Medvegyev Péter
kandidátus, a Corvinus Egyetem egyetemi tanára
E-mail: peter.medvegyev@uni-corvinus.hu

A brexit-szavazás és a nagy számok törvénye

A 2016. év, de vélhetően az egész évtized legfontosabb politikai eseménye a brexit-népszavazás volt. A népszavazás már önmagában is egy rendkívüli esemény: a világ már régóta beszél kaszinókapitalizmusról, de úgy tűnik most már megszületett a kaszinókormányzás műfaja is. Van abban valami félelmetes, ahogy egy büszke évszázados politikai kultúra, amely mintája volt a világ jelentős részének, feldob egy érmét, és jövőjét nem az értelemre alapozza, nem a bölcs politikai megfontolástól teszi függővé, hanem attól, hogy a feldobott érem melyik oldalára esik. A brexit-népszavazás tanulságai kimeríthetetlenek. Ebben a rövid dolgozatban csak egyetlen és talán nem is a legfontosabb aspektussal szeretnék foglalkozni: a népszavazást megelőző közvélemény-kutatásokkal.

Tulajdonképpen már nagyon régóta figyelem a különböző választásokat megelőző közvélemény-kutatásokat, és az elmúlt évtizedek alatt egyre nehezebben tudtam szabadulni attól a benyomásomtól, hogy ezek a felmérések, ha nem is mindig, de többnyire tévednek. A modern társadalmak egyik legfontosabb jellemzője a nagyfokú bonyolultság. Az események rendkívül szerteágazók és áttekinthetetlenek. A különböző döntéshozóknak ahhoz, hogy megalapozott döntéseket tudjanak hozni, információkra van szükségük, és a társadalmakkal kapcsolatos információk jelentős részét a közvélemény-kutatások szolgáltatják. Éppen ezért a közvélemény-kutatás kiterjedt és igen jövedelmező üzletág. Hogy lehet az, hogy a vélemények felmérésének ezen formája ennyire rosszul teljesít? A válasz szerintem nagyon egyszerű, de nem lennék meglepve, ha véleményemmel egyedül maradnék. Szerintem az iparág helytelen alapokra épül, pontosabban a minták, amikkel dolgozik, rendkívül kicsik.

Kiindulásképpen térjünk vissza az alapokhoz, a nagy számok törvényéhez. Miként ismert, kétféle nagy számok törvénye van, az erős és a gyenge. Az erős törvény azt állítja, hogy a relatív gyakoriság a valószínűséghez tart. A gyenge törvény jelentőségét az adja, hogy lehetőséget ad a konvergencia sebességének becslésére. Legyen adva valamilyen A esemény, amely valószínűsége legyen p. Végezzünk el n kísérletet, és tegyük fel, hogy ebből az A esemény r_n-szer következett be. Vagyis r_n/n legyen az A esemény valószínűségéhez tartozó relatív gyakoriság. A törvény szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ esetén van olyan N küszöb, hogy ha $n \geq N$, akkor $\mathbf{P}\left(\left|r_n/n - p\right| \geq \varepsilon\right) < \delta$. Az állítás igazolása lényegében triviális, ami azonban távolról sem triviális az a konvergencia sebessége. A sebességgel kapcsolatos legfontosabb kérdés, hogy adott ε és δ esetén milyen nagy az N ? A brexit kapcsán a várt p nagyon közel volt az 50 százalékhoz, így ahhoz, hogy hasznos és pontos becslést tudjunk adni, az ε értékét nagyon kicsire kell venni, ugyanis pont az a kérdés, hogy most $p = 0,49$ vagy $p = 0,51$. A továbbiakban tehát $\varepsilon = 0,01$-gyel fogunk számolni. Ugyanakkor a dolog rendkívüli fontossága miatt a δ értékét is kicsinek kell venni. Nemcsak nagyon pontosan, hanem nagyon biztosan is szeretnénk tudni a végeredményt. Az egyszerűség kedvéért ezért a δ szintén legyen 1 százalék. A nagy számok törvényére ismert egyik legjobb becslést a Bernstein-egyenlőtlenség szolgáltatja.[1]

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{r_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2pq}\right) \leq 2\exp\left(-2n\varepsilon^2\right)$$

Ha most ez alapján kiszámoljuk az $\varepsilon = \delta = 0,01$ értékekhez tartozó küszöbszámot, akkor

$$N = \ln(200) \big/ \left(2 \cdot 10^{-4}\right) = 26\ 492$$

értéket kapunk. Egy másik közismert megfontolás a centrális határeloszlás tételére épül.

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{r_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{r_n - np}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{r_n - np}{\sqrt{npq}}\right| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right) \approx$$

$$\approx \mathbf{P}\left(\left|N(0,1)\right| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|N(0,1)\right| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1/4}}\varepsilon\right) =$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(2\sqrt{n}\varepsilon\right)\right) = \delta$$

Ha $\varepsilon = \delta = 0,01$, akkor

$$\Phi\left(2\sqrt{n}\varepsilon\right) = 1 - \frac{\delta}{2} = 0,995, \text{ amiből } 2\sqrt{n}\varepsilon = 2,5758.$$

[1] SHIRYAEV, A. N. [1996]: *Probability*. Springer. New York. 69. oldal.

Tehát

$$n \geq \left(\frac{2,5758}{2 \cdot 0,01}\right)^2 = 16\,587,$$

amely jóval kevesebb mint a Bernstein-féle becslés, de még mindig körülbelül 16 000-es nagyságrendű mintával kell számolni. Érdemes hangsúlyozni, hogy bár jelentős matematikai irodalma van a Berstein-típusú becsléseknek, szerepük az alkalmazásokban elhanyagolható. Ennek oka éppen az imént látott példában ragadható meg. A centrális határeloszlás tétele egyrészt sokkal egyszerűbb, másrészt sokkal pontosabb becslést szolgáltat.

A Financial Times összegyűjtötte a népszavazással kapcsolatos közvélemény-kutatásokat.[2] Ezek közül egyetlen egy volt, amelyben húszezer embert kérdeztek meg, és a közvélemény-kutatás 2014. január 20-án történt. Ekkor 41 százalék gondolta, hogy ki kell lépni, és ugyanennyi, hogy maradni kell. Egy másik 2015. december 5-én végzett mintavételben 10 015 személyt kérdeztek meg, itt 42 százalék gondolta, hogy ki kell lépni, és 40 százalék, hogy maradni kell. Az utolsó 2016. június 22-én tartott közvélemény-kutatás során 4 700 személyt kérdeztek meg és 55 százalék mondta, hogy maradni akar, 45 százalék gondolta azt, hogy ki kell lépni. Ha $\delta = 1$ százalék akkor a

$$2,5758 = 2\sqrt{n}\varepsilon$$

szabály alapján

$$\varepsilon = \frac{2,5758}{2\sqrt{n}} = \frac{2,5758}{2\sqrt{4\;700}} = 1,8786 \times 10^{-2} \approx 2\%\,.$$

Tehát az 55 százalékhoz képest a lehetséges hiba 2 százalék alatt lesz, vagyis a mintát tekintve esetleg gondolhatták, hogy a brexit-szavazás eredménye alapján Nagy-Britannia nem fog kilépni az EU-ból. Ironikus, de érdemes megjegyezni, hogy a végeredmény 51,89 százalék volt, ami a $p = 50$ százalékhoz képest valóban 2 százalékon belül maradt, csak éppen a másik oldalon. Ez a közvélemény-kutatás széles körben ismerté vált, és igen megnyugtatóan hatott. Elképzelhető, hogy mivel a közvélemény-kutatás a bennmaradás szavazatok nagy fölényét mutatta, jelentős mértékben befolyásolta a szavazás végeredményét, ugyanis nagyban hozzá járult a szavazók utólag kimutatható felületességéhez, meggondolatlanságához. Sokan gondolták, hogy a szavazásnak valójában nincs tétje, és így a tényleges tartalomtól függet-

[2] https://ig.ft.com/sites/brexit-polling/ Június 22-én négy közvélemény-kutatás volt, abból kettő eltalálta a végeredményt, kettő nem! A dolgozatban a két hibás eredményt kapó közvélemény-kutatást elemzem.

lenül általános elégedetlenségüknek adtak hangot. Ez a közvélemény-kutatások egy másik tulajdonságára mutat rá, amely szerint ezek célja nem is a tényleges helyzet feltárása, hanem a közvélemény manipulálása. Ez egy fontos kérdés, de ezzel ebben a dolgozatban nem foglalkozom. Bárhogyan is volt, egy olyan közvélemény-kutatás született, amelyben, legalábbis véleményem szerint, a minta elemszáma túl kicsi volt. Mivel a gazdasági szereplők igen tartottak a kilépéstől, egy problémás közvélemény-kutatásra építették a várakozásokat és számításaikat. Persze másképpen is gondolkodhatunk. Mivel a p nagyságát nagyon jól el akarjuk találni, ezért az $\varepsilon = 0,01$ értéket tartani kell. Ilyenkor a tévedés valószínűsége

$$\delta = 2\left(1 - \Phi\left(2\varepsilon\sqrt{n}\right)\right) = 2\left(1 - \Phi\left(2 \cdot 10^{-2}\sqrt{4\ 700}\right)\right) = 0{,}1703,$$

ami túlságosan nagy, valamivel nagyobb annál, hogy egy kockával hatost dobunk. Ugyanakkor a ténylegesen bekövetkezett eredmény valószínűsége rendkívül csekély volt. Ami arra utal, hogy a minta nagyságának helytelen meghatározásán túl egyéb hibák is történtek.

Ugyanezen a napon egy másik közvélemény-kutató 1 032 embert kérdezett meg. Ők 48 maradást, 42 kilépést és 11 százalék bizonytalan szavazót mértek. Az ő esetükben a pontosság $\delta = 0,01$ esetén

$$\varepsilon = \frac{2,5758}{2\sqrt{n}} = \frac{2,5758}{2\sqrt{1\ 032}} = 4,0091 \cdot 10^{-2} \approx 4\%$$

hibahatárt jelent. Ha most a 11 százalék fele-fele arányban oszlik meg, akkor 53,5 százalék a bennmaradás valószínűsége, de a 4 százalékos pontosság miatt előfordulhat $\delta = 0,01$ mellett is a kilépés. Itt a tévedés valószínűsége $\varepsilon = 0,01$ esetén $\delta = 0,52$ százalék volt. Vagyis a közvélemény-kutatás által közvetített pozitív üzenet valójában megalapozatlan volt. 50-50 százalék, hogy a valós érték a közölttől kevesebb mint 1 százalékkal tér el.[3]

Természetesen tisztában vagyok azzal, hogy a nagy számok törvényének közvetlen alkalmazása nem helyes. A világ mindig jóval bonyolultabb, mint a tankönyv, és

[3] Ezek a becslések a centrális határeloszlás tételére épülnek. Elképzelhető, hogy a határeloszlás-tételben a konvergencia sebességét talán túlértékeltük. Próbáljuk meg a Bersntein-becslést alkalmazni. Mivel a p nagyon közel van az $1/2$ értékhez az $\varepsilon = 0{,}01$ indokolt. Ha $n = 4\ 700$, akkor a hibás becslés valószínűsége $\alpha = 2\exp\left(-2 \cdot 4\ 700 \cdot (0{,}01)^2\right) = 0{,}78126$, ami elképesztően nagy. Ha $n = 1\ 000$, akkor $\alpha = 1{,}6375$, ami alapján csak azt tudjuk megállapítani, hogy valószínűségről van szó. A példából is látható, hogy a Berstein-egyenlőtlenség használhatatlan, és nem véletlen, hogy a mintaelemek nagyságának meghatározásakor az ilyen típusú becslések az irodalomban említés nélkül maradnak.

ezért egy egyszerű tankönyvi példát nem lehet az eredményekre ráhúzni. Bár a tankönyvi példák egyfajta józanészként, mindig hasznos információt adnak. Ha valami nagyon nem illeszkedik a józanész keretei közé, ott valami nagy csoda kell, hogy legyen, és bár csodák vannak, azért ritkán találkozunk velük. Valójában a fenti megfontolások mögötti matematikai feltételek egyike sem teljesült. A mintában szereplő elemek eloszlása nem volt azonos. Közismert, hogy a szavazás eredménye függött az életkortól, a képzettségtől, a lakhelytől és számos egyéb dologtól. Világos, hogy a mintaelemek egymástól is függtek, hiszen valószínűleg a közvetlen kérdezés esetén egyszerűbb egy nagyvárosban válaszolni hajlandó egyedet találni, mint vidéken, és elképzelhető, hogy bizonyos társadalmi csoportokban jelentős a választ nem adók vagy a szándékosan rossz választ adók aránya. Vagyis a modellkockázat jelentős, és ezért a szükséges $\varepsilon = 0,01$ elvárás tarthatatlan, ugyanis a N növelése éppen a nagy modellkockázat miatt egy ponton túl már értelmetlen. Itt érdemes megjegyezni, hogy a mintavételes irodalomban más terminológiát használnak.[4] A statisztika ugyanis nem tud mit kezdeni a valószínűségi változó fogalmával, amely egy igen kényelmes, de megfigyelhetetlen matematikai absztrakció. A mintavételi irodalom szerint a választók nem egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hanem egy fix halmazból vett minta elemei. A minta kiválasztásakor minden egyed egyenlő eséllyel kerül megkérdezésre, és ez biztosítja a valószínűség-számítás szabályainak, így például a centrális határeloszlás tételének alkalmazhatóságát. A valószínűség-számítás nyelvén a valószínűségi változók egymástól függetlenek és azonos eloszlásúak, a mintavételi irodalom nyelvén az egyes mintáknak kell azonos valószínűségűnek lenni. Az itt említett problémák a valószínűség-számítás terminológiájában azt jelentik, hogy nem teljesülnek a tétel feltételei, a mintavételi irodalom meg azt mondja, hogy amennyiben a mintavételt szabályosan és korrekt módon hajtották végre, akkor a tétel feltételei mindig használhatók, annak ellenére, hogy a problémák fennálltak vagy sem. Vagyis, ha véletlenszerűen választjuk a megkérdezett elemeket, akkor a valószínűség-számítás szabályai, így a centrális határeloszlás tétele alkalmazható, és az említett nehézségeket a mintavételi eljárás nehézségeként, hibájaként interpretálják.[5]

Akárhogyan is nézzük, a közvélemény-kutató cégek nagyot tévedtek, és véleményem szerint a tévedések egyik oka, hogy egy elemi megfontolást nem vettek figyelembe, valamint a minta nagyságát túl alacsonynak vették. Minden közvélemény-kutató bizonyos költségkeretek között mozog, és vélhetőleg tisztában van a módszer-

[4] COCHRAN, W. G. [1977]: *Sampling Techniques.* Third edition. Wiley & Sons. Hoboken. Talán nem érdektelen megjegyezni, hogy a könyv első példájában, mindjárt az első oldalon 105 000 személyből álló mintára hivatkozik. A könyv második példájában a szerző az 1940-es egyesült államokbeli népszámlálást említi, ahol bizonyos kérdésekben csak a lakosság 5 százalékát kérdezték meg. 1940-ben az Egyesült Államok lakossága körülbelül 130 millió volt. Ez 6,5 millió ember megkérdezését jelenti. Ehhez képest mit is jelent 4 700 ember megkérdezése az évtized politikai döntése előtt?

[5] A terminológia szerzőnként változik. Vö.: BOBROV, A. A. [1999]: *Matematikai statisztika.* Typotex Kiadó. Budapest.

tanának hiányosságával. Ennek ellenére eredményeit a részletekben tájékozatlan közvéleménnyel a tudomány és a matematika magas szintjéről egyfajta tényként közli. Miközben ez nem igaz. Erre talán a legszebb iskolapéldát a brexit szolgáltatta. A közvélemény-kutatóknak módszertanukat és kommunikációjukat jelentősen át kell vizsgálni. Az átvizsgálás eredményeként az elemszámot, legalábbis véleményem szerint, a brexit-hez hasonló kiélezett helyzetekben jelentős mértékben célszerű lesz növelni. Persze ezzel a költségek is meg fognak nőni. A magasabb költségek esetén a megrendelők száma csökkenni fog, és elképzelhető, hogy így az iparág kisebb bevételhez fog jutni. Ám, hogy végül még egy közismert szabályt megosszak az olvasóval: Olcsó húsnak sajnos híg a leve.