

Egységgyöktesztek alkalmazása strukturális törések mellett a hazai benzinár példáján

Mák Fruzsina,
a Budapesti Corvinus Egyetem
PhD-hallgatója
E-mail: fruzsina.mak@uni-
corvinus.hu

A strukturális törések kezelésének kérdése elsősorban hosszabb idősorok esetén merül fel, ahol a sztochasztikus komponens lehet stacioner és integrált folyamat is. A tanulmány az egységgyök tesztekkel a strukturális törések esetén felmerülő problémákról szól. Példaként a 95-ös oktánszámú benzin a legnagyobb magyar forgalmazó által javasolt nagykereskedelmi árának elmúlt tízéves alakulását vizsgálja. A szerző bemutatja, hogyan építhető be a strukturális törés az egységgyöktesztekbe akkor, amikor a törés időpontja sem ismert előre.

TÁRGYSZÓ:
Idősorelemzés.
Árváltozás.

A tanulmány sztochasztikus jellegű idősorelemzési szemlélettel, illetve módszerekkel foglalkozik. A sztochasztikus idősorok lehetnek stacionáriusak, illetve a modellezéshez stacionáriussá kell őket transzformálni. A stacionaritás ellenőrzése gyakran az egységgyöktesztek elvégzésével történik. A stacionaritás hiányát okozhatja egyrészt az, hogy az idősor integrált, illetve az idősor tartalmazhat determinisztikus komponenseket, például determinisztikus trendet is. Mindezen túl azonban az idősorban lehetnek strukturális törések is, amelyek a hagyományos tesztek elvégzését nehezítik. Jelen esetben alapvetően a strukturális törések esetében felmerülő problémákról lesz szó, mégpedig akkor, amikor a stacionaritás hiányának lehetséges oka strukturális instabilitás.

A strukturális törések kezelése elsősorban hosszú idősorok esetén felmerülő probléma, ahol a modell sztochasztikus része lehet stacioner és integrált folyamat is. Mivel a hagyományos egységgyöktesztek rendkívül érzékenyek az adatgeneráló folyamat determinisztikus részének specifikációjára, ezért a strukturális törések modellekbe történő explicit beépítése jelenthet ebben az irányban járható utat. A gyakorlatban azonban sokszor nem ismert előre a strukturális törés időpontja, vagy nem egyértelmű, mettől meddig tart, így nem merül fel az a lehetőség, hogy az idősorokat a törések mentén részekre bontva vizsgáljuk. Utóbbi lehetőség a kisebb mintaelemszám miatt egyébként is kisebb erejű próbák elvégzését jelentené, illetve az egyes részmin-tákon születő esetleges ellentmondó eredmények megnehezítik az idősor egységes kezelését.

A tanulmányban példaként a 95-ös oktánszámú benzin heti árának idősorát használjuk. A benzin árát a legnagyobb magyar forgalmazó¹ hetente változtatja, egy héten belül nincs változás, azaz egyéb hatás. A felhasznált idősor a 2000 és 2010 közötti heti adatok alapján mintegy 560 elemű.

Elsőként példát mutatunk be arra, amikor a strukturális törés egyértelműen látszik, így kezelése feltétlenül szükséges. Ez a példa inkább bevezető jellegű, a probléma lényegét igyekszik bemutatni. A második fejezetben röviden áttekintjük a strukturális törések és az egységgyök kapcsolatát. A harmadik fejezet a benzin nagykereskedelmi árának alakulását vizsgálja az elmúlt tíz évben. Mivel az árak mintegy felét az adótaralom teszi ki, a tanulmányban az adóktól megtisztított árak elemzését helyezzük középpontba. Ezt követően a strukturális törések feltételezése mellett végezhető egységgyöktesztek egy lehetséges változatát, majd pedig a benzinár kapcsán kapott empirikus eredményeket mutatjuk be. Látható lesz, hogy az utóbbiakban már

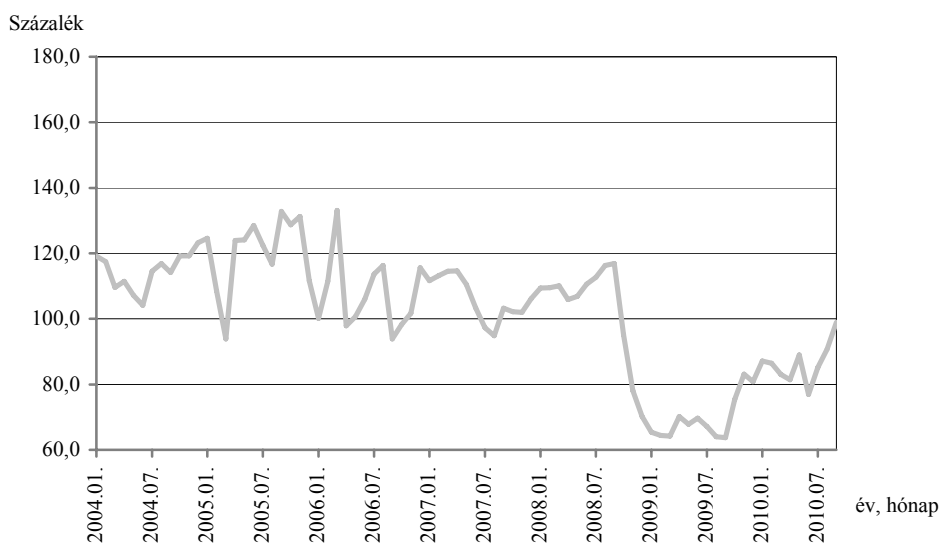
¹ A legnagyobb forgalmazó a magyar kiskereskedelmi piac 80-85 százalékát látja el. Az adatok forrása: Energia Központ Nonprofit Kft.

nem egyértelmű a törések pontos helye és jellege sem. Végezetül összefoglaljuk az eredményeket és felvázoljuk a további elemzési lehetőségeket.

1. Az idősoros strukturális törésekről

Hosszabb idősorok esetén az idősor viselkedése megváltozhat. Az idősor viselkedésében bekövetkezett változás oka nem egyszer nyilvánvaló, ilyennek tekinthető bizonyos idősorok (például a GDP alakulása) esetében a kelet-közép-európai viszonylatban a rendszerváltás, vagy legutóbb a globális pénzügyi válságból kiinduló 2008-2009-es gazdasági világválság. Példaként tekintsük a feldolgozóipari ágazatok közül a járműgyártás rendelésállományának havi alakulását 2004. január és 2010. szeptember között. (Lásd az 1. ábrát.) A vizsgált idősorunk az előző év azonos időszakához viszonyított változást mutatja, azért, hogy az idősor ne tartalmazzon szezonálisitást. Az 1. ábrából látható, hogy 2008. év harmadik negyedévében a rendelésállomány az előző év azonos időszakához képest jelentősen visszaesett, amely változás a már említett válságnak tulajdonítható.

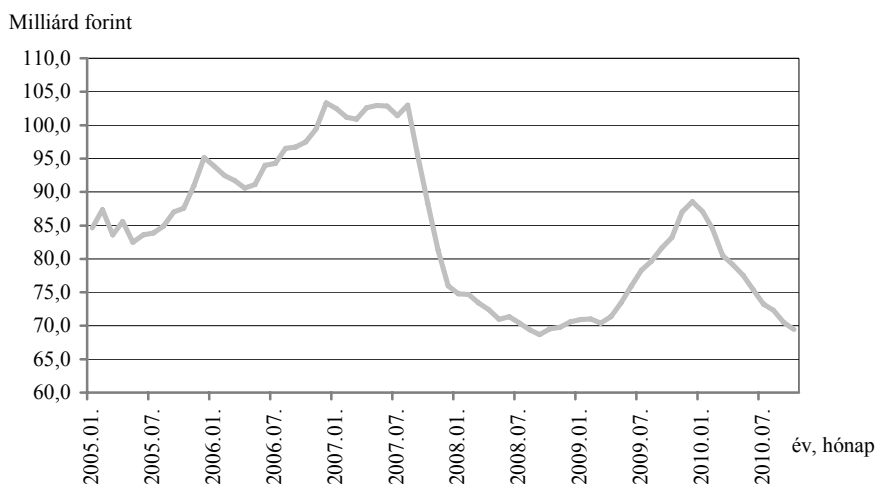
1. ábra. A járműgyártás havi rendelésállománya 2004. január és 2010. szeptember között (összehasonlító áron, index: az előző év azonos időszaka = 100,0 százalék)



Forrás: KSH stADAT-rendszer.

Egy másik példán látható, hogy 2007 közepén a háztartásoknak nyújtott áruvásárlási és egyéb hitelek állományában (lásd a 2. ábrát) is jelentős csökkenés következett be. A főként forintban nyújtott hitelekről a lakosság ekkor kezdett áttérni a kedvezőbb kamatozású, szabad felhasználású, gyakran devizaalapú jelzáloghitelekre, majd 2009 végére a tendencia megfordult és az áruvásárlási hitelállomány (forint és deviza egyaránt) ismét megugrott, mialatt a lakossági hitelezés gyakorlatilag minden szegmensében visszaesés történt.

2. ábra. A háztartásoknak nyújtott áruvásárlási hitelek havi állománya 2005. január és 2010. október között (hónap végén)



Forrás: Magyar Nemzeti Bank.

Annak ellenére, hogy mindkét példában felfedezhető valamilyen késleltetés, alkalmazkodás (a rendelésállomány csökkenése a csökkenő keresletre reagálva, a fogyasztói szokások megváltozása), mégis a törés időpontja ránézésre és logikai alapon is meghatározható.

2. Az idősoros strukturális törések és az egységgyök kapcsolata

Az egységgyök fogalma az ökonometriában elsősorban a sztochasztikus idősoelemzéshez kapcsolódik. Stacionáriusnak nevezünk egy folyamatot akkor, ha a folyamatot időközben ért sokkok hatása idővel elhal, elmúlik, elfelejtődik, vagy –

más megfogalmazásban – nincs tartósan hatással az idősor szintjére, így az idősor szintjén tulajdonképpen értelmezhető az átlag vagy a várható érték. Nemstacioner idősorok esetén a folyamatot időközben ért sokkok hatása nem múlik el. Ebbe a csoportba tartoznak az egységgyök-, illetve az ún. felrobbanó folyamatok is, bár gyakorlatilag elsősorban a stacioner folyamat – egységgyökfolyamat-megkülönböztetés, illetve annak tesztelése hangsúlyos és lényeges. Technikailag az utóbbi elkülönítés úgy értelmezhető, hogy a megfelelően definiált karakterisztikus polinom gyökei az egységkörön kívül, vagy olykor, az egységkörön helyezkednek el (a témáról lásd bővebben *Hunyadi* [1994]). Az egységgyökfolyamat tartalmilag így azt jelenti, hogy az idősort állandóan érő kisebb-nagyobb sokkok hatása folyamatosan beépül az idősorba, folyamatosan változtatja (eltolja) annak szintjét (átlagát, várható értékét), mégpedig időben növekvő varianciával.

Könnyen elképzelhető azonban olyan helyzet, hogy az idősort érő véletlenek hatása elfelejtődik, elmúlik, van azonban néhány (praktikusan véges, kevés számú) olyan kiugró, „outlier” sokk, amelyekre ez nem jellemző. Ebben az esetben nem igaz kizárólagosan az, hogy a sokkoknak nincs hatásuk az idősor szintjére, az állítás csak ezen kiugró sokkok hatásának kiszűrése mellett teljesül. Kézenfekvőnek tűnik tehát, hogy amennyiben empirikusan, a megfigyelt idősor alapján indokolható, akkor ezen sokkokat – amelyek az idősor szintjét (azaz átlagát, várható értékét) módosítják – feltárjuk, azonosítsuk. A tanulmányban bemutatott módszerek lényege ezen kiugró sokkoknak a kiemelése, amely sokkok lefutása modellezhető mind azonnali, mind fokozatosan bekövetkező hatásként.

A módszerek elsősorban az egységgyök tesztelésére szolgálnak, kihasználva azt az elméletileg is levezethető ténytet (lásd például *Perron–Vogelsang* [1992a]), hogy strukturális törés esetén, még az egyébként stacioner idősorokat is, a hagyományos egységgyöktesztek tévesen ismerik fel. Az előző fejezetben a strukturális törésekről megkezdett gondolatmenetet folytatva azt állítjuk, vannak olyan esetek, amikor a törés időpontja nem annyira egyértelmű. (Például azért, mert a vizsgált idősor több tényező kombinációjaként adódik. Erre lesz példa az, amikor az üzemanyagárat a nemzetközi olajármozgások és az árfolyam egyszerre változtatja, és a két hatás lehet akár egyirányú, akár ellentétes is.) Ilyenkor érdekes lehet a törés időpontjának a becslése, meghatározása, amennyiben exogén módon az nem adható meg.

Emellett a modellek logikája az, hogy a törések időpontját úgy válasszuk meg – tehát endogén módon –, hogy a kapott próbafüggvény értéke a lehető legkevésbé támogassa az egységgyök-hipotézist. Másrészt ki kell emelnünk, annak ellenőrzése, hogy létezik-e törés az idősorban, inkább implicit módon kerül csak tesztelésre, ugyanis a törések száma – ha úgy tetszik – explicit módon adott. Tehát a vizsgált kérdés megfogalmazható úgy, hogy az idősort ért sokkok között van-e olyan kiugró sokk, véletlen, amely a nemstacioner jelleget okozza, vagy a sokkok hatása időben egyébként (a kiemelt sokktól eltekintve) sem hal el.

3. A benzin nagykereskedelmi árának alakulása az elmúlt tíz évben

A benzin kiskereskedelmi árát meghatározó tényezők – a termelői áron és az adótartalmakon túl – a kiskereskedelmi és nagykereskedelmi árrés. Magyarországon az üzemanyagok árának nagy hányadát a különböző adók teszik ki. A Függelék I. tartalmazza az általunk vizsgált időszak pontos adókulcsait és adómértékeit, valamint a mediterrán tőzsdei benzinár és a dollár forintárfolyamának alakulását a vizsgált időszakban. A forgalmazó az üzemanyagok adó nélküli nagykereskedelmi árait folyamatosan a nemzetközi tendenciához igazítja úgy, hogy a belföldi árat a mediterrán térségből történő alternatív beszerzés költségei alapján határozza meg (a genovai tőzsde megelőző ötnapi jegyzési árainak átlagát növeli a vasúttal történő szállítás, valamint az importáló további költségeivel).²

Az általános forgalmi adó értéke 25,2 majd ismét 25,0 százalék volt a vizsgált időszakban, a jövedéki adó szintje pedig az időszak eleji literenkénti 93 forintról mintegy harmadával emelkedett az eltelt tíz évben. A Kőolaj és Kőolajtermék Készletező Szövetség díjának (KKKSZ-díj) mértéke elhanyagolható a többi tényezőhöz képest.³

Az üzemanyagárba beépülő nagykereskedelmi és kiskereskedelmi árrés elvileg nem nyilvános, az utóbbi kutanként jelentősen eltérő lehet. Jelenleg a nagykereskedelmi árrés 24, a kiskereskedelmi átlagosan 12 forint körül van (www.portfolio.hu).

Mivel a benzinár mintegy felét az adótartalom teszi ki, intuitíve is hihető, hogy csak az adótartalom miatt a benzin nagykereskedelmi ára tartalmazhat egységgyököt, ami a probléma módszertanilag nem megfelelő megközelítéséből következne. Ezért a dolgozat további részében az elemzést az adóktól (az általános forgalmi adótól, a jövedéki adótól, valamint a KKKSZ-díjtól) megtisztított adatokra végezzük el. Az adóktól ilyen módon megtisztított benzinár alakulását mutatja a 3. ábra.

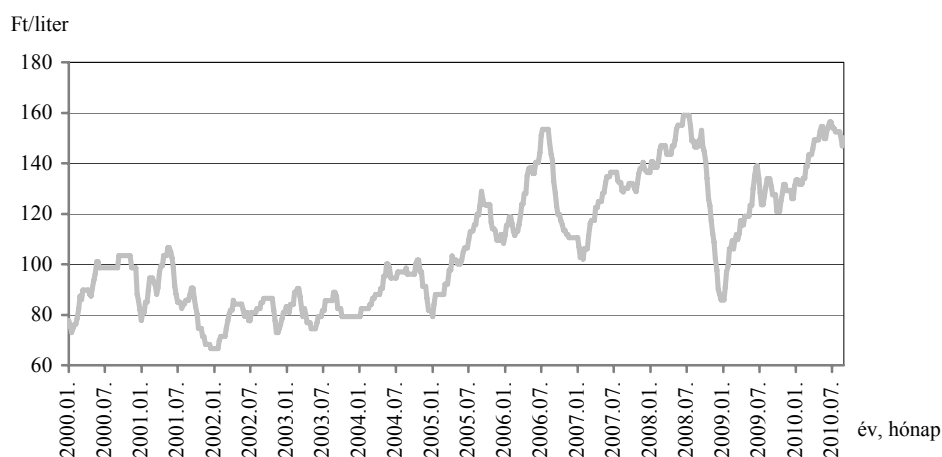
A benzin adóktól tisztított áralakulásában jól látszik a tőzsdei áralakulás és az árfolyam együttes hatása. Észrevehető, hogy a tőzsdei árak 2007–2008-as emelkedése az akkor erős forint miatt a nagykereskedelmi árak viszonylag alacsonyabb szintjével járt együtt. Mindemellett a 3. ábra alapján két esetben sejthető törés. Az egyik 2005 körül, amikor a nyersanyagárak alakulásában megindult egy emelkedés, illetve a másik 2008-ban, amikor a pénzügyi-gazdasági világválságnak és az azt követő tőzsdei árfolyamesésnek ugyanúgy érezhető volt a hatása. Amennyiben az adótartalomtól

² Ez a megállapodás még az 1990-es években alakult ki. Furcsasága, hogy az Adria-vezetéken egy csepp benzin sem érkezik. Magyarország a kőolajat Oroszországtól veszi, és saját maga dolgozza fel finomítóiban (*Sugár* [2011]).

³ Törvény írja elő, hogy Magyarország területén, biztonsági készletként a 90 napos átlagos hazai fogyasztásnak megfelelő mennyiségű kőolajat, benzint, és gázolajat kell tartani. A tárolás költségeit a Kőolaj és Kőolajtermék Készletező Szövetség tagjai fizetik éves díj formájában.

eltekintünk, a benzinár 1200 dolláros és 800 dolláros tonnánkénti tőzsdei árfolyam (vagy hordónkénti 140 és 80 dolláros olajár) mellett is ugyanannyi, azaz a különbözet a gyenge forintnak is tulajdonítható.

3. ábra. Adóktól megtisztított benzin (ölmozatlan 95-ös) nagykereskedelmi árának heti alakulása 2000. január és 2010. augusztus között



Forrás: Saját számítás a Nemzeti Adó- és Vámhivatal és a Magyar Szénhidrogén Készletező Szövetség adatai alapján.

Az előbbieknél megfelelően a tanulmány az idősorban két törés feltételezésével él, mivel a 3. ábra alapján ez a feltevés megfelelőnek tűnik. Másrésztől vissza kell ismét térnünk a benzinár több tényezőből álló jellegére. Az első törés talán kevésbé alátámasztható, elképzelhető az időszakot jellemző növekvő tendencia (trend) is. A forint/dollár árfolyam esetében elméletileg nem korrekt hosszú távon determinisztikus trendet feltételeznünk és hasonló érvekkel élhetünk a tőzsdei árak esetében is, valamint ugyanez elmondható a benzin nagykereskedelmi árának alakulására tett feltételezésünkről is.

A strukturális törések és egységgyöktesztek kapcsolatára visszatérve a próbák során a kérdésünk tulajdonképpen az lesz, hogy az egységgyök megléte robusztus-e a modellezett törésre, vagy a strukturális törés által meghatározott szintek körül az idősor már stacioner módon ingadozik. A bemutatott empirikus eredményeket egy, illetve két törés feltételezését lehetővé tevő tesztek elvégzésével kapjuk (*Perron–Vogelsang* [1992a], [1992b], illetve *Clemente–Montanes–Reyes* [1998]). Természetesen a törések száma elméletileg egynél vagy kettőnél tovább is emelhető, azonban a törések számának célszerű korlátot állítani. Túl sok törés modellezése egyrészt már az egységgyök logikájához közelebb álló, így elméletileg nem biztos, hogy indokol-

ható; másrészt pedig ebben az esetben kellő számú törés definiálása mellett az egyébként egységgyököt tartalmazó idősor is stacioner részekre bontható, ami szintén hibás modellspecifikációt jelent.

4. Egységgyök tesztelése strukturális törés mellett – elméleti áttekintés

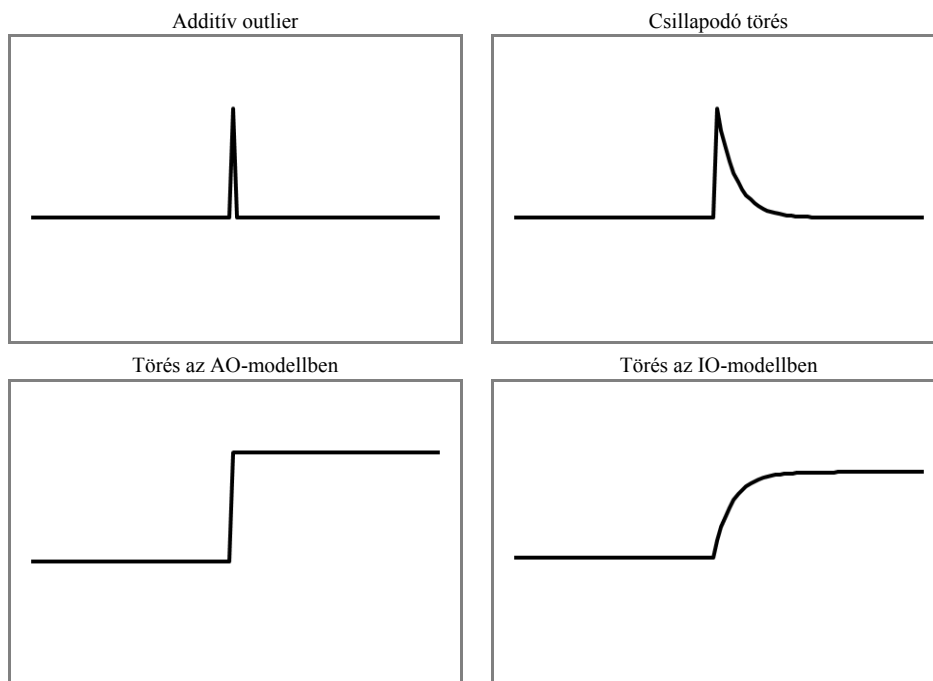
A strukturális törések melletti egységgyöktesztek elemzése többek között *Perron* 1989-es tanulmányáig nyúlik vissza (*Perron* [1989]). A törés időpontjának exogén módon történő kezelése (a priori ismerete) lehetővé teszi ugyan az idősor egységgyök voltának tesztelését az almintákon, azonban kisebb mintákon a próbák ereje csökken. Ennél fogva az idősorok egy része a stacionaritás egységgyöktesztekkel történő vizsgálata szempontjából a hagyományos, közismert módszerekkel nem kezelhető, és elengedhetetlennek tűnik olyan próbák kifejlesztése, amelyekbe a törés is beépített. *Perron* eredményeit érő legfőbb kritikák arra vonatkoztak, hogy a törés időpontja ezekben a modellekben kívülről adott, így a törés időpontjának előzetes kiválasztása megteremti az eredmények manipulálásának lehetőségét. Az optimális töréspont tesztelésére és becslésére több alternatív megoldás született, amelyek a törés időpontjának endogén, az adatoktól függő meghatározását teszik lehetővé. Ezúttal a tanulmány szempontjából fontosabb, a csupán szinteltolást modellező eredmények egy részét tekintjük át.

A sokszor alkalmazott *Zivot–Andrews*-próba (*Zivot–Andrews* [1992]) nullhipotézisében az egységgyök, alternatív hipotézisében pedig a trendtörés melletti stacioner folyamat szerepel. A hipotézisek nem kezelik szimmetrikusan a törés tényét, hiszen törés mellett elképzelhető, hogy az idősor stacioner, de tartalmazhat egységgyököt is, így a próba a nullhipotézis elvetését eredményezheti akkor is, ha az idősor sztochasztikus része egyébként integrált. Ugyanakkor, ha az idősorban törés van, a törés ténye mint információ nincs kihasználva, ami csökkenti a próbák erejét (*Kim–Perron* [2009]). Ez tulajdonképpen azt jelenti, a tesztelés során előfordulhat, hogy két rossz hipotézis közül kell választanunk.

Perron és *Vogelsang* csak szinteltolás mellett vizsgálták a strukturális töréses modelleket. Ennek két alesetét különböztették meg, az ún. AO- („additive outlier”) és az ún. IO- („innovative outlier”) egységgyökteszteket.

A dolgozatban ugyan végig az AO- és IO-rövidítésekre hagyatkozunk majd, azonban az idősoros „outlierek” elfogadott definíciói és a modellek angol elnevezései közötti összhang nem teljes, így érdemes a fogalmakhoz és jelentéseikhez néhány megjegyzést fűznünk. A 4. ábra az összehasonlítást segítő, sematikus módon mutatja be a következőkben tárgyalandó fogalmakat.

4. ábra. Idősoros „outlierek” és az egységgyöktesztek elnevezéseinek szemléltetése



Az általános terminológiában elfogadott definíció alapján az „additive outlier” olyan valós információn alapuló kiugró változás, amely csak egyetlen megfigyelési értékben van jelen. Csillapodó jellegű törésről (transitory change) akkor beszélünk, amikor az egyedi adat szintén valós információn alapul, de a kiugró változás után az idősor fokozatosan visszatér a kiugrás előtti szintre.

Szinteltolás (level shift) esetén a kiugró változást követően az idősornak a kiugrást követő valamennyi értéke ezzel a konstans értékkel tolódik el. Az angol terminológiában használt és a jelen dolgozatban bemutatott „additive outlier” és „innovative outlier” modellek így olyan szinteltolós modelleknek felelnek meg, ahol az eltolódás azonnal vagy fokozatosan (exponenciálisan csökkenő/növekedő módon, egyre kisebb súlyokkal) következik be. Ezekben a modellekben egyébként a kiugró változás időpontja előre nem is ismert, csak becsülhető.

Az AO- és IO-modell választása kapcsán érdemes felfigyelni arra, hogy modelljeink alapvetően sztochasztikusak, a keresendő kiugró adatot pedig kétféle módon is kezelhetjük. Tehát, döntésünktől függően, a két megközelítés más becslési eljárásokat követel meg.

A következőkben áttekintjük az említett AO- és IO-egységgyöktesztek lényegét. Az említett Perron–Vogelsang-tanulmányok csak az egy törés esetét vizsgálják, ezért

a példánkhoz kapcsolódóan a korábbiak ésszerű továbbgondolásával vázoljuk a modellek két törés melletti változatait is (*Clemente–Montanes–Reyes* [1998]). Mindkét esetben igaz az, hogy a nullhipotézis tartalmazza a törést (szinteltolást) és az egységgyököt, az alternatív hipotézisben pedig a(z eltolódó) szint körüli stationaritás szerepel, tehát a törés kezelése ilyen tekintetben szimmetrikus. Ebben az értelemben a törésnek még a stationer esetben is állandó hatása van az idősor szintjére, a többi sokknak azonban nincs. Így a törés mindkét esetben a modellek integráns része.

A tesztek logikája a tesztegyenletekben az egységgyök tesztelésére szolgáló t_α statisztika minimalizálása⁴, amely technika fennáll akkor is, ha a nullhipotézis a törést nem, csak az egységgyök létét foglalja magában (*Davies* [1987]). Ez lényegében azt jelenti, hogy a töréspontokat úgy választjuk meg, hogy a próbafüggvény értéke a lehető legkevésbé támogassa az egységgyök hipotézisét, hiszen a próba, a kiterjesztett Dickey–Fuller-teszthez hasonlóan, bal oldali kritikus tartománnyal rendelkezik.

A továbbiakban jelölje

- y_t – a megfigyelt idősort;
- T – a mintaelemszámot;
- L – a visszaléptetési (késleltetési, „lag-”) operátort;

egy törés feltételezése mellett

- T_b – a törés időpontját;

két törés feltételezése esetén pedig

- T_{b1} – az első törés időpontját, ahol $1 < T_{b1} < T$, illetve
- T_{b2} – a második törés időpontját, ahol $1 < T_{b1} < T_{b2} < T$.

Először az egytöréses modellek két változatát mutatjuk be.

Az AO-egységgyökteszt mellett a nullhipotézis a következőképpen fogalmazható meg:

$$H_0: y_t = \delta D(TB)_t + y_{t-1} + w_t, \quad t = 2, \dots, T,$$

ahol $D(TB)_t = 1$, ha $t = T_b + 1$, és 0 egyébként; a w_t hibatag stationárius és invertálható autoregresszív mozgóátlagolású folyamat, azaz $w_t \sim ARMA(p, q)$,

⁴ Praktikusán bal oldali kritikus tartománnyal rendelkező próbákban gondolkozunk, noha természetesen az egységgyök nullhipotézise kétoldali alternatív hipotézissel szemben is tesztelhető.

vagy $A^*(L)w_t = B(L)e_t$, ahol e_t független, azonos eloszlású 0 várható értékkel, konstans varianciával és véges negyedik momentummal, $A^*(L)$ és $B(L)$ pedig L p -ed, illetve q -ad rendű polinomjai, amelynek gyökei szigorúan az egységkörön kívül helyezkednek el. A w_t hibatag $w_t = A^*(L)^{-1} B(L)e_t = \psi(L)e_t$ mozgóátlag-reprezentációját felhasználva, a H_0 alatti modell – a későbbi értelmezés megkönnyítése végett – így

$$y_t = \delta D(TB)_t + y_{t-1} + A^*(L)^{-1} B(L)e_t \text{ vagy}$$

$$y_t = \delta D(TB)_t + y_{t-1} + \psi(L)e_t$$

formában írható.

Az előzők figyelembe vételével a modell várható értéke y_1 (a folyamat kezdő értéke) a törés időpontjáig, majd azután $y_1 + \delta$.

Az alternatív hipotézis pedig a következő:

$$H_1: y_t = c + \delta DU_t + v_t, \quad t = 2, \dots, T,$$

ahol $DU_t = 1$, ha $t > T_b$, és 0 egyébként; a v_t hibatag ugyanúgy stacionárius és invertálható autoregresszív mozgóátlagolású folyamat, azaz $v_t \sim ARMA(p+1, q)$, vagy $A(L)v_t = B(L)e_t$. A H_1 alatti modell – az előzőkhöz hasonlóan – így $y_t = c + \delta DU_t + A(L)^{-1} B(L)e_t$ írható.

Mindezek figyelembe vételével az alternatív hipotézis melletti modell várható értéke c a törés időpontjáig, majd azután $c + \delta$.

Beágyazott (nested) modellekről van szó, hiszen a nullhipotézisben megfogalmazott modell az alternatív hipotézisben megfogalmazottnak speciális aloszlása, amelyben $c = y_1$ és $A(L) = (1-L)A^*(L)$. Ugyan a beágyazottság a hivatkozott irodalmak egyikében sincs részletesen kifejtve, saját levezetés alapján behelyettesítéssel és átalakításokkal könnyen igazolhatjuk. A probléma megértése szempontjából is hasznos, hogy ez látszódjék, ugyanis első ránézésre az állítás nem tűnik magától értetődőnek.

Az előző megkötések esetén ugyanis az $A(L)$ $(p+1)$ -ed rendű polinom egyik gyöke 1. Ez azt jelenti, hogy az y_t idősorunk egységgyököt tartalmaz. Behelyettesítve az $A(L)$ előbbi kifejezését az átirat H_1 modellbe:

$$y_t = c + \delta DU_t + (1-L)^{-1} A^*(L)^{-1} B(L)e_t,$$

azaz, átszorozva mindkét oldalt $(1-L)$ -lel,

$$\begin{aligned}(y_t - y_{t-1}) &= (c - c) + \delta(DU_t - DU_{t-1}) + A^*(L)^{-1} B(L)e_t = \\ &= \delta D(TB)_t + A^*(L)^{-1} B(L)e_t,\end{aligned}$$

tehát a megszorítások igazolása esetén visszakapjuk a H_0 alatti modellt. (A $c = y_1$ megszorítás biztosítja, hogy a kezdő értékek megegyezzenek.)

Amennyiben a törés T_b időpontja ismert, a tesztelés a modell determinisztikus részének

$$y_t = \mu + \delta DU_t + \tilde{y}_t \quad t = 1, \dots, T$$

módon történő eltávolítása után a megfelelő tesztgyenlet becslését és az $\alpha=1$ (azaz egységgyök) hipotézistesztelését jelenti a reziduumban:

$$\tilde{y}_t = \sum_{i=0}^k \omega_i D(TB)_{t-i} + \alpha \tilde{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta \tilde{y}_{t-i} + e_t, \quad t = k+2, \dots, T.$$

A $\Delta \tilde{y}_{t-i}$ késleltett differenciák szerepeltetésének logikája hasonló, mint az a kiterjesztett Dickey–Fuller-teszt esetében ismert (*Said–Dickey* [1984]). A $D(TB)_{t-i}$ dummy változók pedig ahhoz szükségesek, hogy a t_α tesztstatisztika határeloszlása a későbbiekben kezelhető legyen. Az első lépcsőben ugyanis az idősor részintervallumai különböző módon lettek a determinisztikus komponensből megtisztítva, és belátható, hogy a törés időpontjában a különbség a reziduumban aszimptotikusan nem tűnik el. A reziduumban felírt segédregresszió $\omega_0 D(TB)_t$ tagja ezt hivatott kontroll alatt tartani, a $\omega_i D(TB)_{t-i}$ ($i = 1, \dots, k$) tagok pedig biztosítják, hogy a próbafüggvény eloszlása független legyen majd a k késleltetésszámtól (lásd bővebben *Perron–Vogelsang* [1992b]). A k késleltetésszám (amely a hibatag korrelációs struktúráját kezeli) meghatározása több módon történhet, illetve ismeretlen törésidőpont esetén ennek becslése is feladat. Az AO-modell esetében tehát egy kétlépcsős becslési, tesztelési eljárásról beszélünk.

Az IO-egységgyökteszt alapvető feltevése, hogy a „kiemelt” sokk hatása, lefutása időben hasonló más sokkokéhoz, tehát az alkalmazkodás nem azonnali, a szinteltolódás fokozatosan, időben elhúzódva következik be. Ennek alapján a nullhipotézisnek megfelelő modell a következő:

$$H_0: y_t = y_{t-1} + \psi(L)(e_t + \theta D(TB)_t), \quad t = 2, \dots, T,$$

ahol $\psi(L) = A^*(L)^{-1} B(L)$ a hibatag mozgóátlag-reprezentációja, $A^*(L)$ és $B(L)$ pedig megfelelnek a korábban definiált polinomoknak.

A sokk azonnali hatása az idősor szintjére (átlagára, várható értékére) θ , rekurzív behelyettesítéssel pedig könnyen látható, hogy a hosszú távú hatás $\psi(1)\theta$.

Az alternatív hipotézis pedig a következő:

$$H_1: y_t = a + \varphi(L)(e_t + \delta DU_t), \quad t = 2, \dots, T,$$

ahol $\varphi(L) = A(L)^{-1} B(L)$, $A(L)$ és $B(L)$ pedig megfelelnek a korábban definiált polinomoknak. A sokk azonnali hatása az idősor szintjére (átlagára) δ , a hosszú távú hatás pedig az előzőhöz hasonlóan $\varphi(1)\delta$.

A hipotézisek felírásából könnyen látható, hogy az AO-modell esetében a w_t vagy v_t hibatag dinamikája nincs hatással a szinteltolásra, addig az IO-modell esetében a törés dinamikája, időbeli lefutása ugyanaz, mint a fenn definiált e_t hibatagé. Ilyen módon a törés gyakorlatilag beépül a modell sztochasztikus részébe.

Ezt követően a következő egyenlet segítségével becsülhető a modell:

$$y_t = \mu + \delta DU_t + \theta D(TB)_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + e_t, \quad t = k+2, \dots, T.$$

Az IO-modell esetében a kétlépcsős becslés nem adekvát, hiszen a törés leválasztható, annak dinamikája nem épül be a modell sztochasztikus részébe, így a tesztegyenlet becslése egy lépcsőben történik.

Más szakirodalmi hivatkozás is (lásd például *Perron-Vogelsang* [1992a]) úgy választja meg a töréspontot, hogy az α együttható t statisztikájának értéke minimális legyen, azaz a lehető legkevésbé legyen kedvező az egységgyök nullhipotézisének. Szintén meghatározandó a tesztegyenletekben a k késleltetésszám. Utóbbira több megoldás alkalmazható, amely mellett majd a próbafüggvény eloszlása származtatható: k lehet előre meghatározott az adatoktól függetlenül; megválasztható olyan módon, ahogy a kiterjesztett Dickey–Fuller-teszt esetén tesszük (utolsó késleltetett szignifikáns differencia, t -statisztika alapján) vagy F - (likelihood ratio) statisztika alkalmazásával lépésenként m , illetve $(m+1)$ késleltetést összevetve.

Ahogy azt a korábbiakban már említettük, Perron és Vogelsang szinteltolós modelljét Clemente, Montanes és Reyes fejlesztették tovább, két törést engedve meg az idősorban. Mivel a gondolatmenet és a logika megegyezik az előzőekben bemutatottakkal, a teszteket csak a hipotézisek és a segédregressziók rövid bemutatásával ismertetjük.

Az AO-egységgyökteszt hipotézisei:

$$H_0: y_t = \delta_1 D(TB)_{1t} + \delta_2 D(TB)_{2t} + y_{t-1} + w_t, \quad t = 2, \dots, T,$$

$$H_1: y_t = c + \delta_1 DU_{1t} + \delta_2 DU_{2t} + v_t, \quad t = 2, \dots, T,$$

ahol $D(TB)_{1t} = 1$, ha $t = T_{b1} + 1$, és 0 egyébként illetve $D(TB)_{2t} = 1$, ha $t = T_{b2} + 1$, és 0 egyébként; $DU_{1t} = 1$, ha $t > T_{b1}$, és 0 egyébként illetve $DU_{2t} = 1$, ha $t > T_{b2}$ és 0 egyébként, illetve $T_{b2} > T_{b1} + 1$; w_t és v_t pedig a korábbiaknak megfelelően stacionárius és invertálható autoregresszív mozgóátlagolású folyamatok.

Az eljárás itt is ugyanúgy kétlépcsős. A segédregresszió a determinisztikus rész

$$y_t = \mu + \delta_1 DU_{1t} + \delta_2 DU_{2t} + \tilde{y}_t$$

módon történő eltávolítása után a következő:

$$\tilde{y}_t = \sum_{i=0}^k \omega_{1i} D(TB)_{1t-i} + \sum_{i=0}^k \omega_{2i} D(TB)_{2t-i} + \alpha \tilde{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta \tilde{y}_{t-i} + e_t, \quad t = k+2, \dots, T.$$

Az IO-egységgyök teszt hipotézisei a következők:

$$H_0: y_t = y_{t-1} + \psi(L) \left(e_t + \theta_1 D(TB)_{1t} + \theta_2 D(TB)_{2t} \right), \quad t = 2, \dots, T,$$

$$H_1: y_t = a + \varphi(L) \left(e_t + \delta_1 DU_{1t} + \delta_2 DU_{2t} \right), \quad t = 2, \dots, T,$$

A tesztelés ismét egy lépcsőben történik, a következő módon:

$$y_t = \mu + \delta_1 DU_{1t} + \delta_2 DU_{2t} + \theta_1 D(TB)_{1t} + \theta_2 D(TB)_{2t} + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + e_t, \\ t = k+2, \dots, T.$$

A k késleltetésszám és a töréspontok megválasztása az előzőkkel analóg módon történik. Bár a modellünk lehet mind idő-, mind állapotterét tekintve folytonos, megfigyeléseink csak diszkrét időpontokban jelentkeznek, ennél fogva a törés időpontjára tett becslések során is csak ezen diszkrét időpontok közül válogathatunk. A töréspont(ok) megválasztása úgy történik, hogy a korábbiakban ismertetett eljárást a t_α statisztika minimalizálására minden lehetséges kombinációban elvégezzük. Eredeti-

leg ezen – tulajdonképpen kereső – eljárás során nyesett (*trimmed*) mintát használtak (erről lásd például *Banerjee et. al.* [1992]). Később több szerző is támaszkodott olyan érvelésekre, melyek szerint a töréspont keresését nem indokolt az idősor nyesésével elvégezni, ugyanis a próbafüggvény eloszlása ezen megkötés nélkül sem elfajuló (erről lásd többek között *Zivot–Andrews* [1992], *Perron–Vogelsang* [1992a] illetve *Clemente–Montanes–Reyes* [1998]).

Idősora válogatja ugyan, de a töréspont becslése egyébként is félrevezető lehet, ha a lehető legteljesebb mintát használjuk, ezért az idősor elejének és végének egy részétől, gyakorlati megfontolások alapján, eltekinthetünk a becslési eljárás során, ahogy azt jelen tanulmányban bemutatjuk.

5. Empirikus eredmények a hazai benzinár példáján

Tanulmányunkban az előzők alapján tehát azt vizsgáljuk, hogy a nagykereskedelmi benzinárban meglevő (előre nem ismert) szinteltolások körül az idősor stacioner vagy pedig egységgyököt tartalmaz-e, azaz az egységgyök jelleg robusztus-e a szinteltolás modellezésére vagy sem. Az eredményeket az összehasonlítás kedvéért egy törés feltételezése mellett is bemutatjuk.⁵

A tesztek elvégzése tehát mind egy, mind két törés feltételezése mellett két típusú (AO- és IO-) teszt elvégzését jelenti. Mivel a modellek mögötti logika más (azonnal vagy fokozatosan következik be a szinteltolódás), ezért a tesztek nemcsak a szinteltolás becslést, endogén módon meghatározott időpontjában különbözhetnek, hanem – és utóbbi a végeredmény szempontjából talán lényegesebb – abban is, hogy az idősor egységgyök vagy stacioner volta mellett döntünk-e.

Az eredmények részletes közlése nélkül megemlítjük a hagyományos egységgyöktesztek konklúzióit is. Ezt követően térünk ki a dolgozat központi témáját adó, szinteltolást tartalmazó tesztek eredményeire. A megállapításunk az volt, hogy a teljes idősort vizsgálva valamennyi hagyományos teszt (például a kiterjesztett Dickey–Fuller-teszt) az idősor egységgyök volta mellett dönt. Két-, három-, négy-, illetve öt éves „gördülő” módon kijelölt ablakokra azonban az eredmények nem egybehangzóak. Ez egyrészt a későbbiekben megnehezíti az idősor egységes kezelését, másrészt módszertani problémákat is felvet. Többek között a kiterjesztett Dickey–Fuller-tesztre is igaz, hogy a teszt csak abban az esetben támogatja az egységgyök hipotézisének elvetését, amennyiben a próbafüggvény értéke nagyon ellentmond a

⁵ A számítások részletes eredményeit a Függelék II. tartalmazza. A számítások a Stata 11.1 programcsomag felhasználásával készültek.

nullhipotézisnek. Ráadásul kisebb minták esetében a próbák ereje gyengébb, így nagyobb a másodfajú hiba elkövetésének a valószínűsége is.

Egy strukturális törést beépítve, az AO- és az IO-tesztek eredményei külön-külön egybehangzóak a törés időpontját illetően. Az 1. és 2. táblázat, valamint az 5. és 6. ábra a becslések főbb eredményeit mutatják. (A Függelék II. olyan eseteket is tartalmaz, amikor a minta elejének és végének különböző nyesése mellett döntöttünk, ez a fejezet az (önkényesen választott) 5-5 százalékos melletti eredményeket tartalmazza). A továbbiakban a tesztek elméleti áttekintése során használt jelölésrendszert használjuk.

Az AO-modell egy 2005. szeptember 16-i töréspontot mutat, ebben az esetben egy egyszeri, azonnali szinteltolásról van szó, és az 5. ábrával egybehangzóan ez az időpont az, amely az idősort egy alacsonyabb és egy magasabb várható értékű (a becsült $\hat{\delta}$ együttható alapján átlagosan 41,6 forinttal magasabb) részre bontja. Érdekes kiemelnünk, hogy az AO-modell esetében a kiemelt t_{α} statisztika közel van a kritikus értékhez, így mechanikusan a szinteltolás melletti stacionaritás mellett döntենek, amely azonban az időszak második felében történő áralakulást tekintve nem biztos, hogy helytálló.

Az IO-modell esetében a törés bekövetkezésének az időpontja 2004. december 31., nagyjából ekkorra tehető nemcsak a hazai, de a mediterrán tőzsdén is elinduló áremelkedési tendencia, majd a benzinár megmaradt a viszonylag magasabb szinten. Az elméleti összefoglalóban közöltekkel összhangban mindenképpen érdemes felhívni a figyelmet, hogy az azonnali emelkedés 1,2 forint volt (a táblázatban ugyanúgy $\hat{\delta}$ -pal jelölt, de tartalmilag az előző AO-modelltől teljesen eltérő, és ez igaz a μ módon jelölt konstansra is.). Ennek az 1,2 forintos elmozdulásnak a hosszú távú hatása exponenciálisan gyűrűzik be, ez a hosszú távú hatás jelenti a szinteltolást, amely eredmény az IO-modell konstrukciójából következően nem közvetlenül adódik. Mindenképpen érdekes eredménynek tartom a hosszú távú hatás kiszámítását. Saját levezetés alapján, az IO-modell tesztegyenletét felhasználva, rekurzív módon behelyettesítve, a δ hosszú távú hatását szeretnénk tehát számszerűsíteni. A behelyettesítést elvégezve, majd kiemelve a δ -t, adódik a t -edik időszakra a δ begyűrűző hatása:

$\delta(DU_t + \alpha DU_{t-1} + \alpha^2 DU_{t-2} + \dots)$. Amennyiben a hosszú távú hatást szeretnénk meghatározni, ennek értéke – ismerve az előbbi kifejezés változóinak tartalmát – a mértani sor összegképletét felhasználva $\delta \frac{1}{1-\alpha} = \frac{\delta}{1-\alpha}$ módon számítandó. Így a példánk kapcsán az 1,2 forintos azonnali elmozdulás hosszú távú hatása $\frac{1,2211}{0,0278} \approx 43,92$ forint,

ez összességében az azonnali elmozduláshoz képest mintegy negyvenszeres eltolódást jelent, ami jelentősnek mondható, hiszen az adóktól megtisztított benzinár literenként 70 és 160 forint között mozgott a vizsgált időszakban.

A kritikus érték alapján azonban látható, hogy a törés beépítése ellenére az egységgyök hipotézisét nem tudjuk elvetni 5 százalékos szignifikanciaszinten az IO-modell esetében.

1. táblázat

Az AO-egységgyökteszt eredményei (egy törés mellett)

T_b	Számított érték	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}$	$(\hat{\alpha}-1)$
2005. szeptember 16.	együttható	88,5270	41,5830	-0,0396
	<i>t</i> -statisztika		35,2810	-4,0200

Megjegyzés. Egységgyök kritikus érték 5 százalékos szignifikanciaszinten: -3,5600.

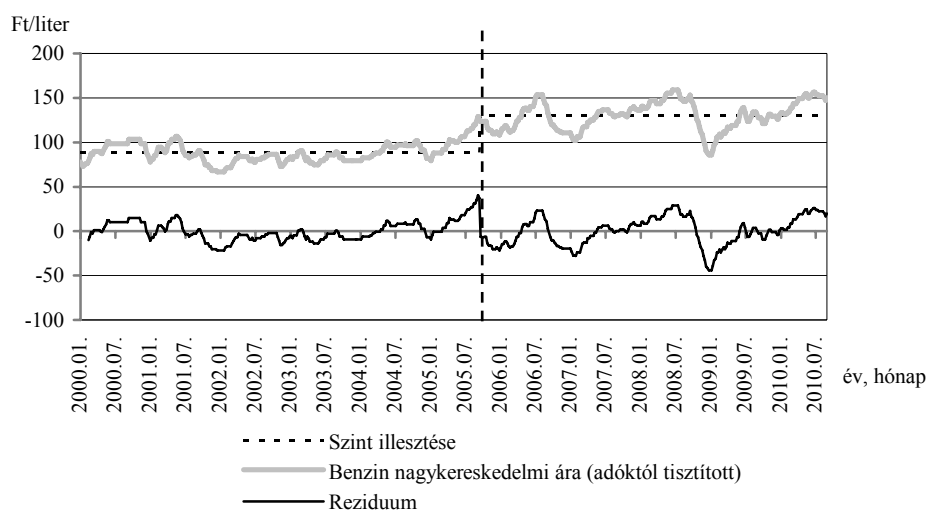
2. táblázat

Az IO-egységgyökteszt eredményei (egy törés mellett)

T_b	Számított érték	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}$	$(\hat{\alpha}-1)$
2004. december 31.	együttható	2,4366	1,2211	-0,0278
	<i>t</i> -statisztika		3,6650	-4,1470

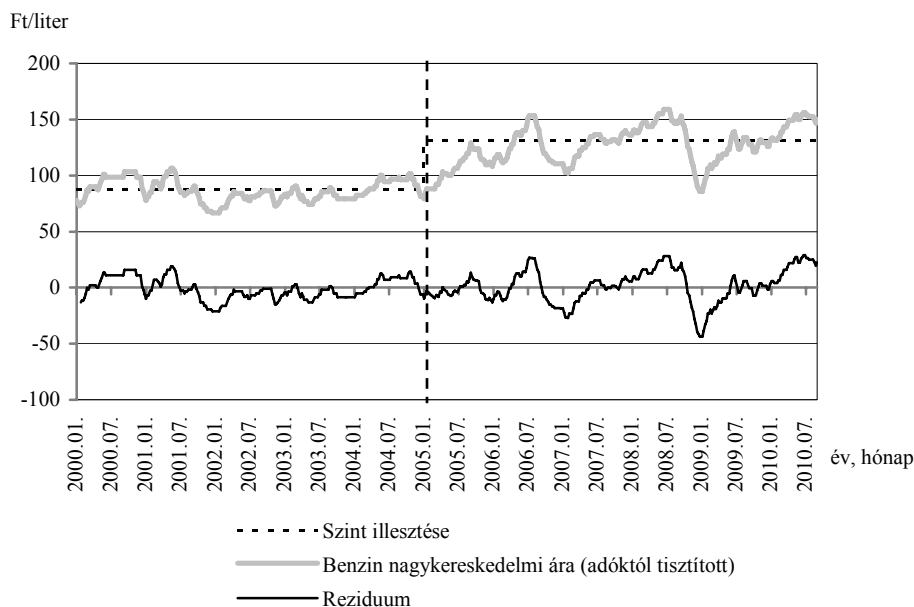
Megjegyzés. Egységgyök kritikus érték 5 százalékos szignifikanciaszinten: -4,2700.

5. ábra. Az AO-egységgyökteszt eredményei (egy törés mellett)



Megjegyzés. Itt, valamint a 6–8. ábrákban a függőleges szaggatott vonal a töréseket jelöli.

6. ábra. Az IO-egységgyökteszt eredményei (egy törés mellett)



Két strukturális törést megengedve, az eredmények már különböző típusú (AO- vagy IO-) teszteken belül is eltérők, attól függően, hogy az idősor szélein a minta mekkora részétől tekintettünk el a próba elvégzése során. Azonban nemcsak a törések becsült időpontjait illetően térnek el az eredmények, hanem azon túl is.

Az 3. és 4. táblázat, valamint a 7. és 8. ábra a becslések főbb eredményeit mutatják (a fejezet ismét az 5-5 százalékos nyelés melletti eredményeket tartalmazza). Érdeemes felhívni a figyelmet arra, hogy ebben az esetben a második törés után a szinteltolás 5 százalékos szignifikanciaszinten már nem szignifikáns. Ennek oka lehet egyrészt a kisebb mintaelemszám az idősor végén; másrészt az is, hogy a válság a benzinár hirtelen esését, majd újbóli emelkedését eredményezte, tehát egy oda-vissza korrekció viszonylag gyorsan történt meg. Így szó szerint szignifikáns szinteltolás nem is történt. Az egy törést tartalmazó modellekhez hasonlóan a szinteltolás hosszú távú hatása itt is kiszámítható:

$$\frac{1,2671}{0,0283} \approx 44,77 \text{ forint, illetve } \frac{-0,1181}{0,0283} \approx -4,17 \text{ forint.}$$

Bár az utóbbi nem szignifikáns, ennek kritikátlan elfogadása nem feltétlenül helyes, hiszen a válság utáni időszak meglehetősen rövid, így a szinteltolás

inszignifikanciája az adatok alapján csak kevésbé igazolható, főleg ha figyelembe vesszük azokat az árváltozásokat, amelyek a vizsgált időszakon kívül estek (2010 augusztusa után). Részben ezért is érdemes az idősort más nyesésértékek mellett is vizsgálni. Ahogy a modellek bemutatásakor említettük, az idősor elejének és végének a nyesése elméletileg nem indokolt. A becslés menetét tekintve ennek annyiban van jelentősége, hogy a törések lehetséges időpontjait a nyesett minta időpontjaira szűkítjük. Elképzelhető természetesen, hogy a minta különböző nyesése mellett más eredményeket kapunk, mint egyébként, de ez az eredmények robusztusságának ellenőrzésére jó. Másrészt egy alkalmasan megválasztott nyesésarányal elkerülhető az, hogy a becsült töréspont a minta szélére essék, hiszen így a törés/szinteltolás az idősor rövidege miatt kevésbé jól támasztható alá.

A Függelék II. táblázatai alapján, a minta különböző mértékű nyesése mellett, a szinteltolások pontbecslése is különböző, az AO-modell inkább az első, az IO-modell inkább a második időpont megválasztásában robusztusabb. 5 százalékos szignifikanciaszinten a döntések sem egybehangzók arra vonatkozóan, hogy szignifikáns-e a szinteltolódás. Mindezen túl azonban sem az AO-, sem az IO-modellek esetében nem tudjuk elvetni 5 százalékos szignifikanciaszinten a nullhipotézist, miszerint a benzinár alakulása szinteltolás mellett egységgyök. Ugyanakkor a törések beépítésével az egységgyököt tesztelő próbafüggvényérték jóval közelebb van a számított kritikus értékhez, mint a törés beépítése nélkül.

3. táblázat

Az AO-egységgyökteszt eredményei (két törés mellett)

T_{b1}	T_{b2}	Számított érték	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$(\hat{\alpha}-1)$
2005. szeptember 16.	2008. november 28.	együttható	88,5270	42,0264	-1,2482	-0,0424
		t-statisztika		31,3230	-0,6930	-4,2080

Megjegyzés. Egységgyök kritikus érték 5 százalékos szignifikanciaszinten: -5,4900.

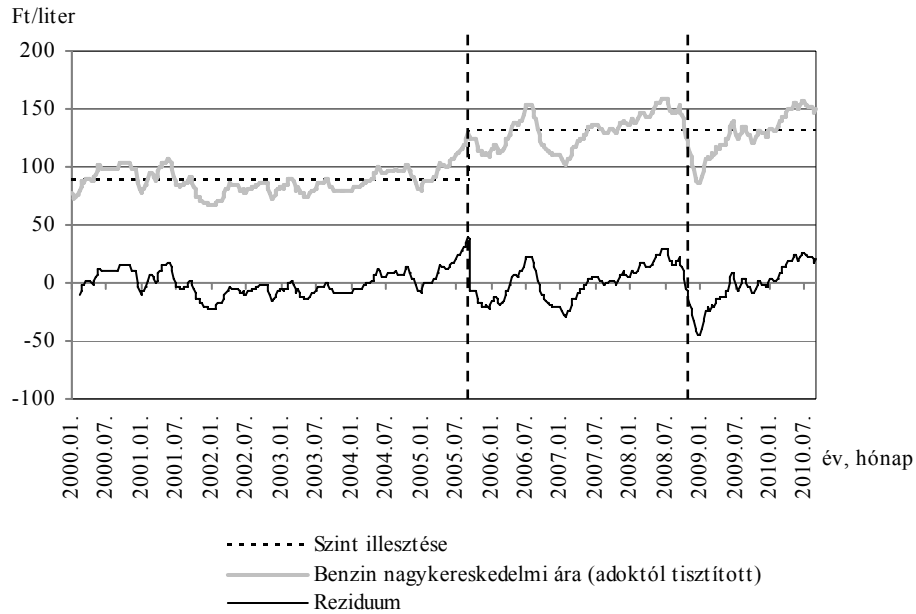
4. táblázat

Az IO egységgyök teszt eredményei (két törés mellett)

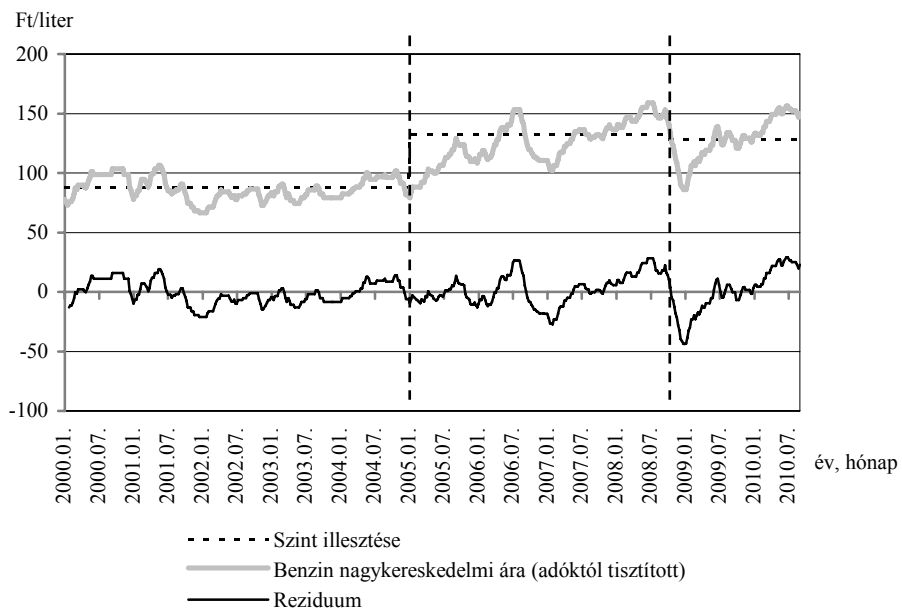
T_{b1}	T_{b2}	Számított érték	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$(\hat{\alpha}-1)$
2004. december 31.	2008. szeptember 12.	együttható	2,4778	1,2671	-0,1181	-0,0283
		t-statisztika		3,7130	-0,4100	-4,1970

Megjegyzés. Egységgyök kritikus érték 5 százalékos szignifikanciaszinten: -5,4900.

7. ábra. Az AO-egységgyökteszt eredményei (két törés mellett)



8. ábra. Az IO-egységgyökteszt eredményei (két törés mellett)



Az AO- és IO-modellekhez kapcsolódva elmondhatjuk még, hogy a becült illetve számított szintek egy illetve két törés feltételezése esetében is nagyon hasonló eredményeket adtak (40 körüli illetve néhány forintos eltolódások – utóbbi egyébként nem volt szignifikáns). Ez empirikusan is nagyon jól mutatja, hogy mindkét modell ugyanazt, tehát az idősrnak a szintek körüli sztochasztikus viselkedését (egységgyök vagy stacioner voltát) vizsgálja. A hangsúly azonban elsősorban azon van, hogy a szinteltolás folyamatát hogyan modellezzük, hogyan emelik ki azt az egy vagy két lehetséges kiugró változást, amelyek az idősorok nemstacioner jellegét feltételezhetően okozhatják. Így a két modell közüli választás az idősor jellegének és a modellező adekvát döntésének is függvénye.

6. Összefoglaló következtetések

A tanulmányban a strukturális törés(ek)nek az idősorok stacionaritásának vizsgálatát megnehezítő tulajdonságát tekintettük át. A vizsgálat eredménye rámutat egy olyan lehetséges módszertanra, illetve annak gyakorlati alkalmazására, amikor a sztochasztikus elemzési szemlélet, illetve az idősoros törések alkalmazása található.

A témaválasztást a benzin legnagyobb hazai forgalmazója által megállapított nagykereskedelmi ár alakulásának vizsgálata indokolta, ugyanis a determinisztikus trend feltételezését elméletileg nem tartottuk helyesnek, másrészt az idősor szemmel láthatóan strukturális törés(ek)e)t tartalmaz. Az empirikus példa kapcsán arra a megállapításra jutottunk, hogy az adóktól megtisztított benzinár egységgyök tekintetében robusztus a strukturális törésre (szinteltolásra). Ez azt jelenti, hogy a vizsgált idősor nem stacioner módon ingadozik adott szint körül, hanem a strukturális törés beépítése mellett is alapvetően az egységgyök léte mellett döntünk. Bemutatásra került a modell olyan továbbgondolása is, ahol a törés begyűrűző hatása, nagysága kiszámítható akkor is, amikor az ránézésre egyébként nem magától értetődő, nem nyilvánvaló és csak közvetetten számítható.

A későbbi modellezésnél, elemzéseknél és előrejelzésnél mindezek alapvető relevanciával bírhatnak. A megállapítás azért is kiemelkedő fontosságú, mert kiindulópontunk az volt, hogy a hagyományos egységgyöktesztek a strukturális törés mellett egyébként stacioner idősorokat is tévesen egységgyökfolyamatként ismernek fel. A használt elemzési módszertan központi gondolata, hogy egy-egy kiugró sokk (véletlen) hamis egységgyököt vihet a folyamatba, így kézenfekvő ezt a sokkot megkeresni, és külön kiemelve a modellbe építeni, illetve endogén módon úgy meghatározni a próbafüggvény értékét, hogy az a lehető legkevésbé támogassa az egységgyök hipotézisét.

A törések létének előzetes tesztelése a korrekt végeredményekhez elengedhetetlen. A tanulmányban vizsgált esetekkel (nincs törés, egy vagy két törés van az idősorban) tulajdonképpen olyan modellt kényszeríthetünk az idősorra, amely egyébként nem megfelelő. Erre a problémára is vannak megoldások (lásd erről bővebben például *Kim–Perron* [2009]). Másrészt az itt bemutatott módszertan, amely egyébként logikáját tekintve a kiterjesztett Dickey–Fuller-tesztből nőtt ki, ugyanúgy szimulációs eredményeken alapul, ahogy a többi egységgyökteszt is, így eredményeinket ennek ismeretében kell értékelnünk. A tesztek tulajdonságairól és erejéről készült eredményekről lásd például *Perron–Vogelsang* [1992a], illetve *Kim–Perron* [2009].

Módszertani oldalról a strukturális törések és a stacionaritás vagy annak hiánya együttes modellezésének vizsgálata rendkívül gazdag szakirodalmi háttérrel rendelkezik, aminek áttekintése nem volt a tanulmány témája, de további kutatási irányoknak utat adhat. Érdekes például megvizsgálni a jövőben a trendtöréses, illetve a trend–konstans töréses modelleket, akár a benzin árfolyamán is. Ilyen modellekről lásd bővebben például *Perron* [1997] vagy a már említett *Kim–Perron* [2009].

Meg kell ugyanakkor jegyeznünk, hogy a meglehetősen bőséges irodalom ellenére a témát érintő és tagláló empirikus alkalmazások száma még viszonylag kevés. Gyakorlati modellezési szempontból végiggondolva, a probléma rendkívül időszerű, hiszen ha csak a közelmúltat vizsgáljuk, a válság miatt nagyon sok idősor tartalmaz törést, viszont az eltelt két-három év már havi adatok esetén sem feltétlenül elég, hogy a törés mentén részekre bontott idősorokat módszertanilag is meggyőző és hiteles eredményekkel alátámasztva elemezni tudjuk. Így a jövőben minden bizonyosan járható út olyan módszertanok kifejlesztése, amelyek a töréseket valahogyan explicit módon építik be a modellekbe, ugyanis ha önkényesen eltekintünk az idősoros töréstől, sem a probléma, sem a következmények nem igazán jól megfoghatók, elemezhetők. Egyébként a strukturális törések kezelésére az említetteken kívül is áll rendelkezésre módszertan (például szezonális kiigazítás vonatkozásában⁶), a tanulmány központi témája ezúttal azonban az egységgyökprobléma vizsgálata volt. Mindezek mellett érdemes utalnunk rá, hogy a törések ilyen módon történő kezelése előrejelzéseknél kevésbé alkalmazható, hiszen a modell nem tesz külön feltételezést például arra, hogy a töréseknek milyen időbeli előfordulásuk van, tehát a jövőre vonatkozóan a következő törés várható időpontja például nem becsülhető.

⁶ Az Eurostat által kifejlesztett és ajánlott Demetra-program is tartalmaz a törések kezelésére alkalmazásokat (l. <http://circa.europa.eu/irc/dsis/eurosam/info/data/demetra.htm>).

Függelék I.: A tanulmányban felhasznált adótételek, valamint árfolyamok alakulása

*Az általános forgalmi adó alakulása, 2000. január és 2010. augusztus között
(százalék)*

Időszak	Általános forgalmi adó
2000. január 1. – 2005. szeptember 30.	25
2005. október 1. – 2009. június 30.	20
2009. július 1. –	25

*A jövedéki adó alakulása, 2000. január és 2010. augusztus között
(forint/liter)*

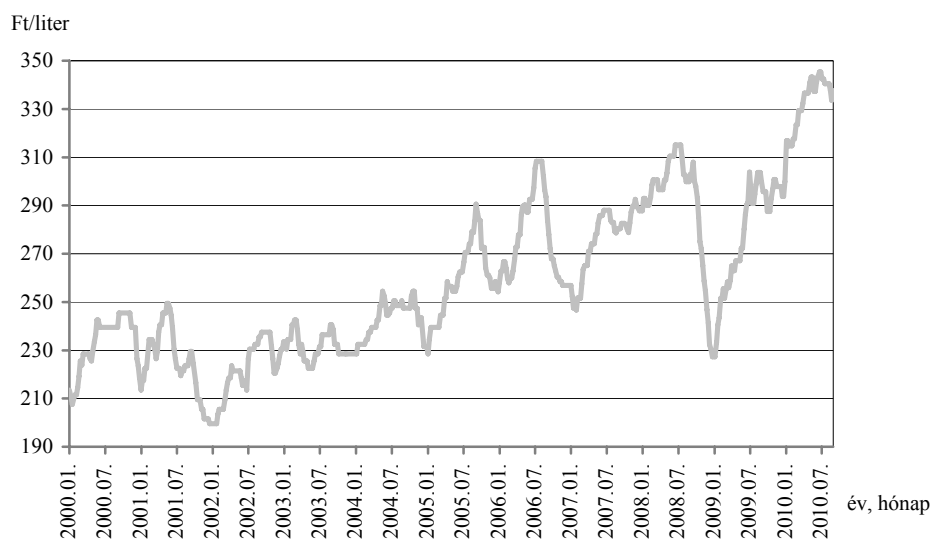
Időszak	Jövedéki adó
2000. január 1. – 2002. június 30.	93,0
2002. július 1. – 2004. május 22.	103,5
2004. május 23. – 2004. június 3.	101,9
2004. június 4. – 2004. június 20.	101,1
2004. június 21. – 2004. június 27.	101,9
2004. június 28. – 2004. július 26.	103,5
2004. július 27. – 2004. október 31.	101,9
2004. november 1. – 2004. november 21.	101,1
2004. november 22. – 2004. november 28.	101,9
2004. november 29. – 2009. június 30.	103,5
2009. július 1. – 2009. december 31.	109,0
2010. január 1. –	120,0

*A KKKSZ-díj alakulása, 2000. január és 2010. augusztus között
(forint/liter)*

Időszak	KKKSZ-díj
2000. január 1. – 2000. december 31.	3,71
2001. január 1. – 2001. december 31.	3,90
2002. január 1. – 2002. április 30.	4,10
2002. május 1. – 2002. szeptember 30.	4,88
2002. október 1. – 2002. december 31.	5,12
2003. január 1. – 2004. december 31.	3,56
2005. január 1. –	3,06

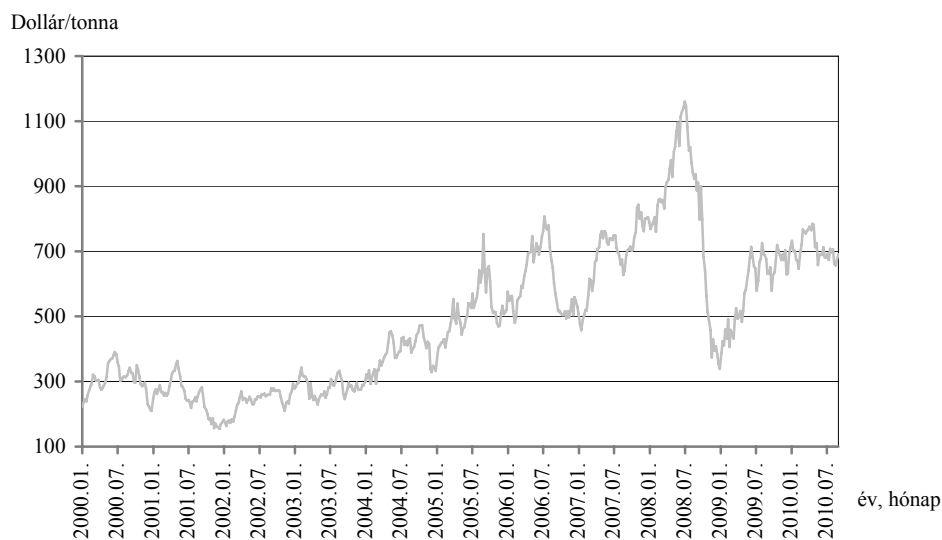
Forrás: Nemzeti Adó- és Vámhivatal, Magyar Szénhidrogén Készletező Szövetség.

F1. ábra. A benzin (ólmozatlan 95-ös) nagykereskedelmi árának alakulása
2000. január és 2010. augusztus között



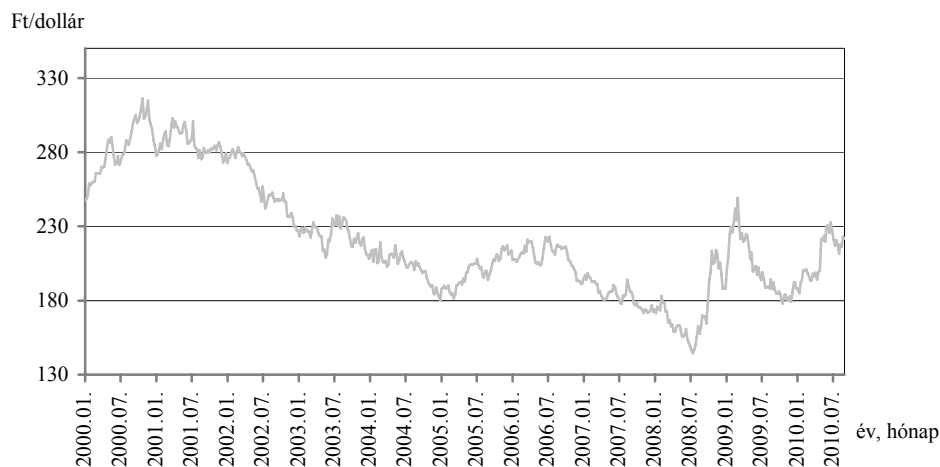
Forrás: Energia Központ Nonprofit Kft.

F2. ábra. A benzin (ólmozatlan 95-ös) olasz tőzsdei (FOB Med Italy) árfolyam alakulása
2000. január és 2010. augusztus között (pénteki záróárfolyam)



Forrás: Energia Központ Nonprofit Kft.

F3. ábra. A forint/dollár árfolyam alakulása 2000. január és 2010. augusztus között (pénteki záróárfolyam)



Forrás: Energia Központ Nonprofit Kft.

Függelék II.: Az egységgyöktesztek eredményei

F1. táblázat

Az AO-egységgyöktesztek eredményei (egy törés mellett)

Nyesés (százalék)	Számított érték	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}$	$(\hat{\alpha} - 1)$
15–15	együttható	88,5270	41,5830	-0,0396
	<i>t</i> -statisztika		35,2810	-4,0200
12,5–12,5	együttható	88,5270	41,5830	-0,0396
	<i>t</i> -statisztika		35,2810	-4,0200
10–10	együttható	88,5270	41,5830	-0,0396
	<i>t</i> -statisztika		35,2810	-4,0200
7,5–7,5	együttható	88,5270	41,5830	-0,0396
	<i>t</i> -statisztika		35,2810	-4,0200
5–5	együttható	88,5270	41,5830	-0,0396
	<i>t</i> -statisztika		35,2810	-4,0200
2,5–2,5	együttható	88,5270	41,5830	-0,0396
	<i>t</i> -statisztika		35,2810	-4,0200

Megjegyzés. $T_b = 2005.$ szeptember 16. Egységgyök kritikus érték 5 százalékos szignifikanciaszinten: -3,5600.

F2. táblázat

Az IO-egységgyöktesztek eredményei (egy törés mellett)

Nyesés (százalék)	Számított érték	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}$	$(\hat{\alpha} - 1)$
15–15	együttható	2,4366	1,2211	-0,0278
	<i>t</i> -statisztika		3,6650	-4,1470
12,5–12,5	együttható	2,4366	1,2211	-0,0278
	<i>t</i> -statisztika		3,6650	-4,1470
10–10	együttható	2,4366	1,2211	-0,0278
	<i>t</i> -statisztika		3,6650	-4,1470
7,5–7,5	együttható	2,4366	1,2211	-0,0278
	<i>t</i> -statisztika		3,6650	-4,1470
5–5	együttható	2,4366	1,2211	-0,0278
	<i>t</i> -statisztika		3,6650	-4,1470
2,5–2,5	együttható	2,4366	1,2211	-0,0278
	<i>t</i> -statisztika		3,6650	-4,1470

Megjegyzés. $T_b = 2005.$ december 31. Egységgyök kritikus érték 5 százalékos szignifikanciaszinten: -4,2700.

F3. táblázat

Az AO-egységgyöktesztek eredményei (két törés mellett)

Nyesés (százalék)	T_{b1}	T_{b2}	Számított érték	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$(\hat{\alpha} - 1)$
15–15	2005. szeptember 16.	2009. január 16.	együttható	88,5270	40,3643	3,7136	-0,0409
			<i>t</i> -statisztika		30,5790	2,0280	-4,0650
12,5–12,5	2005. szeptember 16.	2009. január 16.	együttható	88,5270	40,3643	3,7136	-0,0409
			<i>t</i> -statisztika		30,5790	2,0280	-4,0650
10–10	2005. szeptember 16.	2008. december 26.	együttható	88,5270	41,0890	1,4540	-0,0364
			<i>t</i> -statisztika		30,8610	0,7990	-3,5830
7,5–7,5	2005. szeptember 16.	2008. november 28.	együttható	88,5270	42,0264	-1,2482	-0,0424
			<i>t</i> -statisztika		31,3230	-0,6930	-4,2080
5–5	2005. szeptember 16.	2008. november 28.	együttható	88,5270	42,0264	-1,2482	-0,0424
			<i>t</i> -statisztika		31,3230	-0,6930	-4,2080
2,5–2,5	2005. szeptember 16.	2010. május 21.	együttható	88,5270	40,2173	23,5811	-0,0446
			<i>t</i> -statisztika		34,8510	6,6320	-4,4050

Megjegyzés. Egységgyök kritikus érték 5 százalékos szignifikanciaszinten: -5,4900.

F4. táblázat

Az IO-egységgyöktesztek eredményei (két törés mellett)

Nyesés (százalék)	T_{b1}	T_{b2}	Számított érték	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}_1$	$\hat{\delta}_2$	$(\hat{\alpha}-1)$
15–15	2004. december 31.	2008. szeptember 12.	együttható	2,4778	1,2671	-0,1181	-0,0283
			<i>t</i> -statisztika		3,7130	-0,4100	-4,1970
12,5–12,5	2005. február 25.	2008. szeptember 12.	együttható	2,6316	1,3456	-0,1380	-0,0300
			<i>t</i> -statisztika		3,7030	-0,4760	-4,1940
10–10	2004. december 31.	2008. szeptember 12.	együttható	2,4778	1,2671	-0,1181	-0,0283
			<i>t</i> -statisztika		3,7130	-0,4100	-4,1970
7,5–7,5	2005. február 25.	2008. szeptember 12.	együttható	2,6316	1,3456	-0,1380	-0,0300
			<i>t</i> -statisztika		3,7030	-0,4760	-4,1940
5–5	2004. december 31.	2008. szeptember 12.	együttható	2,4778	1,2671	-0,1181	-0,0283
			<i>t</i> -statisztika		3,7130	-0,4100	-4,1970
2,5–2,5	2001. május 11.	2004. december 31.	együttható	3,1231	-0,6234	1,5128	-0,0306
			<i>t</i> -statisztika		-1,8540	4,1960	-4,4980

Megjegyzés. Egységgyök kritikus érték 5 százalékos szignifikanciaszinten: -5,4900.

Irodalom

- BANERJEE, A. – LUMSDAINE, R. L. – STOCK, J. H. [1992]: Recursive and Sequential Tests of the Unit-Root and Trend-Break Hypothesis: Theory and International Evidence. *Journal of Business & Economic Statistics*. 10. évf. 3. sz. 271–287. old. <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/1391542.pdf?acceptTC=true>
- BAUM, C. F. – BARKOULAS, J. T. – CAGLAVAN, M. [1999]: Long Memory or Structural Breaks: Can Either Explain Nonstationarity Real Exchange Rates under the Current Float? *Journal of International Financial Markets, Institutions, and Money*. 9. évf. 380. sz. 359–376. old. <http://fmwww.bc.edu/ec-p/wp380.pdf>
- CLEMENTE, J. – MONTANES, A. – REYES, M. [1998]: Testing for a Unit Root in Variables with a Double Change in the Mean. *Economic Letters*. 59. évf. 2. sz. 175–182. old. http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MIimg&_imagekey=B6V84-3VCV3DN-6-P&_cdi=5860&_user=1634558&_pii=S0165176598000524&_origin=search&_coverDate=05%2F01%2F1998&_sk=999409997&view=c&wchp=dGLzVtz-zSkzk&md5=b9a6b1fabd2e4c13ecdcf937f5dc0aa&ie=/sdarticle.pdf
- DAVIES, R. B. [1987]: Hypothesis Testing when a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative. *Biometrika*. 74. évf. 1. sz. 33–43. old. <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2336019.pdf?acceptTC=true>
- DICKEY, D. A. – FULLER, W. A. [1979]: Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*. 74. évf. 366. sz. 427–431. old. <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2286348.pdf>

- GADEA, M.-D. – MONTANES, A. – REYES, M. [2004]: The European Union Currencies and the US Dollar: From Post-Bretton-Woods to the Euro. *Journal of International Money and Finance*. 23. évf. 7–8. sz. 1109–1136. old. http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MIImg&_imagekey=B6V9S-4DN9X4J-1-34&_cdi=5906&_user=1634558&_pii=S026156060400083X&_origin=search&_coverDate=12%2F31%2F2004&_sk=999769992&view=c&wchp=dGLzVlz-zSkzk&md5=c9d061a23597334a8e0651c292a374db&ie=/sdarticle.pdf
- HANSEN, B. E. [2001]: The New Econometrics of Structural Change: Dating Breaks in U.S. Labor Productivity. *Journal of Economic Perspectives*. 15. évf. 4. sz. 117–128. old. http://www.ssc.wisc.edu/~bhansen/papers/jep_01.pdf
- HUNYADI, L. [1994]: Egységgyökök és tesztheik. *Sigma*. 25. évf. 3. sz. 135–164. old.
- KIM, D. – PERRON, P. [2009]: Unit Root Tests Allowing for a Break in the Trend Function at an Unknown Time under Both the Null and Alternative Hypotheses. *Journal of Econometrics*. 148. évf. 1. sz. 1–13. old. http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MIImg&_imagekey=B6VC0-4TBXGH9-1-9&_cdi=5940&_user=1634558&_pii=S0304407608000961&_origin=search&_coverDate=01%2F31%2F2009&_sk=998519998&view=c&wchp=dGLzVtz-zSkzS&md5=00ef872f1627710e5a02cdb673bce3ed&ie=/sdarticle.pdf
- KIM, I.-M. – MADDALA, G. S. [1996]: Structural Change and Unit Roots. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 49. évf. 1. sz. 73–103. old. http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MIImg&_imagekey=B6V0M-3VSCR1-5-2&_cdi=5650&_user=1634558&_pii=0378375895000313&_origin=search&_coverDate=01%2F01%2F1996&_sk=999509998&view=c&wchp=dGLzVlb-zSkzk&md5=4e1c6612d023f2001b1acd61101a0913&ie=/sdarticle.pdf
- PERRON, P. [1989]: The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis. *Econometrica*. 57. évf. 6. sz. 1361–1401. old. <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/1913712.pdf?acceptTC=true>
- PERRON, P. [1990]: Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean. *Journal of Business & Economic Statistics*. 8. évf. 2. sz. 153–162. old. <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/1391977.pdf>
- PERRON, P. [1997]: Further Evidence on Breaking Trend Functions in Macroeconomic Variables. *Journal of Econometrics*. 80. évf. 2. sz. 355–385. old. http://www.sciencedirect.com/science?_ob=MIImg&_imagekey=B6VC0-3SX1M2Y-B-1&_cdi=5940&_user=1634558&_pii=S0304407697000493&_origin=search&_coverDate=10%2F31%2F1997&_sk=999199997&view=c&wchp=dGLzVtz-zSkzS&md5=4e9bb58915fa215815eae6ff98d3975a&ie=/sdarticle.pdf
- PERRON, P. – VOGELSANG, T. J. [1992a]: Nonstationarity and Level Shifts with an Application to Purchasing Power Parity. *Journal of Business & Economic Statistics*. 10. évf. 3. sz. 301–321. old. <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/1391544.pdf>
- PERRON, P. – VOGELSANG, T. J. [1992b]: Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean: Corrections and Extensions. *Journal of Business & Economic Statistics*. 10. évf. 4. sz. 467–470. old. <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/1391823.pdf>
- SAID, S. E. – DICKEY, D. A. [1984]: Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. *Biometrika*. 71. évf. 3. sz. 599–608. old. <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2336570.pdf>
- SUGÁR A. [2011]: A hazai benzin és gázolaj árszintjének és árazásának empirikus elemzése. *Statistikai Szemle*. Megjelenés alatt.

ZIVOT, E. – ANDREWS, W. K. [1992]: Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis. *Journal of Business & Economic Statistics*. 10. évf. 3. sz. 251–270. old. <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/1391541.pdf>

Summary

The problem of structural change (or break) occurs in the case of long time series, when the error can be either stationary or integrated. The study considers testing for a unit root when the date(s) of structural change(s) (or break(s)) in the mean is (are) unknown based on a testing procedure similar to the augmented Dickey–Fuller test. The statistic of interest is the minimal t statistic over all possible break points in regressions. There is great emphasis on whether the structural change(s) (break(s)) has (have) instantaneous or gradual effect, and in particular, whether it depends on the dynamics exhibited by the correlation structure of the time series. The methods applied to the wholesale price of 95 octane petrol recommended by the leading Hungarian distributor demonstrate that the unit root hypothesis is robust against structural change(s) (break(s)).