KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXV. ÉVF., 2018. JÚLIUS–AUGUSZTUS (711–725. o.)

BIHARY ZSOLT–VÍG ATTILA ANDRÁS

Portfólióallokáció csődveszély esetén, korlátolt felelősség mellett

Modellünkben dinamikus portfólióoptimalizálási feladatot oldunk meg. A kockázatos eszköz ugró diffúziós folyamatot követ, amely lefele ugrásokra képes, míg a kockázatmentes a szokásos bankbetét. Az irodalomban az optimalizálás során csak olyan stratégiákat vesznek figyelembe, amelyek mellett a portfólió értékfolyamata nem lehet negatív. Tanulmányunkban szakítunk ezzel a hagyománnyal, megengedünk csődveszéllyel fenyegető stratégiákat is, amikor a befektető korlátolt felelősséget vállal, így csőd esetén nemcsak saját vagyonát veszíti el teljes mértékben, de a hitelező is kénytelen veszteséget elkönyvelni. A hitelező ennek megfelelően kockázati felárat állapít meg hitelnyújtáskor, amit endogén módon figyelembe veszünk. Ha a kockázatelutasítás paramétere elegendően kicsi, akkor az általunk javasolt korlátolt felelősséggel értelmezhetővé válnak nagy tőkeáttételes stratégiák, és mutatunk olyan realisztikus eseteket, ahol ezek optimálisnak bizonyulnak. Nagy ugrások esetén az optimális tőkeáttétel nem folytonos módon függ a külső paraméterektől.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C22, C61, G11.

A dinamikus portfólióoptimalizálás arra a problémára keresi a választ, hogy a befektető milyen arányban tartson különböző pénzügyi eszközöket, és hogyan alakítsa időben portfóliójának az összetételét. Sok elméleti tanulmány foglalkozik ezzel a fontos gyakorlati problémával. Ha a piacon több kockázatos eszközbe is lehet fektetni, akkor ezek optimális aránya az alapvető kérdés (*Markowitz* [1952]). A tanulmányunkban vizsgált modell szerint a befektető egyetlen kockázatmentes és egyetlen kockázatos eszköz között osztja meg vagyonát. A portfólió összetétele önfinanszírozó módon változtatható folyamatosan, és a vagyon kívánt része fogyasztásként felélhető.

A probléma megközelíthető különböző komplexitású modellekkel, mi ebben a tanulmányban a folytonos idejű leíráshoz csatlakozunk, amelyben az eszközök árdinamikáját sztochasztikus differenciálegyenletekkel írjuk le, a portfólióoptimalizálás

Bihary Zsolt a Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszékének docense.
Víg Attila András a Budapesti Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszékének PhD-hallgatója.
A kézirat első változata 2018. június 8-án érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2018.7-8.711

pedig egy sztochasztikus programozási feladat. Ebben a modellkeretben a legkorábbi tanulmányok a kockázatos eszközök árdinamikáját geometriai Brown-mozgással, a kockázatmentes eszközt konstans növekedési ütemmel modellezik. A befektető a fogyasztásából, illetve az egy véges horizonton elért vagyonából származó hasznosságát optimalizálja (*Merton* [1969], *Karatzas és szerzőtársai* [1987]), vagy a végső vagyon feltételként adott (*Korn–Trautmann* [1995]).

Újabb tanulmányokban a kockázatos eszköz dinamikájában ugrások is megjelennek. Ezek a cikkek a hasznosságalapú megközelítésen túl (*Bellamy* [2001]) a lehető legrosszabb kimenetelre (*Korn–Wilmott* [2002], *Desmettre és szerzőtársai* [2013]), illetve referenciapont-függő hasznosságra (*Ruan és szerzőtársai* [2013], *Mi és szerzőtársai* [2015]) optimalizálnak. Az ugrásokkal, amennyiben a befektető megfelelően nagy tőkeáttételt alkalmaz, megjelenik a csőd lehetősége (azaz amikor a portfólió értéke negatívvá válik). A hivatkozott cikkek mindegyike ezt a problémát úgy kezeli, hogy az optimalizálás során csak csődveszélyt nem jelentő stratégiákat engednek meg, vagyis az így definiált *megengedhető stratégiák* halmaza felett optimalizálnak. Tanulmányunkban a korlátolt felelősség bevezetésével egy természetes módját javasoljuk a stratégiatér bővítésének.

A tanulmány szerkezete a következő: a modell ismertetését az eredmények bemutatása követi, végül összefoglaljuk tanulmányunkat. A technikailag nehézkes számolásokat a *Függelékben* közöljük.

Modell

Kereskedett termékek

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ egy filtrált valószínűségi mező. A piacot két $\mathcal{F}_t$ mérhető folyamat alkotja: egy kockázatos (S_t) és egy kockázatmentes (B_t). A kockázatos eszköz – melyre gondolhatunk részvényként vagy indexként is – értékalakulását a következő sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$dS_t = S_t\left[\left(\mu - \lambda\bar{J}\right)dt + \sigma dW_t + J dN_t^{(\lambda)}\right], \qquad S_0 > 0,$$

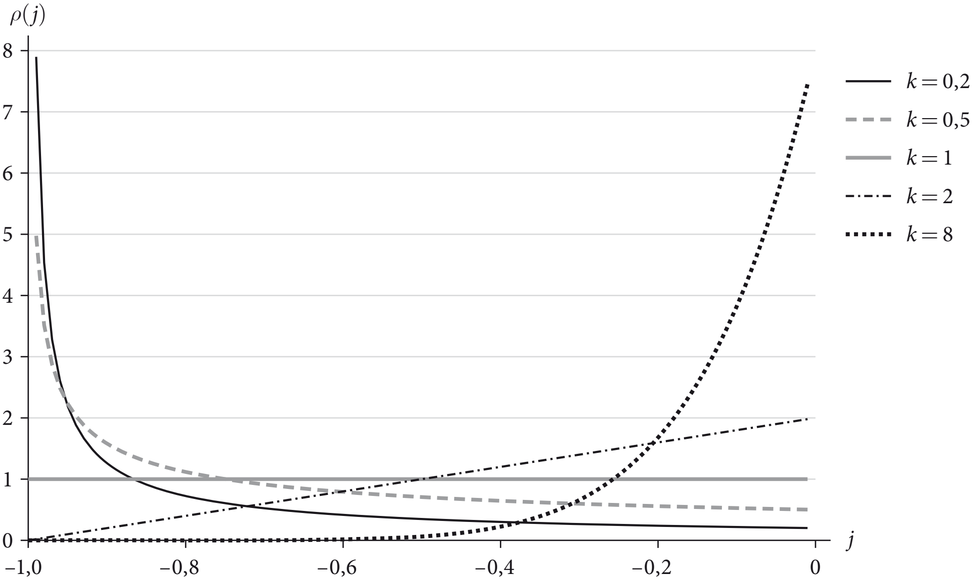
ahol W_t egy Wiener-folyamat, $N_t^{(\lambda)}$ egy $\lambda > 0$ intenzitású Poisson-folyamat, $\mu > 0$ a drift, $\sigma > 0$ a volatilitás paramétere. Az eszközár relatív ugrásait a J valószínűségi változó karakterizálja, $\bar{J} = \mathbb{E}(J)$ várható értékkel. A $\lambda\bar{J}$ kompenzátor azért jelenik meg, hogy a folyamat várható növekedése μ legyen, vagyis $\mathbb{E}(S_t) = S_0 e^{\mu t}$ az ugrások ellenére is fennálljon. A kockázatos eszközt tehát egy sodródó Brown-mozgás és egy összetett Poisson-folyamat hajtja meg.

Az ugrásokkal tőzsdei összeomlásokat modellezünk, ezért elsősorban olyan J valószínűségi változókat vizsgálunk, amelyek értékkészlete negatív. Továbbá a $J \geq -1$ természetes elvárás, hiszen egy részvény(index) nem eshet 100 százaléknál nagyobb mértékben. Részletesen vizsgálunk olyan eloszlásokat, amelyeket a

$$\rho(j) = k(j+1)^{k-1}, \qquad j \in (-1, 0], \qquad k > 0$$

sűrűségfüggvény karakterizál, tehát az esések speciális β-eloszlásúak. Választásunkat az motiválja, hogy az esések logaritmusa ebben az esetben exponenciális eloszlást követ.[1] Az *1. ábra* mutatja az ugrások sűrűségfüggvényét különböző k értékek mellett.

1. ábra
Az ugrások sűrűségfüggvényei



Megjegyzés: alacsony k esetén az ugrások -1 közelében összpontosulnak, vagyis ekkor a tőzsdekrachok (várhatóan) nagyon súlyosak. Magas k esetén a zuhanások tipikusan moderált mértékűek. $k = 1$ esetén az ugrások éppen egyenletes eloszlásúak: ennek az esetnek külön figyelmet szentelünk a későbbiekben.

$k = 0$ esetként fogunk hivatkozni arra az elfajult esetre, amikor J valószínűségi változó azonosan -1. Ekkor ugrás esetén a kockázatos eszköz értéke nullára esik, vagyis azonnal csődbe jut. Ennek a valószínűségi változónak a sűrűségfüggvénye egy -1-be eltolt Dirac-féle δ függvény.

A kockázatmentes eszköz értékalakulását a következő differenciálegyenlet írja le:

$$dB_t = rB_t dt, \qquad B_0 > 0,$$

ahol r a bankbetét- vagy bankhitelkamatláb. Bankbetét esetén ezt a kockázatmentes $0 \leq r_f < \mu$ kamatlábbal azonosítjuk. Bankhitel esetén modellünkben megjelenik a hitelkockázat, ekkor $r > r_f$. Ezt a kérdést a Kamatprémium című alfejezetben részletesen tárgyaljuk.

[1] Lásd a *Függelék F1.* pontját.

Stratégia

A befektető a két kereskedett termékből portfóliót épít:

$$V_t = \Delta_t S_t + \beta_t B_t, \qquad V_0 > 0,$$

ahol a $(\Delta_t, \beta_t) \in \mathbb{R}^2$ pár $\mathcal{F}_t$-mérhető.

A modell időhomogenitása miatt feltesszük, hogy

$$\frac{\Delta_t S_t}{V_t} = \alpha, \qquad \frac{\beta_t B_t}{V_t} = 1 - \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

vagyis a befektető konstans *arányban* tart a két eszközből. Ez természetesen dinamikus stratégiát jelent: a portfólió folyamatos igazítást igényel, ahogy az eszközárak fejlődnek.

A befektetőnek jövedelme nincsen, viszont a portfóliójából tőkét von ki, amit fogyasztásra használ fel. Szintén a modell időhomogenitása miatt feltesszük, hogy a fogyasztás a pillanatnyi portólióérték konstans hányada. Így a portfólió értékfejlődését a következő sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$dV_t = \Delta_t dS_t + \beta_t dB_t - cV_t dt,$$

ahol $c > 0$ a fogyasztási ráta. Az $(\alpha, c) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ vektor a befektető stratégiája.

Felmerül a kérdés, hogy miként engedhetünk meg $\alpha \in \mathbb{R}$ befektetési arányokat, ha a kockázatos eszköz ugrásokra is képes. Kétszeres tőkeáttétel ($\alpha = 2$) esetén a kockázatos eszköz 50 százalékosnál nagyobb esése már negatív tartományba lökné a portfólió értékét. Mivel az ugrásnagyság értékkészlete a $(-1, 0]$ intervallum (illetve $k = 0$ esetben a $\{-1\}$ pont), ezért ezt a problémát kezelnünk kell.

Tipikus módszer a stratégiahalmaz szűkítése az úgynevezett *megengedhető stratégiákra*, vagyis olyan $\alpha \in \mathbb{R}$-ra, amelyre $\mathbb{P}(V_t \geq 0) = 1$, $t \geq 0$ teljesül. Ez modellünkben az $\alpha \leq 1$ megkötést jelentené, hiszen csak lefelé ugrásokat vizsgálunk. Ezzel szemben mi nem szűkítjük a stratégiahalmazt, hanem bevezetjük a *korlátolt felelősség* elvét: a portfólióértéket azonosan nullának tekintjük attól az időponttól kezdve, hogy az egyébként negatív tartományba esett volna.

A fentiek alapján a befektető portfóliójának értékfejlődését a következő sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$dV_t = V_t \left[\underbrace{(1-\alpha) r dt}_{\text{hitel v. betét}} + \underbrace{\alpha\left(\mu - \lambda \bar{J}\right) dt + \alpha\sigma dW_t + \widehat{\alpha J} dN_t^{(\lambda)}}_{\text{részvény}} - \underbrace{cdt}_{\text{fogyasztás}} \right],$$

ahol $\hat{x} = \max(-1, x)$ függvény ragadja meg a korlátolt felelősség feltételt: ha a tőkeáttétel miatt az ugrás kisebb lenne, mint -1, akkor az ugrást pontosan -1-nek definiáljuk, vagyis a portfólió értéke éppen nullára esik le.

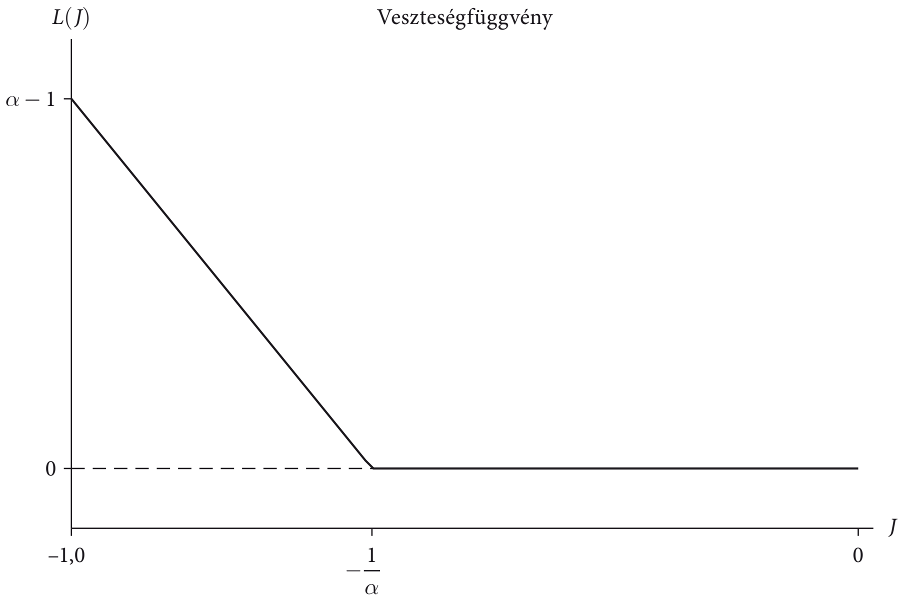
Kamatprémium

A következőkben meghatározzuk az r hitelkamatlábat, mely a kockázatmentes kamatláb és a kamatprémium összege. $\alpha > 1$ esetében a befektető részben hitelből finanszírozza kockázatos befektetését. Ekkor egy nagyobb ugrás során a befektető egyrészt elveszíti teljes saját tőkéjét, másrészt a felvett hitelt sem tudja teljesen visszafizetni. A korlátolt felelősség tehát egy opció a befektető számára, amelyért cserébe a bank kompenzációt vár kamatprémium formájában. A bank veszteségfüggvényét a relatív ugrásnagyság függvényében rögzített α esetén jelöljük $L(J)$-vel:

$$L(J) = (-\alpha J - 1)^{+},$$

ahol $(x)^{+}$ a pozitívrész-függvényt jelöli. $L(J)$-t mutatja a *2. ábra*.

2. ábra
Egységnyi összértékű befektetési portfólió esetén a bank vesztesége az ugrás függvényében



Megjegyzés: $\alpha > 1$ mértékű tőkeáttétel esetén a bank $\alpha - 1$ nagyságú finanszírozást nyújt. A kockázatos eszköz teljes összeomlása esetén ($J = -1$) a bank az összes nyújtott hitelt elveszíti, így a függőleges tengelymetszet $\alpha - 1$. $J = -1/\alpha$ esetén a befektető eszközei $\alpha - 1$-et érnek, vagyis a bankot még éppen ki tudja fizetni: a banknak ekkor nem keletkezik vesztesége. A két eset között a bank vesztesége lineárisan alakul, mely szakasz meredeksége $-\alpha$.

Modellünkben a hitel (mint ahogy a bankbetét is) rövid lejáratú, ezért a csődveszély kizárólag az ugrásokból ered. Továbbá feltételezzük, hogy a bank csak a várható veszteség fedezésére vár el kamatprémiumot, azaz kockázatsemleges. Jelölje $s(\alpha)$ a kamatprémiumot, melyet úgy számolunk, hogy egy kis időegység alatt a nyújtott hitelen elért extrabevétel legyen egyenlő az ugrásból eredő várható veszteséggel. Mivel Δt idő alatt várhatóan $\lambda\Delta t$ ugrás következik be, és az ugrás eloszlását $\rho(j)$ sűrűségfüggvénnyel karakterizáljuk, ezért:

$$\overbrace{s(\alpha)(\alpha-1)\Delta t}^{\text{extrabevétel}} = \overbrace{\lambda\Delta t\int_{-1}^{0}(-\alpha j-1)^{+}\rho(j)dj,}^{\text{várható veszteség}} \qquad \alpha>1,$$

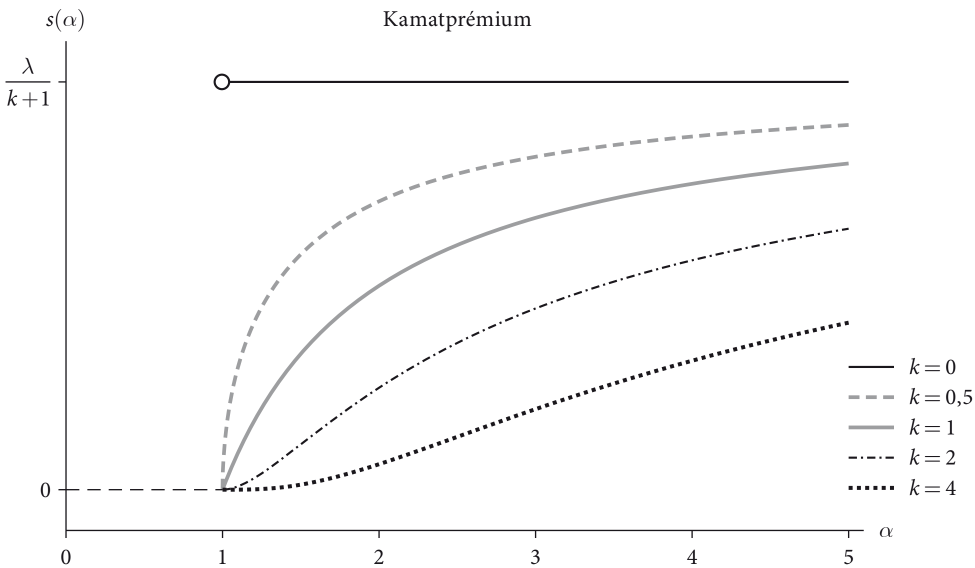
$$s(\alpha)=\lambda\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_{-1}^{-\frac{1}{\alpha}}\left(-j-\frac{1}{\alpha}\right)\rho(j)dj, \qquad \alpha>1.$$

A modellünkben használt $\rho(j)=k(1+j)^{k-1}$ sűrűségfüggvény esetén a kamatprémium az alábbi lesz:

$$s(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{k+1}\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{k}, & \text{ha } \alpha>1,\\ 0, & \text{ha } \alpha\le 1.\end{cases}$$

Az $s(\alpha)$ függvényt különböző k értékek mellett a *3. ábra* mutatja. A kockázatmentes eszköz növekedési ütemét rögzített α mellett tehát az a $r=r_f+s(\alpha)$ függvény írja le.

3. ábra
A kamatprémium a tőkeáttétel függvényében különböző k mellett



Megjegyzés: a $\lambda/(k+1)$ arányt konstansnak tartva (vagyis kisebb várható értékű ugrások esetében nagyobb ugrásintenzitást feltételezve); $k=0$ esetén a kamatprémium szakadással felugrik, majd szinten marad, hiszen ekkor ugráskor bármekkora tőkeáttétel esetében a teljes hitelt elveszíti a bank.

Célfüggvény

A kockázatkerülő befektető a portfóliójából konstans arányban tőkét von ki, amit fogyasztásra használ fel. Pillanatnyi hasznossági függvénye állandó relatív kockázatkerülési együtthatójú (*Constant Relative Risk Aversion, CRRA):*

$$u(C) = \frac{C^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

ahol $\gamma \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ a kockázatelutasítás paramétere.[2] A befektető egy infinitezimális időegység alatt portfóliójának $cV_t dt$ részét fogyasztja el, a jövő fogyasztását egy szubjektív diszkontfaktorral veszi figyelembe. Várható életpálya-hasznossága így a következő lesz:

$$U = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \frac{(cV_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\delta t} dt\right], \tag{1}$$

ahol $\delta > 0$ a szubjektív diszkontfaktor. Az életpálya hosszát *Desmettre és szerzőtársai* [2013] alapján végtelennek feltételezzük. A befektető a várható életpálya hasznosságát maximalizálja a stratégiatere fölött, vagyis a

$$\max_{a,\, c} U \tag{2}$$

feladatot oldja meg. γ-ban máris meg kell különböztetnünk két esetet:

1. ESET • $\gamma > 1$ esetén az (1) számlálójában egy reciprok jelenik meg, a nevező pedig negatív lesz. $k > 0$ és $\alpha > 1$ (illetve $k = 0$ és $\alpha \geq 1$) esetén a

$$\tau := \inf\{t > 0 : V_t = 0\}$$

megállási időre $\mathrm{P}(\tau < \infty) = 1$, azaz 1 valószínűséggel eljön az az időpont, amikor a portfólió értéke nullára esik, így az (1) értéke $-\infty$ lesz. $\gamma > 1$ esetén tehát csak az $\alpha \leq 1$ (illetve $k = 0$ esetén $\alpha < 1$) portfólióarányok jöhetnek szóba, vagyis organikus módon (és nem külső feltételként!) visszakaptuk az irodalomban szokásos *megengedhető stratégiák* halmazát. $\gamma > 1$ esetén tehát csak a megfelelő módon szűkített stratégiahalmaz fölött optimalizálhatunk.

2. ESET • $\gamma < 1$ esetén az előző pont problémája nem áll fenn, ekkor bármilyen tőkeáttételes pozíció szóba jöhet. Ebben az esetben tehát a teljes stratégiahalmaz fölött optimalizálhatunk.

Mivel elsősorban a tőkeáttétel hatását szeretnénk vizsgálni, a továbbiakban a $\gamma < 1$ esetre fogunk koncentrálni.

[2] A számítások könnyítése érdekében a szokásos $(C^{1-\gamma} - 1)/(1 - \gamma)$ függvény helyett a fenti alakot használjuk, amely természetesen csak egy konstanssal való eltolást jelent. Így a matematikailag elegáns $\gamma = 1$ esetet elveszítjük, de ennek nincs kitüntetett szerepe a vizsgálatunk szempontjából.

Eredmények

Optimalizáció

Ebben a szakaszban a (2) feladat megoldását adjuk meg.[3] Rögzített (α, c) esetén a hasznosság:

$$U(\alpha, c)=\frac{(cV_0)^{1-\gamma}}{(1-\gamma)^2 c+(1-\gamma)\delta-(1-\gamma)^2\Psi(\alpha)}, \quad \text{ha } \Psi(\alpha)-c<\frac{\delta}{1-\gamma},$$

ahol

$$\Psi_{k>0}(\alpha)=r+\alpha\left(\mu-r-\lambda\bar{J}\right)-\gamma\frac{(\alpha\sigma)^2}{2}+\frac{k\lambda}{1-\gamma}\int_{-1}^{0}\left[\left(1+\widehat{\alpha j}\right)^{1-\gamma}-1\right](1+j)^{k-1}dj,$$

$$\Psi_{k=0}(\alpha)=r+\alpha\left(\mu-r-\lambda\bar{J}\right)-\gamma\frac{(\alpha\sigma)^2}{2}+\frac{\lambda}{1-\gamma}\left[\left(1+\widehat{-\alpha}\right)^{1-\gamma}-1\right].$$

A $\Psi(\alpha)-c<\delta/(1-\gamma)$ feltétel azt ragadja meg, hogy a szubjektív diszkonttényezőnek elegendően nagynak kell lennie, hogy az integrált hasznosság várható értéke véges legyen.

Ettől a ponttól kezdve feltételezzük, hogy ez az egyenlőtlenség teljesül. Az elsőrendű feltételekből az alábbiak következnek:

$$\frac{d}{dc}U(\alpha, c)=0 \quad \Rightarrow \quad c(\alpha)=\frac{\delta-(1-\gamma)\Psi(\alpha)}{\gamma},$$

$$\frac{d}{d\alpha}U(\alpha, c)=0 \quad \Rightarrow \quad \Psi'(\alpha)=0.$$

Kockázatmentes egyenértékes

A későbbi ábrákhoz bevezetjük a kockázatmentes egyenértékes fogalmát: ez az a kezdőtőke, amely $\alpha=0$ mellett éppen akkora hasznosságot generál, mint egységnyi kezdőtőke $\alpha\neq 0$ mellett. Legyen $U[\alpha, c(\alpha), V_0]$ a hasznosság adott α, a hozzá tartozó optimális $c(\alpha)$, valamint V_0 kezdőtőke mellett. Ennek segítségével felírhatjuk a kockázatmentes egyenértékest:

$$e(\alpha)=\{V_0 : U(0, c_0, V_0)=U[\alpha, c(\alpha), 1]\}$$

ponthalmaz-leképezés, amely valójában függvény, mert U függvény V_0-ban szigorúan monotonon nő. A kockázatmentes egyenértékes modellünkben:[4]

$$e(\alpha)=\left[\frac{c(0)}{c(\alpha)}\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

[3] Lásd a *Függelék F2.* pontját.
[4] Lásd a *Függelék F3.* pontját.

Optimális befektetési arányok

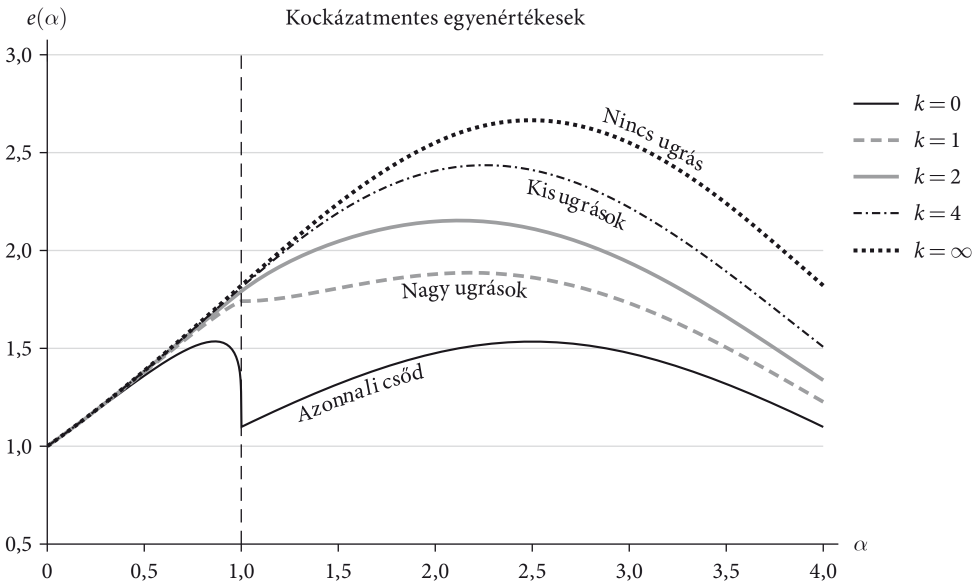
Referenciamodellként tekintsük először a standard geometriai Brown-mozgás (GBM) esetet, amelyre $k=\infty$-ként fogunk hivatkozni. A $\lambda=0$ választással kikapcsolhatjuk az ugrásokat a kockázatos eszközből, így az egyszerű geometriai Brown-mozgássá válik. Mivel nincsenek ugrások, ezért hitelkockázatot nem fut a bank, vagyis $r=r_f$. A $\Psi(\alpha)$ ekkor α-ban parabola, így az optimális befektetési arány (amelyet még *Merton* [1969] mutatott meg):

$$\alpha^* = \frac{\mu - r_f}{\gamma\sigma^2}.$$

Rögzítsük mostantól $\mu=0{,}12$, $r=0{,}04$, $\sigma=0{,}2$ plauzibilis piaci értékeket, valamint legyen $\gamma=0{,}8$. Ekkor az optimális befektetési arány, $\alpha^*=2{,}5$-nek adódik, vagyis egy erősen tőkeáttételes pozíció lesz optimális.

A referenciamodell és néhány ($k\geq 0$) ugró modell esetén a kockázatmentes egyenértékesek görbéit mutatja a *4. ábra*.

4. ábra
Kockázatmentes egyenértékesek $k\geq 0$ esetén



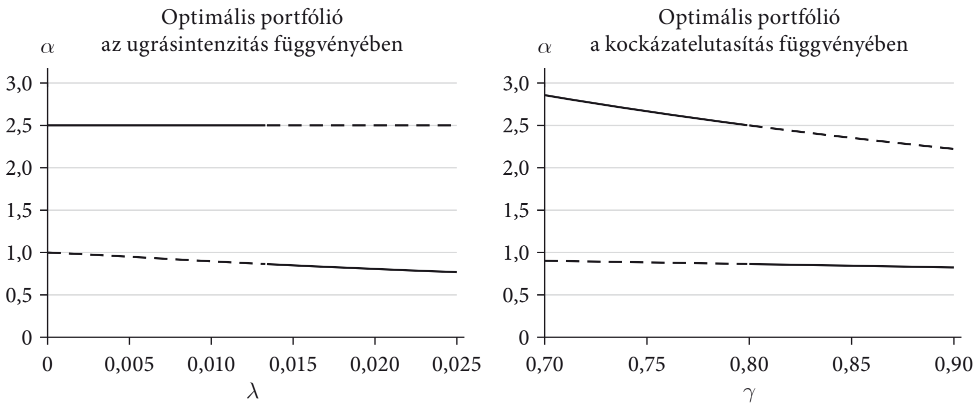
Megjegyzés: $\mu=0{,}12$, $r_f=0{,}04$, $\sigma=0{,}2$, $\delta=0{,}1$, $\lambda=1/75$, $\gamma=0{,}8$ mindegyik görbe esetén. Az ugrásintenzitás azt jelenti, hogy átlagosan 75 évente következik be egy esés. $k=\infty$ jelöli a standard GBM-esetet.

Az előbb tárgyalt ugrás nélküli esethez a $k=\infty$ görbe tartozik. Kisebb ugrások esetén a görbék nem módosulnak lényegesen, bár a maximumhelyük a kisebb tőkeáttételek felé tolódik. A korábbi modellek a korlátolt felelősség feltétele nélkül csak a megengedhető stratégiákat, vagyis az $\alpha\leq 1$ portfólióarányokat vizsgálták (azaz a függőleges szaggatott vonaltól balra fekvő tartományt). Ekkor – a szűkítés miatt – nem túl nagy ugrások esetén az $\alpha = 1$, azaz a tiszta részvényportfólió optimális. A megengedhető stratégiákra vett szűkítés tehát könnyen azt eredményezheti, hogy egy szélső pontban lesz az optimum. A korlátolt felelősség bevezetésével (mely a pénzügyekben egy természetes feltétel) tehát a stratégiatér releváns módon tágul.

A Dirac-féle δ-modell kockázatmentes egyenértékes függvényét mutatja a $k = 0$ görbe. Az ugrás ekkor olyan mértékű, hogy amikor bekövetkezik, akkor egyből nullára esik a kockázatos eszköz értéke. A *4. ábra* egy olyan esetet mutat, ahol egy tőkeáttétel nélküli és egy erősen tőkeáttételes lokális optimum is kialakul, amelyek szintje hasonló. Ez azt jelenti, hogy a külső paraméterek kis változtatásával a globális optimum ugrásszerűen változhat.

Az *5. ábrán* két paraméter, a λ ugrásintenzitás, illetve a γ kockázatelutasítás függvényében mutatjuk a két lokálisan optimális tőkeáttételt. A folytonos vonal jelzi a globális optimumot, ami mindkét paraméterben nem folytonos viselkedést mutat. Ez azt jelenti, hogy a befektetők a piac vagy a kockázati étvágy kis elmozdulására jelentős portfólióátrendezéssel reagálhatnak. Másrészt két – egyébként alig különböző befektető – kvalitatíve is teljesen más portfóliót választhat.

5. ábra
Kockázatmentes egyenértékesek $k = 0$ esetén



Megjegyzés: a folytonos vonal jelöli a globális, a szaggatott a lokális (de nem globális) optimumot. $\mu = 0{,}12$, $r_f = 0{,}04$, $\sigma = 0{,}2$, $\delta = 0{,}1$. A kritikus értékek $\lambda = 1/75$ és $\gamma = 0{,}8$.

Összefoglalás

Tanulmányunkban a fő újdonság, hogy tőkeáttételes portfóliók esetén csődveszélyes helyzetekben is értelmezzük az életpálya-hasznosságot. A probléma irodalomban megszokott formalizálásakor a portfólió értéke csőd esetén negatívvá válik, amit a stratégiahalmaz szűkítésével kezelnek. A korlátolt felelősség bevezetésével modellünkben ilyenkor a vagyon nem válik negatívvá, hanem nullára csökken. Ez a szokásos CRRA hasznosságfüggvény esetén $\gamma < 1$ mellett kezelhető. Ha bármilyen kis eséllyel csődveszély fenyegeti a kockázatos terméket, az eddigi modellek optimális allokációként soha nem javasolnak tőkeáttételes pozíciót. Ugyanakkor a gyakorlatban léteznek racionális tőkeáttételes stratégiák. Tanulmányunk egyik fő eredménye az, hogy – az ismert modelleket a korlátolt felelősség elvével kiegészítve – sikerült visszakapnunk optimális tőkeáttételes stratégiákat. Modellünk szerint a nagy tőkeáttételes stratégiák (bár eredendően igen kockázatosak) azért válnak versenyképessé, mert a korlátolt felelősség limitálja a nagy veszteségeket, a befektető csődopcióval rendelkezik. A kockázatsemleges hitelező kamatprémium formájában megkéri az opció árát, de csak várható értékben; a csőddel kapcsolatos kockázatot tulajdonképpen átvállalja a befektetőtől.

Legérdekesebb eredményünk az optimális tőkeáttétel nem folytonos függése a külső paraméterektől (lásd *5. ábra*). A nemfolytonosság egyik gyakorlati következménye az, hogy a piac megítélésének kis változása esetén is lehetséges nagy elmozdulás az optimális portfólió szerkezetében; ilyenkor a befektetők rövid idő alatt jelentős átcsoportosítást hajthatnak végre az eszközeikben. Hasonló nemfolytonosság jelenik meg *Brunnermeier–Pedersen* [2008] cikkében, amelyben a tőkeáttétel ugrását a kockázatos eszköz, illetve a finanszírozás likviditásainak önerősítő kölcsönhatása okozza. Egy másik értelmezés szerint a nemfolytonosság azt jelenti, hogy különböző piaci szereplők, akik hasonlóan ítélik meg a piac állapotát, és kockázati étvágyuk is hasonló, akár nagyon különböző befektetési stratégiákat tarthatnak optimálisnak.

Bár a tanulmányban (követve a szokásos terminológiát) részvényként, illetve részvényindexként hivatkoztunk a kockázatos termékre, a nem folytonos viselkedés akkor jelentkezik, amikor nagy ugrások is lehetségesek az eszközértékben. Ez kevésbé jellemző a részvényindexekre, illetve a piac egészére; a legnagyobb piaci esések sem haladják meg a 20-25 százalékot. Modellünk eredményei olyan eszközök esetében válnak érdekessé, amelyeknél a kockázat jelentős hányada csődkockázat. Egyik példaként a *junk bond* piacot említhetjük. Ezek olyan kötvények, amelyek nagyon magas hozamot ígérnek, de jelentős veszélye van a teljes elértéktelenedésnek. Egy diverzifikált kötvényportfólió általában tartalmaz ilyen kötvényeket is, ebben a kontextusban minden más kötvénytípus kockázatmentesnek tekinthető. Modellünk igazolja azt a jelenséget, hogy a piac viszonylag kismértékű kedvezőtlen elmozdulásakor is ezeknek a nagyon kockázatos kötvényeknek a piacáról nagymértékű a tőkekivonás.

Egy másik aktuális példa a kriptovaluták piaca. Hatalmas viták dúlnak amatőr befektetők, de egyre inkább professzionális szereplők között is, hogy mi az optimális bitcoinbefektetési stratégia. Két szélsőség a jellemző: az egyik vélemény szerint vagyonunknak maximum egytizedét érdemes kriptovalutában tartani, mások viszont komoly tőkeáttétellel játszották meg ezt az eszközt, sokszor meglehetős sikerrel. Modellünk egy meglepő, távolságtartó értelmezését adja a jelenségnek: elképzelhető, hogy a nagy különbség a két javasolt stratégia között nem abból fakad, hogy a szereplők nagyon különbözőképpen ítélik meg a piac esélyeit, hanem abból, hogy a piac közel van a kritikus ponthoz, ahol a konzervatív és a tőkeáttételes stratégiák hasonló értékűek.

Hivatkozások

Bellamy, N. [2001]: Wealth optimization in an incomplete market driven by a jumpdiffusion process. Journal of Mathematical Economics, Vol. 35. No. 2. 259–287. o. https://doi.org/10.1016/S0304-4068(00)00068-9.

Brunnermeier, M. K.–Pedersen, L. H. [2008]: Market liquidity and funding liquidity. The Review of Financial Studies, Vol. 22. No. 6. 2201–2238. o. doi: https://doi.org/10.3386/w12939.

Cont, R.–Tankov, P. [2004]: Financial modelling with jump processes. Chapman and Hall, New York, https://doi.org/10.1201/9780203485217.

Desmettre, S.–Korn, R.–Seifried, F. T. [2013]: Worst-case consumption-portfolio optimization. Working Paper, http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2238823.

Karatzas, I.–Lehoczky, J. P.–Shreve, S. E. [1987]: Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon. SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 25. No. 6. 1557–1586. o. https://doi.org/10.1137/0325086.

Korn, R.–Trautmann, S. [1995]: Continuous-time portfolio optimization under terminal wealth constraints. Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 42. No. 1. 69–92. o. https://doi.org/10.1007/bf01415674.

Korn, R.–Wilmott, P. [2002]: Optimal portfolios under the threat of a crash. International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 5. No. 2. 171–187. o. https://doi.org/10.1142/s0219024902001407.

Markowitz, H. [1952]: Portfolio selection. The Journal of Finance, Vol. 7. No. 1. 77–91. o. https://doi.org/10.2307/2975974.

Merton, R. C. [1969]: Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. The Review of Economics and Statistics, Vol. 51. No. 3. 247–257. o. https://doi.org/10.2307/1926560.

Mi, H.–Bi, X. C.–Zhang, S. G. [2015]: Dynamic asset allocation with loss aversion in a jump-diffusion model. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, Vol. 31. No. 2. 557–566. o. https://doi.org/10.1007/s10255-015-0485-1.

Ruan, X. –Zhu, W.–Hu, J.–Huang, J. [2013]: Optimal portfolio and consumption with habit formation in a jump diffusion market. Applied Mathematics and Computation, Vol. 222. 391–401. o. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.07.063.

Függelék

F1. Az ugrások sűrűségfüggvénye

Jelölje $\rho_{\mathrm{eff}}(j)$ az ugrás sűrűségfüggvényét effektív értelemben, míg $\rho_{\log}(x)$ logaritmikus értelemben. Ekkor persze $j=e^x-1$. *Cont–Tankov* (2004) alapján ekkor a Lévy-mértékek ν transzformációja a következőképpen történik:

$$\nu_{\log}(dx)=\lambda\rho_{\log}(x)dx=\lambda\rho_{eff}(j)dj=\nu_{eff}(dj)$$

$$\rho_{\log}(x)=\rho_{eff}(j)\frac{dj}{dx}$$

$$\rho_{\log}(x)=k(1+j)^{k-1}e^x=k\left(1+e^x-1\right)^{k-1}e^x=ke^{kx},$$

ami éppen egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó mínusz egyszeresének sűrűségfüggvénye.

F2. A hasznosság adott befektetési arány és fogyasztási ráta mellett

$$U=\mathbb{E}\int_0^\infty \frac{\left(cV_t\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}e^{-\delta t}dt=\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_0^\infty \mathbb{E}\left[V_t^{1-\gamma}e^{-\delta t}\right]dt,$$

ahol a várható értéket és az integrált felcserélhettük, mert $\gamma<1$ esetén az integrandus nemnegatív, míg $\gamma>1$ esetén határozottan negatív. Szükség van tehát $Y_t=V_t^{1-\gamma}e^{-\delta t}$-re, illetve ennek várható értékére. V_t sztochasztikus folyamatot az alábbi sztochasztikus-folyamat-sorozattal közelítjük:

$$dV_t^{(n)}=V_t^{(n)}\left\{\left[r(\alpha)-c\right]dt+\alpha\left[\mu-r(\alpha)-\lambda\bar{J}\right]dt+\alpha\sigma dW_t+\sum_{i=1}^n\widehat{\alpha j_i}dN_{t,i}^{[\lambda\rho(j_i)\Delta j]}\right\}, \qquad (F1)$$

ahol $-1=j_0<\dots<j_i<\dots<j_n=0$ egy ekvidisztáns partíciója a $(-1,0]$ intervallumnak, $j_{i+1}-j_i=\Delta j$, $\forall i=1,\ldots,n$, és $N_{t,i}^{[\lambda\rho(j_i)\Delta j]}$ Poisson-folyamatok függetlenek.

Az (*F*1) megoldása *Cont–Tankov* [2004] alapján:

$$V_t^{(n)}=V_0e^{X_t}\prod_{i=1}^n\left(1+\widehat{\alpha j_i}\right)^{N_{t,i}^{[\lambda\rho(j_i)\Delta j]}},$$

ahol $X_t=\left\{r(\alpha)-c+\alpha\left[\mu-r(\alpha)-\lambda\bar{J}\right]-\frac{(\alpha\sigma)^2}{2}\right\}t+\alpha\sigma W_t.$

$$Y_t^{(n)}=\left[V_t^{(n)}\right]^{1-\gamma}e^{-\delta t}=V_0^{1-\gamma}e^{(1-\gamma)X_t-\delta t}\prod_{i=1}^n\left(1+\widehat{\alpha j_i}\right)^{(1-\gamma)N_{t,i}^{[\lambda\rho(j_i)\Delta j]}}=$$

$$=V_0^{1-\gamma}e^{(1-\gamma)X_t-\delta t}\prod_{i=1}^n\exp\left[N_{t,i}^{[\lambda\rho(j_i)\Delta j]}\log\left(1+\widehat{\alpha j_i}\right)^{1-\gamma}\right].$$

$Y_t^{(n)}$ várható értékét számolhatjuk tényezőnként, hiszen X_t és $N_{t,i}^{[\lambda\rho(j_i)\Delta j]}$-k függetlenek. A produktum mögött egy Poisson-eloszlású valószínűségi változó konstansszorosának exponenciálisa szerepel, erre:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(N_t^{(\Lambda)}\cdot a\right)\right]=\sum_{k=0}^\infty e^{ak}\frac{(\Lambda t)^k e^{-\Lambda t}}{k!}=e^{-\Lambda t}\sum_{k=0}^\infty\frac{\left(e^a\Lambda t\right)^k}{k!}=\exp\left[\left(e^a-1\right)\Lambda t\right].$$

Ezt felhasználva $Y_t^{(n)}$ várható értéke:

$$\mathbb{E}\left[Y_t^{(n)}\right]=V_0^{1-\gamma}\exp\left\{(1-\gamma)\left[r(\alpha)-c+\alpha\left[\mu-r(\alpha)-\lambda\bar{J}\right]-\gamma\frac{(\alpha\sigma)^2}{2}\right]t-\delta t+\right.$$

$$\left.+t\sum_{i=1}^n\left[\left(1+\widehat{\alpha j_i}\right)^{1-\gamma}-1\right]\lambda t\rho(j_i)\Delta j\right\}.$$

Határértéket véve:

$$\mathbb{E}[Y_t] = V_0^{1-\gamma} \exp\left\{(1-\gamma)\left[r(\alpha) - c + \alpha[\mu - r(\alpha) - \lambda\overline{J}] - \gamma\frac{(\alpha\sigma)^2}{2}\right]t - \delta t +\right.$$

$$\left. + \lambda t \int_{-1}^{0}\left[\left(1+\widehat{\alpha j}\right)^{1-\gamma} - 1\right]\rho(j)dj\right\} = V_0^{1-\gamma}\exp\left\{\left[(1-\gamma)\Psi(\alpha) - (1-\gamma)c - \delta\right]t\right\},$$

ahol

$$\Psi(\alpha) = r(\alpha) + \alpha[\mu - r(\alpha) - \lambda\overline{J}] - \gamma\frac{(\alpha\sigma)^2}{2} + \frac{k\lambda}{1-\gamma}\int_{-1}^{0}\left[\left(1+\widehat{\alpha j}\right)^{1-\gamma} - 1\right](1+j)^{k-1}dj.$$

Végül a hasznosság ekkor:

$$U = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_0^\infty \mathbb{E}[Y_t]dt =$$

$$= \frac{(cV_0)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\int_0^\infty \exp\left\{\left[(1-\gamma)\Psi(\alpha) - (1-\gamma)c - \delta\right]t\right\}dt =$$

$$= \frac{(cV_0)^{1-\gamma}}{(1-\gamma)^2 c + (1-\gamma)\delta - (1-\gamma)^2\Psi(\alpha)}, \qquad \text{ha } (1-\gamma)\Psi(\alpha) - (1-\gamma)c - \delta < 0.$$

F3. A kockázatmentes egyenértékes α függvényében

Az optimális fogyasztási ráta α függvényében:

$$c(\alpha) = \frac{\delta - (1-\gamma)\Psi(\alpha)}{\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad c(0) = \frac{\delta - (1-\gamma)r}{\gamma} = r + \frac{\delta - r}{\gamma}.$$

A megoldandó egyenlet V_0-ra:

$$U[0, c(0), V_0] = U[\alpha, c(\alpha), 1]$$

$$\frac{[c(0), V_0]^{1-\gamma}}{(1-\gamma)[(1-\gamma)c(0) + \delta - (1-\gamma)r]} = \frac{[c(\alpha)\cdot 1]^{1-\gamma}}{(1-\gamma)[(1-\gamma)c(\alpha) + \delta - (1-\gamma)\Psi(\alpha)]}.$$

Mivel $r = c(0) - \frac{\delta - r}{\gamma}$ és $\Psi(\alpha) = \frac{\delta - \gamma c(\alpha)}{1-\gamma}$, ezért

$$\frac{\left[c(0)V_0\right]^{1-\gamma}}{(1-\gamma)c(0)+\delta-(1-\gamma)\left[c(0)-\frac{\delta-r}{\gamma}\right]}=\frac{c(\alpha)^{1-\gamma}}{(1-\gamma)c(\alpha)+\delta-(1-\gamma)\frac{\delta-\gamma c(\alpha)}{1-\gamma}}$$

$$\frac{\left[c(0)V_0\right]^{1-\gamma}}{c(0)}=\frac{c(\alpha)^{1-\gamma}}{c(\alpha)}$$

$$e(\alpha):=V_0=\left[\frac{c(0)}{c(\alpha)}\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$