Indefinit korrelációs mátrixok korrekciós módszerei

Szüle Borbála

PhD, a Budapesti Corvinus Egyetem oktatója

E-mail: borbala.szule@uni-corvinus.hu

Korrelációs mátrixok többször is szerepelnek a gyakorlati számítások adatai között. Előfordulhat azonban, hogy például bizonyos kockázatoknak való kitettségek mérésekor a számítások eredményeként kapott korrelációs mátrix (ami gyakran további számítások kiinduló adata) az elméletileg helyestől eltérően nem pozitív szemidefinit, vagyis van negatív sajátértéke. A pénzügyi alkalmazások során ez a jelenség számottevő gondot okozhat, és kialakulását nem mindig lehet automatikusan kizárni, így érdemes a probléma kezelési lehetőségeivel foglalkozni: a korrelációs mátrixok esetében ez többféle módon lehetséges, akár elemeik bizonyos megfontolások szerinti módosításával is. A következőkben néhány kezelési lehetőség jellemzőit tekintjük át.

TÁRGYSZÓ:
Korrelációs mátrix.
Spektrálfelbontás.
Gömbi koordinátarendszeres felbontás.

A közönséges (Pearson-féle) lineáris korrelációs együtthatókat tartalmazó korrelációs mátrix elméletileg pozitív szemidefinit mátrix, amelynek sajátértékei nemnegatív értékek. E jellegzetesség sokféle elemzési módszer elméleti megalapozásához járul hozzá, e nélkül például a főkomponens-elemzésben sem lehetne a korrelációs mátrix sajátértékeit a komponensek varianciáiként értelmezni. A pénzügyi számításokban (például bizonyos módon korrelált változók szimulált értékeinek előállításánál) gyakran alkalmazzák a korrelációs mátrix Cholesky-felbontását, ami szintén nehézségekbe ütközhet negatív sajátértékeknél.

Egyértelmű tehát, hogy indefinit korrelációs mátrix jellemzően alkalmatlan a gyakorlati számításokban való szerepeltetésre. Létrejötte azonban nem automatikusan kizárt: elegendő lehet hozzá annyi, hogy a korrelációs mátrix elemeinek számolásához alkalmazott adatbázisból bizonyos adatok hiányoznak. Pénzügyi elemzésekben gyakran számolnak korrelációs együtthatókat hozamadatok esetében (például a pénzügyi elméletben a CAPM (capital asset pricing model – tőkepiaci árfolyamok modellje) felépítésében is nagy szerepe van a korrelációszámításnak), a hozamadatoknál pedig különböző kereskedési időszakokban jelentkezhetnek adathiányok. Ilyen helyzetben olykor kedvezőbb megoldásnak tűnik, ha a számítások során, a lehető legtöbb adat alkalmazása helyett a hiányzó adatoktól teljesen mentes adattáblából indulunk ki, ám ez indefinit korrelációs mátrix kialakulásához vezethet. A gyakorlati tapasztalatok azt mutatják (erre utal például *Jäckel* [2002] is), hogy a pénzügyi számításoknál nem elhanyagolható probléma az indefinit korrelációs mátrix előfordulásának lehetősége.

Ennek kiküszöbölésére több megoldás is adódik, azonban a lehetőségek között nincs olyan egyetlenként kiemelhető módszer, ami minden körülmények között jobb lenne a többi lehetséges eljárásnál. A megoldási lehetőségek alapja gyakran a korrelációs mátrix sajátérték-sajátvektor felbontásának eredményeképpen kapott sajátértékek elemzése, valamint ezek alapján az eredeti problémás (indefinit) korrelációs mátrix elemeinek változtatása olyan módon, hogy ezt követően a korrelációs mátrix sajátértékei már nemnegatív értékek legyenek. Ezeket a korrekciós módszereket természetesen akkor érdemes alkalmazni, ha valamilyen okból nincs lehetőség az elemzésben teljes körű, adathiányoktól mentes adatbázis létrehozására, vagyis megfelelő, pozitív szemidefinit korrelációs mátrix számolására (vagy ez esetleg nem megfelelő megoldás lenne, például mert túlságosan kevés adat maradna így az adatbázisban).

A tanulmányban néhány korrekciós módszer főbb jellemzőit tekintjük át. A korrekciós módszerek közötti választás a gyakorlatban nem mindig egyszerű feladat, mert a leginkább megfelelő eljárás megtalálásához a problémás korrelációs mátrix kialakításához alkalmazott adatok jellemzőit és a számolni tervezett eredmények sajátosságait is érdemes figyelembe venni. A korrekciós módszerek között vannak hasonló elveken alapulók, de jelentős különbségekkel rendelkezők is. Jelen tanulmány fő célja, hogy az indefinit korrelációs mátrix létrejöttének hátterében álló tényezők bemutatásán túl, a probléma főbb megoldási lehetőségeit összehasonlítva mutassa be. A jobb áttekinthetőség érdekében egy kisebb, három változót tartalmazó példán szemléltetjük a megoldás levezetését. Néhány szimulációs elemzés eredményeit is áttekintjük, az indefinit korrelációs mátrix probléma eredetét kutatva, és néhány korrekciós módszer korrelációs együtthatók értékeire gyakorolt hatásait hasonlítjuk össze egyenletek alapján és grafikusan is. A bemutatott eredmények alapján lehetőség nyílik a nagyobb méretű korrelációs mátrixok korrekciója során alkalmazandó módszer kiválasztásával kapcsolatos főbb megfontolások áttekintésére is.

1. A korrelációs együtthatók lehetséges értékei

A korrelációs mátrix elméletileg szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, amelynek tehát sajátértékei nemnegatívak. Ez a tulajdonsága sokféle elemzésben kap kiemelt szerepet. A sajátértékek és sajátvektorok definíciója alapján R korrelációs mátrix például az egységnyi hosszúságú sajátvektorait tartalmazó V mátrix és a főátlóban a megfelelő sajátértékeket tartalmazó Λ mátrix szerint is felírható (*Kovács* [2011] 93. old.):

$$R = V \cdot \Lambda \cdot V^T . \qquad /1/$$

A sajátértékek nemnegativitása azért is fontos, mivel azok a főkomponenselemzésnél a sajátvektoroknak megfeleltethető komponensek varianciáiként értelmezhetők (ahogyan erre például *Hajdu* [2010] is utal), amelyek szórásnégyzetként nyilvánvalóan nem lehetnek negatív számok. A pénzügyi területen gyakran nagyméretű korrelációs mátrixok fordulnak elő a számításokban, amelynek elemeit (a korrelációs együtthatókat) nem feltétlenül egységes adatbázisból számolják (amelyben minden változónak minden megfigyelés esetében van értéke), így előfordulhat, hogy korrekció nélkül a további (például kockáztatott érték (value-at-risk – VaR) kalkulációhoz) kiszámolt korrelációs mátrix sajátértékei között negatív érték is van. A korrelációs mátrix korrekciója tehát néha elkerülhetetlen a pénzügyi számítások során. *Jäckel* ([2002] 59. old.) e probléma megjelenésének gyakori példájaként említi bizonyos származtatott pénzügyi termékek esetében a korrelációnak való kitettség vagy például a portfólió kockázatának értékelését kísérő számításokat. Ilyen helyzetekben nemcsak az esetleges adathiány okozhat korrekciót igénylő problémát, hanem az is, hogy néha a számolásokban nemcsak egyetlen, hanem több, bizonyos szempontból módosított mátrix is szerepel. *Jäckel* ([2002] 64. old.) a probléma felmerülésére példaként említi azt a helyzetet, amikor valamely elemzésben a VaR érték korrelációs paraméterektől való függésének értékelése történik. Ebben az esetben még egy eredetileg pozitív szemidefinit korrelációs mátrix valamely elemének – e hatás vizsgálata érdekében történő – megváltoztatása is eredményezhet indefinit korrelációs mátrixot (mivel a pénzügyi alkalmazások során jellemzően érdemes többféle paraméterérték feltevésével is elvégezni a számításokat). Ilyen helyzetben nem lehetséges pontosabb adatgyűjtéssel, esetleges adathiányok megszüntetésével kiküszöbölni a negatív sajátértékeket, hanem valamilyen korrekciós módszerre van szükség a korrelációs mátrix esetében. Az adathiányos helyzet egyébként néha nem küszöbölhető ki (például mert a pénzügyi piacokon való kereskedési adatok nem pontosan ugyanolyan időpontokban hiányoznak bizonyos adatsoroknál), ami szintén hozzájárulhat az indefinit korrelációs mátrix problémájának kialakulásához.

A korrekció megfelelő módszerének kiválasztását elősegítheti a sajátértékek és a korrelációs együtthatók közötti kapcsolatok ismerete. Nagyméretű korrelációs mátrixoknál ezek az összefüggések meglehetősen bonyolultak, a kapcsolatuk lényege úgy is megfogalmazható, hogy a sajátértékekre érvényes korlátozások (például, hogy nem lehetnek negatív értékű sajátértékek) a korrelációs együtthatók értékére vonatkozó korlátozást is jelentenek. Ezeket az összefüggéseket a következőkben egy kisebb méretű, három változót tartalmazó példán tekintjük át.

Három változó esetében, három korrelációs együttható értéke alapján állapítható meg, hogy a korrelációs mátrix sajátértékei között van-e negatív érték. A korrelációs mátrix a definíció szerint szimmetrikus (a főátlóban természetesen egységnyi értékek vannak), így például, ha adott r_1 és r_2 korrelációs együttható értéke, akkor kiszámítható r_3 korrelációs együttható azon értékeinek halmaza, amelynél a korrelációs mátrix nem indefinit.[1] Tekintsük tehát a következőkben az ezekkel a jelölésekkel rendelkező korrelációs együtthatókat tartalmazó mátrixot:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_3 \\ r_2 & r_3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /2/$$

A korrelációs mátrix λ_i $(i = 1,2,3)$ sajátértékeit az $R - \lambda \cdot E$ mátrix determinánsa alapján lehet meghatározni (azt nullával egyenlővé téve, miközben E az egység-

[1] A korrelációs mátrix elemeinek leírásánál általában sor- és oszlopindexet is alkalmaznak, mivel ebben a példában csak három különböző érték szerepel, így a képletek jobb áttekinthetősége érdekében egyszerűbben, mindössze egyetlen alsó index alapján különböztetjük meg a korrelációs együtthatókat.

mátrixot jelöli). Ha tehát $\det(R)$ az R mátrix determinánsát jelöli, a sajátértékek a /3/ egyenlet alapján számolhatók ki:

$$(1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix}1-\lambda & r_3\\ r_3 & 1-\lambda\end{pmatrix}-r_1\cdot\det\begin{pmatrix}r_1 & r_3\\ r_2 & 1-\lambda\end{pmatrix}+r_2\cdot\det\begin{pmatrix}r_1 & 1-\lambda\\ r_2 & r_3\end{pmatrix}=0\,. \qquad /3/$$

Az R korrelációs mátrix sajátértékei (ebben a három változót tartalmazó esetben) tehát harmadfokú egyenlet megoldásaiból számolhatók:

$$(1-\lambda)^3-(1-\lambda)\cdot\left[r_1^2+r_2^2+r_3^2\right]+2\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3=0\,. \qquad /4/$$

Elméletileg egy harmadfokú egyenlet gyökei komplex számok is lehetnek, amelyeknek értelmezése korrelációs mátrix sajátértékeként ebben az elemzési keretben nem lenne megvalósítható. A következőkben tehát mindössze azokkal az esetekkel érdemes foglalkozni, amelyeknél mindhárom megoldás valós szám. Mivel a korrelációs mátrix egyébként csak valós számokat tartalmaz, ezért a sajátértékek is valós számok, tehát ez a korlát nem zárja ki a negatív sajátértékek létrejöttének lehetőségét.

A harmadfokú egyenlet megoldása alapján $(1-\lambda)$ érték esetében a valós megoldások három lehetséges értéke írható fel. Az egyik megoldás:

$$(1-\lambda)_1=2\cdot\sqrt{\frac{\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)}{3}}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\cdot\arccos\left(\frac{-r_1\cdot r_2\cdot r_3}{\sqrt{\left(\frac{\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)}{3}\right)^3}}\right)\right). \qquad /5/$$

A második és harmadik megoldás képlete a /6/ képletben viszonylag hasonló. A megoldások közötti hasonlóság lehetővé teszi annak megállapítását, hogy melyikből adódik a legerősebb korlátozás a korrelációs együttható értékekre vonatkozóan.

$$(1-\lambda)_{2,3}=2\cdot\sqrt{\frac{\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)}{3}}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\pm\frac{1}{3}\cdot\arccos\left(\frac{-r_1\cdot r_2\cdot r_3}{\sqrt{\left(\frac{\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)}{3}\right)^3}}\right)\right) \qquad /6/$$

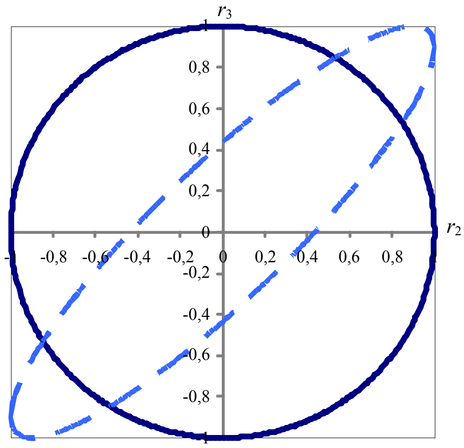
A korrelációs mátrix sajátértékei abban az esetben nemnegatívak, ha az $(1-\lambda)$ értékekre kapott megoldások mindegyike egynél kisebb. E három korlát alapján meghatározhatók azok a korrelációs együttható értékek, amelyek alapján a korrelációs mátrix pozitív szemidefinit. Mivel a függvény elméleti definíciójából megállapítható, hogy:

$$0 \le \frac{1}{3} \cdot \arccos\left(\frac{-r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{\sqrt{\left(\frac{\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right)}{3} \right)^3}} \right) \le \frac{\pi}{3}, \qquad /7/$$

ezért az is belátható, hogy az $(1-\lambda)$ értékekre kapott megoldások közül az /5/ képletben szereplő $(1-\lambda)_1$ a legnagyobb, tehát a következőkben elegendő ezzel a korlátozással foglalkozni a korrelációs együtthatók lehetséges értékeinek keresése során.

Bizonyos esetekben meglehetősen szűk lehet azoknak az értékeknek a tartománya, amelyeknél a korrelációs mátrix nem indefinit. Ennek illusztrálására tekintsük azt a helyzetet, amikor például r_1 adott érték és r_2 korrelációs együttható függvényében megállapítható, hogy nemnegatív sajátértékeknél r_3 milyen értékeket vehet fel.

1. ábra. Lehetséges együttható értékek pozitív szemidefinit korrelációs mátrixnál



Forrás: Saját számítás.

Az 1. ábra $r_1 = 0$ (kör alakú tartomány) és $r_1 = 0,9$ (nem kör alakú tartomány) esetében mutatja, hogy milyen határok között lehet r_3 értéke (r_2 korrelációs együttható függvényében) pozitív szemidefinit korrelációs mátrixnál. A nagyobb r_1 értéknél láthatóan szűkebb az r_3 korrelációs együttható lehetséges értékeinek tartománya (r_2 érték függvényében), ami összhangban van azzal a gyakran említett megállapítással is, hogy ha három változó esetében két korrelációs együttható értéke abszolút értékben magas, akkor a harmadik korrelációs együttható értéke is „várhatóan" nagy abszolút értékben. Az 1. ábra függőleges tengelye tehát a /2/ képletben szereplő mátrix r_3 elemének esetében a lehetséges értékek halmazát határoló értékeket méri, a vízszintes tengelyen mért r_2 értékek függvényében (különböző r_1 értékek esetében eltérő ezen határoló értékek halmaza).

A lehetséges értékek tartományának alakja például azért kör $r_1 = 0$ esetében, mivel ekkor

$$\frac{1}{3} \cdot \arccos\left(\frac{-r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{\sqrt{\left(\frac{\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \right)}{3} \right)^3}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \arccos(0) = \frac{\pi}{6}. \qquad /8/$$

Az $(1-\lambda)$ értékekre kapott megoldások közül természetesen ebben az esetben is az első a legnagyobb, mivel $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) > \cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{6}\right)$. Ennek alapján tehát r_2 és r_3 kapcsolatában az /5/ összefüggést figyelembe véve a következő egyenlőtlenség teljesül, ha a korrelációs mátrix nem indefinit:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{r_2^2 + r_3^2}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \le 1. \qquad /9/$$

A /9/ egyenlőtlenséget átalakítva r_2 és r_3 változók alapján az eredményben az egységsugarú kör egyenlete fedezhető fel (ezt mutatja az 1. ábra is):

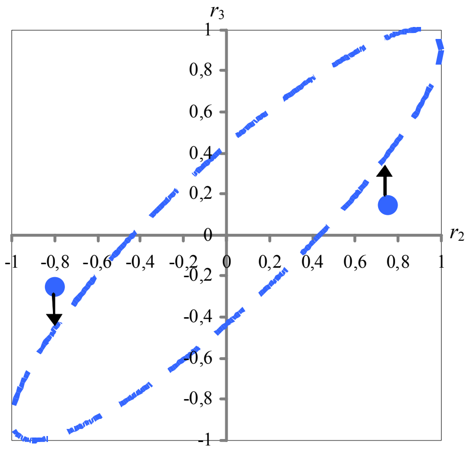
$$\sqrt{r_2^2 + r_3^2} \le 1. \qquad /10/$$

2. Korrekciós megoldások

Az egyik legegyszerűbb megoldás az lehet az indefinit korrelációs mátrix korrekciója során, ha valamelyik adott korrelációs együttható értékének módosításával sikerül kiküszöbölni a negatív sajátértékek megjelenését. Ez a lehetőség nem ideális minden helyzetben, mivel nagy méretű korrelációs mátrixoknál nehéz lenne csak egyetlen korrelációs együttható (a mátrix szimmetriája következtében persze tulajdonképpen két együttható) változtatásával megoldani a problémát. Azonban kisméretű korrelációs mátrixnál – különösen, ha például az egyik korrelációs együttható becsült értéke nem teljesen tekinthető precíznek – érdemes lehet megfontolni ennek a lehetőségnek az alkalmazását is.

Kisebb méretű indefinit korrelációs mátrixoknál, ha erre mód van, a lehetséges korrelációs együtthatók tartományának grafikus megjelenítése elősegíti a korrekciót. Ez az előzőkben leírtak alapján ebben az elemzési keretben nyilvánvalóan akkor valósulhat meg, ha két korrelációs együttható értékét adottnak tekintve a harmadikat olyan módon változtatjuk meg, hogy az már a lehetséges értékek tartományában (a korrelációs mátrix pozitív szemidefinit) legyen. Ezt a lehetőséget például az $r_1 = 0,9$ esetben a 2. ábra mutatja, amikor a korrelációs mátrix korrekció előtt indefinit, de például r_3 módosításával (a „túlságosan” alacsony érték már megfelelő szintre növelésével, vagy valamely magas érték csökkentésével a lehetséges értékek halmazának határáig) már nemnegatívvá tehetők a sajátértékek.

2. ábra. Egyetlen korrelációs együttható korrekciójának lehetőségei



Forrás: Saját számítás.

Nagyobb méretű korrelációs mátrixoknál esetenként nagyon bonyolult lenne kizárólag egy adott korrelációs együttható értékét módosítva korrigálni az indefinit mátrixot, figyelembe véve azt a jelenséget, amit egyébként a 2. ábra is szemléltet, hogy bizonyos esetekben elméletileg több érték is szóba jöhet korrigált korrelációs együtthatóként (amelyek közül a gyakorlatban megfelelőbbnek tekinthető érték kiválasztásával is foglalkozni kellene). A szakirodalomban több egyéb módszer említése is megtalálható, amelyek nagyobb méretű korrelációs mátrixok esetében is jól alkalmazhatók. *Jäckel* ([2002] 6. fejezet) például két eljárást mutat be részletesen:

– a gömbi koordinátarendszeres felbontáson,
– a spektrálfelbontáson

alapuló módszert. A következőkben először ezeket tekintjük át röviden, majd további korrekciós módszerekkel is foglalkozunk.

A korrelációs mátrix felbontásakor több levezetés is azon a lineáris algebrai megállapításon alapul, mely szerint a négyzetes pozitív szemidefinit mátrixok, tehát az elméletileg helyes korrelációs mátrixok is felbonthatók valamely négyzetes M mátrix figyelembevételével a /11/ összefüggés szerint:

$$R = M \cdot M^T . \qquad /11/$$

A *gömbi koordinátarendszeren* alapuló felbontásnál tehát az elméletileg lehetséges M mátrixok közül olyan A mátrix megtalálása a cél, amelynél a sorvektorokban levő elemeket az egységsugarú térbeli gömb esetében koordinátákként lehet értelmezni úgy, hogy az indefinit R korrelációs mátrixhoz lehető leginkább hasonló $\hat{R}$ mátrix állítható elő az A mátrix alapján a /12/ összefüggésnek megfelelően:

$$\hat{R} = A \cdot A^T . \qquad /12/$$

Ilyen módon, a /12/ összefüggés alapján létrehozott $\hat{R}$ mátrix már pozitív szemidefinit, és a főátlójában is egységnyi értékek szerepelnek a megfelelően definiált A mátrix esetében (illetve figyelembe véve, hogy a számításokban említett térbeli gömb sugara egységnyi). Ennél a módszernél lényegében a „hagyományos" (derékszögű) térbeli koordinátarendszer és a gömbi koordinátarendszer közötti összefüggésen alapul az indefinit korrelációs mátrix korrekciója.

Az n változó alapján számolt R korrelációs mátrix esetében a cél tehát az A mátrix $n \times n$ elemét a_{ij}-vel jelölve az $n \times (n-1)$ φ_{ij} gömbi koordináták számolása, amelyekkel az A mátrix elemei a következőképpen függnek össze:

$$a_{ij} = \begin{cases} \cos\varphi_{ij} \cdot \prod_{k=1}^{j-1} \sin\varphi_{ik}, & \text{ha } j = 1,2,\ldots,n-1 \\ \prod_{k=1}^{j-1} \sin\varphi_{ik}, & \text{ha } j = n \end{cases} . \qquad /13/$$

A gömbi koordináták alkalmazásának nagy előnye tehát, hogy így $\hat{R} = A \cdot A^T$ mátrix főátlójában automatikusan egységnyi értékek szerepelnek. Ennek illusztrálására tekintsük például az (előző példákkal összefüggésben három sorvektort tartalmazó) A mátrix első sorát, amelyből az $\hat{R} = A \cdot A^T$ mátrix első sorában és első oszlopában található érték úgy képezhető, hogy a sorvektor elemeinek négyzeteit összeadjuk. Mivel a gömbi koordinátákat tartalmazó mátrix ebben a példában 3×2-es méretű, ezért mindössze φ_{11} és φ_{12} értékek alapján belátható, hogy $\cos^2\varphi_{11} + \cos^2\varphi_{12} \cdot \sin^2\varphi_{11} + \sin^2\varphi_{11} \cdot \sin^2\varphi_{12}$ négyzetösszeg egységnyi értékű, mivel $\cos^2\varphi_{11} + \sin^2\varphi_{11} \cdot \left(\cos^2\varphi_{12} + \sin^2\varphi_{12}\right) = 1$.

Az így kapott megoldás azonban nem egyértelmű, a lehetséges A mátrixok közül szakmai megfontolások alapján érdemes választani. Az adott elemzésben megfelelő A mátrix kiválasztásához érdemes olyan célfüggvényt meghatározni, ami szoros összefüggésben van az elemzés céljával (amelyben a korrelációs mátrix pozitív szemidefinit tulajdonságára szükség van). Lehetséges például a (minimalizálandó) célfüggvénynek az eredeti (indefinit) korrelációs mátrix és a gömbi koordinátarendszeres felbontáson alapuló, pozitív szemidefinit mátrix elemeinek különbségeiből képzett négyzetösszeget választani:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{ij} - \hat{r}_{ij}\right)^2 . \qquad /14/$$

Jäckel [2002] megemlít ezenkívül olyan megoldásokat is, hogy a (minimalizálandó) célfüggvény lehet például az R és $\hat{R}$ mátrix (sorba rendezett) sajátértékeinek különbségeiből képzett négyzetösszeg, vagy például a /14/ képlet négyzetösszegében szereplő elemeket súlyozni is lehet, így ha valamely korrelációs együtthatónál kiemelten fontos a precíz közelítés, ahhoz magasabb súly is rendelhető.

A gömbi koordinátarendszeren alapuló felbontás a korrelációs mátrix korrekciójának egyik lehetséges kiinduló pontjaként több előnyös tulajdonsággal is rendelkezik. Az előzőkben is említett egyik jellemzője például, hogy a képzett $\hat{R}$ pozitív szemidefinit mátrix főátlójában külön korlátozó feltételek figyelembevétele nélkül is egységnyi értékek vannak. További előnyös tulajdonságra szintén *Jäckel* [2002] hívja fel a figyelmet: egy másik (a spektrálfelbontáson alapuló) korrekciós módszer eredményeképpen kapott pozitív szemidefinit mátrix jellemzően meglehetősen hasonlít a gömbi koordinátarendszeres felbontáson alapuló módszer eredményére, így tehát (a spektrálfelbontás eredményének figyelembevételével) viszonylag jó kezdőérték is számolható a gömbi koordinátarendszeres felbontáson alapuló módszerhez, a /14/ képletben szereplő, minimalizálandó célfüggvény (iterációs) optimalizálásához.

A korrelációs mátrix *spektrálfelbontása* a sajátértékei és sajátvektorai alapján történik. Az n változóval számolt korrelációs mátrix λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sajátértékei Λ diagonális mátrixba rendezhetők, a megfelelő sajátvektorok mátrixát az /1/ képlethez hasonlóan pedig jelölje V, ebben az esetben a sajátértékek és sajátvektorok közötti kapcsolatot a /15/ összefüggés írja le:

$$R \cdot V = V \cdot \Lambda \,. \qquad /15/$$

Indefinit korrelációs mátrix esetében a sajátértékek között negatív is van. Ezzel összefüggésben a korrekció első lépéseként definiáljuk Λ' mátrixot, amely a negatív sajátértékek helyett nulla értékeket tartalmaz a főátlóban.

A cél ennél a korrekciós módszernél is az eredeti R korrelációs mátrixhoz leginkább hasonló $\hat{R} = A \cdot A^T$ mátrix meghatározása, vagyis A mátrix számolása ennél az eljárásnál is nagy jelentőségű. Mivel a korrelációs mátrix felírható sajátértékei és sajátvektorai alapján, így a /16/ összefüggés szerint felírt A' mátrix már jó kiindulópontot jelent A mátrix számolásához:

$$A' = V \cdot \left(\Lambda'\right)^{1/2}, \qquad /16/$$

ahol $\left(\Lambda'\right)^{1/2}$ azt a diagonális mátrixot jelöli, amelyben minden elem a Λ' diagonális mátrix elemeinek négyzetgyöke. Az $A' \cdot \left(A'\right)^T$ mátrix azonban még nem megfelelő mértékben hasonlít a korrelációs mátrixhoz, mivel a főátlóban nem egységnyi értékek szerepelnek. A spektrálfelbontáson alapuló korrekciós módszer következő lépése tehát A mátrix számolása A' mátrix sorvektorai hosszának egységnyire állításával. Ezt követően már ennél a módszernél is meghatározható $\hat{R} = A \cdot A^T$ mátrix. A számolások során tehát először az A' mátrix a'_{ij} elemei figyelembevételével meghatározzuk a D diagonális mátrix főátlójában levő elemeket úgy, hogy a D és A' mátrix szorzata egységnyi hosszúságú sorvektorokat tartalmazzon $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$d_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}'^{\,2}}} \,. \qquad /17/$$

Az $\hat{R} = A \cdot A^T$ összefüggésben szereplő mátrix ezután a /18/ összefüggés alapján számolható:

$$A = D \cdot A' \,. \qquad /18/$$

Ennél a módszernél is érdemes egyébként arra is ügyelni, hogy nem csak egyetlen megoldás létezik *A* mátrix esetében, mivel nem csak egyetlen sajátvektor-rendszer létezik, tehát (ha a sajátvektorok számolására valamilyen iterációs optimalizálási eljárás alkalmazásával kerül sor) a számolások során érdemes lehet olyan sajátvektorokat kiinduló adatnak választani, amelyek alkalmazásával a lehető legjobban hasonlít egymáshoz az eredeti (indefinit) *R* mátrix és az $\hat{R} = A \cdot A^T$ mátrix.

A korrelációs mátrix korrekciójára vonatkozóan további, matematikailag szintén megalapozottnak tekinthető megközelítések is vannak. A korrekció során előnyös lehet a „legközelebbi korrelációs mátrix" számolása, amellyel például *Higham* [2002] is foglalkozik. Ez az elnevezés arra utal, hogy adott szimmetrikus mátrixhoz kereshető (különböző megfontolások alapján) olyan „legközelebbi" szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix, amelynek főátlójában egységnyi értékek vannak. Ez az elemzési lehetőség tehát mindössze azt feltételezi az „eredeti" mátrixról (vagyis a pénzügyi alkalmazásokban arról a korrelációs együtthatókat tartalmazó mátrixról, amelynek sajátértékei között negatív is van), hogy az szimmetrikus. *Higham* [2002] áttekinti a „legközelebbi" korrelációs mátrix (nearest correlation matrix) bizonyos elméleti jellemzőit és számításának alkalmazási lehetőségeit. Számításaiban a megoldandó feladat hasonlít az előzőkben leírt módszerekben szereplő optimalizációs problémára, azzal a fő különbséggel, hogy az eredeti *R* (negatív sajátértékeket is tartalmazó) korrelációs mátrix és $\hat{R}$ (ebben az elemzésben a „legközelebbi mátrix") távolságának mérésével kapcsolatos definíciók központi szerephez jutnak az elemzésben. A két mátrix közötti távolság esetében az elemzés célja a minimum megtalálása:

$$\min\left\{\left\|R - \hat{R}\right\|\right\}. \qquad /19/$$

A távolság mérésére *Higham* [2002] a Frobenius-norma két különböző súlyozott változatát is alkalmazza (a Frobenius-norma például valamely *X* mátrix esetében $\|X\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}{}^2$ alapján számolható, tehát súlyozás figyelembevétele nélkül a /19/ képlet optimalizációs feladata a /14/ képletben szereplő minimalizálási feladathoz hasonlít). A két eljárás közötti fő különbség a súlyozásnál alkalmazott mátrix tekintetében tapasztalható:

– az egyik módszernél a súlyozott Frobenius-norma *W* szimmetrikus pozitív definit mátrix alkalmazásával $\|X\|_W = \left\|W^{1/2} \cdot X \cdot W^{1/2}\right\|_F$ módon számolható;

– a másik súlyozási lehetőségnél $\|X\|_H = \|H \circ X\|_F$, ahol *H* pozitív súlyokból álló szimmetrikus mátrix és $H \circ X$ a Hadamard-szorzatot jelöli: $H \circ X = \left(h_{ij} \cdot x_{ij}\right)$.

Higham [2002] megemlíti: a második súlyozási lehetőségnél *H* mátrix elemeinek meghatározásával lehetőség van akár annak beállítására is, hogy egyes korrelációs együtthatók értéke csak kismértékben különbözzön az eredeti és a „legközelebbi" korrelációs mátrixban (nagyobb súlyt érdemes adni azoknak az elemeknek a mátrixban, amelyeknél az a cél, hogy a közelítő érték minél közelebb legyen az indefinit mátrixban szereplő értékhez). A *W* mátrix alkalmazását jelentő lehetőség ugyanakkor Higham megállapítása szerint számolási szempontból előnyösebb (bár az egyes mátrixelemek egymástól független súlyozását nem teszi lehetővé, így tehát a pénzügyi alkalmazásokban a szakmai szempontok alapján történő meghatározása is nehézkesebb lehet, a számolások hatékonyságával kapcsolatos előnyös tulajdonságával például ezt a jellegzetességet érdemes összevetni a gyakorlati alkalmazások során). A súlyozási módszerek megfelelő kiválasztása a gyakorlatban is fontos lehet, amit egyébként az is jelez, hogy ezekre *Jäckel* [2002] is felhívja a figyelmet a gömbi koordinátarendszeres felbontáson alapuló módszernél.

A *Higham* [2002] által leírt eredmények főként azért érdekesek, mert az optimális megoldás létezésével kapcsolatban is szerepelnek következtetések. A számolásokat például az első (számolási szempontból előnyösebbnek tekinthető) súlyozási módszer alapján, *W* mátrix figyelembevételével végezve (amikor olyan szimmetrikus, pozitív szemidefinit, a főátlóban egységnyi értékeket tartalmazó $\hat{R}$ mátrix megtalálása a cél, ami a súlyozott Frobenius-norma alapján a legközelebb van az eredeti R mátrixhoz) megoldható az optimalizálási feladat. Higham fontos következtetése, hogy mivel egyfelől a szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok halmaza, másfelől pedig a szimmetrikus, főátlóban egységnyi értékeket tartalmazó mátrixok halmaza zárt konvex, ezért a metszetük is az, így az elméleti matematikai eredmények alapján megállapítható, hogy $\min\left\{\left\|R-\hat{R}\right\|\right\}$ minimális érték számolható, és egyetlen ilyen $\hat{R}$ mátrix van. Higham leír egy algoritmust is, ami alapján a legközelebbi korrelációs mátrix ilyen modellkeretben kiszámolható, valamint eredményeket is bemutat az algoritmus konvergenciájával kapcsolatban (nagyméretű korrelációs mátrixoknál ugyanis a megoldás megtalálásának időigénye is fontos szempont lehet a számítások során).

3. A korrekciós módszerek alkalmazása

A következőkben először egy szimulációs elemzés keretében áttekintjük, hogyan keletkezhet a gyakorlatban olyan korrelációs mátrix, amelynek sajátértékei között negatív értékek is vannak, majd e probléma kiküszöbölésével kapcsolatban néhány, gyakorlatban is alkalmazható módszer eredményeit összehasonlítjuk. A szimulációs elemzések elsősorban a hiányos adatbázisok lehetséges problémáira mutatnak rá, a korrekciós módszerek azonban nemcsak az adathiányok következtében, hanem egyéb módon (például a pénzügyi elemzésekben a paraméterváltozások hatásának mérése érdekében való átalakítás következtében) létrejövő indefinit korrelációs mátrixok esetében is alkalmazhatók lehetnek.

A gyakorlatban az indefinit korrelációs mátrix létrejöttének gyakori oka lehet az elemzésben szereplő adatsorok hiányossága, továbbá, hogy a minél több információ megtartása érdekében nemcsak azon adatok alapján történik a korrelációs mátrix becslése, amelyek esetében minden változónak van értéke, hanem változó-páronként úgy számolják a korrelációs együtthatókat, hogy egy adott változópárnál azokat az adatokat is figyelembe veszik, amelyeknél esetleg a többi változó nem mindegyikénél van érték. Ezt a helyzetet a következőkben úgy modellezzük, hogy először három változó esetében adott elméleti korrelációs mátrixnak megfelelő (empirikus korrelációs mátrix számolásához alkalmazható) értékeket állítunk elő szimulációval, majd az empirikus korrelációs mátrixok sajátértékeit számítjuk. Az elemzésben összehasonlítjuk, hogy empirikusan a szimulációk mekkora részénél adódott negatív sajátérték, ha az összes vagy pedig néhány adat kihagyásával került sor az empirikus korrelációs mátrix számolására.

Fő témánk a korrelációs mátrix elemzése, így a következőkben a szimulációkat normális eloszlású változók esetében végezzük el, mivel normális eloszlású változóknál a korrelációs együttható a változók közötti kapcsolat erősségére vonatkozóan megfelelő mérőszámnak tekinthető (hiszen ekkor például a korrelálatlanság egyben függetlenséget is jelent). A ξ_i $(i=1,2,3)$ független (standard) normális eloszlású véletlen változókból, a pénzügyekben gyakran alkalmazott módon, a Cholesky-felbontás alapján állítjuk elő egy adott elméleti korrelációs mátrixhoz tartozó korrelált (normális eloszlású) véletlen változókat. Három változó esetében például a korrelációs mátrix $R = C \cdot C^T$ Cholesky felbontásában a C mátrix a /20/ képlet szerint írható fel, a /2/ képletben is alkalmazott jelölésekkel:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & \sqrt{1-r_1^2} & 0 \\ r_2 & \dfrac{r_3 - r_1 \cdot r_2}{\sqrt{1-r_1^2}} & \sqrt{1-r_2^2 - \dfrac{(r_3 - r_1 - r_2)^2}{1-r_1^2}} \end{pmatrix}. \qquad /20/$$

Az η_i $(i=1,2,3)$ korrelált (normális eloszlású) véletlen változók ezután a ξ_i $(i=1,2,3)$ független normális eloszlású véletlen változók alapján a /21/, /22/ és /23/ összefüggés alapján határozhatók meg:

$$\eta_1 = \xi_1, \qquad /21/$$

$$\eta_2 = r_1 \cdot \xi_1 + \sqrt{1-r_1^2} \cdot \xi_2, \qquad /22/$$

$$\eta_3 = r_2 \cdot \xi_1 + \frac{r_3 - r_1 \cdot r_2}{\sqrt{1-r_1^2}} \cdot \xi_2 + \sqrt{1-r_2^2 - \frac{\left(r_3 - r_1 - r_2\right)^2}{1-r_1^2}} \cdot \xi_3. \qquad /23/$$

Az η_i $(i=1,2,3)$ véletlen változók mindegyike esetében ezer szimulált adatot állítunk elő, így tehát mindhárom páronkénti korrelációs együtthatót (a korrelációs mátrix főátlójában szereplő egységnyi értékeken kívül) ezer értékpár alapján lehet számolni. Természetesen a szimuláció eredményeképpen számolt empirikus korrelációs mátrix nem pontosan ugyanazokat az értékeket tartalmazza mint az elméleti korrelációs mátrix, de normális eloszlású változóknál az ezer értékpár alapján számolt értékek átlaga már meglehetősen jól közelítik az elméleti korrelációs együtthatók értékeit.

Ilyen módon tehát előállíthatók empirikus korrelációs mátrixok, amelyek jól közelítik az elméleti korrelációs mátrixot. A szakirodalom egyik megállapítása szerint (például *Jäckel* [2002], *Higham* [2002]) a gyakorlati számításokban előforduló indefinit korrelációs mátrix létrejöttéhez hozzájárulhat, ha adathiány jellemzi a rendelkezésre álló adatbázist. Ezt a jelenséget a következőkben olyan módon hozzuk létre az elemzésben, hogy a korrelált véletlen változók egyikénél az adatok egy részét (10 százalékát) figyelmen kívül hagyjuk a páronkénti korrelációs együtthatók számolása során. A szimuláció alapján létrehozott adatbázisnál a továbbiakban nem foglalkozunk azzal, hogy milyen hatással járna a redukció mértékének változtatása.

A számolásokat a /24/ képletben szereplő elméleti korrelációs mátrix alapján végezzük úgy, hogy az egyik korrelációs együttható (r_3) esetében többféle értéknél is számolunk szimulációs eredményeket:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,75 \\ 0,9 & 1 & r_3 \\ 0,75 & r_3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /24/$$

Az előzőkben leírtak alapján r_3 értéke ebben az esetben (kerekítve) 0,3867 és 0,9633 közötti lehet úgy, hogy az elméleti korrelációs mátrixnak ne legyen negatív sajátértéke.

A következőkben ezer szimulációs lépésben állítunk elő empirikus korrelációs mátrixokat kétféle konstrukcióval:

– az egyik esetben az összes adatot figyelembe vesszük a korrelációs együtthatók számolása során,

– a másik esetben pedig az egyik változónál redukáljuk a rendelkezésre álló adatok halmazát a korábbiakban leírt módon (az adatok 10 százalékát nem vesszük figyelembe a páronkénti korrelációs együtthatók számolása során).

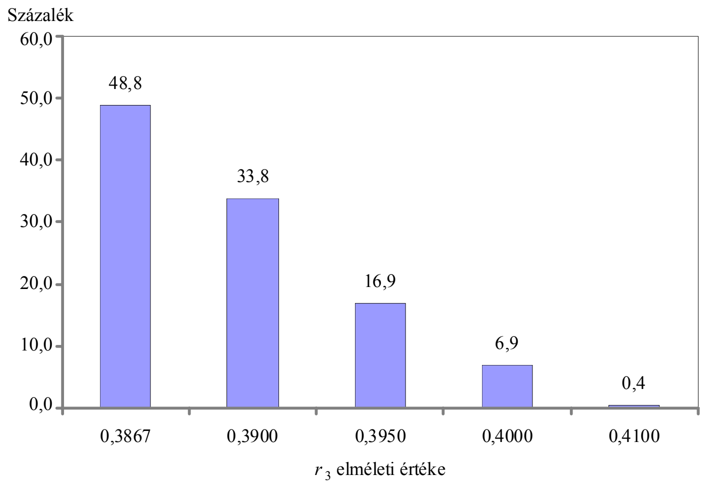
A három korrelált változó mindegyikénél tehát ezer szimulált érték található az elemzésben (egy 1000×3-as méretű mátrixban), ezen értékek alapján létre lehet hozni két (3×3-as méretű) empirikus korrelációs mátrixot:

– ha az összes adatot, illetve

– ha az egyik változó esetében csak az adatok 90 százalékát alkalmazzuk az elemzésben.

E két empirikus korrelációs mátrixnál eldönthető, hogy van-e sajátértékeik között negatív, összehasonlításuk azonban (egyéb információ hiányában) nem feltétlenül megfelelő megalapozott következtetések levonásához. Ezért a szimulációs elemzésben a három korrelált valószínűségi változó értékeit ezer különböző esetben állítjuk elő, és így ezer esetben lehet összehasonlítani e két empirikus korrelációs mátrixot.

3. ábra. Negatív sajátértékek előfordulásának empirikus arányai a szimulációs elemzésben, redukált adatbázis esetén



Forrás: Saját számítás.

Az elvégzett szimulációs számítások során mért eredmény szerint egyetlen esetben sem fordult elő – az összes adat figyelembevételekor – negatív sajátértékű empirikus korrelációs mátrix. Ez az eredmény főként csak a számítások ellenőrzésére szolgálhat (mivel a korrelációs mátrix elméletileg pozitív szemidefinit mátrix, és az összes rendelkezésre álló adat alapján számolva nem várható, hogy negatív sajátérték forduljon elő). Ugyanakkor a redukált adatbázis alapján számolt empirikus korrelációs mátrix számításkor előfordultak negatív sajátértékek. Az eredmények szerint minél közelebb volt r_3 a 0,3867 értékhez (amely alatti korrelációs együttható már negatív sajátérték megjelenését okozta volna), annál többször fordult elő, hogy a szimulációs elemzésben előállított empirikus korrelációs mátrixnak volt negatív sajátértéke. Az összes ilyen eset számát végül ezerrel elosztva, empirikus arányt lehet számolni a negatív sajátérték előfordulásának gyakoriságával kapcsolatban. Ezeket az empirikus arányokat mutatja a 3. ábra.

A szimulációs elemzések tehát arra utalnak, hogy az is hozzájárulhat a negatív sajátértékekkel rendelkező empirikus korrelációs mátrixok létrejöttéhez, ha a páronkénti korrelációs együtthatók számolására hiányos adatok alapján kerül sor. A gyakorlatban, ebben a helyzetben nem mindig jelenthet megoldást, ha csak azok az adatok szerepelnek az elemzésben, amelyeknél mindegyik (elemzésbe bevont) változónak van (mért) értéke, mivel ez jelentősen leszűkítheti a rendelkezésre álló adatbázis méretét. Ennek következtében érdekes kérdést jelent, hogy egy negatív sajátértékkel is rendelkező korrelációs mátrix hogyan alakítható át pozitív szemidefinitté. A következőkben az ezzel kapcsolatos eredményeket tekintjük át, az előző példánk folytatásával.

Tegyük fel, hogy adott a /25/ képletben található korrelációs mátrix, amely nem pozitív szemidefinit, mivel $r_3 = 0,25,$ ami alacsonyabb az említett 0,3867 értéknél:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,75 \\ 0,9 & 1 & 0,25 \\ 0,75 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /25/$$

Ez a korrelációs mátrix tehát indefinit, mivel a sajátértékei között van egy negatív érték is (a sajátértékek kerekítve: 2,3016, 0,7545, –0,0561). Hasonlítsuk össze a következő két korrekciós lehetőséget:

– amikor csak egyetlen korrelációs együttható értéke módosul;

– amikor mindegyik korrelációs együttható értéke módosulhat az eredeti korrelációs mátrix elemeihez képest (kivéve a főátlóban található egységnyi értékeket).

A gyakorlatban az egyetlen együttható változtatásával végrehajtott korrekció alkalmazási lehetőségei szűkebb körűek, ezzel együtt, összehasonlítási céllal ezeket is áttekintjük.

Azok a korrekciós megoldások, amikor egyszerre több együttható is változhat a korrelációs mátrixban, egymáshoz bizonyos szempontból hasonlónak tekinthetők. Az előzőkben bemutatott lehetőségeken kívül a leginkább általános megfogalmazásúnak *Higham* [2002] módszerei tekinthetők: a „legközelebbi" korrelációs mátrix megkeresésére alkalmasak, mindössze szimmetriát feltételeznek a számolások kiinduló adatát jelentő mátrixról, míg *Jäckel* [2002] technikáit alapvetően szimmetrikus, a főátlójában egységnyi értékeket és abszolút értékben egységnyinél nem nagyobb elemeket tartalmazó mátrixok esetében mutatja be. Mindketten felhívják a figyelmet a számítások időigényének fontosságára. Jäckel például leírja, hogy a spektrálfelbontáson alapuló eljárás megfelelő megoldása, jó kiindulópontot jelenthet a gömbi koordinátarendszer felbontásos módszerének számításaihoz, ha az a /14/ képlet szerinti eltérésnégyzetösszeg minimalizálásával végezhető el. Megállapítása szerint a két módszer eredménye gyakran nagymértékben hasonló, így a következő példában (amikor több korrelációs együttható értéke is módosulhat a korrekció során) csak a spektrálfelbontáson alapuló eredményeit tekintjük át.

Mivel a súlyozás figyelembevétele nélkül *Higham* [2002] módszerének működési elvei hasonlók a spektrálfelbontásos korrekciós eljárás működési alapelveihez, így az általa említett algoritmust a „legközelebbi" korrelációs mátrix számítására jelen példában nem alkalmazzuk. Ezenkívül a súlyozás figyelembevételével itt most elsősorban azért nem foglalkozunk részletesebben (például a gömbi koordinátarendszeres korrekciós módszernél), mert a súlyok meghatározása az adott korrelációs mátrixhoz (illetve az ezzel összefüggő feladathoz) szorosan kapcsolódó, szakmai megfontolásokat is igénylő kérdés (nagyobb súlyokat érdemes rendelni azokhoz a korrelációs mátrix elemekhez, amelyeknél a korrigált érték és az eredeti érték hasonlósága fontosabb).

Amennyiben tehát csak egyetlen korrelációs együttható változtatása után válik a korrelációs mátrix pozitív szemidefinitté, akkor (ahogyan azt a 2. ábra is mutatja) gyakran több megfelelő érték is van, amelyekkel a korrelációs mátrixban már nem lenne negatív sajátérték (ebben a példában két adott érték közötti korrelációs együtthatók tekinthetők megfelelőnek). Ezek közül a kiinduló értékhez közelebbit érdemes választani. Ha tehát a példában szereplő r_1 korrelációs együttható változtatásával történne a korrelációs mátrix korrekciója, akkor a /7/ összefüggés alapján az /5/ képlet figyelembevételével számolt korrigált korrelációs mátrix a következő:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,8279 & 0,75 \\ 0,8279 & 1 & 0,25 \\ 0,75 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /26/$$

Ekkor az egyik sajátérték nulla, a legnagyobb sajátérték pedig (kerekítve) 2,2486, tehát (mivel a sajátértékek összege 3 ebben a példában) a másik pozitív sajátérték a kiinduló helyzethez képest csak kismértékben változott: 0,7514 az eredeti 0,7545 helyett. A sajátértékek hasonlóan változnak akkor is, ha a korrelációs mátrixban mindössze r_2 értékének módosulása révén változik a mátrix indefinitből pozitív szemidefinitté. Az ilyen módon korrigált korrelációs mátrixot a /27/ képlet mutatja:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,6470 \\ 0,9 & 1 & 0,25 \\ 0,6470 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /27/$$

Ennek legnagyobb sajátértéke 2,2356, és mivel a legkisebb sajátérték éppen nulla, így belátható, hogy a mátrix pozitív szemidefinitté változtatásának hatása ebben az esetben is a legnagyobb sajátértékben okozta a legjelentősebb változást. Ezzel szemben, ha az r_3 korrelációs együttható változtatásával kerül sor a korrelációs mátrix pozitív szemidefinitté alakítására, akkor a sajátértékek máshogyan módosulnak.

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,75 \\ 0,9 & 1 & 0,3867 \\ 0,75 & 0,3867 & 1 \end{pmatrix} \qquad /28/$$

A /28/ képletben szereplő korrigált korrelációs mátrixban a legnagyobb sajátérték az előző két esettel (/26/ és /27/) szemben nem csökkent, hanem emelkedett, értéke így 2,3787 (a legkisebb sajátérték ebben az esetben is nulla).

A sajátértékek módosulásai természetesen a korrelációs mátrix konkrét értékeivel is összefüggnek ebben a példában, amely rámutat arra, hogy ugyanazt a problémát (negatív sajátérték jelenléte) többféle megközelítéssel megoldva, jelentősen eltérő eredményekre lehet jutni. Gyakorlati alkalmazásokban (például amikor különböző piaci indexek közötti összefüggésekre utal a korrelációs mátrix), a korrekció konkrét módszerének megválasztása befolyásolhatja az elemzésben számolt VaR értékét is, aminek további szerteágazó, pénzügyi számolásokat befolyásoló hatásai lehetnek.

Az előző eredményekkel összefüggésben is érdekes lehet, hogy ha a korrelációs mátrix spektrálfelbontása (illetve a /15/–/18/ képletek) alapján a mátrixban szereplő mindhárom korrelációs együttható változtatásával történik a korrekció, hogyan változik egy-egy korrelációs együttható értéke.

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,86 & 0,7235 \\ 0,86 & 1 & 0,27 \\ 0,7235 & 0,27 & 1 \end{pmatrix} \qquad /29/$$

A /29/ képletben szereplő korrigált korrelációs mátrix esetében a legnagyobb sajátérték 2,2655 (a legkisebb sajátérték pedig nulla), tehát a korrekció hatására itt, az eredetihez képest, csak kisebb mértékben módosult (a /26/–/28/ képletekben szereplő korrigált korrelációs mátrixok alapján számolható eredményekhez képest).

Az optimális korrekciós módszer kiválasztásakor többféle szempont is figyelembe vehető (például a korrelációs együtthatók módosulása vagy a sajátértékek változásai). Nincs általánosságban is „legmegfelelőbb” korrekciós módszer, az adott elemzés szempontjainak leginkább megfelelő megoldás megtalálására érdemes törekedni. A gyakorlati alkalmazások során ajánlott megfontolni például azt, hogy mi idézheti elő a negatív sajátértékek létrejöttét, ha ugyanis mindegyik változónál számottevő a hiányzó adatok aránya, akkor célravezetőbb lehet egy olyan korrekciós módszert választani, amelyik potenciálisan mindegyik korrelációs együttható módosulásával járhat (például a spekrálfelbontáson alapuló korrekciós módszer vagy pedig a *Higham* [2002] által bemutatott algoritmus alkalmazása lehet megfelelő).

A gyakorlatban az eljárások közötti választásnál gyakran előnyös lehet a súlyozás meghatározása is, annak érdekében, hogy egyes korrelációs együtthatók a korrekció során az eredetihez képest csak kismértékben változzanak. A súlyozás, illetve a korrekciós módszerek közötti választás jellemzően az elemzés céljával összefüggő szakmai ismereteket (például pénzügyi ismereteket) is igényel, mivel csupán matematikai, illetve statisztikaelméleti szempontból általánosságban nem határozható meg egy minden helyzetben érvényes „legjobb” korrekciós technika.

4. Összefoglalás

A gyakorlati (például pénzügyi) számításokban néha előfordul, hogy a lineáris korrelációs együtthatókat tartalmazó korrelációs mátrix – azzal együtt, hogy ez elméletileg helytelen – negatív sajátértékekkel is rendelkezik. A jelenség eredete az empirikus korrelációs mátrix számításának módjára vezethető vissza, és gyakran a probléma nem szüntethető meg automatikusan. Az indefinit korrelációs mátrix korrekciójának optimális módszerével kapcsolatban meglehetősen összetett elemzések is találhatók a szakirodalomban. Összefoglalóan megállapítható, hogy a korrekciós módszerek közül érdemes az adott helyzetben leginkább megfelelőt választani (például azt amely az adott helyzetben optimálisnak tekinthető súlyozás figyelembevételével végez korrekciót), mivel nincsen általánosságban, minden helyzetre vonatkozóan érvényes „legjobb” korrekciós módszer.

Irodalom

HAJDU O. [2010]: Sajátértékek a statisztikában. *Statisztikai Szemle*. 88. évf. 7–8. sz. 773–788. old.

HIGHAM, N. J. [2002]: *Computing the Nearest Correlation Matrix – A Problem from Finance*. The University of Manchester. Manchester.

JÄCKEL, P. [2002]: *Monte Carlo Methods in Finance*. John Wiley & Sons, Inc. New York.

KOVÁCS E. [2011]: *Pénzügyi adatok statisztikai elemzése*. Tanszék Kft. Budapest.

Summary

Correlation matrices are often used in financial calculations. Theoretically, a correlation matrix is a symmetric and positive semidefinit matrix, in practice, however, empirical correlation matrices can be indefinit (can have negative eigenvalues). This phenomenon makes some further financial calculations impossible, thus correction methods should be used in case of a correlation matrix, since the problem often can not be eliminated automatically. This study contains an overview of some correction methods appropriate for financial application and demonstrates some of the differences of selected methods based on numerical and graphical results.