem módosította volna Franciaország sorsát, mivel mindkét eredmény mellett közvetlenül kijutott a tornára. Ennek ellenére kellő figyelmeztetésként szolgálhat ez a mérkőzés.

Egy csalásbiztos mechanizmus a selejtezők szervezésére

A selejtezők manipulálhatóságának megalapozott kritikájához hozzátartozik egy olyan eljárás megadása, melynek alkalmazásával garantálható a csalásbiztosság követelménye. Az alábbiakban egy, szellemében a korábban rendezett selejtezőkhöz hasonló struktúrát eredményező mechanizmust javasolunk. Ennek lépéseit a lenti sorrendben célszerű követni, az első kettő nem működik minden esetben, a harmadik azonban biztosan használható.

1. Minden csoport ugyanannyi csapatot tartalmazzon, a segédcsoportban pedig minden mérkőzést vegyenek figyelembe. Például a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője esetén elegendő lett volna – Gibraltár és Koszovó beosztása után, a sorozat kezdete előtt – törölni azt a szabályt, hogy a csoport hatodik helyezettjei elleni eredményeket mellőzik a csoportmásodikok összehasonlításakor.

Ez a megoldás oszthatósági problémákba ütközhet.

2. Ne legyen szükség segédcsoportra. Például a 2004-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőben a tíz csoportelsőbe közvetlenül kijutott, a csoportmásodikok pedig pótsejtezőt játszottak.

Ez a megoldás sem feltétlenül alkalmazható: egy csoportba nem célszerű 5-nél kevesebb vagy 8-nál több csapatot beosztani, mert előbbi esetben túl kevés, míg az utóbbiban túl sok mérkőzést kell megrendezni, ami növeli a véletlen szerepét, illetve időkorlátokba ütközhet.

3. A segédcsoportban törölt mérkőzések anonimitásának megszüntetése. A közgazdaságtanban általában nem kívánatos gazdasági szereplők (csapatok) elnevezésétől függővé tenni a döntéseket. Azonban idézzük fel, hogyan sorsolják a selejtezők csoportjait. Először is, a résztvevő válogatottakat a hivatalos FIFA világranglistán elfoglalt helyezéseik alapján sorba rendezik. Ha k csoportot kell létrehozni, akkor az első kalapba az első k helyezett, a másodikba a következő k csapat kerül, és így tovább, míg elérjük az m -edik kalapot k és $2k$ közötti (például 2000-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjénél) vagy k -nál kevesebb válogatottal (például 2014-es labdarúgó-világbajnokság selejtezőjénél). Amennyiben az m -edik kalapba éppen k csapat jutna, a mechanizmus már az 1. lépésnél megáll. Tehát a különböző csoportméret az m -edik kalapban jelenik meg, így kézenfekvő az ide sorolt csapatok ellen játszott mérkőzések eredményeinek mellőzése a segédcsoportban.

A 2018-as labdarúgó-világbajnokság selejtezője esetén ez azt jelentené, hogy előre rögzítjük, az A csoportban második helyezett csapatnak a 6. kalapba sorolt Luxemburg elleni eredménye nem fog számítani. Ezáltal nem lehet manipulálni az utolsó helyezett kilétét megváltoztatva, vagyis a selejtező csalásbiztossá válik. A gyakorlatban azonban nem jelentene nagy különbséget ez a megoldás, mert a 6. kalapba sorolt csapatok (valamint Gibraltár és Koszovó) közül csupán Luxemburg és Grúzia végzett csoportjuk ötödik helyén, a többiek mind utolsók lettek.

Kis valószínűséggel az is megtörténhet, hogy az m -edik kalapba sorolt csapat kiemelkedő teljesítménye miatt a segédcsoportba kerül. Egy ilyen válogatott esetén az eggyel magasabb, $m-1$ -edik kalapból sorsolt csapat elleni eredmény törölhető.

A fent mechanizmus alternatíváját jelentheti, ha mesterségesen biztosítjuk a csoportok azonos méretét. A leggyengébb, m -edik kalapba sorolt csapatok például egy külön selejtezőtornán szerepelhetnek, ahonnan nem lehetséges a közvetlen kijutás, az ezt megnyerő csapat a legjobb csoportmásodikkal játszhatna pótsejtezőt. Ez a megoldás azzal az előnnyel is bír, hogy a többnyire amatőr játékosok alkotta kis nemzetek a saját kategóriájukba tartozó csapatokkal mérkőzhetnek meg, nem az lesz számukra az egyetlen sikerélmény, ha nagyritkán egy-egy gólt „találnak” a profi játékosok ellen: a 2018-as labdarúgó-világbajnokság selejtezője során Liechtenstein egy, Andorra és San Marino két gólt szerzett a tíz mérkőzésen. Újabb lehetőséget jelentene az alacsonyan rangsorolt csapatok elősejtezője, amit például a 2018-as röplabda-világbajnokság európai kvalifikációja során használtak.

Összefoglalás

A FIFA és az UEFA döntéshozói az elmúlt évtizedekben komoly kockázatot vállaltak a csalásbiztosságot megsértő selejtezők szervezésével. A vázolt hipotetikus eset bizonyos szempontból minden, a 2. fejezetben említett példánál súlyosabb. Az 1982-es NSZK–Ausztria és a 2017-es Olaszország–Németország mérkőzéseken a két csapat számára csak a támadásra való ösztönzés hiányzott, öngólt egyiküknek sem kellett rúgnia a továbbjutáshoz. Barbados és Grenada 1994-es találkozója nem érintett hátrányosan olyan harmadik válogatottat, mely joggal tiltakozhatott volna a szabályok manipulálhatósága miatt. A vázolt hipotetikus példában viszont, a 2018-as labdarúgó-világbajnokság európai selejtezőjének Bulgária–Luxemburg mérkőzésén mindkét fél jobban járna a döntetlennel, a „vétlen” Szlovákia pedig éppen a bolgárok „tisztességtelen” viselkedése miatt esne ki.

A bemutatott példák és esettanulmányok reményeink szerint meggyőzően bizonyítják a sportban alkalmazott rangsorolási szabályok axiomatikus vizsgálatának fontosságát, emellett számos új kutatási kérdést vetnek fel. Mennyire elterjedtek a gyakorlatban a manipulálható szabályok? Milyen valószínűséggel fordulhat elő ilyen szituáció? Hogyan garantálható a csalásbiztosság? Úgy véljük, az ezekre adott válaszok nem csak a tudományos kutatás, hanem az érintett sportágak irányító testületei és a sport iránt érdeklődő szurkolók számára is hasznosak és érdekesek lehetnek.

Hivatkozások

CSATÓ LÁSZLÓ [2017a]: 2018 FIFA World Cup qualification can be manipulated. <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/3053/>.

CSATÓ LÁSZLÓ [2017b]: Some impossibilities of ranking in sport tournaments. [arXiv: 1701.06539](https://arxiv.org/abs/1701.06539).

- CSATÓ LÁSZLÓ [2017c]: An impossibility theorem for paired comparisons. [arXiv: 1612.00186](https://arxiv.org/abs/1612.00186).
- CSATÓ LÁSZLÓ [2017d]: On the ranking of a Swiss system chess team tournament. *Annals of Operations Research*, Vol. 254. No. 1-2. 17–36. o. <https://doi.org/10.1007/s10479-017-2440-4>
- CSATÓ LÁSZLÓ [2017e]: European qualifiers to the 2018 FIFA World Cup can be manipulated. <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/83437/>.
- CSATÓ LÁSZLÓ [2017f]: Was Zidane honest or well-informed? How UEFA barely avoided a serious scandal. [arXiv: 1711.09973](https://arxiv.org/abs/1711.09973).
- CSATÓ LÁSZLÓ [2017g]: Tournaments with subsequent group stages are incentive incompatible. [arXiv: 1712.04183](https://arxiv.org/abs/1712.04183).
- CSATÓ LÁSZLÓ [2017h]: A harmadik bíráló bosszúja, avagy mire jók az axiómák. *Magyar tudomány*, 178. évf. 2. sz. 219-223. o. <http://www.matud.iif.hu/2017/02/11.htm>
- DAGAEV, D. – SONIN, K. [2017]: Winning by losing: Incentive incompatibility in multiple qualifiers. *Journal of Sports Economics*, megjelenés alatt. <https://doi.org/10.1177/1527002517704022>.
- DAGAEV, D. – SONIN, K. [2013]: Game theory works for football tournaments. <http://voxeu.org/article/world-cup-football-and-game-theory>.
- GIBBARD, A. [1973]: Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica*, Vol. 41. No. 4. 587–601. o. <https://doi.org/10.2307/1914083>
- KÓCZY, Á. LÁSZLÓ. – STROBEL, MARTIN [2009]: The invariant method can be manipulated. *Scientometrics*, Vol. 81. No. 1. 291–293. o. <https://doi.org/10.1007/s11192-008-2134-4>
- KENDALL, G. – LENTEN, L. J. [2017]: When sports rules go awry. *European Journal of Operational Research*, Vol. 257. No. 2. 377–394. o. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.06.050>
- PAULY, M. [2014]: Can strategizing in round-robin subtournaments be avoided? *Social Choice and Welfare*, Vol. 43. No. 1. 29–46.o. <https://doi.org/10.1007/s00355-013-0767-6>
- SATTERTHWAITE, M. A. [1975]: Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, Vol. 10. No. 2. 187–217. o. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(75\)90050-2](https://doi.org/10.1016/0022-0531(75)90050-2)
- TASNÁDI ATTILA [2008]: The extent of the population paradox in the Hungarian electoral system. *Public Choice*, Vol. 134. No. 3-4. 293–305. o. <https://doi.org/10.1007/s11127-007-9228-z>
- TASNÁDI ATTILA [2014]: Igazságos elosztások, Typotex Kiadó, Budapest. http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/22_TASNADI_Igazsagos_elosztasok.pdf
- UEFA [2017]: News: European Qualifiers: World Cup play-off places confirmed. 10 October 2017. <http://www.uefa.com/european-qualifiers/news/newsid=2506867.html>.
- VAZIRI, B. – DABADGHAO, S. – YIH, Y. – MORIN, T. L. [2017]: Properties of sports ranking methods. *Journal of the Operational Research Society*, megjelenés alatt. <https://doi.org/10.1057/s41274-017-0266-8>
- VONG, A. I. K. [2017]: Strategic manipulation in tournament games. *Games and Economic Behavior*, Vol. 102. 562–567. o. <https://doi.org/10.1016/j.geb.2017.02.011>