Sztenderd fix-fa kooperatív játékok és alkalmazásuk a vízgazdálkodásban*

Radványi Anna Ráhel†

2018. február 15.

Kivonat

A cikk alapvető célja betekintést nyújtani a kooperatív játékelmélet eszköztárába, egy speciális játékosztályon, a sztenderd fix-fa játékok osztályán keresztül. A napjainkban egyre népszerűbb tudományág olyan megoldási koncepciókat szolgáltat, melyek széleskörű gyakorlati alkalmazást tesznek lehetővé, többek között különböző gazdasági problémák költségelosztási kérdéseire adnak megoldási javaslatokat. A sztenderd fix-fa játékok egy fa-struktúrájú hálózatot reprezentálnak, ahol a hálózat csúcsai felhasználókat jelölnek, akik a hálózaton keresztül vesznek igénybe egy bizonyos szolgáltatást. A felmerülő költségek szétosztására keresünk „igazságos" elosztásokat. Az alapvető fogalmak bemutatása és a modell definiálása után konkrét vízgazdálkodási alkalmazásokat mutatunk, amelyek valós gazdasági problémákon alapulnak. A cikk a kooperatív játékelméletnek egy szeletét mutatja be, ugyanakkor jól látható, hogy a specifikusan bemutatott példákon túl hasonló struktúrájú problémák modellezéséhez is hatékony megoldásokat szolgáltat.

*A tanulmány a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal - NKFIH, 119930 pályázatának támogatásával készült.

†Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, anna.radvanyi@uni-corvinus.hu

1. Bevezetés

A kooperatív játékelmélet jelentősége az utóbbi évtizedekben egyre nőtt. A matematika, illetve a közgazdaságtan határmezsgyéjén elhelyezkedő tudományterület eszköztára lehetővé teszi számunkra, hogy olyan gazdasági szituációkat modellezzünk, elemezzünk, amelyekben a felek közötti együttműködésen, és a közösen elért eredményen van a hangsúly. Az ilyen jellegű szituációkban alapvetően két kérdéskört vizsgálunk: milyen kooperációs csoportok (koalíciók) jönnek létre, illetve hogyan tudjuk elosztani az együttműködésből eredő hasznot a résztvevő felek között. A kooperatív játékelmélet területén az utóbbi évtizedekben számos elméleti eredmény született, de fontos kiemelni, hogy ezek nem csak elméleti jellegűek, hanem a gyakorlatban is alkalmazható/alkalmazott megoldásokat szolgáltatnak. Például 1933-ban a Tennessee Valley Authority (TVA), a Tennessee Völgy gazdasági irányítására létrejövő társaság esetében, amely többek között a térség vízgazdálkodási problémáinak irányításával is foglalkozott. Költségelosztási megoldásaik között olyanok is szerepelnek, amelyek megfeltethetők kooperatív játékelméleti megoldáskoncepcióknak, ezen eredményeket Straffin és Heaney (1981), a TVA munkásságát játékelméleti szempontból is bemutató cikkében olvashatjuk. Célunk elsősorban az lesz, hogy egy speciális játékosztályt, a sztenderd fix-fa játékok osztályát bemutassuk, és példákkal szolgáljunk a vízgazdálkodás területéről származó alkalmazhatóságukra. További játékelméleti alkalmazásokat vízgazdálkodási problémákra Parrachino et al. (2006) munkájában olvashatunk. A fix-fa struktúrán túl számos egyéb gráfelméleti modell is alkalmazható, ilyen például a legrövidebb út jákékok osztálya, melyekről bővebben például Fragnelli et al. (2000), illetve Pintér és Radványi (2013) cikkeiben olvashatunk.

A cikk felépítése a következő: a bevezetőt követő 2. fejezetben a TU-játékok alapvető fogalmait mutatjuk be. A 3. szakaszban ismertetjük az elosztásokra vonatkozó legfontosabb fogalmakat, valamint a mag-elosztást. A 4. és 5. fejezetekben bemutatásra kerül a Shapley-érték, illetve a nukleolusz, a két legismertebb megoldáskoncepció. A 6. szakaszban definiáljuk a fix-fa játékok modelljét, a 7. fejezetben pedig konkrét vízgazdálkodási alkalmazásokat mutatunk, amelyek valós gazdasági problémákon alapulnak. Ezután röviden összefoglaljuk az olvasottakat.

A következőkben tehát megismerkedünk a kooperatív játékelmélet legfontosabb alapfogalmaival és összefüggéseivel. Definícióinkban és jelöléseinkben alapvetően Peleg és Sudhölter (2003) könyvére, valamint Forgó et al. (2006) jegyzetére támaszkodunk.

2. TU-játékok

Egy koalíciós formában megadott játékot kooperatívnak nevezünk, ha egy játékban kikényszeríthető szerződések vannak. Azaz a játékosoknak lehetőségük van a kifizetés elosztásáról vagy a választott stratégiáról megállapodásokat kötni, még akkor is, ha ezeket a megállapodásokat az adott játék szabályai nem írják elő. Szerződések, illetve megállapodások kötése többek között a közgazdaságtanban elterjedt tevékenység, például minden egyfordulós eladó-vevő tranzakció egy megállapodás. Sőt, ez többlépcsős tranzakciók esetében is elmondható. Egy megállapodást általában akkor tekintünk megkötöttnek, ha a megsértése olyan (akár magas pénzbeli) büntetéssel jár, ami visszatartja a játékost a megszegéstől.

A kooperatív játékokat két csoportba soroljuk: az átruházható és az át nem ruházható hasznosságú játékok csoportjaiba. Az átruházható hasznosságúak esetében feltesszük, hogy a játékosok egyéni preferenciái egy közvetítő eszköz (pl. pénz) által összemérhetők. Így egy konkrét koalíció tagjai a koalíció által elért kifizetést szabadon feloszthatják egymás között. Követve az elterjedt elnevezést, ezeket a játékokat TU-játékoknak (transferable utility games) fogjuk hívni. Az átruházható hasznossággal nem rendelkező NTU-játékok (non transferable utility games) esetén vagy ez a közvetítő eszköz hiányzik, vagy ha van is ilyen kompenzálást lehetővé tevő jószág, azt a szereplők nem egyforma mértékben ítélik meg. Ezen tanulmány keretében TU-játékokra szorítkozunk.

2.1. Koalíciós játékok

Legyen N a játékosok nemüres, véges halmaza, egy S koalíció pedig az N halmaz egy részhalmaza.

2.1. Definíció. *Egy átruházható hasznosságú kooperatív játék egy olyan* (N, v) *pár, ahol* N *a játékosok véges, nemüres halmaza,* v *pedig egy függvény, ami az* N *minden* S *részhalmazához egy* $v(S)$ *valós számot rendel hozzá. Minden esetben feltesszük, hogy* $v(\emptyset) = 0$.

2.2. Megjegyzés. *Egy* (N, v) *kooperatív játékot röviden* v *játéknak is nevezünk.* N *a játékosok halmaza,* v *a koalíciós függvény,* S *pedig az* N *részhalmaza. Ha az* S *koalíció létrejön a* v *játékban, akkor a koalíció tagjai megkapják a* $v(S)$ *értéket, amely számot a* koalíció értékének *nevezünk.*

2.3. Megjegyzés. *Egy adott* S *koalíció a* $v(S)$ *értéket tetszés szerint szétoszthatja tagjai között. Egy* $x \in \mathbb{R}^S$ *kifizetés megvalósítható, ha kielégíti a*

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$$

egyenlőtlenséget. Az átruházható hasznosság valójában azt a tényt takarja, hogy az S *koalíció el tud érni minden megvalósítható kifizetést, illetve, hogy a hasznosságok összege a koalíció hasznossága.*

A kooperatív játékok legtöbb alkalmazásában általában egyének, vagy egyének bizonyos csoportjai (például szakszervezetek, városok, nemzetek) töltik be a játékosok szerepét. Néhány érdekes közgazdasági játékelméleti modellben a játékosok azonban nem egyének, hanem közgazdasági projektek céljai, termelési tényezők, illetve egyéb szituációk közgazdasági változói.

2.4. Definíció. *Egy* (N, v) *játék szuperadditív, ha*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T),$$

minden $S, T \subseteq N$ *és* $S \cap T = \emptyset$ *esetén. (Fordított reláció fennállása esetén szubadditív játékról beszélünk.)*

Amennyiben az $S \cup T$ koalíció létrejön, a tagjai dönthetnek úgy, mintha S és T külön-külön jöttek volna létre, ekkor a $v(S) + v(T)$ kifizetést érik el. Mindazonáltal a szuperadditivitás sokszor sérül. Léteznek tröszt-ellenes törvények, melyek az $S \cup T$ koalíció profitját csökkentenék, ha a koalíció létrejönne.

2.5. Definíció. *Egy (N, v) játék konvex, ha*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T),$$

minden $S, T \subseteq N$ esetén.

Nyilvánvaló, hogy egy konvex játék szuperadditív is. A következő ekvivalens karakterizáció könnyen meggondolható: egy (N, v) játék pontosan akkor konvex, ha $\forall\ i \in N$-re

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

$\forall\ S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ esetén.

Tehát egy játék akkor és csak akkor konvex, ha a játékosoknak egy koalícióhoz való egyéni határhozzájárulásai $(v(S \cup \{i\}) - v(S))$ monoton növőek. Konvex játékok többek között a konkáv költségjátékokhoz kapcsolódó megtakarítási játékok is, ezekkel később foglalkozunk még.

2.6. Definíció. *Egy (N, v) játék konstans összegű, ha $\forall S \subseteq N$-re*

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$$

.

Konstans összegű játékokkal már a játékelmélet kezdeti szakaszaiban is sokat foglalkoztak (von Neumann és Morgenstern, 1944).

2.7. Definíció. *Egy (N, v) játék lényeges, ha $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$.*

2.8. Definíció. *Egy (N, v) játék additív, ha $\forall S \subseteq N$ esetén $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$.*

Az additív játékok nem lényeges játékok, ezek a játékelmélet szemszögéből triviálisnak mondhatóak. Ha ugyanis minden $i \in N$ játékos igénye legalább $v(\{i\})$, akkor a $v(N)$ érték elosztása egyértelműen meghatározott.

2.9. Megjegyzés. *Legyen N a játékosok, $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Jelölje $\mathbb{R}^N$ az N-ből $\mathbb{R}$-be menő függvények halmazát. Ha $x \in \mathbb{R}^N$ és $S \subseteq N$, akkor $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$.*

2.10. Megjegyzés. *Legyen N a játékosok halmaza, $x \in \mathbb{R}^N$, az eddigiek szerint tekintsük x-et, mint koalíciós függvényt. Így (N, x) koalíciós formában adott játék, ahol $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$ minden $S \subseteq N$-re.*

2.11. Definíció. *Egy (N, v) játék 0-normalizált, ha $v(\{i\}) = 0$ $\forall i \in N$-re.*

2.2. Költségallokációs játékok

Legyen N a játékosok halmaza. A költségallokációs probléma egy (N, v_c) játékból indul, ahol N a játékosok halmaza, a v_c koalíciós függvény pedig a problémához tartozó költségfüggvény. Intuitív módon N lehet egy közmű vagy középület potenciális felhasználóinak halmaza. Minden felhasználót egy adott szinten vagy egyáltalán nem szolgálunk ki. Legyen $S \subseteq N$. Ekkor $v_c(S)$ reprezentálja az S tagjainak kiszolgálásához szükséges minimális költséget. Az (N, v_c) játékot *költségjátéknak* nevezzük. Célunk pedig majd az lesz, hogy a játék által leírt szituációban az összköltség egy valamilyen módon igazságos elosztását adjuk meg a felhasználók között.

Az (N, v_c) költségjátékok kapcsolatba hozhatók az (N, v) koalíciós játékok közül az ún. *megtakarítási játékokkal*, amelyek esetében $v_s(S) = \sum\limits_{i \in S} v_c(\{i\}) - v_c(S)$ minden $S \subseteq N$ esetén. (Számos alkalmazás kapcsolatba hozható a TU-játékok jól ismert alosztályaival, például a költségjátékok megegyeznek a nemnegatív, szubadditív, a megtakarítási játékok pedig a 0-normalizált, nemnegatív, szuperadditív játékok osztályával, ld. Driessen (1988).)

Legyen (N, v_c) egy költségjáték, (N, v_s) pedig a hozzá tartozó megtakarítási játék. Ekkor (N, v_c):

- *szubadditív*, vagyis

$$v_c(S) + v_c(T) \geq v_c(S \cup T),$$

  minden $S, T \subseteq N$ és $S \cap T = \emptyset$ esetén, pontosan akkor, ha (N, v_s) szuperadditív.

- *konkáv*, vagyis

$$v_c(S) + v_c(T) \geq v_c(S \cup T) + v_c(S \cap T),$$

  minden $S, T \subseteq N$ esetén, pontosan akkor, ha (N, v_s) konvex.

Az alkalmazásokban a költségjátékok többnyire szubadditívak (és monotonok) (ld. Lucas (1981), Young (1985), illetve Tijs és Driessen (1986) tanulmányait a költségjátékokról).

2.2.1. Megyei költségelosztási probléma

Tekintsük példaképp a következő szituációt. Városok egy N csoportjának (azaz egy megyének) lehetősége van egy közös vízellátó rendszer építésére. Minden városnak van egy minimum vízigénye, amit vagy a saját elosztórendszerükkel vagy néhány másik, esetleg az összes többi várossal közös rendszer segítségével elégítenek ki. Egy $S \subseteq N$ koalíció alternatív vagy egyéni $v_c(S)$ költsége az a minimális költség, mellyel az S tagjainak az igényei a lehető leghatékonyabb módon kielégíthetők. Abból a tényből kiindulva, hogy egy $S \subseteq N$ halmazt számos különböző alrendszer szolgálhat ki, szubadditív költségjátékhoz jutunk. Ilyen játékok vizsgálatával többek között Suzuki és Nakayama (1976), illetve Young et al. (1982) foglalkozott.

3. Kifizetések és a mag

A gyakorlatban előforduló problémák kapcsán nemcsak azt fontos megvizsgálni, hogy egy adott koalíció létrejön-e, illetve melyek azok a koalíciók, amelyek létrejönnek. Lényeges továbbá az is, hogy az adott koalíció tagjai meg tudnak-e egyezni abban, hogy a koalíció által elért összhasznot mindenki számára elfogadható módon osszák szét egymás között. Ezt az elosztást nevezzük majd a játék megoldásának.

Gyakran előfordul, hogy a játékosok akkor érik el a legnagyobb kifizetést, ha egyedül a nagykoalíció jön létre. Például a szuperadditív játékokkal modellezhető esetekben minden közös taggal nem rendelkező koalíciónak érdemes egyesülnie, mert ezáltal nagyobb összhaszonra tehetnek szert. Így végül minden játékos a nagykoalíció mellett fog dönteni. Ez azonban nem mindig egyértelmű. Például a csak 0-monoton vagy lényeges játékkal modellezhető helyzetekben előfordulhat, hogy a játékosok egy valódi részhalmazának előnyösebb a belőlük álló koalíciót választani a nagykoalícióval szemben.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy a nagykoalíció létrejön, azaz minden játékos számára előnyösebb egyetlen koalícióba szerveződni. Ekkor a feladat az elért maximális összhaszon mindenki számára „kielégítő" módon történő szétosztása.

3.1. Definíció. *Az (N, v) játékban a $v(N)$ érték elosztása során keletkező $x_i \in \mathbb{R}$ értéket az $i \in N$ játékos* kifizetésének *nevezzük.*
A v koalíciós függvény által leírt kooperatív játék egy lehetséges kimenetelét a játékosok kifizetéseit tartalmazó $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektorral *jellemezzük.*

3.2. Definíció. *Az (N, v) játékban az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ kifizetésvektor*

- elérhető *az S koalíció számára, ha $\sum\limits_{i \in S} x_i \leq v(S)$,*
- elfogadható *az S koalíció számára, ha $\sum\limits_{i \in S} x_i \geq v(S)$,*
- előnyösebb *az S számára, mint az $y = (y_1, \ldots, y_n)$ kifizetésvektor, ha $\forall i \in S$ esetén $x_i > y_i$,*
- *az* S koalíción keresztül dominálja *az $y = (y_1, \ldots, y_n)$ kifizetésvektort, ha az S számára x elérhető és egyben előnyösebb, mint y (ezt $x \operatorname{dom}_S y$-nal fogjuk jelölni),*

- nem dominált az S koalíción keresztül*, ha nincs az S számára olyan elérhető z kifizetésvektor, amire z* dom_S *x,*

- dominálja az y kifizetésvektort*, ha létezik olyan S koalíció, amelyre x* dom_S *y (ezt x* dom *y-nal fogjuk jelölni),*

- nem dominált*, ha egyetlen S koalíción keresztül sem dominált.*

Az *elérhető, elfogadható* és *előnyösebb* fogalmak pusztán azokat a természetes elvárásokat tükrözik, hogy egy koalíció tagjai a $v(S)$ érték elosztása során csak olyan kifizetéseket tudnak megvalósítani, amik nem haladják meg a koalíció által elért összhasznot. Ezen felül pedig minden játékos szeretné egyéni hasznát maximalizálni, így a számára előnyösebb kifizetést szeretné választani.

A *dominancia* fogalma pedig azt próbálja megragadni, hogy a játékosok szabadon dönthetnek arról, hogy mely koalíció(k)ban kívánnak részt venni, és egy adott koalíció csak akkor jön létre, ha tagjai azt egyöntetűen akarják.

3.3. Megjegyzés. *Fennállnak az alábbi összefüggések:*

1. *Az x kifizetésvektor pontosan akkor elfogadható az S koalíció számára, ha x S-en keresztül nem dominált.*

2. *Tetszőleges $S \subseteq N$ esetén a* dom_S *aszimetrikus, irreflexív és tranzitív reláció.*

3. *A* dom *reláció mindig irreflexív, de még egy szuperadditív játékban sem feltétlenül aszimetrikus vagy tranzitív.*

3.1. A mag

A mag a kooperatív játékelmélet egyik alapvetően fontos fogalma. Segítségével megfoghatóbbá válik, hogy egy játékban melyek lesznek azok az elosztások, amiket egy adott koalíció tagjai megoldásként elfogadnak. Tekintsük az alábbi definíciót!

3.4. Definíció. *Az (N, v) játékban az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ kifizetésvektor*

- szétosztás, *ha* $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$, *vagyis az N koalíció számára elfogadható és elérhető,*

- elosztás (imputáció), *ha* $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$ *és* $x_i \geq v(\{i\})$ $\forall i \in N$*-re, azaz olyan szétosztás, ami minden egyszemélyes koalíció (azaz minden játékos) számára elfogadható,*

- mag-elosztás, *ha* $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$ *és* $\sum\limits_{i \in S} x_i \geq v(S)$ $\forall S \subseteq N$ *esetén, azaz olyan szétosztás, ami minden koalíció számára elfogadható.*

Egy (N, v) játékban a szétosztások halmazát $I^*(N, v)$-vel, az elosztások halmazát $I(N, v)$-vel, a mag-elosztások halmazát pedig $C(N, v)$-vel jelöljük. Ez utóbbi $C(N, v)$ halmazt szoktuk röviden a kooperatív játék *mag*jának hívni.

A mag tehát valamiféleképpen azt fejezi ki, hogy mik azok az elosztások, melyeket egy-egy adott koalíció tagjai elég „igazságosnak” éreznek ahhoz, hogy elfogadják azt.

3.5. Megjegyzés. *Igazak az alábbi állítások:*

1. *Tetszőleges (N, v) játék esetén a szétosztások $I^*(N, v)$ halmaza egy hipersík, azaz sosem üres.*

2. *Egy (N, v) játékban az elosztások (imputációk) $I(N, v)$ halmaza pontosan akkor nem üres, ha $v(N) \geq \sum\limits_{i \in N} v(\{i\})$.*

A fentieket a következő példán keresztül szemléltetjük.

3.6. Példa. *Legyen (N, v) egy 3-szereplős, (0,1)-normalizált játék (azaz olyan 0-normalizált játék, ahol $v(N) = 1$). Az $I^*(N, v)$ szétosztáshalmaz az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ egyenlet megoldásvektoraiból álló hipersík. Az $I(N, v)$ elosztáshalmaz pedig a hipersíkon elhelyezkedő, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ csúcspontok által meghatározott egységszimplex lesz.*

A mag nemürességének kérdése azonban már nem ilyen egyértelmű.

Különböztessünk meg két esetet:

1.

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	2/3	2/3	2/3	1

2.

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	1	1	1	1

Ha az 1. *esetet tekintjük, akkor azt tapasztaljuk, hogy ebben az esetben a mag az egyetlen* $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ *kifizetésből áll. Ha viszont a* 2. *esetet nézzük, akkor a kétszemélyes koalíciók esetében csak akkor lesz egy* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *kifizetés elfogadható, ha* $x_1+x_2 \geq 1$, $x_1+x_3 \geq 1$, $x_2+x_3 \geq 1$ *mindegyike teljesül, azaz* $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{2}$. *Ez viszont a nagykoalíció számára nem elérhető. Ebben az esetben tehát a játék magja üres.*

Az előző példa második esetében a mag azért üres, mert a nagykoalíció értéke a többi koalícióhoz képest nem „elég nagy". További példák és egyéb meggondolások az alábbi jegyzetben olvashatók: Forgó et al. (2006).

4. A Shapley-érték

Ebben a részben megismerkedünk Shapley híressé vált megoldás-koncepciójával, a *Shapley-érték*kel (Shapley, 1953), és áttekintjük annak tulajdonságait. Shapley azt vizsgálta, hogy egy adott játékban egy szereplő számára mi lesz az „értéke" annak, hogy csatlakozik a játékhoz. Azaz milyen „mérőszám" az, ami megadja egy játékos szerepének értékét a játékban. Bevezetjük a *megoldás* fogalmát és rögzítünk néhány természetesen adódó axiómát, amik már egyértelműen meghatározzák a Shapley-értéket.

Jelöljük $\mathcal{G}^N$-nel az N játékoshalmazzal rendelkező TU-játékok halmazát. *Megoldás*nak egy olyan $\psi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ függvényt nevezünk, ami tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékhoz hozzárendeli a $\psi(v) = (\psi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ vektort. Azaz megadja egy játékos értékét egy tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékban.

Legyen $\pi : N \to \{1, \ldots, n\}$ a játékosok egy sorbarendezése, Π_N pedig a játékosok összes lehetséges sorbarendezéseinek a halmaza.

4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\psi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ megoldás*

- hatékony (Pareto-optimális)*, ha* $\sum\limits_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$*,*
- egyénileg elfogadható*, ha* $\psi_i(v) \geq v(\{i\})$ *minden* $i \in N$*-re,*
- egyenlően kezelő*, ha* $\forall i, j \in N$*,* $\forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ *és* $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ *esetén* $\psi_i(v) = \psi_j(v)$*,*
- sallangmentes*, ha* $\psi_i(v) = v(\{i\})$*, amennyiben* $i \in N$ *sallang játékos* v*-ben, vagyis* $v(S \cup i) - v(S) = v(\{i\})$ *minden* $S \subseteq N \setminus i$*-re,*
- additív*, ha* $\psi(v+w) = \psi(v) + \psi(w)$ *minden* $v, w \in G^N$*-re (*$(v+w)(S) := v(S) + w(S)$ *értelmezéssel minden* $S \subseteq N$*-re),*
- homogén*, ha* $\psi(\alpha v) = \alpha \psi(v)$ *minden* $\alpha \in \mathbb{R}$*-re (*$(\alpha v)(S) := \alpha v(S)$ *értelmezéssel minden* $S \subseteq N$ *esetén),*
- kovariáns*, ha* $\psi(\alpha v \oplus \beta) = \alpha \psi(v) + b$ *minden* $\alpha > 0$ *és* $b \in \mathbb{R}^N$ *esetén (ahol* β *a* b *vektor által generált additív játék, és* $(\alpha v \oplus \beta)(S) = \alpha v(S) + \beta(S)$ $\forall S \subseteq N$*-re),*

  ahol a fenti feltételek minden $v, w \in G^N$*-re fennállnak minden tulajdonság esetén.*

A hatékonyság felel azért, hogy szétosztást kapjunk. Az egyéni elfogadhatóság természetes reprezentációja annak, hogy minden játékos legalább annyit „ér", mint a belőle álló egyszemélyes koalíció. Az egyenlően kezelő tulajdonság azt fogalmazza meg, hogy egy játékos kifizetése csak a játékban betöltött szerepétől függ, olyan értelemben, hogy azonos szerepet betöltő játékosok azonos kifizetésben részesülnek. A sallangmentesség azt fejezi ki, hogy annak a játékosnak az értéke, aki bármelyik koalícióhoz csatlakozva az általa elérhetőnél se nagyobb, se kisebb értékváltozást nem idéz elő, annyi legyen, mint amennyi ez a konstans hozzájárulása. A kovariancia azért fontos, hogy egy esetleges skála-módosítást az értékelés is „megfelelően” kövessen. Az additív, illetve homogén tulajdonságok már nem ennyire egyértelműen megkövetelhetőek, együttes teljesülésük azonban a kovarianciánál jóval erősebb tulajdonságot eredményez.

Most pedig tekintsük Shapley (1953) megoldásának definícióját:

4.2. Definíció. *Tetszőleges (N, v) játékban az $i \in N$ játékos* Shapley-értéke *a*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!}(v(S \cup i) - v(S))$$

szám, míg a játék Shapley-megoldása:

$$\phi(v) = (\varphi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N.$$

4.3. Állítás. *A Shapley-értékre az alábbi tulajdonságok teljesülnek: hatékony; szuperadditív (sőt 0-monoton) játékban egyénileg elfogadható; nem feltétlenül magbeli elosztás; egyenlően kezelő; sallangmentes; additív, homogén és mivel sallangmentes, következésképpen kovariáns is.*

4.4. Tétel. (Shapley, 1953) *Tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékban a $\phi(v)$ Shapley-megoldás az egyetlen hatékony, egyenlően kezelő, sallangmentes és additív $\mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ függvény.*

A Shapley-érték további axiomatizációs lehetőségeiről bővebben ld. Pintér (2007), Pintér (2009), Pintér (2011), illetve Pintér (2015) munkáit.

Általánosan is belátható (ld. például Forgó et al. (2006)), hogy a Shapley-érték felírható a következő alakban:

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi_N} x_i^\pi(v),$$

ahol x^π jelöli a játékosok π sorrendjéhez tartozó határhozzájárulás-vektort. Így azt kapjuk, hogy a Shapley-érték a határhozzájárulás-vektorok egyenlően súlyozott átlaga.

4.5. Megjegyzés. *Tetszőleges konvex játékban a mag mindig nemüres (Shapley, 1971), és a Shapley-érték mindig egy magbeli elosztást ad.*

5. A prenukleolusz és a nukleolusz

Egy tetszőleges játék magja általában vagy üres, vagy több elemből áll. Ez utóbbi esetben felmerül a kérdés, hogy a többféle mag-elosztás közül hogyan válasszunk ki egyet, hiszen elvileg mindegyik egyéni és koalíciós szinten is elfogadható megoldást ad. Két megoldást összehasonlítva előfordul, hogy egy adott koalíció az egyik elosztás szerint jobban jár, ők nyilván azt preferálnák. De ez lehet, hogy egy másik koalíciónak nem előnyösebb, stb. Kézenfekvő azt a megoldást választani, ahol a legrosszabbul járó koalíció is a lehető legjobban jár.

5.1. Definíció. *Egy adott (N, v) játékban az S koalíciónak az x kifizetésnél vett* többlete *alatt az $e(S, x) = v(S) - x(S)$ különbséget értjük.*

A többlet tehát azt mutatja meg, hogy egy adott koalíció mennyit nyerhet (vagy negatív nyereségek esetén mennyit veszíthet) azáltal, hogy a nagykoalícióban való részvételt és az x szétosztást visszautasítja. A szétosztások halmazán az üres, illetve a nagykoalíció többlete 0, így csak a valódi részkoalíciók vizsgálata lesz releváns, ezeket jelöljük $\mathcal{N}_+$-szal. Egy tetszőleges (N, v) játék magja tehát így is felírható: $C(v) = \{x \in I^*(v) : \max_{S \in \mathcal{N}_+} e(S, x) \leq 0\}$. A szétosztások halmaza bármely játékban nemüres, a mag viszont csak akkor nemüres, ha a nagykoalíció értéke a többi koalícióhoz képest „elég nagy".

Amennyiben több olyan szétosztásunk/elosztásunk is van, amiknél a legmagasabb többlet a lehető legalacsonyabb, akkor ezek közül stabilabbnak tartjuk azokat, amelyek esetén a második legnagyobb többlet is a lehető legalacsonyabb, és így tovább. Ez egy olyan optimalizálási sorozat, amelynek egyetlen kimenetele van, szétosztások esetén a prenukleolusz, elosztások esetén pedig a nukleolusz.

Rendezzük tehát az $\mathcal{N}_+$-beli koalícióknak egy adott $x \in \mathbb{R}_N$ kifizetés esetén vett többleteit nemnövekvő sorrendbe:

$$E(x) = [\cdots \geq e(S, x) \geq \ldots \ : S \in \mathcal{N}_+]$$

.

Legyen $\rho(x)$ az $E(x)$-ben előforduló többletszintek száma, $t^1(x)$ a legnagyobb többlet, $t^2(x)$ a második legnagyobb többlet, stb, egészen $t^\rho(x)$-ig, ami a legalacsonyabb többlet, vagyis $t^1(x) > t^2(x) > \cdots > t^\rho(x)$. A fenti jelölésekkel a prenukleolusz és a nukleolusz definíciója tehát:

5.2. Definíció. (Schmeidler, 1969) *Egy* (N, v) *játék* $N^*(v)$ prenukleolusza / $N(v)$ nukleolusza *a szétosztások / elosztások azon halmaza, amelyek a szétosztások / elosztások között lexikografikusan minimalizálják a nemnövekvő sorrendbe rendezett többletek vektorát, azaz*

$$N^*(v) = \{x \in I^*(v) : E(x) \leq_L E(y)\ \forall y \in I^*(v)\text{-re}\},$$

$$N(v) = \{x \in I(v) : E(x) \leq_L E(y)\ \forall y \in I(v)\text{-re}\},$$

ahol $\leq_L$ *jelöli a rögzített komponens-sorrendű vektorok közötti gyenge lexikografikus rendezést (vagyis* $A \leq_L B$ *pontosan akkor, ha* $A = B$ *vagy* $A_i < B_i$ *az első olyan* i *komponensre, ahol az* A *és* B *vektorok különböznek).*

Schmeidler (1969) azt is megmutatta, hogy tetszőleges játék prenukleolusza egyetlen elemből áll, illetve, hogy bármely elosztással rendelkező játék nukleolusza egyetlen elosztásból áll.

6. Fix-fa játékok

A fix-fa játékok struktúrájukból adódóan számos gyakorlati alkalmazás modellezésében nyújtanak segítséget. Mint azt a fejezetben látni fogjuk, ezek a játékok speciális költségjátékok, ezért tudjuk, hogy mindig létezik magelosztás, nukleolusz, a Shapley-érték pedig magbeli, ezért egy-egy elosztási problémának mindig lesz megoldása.

Ebben a részben tehát olyan szituációkkal foglalkozunk, amelyek gráfelméleti terminológiával élve rögzített fákkal modellezhetőek. Adott a résztvevők egy rögzített, véges halmaza, akik egy rögzített fával reprezentálható hálózaton keresztül kapcsolódnak egy kitüntetett csúcshoz, amit gyökérnek fogunk nevezni. Számos valós életbeli szituáció modellezhető így. Vegyük például azt az esetet, amikor egy öntözési csatornarendszer fenntartási költségeit vizsgáljuk. A csatornarendszer felhasználói a hálózat csúcsai, a hálózat élei az egyes csatornaszakaszokat, az élek súlyai pedig az adott szakasz fenntartási költségeit jelölik. A probléma reprezentálható egy kooperatív fix-fa játékkal, ahol az egyes csoportok, koalíciók költségét az a minimális költség adja, ami a csoport tagjait a gyökérrel összekötő élekhez tartozik. A fix-fa játékok modellje Megiddo (1978) cikkéből ered, aki bebizonyította, hogy ezen játékok esetén a Shapley-érték és a nukleolusz kiszámítására létezik hatékony algoritmus, a nukleolusz $O(n^3)$, a Shapley-érték $O(n)$ idő alatt kiszámolható.

Speciális esetként meg kell említenünk a „repülőtér/kifutópálya-problémák" osztályát (airport problems), melyek egy elágazásmentes fával, ún. lánccal modellezhetőek. Az ehhez kacsolódó *repülőtér játékok* a sztenderd fix-fa játékok egy valódi részhalmazát adják. A repülőtér játékokat Littlechild és Owen (1973) mutatták be az irodalomban, az osztállyal kapcsolatos eredmények egy összefoglalóját pedig Thomson (2007) cikkében olvashatjuk.

Nézzük tehát pontosabban a fix-fa játékokat. Granot et al. (1996) olyan költségjátékokat vizsgáltak, melyek $\Gamma(V, E, b, c, N)$ fix-fa hálózatokból erednek. Ebben a rendezett ötösben a (V, E) páros alkotja az irányított fát, V a csúcsok, E az élek halmaza. Az r csúcs szerepe a $V-$ben kitüntetett, ezt fogjuk gyökérnek (root) nevezni. (A fa lehet irányítatlan is, ha a modell úgy kívánja, a játék szempontjából nem lesz különbség.) Adott továbbá az élek halmazán egy $c : E \to \mathbb{R}$ költségfüggvény, ahol $c(e)$ jelöli az e élhez tartozó teljes (kiépítési, üzemeltetési, stb) költséget. Hasonlóan adott a csúcsok halmazán is egy $b : V \to \mathbb{R}$ költségfüggvény. N a felhasználók, későbbiekben játékosok halmaza, minden $i \in N$ egy adott $v(i) \in V$ csúcshoz van hozzárendelve. Egy v csúcs akkor foglalt, ha legalább egy játékos hozzá van rendelve. N_T-vel a $T \subseteq V$ csúcsokhoz tartozó játékosokból álló koalíciót fogjuk jelölni. Szükségünk lesz továbbá egy (részben) rendezésre a csúcsokon: két $i, j \in V$ csúcsra $i \leq j$, ha a gyökértől a j-hez vezető egyértelmű út áthalad i-n. $S_i(G)$-vel pedig a $\{j \in V : i \leq j\}$ halmazt jelöljük, vagyis azon csúcsok halmazát, melyek i-ből irányított úton elérhetőek.

6.1. Definíció. *Egy $\Gamma(V, E, b, c, N)$ fix-fa hálózat akkor sztenderd, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

- *A c költségfüggvény nemnegatív számokat rendel az élekhez.*
- *A csúcsokhoz tartozó költségek nullák, azaz $b(v) = 0$ minden $v \in V$ esetén.*
- *A gyökérhez nincs hozzárendelve egyetlen játékos sem.*
- *Minden $v \in V$ levélhez (vagyis olyan csúcshoz, amiből további csúcs már nem érhető el) tartozik legalább egy játékos.*
- *Ha $v \in V$-t nem birtokolja egyetlen játékos sem, akkor van legalább két csúcs, $v_1 \neq v_2$, amikre $(v, v_1), (v, v_2) \in E$.*
- *Pontosan egy olyan $v \in V$ létezik, amire $(r, v) \in E$.*

A (V, E) gráfot a továbbiakban G-vel, a $\Gamma(V, E, b, c, N)$ sztenderd fix-fa hálózatot pedig $\Gamma(G, c, N)$-nel fogjuk jelölni. A játékosok célja, hogy a hálózaton keresztül össze legyenek kötve a gyökérrel. Tekintsünk a fenti példát, ahol gazdálkodók egy csoportja egy közös csatornarendszeren keresztül szeretné ellátni földterületeik öntözését. Ez a csatorna-hálózat egy ponton csatlakozik a főcsatornához, ahonnan a vízellátást fedezni tudják, ez lesz a gyökér-csúcs. A felhasználók lesznek a gráf csúcsai, minden él a hálózatban a gyökértől kifelé, a felhasználók felé van írányítva. A felhasználóknak kell fedezniük a gyökértől a csúcsaikba irányuló út költségeit. Hasonlóképpen a felhasználók egy csoportja, koalíciója akkor van összekötve a gyökérrel, ha a koalíció minden egyes tagja elérhető a gyökérből irányított úton. Ekkor a csoport együttesen fedezi a részgráfon fellépő összköltséget. A kooperatív játékelmélet az ilyen típusú szituációkhoz az (N, v_c) kooperatív *költségjátékot* rendeli, amire a továbbiakban az egyszerűség kedvéért (N, c) rendezett párként fogunk hivatkozni.

A gráfban az $S \subseteq N$ koalíció tagjaihoz tartozó csúcsokat a gyökérrel összekötő egyértelmű utak unióját fa-buroknak (vagy törzsnek) nevezzük, és $\bar{S}$-sal jelöljük. A következő állítás bizonyítása megtalálható Koster et al. (2001) cikkében.

6.2. Állítás. *Egy $\Gamma(G, c, N)$-hez tartozó sztenderd fix-fa probléma esetén fennáll az alábbi egyenlőség: $c(S) = \sum_{v \in \bar{S}} c(e_v)$, minden $S \subseteq N$ esetén, ahol e_v azt az élt jelöli, ami a v csúcsot a gyökérrel összekötő úton a v-re és az őt megelőző csúcsra illeszkedik.*

A bizonyítás során az egyetértési játék duálisai adják a vonatkozó költségjáték reprezentációjának az alapját. Ehhez tekintsük az alábbi két definíciót:

6.3. Definíció. *Az N játékoshalmazon minden $T \in 2^N \setminus \emptyset$, illetve $S \subseteq N$ esetén legyen*

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } T \subseteq S \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Az u_T játékot a T koalícióhoz tartozó egyetértési játéknak *nevezzük.*

6.4. Definíció. *Az N játékoshalmazon minden $T \in 2^N \setminus \emptyset$, illetve $S \subseteq N$ esetén legyen*

$$\bar{u}_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } T \cap S \neq \emptyset \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Az $\bar{u}_T$ játékot a T koalícióhoz tartozó duális egyetértési játéknak *nevezzük.*

Megmutatható (Márkus et al., 2011), hogy az egyetértési játék duálisa megegyezik egy megfelelő repülőtér játékkal. A fentiek segítségével a sztenderd fix-fa problémához tartozó költségjáték a következőképpen adható meg:

6.5. Állítás. *Legyen $\Gamma(G, c, N)$ egy sztenderd fix-fa probléma, ekkor a vonatkozó (N, c) játék a következőképpen reprezentálható: $c = \sum_{v \in V \setminus \{r\}} c(e_v) \cdot \bar{u}_{S_v(G)}$,* *ahol e_v azt az élt jelöli, ami a v csúcsot a gyökérrel összekötő úton a v-re és az őt megelőző csúcsra illeszkedik, $S_v(G)$ pedig a v-ből irányított úton elérhető csúcsok halmaza.*

Sztenderd fix-fa játékok esetén a **mag**ról a következő állításokat tudjuk (a bizonyítások, illetve további reprezentációk megtalálhatók itt: Koster et al. (2001)):

- Egy x elosztásvektor pontosan akkor magbeli, ha $x \geq 0$ és $x(\bar{S}) \leq c(\bar{S})$, minden $\bar{S}$ fa-burok esetén.
- Egy x elosztásvektor pontosan akkor magbeli, ha $x \geq 0$ és minden $e = (i, j) \in E$ élre:
$$\sum_{j \in V_e \setminus \{i\}} x_j \geq \sum_{e' \in E_e} c'_e,$$
ahol $B_e = (V_e, E_e)$ az e csúcsból induló ág a fában.
- Egy x elosztásvektor pontosan akkor magbeli, ha létezik $y^1, \ldots, y^n$, ahol y^j (minden $j \in 1, \ldots, n$-re) az $\mathbb{R}^{S_j(G)}$ egység-szimplex egy pontja és
$$x_i = \sum_{j \in N(P_i(G))} y_i^j c(e_j), \ \forall i \in N,$$
ahol $P_i(G)$ jelöli az irányított fában az i-t a gyökérrel összekötő úton lévő csúcsok halmazát.

(Itt felhívnám a figyelmet arra, hogy mag sztenderd definíciójához képest a költségjátékok esetén a definiáló relációk megfordulnak, mivel a mag eredetileg a „minél nagyobb” kifizetésekről szól, ez pedig nemnegatív költségfüggvény esetén „minél kisebb” költség megvalósulását jelenti.)

6.6. Megjegyzés. *A 3. pont alapján egy-egy magbeli megoldás generálása egyszerű (Koster et al., 2001).*

6.7. Megjegyzés. *Mivel a fix-fa problémák speciális költségjátékokhoz vezetnek, így a 4.5 megjegyzés értelmében tudjuk, hogy a magjuk nemüres, illetve a Shapley-érték magbeli megoldást ad a vonatkozó elosztási problémára.*

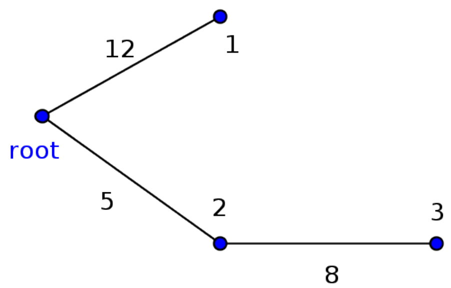
A **Shapley-érték** fix-fa játékok esetén a következő, ún. soros elosztási szabály segítségével számolható (Littlechild és Owen, 1973):

$$x_i = \sum_{j \in P_i(G) \setminus \{\mathrm{r}\}} \frac{c(e_j)}{\#S_j(G)} \ ,$$

ahol # jelöli az adott halmaz elemszámát.

Ez olyan szempontból is fontos eredmény, hogy amíg egyes játékosztályok esetén a Shapley-érték meghatározása számítási szempontól bonyolult, addig ebben a speciális esetben, vagyis a fix-fa játékok esetén a soros elosztás szabálya alapján könnyen kiszámolható.

6.8. Példa. *Tekintsük szemléltetésképp az 1 ábra fix-fa hálózatát:*



1. ábra. Fix-fa probléma hálózata

A vonatkozó költségjátékot az alábbi táblázat adja meg:

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_c(S)$	*0*	*12*	*5*	*13*	*17*	*25*	*13*	*25*

Ekkor a játék Shapley-értéke: $\phi(v) = (12;\ 2,5;\ 10,5)$.

(Megjegyezném, hogy a példa egy nem sztenderd 3 fős fix-fát ábrázol, mivel a gyökér nem egyetlen csúcshoz kapcsolódik. Ez a bemutatott algoritmusok tekintetében nem releváns, azonban a gyökér után egy senki által sem birtokolt plusz csúcs, illetve két 0 értékű él hozzávételével sztenderdé tehető, ha erre az alkalmazás miatt feltétlen szükség van.)

A **nukleolusz** kiszámolása esetén ugyanaz a probléma, mint a Shapley-értéknél, általánosságban bonyolult. Fix-fa játékok esetén azonban a következő, ún. festő-algoritmussal könnyen számolható (ld. például Borm et al. (2001) vagy Maschler et al. (2010)). Tegyük fel, hogy a fa csúcsai házak, az élek pedig utak, amik a házakat kötik be a közösségi házhoz, ami a gyökér. Az élek költsége azt mutatja, hogy egyetlen munkás (akit a tulajdonos felbérel) hány óra alatt tudja megfesteni az adott útszakaszon az út felfestéseit. A *házaktól induló* festési megoldást a következő szabályok alapján kaphatjuk meg:

1. Minden munkás azonos sebességgel fest.
2. Minden munkás egészen addig dolgozik, amíg az otthonától a közösségi házig vezető úton nincs készen a felfestés.
3. Minden munkás egy az otthona és a közösségi ház között vezető befejezetlen útszakaszon dolgozik.
4. Amennyiben egy szakasz a munkás, és a fában az őt megelőző lakó között nincs kész, a munkásnak azon a szakaszon kell dolgoznia.
5. Minden munkás a hozzá legközelebbi szakaszokon dolgozik az 1-4 pontok szerint.

A 6.8 példa esetén ez azt jelenti, hogy az 1-es játékos dolgozik az előtte lévő élen, míg a 2-es, 3-as a 2-es előtti élen, mindhárom fejenként 2,5 órát. Ezt követően a 2-es játékos végzett, az 1-es tovább fest még 9,5 órát a saját szakaszán, a 3-as pedig folytatja a munkát az előtte lévő élen 8 órán át. Így a játék nukleolusza (12; 2,5; 10,5), ami ebben az esetben megegyezik a Shapley-értékkel.

A festő algoritmust egy a *közösségi háztól induló* megoldás szerint módosíthatjuk, úgy, hogy a 4-es pontot elhagyjuk, az 5-öst pedig így módosítjuk: minden munkás a közösségi házhoz legközelebbi szakaszokon dolgozik az 1-3 pontok szerint. Ebben az esetben a módosítás eredményeképp éppen a Shapley-értéket kapjuk.

A fix-fa játékok egyik általánosítása az ún FMP-játékok (fixed tree games with multilocated players), ahol egy-egy játékos több csúcsot is birtokolhat, így alternatív lehetőségei vannak a gyökér-csúccsal való összeköttetésre. Ezekről a játékokról bővebben Hamers et al. (2006) cikkében olvashatunk. A szerzők azt is megmutatják, hogy egy FMP-játék magja megegyezik a vonatkozó szubmoduláris sztenderd fix-fa játék magjával.

Bjørndal et al. (2004) cikkükben olyan sztenderd fix-fa játékot vizsgáltak, ahol a játékosokhoz hozzá vannak rendelve bizonyos súlyok (pl öntözési rendszer esetén a felhasznált vízmennyiség, stb). A festő-algoritmus általánosításaként definiálják az ún. súlyozott festő-algoritmust, mindkét (házaktól, illetve a közösségi háztól induló) irányban. Megmutatták, hogy az így kapott két megoldás az ún. súlyozott Shapley-értéket, illetve a nukleolusz egy általánosítását adja eredményül.

7. Alkalmazások

7.1. Fenntartási vagy öntözési játékok

A fix-fa játékok egy elterjedt alkalmazási területe az ún. fenntartási játékok (maintenance games). Ezek olyan szituációkat írnak le, ahol játékosok, felhasználók egy csoportja egy fix-fa hálózaton keresztül kapcsolódik egy bizonyos szolgáltatóhoz (ez a fa gyökér-csúcsa). A hálózat minden élének adott a fenntartási költsége, a kérdés pedig az, hogy miként osszuk el „igazságosan" a teljes hálózat fenntartási költségét (ami az éleken vett költségek összege) a felhasználók között.

Egy kevésbé elterjedt elnevezés ugyanezen fix-fa játékokra az ún. öntözési játékok (irrigation games), melyek egy konkrét vízgazdálkodási problémához kapcsolódnak. Gazdálkodók egy csoportja egy közös csatornarendszerből (hálózatból) fedezi a földjeik öntözését, amely egy kitüntetett ponton (gyökércsúcs) csatlakozik a főcsatornához. Ennek a hálózatnak a költségeit szintén a gazdálkodók között kell elosztani. Aadland és Kolpin (1998) 25 Montana állambeli csatornarendszert vizsgált, ahol az adott szituációkban két különböző típusú költségelosztási módszert alkalmaztak az ottani gazdálkodók. Az egyik az átlag szerinti elosztások, a másik a soros elosztások típusa. Az első esetén az összköltséget egyenlően osztották fel a gazdálkodók között. Érezzük azonban, hogy ez nem minden szempontból igazságos, például ha valaki a hálózat elején van, nem használja ugyanolyan mértékben a rendszert, mint valaki a hálózat legvégén. A soros elosztási elv szerint minden egyes csatornaszakasz költségét egyenlően kell szétosztani azon felhasználók között, akik az adott szakaszt használják. Egy-egy játékos pedig az általa használt csatornaszakaszok utáni szakaszonkénti költségek összegét fizeti. A soros elosztási elv rendelkezik az ún. szubvenciómentességi tulajdonsággal, ami azt jelenti, hogy ebben az elosztásban senki nem fizet többet, mint amennyit akkor kellene fizetnie, ha a hálózat csak belőle állna. Vagyis úgymond nem „támogatja" a tőle hátrébb elhelyezkedőket. Littlechild és Owen (1973) azt is megmutatták, hogy a soros elosztási elv szerinti megoldás fix-fa hálózatok esetén megyezik a Shapley-értékkel.

Aadland és Kolpin (2004) azt is vizsgálták, hogy mik azok a környezeti, geográfiai tényezők, amik esetleg egy-egy csatornarendszert az alkalmazott költségelosztási elv kiválasztásában befolyásoltak. A soros és átlag szerinti költségelosztások további tulajdonságait fix-fák esetében pedig többek között Kovács és Radványi (2011) vizsgálta.

7.2. Folyóelosztási, illetve folyótisztítási problémák

Bizonyos szempontból a fix-fa játékok alá sorolhatóak a folyóelosztási, illetve a folyótiszítási problémák modellezésére szolgáló játékok is. Alapvetően egy speciális fix-fa játékról van szó, ahol a fa egyetlen útból (lánc) áll. Adott egy folyó, és a folyó mentén elhelyezkedő játékosok, ezek lehetnek országok, városok, folyó menti vállalatok, stb. A folyó menti elhelyezkedésük pedig definiál egy természetesen adódó sorrendet a játékosok között, a folyó sodrása mentén, $i < j$ jelenti, hogy az i játékos a j-hez képest a folyó mentén feljebb helyezkedik el. Adott egy tökéletesen osztható jószág, a pénz, illetve a folyóból kinyerhető vízmennyiség, amit a játékosok egy hasznossági függvény szerint értékelnek. A folyóelosztási problémák esetén pl. nemzetközi viszonylatban elmondható, hogy egy-egy ország a saját folyószakaszán bizonyos szempontból teljhatalommal rendelkezik a folyó vize felett. Az alatta lévőknek nem mindegy, hogy milyen és mennyi vizet enged tovább az ország, ugyanakkor neki sem mindegy, hogy a felette lévő országok hogy rendelkeznek a folyóval az őt megelőző szakaszon. Nemzetközi egyezmények mentén lehet ezeket a kérdéseket szabályozni, ezek modellbe való beépítése már kilép a fix-fa játékok eddig tárgyalt köréből. Ambec és Sprumont (2002) cikkében a szereplők (országok) folyó menti elhelyezkedése határozza meg a vízmennyiséget, amit kontrollálnak, és a jólétet, amit ezáltal biztosítani tudnak maguknak. Ambec és Ehlers (2008) azt vizsgálták, hogy miként lehet hatékonyan elosztani egy folyót a kapcsolódó országok között. Megmutatták, hogy az együttműködésből pozitív módon profitálnak az abban résztvevők, illetve megadták, hogy miként lehet a profitot elosztani.

A folyótisztítási problémák esetén hasonló a kiindulási struktúra. Adott a folyó, ennek mentén az országok (vállalatok, gyárak, stb), illetve a szennyezés mértéke, amit az egyes szereplők kibocsájtanak. A folyó minden egyes szakaszán adottak a tisztítási költségek is, így a kérdés az lesz, hogy ezeket a tisztítási költségeket hogyan osszák fel egymás között. Mivel a folyó mentén feljebb elhelyezkedők szennyezése befolyásolja a szennyezettséget, és ezáltal a tisztítási költséget az utánuk lévő szakaszokon is, így egy egyetlen útból álló fix-fa struktúrát kapunk. Ni és Wang (2007) két különböző aspektusból vizsgálták a tisztítási költségek elosztásának kérdését. Nemzetközi szinten két doktrína létezik, az abszolút területi szuverenitás, illetve a határokon felüli területi integritás. Az első értelmében az adott országnak teljes szuverenitása van a területén belüli folyószakasz felett, a második szerint pedig egyetlen országnak sincs joga a természeti adottságok megváltoztatásához, a szomszédos országok kárára. Ezen két doktrína figyelembe vételével azt vizsgálták, hogy milyen elosztási módszerek adottak a folyótisztítási költségek elosztásakor, és ezek milyen tulajdonságokkal rendelkeznek. Megmutatták, hogy mindkét esetben adott egy-egy elosztási módszer, amely a megfelelő kooperatív játékban megegyezik a Shapley-értékkel. Ebből kiindulva Gómez-Rúa (2013) azt vizsgálta, hogy a tisztítási költség bizonyos környezeti adók figyelembe vételével hogyan osztható szét. Mik azok az elvárt tulajdonságok, amelyeket valós szituációkban országok adózási stratégiájában előírnak, és ezek hogyan implementálhatóak a konkrét modellek esetén. Megvizsgálta, hogy adott elosztási stratégiák mely tulajdonságokkal karakterizálhatók, és megmutatta, hogy az egyik elosztási szabály megegyezik a vonatkozó játék súlyozott Shapley-értékével.

8. Összefoglalás

A cikkben a kooperatív játékelmélet alapfogalmainak bemutatásán túl definiáltuk a fix-fa játékok osztályát. Ezen speciális játékosztály olyan gazdasági szituációk modellezésében nyújt segítséget, amelyek fa-struktúrájú gráfokkal reprezentálhatók. Például egy csatornahálózat esetén a felhasználók egy fa-struktúrájú hálózaton keresztül jutnak vízhez. Ennek a hálózatnak a kitűntetett pontja (a fa gyökere) a szolgáltató, a többi csúcsai pedig a felhasználók. A hálózat élei, illetve az azokon definiált költségek jelzik az egyes felhasználók hálózathoz való kapcsolódását, illetve a hálózat kiépítésének vagy a szolgáltatás igénybevételének költségét. Egy-egy ilyen hálózat működésekor felmerül az a természetes kérdés, hogy a fennálló költségeket hogyan osszák szét „igazságosan" az egyes szereplők között. Megmutattuk, hogy a problémához kapcsolódó fix-fa játékok esetén mindig létezik olyan elosztás, ami egyéni és koalíciós szinten is elfogadható, speciálisan ez azt jelenti, hogy a vonatkozó játék magja mindig nemüres. Bemutattunk két elterjedt elosztási megoldást, a Shapley-értéket, illetve a nukleoluszt (ami mindig magbeli.) A Shapley-érték nem feltétlenül ad magbeli megoldást, viszont olyan tulajdonságokkal rendelkezik, amelyek sok esetben intuitív módon elvártak adott elosztási kérdés megoldása esetén. A nukleolusszal szemben pedig akkor is létezik, amikor az adott játékban a mag üres, vagyis ebben az esetben is bizonyos „igazságossági" feltételeknek eleget tevő megoldással tudunk szolgálni. A fix-fa játékok esetén viszont a Shapley-érték is mindig magbeli, esetenként megegyezik a nukleolusszal. Számítási szempontból általában mindkét megoldás bonyolult, azonban a fix-fa játékok osztályán mindkét esetben létezik olyan algoritmus, amellyel hatékonyan számolható. Az, hogy adott szituációban melyik megoldást érdemes választani, a konkrét problémától függ. Mindkét megoldásnak vannak olyan tulajdonságai, amelyek miatt bizonyos esetekben előnyösebbek, ezt a konkrét helyzetre vonatkozóan kell kiértékelni.

A cikk az elméleti alapok után az utolsó fejezetben olyan alkalmazási lehetőségeket mutat be, amelyek valós vízgazdálkodási problémákhoz köthetőek. Az öntözéses gazdálkodás területéről származó probléma esetén egy csatornarendszer fenntartási és működési költségeit kell szétosztani, a folyótisztítási probléma esetén pedig a folyószennyezés kapcsán felmerülő tisztítási költségeket. Természetesen az alkalmazási lehetőségek köre ennél jóval szélesebb, számos olyan valós gazdasági (és nemcsak gazdasági) probléma létezik, ami hálózattal reprezentálható, és valamilyen elosztási (költség, bevétel, haszon, stb.) kérdést vet fel. A cikk célja az volt, hogy a kooperatív játékelmélet segítségével egy olyan eszköztárat mutasson be, ami elősegíti a modellezést, és speciális elosztási problémák (fix-fa struktúrák) esetében jól számolható megoldásokat szolgáltat.

Hivatkozások

Aadland D, Kolpin V (1998) Shared irrigation cost: An empirical and axiomatical analysis. Mathematical Social Sciences 849:203–218

Aadland D, Kolpin V (2004) Environmental determinants of cost sharing. Journal of Economic Behavior & Organization 53:495–511

Ambec S, Ehlers L (2008) Sharing a river among satiable agents. Games and Economic Behavior 64:35–50

Ambec S, Sprumont Y (2002) Sharing a River. Journal of Economic Theory 107:453–462

Bjørndal E, Koster M, Tijs S (2004) Weighted allocation rules for standard fixed tree games. Mathematical Methods of Operations Research 59(2):249–270

Borm P, Hamers H, Hendrickx R (2001) Operations Research Games: A survey. TOP 9(2):139–199

Driessen TSH (1988) Cooperative Games, Solutions and applications Kluwer Academic Publisher

Forgó F, Pintér M, Simonovits A, Solymosi T (2006) Kooperatív játékelmélet

Fragnelli V, García-Jurado I, Méndez-Naya L (2000) On shorthest path games. Mathematical Methods of Operations Research 52:251–264

Gómez-Rúa M (2013) Sharing a polluted river through environmental taxes. SERIEs - Journal of the Spanish Economic Association 4:137–153

Granot D, Maschler M, Owen G, Zhu W (1996) The Kernel/Nucleolus of a Standard Tree Game. International Journal of Game Theory 25:219–244

Hamers H, Miquel S, Norde H, van Velzen B (2006) Fixed tree games with multilocated players. Networks 47(2):93–101

Koster M, Molina E, Sprumont Y, Tijs SH (2001) Sharing a cost of a network: core and core allocations. International Journal of Game Theory 30:567–599

Kovács G, Radványi A (2011) Költségelosztási modellek. Alkalmazott Matematikai Lapok 28:59–76

Littlechild S, Owen G (1973) A simple expression for the Shapley value in a special case. Management Science 20:370–372

Lucas WF (1981) Applications of cooperative games to equitable allocation. In: Game theory and its applications RI. American Mathematical Society, Providence pp. 19–36

Márkus J, Pintér M, Radványi A (2011) The Shapley value for airport and irrigation games

Maschler M, Potters J, Reijnierse H (2010) The nucleolus of a standard tree game revisited: a study of its monotonicity and computational properties. International Journal of Game Theory 39(1-2):89–104

Megiddo N (1978) Computational complexity of the game theory approach to cost allocation for a tree. Mathematics of Operations Research 3(3):189–196

Ni D, Wang Y (2007) Sharing a Polluted River. Games and Economic Behaviour 60:176–186

Parrachino I, Zara S, Patrone F (2006) Cooperative Game Theory and its Application to Natural, Environmental and Water Issues: 3. Application to Water Resources. World Bank PolicyResearch Working Paper

Peleg B, Sudhölter P (2003) Introduction to the Theory of Cooperative Games Kluwer

Pintér M (2007) Regressziós játékok. Szigma XXXVIII:131–147

Pintér M (2009) A Shapley-érték alkalmazásai. Alkalmazott Matematikai Lapok 26:289–315

Pintér M (2011) Regression games. Annals of Operations Research 186:263–274

Pintér M (2015) Young's axiomatization of the shapley value - a new proof. Annals of Operations Research 235(1):665–673

Pintér M, Radványi A (2013) The Shapley value for shortest path games: a non-graph based approach. Central Europian Journal of Operations Research 21:769–781

Schmeidler D (1969) The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal on Applied Mathematics 17:1163–1170

Shapley LS (1953) A value for n-person games. In: Kuhn HW, Tucker AW (eds.) Contributions to the theory of games II, Annals of Mathematics Studies 28. Princeton University Press, Princeton pp. 307–317

Shapley LS (1971) Cores of convex games. International Journal of Game Theory 1:11–26

Straffin PD, Heaney JP (1981) Game Theory and the Tennessee Valley Authority. Inernational Journal of Game Theory 10(1):35–43

Suzuki M, Nakayama M (1976) The Cost Assigment of the Cooperative Water Resource Development: A Game Theoretical Approach. Management Science 22:1081–1086

Thomson W (2007) Cost allocation and airport problems. RCER Working Papers 537, University of Rochester - Center for Economic Research (RCER)

Tijs SH, Driessen TSH (1986) Game theory and cost allocation problems. Management Science 32:1015–1028

von Neumann J, Morgenstern O (1944) Theory of Games and Economic Behavior Princeton University Press

Young HP (1985) Cost allocation. In: Fair allocation, Proceedings Symposia in Applied Mathematics 33. RI. American Mathematical Society, Providence pp. 69–94

Young HP, Okada N, Hashimoto T (1982) Cost allocation in water resources development. Water Resources Research 18:463–475