

MÓRICZ DÁNIEL

Vállalati nyugdíjkötelezettségek és a részvények kockázata – tőkeáttétel és kereszttulajdonlás

Az írás az Egyesült Államokban a magánalapon működő, szolgáltatással meghatározott vállalati nyugdíjprogramoknak a részvények kockázatára gyakorolt hatásával foglalkozik. A szolgáltatási nyugdíjprogramok eszközei között általában magas a részvények aránya, míg a kifizetések nem függnék a befektetési teljesítménytől. A nyugdíjalap eszközeinek teljesítménye ezáltal egyrészt a tőkeáttétel növelésén, másrészt – miután a vállalatok egymás részvényeit tartják a nyugdíjalapokban – egyfajta kereszttulajdonlási hatáson keresztül befolyásolja a programot működtető vállalat és részvényeinek hozamát, kockázatát. Ennek jelentőségére különösen az ezredfordulót követő tőkepiaci folyamatok világítottak rá: az alacsony szintre süllyedő kamatok felértékeltek a nyugdíjkötelezettséget, míg a részvényt piac gyengébb teljesítményének következtében csökkent a járadékigéret fedezetének értéke. A tanulmány egy CAPM alapú modellben mutatja be, hogy a szolgáltatási nyugdíjprogramok esetében jelentkező tőkeáttételi és kereszttulajdonlási hatás növelheti a részvényt piac volatilitását, módosíthatja a részvények szisztematikus kockázatát és az egyedi, nem diverzifikálható variancia arányát.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: G11, G12, G23, G32.

Az Egyesült Államokban számos vállalat működtet szolgáltatással meghatározott (röviden: szolgáltatási) nyugdíjprogramot. A programot működtető vállalat – a szponzor – a munkavállalókról való jövőbeli gondoskodás céljából befizetéseket teljesít egy elkülönített nyugdíjalapba. Az alap a szponzor befizetéseiből, illetve ezek befektetéséből származó hozamból a vállalat dolgozóinak nyugdíjas éveikben járadékot folyósít.¹ A járadék nagysága leggyakrabban a munkavállaló vállalatnál eltöltött éveinek számától, azaz a szolgálati idő hosszától és az utolsó néhány év átlagos fizetésétől függ. A járadékok az Egyesült Államokban többnyire nincsenek indexálva, a kifizetések nominálisan rögzítettek. A járadék tehát alapvetően nem függ a nyugdíjalap eszközeinek befektetési teljesítményétől.²

Az elmúlt évtizedek szabályozási változásai³ fokozatosan növelték a szponzorvállalat felelősségét a nyugdíjjáradékok kifizetését illetően, az 1980-as évek második felére a

* Köszönettel tartozom *Makara Tamásnak* a tanulmány megírásához nyújtott rengeteg segítségéért, valamint hálás vagyok *Kőszegi Eszternek, Szüle Borbálának, Michaletzky Mártonnak, Martin Hajdu Györgynek, Pálosi-Németh Balázsnak* és *Szakáll Gábornak* értékes megjegyzéseikért és hasznos tanácsaikért.

¹ A nyugdíjasok választásuk szerint egy összegben (*lump sum*) is felvehetik járandóságukat.

² Nem jellemző, de előfordul, hogy a nyugdíjalap eszközeinek jó teljesítménye esetén a vállalat önkéntesen megemeli a járadékokat.

³ *Employee Retirement Income Security Act (ERISA)*, *Single Employer Pension Plan Amendments Act (SEPPAA)* és az ezeket követő kiegészítések.

nyugdíjigéretek a vállalat előresorolt kötelezettségeivé téve. A nyugdíjprogram tehát – bár számvitelileg elkülönül a szponzorcégtől, és a programmal kapcsolatos sorok általában mérlegen kívüli tételek – közgazdaságilag a vállalat szerves részének tekinthető, a nyugdíjkötelezettségeket a vállalat (idegen, belső) forrásaként kell értelmezni.⁴

A jövőben várható kifizetések jelenértéke testesíti meg a nyugdíjprogram kötelezettségét, míg ezzel szemben az eszközoldal elsősorban értékpapír-befektetések állnak. Az eszközök és források egymáshoz viszonyított nagysága alapján a program lehet fedezett (*funded*) – ezen belül az eszközök többlete esetén túl- (*overfunded*), illetve hiánya esetén alulfedezett (*underfunded*) –, valamint fedezetlen (*unfunded*).⁵ Az eszközök és források természete (változó *versus* fix) alapján egy nyugdíjprogramnak lehetnek semlegesített és semlegesítetlen járadékkötelezettségei. A hosszú lejáratú kötvények – hasonló pénzáramlásuk, így kamatláb-kockázatuk következtében – jól semlegesítik a nyugdíjprogramot működtető vállalat fix jellegű járadékkötelezettségéből származó kockázatát. Ezzel szemben a nyugdíjalap részvénybefektetései emelik a szponzor részvényeinek kockázatát. A változó hozamú eszközök a fix (jellegű) kifizetésekkel szemben – azaz a semlegesítetlen kötelezettségek – növelik a vállalat tőkeáttételét.

A szakirodalom alaposan tárgyalja, hogy a program mekkora fedezettsége és az alap eszközeinek milyen összetétele optimális részvényesi szempontból.⁶ A vállalatok többsége a gyakorlatban a vegyes eszközösszetételt választja.⁷ A Fed [2005] statisztikája alapján megállapítható, hogy a nyugdíjalap eszközein belül a legnagyobb súllyal (körülbelül 45–50 százalékkal) a részvények szerepelnek, ezt követik a vállalati kibocsátású kötvények, jelzáloglevelek és állampapírok, valamint a pénzügyi eszközök.

A Fed adatai szerint az Egyesült Államokban a magánalapon működtetett szolgáltatási nyugdíjprogramok eszközértéke 2004 végén több mint 1800 milliárd dollár volt, amelynek közel felét részvények tették ki. Bár ez az összeg az amerikai részvények közel 15 000 milliárd dolláros piaci értékéhez képest nem tűnik magasnak, a vállalatok kötelezettségállományát tekintve azonban jelentős. Összehasonlításképpen: 2004-ben az Egyesült Államok vállalati szektorának adósságállománya mintegy 5200 milliárd dollár volt,⁸ amelyből 2950 milliárd dollárt tettek ki vállalati kötvények. Megállapítható tehát, hogy a vállalatok szolgáltatási nyugdíjprogramok keretében fennálló kötelezettségállománya igen jelentős tétel a finanszírozásban. Tekintve, hogy a vállalat felelős a járadékok kifizetéséért, a nyugdíjalap eszközeinek és forrásainak eltérő természete a valóságban nem elhanyagolható pótlólagos kockázatot jelent a szponzorvállalat, illetve részvényesei számára. A fedezetlen mellett tehát jelentős kockázat származik a semlegesítetlen járadékigéretekből is.

A semlegesítetlen nyugdíjkötelezettségből származó problémák az Egyesült Államokban különösen az ezredfordulót követően kerültek reflektorfénybe. A több évtizede nem látott alacsony szintre süllyedt kamatok következtében felértékelődő kötelezettségállománnyal szemben álló részvények ugyanis az „internetlufi” kidurranását követően jelentősen veszítettek értékükből. Ráadásul a társadalom és a munkaerő-állomány elöregedésével párhuzamosan a járadékfizetéseknek a befizetésekhez, illetve a nyugdíjasoknak a munkavállalókhöz viszonyított aránya folyamatosan emelkedik, ami egyes vállalatok esetében likviditási problémákat is okoz. Emellett az energiaárak drasztikus növekedése számos olyan iparág nyereségességét erodálta, amelyeknek jelentős nyugdíjkötelezettsé-

⁴ Bulow [1982] szerint a szolgáltatási nyugdíjprogram a szponzorvállalat biztosítással foglalkozó leánycégeként is értelmezhető.

⁵ Az Egyesült Államokban a nyugdíjprogramok többsége fedezett, különböző adókedvezményekben részesülő, úgynevezett minősített program.

⁶ A témáról átfogó összefoglalást ad például Copeland–Weston [1988] 646–654. o.

⁷ Ennek okairól lásd például Móricz [2004] összefoglalóját.

⁸ Pénzügyi vállalatokat és farmokat kivéve, forrás: Fed [2005].

geik vannak. Emiatt több légitársaság (US Airways, United Airlines, Delta Airlines) és acélipari óriás (Bethlehem Steel, National Steel) csődjéhez a szolgáltatási nyugdíjprogramok is hozzájárultak, de nehéz helyzetben vannak a jelentős alkalmazotti létszámuk miatt nagy nyugdíjkötelezettségeket felhalmozó autóiipari vállalatok is (General Motors, Ford).

Elméleti szinten és empirikus kutatás formájában is számos cikk (*Feldstein–Seligman* [1981], *Bulow* [1982], *Bulow–Scholes* [1982], *Bodie* [1990], illetve *Oldfield* [1977], *Feldstein–Morck* [1983], *Daley* [1984], *Landsman* [1986]) foglalkozik a nyugdíjprogram eszközei, kötelezettségei és esetleges hiánya nagyságának, valamint a működtető vállalat részvényértékének kapcsolatával. Ezzel szemben viszonylag kevés munka született a részvények kockázatára gyakorolt hatásról, és ezek is elsősorban a hitelszerű forráselemként értelmezhető – ezáltal tőkeáttétel növelő – fedezetlen nyugdíjkötelezettség és a részvénybéta összefüggéseit hangsúlyozzák (*Holland–Sutton* [1988], *Dhaliwal* [1986]). Ez utóbbi csoportba tartozó kutatások eltérő módszerekkel ugyanazon következtetésre jutottak: a fedezetlen nyugdíjkötelezettség *ceteris paribus* növeli a részvénybétát.

Igazán jól értelmezhető, robusztus és a semlegesítetlen kötelezettségeket is figyelembe vevő eredményekről ugyanakkor csak *Jin–Merton–Bodie* [2004] írásában lehet olvasni. A szerzők a nyugdíjprogrammal kapcsolatos tételekkel kibővített vállalati mérleg alapján igazolják, hogy mind a nyugdíjalap eszközei (illetve azok összetétele), mind pedig a kötelezettségek befolyásolják a részvénybétát. Empirikus vizsgálatuk során úgy találták, hogy a transzparencia hiánya és a számviteli nehézségek ellenére a piac meglehetősen hatékony, a nyugdíjprogrammal kapcsolatos tételek hatása kimutatható a részvénybétákban. Egyben rámutatnak, hogy a vállalat operatív bétájának hagyományos becslése során – nem téve különbséget a működési és a nyugdíjakkal kapcsolatos kockázatok között – jelentősen felülbecsülheti a tőke költségét,⁹ ezáltal pozitív nettó jelenértékű beruházásokat vethet el.

Ebben a tanulmányban a semlegesítetlen járadékígérettel foglalkozom, megmutatva, hogy az nemcsak a szponzor részvényének, hanem a részvényt piac egészének is növeli a kockázatát. A következőkben egy CAPM alapú modell keretei között először azt mutatom be, hogy a semlegesítetlen nyugdíjkötelezettség miatt miképpen változik meg a szolgáltatási nyugdíjprogramot működtető vállalat részvényeinek hozama, szórása és szisztematikus kockázata. Ezt követően szemléltetem, hogy mi történik a piac egészének kockázati tulajdonságaival, ha az összes vállalat működtet szolgáltatási nyugdíjprogramot, amelyek egymás részvényeibe fektetnek. A korábbi írásokban említett tőkeáttételi hatás mellett új elemként jelenik meg tehát egyfajta kereszttulajdonlási hatás.

Csak egyetlenegy vállalat működtet szolgáltatási nyugdíjprogramot – tőkeáttétel

A következő modell a *Sharpe* [1964] által leírt *tőkepiaci árfolyamok modelljére* (*Capital Asset Pricing Model*, CAPM) épül. Ennek megfelelően felteszem, hogy az egyperiódusú modellben a befektetők kockázatelutasítók, akik a periódus végi hasznosságukat (a várható hozam és szórásnégyzet függvényében) maximalizálják. A befektetők továbbá árelfogadók és az eszközök hozameloszlásával kapcsolatban várakozásaik azonosak. Az információknak nincs költsége. A modellben a befektetők egy kockázatmentes (kötvény) és

⁹ A piaci adatokból becsült részvénybéta ugyanis valójában nemcsak a vállalat működési kockázatát és hagyományos értelemben vett tőkeáttételének hatását mutatja, hanem tükröződik benne a nyugdíjprogram eszközeinek és kötelezettségeinek különbsége és eltérő kockázata is. Amennyiben az eszközbétát a forrásoldalról – azaz a részvénybétából származtatva – becsüljük, és nem vesszük figyelembe a nyugdíjak hatását, akkor a nyugdíjprogramból adódó kockázatokat is működési kockázatként kezeljük, így túlbecsüljük az operatív bétát.

több kockázatos eszközbe (részvény) fektethetnek. A kockázatos eszközök piacképesek, kínálatuk állandó. Az összes kockázatos eszköz együttesét piaci portfóliónak nevezzük, amely hozameloszlását az \tilde{r}_m valószínűségi változó írja le. A befektetők a kockázatmentes hozamon (r_f) kölcsönadhatnak és kölcsönvehetnek. A kockázatelutasítás miatt a piaci portfólió várható hozama nagyobb a kockázatmentes hozamnál, $\bar{r}_m > r_f$. (A továbbiakban hullámjellel a valószínűségi változót, felülvonással a várható értéket, vesszővel pedig a nyugdíjprogram létrehozása következtében megváltozott mutatókat jelölöm.) Az eszközök korlátlanul oszthatók. A piac tökéletes, tehát nincsenek az eszközök adásvételével kapcsolatban adók, tranzakciós költségek és szabályozási korlátozások (a rövidre eladás lehetséges).

Tegyük fel továbbá, hogy kellően sok vállalat létezik, amelyek működésüket kockázatos értékpapírok (részvények) kibocsátásával finanszírozzák. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljunk egy olyan vállalatot, amelynek súlya marginális a piaci portfólión belül, és amelynek nincs hitele. A kiemelt cég működését kockázatos részvennyel finanszírozza, amelynek hozama a vállalat eszközeinek periódus végi értékétől függő valószínűségi változó: $\tilde{r}_E = (\tilde{A}^1 - A^0) / A^0$, ahol \tilde{A}^1 a vállalat eszközei periódus végi értékének eloszlását leíró valószínűségi változó, A_0 a vállalat eszközeinek periódus eleji értéke, ami megegyezik a vállalat részvényeinek nulladik időpontbeli értékével (E^0).

Tételezzük fel, hogy a vizsgált vállalat úgy dönt, hogy a munkavállalóknak a nulladik időpontban nem X nagyságú bért fizet, hanem helyette javadalmazás gyanánt szolgáltatási nyugdíjprogramot hoz létre, és a periódus végén $L^1 = X \cdot (1 + r_f)$ nagyságú járadék biztos (kockázatmentes) kifizetését ígéri.¹⁰ A vállalat a nulladik időpontban $F^0 = L^1 / (1 + r_f) = X$ összeget befizet a létrehozott nyugdíjalapba – tehát induláskor a program teljesen fedezett –, és ezt az összeget a piaci portfóliónak megfelelő összetételű kockázatos eszközökbe fekteti. A nyugdíjalap eszközeinek (F) együttes hozameloszlását tehát az $\tilde{r}_F = (\tilde{F}^1 - F^0) / F^0 = \tilde{r}_m$ valószínűségi változó írja le.

A modellben a munkavállalók – akik egyben részvényesek is – fogyasztása konstans, független attól, hogy jövedelmüket bér vagy nyugdíjjáradék-ígéret formájában kapják. Az egyszerűség kedvéért felteszem, hogy jövedelmüket azonnal fogyasztásra fordítják, nem takarítanak meg. Ha bér helyett járadékígéretet kapnak, akkor a követelés jelenértékének megfelelő értékben – ami itt megegyezik F^0 -al – kockázatmentes eszközt adnak el pénzügyi vagyonukból, vagy hitelt vesznek fel, és ebből fedezik azonnali fogyasztási kiadásait. A vállalat a nyugdíjalapba kockázatos eszközöket vásárol, amely növeli azok keresletét. Amint azt azonban később bemutatom, a vállalat részvényeinek, így a piac egészének a kockázata is nőni fog, ezért a befektetők – a várható hozam és variancia alapú hasznosságukat maximalizálva – a változást egyéni portfólióikban kiigazítva, kockázatos eszközöket fognak eladni, kielégítve a nyugdíjalapba bekerülő eszközök többlet keresletét, így a részvények árfolyama nem változik.¹¹ Az egyensúly tehát a modell feltételei mellett biztosított. A befektetők optimális portfóliójának részvény-kötvény (kockázatmentes eszköz) összetétele megváltozik ugyan, de hozam- és varianciatulajdonsága nem.

¹⁰ Ehhez a vállalat és a nyugdíjalap eszközeinek eloszlására fel kell tenni, hogy azok együttes periódus végi értéke mindig nagyobb, mint L^1 . A tanulmányban nem foglalkozom azzal az esettel, hogy mi történik, ha a vállalat nem képes teljesíteni a járadékfizetési kötelezettségét, azaz a nyugdíjígéret nem kockázatmentes. A valóságban ilyenkor egy szövetségi szerv, a *Pension Benefit Guaranty Corporation* (PBGC) vállalja át a nyugdíjak kifizetését, amely a garancia fejében (biztosítási) díjat szed a szponzorvállalatoktól. A bér, illetve az ígért nyugdíjjáradék, ez utóbbi nemteljesítési kockázata és a biztosítási díj függvényében értéktranszfer jöhet létre a munkavállalók, a részvényesek és a PBGC (állam) között. A modellben biztos kifizetés feltételezése mellett ismertetett tőkeáttételi hatás a feltétel feloldása (kockázatos nyugdíjígéret) esetén mérsékeltebb lenne.

¹¹ Ehhez fontos feltétel a teljes informáltság.

A vizsgálandó kérdés az, hogy miképpen változik a vállalat részvényeinek várható hozama (\bar{r}'_E), hozamának szórása (σ'_E) és szisztematikus kockázatot mérő bétája ($\beta'_E = \text{Cov}(\tilde{r}'_E, \tilde{r}_m) / \sigma_m^2$), ha az a bérfizetés helyett a nyugdíjprogramon keresztül javadalmazás mellett dönt.

Jelölje $w = F^0 / E^0$ a nyugdíjalap eszközeinek súlyát a vállalat részvényeire vetítve a nulladik időpontban ($w > 0$). A nyugdíjprogram eszközeinek és kötelezettségeinek periódus végi értékét is figyelembe véve, a vállalat (részvényeinek) értéke a periódus végén a következő:

$$\tilde{E}' = \tilde{A}^1 + \tilde{F}^1 - L^1 = \tilde{E}^1 + wE^0(\tilde{r}_F - r_f). \quad (1)$$

Ekkor a vállalat részvényeinek várható hozama

$$\bar{r}'_E = (\bar{E}' - E^0) / E^0 = \bar{r}_E + w(\bar{r}_m - r_f) \quad (2)$$

lesz, ami nem más, mint a(z) eredeti bérfizetés melletti) várható hozam plusz a piaci kockázati prémium szorozva a nyugdíjalap eszközeinek a vállalat eszközeihez viszonyított arányával. *A nyugdíjprogramot létrehozó vállalat részvényeinek várható hozama tehát nő.*

A vizsgált vállalat hozamának szórásnégyzete a következő lesz:¹²

$$(\sigma'_E)^2 = (\beta_E + w)^2 \sigma_m^2 + \sigma_e^2, \quad (3a)$$

$$(\sigma'_E)^2 = \sigma_e^2 + w(2\beta_E + w)\sigma_m^2. \quad (3b)$$

A fenti egyenletek alapján két fontos megállapítás tehető. Egyrészt (3a)-ból látható, hogy *a nyugdíjprogram következtében az egyedi, diverzifikálható szórásnégyzet aránya csökken a teljes variancián belül*, másrészt (3b)-ből kiderül, hogy a nyugdíjprogram létrehozásával *a vállalat hozamának szórása mindenképpen nő, ha β_E pozitív*. A növekmény annál nagyobb, minél magasabb a nyugdíjalap eszközeinek a vállalat eszközeihez viszonyított aránya, illetve minél nagyobb a vállalat eredeti tevékenységének szisztematikus kockázata.

A szolgáltatási nyugdíjprogram miatt a részvény szisztematikus kockázata is megváltozik:¹³

$$\beta'_E = (\beta_E \sigma_m^2 + w \sigma_m^2) / \sigma_m^2 = \beta_E + w. \quad (4)$$

A szolgáltatási nyugdíjprogram miatt a vállalat részvényeinek bétája megnő, a növekmény megegyezik a nyugdíjalap vállalati eszközökhöz viszonyított súlyával.

Az összes vállalat működtet szolgáltatási nyugdíjprogramot – tőkeáttétel és kereszttulajdonlás

Az előzőkben eltekintettem attól a tényezőtől, hogy a vizsgált vállalat várható hozamának és kockázatának növekedése miatt a piaci portfóliónak e tulajdonságai is módosulnak (marginális súlyú vállalatot feltételeztem). Most ezt a hatást is figyelembe veszem, aminek szemléltetéséhez az egyszerűség kedvéért az előzőkhöz képest felteszem, hogy mindössze két – a periódus elején azonos piaci értékű, kizárólag saját tőkéből finanszírozott – vállalat részvényeiből áll a piaci portfólió: $A_1^0 = A_2^0 = E_1^0 = E_2^0$ (ahol a felső index az időpontot, az alsó pedig a vállalatot jelöli). Felteszem továbbá, hogy a két vállalat tevé-

¹² A levezetés a *Függelékben* megtalálható.

¹³ A levezetés a *Függelékben* megtalálható.

kenysége, így a részvények szisztematikus kockázata és várható hozama különböző ($\beta_1 > \beta_2$ és $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$),¹⁴ valamint a vállalatok részvényhozamai közötti korreláció nem tökéletes, azaz a korrelációs együtttható ($\rho_{1,2}$) abszolút értéke kisebb, mint egy, $-1 < \rho_{1,2} < 1$. A CAPM alapján tehát $\beta_1 > \beta_m = 1 > \beta_2$ és $\bar{r}_1 > \bar{r}_m > \bar{r}_2$, valamint a két vállalat nulladik időpontbeli azonos értéke miatt $(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)/2 = \bar{r}_m$.

Tegyük fel, hogy a két vállalat – ez előző alpontban bemutatott helyzethez hasonlóan – úgy dönt, hogy a periódus eleji bérfizetés helyett L_1 , illetve L_2 összegű nyugdíjjáradék kockázatmentes kifizetését ígéri a periódus végén. Ehhez mindketten nyugdíjprogramot hoznak létre, és a nyugdíjalapokba F_1 , illetve F_2 nagyságban fizetnek be pénzt, amelyből egymás részvényeit veszik meg: $F_1 = w_1 E_2$ és $F_2 = w_2 E_1$, ahol w_1 és w_2 az egyes vállalatokon belül a nyugdíjalap eszközökhöz viszonyított nulladik időpontbeli súlyát jelöli ($w_1 = F_1^0 / E_1^0$ és $w_2 = F_2^0 / E_2^0$). További feltétel, hogy a vállalatok a nyugdíjprogramjainkon keresztül nem vehetik meg a másik cég részvényeinek száz százalékát, azaz $0 < w_1, w_2 < 1$.¹⁵

Ebben a helyzetben a tőkeáttétel és a kereszttulajdonlás miatt megváltozik az egyes cégek várható hozama (\bar{r}'_1 és \bar{r}'_2). A nyugdíjprogram létrehozása nélküli eszközhozamához hozzáadódik egy hitelből finanszírozott részvényportfólió teljesítménye is, hasonlóan az előző fejezetben bemutatott helyzethez. Különbség azonban, hogy a nyugdíjalap részvénybefektetései hozama nemcsak a másik vállalat részvényhozamának, hanem azon keresztül a saját szponzora részvényhozamának is függvénye lesz. A második vállalat részvényhozama ugyanis függ a saját és az első eszközhozamától, valamint az első nyugdíjalapjának teljesítményétől, ami viszont függvénye a második részvényhozamának. A kereszttulajdonlás tehát olyan helyzetet hoz létre, hogy bármelyik vállalat eszközeinek jó vagy rossz teljesítménye a nyugdíjalap befektetésein keresztül multiplikálódik. Ezt az iteratív folyamatot a következő egyenletekkel lehet leírni:

$$\bar{r}'_1 = \bar{r}_{A1} + w_1(\bar{r}'_2 - r_f), \quad (5a)$$

$$\bar{r}'_2 = \bar{r}_{A2} + w_2(\bar{r}'_1 - r_f). \quad (5b)$$

Behelyettesítve (5b)-t (5a)-ba, felhasználva, hogy $\bar{r}_1 = \bar{r}_{A1}$ és $\bar{r}_2 = \bar{r}_{A2}$, valamint egyszerűsítve, a nyugdíjprogram nélküli eredeti részvényhozamok függvényeként ki lehet fejezni a két részvény módosult hozamát és ennek megfelelően az új várható részvényhozamokat:¹⁶

$$\bar{r}'_1 = \frac{\bar{r}_1 + w_1 \bar{r}_2 - w_1(1 + w_2)r_f}{1 - w_1 w_2} = \bar{r}_1 + \frac{w_1 w_2 (\bar{r}_1 - r_f) + w_1 (\bar{r}_2 - r_f)}{1 - w_1 w_2}, \quad (6a)$$

$$\bar{r}'_2 = \frac{\bar{r}_2 + w_2 \bar{r}_1 - w_2(1 + w_1)r_f}{1 - w_1 w_2} = \bar{r}_2 + \frac{w_1 w_2 (\bar{r}_2 - r_f) + w_2 (\bar{r}_1 - r_f)}{1 - w_1 w_2}. \quad (6b)$$

E képletekből látszik, hogy a nyugdíjprogramok következtében a tőkeáttétel miatt megnő a részvények várható hozama, ha $\bar{r}_1, \bar{r}_2 > r_f$ (azaz ha a két vállalat eszközeinek bétája pozitív). Érdekes, hogy a várható hozam nemcsak a másik vállalat eszközhozamának kockázati prémiumával nő, hanem számút a saját eszközök kockázatmentes hozama fölötti hozam is, és ráadásul mindkét tényezőt egyfajta (egynél nagyobb)

¹⁴ A továbbiakban a mutatók mind a vállalatok részvényeinek tulajdonságaira vonatkoznak, az E jelölést nem, csak a vállalatok sorszámát tüntetem föl a mutatók alsó indexében.

¹⁵ Hiszen $w_1 = w_2 = 1$ esetén nem lenne a befektetők által megvásárolható szabad részvény, azaz nem lenne a modellben kockázatos eszköz.

¹⁶ A levezetés a Függelékben megtalálható.

multiplikátortényezővel, $1/(1-w_1w_2)$ -vel kell beszorozni, ami nemcsak az adott vállalat, hanem a másik cég nyugdíjalapjának eszközökhöz viszonyított súlyától is függ. *A tőkeáttétel és a kereszttulajdonlás tehát együttesen nagyobb mértékben fejt ki hatását.*

Tegyük fel, hogy az egyes nyugdíjalapok relatív súlya mindkét cégen belül ugyanakkora ($w_1 = w_2 = w$). Ekkor a megváltozott kockázatos eszközöket tartalmazó piaci portfólióban is meg fog egyezni a két vállalat részvényeinek súlya, hasonlóan a nyugdíjprogram nélküli kiinduló helyzethez. Így megkapható, hogy miképpen módosul a piac várható hozama a nyugdíjprogramok következtében:¹⁷

$$\bar{r}'_m = \bar{r}_m + \frac{w}{1-w}(\bar{r}_m - r_f). \quad (7)$$

A piac várható hozamának növekménye egyenesen arányos a kockázati prémiummal és egy multiplikátortaggal, $w/(1-w)$ -vel, ami a nyugdíjalapok vállalati eszközökhöz viszonyított (átlagos) súlyától függ.

Fontos megjegyezni: az, hogy a vállalatok nyugdíjprogramjai egymás részvényeit tartják, és emiatt a bemutatottaknak megfelelően megnő az egyes részvények és a piac egészének a várható hozama, nem változtatja meg a részvények árfolyamát, az egyensúlyi helyzettel kapcsolatban korábban bemutatott érvelés itt is megállja a helyét. A nyugdíjalapok részvények iránt támasztott többletkereslete ugyanis találkozik a – részvények növekvő kockázata miatt egyéni portfóliójukat átrendező – befektetők részvényeladási szándékával. Ha az információnak nincs költsége, akkor a nyugdíjprogramok létrehozása nem változtatja meg a befektetők vállalati reáleszközök várható hozamára és kockázataira vonatkozó várakozásait. Emiatt ahhoz, hogy a kezdeti – számukra maximális hasznosságot nyújtó – állapothoz képest továbbra is az optimumban maradjanak, az eszközök magasabb kockázata miatt részvényeket kell eladniuk, és növelniük kell a kockázatmentes eszköz súlyát egyéni portfólióikban. A részvénypiac magasabb kockázatát (tőkeáttételét) egyéni kockázatmentes hitelyújtással (vagy a hiteltartozás csökkentésével) semlegesítik. Emiatt a kockázatos eszközök várható hozamának növekedése nem jár együtt az eredeti egyensúlyi részvényárfolyamok megváltozásával, csak a befektetők számára optimális részvény-kötvény arány módosul az egyéni portfólióikban, azok hozam-variancia tulajdonsága azonban nem változik.

A nyugdíjprogramok hatása a vállalatok részvényhozamainak szórásnégyzetére is kifejezhető (továbbra is feltételezve, hogy $w_1 = w_2 = w$).¹⁸

$$(\sigma'_1)^2 = \sigma_1^2 + \left[\frac{w^2}{1-w^2} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{2}{w} \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \right) \right] \quad (8a)$$

$$(\sigma'_2)^2 = \sigma_2^2 + \left[\frac{w^2}{1-w^2} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{2}{w} \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \right) \right]. \quad (8b)$$

E képletekből látszik, hogy *a nyugdíjprogramok következtében a részvények varianciája megnő, ha a két részvény közötti korrelációs együttható pozitív.* (Ez a gyakorlatban a részvények többségére fennáll.)

*A piaci portfólió kockázata is emelkedik, az új szórás a következő lesz:*¹⁹

$$\sigma'_m = \frac{1}{1-w} \sigma_m. \quad (9)$$

¹⁷ A levezetés a *Függelékben* megtalálható.

¹⁸ A levezetés a *Függelékben* megtalálható.

¹⁹ A levezetés a *Függelékben* megtalálható.

Mivel az egyedi részvények és a piac kockázata is megváltozik, érdemes megnézni, hogy mi történik ebben az esetben a szisztematikus kockázatot tükröző részvénybétákkal. A béta képletébe ($\beta_i = \text{Cov}(r_i, r_m) / \sigma_m^2$) r_i és r_m helyére beírva az \tilde{r}'_1 -re és \tilde{r}'_m -re kapott összefüggéseket, felhasználva a kovariancia tulajdonságait, valamint azt, hogy vállalatok azonos mérete miatt $(\beta_1 - \beta_2) / 2 = \beta_m = 1$, megkapjuk az első vállalat módosult részvénybétáját, amihez hasonlóan a másodikat is meg lehet határozni.²⁰

$$\beta'_1 = \beta_1 + \frac{2w}{1+w}(1 - \beta_1) = \beta_1 + \frac{w}{1+w}(\beta_2 - \beta_1) \quad (10a)$$

$$\beta'_2 = \beta_2 + \frac{2w}{1+w}(1 - \beta_2) = \beta_2 + \frac{w}{1+w}(\beta_1 - \beta_2). \quad (10b)$$

E két képlet legfontosabb új tulajdonsága, hogy megmutatják: *a szisztematikus kockázatot kifejező részvénybéták a nyugdíjprogramok létrehozása következtében közelednek egymáshoz, pontosabban a piaci bétához, azaz 1-hez. Ez a kereszttulajdonlásnak köszönhető.* Az egymáshoz való konvergencia annál erősebb, minél nagyobb a nyugdíjalap (és részvénybefektetéseinek) súlya a vállalatok hagyományos eszközeihez képest.

Következtetések

Az előzőekben ismertetett elméleti modell új nézőpontból vizsgálja a szolgáltatási nyugdíjprogramok részvényt piacra gyakorolt hatását. Egy feltételekkel leegyszerűsített modellben két szélsőséges esetet mutattam be: vagy csak egyetlen vállalat, vagy pedig az összes cég működtet szolgáltatási nyugdíjprogramot. Az előbbi esetre vonatkozó megállapítás, hogy a nyugdíjalap eszközeinek részvényekbe történő fektetése a tőkeáttétel növekedése miatt emeli a szponzoráló vállalat részvényeinek várható hozamát, szórását és szisztematikus kockázatát. A modell második esetének következtetése: ha az összes vállalat (vagy a kibocsátók többsége) működtet szolgáltatási nyugdíjprogramot, akkor nemcsak az egyedi részvények, hanem a piaci portfólió egészének a várható hozama és szórása is nő, viszont a kereszttulajdonlás és a tőkeáttétel együttes hatásaként az egyedi részvények szisztematikus kockázata közötti különbség csökkenni fog, a béták 1-hez tartanak.

A modell feltevései közül érdemes kiemelni az információ költségmentességét. Ha a befektetők jól informáltak – azaz felismerik a részvények magasabb kockázatát –, akkor egyéni portfóliójuk átsúlyozásával továbbra is maximalizálni tudják hasznosságukat: kevesebb, de már magasabb kockázatú részvényt tartanak, és több kockázatmentes kötvénybe fektetnek. Azaz a részvények és a piac kockázata ugyan nő, de az egyéni befektetők továbbra is ugyanazon – a hasznosságukat maximalizáló – kockázat-hozam ponton maradnak, hasznosságuk nem változik. Bár *Jin–Merton–Bodie* [2004] úgy találták, hogy a piaci hatékonyság kiterjed a nyugdíjprogrammal kapcsolatos tételek értékelésére, számos tanulmány (*Barth–Beaver–Landsman* [1992], *Amir–Gordon* [1996], *Munnell–Soto* [2003], *Coronado–Sharpe* [2003]) vont le ezzel ellentétes következtetést. Ez utóbbiak azt állítják, hogy valójában a befektetők elsősorban a számvitel hiányosságai miatt nem jól informáltak, nem ismerik a tényleges nyugdíjkötelezettséget, az eszközök értékét és azok összetételét sem. Az információk aszimmetria kérdésével azonban a modellben nem foglalkozom, annak kezelése jóval bonyolultabb kérdés.²¹

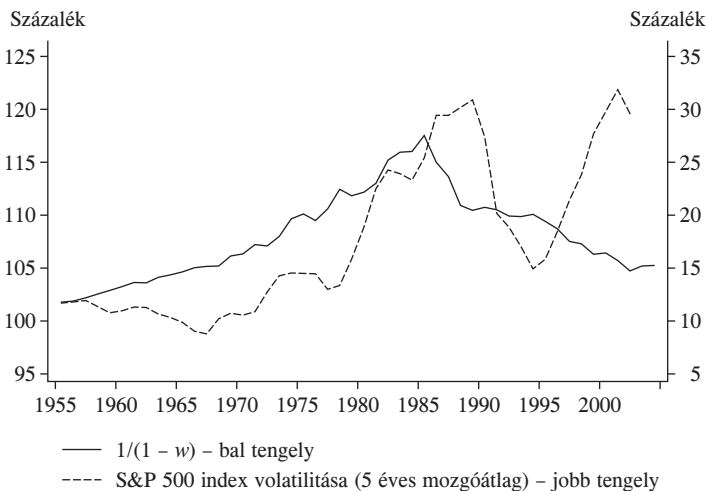
²⁰ A levezetés a *Függelékben* megtalálható.

²¹ Az aszimmetrikus információeloszlás következménye lehet például az, hogy a nyugdíjprogramok által

A modell első változata nem foglalkozik a kereszttulajdonlással, míg a második esetben azt tettem fel, hogy minden vállalat befektet az összes többi részvényébe. A kereszttulajdonlás mértéke a valóságban a bemutatott két szélsőséges eset között van. A nagy tőzsdei vállalatok mintegy kétharmadának van szolgáltatási nyugdíjprogramja, azok részvényaránya 50 százalék körül ingadozik (igaz, a kötvények aránya csak 30–35 százalék). A magánalapon működtetett szolgáltatási nyugdíjprogramokban felhalmozott vagyon nominális értéke az ezredfordulóig folyamatosan nőtt ugyan, de – a hozzájárulással meghatározott programok térhódításával – a vagyon aránya a teljes részvénypiaci kapitalizációhoz képest az 1980-as évek közepétől lassan csökkent, 1985-ben még 35, 2004-ben már csak 10,5 százalék volt. A Fed [2005] statisztikája alapján a szolgáltatási nyugdíjprogramok vagyonának és eszközmegoszlásának, valamint az Egyesült Államok teljes részvényállományának segítségével, a fenti modell w tényezőjének, illetve $1/(1-w)$ szorzójának közelítését lehet becsülni. Érdekes a becslést összehasonlítani az S&P 500 részvényindex volatilitásával (1. ábra).

1. ábra

Az $1/(1-w)$ szorzó, illetve a részvénypiaci volatilitás becsült értékének alakulása az Egyesült Államokban* (1955–2004)



* A w tényezőre adott becslés a magánalapon működtetett szolgáltatási nyugdíjprogramok eszközei között közvetlenül, valamint befektetési alapokon keresztül tartott részvények értéke, illetve a teljes részvénypiaci kapitalizáció hányadosa.

Forrás: Fed [2005], illetve Bloomberg.com.

A becslés a piac egészére egy átlagos értéket ad, azonban óvatosan kell kezelni, hiszen az egyes szektorokon belül a nyugdíjprogramok súlya igen eltérő (például az acéliparban, a repülőgépgyártásban, a légitársaságok esetében és az autóiparban az

a kockázatos eszközök iránt támasztott többletkereslet csak magasabb árfolyamok, azaz alacsonyabb várható hozamok mellett tud kielégülni, hiszen a befektetők – ha nem ismerik fel a piaci portfólió kockázatnövekedését, akkor – csak magasabb árfolyamok mellett hajlandók csökkenteni a részvények arányát egyéni portfóliójukban. Egy ilyen helyzetben a piaci portfólió szórásának növekedése ellenére is változatlan maradhat (vagy csökkenhet) a piaci kockázati prémium. Ez a gondolatmenet azonban csak egy elméleti lehetőséget vázol fel, a fenti modell egy feltevésének feloldásával.

arány meglehetősen nagy), valamint különböző módszertani problémák²² merülnek fel. Az 1. ábra csak közelítő becslést ad az $1/(1-w)$ szorzó abszolút értékére, ugyanakkor annak időbeli alakulása mindenesetre jól mutatja a szolgáltatási nyugdíjprogramok időben változó – elsősorban az 1980-as években jelentősebb – szerepét.²³

A modell elméleti eredményeit – a számos szigorú feltevés miatt – a gyakorlatban visszafogottan kell kezelni. Mindazonáltal az elméleti következtetések alapján megfogalmazható néhány óvatos megállapítás. Az írás rávilágít arra, hogy a szolgáltatási nyugdíjprogramok léte nemcsak a fedezetlen, hanem a semlegesítetlen járadékígéreteken keresztül is kihathat a szponzorvállalat, illetve akár az egész részvényt piac kockázatára. Vállalatértékelés során tehát nem szabad figyelmen kívül hagyni a szolgáltatási nyugdíjprogrammal kapcsolatos mérlegen kívüli tételeket, hiszen azok a működési mellett addicionális kockázatot jelentenek, módosítva a szponzoráló vállalat tőkeáttételét. Azoknak a vállalatoknak, amelyeknek jelentős szolgáltatási nyugdíjprogramjuk van, várhatóan magasabb a részvénybétájuk, mint a nyugdíjprogram nélküli cégeknek. A saját tőkájükhöz képest jelentős szolgáltatási nyugdíjprogramot működtető vállalatok részvényeinek varianciáján belül valószínűleg kisebb az egyedi kockázat, és magasabb a piaci változásokkal magyarázható szisztematikus kockázat súlya. A fenti hipotézisek helyességének empirikus adatokon történő ellenőrzése további kutatási irány lehet. A szolgáltatási nyugdíjprogramok hozamra és kockázatra gyakorolt hatását mindenesetre célszerű szem előtt tartani mind a vállalati tőke Költség becslése, mind pedig a portfólió kiválasztás során.

Hivatkozások

- AMIR, E.–GORDON, E. [1996]: Firm's Choice of Estimation Parameters: Empirical Evidences from SFAS 106. *Journal of Accounting, Auditing, and Finance*, Vol. 11. No. 3. nyár, 427–448. o.
- BARTH, M.–BEAVER, W. H.–LANDSMAN, W. R. [1992]: The Market Valuation Implications of Net Periodic Pension Cost Components. *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 15. No. 1. március, 27–62. o.
- BODIE, Z. [1990]: The ABO, the PBO, and Pension Investment Policy. *Financial Analysts Journal*, Vol. 46. No. 5. szeptember–október, 27–34. o.
- BULOW J. I. [1982]: What are Corporate Pension Liabilities? *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 97. No. 3. augusztus, 435–452. o.
- BULOW, J. I.–SCHOLES, M. S. [1982]: Who Owns the Assets in a Defined Benefit Pension Plan? National Bureau of Economic Research (NBER) Working Paper, No. W0924.
- COPELAND, T. E.–WESTON, J. F. [1988]: *Financial Theory and Corporate Policy*. Addison-Wesley Publishing, Reading, MA.
- CORONADO, J. L.–SHARPE, S. A. [2003]: Did Pension Accounting Contribute to a Stock Market Bubble? *Brookings Papers on Economic Activity*, Vol. 1. 323–371. o.
- FED [2005]: *Flow of Funds Accounts of the United States, 1975–1984, 1985–1994, 1995–2004*. Board of Governors of the Federal Reserve System. Washington, DC. Letöltve: <http://www.federalreserve.gov/releases/z1/Current/data.htm>, 2005. szeptember 20-án.

²² Így például azzal az egyszerűsítéssel éltem, hogy a piaci portfólió a Fed statisztikájában szereplő részvényeket tartalmazza, és nem foglalkoztam a nyugdíjalapok eszközei között található külföldi részvényekkel. Valójában a Fed által nyilvántartott teljes részvényállomány magában foglal nem piacképes papírokat is, de nem tartalmaz más kockázatos eszközöket (ingatlanokat, opciós értékpapírokat stb.), emellett a nyugdíjalapok – kisebb arányban – külföldi részvényeket is tartanak. Ezenkívül a számításokban feltételeztem, hogy a nyugdíjalapok eszközei között található kötvények (és csekély súlyú pénzügyi, valamint egyéb eszközök) semlegesítik a nyugdíjkötelezettségek azonos értékű részét.

²³ A szolgáltatási nyugdíjprogramok a tőkeáttétel növelésén keresztül hozzájárulhattak a részvényt piac volatilitásának 1980-as években megfigyelt növekedéséhez, az 1990-es években azonban már kevésbé valószínűsíthető ilyen összefüggés.

- DALEY, L. A. [1984]: The Valuation of Reported Pension Measures for Firms Sponsoring Defined Benefit Plans. *The Accounting Review*, Vol. 59. No. 2. április, 177–198. o.
- DHALIWAL, D. S. [1986]: Measurement of Financial Leverage in the Presence of Unfunded Pension Obligations. *The Accounting Review*, Vol. 61. No. 4. október, 651–661. o.
- FELDSTEIN, M.–MORCK, R. [1983]: Pension Funds and the Value of Equities. *Financial Analysts Journal*, Vol. 39. No. 5. szeptember–október, 29–39. o.
- FELDSTEIN, M.–SELIGMAN, F. [1981]: Pension Funding, Share Prices, and National Savings. *Journal of Finance*, Vol. 36. No. 4. szeptember, 801–824. o.
- HOLLAND, R. G.–SUTTON, N. A. [1988]: The Liability Nature of Unfunded Pension Obligation Since ERISA. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 55. No. 1. március, 32–58. o.
- JIN, L.–MERTON, R. C.–BODIE, Z. [2004]: Do a Firm's Equity Returns Reflect the Risk of Its Pension Plan? National Bureau of Economic Research (NBER) Working Paper, No. W10650.
- LANDSMAN, W. [1986]: An Empirical Investigation of Pension Fund Property Rights. *The Accounting Review*, Vol. 61. No. 4. október, 662–691. o.
- MÓRICZ DÁNIEL [2004]: Vállalati szolgáltatási nyugdíjprogramok optimális befektetési politikája és fedezettségi szintje az Egyesült Államokban. *Közgazdasági Szemle*, 12. sz. 1113–1131. o.
- MUNNELL, A. H.–SOTO, M. [2003]: The Outlook for Pension Contributions and Profits in the U.S. Center for Retirement Research (CRR) at Boston College Working Paper, No. 2003–13 június
- OLDFIELD, G. [1977]: Financial Aspects of the Private Pension System. *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 9. No. 1. február, 48–55. o.
- SHARPE, W. F. [1964]: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, Vol. 19. No. 3. szeptember, 424–442. o.

Függelék

A (3a) és (3b) egyenlet levezetése. A nyugdíjprogramot működtető vállalat részvényhozamájának szórása a következő lesz:

$$(\sigma'_E)^2 = \text{Var}(\tilde{r}'_E) = \text{Var}[\tilde{r}_E + w(\tilde{r}_m - r_f)] = \sigma_E^2 + 2w\text{Cov}[\tilde{r}_E, (\tilde{r}_m - r_f)] + w^2\text{Var}(\tilde{r}_m - r_f).$$

Felhasználva a kovariancia tulajdonágait, és ismervén, hogy a CAPM alapján $\text{Cov}(\tilde{r}_E, \tilde{r}_m) = \beta_E \sigma_m^2$ és $\text{Var}(\tilde{r}_E) = (\beta_E \sigma_m)^2 + \sigma_e^2$ – ahol σ_e^2 a vállalat részvényeinek egyedi, diverzifikálható, piacitól független kockázatát jelöli –, valamint hogy $\text{Var}(\tilde{r}_m - r_f) = \sigma_m^2$, kapjuk, hogy

$$(\sigma'_E)^2 = \beta_E^2 \sigma_m^2 + \sigma_e^2 + 2w\beta_E \sigma_m^2 + w^2 \sigma_m^2.$$

Ebből egyszerűsítéssel megkapható a (3a), illetve (3b) összefüggés.

A (4) egyenlet levezetése. A nyugdíjprogramot működtető vállalat részvényeinek szisztematikus kockázatát tükröző béta a következő lesz:

$$\beta'_E = \text{Cov}(\tilde{r}'_E, \tilde{r}_m) / \sigma_m^2 = \text{Cov}[\tilde{r}_E + w(\tilde{r}_m - r_f), \tilde{r}_m] / \sigma_m^2.$$

A kovariancia tulajdonságai alapján ebből kapjuk, hogy

$$\beta'_E = [\text{Cov}(\tilde{r}_E, \tilde{r}_m) + w\text{Cov}(\tilde{r}_m - r_f, \tilde{r}_m)] / \sigma_m^2.$$

Felhasználva a CAPM alapján, hogy $\text{Cov}(\tilde{r}_E, \tilde{r}_m) = \beta_E \sigma_m^2$, adódik a $\beta'_E = (\beta_E \sigma_m^2 + w \sigma_m^2) / \sigma_m^2$ összefüggés, amiből egyszerűsítéssel megkapható (4).

A (6a) és (6b) egyenlet levezetése. Behelyettesítés után kapjuk, hogy $\tilde{r}'_1 = \tilde{r}_1 + w_1[\tilde{r}_2 + w_2(\tilde{r}'_1 - r_f) - r_f]$, amiből ki lehet fejezni \tilde{r}'_1 -t:

$$\tilde{r}'_1 - w_1 w_2 \tilde{r}'_1 = \tilde{r}_1 + w_1(\tilde{r}_2 - w_2 r_f - r_f).$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztva $(1 - w_1 w_2)$ -vel, a várható hozamokra adódik (6a) és ennek analógiájára (6b) összefüggés.

A (7) egyenlet levezetése. Mivel csak két, egyenlő súlyú kockázatos eszköz létezik, ezért a piaci portfólió várható hozama a nyugdíjprogramok létrehozása és a keresztbevásárlás után – felhasználva a módosult várható hozamokra kapott összefüggéseket – a következő lesz:

$$\bar{r}'_m = \frac{1}{2}(\bar{r}'_1 + \bar{r}'_2) + \frac{1}{2} \left[\bar{r}_1 + \frac{w^2(\bar{r}_1 - r_f) + w(\bar{r}_2 - r_f)}{1 - w^2} + \bar{r}_2 + \frac{w^2(\bar{r}_2 - r_f) + w(\bar{r}_1 - r_f)}{1 - w^2} \right].$$

Átrendezve az egyenlet jobb oldalát, ki lehet fejezni az eredeti piaci várható hozamot:

$$\bar{r}'_m = \frac{1}{2}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) + \frac{1}{2} \left[\frac{w^2(\bar{r}_1 - r_f) + w(\bar{r}_2 - r_f) + w^2(\bar{r}_2 - r_f) + w(\bar{r}_1 - r_f)}{1 - w^2} \right].$$

Mivel $1/2(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \bar{r}_m$, a képlet tovább egyszerűsíthető.

$$\begin{aligned} \bar{r}'_m &= \bar{r}_m + \frac{1}{2} \left[\frac{w^2(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) + w(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) - 2w \cdot r_f - 2w^2 r_f}{1 - w^2} \right] = \\ &= \bar{r}_m + \frac{w^2 \bar{r}_m + w \cdot \bar{r}_m - w \cdot r_f - w^2 r_f}{1 - w^2} = \bar{r}_m + \frac{(w^2 + w) \cdot (\bar{r}_m - r_f)}{1 - w^2}. \end{aligned}$$

Az egyenletben szereplő tört nevezőjét és számlálóját is $(1 + w)$ -vel elosztva megkapható (7).

A (8a) és (8b) egyenlet levezetése. A módosult variancia képletéhez először (6a)-t kell a $w_1 = w_2 = w$ esetre egyszerűsíteni:

$$\begin{aligned} \bar{r}'_1 &= \bar{r}_1 + \frac{w^2(\bar{r}_1 - r_f) + w(\bar{r}_2 - r_f)}{1 - w^2} = \frac{\bar{r}_1(1 - w^2) + w^2 \bar{r}_1 - w^2 r_f + w \cdot \bar{r}_2 - w \cdot r_f}{1 - w^2} = \\ &= \frac{\bar{r}_1 + w \cdot \bar{r}_2 - w(w + 1)r_f}{1 - w^2}, \end{aligned}$$

$$\bar{r}'_1 = \frac{\bar{r}_1 + w \cdot \bar{r}_2}{1 - w^2} - \frac{w}{1 - w} r_f. \quad (F1)$$

A $\text{Var}(x + y) = \text{Var}(x) + 2\text{Cov}(x, y) + \text{Var}(y)$ összefüggést és a kovariancia tulajdonságait felhasználva

$$\begin{aligned}\text{Var}(\tilde{r}'_1) &= \text{Var}\left(\frac{\tilde{r}_1 + w \cdot \tilde{r}_2}{1 - w^2} - \frac{w}{1 - w} r_f\right) = \frac{1}{1 - w^2} \text{Var}(\tilde{r}_1 + w \cdot \tilde{r}_2) = \\ &= \frac{1}{1 - w^2} [\text{Var}(\tilde{r}_1) + 2w \cdot \text{Cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) + w^2 \cdot \text{Var}(\tilde{r}_2)].\end{aligned}$$

A $\text{Var}(\tilde{r})$ helyett a σ^2 jelölést, valamint a $\text{Cov}(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) = \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2$ összefüggést alkalmazva, és felhasználva, hogy $\frac{1}{1 - w^2} \text{Var}(\tilde{r}_1) = \text{Var}(\tilde{r}_1) + \frac{w^2}{1 - w^2} \text{Var}(\tilde{r}_1)$, adódik (8a) és (8b) képlet.

A (9) egyenlet levezetése. A (7) képlet átalakításával:

$$\bar{r}'_m = \bar{r}_m + \frac{w}{1 - w} (\bar{r}_m - r_f) = \frac{1 - w}{1 - w} \bar{r}_m + \frac{w}{1 - w} (\bar{r}_m - r_f) = \frac{1}{1 - w} \bar{r}_m - \frac{w}{1 - w} r_f. \quad (F2)$$

Ennek alapján a módosult várható hozamú piaci portfólió varianciája

$$\text{Var}(\tilde{r}'_m) = \text{Var}\left(\frac{1}{1 - w} \tilde{r}_m - \frac{w}{1 - w} r_f\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{1 - w} \tilde{r}_m\right).$$

Ebből adódik a (9).

A (10a) és (10b) egyenlet levezetése. A megváltozott béta értéke a CAPM alapján a következő: $\beta'_1 = \text{Cov}(\tilde{r}'_1, \tilde{r}'_m) / \sigma_m^2$. A kovarianciában található \tilde{r}'_1 és \tilde{r}'_m helyére be lehet írni a (8)–(9) egyenletek levezetése során kapott (F1) és (F2) összefüggéseket, míg σ'_m helyére (9)-et. Ekkor

$$\beta'_1 = \text{Cov}\left(\frac{\tilde{r}_1 + w \cdot \tilde{r}_2}{1 - w^2} - \frac{w}{1 - w} r_f, \frac{1}{1 - w} \tilde{r}_m - \frac{w}{1 - w} r_f\right) \left/ \left(\frac{1}{(1 - w)^2} \sigma_m^2\right)\right.$$

Felhasználva a kovariancia tulajdonságait, kapjuk, hogy

$$\beta'_1 = \frac{1}{(1 - w)(1 + w)(1 - w)} \text{Cov}(\tilde{r}_1 + w \cdot \tilde{r}_2, \tilde{r}_m) \frac{(1 - w)^2}{\sigma_m^2} = \frac{1}{(1 + w)} \frac{\text{Cov}(\tilde{r}_1 + w \cdot \tilde{r}_2, \tilde{r}_m)}{\sigma_m^2}.$$

Az egyenlőségben szereplő kovarianciás tag tovább bontható:

$$\text{Cov}(\tilde{r}_1 + w \cdot \tilde{r}_2, \tilde{r}_m) = \text{Cov}(\tilde{r}_1 + w \cdot \tilde{r}_2 - \tilde{r}_2 + \tilde{r}_2, \tilde{r}_m) = \text{Cov}(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2, \tilde{r}_m) + \text{Cov}(w \cdot \tilde{r}_2 - \tilde{r}_2, \tilde{r}_m).$$

A jobb oldalon szereplő két összetevő másképp is felírható:

$$\text{Cov}(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2, \tilde{r}_m) = 2 \cdot \text{Cov}[1/2 \cdot (\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2), \tilde{r}_m] = 2 \cdot \text{Cov}(\tilde{r}_m, \tilde{r}_m) = 2 \cdot \sigma_m^2,$$

$$\text{Cov}(w \cdot \tilde{r}_2 - \tilde{r}_2, \tilde{r}_m) = (w - 1) \cdot \text{Cov}(\tilde{r}_2, \tilde{r}_m) = (w - 1) \cdot \beta_2 \cdot \sigma_m^2.$$

Az eredményeket visszaírva a megváltozott béta képletébe, azt kapjuk, hogy:

$$\beta'_1 = \frac{1}{(1+w)} \frac{\text{Cov}(\tilde{r}_1 + w \cdot \tilde{r}_2, \tilde{r}_m)}{\sigma_m^2} = \frac{1}{(1+w)} \frac{2 \cdot \sigma_m^2 + (w-1) \cdot \beta_2 \cdot \sigma_m^2}{\sigma_m^2} = \frac{2 + (w-1) \cdot \beta_2}{(1+w)}.$$

Miután a piaci portfólió mindössze két kockázatos eszközből áll, ezért az egyik részvény bétája kifejezhető a másik szisztematikus kockázatának függvényeként: $\beta_2 = 2 - \beta_1$. Ezt az összefüggést felhasználhatjuk, így

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= \frac{2 + (w-1) \cdot \beta_2}{(1+w)} = \frac{2 + (w-1) \cdot (2 - \beta_1)}{(1+w)} = \frac{2 + 2w - 2 - w\beta_1 + \beta_1}{(1+w)} = \\ &= \frac{\beta_1 + w\beta_1 - 2w\beta_1 + 2w}{(1+w)} = \frac{\beta_1(1+w) + 2w(1 - \beta_1)}{(1+w)}. \end{aligned}$$

Egyszerűsítéssel megkapjuk (10a), valamint – ennek mintájára – (10b) képleteket.