Aukcióelmélet előadások

„Ha eladsz vagy veszel …,
ne csapd be testvéredet.” (Lev 25,14)

Szerző: MAGYARKUTI GYULA

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

MAGYAR NEMZETI BANK

Aukcióelmélet előadások

Budapest | 2018.

Magyarkuti Gyula

Aukcióelmélet előadások

Közgazdaságtudományi Kar
Matematika Tanszék

Budapesti Corvinus Egyetem
Közgazdaságtudományi Kar
Matematika Tanszék

Cím:
Aukcióelmélet előadások
Szerző:

Kiadó:
Budapesti Corvinus Egyetem | 1093, Budapest, Fővám tér 8.

Nyomdai kivitelezés:
Komáromi Nyomda

ISBN 978-963-503-705-6, 978-963-503-709-4 (ebook)
DOI 10.14267/cb.2018k02

Budapest | 2018.

„A Budapesti Corvinus Egyetem és a Magyar Nemzeti Bank
együttműködési megállapodása keretében támogatott mű.”

TARTALOM

Előszó

AZ ELŐADÁSJEGYZET A Budapesti Corvinus Egyetem Matematika Tanszékének *Aukcióelmélet* című kurzusához készült. A jegyzet alapja *Vijay Krishna Auction Theory* című könyve [19]. Azért választottam ezt a művet az előadásaim alapjául, mert olyan bevezető jellegű könyvet kerestem, amely

a) rigorózus matematikai megközelítést használ,

b) de naiv valószínűségszámítási ismeretekkel is feldolgozható,

c) ugyanekkor illeszkedik az Aukcióelmélet oktatásának nemzetközi standardjához.

E könyv pontosan tükrözi az általam tartott Aukcióelmélet című tárgy tanmenetét. Egy szemeszterben 12 hetet feltételezve, az itteni 12 fejezet a szemeszter egy-egy hetének feleltethető meg, szigorúan a fejezetek sorrendjében haladva.

Az anyag megértéséhez szükséges előismeretek a következők: Analízis, a szokásos integrál- és differenciálszámítás (pl.: [5]); Valószínűségszámítás, de elegendő a Mértékelmélet nélküli, ú.n. naív tárgyalás (pl.:[27]); Mikroökonómia, itt is elegendő a belépő szint (pl.:[41]), de különösen fontos a Nash-egyensúly koncepciójának pontos értelmezése. Az anyag mélyebb megértéséhez nélkülözhetetlen a Mértékelméleti megalapozás (pl.:[23]), és a haladó Mikroökonómiai tárgyalás (pl.:[4],[25]), de ezek nélkül is belevághatunk az aukcióelmélet rejtelmeinek megismerésébe, itt értem ezalatt: e könyv olvasásába. Ez esetben e könyv szolgáltat majd motivációt a fenti diszciplínákkal való ismerkedésre.

Egyéni tanulásra, a kutatások megkezdésére, esetlegesen szakdolgozathoz vagy TDK munkához itt szeretnék további dolgozatokat ajánlani. Fejezetenkénti bontásban tehát:

1-4. fejezetekhez: [39], [2], [3], [8], [6],[40], [30].

5. fejezethez: [22], [1].

6-8. fejezetekhez: [9], [10], [12], [13], [17], [37].

9-12. fejezetkehez: [7], [11], [32], [33], [36], [31], [24].

Köszönetemet fejezem ki Pálvölgyi Dénes tanár úrnak, aki idejét nem kímélve, majd egy szemeszteren keresztül, hosszan diszkutálta velem az anyag jelentős részét. Azok a hibák, amik ennek ellenére a könyvben maradtak egyedül engem terhelnek. Az oktatás során felszínre kerülő félreértéseket, elírásokat, hibákat igyekszem kijavítani a könyv elektronikus verziójában. Örömmel fogadom az olvasó által talált hibákat. Az elektronikus verzió a honlapomról (`http://web.uni-corvinus.hu/magyarkuti`) elérhető. Ajánlom az ottani példány használatát.

Köszönettel tartozom Vijay Krishnának a személyes segítségért, és az ELSEVIER kiadónak, hogy támogatta a könyv megjelenését. Köszönöm a kar és az egyetem vezetésének a tankönyv megírásához nyújtott anyagi támogatást. Köszönettel gondolok a Matematika tanszék tagjaira, akik hosszú távon támogatták munkámat. Különösen is szeretném megköszönni a péntek délutáni tanszéki szemináriumok résztvevőinek idejét, kitartását, türelmét, figyelmét és fegyelmét, az évek óta tartó sokoldalú személyes támogatását.

Végül szeretettel ajánlom e könyvet volt és leendő hallgatóimnak, abban bízva, hogy ugyanolyan örömmel olvassák majd, ahogyan én írtam.

Budapest, 2018. nyarán

Magyarkuti Gyula

1.

BEVEZETÉS ÉS A MÁSODÁRAS AUKCIÓ

Az aukciók lebonyolítási formáinak közös jellemzője, hogy összesen két dolgot garantálnak:

1. Kiválasztják a résztvevők[1] közül azt a játékost, aki elnyeri az aukció tárgyát. Ez a játékos az aukció nyertese.

2. Megadják a résztvevők fizetési kötelezettségét. Miután kiderült, hogy ki a fenti pont szerinti nyertes, résztvevőnként külön-külön meghatározzák a fizetési kötelezettségeket.[2]

A játékosok az aukcióban való részvételükkel elfogadják, hogy az előttük előre ismert lebonyolítási rend majd a lejátszás után kiválasztja közülük a nyertest, és azt is elfogadják, hogy a lejátszás után befizetik a lebonyolítási rendben definiált, a lejátszásból adódó fizetési kötelezettségüket. Az aukció tárgya oszthatatlan, csak az egyik játékos birtokolhatja, a fizetési kötelezettség elől nem lehet kitérni.

Bármilyen típusú aukcióról is van szó, annak lehet egy rezervációs árat használó variánsa is. A rezervációs ár használata annyit tesz, hogy az aukció eredménytelen, ergo nincs nyertes, ha a fizetési kötelezettség nem éri el az előre meghatározott rezervációs árat. Ilyenkor senki nem nyeri el az aukciót tárgyát.

1.1. Aukció típusok

A matematikai formalizmus bevezetése felé haladva először összefoglaljuk a közismert aukció lebonyolítási formákat.

Angol aukció. A legismertebb és a legrégebben használt forma. Maga az aukció szó a köznyelvben sokszor az angol aukciót jelenti. Ennek oka, hogy a latin tő, az *augere* (*emelkedő*) is erre céloz. A kikiáltó bemond egy alacsony árat, ami mellett várhatóan több mint ketten megveszik a terméket, majd jellemzően kis lépésekben emeli az árat. Mindaddig emel az áron, amíg az árat elfogadó vevők száma nem kisebb mint 2. Ha egyetlen vevő marad, akkor övé a termék, azon az áron, amit a kikiáltó az utolsó alkalommal bemondott.

Az angol aukciót a következőképpen modellezhetjük: A teremben mindenki tudja, hogy mi az árverés tárgya. A potenciális vevők látják a pillanatnyi árat és kézfenntartással jelzik, ha azon az áron ők megvennék. Tegyük fel, hogy a kikiáltási ár 0-ról indul és folytonosan emelkedik. A kezdő pillanatban mindenkinek fent van a keze. Amint az ár olyan magas, hogy az aukció tárgyát a vevő azon az áron már nem venné meg, akkor leengedi a kezét. A játék addig folyik, amíg legalább két kéz van a magasban. Az aukciónak abban a pillanatban van vége, amikor egy kéz van csak felemelve, és az utolsó kéz tulajdonosa a nyertes. A nyertesnek az ebben a pillanatban érvényes árat

[1] A továbbiakban az *aukció résztvevője*, a *játékos*, a *licitáló* egymás szinonimái.

[2] Ami persze – sokszor, de nem feltétlenül – nulla egy nem nyertes játékos esetén.

kell megfizetnie. Az ár tehát a második legtöbbet ajánló résztvevő által éppen már nem elfogadott ár.

Holland aukció. Az angol aukcióval ellentétben az ár kis lépésekkel lefelé halad, olyan nagy összegről indulva, amit senki nem fogad el. A játék akkor ér véget, amikor az első érdeklődő jelzi vételi szándékát. Övé a termék, az éppen aktuális áron.

Zárt-ajánlatú elsőáras aukció. A résztvevők egymás ajánlatait nem ismerve ajánlatot tesznek a termékre. Mondjuk egy lezárt borítékban adják be az aukciót lebonyolítónak az ajánlatukat. Az nyeri az aukciót, aki a legmagasabb ajánlatot adja, az általa megajánlott áron.

Zárt-ajánlatú másodáras aukció. A résztvevők most is egymás ajánlatait nem ismerve tesznek ajánlatot a termékre. Az nyeri az aukciót, aki a legmagasabb ajánlatot adja, de nem az általa ajánlott, hanem a második legmagasabb ajánlott áron.

1.2. Értékelések

Ha elfogadjuk azt az alapfeltevést, hogy az általunk vizsgált jelenségeket nem a puszta véletlen, a vakszerencse hajtja, hanem a résztvevők gondolkodó lények és cselekedeteiket valamilyen fajta racionalitás vezérli, akkor az aukció résztvevőjének nyilvánvalóan kell valamilyen értékeléssel rendelkezni az aukció tárgyát illetően. Valami oka ugyanis van annak, hogy ott van a teremben, azaz részt vesz az aukcióban.

Az értékelés nehezen definiálható fogalom, de az intuitív tartalom szerint olyasmit fejezi ki, hogy a tárgy megszerzése a játékos számára mekkora többletet jelent. Hogy ez a többlet miben van kifejezve – egy érzelem teljesülése, esetleg egy pénzmennyiség, vagy egy szükséglet kielégítése – az a tárgyalásunk szintjén érdektelen. Az egyszerűség kedvéért képzelhetjük úgy, hogy ez az értékelés megadható egy számmal. Mintha a tárgy birtoklása a játékos számára x bevételt jelentene, amikor is éppen x az értékelése.

Fontos különbséget tennünk az értékelés és a licitálás közt. A licit az értékelésen alapul, de nem feltétlenül azonos avval. A licit mindig az az ár, amit az aukció lejátszása során a játékos a kikiáltóval közöl. Hogy a játékos az értékeléséből hogyan képzi a licitjét, az az ő dolga, és nagyon sok mindentől függ. Világos, hogy elsődlegesen az értékelésétől, de függ például az aukció lebonyolítási formájától is. Emiatt mindig feltesszük, hogy az aukcióban résztvevő játékosok előtt tökéletesen ismert az aukció lebonyolítási módja, és az a tény is, hogy minden más résztvevő is rendelkezik evvel a tudással. Jegyzetünkben

$$x \mapsto \beta(x) = b$$

módon fejezzük ki az értékelés és a licitálás közti kapcsolatot. Ez azt jelenti, hogy ha egy bizonyos típusú aukcióban résztvevő játékosnak x az értékelése, akkor ő ehhez az értékeléshez a $b = \beta(x)$ licitet társítja. A játékosok racionalitása azt jelenti, hogy a játékosok törekednek arra, hogy megtalálják azt a β licitfüggvényt, ami az ő igényeiket a legjobban kielégíti. Hogy mit jelent ezen igények kielégítése, azt később pontosan formalizáljuk. (Nash-egyensúly.)

A holland aukcióban például mindenkinek van egy értékelése, ez alapján egy licitje, és akkor emeli fel a kezét, amikor az ő licitje a kijelzőn megjelenik. Az angol aukcióban akkor veszi le a kezét, amikor az ő általa még befizethető összeg eltűnik a kijelzőről. Ez volt az ő licitje. A zárt-ajánlatú első- vagy másodáras aukciókban a résztvevők ajánlatait gondolhatjuk az aukcióban résztvevők licitjeinek.

Az aukciónak éppen az az értelme, hogy amikor a kikiáltónak nincs elképzelése a játékosok értékeléséről, és jellemzően az aukció tárgyának értékéről sem, akkor valamilyen algoritmust adjon arra, hogy a tárgyat a kikiáltó valamilyen egyezség keretében, előre tisztázott szabályok közt, *korrekt, hiteles módon* tudja értékesíteni. A kikiáltónak nyilván a legnagyobb bevétel az érdeke. Ha tudná kinek a legmagasabb az értékelése, akkor egyszerűen az ezt képviselővel kötne üzletet. Hasonlóan, ha a kikiáltó biztosan tudná, hogy mekkora értékkel bír az árverés tárgya, nem kockáztatná az esetleg sokkal alacsonyabb árat. Gondoljunk például egy olajmező aukciójára. A gond éppen az, hogy senki nem tudja pontosan mennyi olajat rejt a föld, és rendkívül drága erről valami nagyon keveset is, de tudni. Ha a kikiáltó ezt tudná, semmi értelme nem lenne számára az olajmező eladásának, egyszerűen ki tudná termelni, vagy éppen le tudna róla mondani.

A kérdés az, hogy mit teszünk fel ezen értékelések kialakulásáról. Mitől függnek ezek az értékelések? Csak az árverés tárgyától, vagy esetleg függnek a játék többi résztvevőjének értékelésétől, mások véleményétől is?

Magán értékelés

Ha minden résztvevő a többiek befolyásától függetlenül tudja, hogy a termék számára mennyit ér az ajánlattevés pillanatában, akkor ezt az aukciót *magán értékelésű* aukciónak mondjuk. Implicit feltesszük, hogy senki nem tudja teljes bizonyossággal a másik résztvevő értékelését, mi több: ez senkit nem is érdekel. Ha az egyik résztvevő megtud valamit a másik értékeléséről, az az ő értékelésére semmilyen hatással nincs, azaz a másik értékelésének ismerete nincs hatással a tárgy értékelésére.

Tipikusan magán értékelésű egy aukció, ha az eladandó objektum hasznossága pusztán annak elfogyasztásából ered. Például, ha bútorra vagy bélyegre gondolunk, akkor a magán értékelés azt tükrözi, hogy milyen hasznossága van számunkra a bútor bútorkénti, vagy a bélyeg bélyegkénti felhasználásának. Fontos látni, hogy ilyenkor is lehet ez az érték ajánlattevőnként nagyon különböző. Nem mindegy ugyanis, hogy mennyire fontos nekem a bélyeg felhasználása, azaz egy levél feladása. De gondolhatunk például arra is, hogy vizet árverezünk egy sivatagban szomjas emberek között. Ilyenkor a magán értékelés csak attól függ, hogy a játékos mennyire szomjas.

A fenti példánál sokkal életszerűbb, ezért sokkal szebb is, ha mobiltelefon szolgáltatók számára kiírt frekvencia aukciókra gondolunk. Viszonylag pontosan kiszámolható, hogy mondjuk a 800MHz-es frekvencia sáv kizárólagos birtoklása a szolgáltatási területen belül mekkora 4G adatforgalmat tesz lehetővé az adott szolgáltató technikai felszereltségét figyelembe véve. Ezt az adott internet szolgáltató ismeri. Sőt csak ő ismeri. Összeveti a keresletre vonatkozó piaci kutatási eredményekkel, és így elég pontosan képes megbecsülni, hogy számára a 800MHz-es sáv birtoklása mekkora profittal járhat. Ez nagyjából független attól, hogy a konkurens szolgáltató mit gondol a dologról. Itt is teljesül tehát, hogy az aukció tárgyának hasznossága, annak „elfogyasztásából" ered, emiatt tekinthető a frekvencia aukció is egy magán értékelésű aukciónak.

Ha viszont a résztvevők értékelése nem csak a tárgytól, hanem mondjuk a tárgy másodlagos piacától is függ, olyan módon, hogy a vevő a tárgyat valamilyen befektetésnek tekinti, akkor az értékelés azonnal függ mások jövőbeni értékelésétől is, ami azt jelenti, hogy sérül a magán értékelés feltevése.

Összefüggő értékelés

Nagyon sok esetben az árverezendő objektum megnyerésének hasznossága teljesen ismeretlen, sőt megismerhetetlen az ajánlattevők számára. Természetesen lehetnek erről egyenkénti becsléseik, ezen becslések kialakítása azonban nagy erőfeszítésekbe kerülhet, tehát az információ a játék többi résztvevőjének értékeléséről hatással van az értékelések kialakítására.

Ugyanez a helyzet, ha a terméket másodlagos piacra szánjuk, hiszen ebben az esetben az én értékelésem mások jövőbeni értékelésének függvénye. Amikor az értékelés kialakítása függ az aukció többi résztvevőjének értékelésétől, akkor az aukciót *összefüggő értékelésű* aukciónak nevezzük.

Tipikusan összefüggő értékelésű aukció egy műalkotás aukciója, államkötvények aukciója, vagy egy olyan földterület árverése olajkitermelés céljából, amelyben a ténylegesen kitermelhető olaj mennyisége a résztvevő felek előtt ismeretlen.

Ekvivalencia

Képzeljük el, hogy egy magán értékelésű holland aukció előtt a résztvevők az általuk előre eldöntött árat egy lezárt borítékban küldik el a kikiáltónak. Világos, hogy a holland aukciót ugyanaz a személy nyeri és pontosan annyit fizet, mintha zárt-ajánlatú elsőáras aukciót játszanának le. Hasonlóképpen egy zárt-ajánlatú elsőáras aukciót lejátszhatunk holland aukcióként is. A nyertes személye és az árverés végső összege mindkét esetben azonos.

Azt azonban, hogy a két aukció lejátszási formája teljesen azonos lenne nem mondhatjuk ki. Ha holland aukcióként játsszuk le, akkor, amíg az aukció tart, mindenki tudja, hogy mindenkinek a licitje az aktuális árnál kisebb. Amikor véget ér a játék, akkor mindenki tudja kinek volt a legmagasabb a licitje. A kikiáltó számára csak az derül ki, hogy kié volt legnagyobb a licit. A többi licit pontos értéke a játék összes résztvevője előtt rejtve marad.

Ha ugyanerre a jelenségre zárt-ajánlatú elsőáras aukcióként tekintünk, akkor majd az eredményhirdetés után derül ki kinek volt a legmagasabb a licitje. A kikiáltó számára minden licit kiderül. Ha magán értékelésről van szó, akkor a két lejátszásban rejlő információ különbség nem számít, hiszen ekkor az egyes játékosok értékelésére nincs hatással a másik értékelése.

Hasonló párhuzam vonható az angol aukció és a zárt-ajánlatú másodáras aukció között. Ha minden résztvevő előre eldönti, hogy milyen licitet alkalmaz, akkor nincs különbség annak tekintetében, hogy zárt-ajánlatú másodáras módon vagy angol aukció módon játszanak. Mindkét esetben a legnagyobb ajánlatot tevő játékos nyer, ő fizeti be a második legnagyobb ajánlatot, és a többiek nem fizetnek semmit.

Ha a játékban rejlő információ tartalomra is figyelünk, akkor különbségek vannak. Az angol aukció lejátszása közben az aukcióból kiálló játékosok sorra nyilvánítják ki licitjüket, végül csak a nyertes licitjét nem ismerjük meg.
Ha ugyanezt, zárt-ajánlatú másodáras aukcióként értelmezzük, akkor az eredmény kihirdetése után csak a nyertes, tehát a legnagyobb licitet adó személye és a második legnagyobb licit értéke derül ki.

A bevezető jellegű előadás során szükséges egyszerűsítéseket tennünk ahhoz, hogy a legalapvetőbb elveket megérthessük. Ilyen egyszerűsítés, hogy az egész könyvben kizárólag a magán értékelések esetére szorítkozunk. A magán értékelés feltevése mellett a két-két lejátszás okozta információ különbség a mi tárgyalásunk szempontjából nem releváns, emiatt a továbbiakban nem teszünk különbséget az angol aukció, és a zárt-ajánlatú másodáras aukció közt, hasonlóan a holland aukció és a zárt-ajánlatú elsőáras aukció között sem. Ezután egyszerűen elsőáras vagy másodáras aukciókra hivatkozunk.

1.3. A szimmetrikus modell

Az *aukció nyertese* az a játékos, aki az árverés tárgyát kézhez kapja. Egy aukciót *standard aukciónak* mondunk, ha az aukció konkrét lejátszási szabályai a nyertes játékost, mint a legnagyobb licitet leadó játékost definiálják.

Nem standard aukcióra a legegyszerűbb példa a lottó, vagy valamilyen rezervációs árat használó aukció. Standard aukcióra a legegyszerűbb példák az elsőáras és a másodáras aukciók. E fejezetben először a másodáras aukcióval foglalkozunk, mert mint később látni fogjuk, ez a fajta lejátszás nagyon sok szempontból a legegyszerűbb, a legkézenfekvőbb és a legigazságosabb.

Az eddig tárgyalt aukció lebonyolítások mind olyanok voltak, hogy csak a nyertes számára írnak elő fizetési kötelezettséget. Ez nem feltétlen van mindig így. Például a lottóban minden résztvevő fizet, de még olyan aukció is elképzelhető, hogy egyedül a nyertes nem fizet. Ilyen *egzotikus* aukciókat is vizsgálunk majd az 5. fejezetben. A modell építésére visszatérve szét kell választanunk tehát a fizetés eseményét és a nyerés eseményét. Amikor e két esemény egybeesik, akkor az aukciót *nyertes fizet* típusú aukciónak mondjuk.

Egyetlen terméket szeretnénk árverezni N számú potenciális vevő között. Az i-edik licitáló a többiektől függetlenül ismeri az árverezendő objektum x_i értékét. Az i-edik licitáló természetesen nem ismeri a j-edik játékos x_j értékelését, az számára egy X_j valószínűségi változó realizációja. Ugyanígy X_i az összes többi számára egy valószínűségi változó. Feltesszük, hogy az így kapott

$$X_1, X_2, \cdots, X_N$$

valószínűségi változók függetlenek; azonos eloszlásúak; folytonosan differenciálható eloszlásfüggvényük F; amelynek a deriváltja a sűrűségfüggvény, tehát $F' = f$. A modellt azért nevezzük szimmetrikusnak, mert mindegyik X_i értékelés eloszlása ugyanaz.

Minden aukció formában az i-edik játékos stratégia- vagy licitfüggvénye

$$\beta_i : [0, \omega] \to \mathbb{R}$$

A $\beta_i(x) = b$ azt fejezi ki, hogy az i-edik játékos az x értékelés esetén b licitet tesz. A játék kifizetési függvénye persze függ a konkrét aukció konkrét formájától. Az egyes játékosok úgy alakítják ki a stratégiájukat, hogy a kifizetési („pay off") függvényük várható értékét maximalizálják. Ez alatt azt értem, hogy a játékos az adott x értékelése mellett olyan b licitet keres, amellyel a

$$P(\{b\text{-vel nyer}\}) \cdot E(x|\{b\text{-vel nyer}\}) - P(\{b\text{-vel fizet}\}) \cdot E(C|\{b\text{-vel fizet}\})$$

kifejezést maximalizálja. Minden egyes játékos számára a bevétel az aukció tárgyának megszerzése, ami számára nem valószínűségi változó, hiszen x a tárgy értéke a játékos számára. A C a nyertes fizetési kötelezettsége, amely a konkrét aukció formától függ. Azt kaptuk tehát, hogy a várható profit maximalizálása azt jelenti, hogy rögzített x értékeléshez a játékos olyan b licitet keres, amely a $b \mapsto \Pi(b,x)$ függvényt maximalizálja, ahol

$$\Pi(b,x) = P(\{b\text{-vel nyer}\})x - P(\{b\text{-vel fizet}\}) \cdot E(C|\{b\text{-vel fizet}\}).$$

A fenti formula nem csak a szóban forgó játékos x értékelésétől és b licitjétől függ, hiszen a C valószínűségi változó értéke függ vagy függhet a többi játékos licitjeitől.

Ha az i-edik játékos a β_i licitfüggvényt használja, akkor a $(\beta_1, \ldots, \beta_N)$ licit N-es Nash-egyensúlyi helyzetet reprezentál, ha minden $i = 1, \ldots, N$ mellett és minden $x \in [0, \omega]$ értékelésre

$$\Pi(\beta_i(x), x) \geq \Pi(b, x)$$

minden b licit mellett. Feltéve, hogy az összes többi játékos is a β_j licitfüggvényt használja. A Nash-egyensúlyi $(\beta_1, \ldots, \beta_N)$ licitrendszert *szimmetrikusnak* mondjuk, ha valamennyi licitfüggvény azonos, azaz $\beta = \beta_i$ minden i játékosra.

Még a fenti szimmetrikus modellben is előfordulhat nem szimmetrikus Nash-egyensúly, amint például azt a 20. oldalon látjuk, egy két szereplős másodáras aukció keretében. Egy lényeges egyszerűsítés, hogy az első szakaszokban első- és másodáras aukció szimmetrikus Nash-egyensúlyát keressük.

A *várható befizetés* („expected payment”) konkrét alakja függ a konkrét aukció konkrét definíciójától. Az intuitív értelmezés az, hogy amennyiben mindenki a β licitfüggvénnyel játszik[3], akkor a játékos számára a játék lefolyását csak az értékelése határozza meg. Ha x a játékos értékelése, akkor az aukcióban való részvétel várhatóan $m(x)$ összeg befizetésével jár a játékos részéről. Kicsit pontosabban

$$m(x) = P(\{\beta(x)\text{-el fizetés}\})E(\{\text{befizetés}\} \mid \{\beta(x)\text{-el fizetés}\}).$$

Így a játékos maximalizálandó profit függvényére a

$$\Pi(b,x) = P(\{b\text{-vel nyer}\})\,x - m\left(\beta^{-1}(b)\right)$$

formulát kapjuk.

1.1. lemma. *Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók a közös F eloszlásfüggvénnyel. Jelölje $Y_1^{(N-1)} = \max_{j>1} X_j$, ezek közül $N-1$ darab maximumát jelölő valószínűségi változót. Legyen G az $Y_1^{(N-1)}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, míg g a sűrűségfüggvénye. Ekkor*

$$G = F^{N-1}, \quad \text{és} \quad g = (N-1)\,F^{N-2} f.$$

Bizonyítás. Világos, hogy $Y_1^{(N-1)} < r$ akkor és csak akkor, ha $X_i < r$ minden szóba jövő $i = 2, \ldots, N$ mellett. Így a függetlenség szerint $G(r) = P\left(Y_1^{(N-1)} < r\right) = P(X_2 < r)\cdot, \ldots, \cdot P(X_n < r) = F^{N-1}(r)$. □

1.2. lemma. *Legyen g a fenti $Y_1^{(N-1)}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Jelölje $Y_2^{(N)} = \max 2_{i=1,\ldots,N} X_i$ ezen N valószínűségi változó második maximumát jelölő valószínűségi változót. Ennek F_2 sűrűség- és f_2 eloszlásfüggvényére:*

$$F_2 = NF^{N-1} - (N-1)\,F^N \quad \text{és} \quad f_2 = N(1-F)\,g.$$

Bizonyítás. Először írjuk fel $Y_2^{(N)}$ eloszlásfüggvényét. Látható, hogy az $(Y_2 \le x)$ esemény vagy úgy teljesül, hogy minden $(X_i \le x)$ fennáll, vagy úgy teljesül, hogy $n-1$ darab i mellett $(X_i \le x)$ teljesül, és egyetlen darab i-re nem teljesül. Ez utóbbi N különbözőképpen lehetséges, ezért

$$F_2(x) = F(x)^N + NF(x)^{N-1}(1-F(x)) = F(x)^N + NF(x)^{N-1} - NF(x)^N = NF(x)^{N-1} - (N-1)\,F(x)^N.$$

Ennek deriváltja persze a sűrűségfüggvény, tehát

$$f_2(x) = N(N-1)\,F(x)^{N-2} f(x) - (N-1)\,NF(x)^{N-1} f(x) = N(1-F(x))\,(N-1)\,F(x)^{N-2} f(x) = N(1-F(x))\,g(x).$$

Ezt kellett belátni. □

[3]Például azért, mert a játékosok előtt ismert a szimmetrikus Nash-egyensúly.

A bevezetett G függvény jelentősége abban áll, hogy a $G(x)$ annak a valószínűsége, hogy az $N-1$ értékelés mindegyike x értékelés alatt marad.

1.3. állítás. *Tegyük fel, hogy a szimmetrikus modellben lejátszott standard aukciónál a β szigorúan monoton növő licitfüggvénnyel játszanak a játékosok. Ha az 1 játékos b licitet ad le az x_1 értékelése mellett, míg a többiek a β licitfüggvénnyel adják a licitjeiket, akkor $G\left(\beta^{-1}(b)\right)$ az 1 játékos nyerésének valószínűsége.*

Ennek következményeképpen a játékos várható profit függvénye:

$$\Pi(b,x) = G\left(\beta^{-1}(b)\right)x - m\left(\beta^{-1}(b)\right) \tag{$\Pi^\star$}$$

Ha tehát, ha 1 játékos is x értékeléséhez $\beta(x)$ licitet társít, akkor az x értékeléssel való nyerés valószínűsége $G(x)$.

Egy nyertes fizet típusú aukcióban ezért a várható befizetési függvény:

$$m(x) = G(x)E\left(C|Y_1^{(N-1)} < x\right)$$

alakú, ahol C a konkrét aukcióban a nyeréssel együtt járó befizetési kötelezettség.

Bizonyítás. A β függvény a legnagyobb helyen veszi fel legnagyobb értékét, ergo a

$$\max\{\beta(X_2), \beta(X_3), \ldots, \beta(X_N)\} = \beta\left(Y_1^{(N-1)}\right)$$

valószínűségi változók azonosak. Így b pontosan akkor a legnagyobb licit, ha

$$\left(\beta\left(Y_1^{(N-1)}\right) < b\right) = \left(Y_1^{(N-1)} < \beta^{-1}(b)\right)$$

esemény fennáll. Ez az esemény éppen a b licittel való nyerés eseménye, hiszen standard aukcióban nyerni annyit tesz, mint a legnagyobb licitet adni. Ennek valószínűsége éppen $G\left(\beta^{-1}(b)\right)$.

Speciálisan a $b = \beta(x_1)$ esetben $G(x_1)$. □

Nash-egyensúlyi helyzetben egyetlen játékos várható profitja sem nő az egyensúlyi licittől való eltéréssel. Formálisan minden b licit mellett

$$\Pi(\beta(x), x) \geq \Pi(b,x),$$

ahol $\Pi(b,x)$ jelöli az i-edik játékos profitjának várható értékét. Világos, hogy standard, nyertes fizet szerkesztésű aukcióban ez a függvény

$$\Pi(b,x) = G\left(\beta^{-1}(b)\right)x - G\left(\beta^{-1}(b)\right) \cdot E\left(C|Y_1^{(N-1)} < \beta^{-1}(b)\right) \tag{Π}$$

feltéve, hogy a többi játékos is a β licitfüggvényt használja.

1.4. Másodáras aukció

Írjuk fel az i–edik játékos kifizetési függvényét. Persze a profit nem más, mint a bevétel és a költség különbsége. Ha a játékos nem nyeri az aukciót, akkor sem bevétele sem költsége nincs. Ha a játékos nyeri az aukciót, akkor a bevétele a tárgynak a számára definiált x_i értékelése és a kiadása az ezért az objektumért befizetett összeg. Tehát, ha b_i jelöli az i–edik játékos licitjét, akkor másodáras aukció esetén a kifizetési függvény a következő:

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - \max_{j\neq i} b_j & \text{, ha } b_i > \max_{i\neq j} b_j; \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases} \tag{II}$$

Ez azt jelenti, hogy a másodáras aukció egy olyan standard aukció, amit a $C = \beta\left(Y_1^{(N-1)}\right)$ befizetés definiál. Ennek megfelelően, a Π speciális eseteként, a másodáras aukcióban szereplő játékosok Nash-egyensúlyban a

$$\Pi(b,x) = G\left(\beta^{-1}(b)\right)x - G\left(\beta^{-1}(b)\right)E\left(\beta\left(Y_1^{(N-1)}\right)|Y_1^{(N-1)} < \beta^{-1}(b)\right)$$

függvényt maximalizálják.

1.4. állítás. *A másodáras aukciónak a $\beta = \mathrm{id}$ függvény Nash-egyensúlyi licitfüggvénye.*

Bizonyítás. Azt kell ellenőriznünk, hogy a $\Pi(\beta(x),x) \geq \Pi(b,x)$ egyenlőség minden x értékelés és b licit mellett fennáll. Ebben a speciális esetben ez a

$$G(x)x - G(x)E\left(Y_1^{(N-1)}|Y_1^{(N-1)} < x\right) \geq G(b)x - G(b)E\left(Y_1^{(N-1)}|Y_1^{(N-1)} < b\right)$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. Mivel g az $Y_1^{(N-1)}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, és a feltételes várható értéket az

$$E\left(Y_1^{(N-1)}|Y_1^{(N-1)} < x\right) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x tg(t)\,dt$$

formula adja, ezért átrendezés után a fenti egyenlőtlenség ekvivalens alakja

$$x(G(x) - G(b)) \geq \int_b^x tg(t)\,dt,$$

ami az integrálás triviális becsléséből t-re, majd a Newton–Leibnitz-tételből adódik tetszőleges b licit és x értékelés mellett. □

Azt kaptuk tehát, hogy az igazmondás egy Nash-egyensúlyi stratégia. A jegyzetben a továbbiakban is a Nash-egyensúlyi koncepciót használjuk, és amikor egyensúlyról van szó, az alatt mindig azt értjük.

A fenti játék egy kis módosításával látjuk, hogy az identitás nem az egyedüli Nash-egyensúly. Tegyük fel, hogy ω egy véges szám, $N = 2$, és a játék definícióját annyiban

módosítjuk, hogy foglalkozunk az egyenlő licitek esetével is: Ha a legmagasabb licitet egyszerre adja a két játékos, akkor valamilyen p valószínűséggel nyeri az egyik és $1-p$ valószínűséggel a másik. A nyertes viszi a kikiáltás tárgyát és fizeti a vesztes licitjét, ergo a közös licitet. Látható, hogy a (β_1, β_2) pár Nash-egyensúlyi stratégia, amennyiben $\beta_1(x) = \omega, \beta_2(x) = 0$ minden x értékelés mellett.
Valóban 1 játékos mindig nyer, és mindig 0-t fizet, ergo várható profitja az x értékelése.

Világos, hogy az ettől eltérő licittel ez a profit nem változik, míg a 2 játékos zérus licitet ad le. Kivétel, mikor 1 is zérust licitál, de ekkor 1 nyerhet p valószínűséggel, tehát várható profitja $px \leq x$. A 2 játékos veszt és várható profitja zérus. Amíg 1 játékos a maximális licitet adja, addig a 0 licittől való eltérés ugyanígy 0 várható profitot eredményez egyetlen kivétellel, amikor a 2 játékos licitje is ω, ekkor viszont $(1-p)(x-\omega) \leq 0$ a várható profit. Mindkét játékosra meggondoltuk, hogy a várható profitja nem növelhető a β_1 illetve β_2 licitfüggvényektől való eltéréssel. A (β_1, β_2) pár Nash-egyensúlyt definiál.

Érdemes viszont látni, hogy a másodáras aukció olyan speciális, hogy nem csak Nash-egyensúlyi stratégia az igazmondás, de még domináns egyensúlyi stratégia is. Ez azt jelenti, hogy bármelyik játékos a többitől függetlenül, ha az identikus licitfüggvénytől eltér, akkor a várható profitja nem nagyobb, mintha ennek a stratégiának a használata mellett maradt volna, bármit is tesznek a többiek.

1.5. állítás. *Magán értékelésű másodáras aukció esetén a* $\beta = \mathrm{id}$ *függvény egy domináns egyensúlyi stratégia.*

Bizonyítás. A jelöléseket egyszerűsítve tegyük fel, hogy az 1 játékos stratégiájáról van szó. Tegyük fel – indirekt –, hogy van olyan x_1, hogy $z_1 = \beta_1(x_1) \neq x_1$. Jelölje $p_1 = \max_{j>1} b_j$. Nézzük először, ha $z_1 < x_1$. Persze ezen belül három eset van:

1. $p_1 \leq z_1 < x_1$. Ekkor játékosunk nyer, és profitja $x_1 - p_1$, ugyanúgy, mintha $x_1 = z_1$ lett volna.

2. $z_1 < x_1 < p_1$. Ekkor játékosunk veszít, profitja 0, ugyanúgy, mintha $x_1 = z_1$ lett volna.

3. $z_1 < p_1 \leq x_1$. Ekkor játékosunk veszít, profitja tehát 0, de ha $z_1 = x_1$ lett volna, akkor nyert volna a pozitív $x_1 - p_1$ profit mellett. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben játékosunk rosszabbul járt a $z_1 < x_1$ licittel.

Most nézzük az $x_1 < z_1$ esetet:

1. $x_1 < z_1 \leq p_1$. Ekkor játékosunk veszít, profitja 0, ugyanúgy, mintha $x_1 = z_1$ lett volna.

2. $p_1 \leq x_1 < z_1$. Ekkor játékosunk nyer, és profitja $x_1 - p_1$, ugyanúgy, mintha $x_1 = z_1$ lett volna.

3. $x_1 < p_1 < z_1$. Ekkor játékosunk nyer, de a negatív $x_1 - p_1$ profittal, míg ha $z_1 = x_1$ lett volna, akkor vesztesként 0 profittal jobban járt volna.

Összességében azt találtuk, hogy bizonyos esetekben ugyanazt a profitot realizálná a játékos, mint az igazmondással, de bizonyos esetekben rosszabbul jár. Ezt kellett belátni. □

Vegyük észre, hogy a fenti állítás igaz marad akkor is, ha

a) az egyes játékosok értékelései más-más eloszlás szerint alakulnak, azaz a nem szimmetrikus esetben is, vagy ha

b) a játékosok nem semlegesek a kockázatokkal szemben, azaz a (II) definícióban Π helyett a játékos feladata az $u \circ \Pi$ függvény maximalizálása, ahol $u(0) = 0$ és u szigorúan monoton növő.

1.6. állítás (várható befizetés („expected payment"), a kikiáltó várható bevétele)**.** *Egyéni értékelésű, szimmetrikus, másodáras aukció esetén az egyes játékosok várható befizetései az x értékelés mellett:*

$$m(x) = G(x) E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x\right) = \int_0^x y g(y)\, dy.$$

A kikiáltó várható bevétele pedig

$$E\left(Y_2^{(N)}\right) = N \int_0^\omega y(1 - F(y))\, g(y)\, dy.$$

Bizonyítás. Legyen x_1 mondjuk az $i = 1$ játékos értékelése. Az ő várható befizetése az x_1 értékeléshez rendelt $\beta(x_1)$ licit melletti nyerés valószínűségének és az ebben az esetben várható második legnagyobb licit értékének szorzata. A játékosok racionálisak, és minden játékos a $\beta = \mathrm{id}$ stratégia mellett licitál, amint ezt láttuk az 1.5. állításban. Eszerint a legnagyobb értékelésű játékos nyeri az aukciót, és az 1 játékos pontosan akkor nyer, ha az $Y_1^{(N-1)} < x_1$ esemény fennáll. Így a nyerés valószínűsége éppen $G(x_1)$. Hasonlóan az összes játékos licitfüggvénye az identitás függvény, ezért a nyerés feltétele melletti várható befizetés $E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x_1\right)$. Magyarul

$$m(x) = G(x) E\left(Y_1^{N-1} | Y_1^{(N-1)} < x\right).$$

Viszont $Y_1^{(N-1)}$ tartója $[0, \omega]$ intervallum és sűrűségfüggvénye g, így

$$E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x_1\right) = \frac{1}{P\left(Y_1^{(N-1)} < x_1\right)} \int_0^{x_1} y g(y)\, dy = \frac{1}{G(x_1)} \int_0^{x_1} y g(y)\, dy.$$

Hasonlóan, a kikiáltó várható bevétele az N darab licit második legnagyobbika, de a licitek megegyeznek az értékelésekkel, ergo a második legnagyobb értékelés várható értékével. Az $Y_2^{(N)}$ valószínűségi változó ismert eloszlása szerint

$$E\left(Y_2^{(N)}\right) = \int_0^\omega y N (1 - F(y))\, g(y)\, dy.$$

Ezt kellett belátni. □

Fontos megértenünk a várható befizetés függvény és az ex post várható befizetés közti különbséget. Ha a játékos x értékelése ismert, akkor $m(x)$ jelöli ezen értékelés melletti várható befizetését, vagy néha: ex ante[4] várható befizetését. Az x konkrét értékét persze a játékoson kívül senki nem ismeri. Például a kikiáltó sem. Ha egy másik játékos, vagy a kikiáltó, vagy egy harmadik személy oldaláról figyeljük az eseményeket, akkor az

$$m \circ X$$

az X értékelést kifejező valószínűségi változó egy transzformáltja, amelynek konkrét realizációját csak az aukció lejátszása után ismerhetnénk meg. Ennek $E(m(X))$ várható értékét tekintjük úgy, mint a játékos ex post[5] várható befizetését. A kikiáltó szemszögébe helyezkedve az aukció várható bevétele nem más, mint ezen játékosonkénti ex ante várható befizetések összege. Ez a gondolat független az aukció megszervezési módjától, nyilván valamennyi aukcióra igaz, hiszen a kikiáltó bevétele az aukcióban résztvevő felektől és csak azoktól származik.

Az alábbi nagyon fontos megjegyzésre később is visszatérünk. Megmutatjuk, hogy a kikiáltó várható hasznára vonatkozó formula az $Y_2^{(N)}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének konkrét ismerete nélkül is adódik, pusztán a várható befizetés függvény konkrét alakjából.

1.7. *megjegyzés* (ex post várható befizetés). Ha a várható befizetés függvény

$$m(x) = \int_0^x y g(y)\, dy$$

alakú, akkor az ex post várható befizetés értéke

$$E(m(X)) = \int_0^\omega y(1 - F(y))\, g(y)\, dy.$$

Ez minden résztvevőre fennáll, és a résztvevők várható befizetéseinek összege a kikiáltó várható bevétele, így a kikiáltó várható bevételére vonatkozó képletet újra igazoltuk.

Bizonyítás. Számoljuk most ki az $E(m(X))$ várható értéket. A számolás trükkje a Fubini-tétel, és az a tény, hogy minden $x, y \in [0, \omega]$ mellett $\chi_{[0,x]}(y) = \chi_{[y,\omega]}(x)$. Ekkor:

$$E(m(X)) = \int_0^\omega m(x) f(x)\, dx = \int_0^\omega \left(\int_0^x y g(y)\, dy \right) f(x)\, dx =$$
$$\int_0^\omega \int_0^\omega \chi_{[0,x]}(y)\, y g(y) f(x)\, dy dx = \int_0^\omega \int_0^\omega \chi_{[y,\omega]}(x)\, y g(y) f(x)\, dx dy =$$
$$\int_0^\omega \left(\int_y^\omega f(x)\, dx \right) y g(y)\, dy = \int_0^\omega (1 - F(y))\, y g(y)\, dy.$$

Persze ez utóbbi érték N-szerese a kikiáltó várható bevétele. □

[4] Értsd az esemény, azaz az aukció lejátszása előtti.

[5] Értsd az esemény, azaz az aukció lejátszása utáni.

2.

ELSŐÁRAS AUKCIÓ

A MÁSODÁRAS AUKCIÓK esetén bevezetett jelölések megtartásával az i-edik játékos profitja definiálja az elsőáras aukciót:

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - b_i & \text{, ha } b_i > \max_{i \neq j} b_j; \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases} \tag{I}$$

A definíció szerint tehát a legnagyobb licitet ajánló játékos nyer, és az általa felajánlott licitet kell fizetnie. Ez azt jelenti, hogy az elsőáras aukció egy olyan standard aukció, ahol a befizetési valószínűségi változóra $C = b$ konstans, ahol b a nyertes licit. A profit függvényt definiáló (Π) azonosság speciális esete tehát

$$\Pi(b,x) = G\left(\beta^{-1}(b)\right)x - G\left(\beta^{-1}(b)\right) \cdot E\left(b|\beta\left(Y_1^{(N-1)}\right) < b\right) = G\left(\beta^{-1}(b)\right)(x-b). \tag{2.1}$$

Egy apró megjegyzést rögtön érdemes tenni. Az első, hogy $\beta(x) = x$ stratégia minden játékos számára nulla profitot hoz, ezért így ez nem lehet Nash-egyensúlyi stratégia. Ugyanis abban az esetben, amikor $p_1 < b_1 < x_1$ áll fenn, ($p_1 = \max_{j>1} b_j$), az $i = 1$ játékos nyer és $x_1 - b_1 > 0$ profittal lép ki az aukcióból, míg ha $b_1 = x_1$ lenne, akkor profitja zérus lenne. Érdekében áll tehát a játékosnak lefelé eltérni az értékeléstől. Nyilvánvaló, hogy a felfelé eltérés esetleg negatív hasznot eredményez, aminél a $b_i = x_i$ már jobb is, így $\beta(x) > x$ egyensúlyi stratégia nem lehetséges, tehát $\beta(x) \leq x$. Speciálisan $\beta(0) = 0$.

Ha $b > \beta(\omega)$ lenne, akkor 1 játékos a licitje csökkentésével a profitját növelhetné. Emiatt Nash-egyensúlyi helyzetben $b \in [0, \beta(\omega)]$.

Tegyük fel, hogy az elsőáras aukciónak van $\beta : [0, \omega] \to \mathbb{R}$ szimmetrikus egyensúlyi licitfüggvénye, amely szigorúan monoton növő és $\beta(0) = 0$. Legyen az $i = 1$ játékos licitje b, és a többi játékos a β stratégiát játssza. Az egyensúly definíciója szerint

$$\Pi(\beta(x), x) \geq \Pi(b, x) \tag{2.2}$$

minden x értékelés és minden $b \in [0, \beta(\omega)]$ licit mellett. Jelölje most $z = \beta^{-1}(b)$ értékelést. Világos, hogy $z \in [0, \omega]$, és

$$\Pi(b,x) = G\left(\beta^{-1}(b)\right)(x-b) = G(z)(x-\beta(z)).$$

Speciálisan a $b = \beta(x)$ eset a fenti sorban $z = x$-t jelent, ergo

$$\Pi(\beta(x), x) = G(x)(x - \beta(x)).$$

Azt kaptuk tehát, hogy a Nash-egyensúly (2.2) feltétele avval ekvivalens, hogy minden rögzített x mellett a

$$z \mapsto G(z)(x - \beta(z))$$

függvény a $z = x$ helyen veszi fel a legnagyobb értékét. A Fermat-elv szerint a fenti függvény deriváltja ezért a $z = x$ helyen zérus:

$$g(x)(x - \beta(x)) - G(x)\beta'(x) = 0.$$

Szorzás és átrendezés után ez azt jelenti, hogy

$$g(x)x = \beta'(x)G(x) + g(x)\beta(x) = (\beta(x)G(x))'.$$

Newton–Leibniz-tétel és $\beta(0) = 0$ szerint

$$\beta(x)G(x) = \beta(x)G(x) - \beta(0)G(0) = \int_0^x tg(t)\,dt,$$

amiből a korábban már szereplő

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x tg(t)\,dt = E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x\right)$$

formula adódik.

Vizsgáljuk most meg ezt a függvényt. Világos, hogy az értelmezési tartomány olyan $x \in [0,\omega]$ pontokat tartalmaz, amelyekre $G(x) > 0$. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden $x > 0$ pontban $G(x) > 0$, így $\beta : [0,\omega] \to \mathbb{R}$.

2.1. lemma. *Legyen $\beta : [0,\omega] \to \mathbb{R}$, $\beta(x) = E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x\right)$ definícióval megadott függvény.*

1. *Ekkor*
$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x tg(t)\,dt = x - \frac{1}{G(x)}\int_0^x G(y)\,dy$$
emiatt $\beta(x) < x$ fennáll minden $x > 0$ mellett.[1]

2. *A β függvény az egyetlen megoldása a*
$$\beta'(x) = \frac{g(x)}{G(x)}(x - \beta(x))$$
differenciálegyenletnek a $(0,\omega)$ intervallumon, így β szigorúan monoton nő.

3. *Minden $x \in [0,\omega]$ mellett*
$$\beta(x) \le E\left(Y_1^{N-1}\right).$$

[1] Emiatt persze $\lim_{x\to 0+}\beta(x) = 0$.

Bizonyítás. Az első egyenlőség nyilvánvaló. Parciális integrálással:

$$\frac{1}{G(x)}\int_0^x yg(y)\,dy = \frac{1}{G(x)}\left([yG(y)]_0^x - \int_0^x G(y)\,dy\right) = x - \frac{1}{G(x)}\int_0^x G(y)\,dy.$$

A deriváltat számolva:

$$\beta'(x) = \frac{-g(x)}{G^2(x)}\int_0^x tg(t)\,dt + \frac{xg(x)}{G(x)} = \frac{g(x)}{G(x)}\left(x - \frac{1}{G(x)}\int_0^x tg(t)\,dt\right) = \frac{g(x)}{G(x)}(x-\beta(x)).$$

A monotonitás szerint minden $x \in [0,\omega]$

$$\beta(x) = E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x\right) \le E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < \omega\right) = E\left(Y_1^{(N-1)}\right).$$

Ezeket kellett belátni. □

A fentiekben azt mutattuk meg, hogy ha az elsőáras, szimmetrikus, magán értékelésű aukciónak van Nash-egyensúlyi licitfüggvénye, akkor az csak a fenti β lehet.

2.2. állítás. *Szimmetrikus, magán értékelésű, elsőáras aukció Nash-egyensúlyi licitfüggvénye a*

$$\beta(x) = E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x\right)$$

függvény.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy hogy a $j > 1$ játékosok a β függvénnyel licitálnak. Írjuk fel az 1 játékos várható profitját. Ha az 1 játékos az x értékeléséhez a b licitet rendeli, akkor a várható profitja $z = \beta^{-1}(b)$ jelölés mellett

$$\Pi(b,x) = G\left(\beta^{-1}(b)\right)(x-b) = G(z)(x-\beta(z)) = G(z)x - G(z)\left(z - \frac{1}{G(z)}\int_0^z G(y)\,dy\right) = G(z)(x-z) + \int_0^z G(y)\,dy.$$

Speciálisan, ha $b = \beta(x)$, azaz $z = x$, akkor $\Pi(\beta(x),x) = \int_0^x G(y)\,dy$. Így

$$\Pi(\beta(x),x) - \Pi(b,x) = \int_0^x G(y)\,dy + G(z)(z-x) - \int_0^z G(y)\,dy = G(z)(z-x) - \int_x^z G(y)\,dy \ge 0 \qquad (2.3)$$

az integrál triviális becslése szerint, hiszen G egy monoton növekedő függvény.

Azt mutattuk meg tehát, hogy amennyiben a $j > 1$ játékosok mind a β függvénnyel licitálnak, akkor az 1 játékos $b \neq \beta(x)$ licitje az ő várható profitját $b = \beta(x)$-hez képest nem növeli. Ezt kellett belátni. □

Innen már könnyen származtatható a játékosok várható befizetés függvénye.

2.3. állítás. *Szimmetrikus, magán értékelésű, elsőáras aukció egyes játékosainak ex ante várható befizetés függvénye*

$$m(x) = G(x) E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x\right),$$

így az ex post várható befizetés értéke játékosonként

$$E(m(X)) = \int_0^{\omega} y(1-F(y)) g(y)\, dy.$$

A kikiáltó várható bevétele tehát

$$E\left(\beta\left(Y_1^{(N)}\right)\right) = N \cdot E(m(X)) = N \int_0^{\omega} y(1-F(y)) g(y)\, dy = E\left(Y_2^{(N)}\right).$$

Bizonyítás. Világos, hogy x értékeléshez a $\beta(x)$ licit tartozik, és az evvel a licittel való nyerés valószínűsége

$$G\left(\beta^{-1}(\beta(x))\right) = G(x).$$

Így $m(x) = G(x)\beta(x) = G(x)E(Y_1^{(N-1)}|Y_1^{(N-1)} < x)$. Az 1.7. megjegyzésben láttuk, hogy ha m a fent bizonyított alakú, akkor a várható befizetés értéke éppen a tételben felírt formula. A kikiáltó várható bevétele a játékosok várható befizetéseinek összege, ami az 1.2. lemma szerint éppen $E\left(Y_2^{(N)}\right)$. □

Példaként számoljuk ki a fent kapott eredményeket, mikor $N = 2$ és $F = \mathrm{id}$, azaz minden licitáló értékelése egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallum felett. A másodáras optimális licitfüggvény a 2.1. lemma alapján

$$\beta(x) = x - \frac{1}{G(x)} \int_0^x t g(t)\, dt = x - \frac{1}{x} \int_0^x t\, dt = x - \frac{1}{x}\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x.$$

Az elsőáras optimális licitfüggvény természetesen az identitás függvény. Mind első-, mind másodáras esetben az egyes játékosok várható befizetés függvénye

$$m(x) = \int_0^x t g(t)\, dt = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}.$$

Az ex post várható befizetés értéke pedig

$$E(m(X)) = \int_0^1 \frac{t^2}{2} \cdot 1\, dt = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

a kikiáltó várható bevételére tehát

$$E\left(\beta(Y_1^N)\right) = 2E\left(m\left(X\right)\right) = \frac{1}{3}.$$

Az $Y_1^{(2)}/2$ valószínűségi változóra úgy is tekinthetünk mint az elsőáras aukció kikiáltójának bevételére. Írjuk fel ennek a valószínűségi változónak az eloszlás függvényét.

$$L^1\left(x\right) = P\left(Y_1^{(2)}/2 < x\right) = P\left(Y_1^{(2)} < 2x\right) = F^2\left(2x\right) = \left(2x\right)^2 = 4x^2.$$

Most nézzük a másodáras aukció esetét. Ekkor a kikiáltó bevételét az $Y_2^{(2)}$ valószínűségi változó értékei jelentik, hiszen az identitás a Nash-egyensúlyi licitfüggvény. Ha $L^{(2)}$ jelöli a kikiáltó bevételének eloszlását, akkor

$$L^{(2)}\left(x\right) = F^2\left(x\right) + 2F\left(x\right)\left(1 - F\left(x\right)\right) = x^2 + 2x\left(1-x\right) = 2x - x^2 = x\left(2-x\right).$$

Látható tehát, hogy szó nincs arról, hogy a két aukciónál a kikiáltó várható árbevétele mindig azonos lenne, csupán a várható értékük azonos. Az eloszlás függvényekből látszik, hogy a kikiáltó számára az elsőáras aukció választása a kockázatok elutasítását jelenti. Kockázatsemleges esetben a kikiáltó az első- és másodáras aukció választásával szemben ambivalens, míg kockázatkedvelő kikiáltó inkább a másodáras aukciót preferálja.

Azt, hogy az első és másodáras aukcióknak különböző kimenetelei is lehetnek, ennél egyszerűbben is láthatjuk. Tegyük fel, hogy az értékelésekre $x_1 > x_2$. Mivel másodáras esetben a $\beta\left(x\right) = x$ a licitfüggvény és elsőáras esetben a $\beta\left(x\right) = \frac{1}{2}x$ függvénnyel licitálnak a játékosok, látható, hogy $R^1 = \frac{1}{2}x_1$ és $R^2 = x_2$. Viszont $x_1 > x_2$ mellett $x_1 > \frac{1}{2}x_1 > x_2$ és $x_1 > x_2 > \frac{1}{2}x_1$ egyaránt előfordulhat, ergo $R^1 > R^2$ és $R^2 > R^1$ is egyaránt lehetséges.

3.

ELSŐ- ÉS MÁSODÁRAS AUKCIÓ REZERVÁCIÓS ÁRRAL

AZ ÁRVERÉS MEGKEZDÉSE előtt a kikiáltó meghatároz egy árat, amelynél kevesebbért nem adja a terméket. Ha az aukció nem éri el ezt a *rezervációs árat*, akkor eredménytelenül végződik, tehát a terméket senki nem kapja meg.

A vizsgálatainkban feltesszük, hogy az aukció résztvevői számára a rezervációs ár értéke köztudott tudás, tehát minden résztvevő ismeri a rezervációs árat és ezt a tényt egymásról is mindannyian tudják. Ennek két következménye is van a kialakítandó stratégiájukra nézve valamely standard aukció esetén. Egyrészt, $\beta(x) < r$ csak vesztést eredményezhet, tehát a $\beta(x) = 0$ licittel ekvivalens. Másrészt, az $x \geq r$ esetben $\beta(x) < r$ szintén veszteséget jelent, ami optimális nem lehet. Így az optimális licitfüggvényre

$$r \leq \beta(x), \quad \text{ha } x \geq r.$$

Sokszor lesz szükségünk az alábbi várható értékre.

3.1. lemma. *A fenti jelöléseket megtartva tetszőleges $x \geq r \geq 0$ mellett,*

$$E\left(Y_1^{(N-1)} \vee r | Y_1^{(N-1)} < x\right) = \frac{rG(r)}{G(x)} + \frac{1}{G(x)} \int_r^x tg(t)\, dt.$$

Bizonyítás. Jelölje $B = \Omega\left(Y_1^{(N-1)} < x\right)$ eseményt és μ a valószínűségi mértéket. A B mint feltétel melletti valószínűségi mérték $\mu_B(A) = \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)} = \frac{1}{\mu(B)} \int_A \chi_B\, d\mu$, ergo $d\mu_B = \frac{1}{\mu(B)} \chi_B d\mu$. Így a μ mérték helyettesítésével

$$E\left(Y_1^{(N-1)} \vee r | Y_1^{(N-1)} < x\right) = \int_\Omega Y_1^{(N-1)} \vee r\, d\mu_B = \int_\Omega \left(Y_1^{(N-1)} \vee r\right) \frac{1}{\mu(B)} \chi_B\, d\mu =$$
$$\frac{1}{G(x)} \int_{\Omega(Y_1<x)} Y_1 \vee r\, d\mu = \frac{1}{G(x)} \left(\int_{\Omega(Y_1<r)} Y_1 \vee r\, d\mu + \int_{\Omega(r\leq Y_1<x)} Y_1 \vee r\, d\mu\right) =$$
$$\frac{1}{G(x)} \left(\int_{\Omega(Y_1<r)} r\, d\mu + \int_{\Omega(r\leq Y_1<x)} Y_1\, d\mu\right) = \frac{1}{G(x)} \left(rG(r) + \int_r^x tg(t)\, dt.\right)$$

Ezt kellett belátni. □

A 2.1. lemmának megfelelően vizsgáljuk meg a fent definiált $\beta : [0, \omega] \to \mathbb{R}$ függvényt.

3.2. lemma. *Legyen $\beta : [0, \omega] \to \mathbb{R}$,*

$$\beta(x) = \begin{cases} E\left(Y_1^{(N-1)} \vee r | Y_1^{(N-1)} < x\right), & \text{ha } x \geq r; \\ 0, & \text{ha } x < r \end{cases}$$

definícióval megadott függvény.

1. *Ekkor minden $x \geq r$ mellett*

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\left(rG(r) + \int_r^x tg(t)\,dt\right) = x - \frac{1}{G(x)}\int_r^x G(y)\,dy,$$

emiatt $\beta(x) < x$ fennáll minden $x > r$ mellett és $\beta(r) = r$.

2. *A β függvény az egyetlen megoldása a*

$$\beta'(x) = \frac{g(x)}{G(x)}(x - \beta(x)), \beta(r) = r$$

kezdetiérték-feladatnak az $[r, \omega]$ intervallum felett, így β szigorúan monoton nő.

3. *Minden $x \in [r, \omega]$ mellett*

$$\beta(x) \leq E\left(Y_1^{N-1} \vee r\right).$$

Bizonyítás. Az első egyenlőség éppen az előző lemma, majd parciális integrálással:

$$\frac{1}{G(x)}\left(rG(r) + \int_r^x yg(y)\,dy\right) = \frac{1}{G(x)}\left(rG(r) + [yG(y)]_r^x - \int_r^x G(y)\,dy\right) =$$
$$x - \frac{1}{G(x)}\int_r^x G(y)\,dy.$$

A deriváltat számolva:

$$\beta'(x) = \frac{-g(x)}{G^2(x)}\left(rG(r) + \int_r^x tg(t)\,dt\right) + \frac{xg(x)}{G(x)} =$$
$$\frac{g(x)}{G(x)}\left(x - \frac{1}{G(x)}\left(rG(r) + \int_0^x tg(t)\,dt\right)\right) = \frac{g(x)}{G(x)}(x - \beta(x)).$$

A monotonitás szerint minden $x \in [0, \omega]$

$$\beta(x) = E\left(Y_1^{(N-1)} \vee r | Y_1^{(N-1)} < x\right) \leq E\left(Y_1^{(N-1)} \vee r | Y_1^{(N-1)} < \omega\right) = E\left(Y_1^{(N-1)} \vee r\right).$$

Ezeket kellett belátni. □

3.1. Másodáras aukció

Másodáras esetben a nyertes a második legnagyobb licit értékét, de legalább a rezervációs árat fizeti. Ha a legnagyobb licit értéke a rezervációs ár alatt marad, akkor minden résztvevő vesztes, és a termék a kikiáltónál marad. A játékosok racionalitása az alábbi profit függvény maximalizálását jelenti.

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - \max\left\{b_j, r : j \neq i\right\} & \text{, ha } b_i > \max\left\{b_j, r : j \neq i\right\}, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{IIr}$$

Ugyanúgy, mint eddig, x_i jelöli az i-edik játékos értékelését; b_i az általa leadott licit értékét; és r a rezervációs árat.

3.3. állítás. *A* $\beta = \mathrm{id}$ *vagy a* $\beta(x) = x$*, ha* $x > r$*, egyébként* $\beta(x) = 0$ *most is domináns egyensúlyi stratégia.*

Bizonyítás. Az 1.5. állítás indoklása mindkét függvényre szó szerint azonos marad. □

Ha x_1 az egyik játékos értékelése, akkor a $\beta(x)$ licittel való nyerés valószínűsége zérus, ha $x_1 < r$, de $x_1 \geq r$ esetben ez éppen az $\Omega\left(Y_1^{(N-1)} < x\right)$ esemény valószínűsége. Így az egyes játékosok várható befizetése az r rezervációs ár és x értékelés mellett

$$m(x,r) = \begin{cases} G(x) E\left(Y_1^{(N-1)} \vee r | Y_1^{(N-1)} < x\right), & \text{ha } x \geq r \\ 0, & \text{ha } x < r. \end{cases}$$

Analitikus formában is megfogalmazhatjuk tehát a várható befizetés értékét az x értékelés és az r rezervációs ár ismeretében.

3.4. állítás. *Független azonos eloszlású másodáras aukció esetén a játékosok várható befizetés függvénye*

$$m(x,r) = \begin{cases} rG(r) + \int_r^x t g(t)\, dt, & \textit{ha } x \geq r, \\ 0, & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

3.2. Elsőáras aukció

Ha $r \geq 0$ a rezervációs ár, akkor a játék definíciója:

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - b_i & \text{, ha } b_i > \max_{i \neq j} b_j, r; \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases} \tag{Ir}$$

Az aukció ugyan nem standard, de azért az igaz, hogy $b \geq r$ feltétel mellett a játékos pontosan akkor nyeri az aukciót, ha övé a legnagyobb licit, azaz, ha az

$\Omega\left(\beta\left(Y_1^{(N-1)}\right) < b\right)$ esemény teljesül, amelynek valószínűsége $G\left(\beta^{-1}(b)\right)$. Tehát minden egyes játékos a

$$\Pi(b,x) = \begin{cases} G\left(\beta^{-1}(b)\right)(x-b), & \text{ha } b \geq r; \\ 0, & \text{ha } b < r \end{cases} \tag{3.1}$$

kifizetési függvény maximalizálásában érdekelt. Az egyensúlyi stratégia kiszámolása az $r = 0$ esethez nagyon hasonló.

3.5. állítás. *Szimmetrikus, magán értékelésű, elsőáras aukció r rezervációs ár melletti Nash-egyensúlyi licitfüggvénye a*

$$\beta(x) = \begin{cases} E\left(Y_1^{(N-1)} \vee r | Y_1^{(N-1)} < x\right), & \text{ha } x \geq r; \\ 0, & \text{ha } x < r \end{cases} \tag{3.2}$$

függvény.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy hogy a $j > 1$ játékosok a (3.2) -ben megadott β függvénnyel licitálnak. Írjuk fel az 1 játékos várható profitját.

Nézzük azt az esetet, mikor az x értékelésre $x < r$. Ha az 1 játékos $b \geq r$ licitet alkalmaz, akkor esetleg nyer és $x - b < 0$ hasznot realizál, ezért profitjára $\Pi(b,x) \leq 0$. A $b < r$ esetben persze $\Pi(b,x) = 0$. Ha a $\beta(x) = 0$ licitet használja, akkor az aukció definíciója szerint nem nyerhet, profitja tehát ekkor is 0. Látjuk tehát, hogy $x \leq r$ esetben

$$\Pi(\beta(x), x) = 0 \geq \Pi(b,x).$$

Most nézzük az $x \geq r$ esetet. Tegyük fel, hogy a játékos az x értékeléséhez b licitet rendeli.
Ha $b < r$, akkor nem kerül ki az aukcióból nyertesen, tehát $\Pi(b,x) = 0$, ezért

$$\Pi(\beta(x), x) \geq 0 = \Pi(b,x).$$

Ha $b \geq r$, akkor a β függvény monotonitása és $\beta(r) = r$ miatt létezik egyetlen $r \leq z$, amelyre $\beta(z) = b$. Így

$$\begin{aligned} \Pi(b,x) &= G\left(\beta^{-1}(b)\right)(x-b) = \\ &G(z)(x - \beta(z)) = G(z)x - G(z)\left(z - \frac{1}{G(z)}\int_r^z G(y)\,dy\right) = \\ &G(z)(x-z) + \int_r^z G(y)\,dy. \end{aligned}$$

Speciálisan, ha $b = \beta(x)$, azaz $z = x$, akkor $\Pi(\beta(x), x) = \int_r^x G(y)\,dy$. Így

$$\Pi(\beta(x), x) - \Pi(b, x) = \int_r^x G(y)\,dy + G(z)(z-x) - \int_r^z G(y)\,dy =$$
$$G(z)(z-x) - \int_x^z G(y)\,dy \geq 0 \quad (3.3)$$

az integrál triviális becslése szerint, hiszen G egy monoton növekedő függvény.

Összességében azt mutattuk meg, hogy amennyiben a $j > 1$ játékosok mind a β függvénnyel licitálnak, akkor az 1 játékos $b \neq \beta(x)$ licitje az ő várható profitját $b = \beta(x)$-hez képest nem növeli. □

3.6. állítás. *Egyéni értékelésű, azonos eloszlású, elsőáras aukció esetén a játékosok várható befizetés függvénye*

$$m(x, r) = \begin{cases} rG(r) + \int_r^x tg(t)\,dt, & \textit{ha } x \geq r, \\ 0, & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy az egyensúlyi licitfüggvény a (3.2)-ben megadott β-függvény. Ezek szerint az $x \leq r$ értékelés mellett $\beta(x) = 0$, így ekkor a várható befizetés is 0. Ha $x \geq r$, akkor a $\beta(x)$ licittel való nyerés valószínűsége β szigorúan monoton volta miatt $G(x)$. Ekkor a szükséges befizetés értéke $\beta(x)$. Ilyen módon továbbra is $x \geq r$-t feltételezve

$$m(x, r) = G(x)\beta(x) = G(x)\frac{1}{G(x)}\left(rG(r) + \int_r^x G(y)\,dy\right).$$

Ezt kellett belátni. □

4.

VIRTUÁLIS ÉRTÉKELÉS

A 3.6. ÉS A 3.4. ÁLLÍTÁSOKBAN említett ekvivalenciát az alábbi módon is meggondolhatjuk. Próbáljuk meg az 1 játékos $m(x,r)$ várható befizetését értelmezni az optimális licitfüggvények konkrét alakja nélkül is.

Ha $x \leq r$, akkor $m(x,r) = 0$, hiszen a játékos inkább veszt, mint negatív profitot kockáztat.

Ha $x > r$, akkor két eset lehetséges. Vagy van a többi játékos közt is olyan, akinek értékelése r felett van vagy nincs.
Ez utóbbi eset valószínűsége $G(r)$, persze 1 nyer és az r rezervációs árat fizeti, akár első-, akár másodáras lejátszást követnek. Ez $rG(r)$ várható befizetést eredményez.
Ha van más r feletti értékelésű játékos is, akkor innen az 1 játékos számára az aukció ugyanaz, mintha ő egy rezervációs ár nélküli aukció szereplője lenne, de $X \vee r$ eloszlásokkal, hiszen

$$\max_{i>1} (X_i \vee r) = \max_{i>1} X_i = Y_1^{(N-1)}.$$

Azt már láttuk, hogy a rezervációs ár nélküli esetben az első- és a másodáras aukciónak ugyanaz az ex post várható befizetése. No de, ha X eloszlása F, akkor $X \vee r$ eloszlása $F \cdot \chi_{(r,\omega)}$. Ebből következik, hogy a várható befizetés ide eső része

$$\int_0^x tg(t)\,dt = \int_r^x tg(t)\,dt.$$

Összességében tehát mindkét esetben a várható befizetés a 3.6. és a 3.4. állításokban felírt formula.

4.1. Valószínűségi változó kockázati rátája

4.1. definíció (kockázati ráta)**.** Ha az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F és sűrűségfüggvénye f, akkor annak kockázati ráta függvényét

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

definiálja. Itt feltesszük, hogy F folytonosan differenciálható és minden $x \in (0, \omega)$ esetén $F(x) < 1$.

A kockázati ráta tehát egy $\lambda : (0, \omega) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P(X < r + s | X \geq s) = \frac{P(s \leq X < r + s)}{P(X \geq s)} = \frac{\int_s^{s+r} f(t)\,dt}{1 - F(s)}.$$

Tudjuk, hogy van olyan $\xi \in (s, s+r)$, hogy $f(\xi)r = \int_s^{s+r} f(t)\,dt$, ezért, ha r megfelelően kicsi, akkor $f(s)r$ is elég jó becslése az integrálnak. Tehát a kockázati ráta függvényre áttérve azt mondhatjuk, hogy

$$P(X < r+s|X \geq s) \approx \lambda(s)\, r.$$

Példaként tekintsük az exponenciális eloszlás esetét. Tegyük fel tehát, hogy

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{, ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases} \quad \text{, így} \qquad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{, ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

A jól ismert örökifjú tulajdonság szerint minden $r,s \geq 0$ esetén $P(X < r+s|X \geq s) = P(X < r)$ mindig fennáll, a bal oldal tehát s-től független. Használva a kis x-ekre hatékony $e^{-x} \approx 1-x$ becslést,

$$P(X < r+s|X \geq s) = P(X < r) = 1-e^{-\lambda r} \approx \lambda r.$$

Ennek megfelelően az exponenciális eloszlás kockázati rátájára

$$\lambda(s) = \frac{f(s)}{1-F(s)} = \frac{\lambda e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda s}} = \lambda$$

konstans függvény. Arról van tehát szó, hogy az exponenciális eloszlás esetében az s-hez közeli teljesülésnek az s időpontig nem teljesülés feltétele melletti valószínűsége annak az intervallumnak a hosszával arányos, amellyel az s-hez közeli teljesülést mérjük. A lényeg, hogy itt az arányossági tényező az s időponttól független, mert minden s mellett éppen azonos az eloszlás paraméterével. Ez az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága. Más eloszlásokra $P(X < s+r|X \geq s)$ még kicsi r mellett is függhet s-től, de az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságából annyi minden eloszlásra átmenthető, hogy az $(s, s+r)$ kis intervallumban való teljesülésnek az s-ig nem teljesülés feltétele melletti valószínűsége közelítőleg

$$\lambda(s)\, r,$$

tehát ez is az intervallumocska r hosszával arányos, de esetleg s-től függő $\lambda(s)$ arányossági tényezővel.

4.2. állítás. *Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó eloszlására minden $x \in (0, \omega)$ mellett $0 < F(x) < 1$, F szigorúan monoton növő és folytonosan differenciálható. Legyen $\lambda : (0, \omega) \to \mathbb{R}_+$ a kockázati ráta függvény. Ekkor λ folytonos és minden $x \in (0, \omega)$ mellett*

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)\,dt}. \tag{$\dagger$}$$

Megfordítva, ha $\lambda : (0, \omega) \to \mathbb{R}_+$ tetszőleges pozitív, folytonos függvény, amelyre

$$\int_0^\omega \lambda(t)\,dt = \infty, \text{ de } \int_0^x \lambda(t)\,dt < \infty, \forall x \in (0, \omega)$$

teljesül, úgy a fenti ($\dagger$) definiálta függvény egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növő eloszlás függvény a $[0, \omega]$-n, ergo van olyan X valószínűségi változó, *aminek éppen F az eloszlása. Ennek a valószínűségi változónak a kockázati rátája éppen az előre megadott λ, továbbá*

$$E(X) = E\left(\frac{1}{\lambda(X)}\right).$$

4.2. A kikiáltó bevétele a rezervációs ár függvényében

Az egész szakaszban tegyük fel, hogy a játékosok értékelését leíró F eloszlás folytonosan differenciálható, és szigorúan monoton növő. Ekkor persze $0 < F(x) < 1$ tetszőleges $x \in [0, \omega]$ mellett.

A 3.4. és a 3.6. állításokban láttuk, hogy a játékosok befizetési függvénye mind első-, mind másodáras aukció esetében a rezervációs ár jelenléte mellett is azonos. Ennek segítségével most is könnyű kiszámolni a várható befizetés értékét.

4.3. lemma. *Rögzített $r \geq 0$ rezervációs ár mellett az első- vagy a másodáras aukcióban résztvevő játékosok várható befizetésének értéke*

$$E(m(X,r)) = r(1-F(r))G(r) + \int_r^{\omega} y(1-F(y))g(y)\,dy.$$

E függvény r szerinti deriváltfüggvénye

$$\frac{d}{dx}E(m(X,r)) = G(r)(1-F(r))(1-r\lambda(r)),$$

ahol λ az eloszlások kockázati ráta függvénye, azaz $\lambda(r) = \frac{f(r)}{1-F(r)}$.

Bizonyítás. A valószínűségi változó transzformáltjára vonatkozó formula szerint

$$E(m(X,r)) = \int_0^{\omega} m(x) f(x)\,dx =$$
$$\int_r^{\omega}\left(rG(r) + \int_r^x tg(t)\,dt\right) f(x)\,dx = \int_r^{\omega} rG(r) f(x)\,dx + \int_r^{\omega}\int_r^x tg(t) f(x)\,dt\,dx.$$

Persze

$$\int_r^x tg(t) f(x)\,dt = \int_r^{\omega} \chi_{[r,x]}(t)\, tg(t) f(x)\,dt = \int_r^{\omega} \chi_{[t,\omega]}(x)\, tg(t) f(x)\,dt,$$

emiatt, folytatva az $E\left(m\left(X,r\right)\right)$ kiszámítását, a Fubini–tétel szokásos használatával

$$E\left(m\left(X,r\right)\right)=\int_r^{\omega} rG\left(r\right)f\left(x\right)dx+\int_r^{\omega}\int_r^{\omega}\chi_{[t,\omega]}\left(x\right)tg\left(t\right)f\left(x\right)dt\,dx=$$
$$rG\left(r\right)\left(1-F\left(r\right)\right)+\int_r^{\omega}\int_r^{\omega}\chi_{[t,\omega]}\left(x\right)f\left(x\right)tg\left(t\right)dx\,dt=$$
$$rG\left(r\right)\left(1-F\left(r\right)\right)+\int_r^{\omega}\left(\int_t^{\omega}f\left(x\right)dx\right)tg\left(t\right)dt=$$
$$rG\left(r\right)\left(1-F\left(r\right)\right)+\int_r^{\omega}\left(1-F\left(t\right)\right)tg\left(t\right)dt.$$

Most számoljuk ki a fenti függvény r szerinti deriváltját.

$$G\left(r\right)\left(1-F\left(r\right)\right)+rg\left(r\right)\left(1-F\left(r\right)\right)-rG\left(r\right)f\left(r\right)-\left(1-F\left(r\right)\right)rg\left(r\right)=$$
$$G\left(r\right)\left(1-F\left(r\right)\right)-rG\left(r\right)\left(1-F\left(r\right)\right)\lambda\left(r\right)=G\left(r\right)\left(1-F\left(r\right)\right)\left(1-r\lambda\left(r\right)\right).$$

□

4.4. állítás. *Tegyük fel, hogy a kockázati ráta függvényt a 0 egy jobb oldali környezetében majorálja az* $\frac{1}{t}$ *függvény, azaz létezik* $\delta>0$*, melyre* $\lambda\left(t\right)<\frac{1}{t}$ *fennáll minden* $t\in\left(0,\delta\right)$ *mellett. Tekintsük a kikiáltó várható bevételét egy első- vagy másodáras aukcióban mint a rezervációs ár függvényét. Ekkor e függvény a* 0 *fenti környezetében szigorúan monoton növő, ergo* $r=0$ *nem lehet optimális rezervációs ár.*

Most tekintsük a fenti problémát egy kicsit általánosabb esetben. Tegyük fel, hogy a kikiáltó is rendelkezik egy x_0 értékeléssel. A feladata, hogy állítson be olyan rezervációs árat, amely a várható profitját maximalizálja. Teljesen világos, hogy $r<x_0$ rezervációs ár használata esetleg negatív haszonnal jár, ezért a továbbiakban feltehető, hogy $x_0\le r$ teljesül. Írjuk fel a kikiáltó várható profitját az általa beállítandó rezervációs ár függvényében:

$$\Pi\left(r\right)=NE\left(m\left(X,r\right)\right)+F(r)^N x_0.$$

A kikiáltó várható bevétele a játékosok várható befizetéseinek összege, ami az első tag, és sikertelen aukció esetén a tárgy további birtoklásából eredő haszon várható értéke. Mivel az aukció $F^N(r)$ valószínűséggel sikertelen, ezért az ebből eredő haszon várható értéke x_0 értékelés mellett $F^N(r)\cdot x_0$.
E függvény r szerinti derivált függvényére:

$$\left(\Pi\left(r\right)\right)'=NE\left(m\left(X,r\right)\right)'+NF(r)^{N-1}f(r)x_0=$$
$$NG\left(r\right)\left(1-F\left(r\right)\right)\left(1-r\lambda\left(r\right)\right)+NG(r)\lambda(r)\left(1-F(r)\right)x_0=$$
$$NG(r)\left(1-F(r)\right)\left(1-r\lambda(r)+\lambda(r)x_0\right)=NG(r)\left(1-F(r)\right)\left(1-\lambda(r)\left(r-x_0\right)\right). \quad (4.1)$$

Ha kizárjuk az $F(x_0)=1$ és az $F(x_0)=0$ eseteket, akkor azt kapjuk, hogy a fenti profit függvény az x_0 pont egy jobb oldali környezetében szigorúan monoton növő, így $r=x_0$

biztosan nem optimális a kikiáltó várható profitja szempontjából. Az is nyilvánvaló, hogy az optimális r rezervációs árra az

$$x_0 = r - \frac{1}{\lambda(r)}$$

implicit egyenletnek kell teljesülnie.

Fontos, de nyilvánvaló következménye a fentieknek, hogy az optimális rezervációs ár független az aukcióban résztvevő játékosok számától.

Egyszerű példaként, írjuk fel az optimális rezervációs árat mint a kikiáltó x_0 értékelésének függvényét abban a speciális esetben, mikor a játékosok értékelése egyenletes eloszlás szerint történik. Kis számolgatás után azt kapjuk, hogy

$$r = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{2}$$

az optimális rezervációs ár.

Ugyanezt általában is megtehetjük:

4.5. definíció (virtuális értékelés)**.** Legyen a játékosok értékelésének eloszlása F és ennek tartója $[0, \omega]$. Definiálja a $\psi : (0, \omega) \to \mathbb{R}$ az alábbi függvényt.

$$\psi(x) = x - \frac{1}{\lambda(x)} = x - \frac{1 - F(x)}{f(x)}.$$

A ψ függvényt a *játékosok virtuális értékelésének* mondjuk.

4.6. definíció (reguláris játékos)**.** Az aukcióban résztvevő játékost *regulárisnak* mondjuk, ha virtuális értékelése szigorúan monoton növő.

4.7. állítás. *Ha ψ a reguláris játékosok virtuális értékelése és a kikiáltó számára a tárgy birtoklása x_0 értéket jelent, akkor*

$$\psi^{-1}(x_0)$$

éppen a kikiáltó várható bevételét maximalizáló rezervációs árat adja meg.

Könnyed számolgatással kapjuk például, hogy ha a játékosok értékelése a $[0, \omega]$ intervallumon egyenletes eloszlású, akkor a kikiáltó x_0 értékeléséhez tartozó rezervációs árra a

$$\psi^{-1}(x_0) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}\omega$$

formula adódik.

4.3. A kikiáltó mint monopolista

Az optimális rezervációs ár egy másik értelmezése a következő gondolatkísérlet. Tegyük fel, hogy a kikiáltó p rezervációs árat ajánl, és az i-edik vevő ezt ismeri. Az i-edik vevő tisztában van a maga x_i értékelésével, és ha nem lenne aukció akkor $x_i > p$ esetben a tárgyat p áron biztosan megvenné. A kikiáltó persze nem ismeri az i-edik játékos konkrét értékelését, csak az értékelésének F_i eloszlását. Azt tudja tehát a kikiáltó, hogy ha ő p árat ajánl, akkor az üzlet valószínűsége az $X_i > p$ esemény valószínűsége, ergo $1 - F_i(p)$. Innen a kikiáltó számára a helyzet ugyanaz, mintha az ő monopóliuma lenne a termék eladása, és a vevők keresleti függvénye lenne a

$$q(p) = 1 - F_i(p).$$

Így a tárgy eladásából származó várható haszon a kikiáltó mint monopolista számára

$$pq(p).$$

Ha most x_0 jelöli a kikiáltó számára a tárgy birtoklásából eredő hasznot, akkor bevétele a p ár függvényében

$$R(p) = p(1 - F_i(p)) + F_i(p)x_0$$

Persze a marginális bevétele

$$R'(p) = 1 - F_i(p) - pf_i(p) + f_i(p)x_0 = f_i(p)\left(x_0 - \left(p - \frac{1 - F_i(p)}{f_i(p)}\right)\right) =$$
$$f_i(p)(x_0 - \psi_i(p)).$$

Azt kaptuk tehát, hogy a monopolista kikiáltó optimális árára a

$$\psi_i(p) = x_0$$

egyenlőség teljesül.

Ezek szerint a reguláris játékosokkal szemben álló kikiáltónak olyan p rezervációs árat érdemes megállapítania, amely – ugyanazokkal a játékosokkal szemben állva – mint monopolistának az optimális bevételét eredményezné a p eladási árat alkalmazva.

Ha feltesszük, hogy a játékosok értékelése egyenletes eloszlású, vagy exponenciális eloszlású, akkor a kikiáltó zérus értékeléséhez tartozó rezervációs ár éppen az eloszlások várható értéke. Igaz-e ez minden más eloszlásra is? Próbáljuk meg leírni eloszlások egy osztályát, amikor mégis igaz a fenti sejtés. Hasonlóan, mely eloszlásokra lesz az optimális rezervációs ár a várhatóérték felett, és mely eloszlásokra marad alatta?[1]

[1]Ha r^* az optimális rezervációs ár, akkor $\psi(r^*) = 0 = E\left(X - \frac{1}{\lambda(X)}\right) = E(\psi \circ X) = \psi(E(X))$, ha a ψ virtuális értékelés $t \mapsto at + b$ alakú, és emiatt persze $r^* = E(X)$. Ez a helyzet, ha az értékelések eloszlása például exponenciális vagy egyenletes. A Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva látszik, hogy ha ψ szigorúan monoton nő és konvex, akkor $r^* \leq E(X)$. Hasonlóan, a konkáv virtuális értékelés esetén $E(X) \leq r^*$.

4.4. Belépési díj

Azt láttuk az előző fejezetben, hogy a rezervációs ár bevezetésével a kikiáltó növelni tudja várható bevételét. Végül is ezt avval éri el, hogy távol tartja az aukciótól azon játékosokat, akiknek licitje a rezervációs ár alatt van.

Szokásos távol tartó eljárás még a belépési díj bevezetése. Azt kell ezen érteni, hogy a kikiáltó meghatároz egy fix és mindenki más által ismert összeget, amit az aukció minden résztvevőjének be kell fizetni. Gondolhatunk egyszerűen például a ruhatár költségére.

Gondoljunk vissza az r rezervációs ár melletti várható befizetés függvényére. Láttuk a 3.4. és a 3.6. állításokban, hogy mindkét eddig tárgyalt árverési formában ez a függvény

$$m(x,r) = \begin{cases} rG(r) + \int_r^x tg(t)\,dt, & \text{ha } x \geq r, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ebből azonnal látszik, hogy az r rezervációs ár melletti aukcióból pontosan azokat a játékosokat zárjuk ki, akiknek értékelése r alatt, ergo a várható befizetése az

$$m(r,r) = rG(r)$$

érték alatt marad. Ahhoz tehát, hogy a belépési ár bevezetésével pontosan ugyanazon játékosok kényszerüljenek az aukcióban részt nem venni, az

$$e = rG(r)$$

belépési árat kell meghatároznunk. Világos ugyanis, hogy a belépési ár melletti aukcióban egy, az árat megfizető játékos befizetési függvénye legalább e.

Most írjuk fel $e = rG(r)$ belépési ár mellett a várható befizetés függvényt. Nézzük az egyszerűség kedvéért a másodáras aukció esetét. Látható, hogy $x \geq r$ esetben a játékos megfizeti az e belépési díjat és a további várható befizetése a nyerés valószínűsége szorozva a második legnagyobb, de a belépési árat megfizető értékelésnek a nyerés feltétele melletti várható értékével.

$$m(x,e) = e + G(x)\frac{1}{G(x)}\int_r^x tg(t)\,dt.$$

A fenti integrál valóban csak r-től indul, hiszen 1 játékos számára csak a második legnagyobb, de r feletti értékelés jelenthet esetleges fizetési kötelezettséget.

Megmutattuk tehát az alábbi állítást.

4.8. állítás. *Egyéni értékelésű, azonos eloszlású valószínűségi változókkal játszott, r rezervációs áras első- vagy másodáras aukció várható befizetési függvénye azonos az $rG(r)$ belépési árat meghatározó első- vagy másodáras aukción várható befizetésével. Ilyen módon az r rezervációs ár mellett a kikiáltó várható haszna azonos az $rG(r)$ belépési ár melletti várható haszonnal.*

5.

BEVÉTELEKVIVALENCIA-ELV

TEKINTSÜK A JÁTÉKOS profitfüggvényét. A lényeg, hogy a várható profit értéke felírható az optimális licitfüggvény aktuális értékétől függetlenül is. Világos, hogy a várható bevétel a nyerés valószínűségének és az aktuális értékelésnek a szorzata. Ha a feltételezett β szigorúan monoton, akkor a legnagyobb értékelésű játékos nyer, hiszen standard aukcióról van szó. Ha tehát b a leadott licit, akkor $G\left(\beta^{-1}(b)\right)$ a b licittel való nyerés valószínűsége. Tegyük fel most, hogy a várható befizetési függvény adott. Ekkor az x értékeléssel és a b licittel együtt járó várható bevétel a

$$\Pi(b,x) = G\left(\beta^{-1}(b)\right)x - m(\beta^{-1}(b)),$$

amint azt ($\Pi^\star$) indoklásakor láttuk.

Ha most β optimális licitfüggvény, az azt jelenti, hogy játékosunk fent számított várható profitja $b = \beta(x)$-ben maximumon van. Ez azt jelenti, hogy tetszőlegesen rögzített x értékelés mellett a fenti profitfüggvény első változó szerint deriváltja $b = \beta(x)$ pontban zérus, azaz $\partial_1\Pi(\beta(x),x) = 0$. Persze

$$\partial_1\Pi(b,x) = g\left(\beta^{-1}(b)\right)\frac{1}{\beta'(\beta^{-1}(b))}x - m'(\beta^{-1}(b))\frac{1}{\beta'\left(\beta^{-1}(b)\right)}.$$

Ha tehát $b = \beta(x)$, akkor

$$g(x)\frac{1}{\beta'(x)}x - m'(x)\frac{1}{\beta'(x)} = 0.$$

Azt kapjuk tehát, hogy minden x értékelés mellett $m'(x) = xg(x)$, így a Newton–Leibnitz-tétel szerint explicit formulát kapunk a befizetési függvényre: $m(x) = m(0) + \int_0^x tg(t)\,dt$. Az alábbi tételt igazoltuk.

5.1. állítás (bevételekvivalencia-elv)**.** *Tegyük fel, hogy szimmetrikus modellben játszott, standard aukciót a felek szigorúan monoton növő licitfüggvénnyel játsszák szimmetrikus Nash-egyensúlyi helyzetben.*

Ekkor a várható befizetési függvény független az aukció szerkesztésétől és felírható a használt licitfüggvénytől függetlenül. Konkrét alakja:

$$m(x) = m(0) + \int_0^x tg(t)\,dt.$$

5.1. Speciális aukciók

Az eddigiekben az m befizetési függvényt a konkrét β licitfüggvény alakjából származtattuk. A bevételekvivalencia-elv fontos következménye, hogy m a standard aukció lejátszási módjától független. Ez lehetőséget ad az optimális licitfüggvény meghatározására is. Tegyük fel például, hogy nem ismerjük az elsőáras aukció optimális licitfüggvényét. Világos, hogy elsőáras esetben

$$m(x) = G(x)\beta(x),$$

hiszen $G(x)$ az x értékelésű játékos nyerésének valószínűsége és a nyertes a $\beta(x)$ licitjét köteles fizetni. Ebből azonnal adódik a már korábban kiszámított

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x tg(t)\,dt = E\left(Y_1^{(N-1)}|Y_1^{(N-1)} < x\right)$$

formula.

Hasonló ötlettel nézzük a másodáras aukciók esetét. Feledjük el egy pillanatra, hogy az id függvény adja az optimális liciteket. Az aukció lejátszási módja szerint

$$m(x) = G(x)E\left(\beta\left(Y_1^{(N-1)}\right)|Y_1^{(N-1)} < x\right).$$

Jelölje $F_1^{(N-1)}\left(\cdot|Y_1^{(N-1)} < x\right)$ az $Y_1^{(N-1)}$ valószínűségi változónak az $Y_1^{(N-1)} < x$ esemény melletti feltételes eloszlás függvényét. Ekkor minden $t < x$ mellett

$$F_1^{(N-1)}\left(t|Y_1^{(N-1)} < x\right) = \frac{P\left(\left(Y_1^{(N-1)} < t\right)\cap\left(Y_1^{(N-1)} < x\right)\right)}{P\left(Y_1^{(N-1)} < x\right)} = \frac{G(t)}{G(x)}.$$

Így a feltételes eloszlásra azt kapjuk, hogy

$$f_1^{(N-1)}\left(t|Y_1^{(N-1)} < x\right) = \frac{g(t)}{G(x)}.$$

Ilyen módon bármi is a β licitfüggvény, de

$$E\left(\beta\left(Y_1^{(N-1)}\right)|Y_1^{(N-1)} < x\right) = \int_0^x \frac{g(t)}{G(x)}\beta(t)\,dt. \tag{5.1}$$

A bevételekvivalencia-elv szerint

$$\int_0^x tg(t)\,dt = m(x) = G(x)E\left(\beta\left(Y_1^{(N-1)}\right)|Y_1^{(N-1)} < x\right) = \int_0^x \beta(t)g(t)\,dt$$

teljesül minden x mellett, amiből egy deriválás után $\beta = \mathrm{id}$ valóban következik.

A fenti két példa semmi újat nem adott, hiszen korábban meghatároztuk már az első- és másodáras aukció optimális licitfüggvényeit. Viszont azt látjuk, hogy kiindulva valamely konkrét aukció lejátszási módjából, ha az m befizetési függvény és a β licitfüggvény között kapcsolatot tudunk létesíteni, akkor a bevételekvivalencia-elv lehetőséget ad az optimális licitfüggvény analitikus felírására.

Mindenki fizet aukció

A lejátszás a következő. A legnagyobb licitet ajánló játékos nyer, de mindenki fizeti az általa megtett licitet, függetlenül attól, hogy nyert vagy sem. Az i-edik játékos tehát a

$$\Pi_i = \begin{cases} x - b_i & \text{, ha } b_i > \max_{j \neq i} b_j; \\ -b_i & \text{, egyébként} \end{cases} \tag{AP}$$

függvény maximalizálására törekszik. Most tegyük fel, hogy van β szigorúan monoton növő optimális licitfüggvény. Ekkor a bevételekvivalencia-elv szerint az x értékeléssel együtt járó várható befizetés

$$\int_0^x tg(t)\,dt = m(x) = \beta(x).$$

Azt kaptuk tehát, hogy az optimális licitfüggvény csak a fenti alakú lehet. Itt könnyű igazolni, hogy a fenti β valóban az optimális licitfüggvény. Bevezetve a $z = \beta^{-1}(x)$ jelölést azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Pi(b,x) = G\left(\beta^{-1}(b)\right)x - b = \\ G(z)x - \beta(z) = G(z)x - \int_0^z tg(t)\,dt = G(z)x - zG(z) + \int_0^z G(t)\,dt = \\ G(z)(x-z) + \int_0^z G(t)\,dt. \end{aligned}$$

Speciálisan, ha $b = \beta(x)$, azaz $z = x$, akkor

$$\Pi(\beta(x),x) = \int_0^x G(t)\,dt.$$

Így hasonlóan a korábbiakhoz

$$\begin{aligned} \Pi(\beta(x),x) - \Pi(b,x) = \int_0^x G(t)\,dt + G(z)(z-x) - \int_0^z G(t)\,dt = \\ G(z)(z-x) - \int_x^z G(t)\,dt \geq 0 \end{aligned}$$

a G monoton növekedése szerint. Bebizonyítottuk tehát az alábbi állítást.

5.2. állítás. *A mindenki fizet aukciónak létezik szigorúan monoton növő optimális licitfüggvénye. Ennek analitikus alakja*

$$\beta^{AP}(x) = \int_0^x tg(t)\,dt = G(x)E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x\right).$$

Vesztesek fizetnek aukció

A lejátszás definíciója szerint a legnagyobb licitet bejelentő játékos az aukció nyertese. Minden játékos befizeti az általa ajánlott licitet, kivéve a nyertes játékos, aki nem fizet semmit. Magyarul:

$$\Pi_i = \begin{cases} x & \text{, ha } b_i > \max_{j \neq i} b_j; \\ -b_i & \text{, egyébként.} \end{cases} \tag{LP}$$

Kapcsolatot kell teremtenünk a licitfüggvény és a várható befizetés között. Látható, hogy ez a kapcsolat:

$$m(x) = (1 - G(x))\, \beta(x),$$

hiszen a vesztés valószínűsége szorozva a vesztéskor fizetendő értékkel. A bevételekvivalencia-elv szerint

$$(1 - G(x))\, \beta(x) = \int_0^x tg(t)\, dt.$$

Bebizonyítottuk tehát az alábbi állítást.

5.3. állítás. *Az vesztesek fizetnek aukció szigorúan monoton, optimális licitfüggvénye egyedül a*

$$\beta^{LP}(x) = \frac{1}{1 - G(x)} \int_0^x tg(t)\, dt = \frac{G(x)}{1 - G(x)} E\left(Y_1^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x\right)$$

licitfüggvény lehet.

Kivéreztetés

Csak $N = 2$ esetben tudjuk a feladatot megoldani. A legnagyobb licitet adó játékos nyer, mindketten fizetik a vesztes által leadott licitet. Ha a játékosok i és j, akkor

$$\Pi_i = \begin{cases} x - b_j & \text{, ha } b_i > b_j, \\ -b_i & \text{, egyébként.} \end{cases} \tag{WA}$$

Tehát vesztés esetén a saját licit, nyerés esetén a második legnagyobb licit fizetendő. Ez azt jelenti, hogy a várható befizetés:

$$m(x) = (1 - G(x))\, \beta(x) + G(x) E\left(\beta\left(Y_1^{(N-1)}\right) | Y_1^{(N-1)} < x\right).$$

Felhasználva a (5.1) formulát, a bevételekvivalencia-elv szerint

$$\int_0^x tg(t)\, dt = (1 - G(x))\, \beta(x) + \int_0^x g(t)\, \beta(t)\, dt.$$

Felírva a deriváltakat azt kapjuk, hogy

$$xg(x) = -g(x)\, \beta(x) + (1 - G(x))\, \beta'(x) + g(x)\, \beta(x) = (1 - G(x))\, \beta'(x).$$

Innen persze azt kapjuk, hogy az optimális licitfüggvénynek ki kell elégítenie a

$$\beta'(x) = \frac{g(x)}{(1 - G(x))} x$$

egyenletet. Persze ez $N = 2$ miatt $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$ függvényt jelenti. Bebizonyítottuk tehát a következő állítást:

5.4. állítás. *A kivéreztetés („war of attrition") aukció optimális licitfüggvényére az $N = 2$ esetben csak a*

$$\beta^{WA}(x) = \int_0^x \frac{t g(t)}{1 - G(t)} dt$$

formula lehetséges.

Harmadáras aukció

Újra tetszőleges N mellett vizsgáljuk a jelenséget, persze $N \geq 3$. A harmadáras aukció majdnem mindenben azonos a másodárassal, de most a nyerő befizetés a harmadik legnagyobb ajánlott licit. Tehát az i-edik játékos szempontjából:

$$\Pi_i = \begin{cases} x - \max 2_{j \neq i} b_j & \text{, ha } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases} \tag{III}$$

Nyilvánvaló, hogy a befizetési függvény és a licitfüggvény közti kapcsolat:

$$m(x) = G(x) E\left(Y_2^{(N-1)} | Y_1^{(N-1)} < x\right).$$

Azért, hogy a fenti feltételes várható értéket könnyen kezeljük, számítsuk ki először a feltételes sűrűségfüggvényt. Jelölje a továbbiakban $F_1^{(N-1)}$ az $Y_1^{(N-1)}$ eloszlását, és $F_2^{(N-1)}$ az $Y_2^{(N-1)}$ valószínűségi változó eloszlását. Hasonlóan $F_1^{(N-1)}(\cdot|A)$ az $Y_1^{(N-1)}$ feltételes eloszlását az A feltételi esemény mellett, és $F_2^{(N-1)}(\cdot|A)$ az $Y_2^{(N-1)}$ feltételes eloszlásfüggvénye. Analóg módon $f_1^{(N-1)}, f_2^{(N-1)}$ az $Y_1^{(N-1)}$ és $Y_2^{(N-1)}$ sűrűségfüggvénye. A feltételes sűrűségfüggvények: $f_2^{(N-1)}(\cdot|A)$ az $Y_2^{(N-1)}$ valószínűségi változó és $f_1^{(N-1)}(\cdot|A)$ az $Y_1^{(N-1)}$ valószínűségi változó feltételes sűrűségfüggvénye az A feltétel mellett. Korábban azt láttuk, hogy $f_1^{(N-1)}\left(t|Y_1^{(N-1)} < x\right) = \frac{g(t)}{G(x)}$.

5.5. lemma. *Az $Y_2^{(N-1)}$ valószínűségi változónak az $Y_1^{(N-1)} < x$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényére*

$$f_2^{(N-1)}\left(y|Y_1^{(N-1)} < x\right) = \frac{1}{F_1^{(N-1)}(x)} (N-1)(F(x) - F(y)) f_1^{(N-2)}(y)$$

minden $y < x$ mellett.

Bizonyítás. Világos, hogy $y < x$ mellett

$$\left(Y_2^{(N-1)} < y\right) \cap \left(Y_1^{(N-1)} < x\right) = \\ \left(Y_1^{(N-1)} < y\right) \cup \left(\left(y \le Y_1^{(N-1)} < x\right) \cap \left(Y_2^{(N-1)} < y\right)\right),$$

egymást kizáró értelemben. Ez utóbbi esemény csak úgy teljesülhet, hogy az $X_1, \ldots, X_{N-1}$ valószínűségi változók egyike esik az $[y, x)$ intervallumba, míg az összes többi a $[0, y]$ intervallumban marad. No de az előbbi $N-1$ féleképpen lehetséges, így ennek valószínűsége $(N-1)(F(x) - F(y))$, persze az utóbbi esemény valószínűsége $F_1^{(N-2)}(y)$. Így

$$P\left(\left(Y_2^{(N-1)} < y\right) \cap \left(Y_1^{(N-1)} < x\right)\right) = F_1^{(N-1)}(y) + (N-1)(F(x) - F(y))\, F_1^{(N-2)}(y).$$

A feltételes valószínűség definíciója miatt

$$F_2^{(N-1)}(y|Y_1^{(N-1)} < x) = \frac{1}{F_1^{(N-1)}(x)}\left(F_1^{(N-1)}(y) + (N-1)(F(x) - F(y))\, F_1^{(N-2)}(y)\right).$$

Ezt y szerint deriválva kapjuk a szóban forgó feltételes sűrűségfüggvényt:

$$f_2^{(N-1)}(y|Y_1^{(N-1)} < x) = \\ \frac{1}{F_1^{(N-1)}(x)}\left(f_1^{(N-1)}(y) + (N-1)\left(-f(y)F_1^{(N-2)}(y) + (F(x) - F(y))\, f_1^{(N-2)}(y)\right)\right).$$

Most vegyük észre, hogy a középen szereplő

$$(N-1)(-f)\, F_1^{(N-2)} = (N-1)(-f)\, F^{N-2} = -\left(F^{N-1}\right)' = -\left(F_1^{(N-1)}\right)' = -f_1^{(N-1)}.$$

Ezt kellett belátni. □

Visszatérve a befizetési függvényre

$$m(x) = G(x)\, E\left(\beta\left(Y_2^{(N-1)}\right) |Y_1^{(N-1)} < x\right) = \\ G(x)\int_0^x f_2^{(N-1)}\left(t|Y_1^{(N-1)} < x\right)\beta(t)\, dt = (N-1)\int_0^x (F(x) - F(t))\, f_1^{(N-2)}(t)\beta(t)\, dt = \\ (N-1)\left(F(x)\int_0^x f_1^{(N-2)}(t)\beta(t)\, dt - \int_0^x F(t)\, f_1^{(N-2)}(t)\beta(t)\, dt\right).$$

A bevételekvivalencia-elv szerint e függvény deriváltja éppen $xg(x)$. Tehát

$$m'(x) = \\ (N-1)\left(f(x)\int_0^x f_1^{(N-2)}(t)\beta(t)\, dt + F(x)\, f_1^{(N-2)}(x)\beta(x) - F(x)\, f_1^{(N-2)}(x)\beta(x)\right) = \\ (N-1)\, f(x)\int_0^x f_1^{(N-2)}(t)\beta(t)\, dt.$$

Emlékezzünk arra, hogy $g = \left(F^{N-1}\right)' = (N-1)\,F^{N-2}f = (N-1)\,F_1^{(N-2)}f$. Így a bevételekvivalencia-elv miatt minden x értékelés mellett

$$xg(x) = x(N-1)\,F_1^{(N-2)}(x)\,f(x) = (N-1)\,f(x)\int_0^x f_1^{(N-2)}(t)\beta(t)\,dt = m'(x)\,,$$

amiből a középső egyenlőség egyszerűsítése után kapjuk az

$$xF_1^{(N-2)}(x) = \int_0^x f_1^{(N-2)}(t)\beta(t)\,dt$$

azonosságot. Világos, hogy innen β egy újbóli deriválás után már kifejezhető:

$$F_1^{(N-2)}(x) + xf_1^{(N-2)}(x) = f_1^{(N-2)}(x)\beta(x),$$

amiből már β explicit alakban adódik.

$$\beta(x) = x + \frac{F_1^{(N-2)}(x)}{f_1^{(N-2)}(x)} = x + \frac{F^{N-2}(x)}{(N-2)F^{N-3}(x)f(x)} = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}.$$

Itt meg is fogalmazhatnánk, hogy csak a fenti alakú függvény lehet a harmadáras aukció optimális licitfüggvénye.

A probléma viszont a következő. A bevételekvivalencia-elv alkalmazhatóságának egyik feltétele volt a szigorúan monoton növő licitfüggvény létének feltételezése. Ahhoz tehát, hogy olyan állítást gyártsunk, amelynek feltételrendszere legalábbis nem biztosan üres, ahhoz szükséges valamilyen feltétel, ami garantálja a fenti β monoton növekedését. A legjobb lenne persze szükséges és elégséges feltétel. Viszont szép feltétel adható a $\frac{F}{f}$ függvény monotonitására, ezért ez a feltétel megfelelő, de csak elégséges feltételt ad a fenti alakú β függvény monotonitására.

Tegyük fel, hogy az F eloszlás logaritmikusan konkáv. Ekkor

$$0 > (\ln F)'' = \left(\frac{f}{F}\right)' = \left(\frac{1}{\frac{F}{f}}\right)' = -\frac{\left(\frac{F}{f}\right)'}{\left(\frac{F}{f}\right)^2}$$

mutatja, hogy $\frac{F}{f}$ egy szigorúan monoton növő függvény. Bebizonyítottuk tehát az alábbi állítást.

5.6. állítás. *Tegyük fel, hogy egy magán értékelésű, független, azonos eloszlású harmadáras aukciónak van szigorúan monoton növő szimmetrikus optimális licitfüggvénye, és a játékosok közös eloszlása logaritmikusan konkáv. Ekkor az optimális licitfüggvény csak*

$$\beta^{III}(x) = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}$$

alakú lehet.

5.7. *megjegyzés.* Az eddigi feltételek mellett az alábbi nagyságrendi viszonyokat tapasztaljuk a különböző aukciók optimális licitfüggvényei közt. Minden x értékelés mellett

$$\beta^{AP}(x) = G(x)\,\beta^{I}(x) < \beta^{I}(x) < x = \beta^{II}(x) < \beta^{III}(x).$$

6.

KOCKÁZATSEMLEGESSÉG SÉRÜLÉSE

MOST AZT VIZSGÁLJUK, hogy érvényben marad-e a bevételekvivalencia-elv, bizonyos feltételeinek elhagyásával.

Gondoljunk vissza az első- és másodáras aukciók definíciójára a 19. és a 25. oldalon. A játék (II) és (I) definíciója a játékos kockázatok iránti semlegességét fejezi ki, hiszen a hasznosság a profit lineáris függvénye. Ha u valamilyen monoton növő függvény, amelyre $u(0) = 0$, és a játékosok racionalitása az ottani Π profit függvény helyett az

$$u \circ \Pi$$

függvény értékeinek maximalizálását jelenti, akkor a kockázat fogalma is a modellbe kerül.

6.1. definíció. Az $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvényt *Neumann–Morgenstern*-féle hasznossági függvénynek mondjuk, ha az folytonos, $u(0) = 0$, az értelmezési tartomány belső pontjaiban kétszer differenciálható, $u'(x) > 0$, és $u''(x) < 0$ minden $x > 0$ mellett.

Amennyiben u egy Neumann–Morgenstern-hasznosság, és az i-edik játékos az $u \circ \Pi_i$ függvényt optimalizálja, akkor *kockázatkerülő* játékosról beszélünk. A kockázatokat kerülő játékosokkal lejátszott másodáras aukció szabálya tehát

$$\Pi_i = \begin{cases} u\left(x_i - \max_{j \neq i} b_j\right) & \text{, ha } b_i > \max_{i \neq j} b_j; \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \tag{IIRA}$$

míg az elsőáras játék definíciója

$$\Pi_i = \begin{cases} u(x_i - b_i) & \text{, ha } b_i > \max_{i \neq j} b_j; \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases} \tag{IRA}$$

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a játékosok racionalitása most nem a várt profitjuk maximalizálását jelenti, hanem a profitjuk függvényében alakuló elvárt hasznosságuk maximalizálását. Például elsőáras esetben az x értékeléssel bíró játékos az optimális licitfüggvénye megtalálásához a

$$b \mapsto G\left(\gamma^{-1}(b)\right) u(x - b)$$

függvény maximumát keresi. Ha $u = \mathrm{id}$, akkor kapjuk a kockázatsemleges optimális licitfüggvényt.

6.2. lemma. *Legyen u egy Neumann–Morgenstern-féle hasznossági függvény. Ekkor minden $x > 0$ mellett*

$$\frac{u(x)}{u'(x)} > x.$$

Bizonyítás. Legyen $x > 0$. A Lagrange-középértéktétel szerint létezik $\xi \in (0, x)$, amelyre $u(x) - u(0) = u'(\xi)x$. No de u' szigorúan monoton fogyó, így $u'(\xi) > u'(x)$, ezért $u(x) > u'(x)x$. Ezt kellett belátni. □

6.3. lemma. *Legyen* $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *folytonos, az értelmezési tartománya belső pontjaiban differenciálható függvény, amelyre* $\varphi(0) = 0$. *Tegyük fel, hogy amennyiben* $\varphi(x) \geq 0$, *úgy* $\varphi'(x) < 0$. *Ekkor minden* $x > 0$ *mellett* $\varphi(x) < 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel –indirekt–, hogy van $x > 0$, amelyre $\varphi(x) \geq 0$. Ekkor $\varphi'(x) < 0$ szerint létezik $\delta > 0$, hogy $\varphi(x-\delta) - \varphi(x) > 0$. A Weierstrass-tétel szerint létezik $z \in [0,x]$, amelyre $\varphi(z) = \max\{\varphi(t) : t \in [0,x]\}$. Világos, hogy $\varphi(x-\delta) > \varphi(x) \geq 0$, ezért $\varphi(0) = 0$ miatt sem $z = 0$, sem $z = x$ nem lehetséges. Azt kapjuk tehát, hogy $z \in (0,x)$. Ez azt jelenti, hogy z a φ lokális maximuma is, ergo $\varphi'(z) = 0$. Ez ellentmond a $\varphi(z) > \varphi(x) \geq 0$ feltételnek, hiszen ekkor $\varphi'(z) < 0$ lenne a lemma feltétele szerint. Ezt kellett belátni. □

6.4. állítás. *Legyen* γ *egy kockázatkerülő játékosokkal lejátszott, szimmetrikus, magán értékelésű, elsőáras aukció szigorúan monoton növő, optimális licitfüggvénye. Ekkor* $\gamma : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ *kielégíti az alábbi differenciálegyenletet.*

$$\gamma'(x) = \frac{g(x)}{G(x)} \frac{u(x-\gamma(x))}{u'(x-\gamma(x))}. \tag{6.1}$$

Bizonyítás. Az optimalitás szerint rögzített x értékeléshez adott $\gamma(x)$ az a b licit, amelyre a

$$b \mapsto G\left(\gamma^{-1}(b)\right) u(x-b)$$

a függvény maximumán van. Ez azt jelenti, hogy a fenti függvény b szerinti deriváltja éppen $\gamma(x)$-ben zérus. A b szerinti derivált függvény:

$$g\left(\gamma^{-1}(b)\right) \frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(b))} u(x-b) - G\left(\gamma^{-1}(b)\right) u'(x-b).$$

Ha $b = \gamma(x)$-et helyettesítünk, akkor a fenti kifejezés értéke zérus. Innen

$$g(x) \frac{1}{\gamma'(x)} u(x-\gamma(x)) - G(x) u'(x-\gamma(x)) = 0.$$

Ezt kellett belátni. □

6.5. állítás. *Legyen* γ *egy Neumann–Morgenstern-féle kockázatkerülő játékosokkal lejátszott szimmetrikus, magán értékelésű, elsőáras aukció optimális licitfüggvénye, és* β *ugyanennek az aukciónak a kockázatsemleges játékossokkal kialakuló optimális licitfüggvénye. Ekkor minden* x *pozitív értékelés mellett*

$$\gamma(x) > \beta(x),$$

így a kockázatkerülő játékosok a kikiáltó számára nagyobb várható bevételt jelentenek, mint a kockázatsemleges játékosok.

Bizonyítás. Láttuk, hogy γ és β rendre megoldásai a

$$\gamma'(x) = \frac{g(x)}{G(x)} \frac{u(x-\gamma(x))}{u'(x-\gamma(x))} \qquad \beta'(x) = \frac{g(x)}{G(x)}(x-\beta(x))$$

differenciálegyenleteknek. Tegyük fel, hogy valamely $x > 0$ mellett $\gamma(x) \leq \beta(x)$. Ekkor a korábban igazolt $\beta(x) < x$ szerint $\gamma(x) < x$ is fennáll, tehát a Neumann–Morgenstern-hasznosság $u(t)/u'(t) > t$ tulajdonsága alkalmazható $t = x - \gamma(x) > 0$ mellett.

$$\gamma'(x) = \frac{g(x)}{G(x)} \frac{u(x-\gamma(x))}{u'(x-\gamma(x))} > \frac{g(x)}{G(x)}(x-\gamma(x)) \geq \frac{g(x)}{G(x)}(x-\beta(x)) = \beta'(x).$$

A $\beta - \gamma$ függvény tehát rendelkezik avval a tulajdonsággal, hogy valahányszor $(\beta-\gamma)(x) \geq 0$ teljesül, úgy $(\beta-\gamma)'(x) < 0$ is fennáll. A 6.3. lemma szerint $\beta(x) - \gamma(x) < 0$ minden $x > 0$ mellett. Ezt kellett belátni. □

Kicsit konkrétabb példaként nézzük az $u(z) = z^\alpha$ függvény esetét, amikor $0 < \alpha < 1$. Mivel $\frac{u(z)}{u'(z)} = \frac{z^\alpha}{\alpha z^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} z$ a (6.1) differenciálegyenlet most

$$\gamma'(x) = \frac{g(x)}{G(x)} \frac{x-\gamma(x)}{\alpha}$$

teljesülését jelenti. Az ekvivalens avval, mintha kockázatsemleges játékosok játszanának F helyett $F^{\frac{1}{\alpha}}$ eloszlásokkal. Ugyanis

$$\frac{\left(F^{\frac{N-1}{\alpha}}\right)'}{F^{\frac{N-1}{\alpha}}} = \frac{\frac{N-1}{\alpha} F^{\frac{N-1}{\alpha}-1} f}{F^{\frac{N-1}{\alpha}}} = \frac{1}{\alpha} \frac{(N-1)f}{F} = \frac{1}{\alpha} \frac{(N-1)F^{N-2} f}{F^{N-1}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\left(F^{N-1}\right)'}{F^{N-1}} = \frac{1}{\alpha} \frac{g}{G}.$$

Igazoltuk tehát az alábbi észrevételt.

6.6. állítás. *Legyen $u(z) = z^\alpha$, ahol $0 < \alpha < 1$. Tekintsük az u Neumann–Morgenstern-hasznossági függvénnyel rendelkező kockázatkerülő játékosok alkotta elsőáras, magán értékelésű, szimmetrikus aukciót a közös F eloszlás függvényekkel. Ennek optimális licitfüggvénye, azonos ugyan ennek az aukciónak a kockázatsemleges játékosokkal játszott optimális licitfüggvényével, de $F^{\frac{1}{\alpha}}$ eloszlásokkal.*

A kockázatkerülő optimális licitfüggvény tehát

$$\gamma(x) = \frac{N-1}{\alpha F^{\frac{N-1}{\alpha}}(x)} \int_0^x t f(t) F^{\frac{N-1}{\alpha}-1}(t)\, dt.$$

7.

A SZIMMETRIKUS ÉRTÉKELÉS SÉRÜLÉSE

EBBEN A FEJEZETBEN azt vizsgáljuk, hogy hogyan változik a bevételekvivalencia-elv, amikor a játékosok értékeloszlása nem azonos. Csak a két játékos, tehát $N = 2$, esetet vizsgáljuk.

A modell a következő. Elsőáras aukció két játékossal. Legyen X_1, X_2 nem feltétlenül azonos eloszlású, de független valószínűségi változók. Az abszolút folytonos eloszlások F_1 és F_2. A játékosok ismerik egymás eloszlásait, és ennek a ténynek az ismerete is ismert számukra. Az X_i tartója $[0, \omega_i]$, $i = 1, 2$, és $\omega_2 \leq \omega_1$. A játékosok kockázatsemlegesek, azaz az i-edik játékos profitfüggvénye

$$\Pi_i(b, x) = P(\{i \text{ nyer}\})(x - b),$$

ahol x az értékelés és b erre az értékelésre adott licit. A $\beta_i : [0, \omega_i] \to \mathbb{R}$ függvények az elsőáras optimális licitfüggvények. Feltesszük, hogy $\beta_i(x) < x$ minden $0 < x < \omega_i$ mellett, és a β_i függvények szigorúan monoton növők.

A licitfüggvények optimalitásának azonnali következménye az alábbi.

7.1. állítás. *Ha β_1, β_2 a fenti modellben az elsőáras aukció optimális licitfüggvénye, akkor*

$$\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0, \qquad \textit{és} \qquad \beta_1(\omega_1) = \beta_2(\omega_2) = \bar{b}.$$

Bizonyítás. Világos, hogy $\beta_i(x) \leq x$ minden $x \in [0, \omega_i]$ mellett, hiszen az értékelés feletti licit negatív profitot eredményezhetne, ami a nulla profitnál rosszabb. Az egyensúlyi licitfüggvényre ezért csak $\beta_i(0) = 0$ lehetséges.

Mivel a játékosok ismerik egymás eloszlásait, ezért ismerik egymás optimális licitfüggvényeit is, ezért kölcsönösen ismerik a licitfüggvények értékeit az ω_1, ω_2 végpontokban. Ha például $\beta_2(\omega_2) > \beta_1(\omega_1)$, akkor 2 játékos a maximális értékelése mellett licitjét csökkentve növeli a profitját, ami az egyensúly definíciója szerint nem lehetséges. $\square$

Láthatjuk tehát, hogy $\beta_i : [0, \omega_i] \to [0, \bar{b}]$. Érdemes itt egy pillanatra megállni és észrevenni, hogy ebből azonnal következik, hogy nem egy hatékony aukcióval állunk szemben, azaz előfordulhat, hogy az alacsonyabb értékeléssel nyeri az aukciót az 1-es játékos, mint a nála magasabb értékeléssel bíró 2-es játékos. Lásd a 7.2. ábrát. Ez egy nagyon fontos hiányossága az elsőáras aukciónak, amire még később is vissza fogunk térni.

A továbbiakban kényelmesebb a licitfüggvények inverzeivel számolni, hiszen azoknak az értelmezési tartománya azonos. Legyenek φ_1, φ_2 a β_1, β_2 függvények inverzei. Így $\varphi_i : [0, \bar{b}] \to [0, \omega_i]$.

Jelölje

$$H_i = F_i \circ \varphi_i.$$

E függvényt az i játékos *liciteloszlásának* nevezzük, hiszen ha $b \in [0, \bar{b}]$, akkor $H_i(b) = P(X_i < \varphi_i(b)) = P(\beta_i(X_i) < b)$ azaz, $H_i(b)$ annak valószínűsége, hogy az i játékos licitje b alatt marad. Ha tehát b_i az i játékos licitje, akkor $H_j(b_i)$ éppen annak valószínűsége, hogy j veszít, ergo i nyer. Ezek szerint az i játékos profitfüggvénye

$$\Pi_i(b, x) = H_j(b)(x - b). \tag{7.1}$$

E függvény b szerinti deriváltja $h_j(b)(x-b) - H_j(b)$. A β_i egyensúlyi licitfüggvény tehát minden x értékeléshez azt a $\beta_i(x) = b$ licitet rendeli, amely kielégíti az iménti egyenletet. Mivel φ_i a β_i inverze, ezért ez kifejezhető a φ_i segítségével is:

$$H_j(b) = h_j(b)(\varphi_i(b) - b), \qquad j \neq i. \tag{7.2}$$

Innen már egyszerűen kapjuk az alábbi állítást.

7.2. állítás. *Tegyük fel, hogy φ_1, φ_2 az optimális licitfüggvény inverzei egy kétszemélyes elsőáras aukció esetén. Ekkor minden $0 < b < \bar{b}$ mellett*

1. *teljesül az alábbi függvényegyenlet-rendszer*

$$\begin{aligned} \varphi_1(b) &= \frac{H_2(b)}{h_2(b)} + b \\ \varphi_2(b) &= \frac{H_1(b)}{h_1(b)} + b; \end{aligned} \tag{7.3}$$

2. *és teljesül az alábbi differenciálegyenlet-rendszer*

$$\begin{aligned} \varphi_1'(b) &= \frac{F_1(\varphi_1(b))}{f_1(\varphi_1(b))} \frac{1}{\varphi_2(b) - b} \\ \varphi_2'(b) &= \frac{F_2(\varphi_2(b))}{f_2(\varphi_2(b))} \frac{1}{\varphi_1(b) - b}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Bizonyítás. A (7.2) egyenletből φ_i-t kifejezhetjük, hiszen az inverz függvény deriválási szabálya szerint $h_j(b) = H_j'(b) = f_j(\varphi_j(b))\varphi_j'(b) \neq 0$, ha $b \neq 0$. Így $\varphi_i(b) = \frac{H_j(b)}{h_j(b)} + b$, ami a függvényegyenletet igazolja.

A (7.2) egyenletbe a definíciókat visszaírva azt kapjuk, hogy $F_j(\varphi_j(b)) = f_j(\varphi_j(b))\varphi_j'(b)(\varphi_i(b) - b)$, amiből φ_j'-at kifejezve kapjuk, hogy

$$\varphi_j'(b) = \frac{F_j(\varphi_j(b))}{f_j(\varphi_j(b))} \frac{1}{\varphi_i(b) - b},$$

ami éppen a kívánt differenciálegyenlet. □

7.1. Egyenletes eloszlások esete

Az előző állítás illusztrációjaként nagyon érdekes részletesen is kiszámolni azt az esetet, amikor az 1 játékos értékelése a $[0,\omega_1]$ intervallumon egyenletes eloszlású, és a 2 játékos értékelése a $[0,\omega_2]$ intervallum mint tartó felett egyenletes eloszlású. Most is tegyük fel, hogy $\omega_2 < \omega_1$. Ekkor persze

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{1}{\omega_1}x \qquad & f_1 &= \frac{1}{\omega_1};\\
F_2(x) &= \frac{1}{\omega_2}x \qquad & f_2 &= \frac{1}{\omega_2}.
\end{aligned}
$$

Világos, hogy $F_1(x) < F_2(x)$ minden $x \in (0,\omega_2)$ mellett, tehát 1 eloszlása sztochasztikusan dominálja 2 eloszlását. Célunk, hogy a (7.5) differenciálegyenlet-rendszer alapján meghatározzuk az optimális licitfüggvények inverzét, majd az optimális licitfüggvényeket.

Írjuk fel először a (7.5) speciális esetét. Minden $0 < b < \bar{b}$ mellett

$$
\varphi_j'(b) = \frac{F_j(\varphi_j(b))}{f_j(\varphi_j(b))}\frac{1}{\varphi_i(b)-b} = \frac{\frac{1}{\omega_j}\varphi_j(b)}{\frac{1}{\omega_j}}\frac{1}{\varphi_i(b)-b} = \frac{\varphi_j(b)}{\varphi_i(b)-b}.
$$

Azt kaptuk tehát, hogy amennyiben a modell feltételeinek megfelelő licitfüggvények léteznek, úgy az inverzük kielégíti a

$$
\begin{aligned}
\varphi_1'(b) &= \frac{\varphi_1(b)}{\varphi_2(b)-b},\\
\varphi_2'(b) &= \frac{\varphi_2(b)}{\varphi_1(b)-b}
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

differenciálegyenlet-rendszert.

Most megmutatjuk, hogy ez a differenciálegyenlet-rendszer visszavezethető egy szétválasztható változójú differenciálegyenletre. A trükk, hogy $(\varphi_1(b)-b)(\varphi_2(b)-b)$ deriváltját keressük. Adjunk -1 -et (7.5) mindkét egyenletéhez, majd szorozzunk fel a jobboldali nevezővel. Így

$$
\begin{aligned}
\left(\varphi_1'(b)-1\right)(\varphi_2(b)-b) &= \varphi_1(b)-\varphi_2(b)+b,\\
\left(\varphi_2'(b)-1\right)(\varphi_1(b)-b) &= \varphi_2(b)-\varphi_1(b)+b.
\end{aligned}
$$

Ha észrevesszük, hogy $\left(\varphi_1'(b)-1\right) = (\varphi_1(b)-b)'$, akkor a fenti egyenletek összeadásával azt kapjuk, hogy

$$
((\varphi_1(b)-b)(\varphi_2(b)-b))' = \left(\varphi_1'(b)-1\right)(\varphi_2(b)-b) + \left(\varphi_2'(b)-1\right)(\varphi_1(b)-b) = 2b.
$$

Figyelembe véve, hogy $\varphi_i(0) = 0$,

$$(\varphi_1(b) - b)(\varphi_2(b) - b) = b^2.$$

Ebből két dolog látszik azonnal. Egyrészt megkapjuk $\bar{b}$ értékét, hiszen a fenti egyenletbe $\bar{b}$ helyettesítve, $(\omega_1 - \bar{b})(\omega_2 - \bar{b}) = \bar{b}^2$, azaz

$$\bar{b} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Másrészt a (7.5) rendszer egyetlen egyenletre egyszerűsödik, hiszen $\varphi_j(b) - b = \frac{b^2}{\varphi_i(b) - b}$. A (7.5) rendszer mindkét egyenlete tehát a

$$\varphi'(b) = \frac{\varphi(b)(\varphi(b) - b)}{b^2} \tag{7.6}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletre egyszerűsödik, ahol minden $b > 0$ mellett $\varphi(b) > b$.

7.3. lemma. *A (7.6) differenciálegyenlet általános megoldása a következő:*

$$\varphi(b) = \frac{2b}{1 + cb^2}.$$

Bizonyítás. Keressük a megoldást $\varphi(b) - b = \xi(b)b$ alakban. Ekkor $\varphi(b) = b(1 + \xi(b))$ és $\varphi'(b) = 1 + \xi(b) + b\xi'(b)$. Tehát a (7.6) egyenlet így az

$$\begin{aligned} 1 + \xi(b) + b\xi'(b) &= \frac{1}{b^2} b(1 + \xi(b))\xi(b)b \\ 1 + \xi(b) + b\xi'(b) &= \xi(b) + \xi^2(b) \\ \xi'(b) &= \frac{\xi^2(b) - 1}{b}, \qquad \xi(b) > 0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

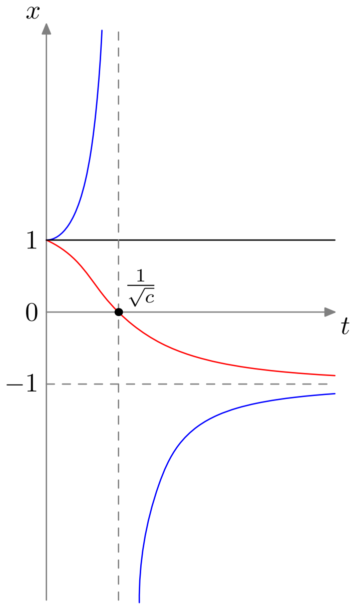
egyenletbe megy át, ahol $\varphi(b) > b$ miatt minden $b > 0$ mellett $\xi(b) = \frac{\varphi(b)}{b} - 1 > 0$.

A (7.7) differenciálegyenletet kell tehát megoldanunk. Világos, hogy a konstans $\xi(b) = 1$ egy megoldás. Egyébként az egyenlet

$$\frac{1}{x^2 - 1} \cdot x' = \frac{1}{b}$$

alakú. Parciális törtekre bontással $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$. Az antideriváltra tehát

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} = \begin{cases} \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, & \text{ha } x > 1 \\ \ln\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}, & \text{ha } 0 < x < 1. \end{cases}$$



7.1. ábra. A (7.7) szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldásai

Ha $x(b) > 1$, akkor az x függvényre

$$\begin{aligned}
\left(\int \frac{1}{x^2-1}\,dx\right)' &= \frac{1}{b}\\
\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) &= c+\ln b\\
\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} &= cb\\
\frac{x-1}{x+1} &= cb^2\\
x-1 &= cb^2x+cb^2\\
x\left(1-cb^2\right) &= 1+cb^2\\
x(b) &= \frac{1+cb^2}{1-cb^2},
\end{aligned}$$

valamely $c > 0$ konstans mellett.

Analóg módon $0 < x(b) < 1$ mellett

$$\begin{aligned}
\left(\int \frac{1}{x^2-1}\,dx\right)' &= \frac{1}{b}\\
\ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right) &= c+\ln b\\
\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} &= cb\\
\frac{1-x}{x+1} &= cb^2\\
1-x &= cb^2x+cb^2\\
x\left(1+cb^2\right) &= 1-cb^2\\
x(b) &= \frac{1-cb^2}{1+cb^2},
\end{aligned}$$

valamilyen $c > 0$ mellett.

Visszatérve (7.7) megoldására azt kaptuk, hogy a megoldás mindenképpen

$$\xi'(b) = \frac{1-cb^2}{1+cb^2}$$

alakú. Ha $c = 0$, akkor ez a konstans 1 függvény; ha $c < 0$, akkor $\xi(b) > 1$; ha $c > 0$ akkor $\xi(b) < 1$. Lásd a 7.1. ábrát. Innen

$$\varphi(b) = b(1+\xi(b)) = b\left(1+\frac{1-cb^2}{1+cb^2}\right) = \frac{2b}{1+cb^2}.$$

Ezt kellett belátni. □

Azt mutattuk meg az eddigiekben, hogy a (7.5) rendszer megoldása

$$\begin{aligned} \varphi_1(b) &= \frac{2b}{1+k_1b^2} \\ \varphi_2(b) &= \frac{2b}{1+k_2b^2}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Most meghatározzuk a fenti k_1 és k_2 konstansokat. A (7.9) speciális eseteként $\omega_1 = \frac{2\bar{b}}{1+k_1\bar{b}^2}$ és $\omega_2 = \frac{2\bar{b}}{1+k_2\bar{b}^2}$. Persze emlékszünk, hogy $\bar{b} = \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}$. Így

$$\omega_1 = \frac{2\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}}{1+k_1\left(\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right)^2} = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2+k_1\frac{(\omega_1\omega_2)^2}{\omega_1+\omega_2}}.$$

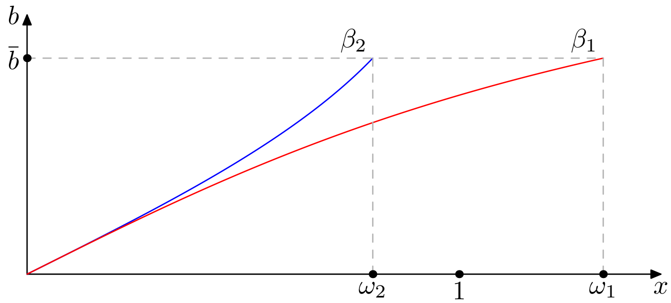
Innen ω_1 és ω_2 -vel való egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy $\omega_1 + k_1\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1+\omega_2} = \omega_2$, ahonnan

$$k_1 = \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}.$$

A fentivel analóg számolgatás mutatja, hogy

$$k_2 = \frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}.$$

Világos, hogy $\omega_2 \leq \omega_1$ miatt $k_1 \leq 0$, $k_2 \geq 0$ és $k_2 = -k_1$. Könnyen látszik, hogy $\bar{b} = \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2} < \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{k_2}}$, ami azt jelenti, hogy $\varphi_1(b)$ nevezője valóban pozitív. Ebből már nyilvánvalóan következik, hogy minden $0 < b < \bar{b}$ $\varphi_1(b) > \varphi_2(b)$, azaz minden $0 < x < \omega_2$ mellett $\beta_1(x) < \beta_2(x)$.



7.2. ábra. A licitfüggvények grafikonja, amikor $\omega_1 = \frac{4}{3}$ és $\omega_2 = \frac{4}{5}$.

7.2. Első- és másodáras bevételek összehasonlítása

Alkalmazzuk az előző pont eredményeit, mikor valamely $\alpha \in [0,1)$ mellett

$$\omega_2 = \frac{1}{1+\alpha}, \omega_1 = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Először írjuk fel az elsőáras aukció bevételének eloszlását. Világos, hogy

$$F_1(x) = (1-\alpha)x, F_2(x) = (1+\alpha)x, \text{ és } \bar{b} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{\frac{1}{1-\alpha^2}}{\frac{1-\alpha+1+\alpha}{1-\alpha^2}} = \frac{1}{2}.$$

A megoldásokhoz $\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} = (1-\alpha)^2 - (1+\alpha)^2 = -4\alpha.$
Így tehát $\varphi_1, \varphi_2 : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$

$$\varphi_1(b) = \frac{2b}{1-4\alpha b^2} \quad \text{és} \quad \varphi_2(b) = \frac{2b}{1+4\alpha b^2}.$$

A fenti függvények β_1, β_2 inverzeinek mérethelyes grafikonját tartalmazza a 7.2. ábra, abban a speciális esetben, amikor az $\alpha = \frac{1}{4}$ paramétert állítjuk be.

A kikiáltó bevételének eloszlására tetszőleges $0 < p < \frac{1}{2}$ esetén

$$L_\alpha^1(p) = P(\max\{\beta_1(X_1), \beta_2(X_2)\} < p) = P(\beta_1(X_1) < p) P(\beta_2(X_2) < p) = F_1(\varphi_1(p)) F_2(\varphi_2(p)) = (1-\alpha)\frac{2p}{1-4\alpha p^2}(1+\alpha)\frac{2p}{1+4\alpha p^2} = \frac{\left(\alpha^2-1\right)c}{\alpha^2 c^2 - 1},$$

ahol $c = (2p)^2$. E tört α szerinti deriváltjának számlálója $2\alpha c\left(c^2-1\right) < 0$. Ez azt jelenti, hogy minden rögzített $0 < p < \frac{1}{2}$ mellett $L_0^1(p) > L_\alpha^1(p)$, azaz L_α^1 sztochasztikusan dominálja L_0^1-et minden $\alpha \in (0,1)$ mellett, ergo

$$E\left(L_\alpha^1\right) > E\left(L_0^1\right).$$

Most írjuk fel a másodáras szigorúan monoton nővő egyensúlyi bevétel-eloszlást. Ez sokkal egyszerűbb, hiszen aszimmetrikus esetben is az identitás függvény lehet csak az optimális, a szigorúan monoton növekedő feltétel miatt. Így minden $p \in (0, \omega_2)$ mellett

$$\begin{aligned} L_\alpha^2(p) &= P(\min\{X_1, X_2\} \le p) = \\ &P((X_1 \le p) \cup (X_2 \le p)) = F_1(p) + F_2(p) - F_1(p)F_2(p) = \\ &(1-\alpha)p + (1+\alpha)p - (1-\alpha)(1+\alpha)p^2 = 2p + \left(\alpha^2 - 1\right)p^2. \end{aligned}$$

Világos, hogy $[0,1)$ felett e függvény mint α függvénye szigorúan monoton nő, tehát tetszőlegesen rögzített $\alpha \in (0,1)$ esetén

$$L_0^2(p) < L_\alpha^2(p)$$

minden $p \in (0, \omega_2)$ mellett, azaz L_0^2 sztochasztikusan dominálja L_α^2-t, ergo

$$E\left(L_\alpha^2\right) < E\left(L_0^2\right).$$

Persze az $\alpha = 0$ esetben a két licitáló eloszlása a $[0,1]$-en egyenletes, ami a bevételekvivalencia-elv esete, tehát a kikiáltó várható bevétele ugyanaz mind az első-áras, mind a másodáras esetben.

Így $\alpha > 0$ esetében

$$E\left(L_\alpha^2\right) < E\left(L_0^2\right) = E\left(L_0^1\right) < E\left(L_\alpha^1\right).$$

Láttuk tehát, hogy *az aszimmetrikus licitálók esetében a bevételekvivalencia-elv következménye nem marad igaz: a kikiáltó várható árbevétele más és más első- és másodáras esetben.*

8.

ERŐSZAKOS LICITÁLÓ

AZ ELŐZŐ FEJEZET példájában, ha $\omega_2 < \omega_1$, akkor az X_1 játékos sztochasztikusan dominálja az X_2 játékost:

$$F_1(x) = \frac{1}{\omega_1}x < \frac{1}{\omega_2}x = F_2(x).$$

Láttuk, hogy X_2 minden értékeléshez nagyobb licitet ad, mint X_1 ugyanezen értékeléshez. Most ezt az állítást próbáljuk általánosítani sztochasztikus dominanciában álló eloszlások mellett, de ehhez erősebb dominancia fogalomra van szükségünk:

8.1. definíció (sztochasztikus dominancia a fordított kockázati ráta értelmében)**.** Legyen X_1 eloszlása és sűrűségfüggvénye F_1 illetve f_1, tartója $[0,\omega_1]$. Hasonlóan X_2 eloszlása és sűrűségfüggvénye F_2, f_2 a $[0,\omega_2]$ tartóval. Tegyük fel, hogy $\omega_2 \le \omega_1$. Azt mondjuk, hogy X_1 *sztochasztikusan dominálja X_2-t a fordított kockázati ráta értelmében*, ha

$$\frac{F_1}{f_1} < \frac{F_2}{f_2}$$

a $(0,\omega_2)$ minden pontja felett.

A szokásos simasági feltevéseink mellett ez avval ekvivalens, hogy az $\frac{F_1}{F_2}$ függvény szigorúan monoton nő a $[0,\omega_2]$ intervallumon:

$$\frac{F_1}{f_1} < \frac{F_2}{f_2} \iff F_1'F_2 - F_2'F_1 > 0 \iff \left(\frac{F_1}{F_2}\right)' > 0.$$

Ekkor persze minden $x < \omega_2$ esetén $\frac{F_1(x)}{F_2(x)} < F_1(\omega_2) \le 1$, ami azt jelenti $F_1(x) < F_2(x)$ is fennáll, ergo a most bevezetett sztochasztikus dominancia erősebb, mint a szokásos sztochasztikus dominancia fogalma. Hogy nem ekvivalens a két dominancia koncepció, az abból is látszik, hogy ha $\omega_2 < \omega_1$, akkor a $[0,\omega_2]$ és a $[0,\omega_1]$ feletti egyenletes eloszlásokkal

$$F_1(x) = \frac{1}{\omega_1}x < \frac{1}{\omega_2}x = F_2(x), \text{ ám } \frac{F_1}{F_2}(x) = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

8.2. lemma. *Legyen $\varphi : [0,\omega] \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos és az értelmezési tartománya belsejében differenciálható. Tegyük fel, hogy φ rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:*

$$\forall x \in (0,\omega), \varphi(x) = 0 \implies \varphi'(x) > 0.$$

Ekkor a φ függvénynek legfeljebb egy zérus helye van az értelmezési tartománya belsejében.

Bizonyítás. Ha $x \in (0,\omega)$ egy zérushely, akkor $\varphi'(x) > 0$ miatt van olyan $h > 0$ szám, melyre minden $x < x' < x+h$ esetén $0 < f(x')$ és minden $x-h < x' < x$ esetén $f(x') < 0$. Ebből két dolgot következtetünk. Egyrészt a Bolzano–tétel miatt az értelmezési tartomány bármely két belső pontbeli gyöke közt van egy harmadik gyök is, másrészt minden gyöknek van olyan nyílt környezete, melyben csak egyetlen gyök van. Na most, ha lenne két a, b gyök az értelmezési tartományon belül, akkor az

$$\{x : x \in [a,b], \varphi(x) = 0\}$$

halmaz kompakt lenne, így a fenti lefedéséből is kiválasztható véges lefedés. Mivel minden lefedő nyílt halmazban egyetlen gyök van, ezért a fenti halmaz véges. Másrészt, ha bármely két gyök közt van harmadik gyök, akkor bármely két gyök közt van végtelen sok gyök is, így a fenti halmaz nem véges. □

Minden kész, hogy megfogalmazhassuk a sejtésből eredő állítást.

8.3. állítás (Gyengeség erőszakos licitáláshoz vezet)**.** *A kétszemélyes aszimmetrikus modellben, ha X_1 sztochasztikusan dominálja X_2-t a fordított kockázati ráta értelmében, akkor a szigorúan monoton növő Nash-egyensúlyi licitfüggvényekre minden $x \in (0, \omega_2)$ mellett*

$$\beta_1(x) < \beta_2(x).$$

Bizonyítás. Jelölje $\varphi = \beta_1 - \beta_2$. Tegyük fel, hogy valamely $0 < x < \omega_2$ mellett $\beta_1(x) = \beta_2(x) = b$. Persze $b < \bar{b}$ és $\varphi_1(b) = \varphi_2(b) = x$. Emiatt (7.5)-t figyelembe véve

$$\frac{1}{\beta_2'(x)} = \varphi_2'(b) =$$
$$\frac{F_2(\varphi_2(b))}{f_2(\varphi_2(b))}\frac{1}{\varphi_1(b)-b} = \frac{F_2(x)}{f_2(x)}\frac{1}{x-b} > \frac{F_1(x)}{f_1(x)}\frac{1}{x-b} = \frac{F_1(\varphi_1(b))}{f_1(\varphi_1(b))}\frac{1}{\varphi_2(b)-b} =$$
$$\varphi_1'(b) = \frac{1}{\beta_1'(x)}.$$

Eddig tehát azt látjuk, hogy ha $\varphi(x) = \beta_1(x) - \beta_2(x) = 0$, akkor $\varphi'(x) = \beta_1'(x) - \beta_2'(x) > 0$ is teljesül. A φ függvénynek tehát legfeljebb egy gyöke van a $(0, \omega_2)$ intervallumban. Az alábbi esetek lehetségesek tehát:

1. $\varphi(x) > 0, \forall x \in (0, \omega_2)$;

2. $\varphi(x) < 0, \forall x \in (0, \omega_2)$;

3. $\exists \bar{x} < \omega_2$, amelyre $\varphi(x) > 0 \forall x \in (\bar{x}, \omega_2)$.

Világos, hogy éppen a középső $\varphi < 0$-t kell belátnunk.

Innen tegyük fel indirekt, hogy a felsorolás első vagy harmadik pontja teljesül. Ekkor persze a harmadik pont is fennáll, ergo valamely $\bar{x} < \omega_2$ mellett tetszőleges $\bar{x} < x < \omega_2$

esetén $\varphi(x) = \beta_1(x) - \beta_2(x) > 0$.[1] Az inverz függvényekre áttérve ez azt jelenti, hogy létezik $\delta > 0$, hogy minden $\bar{b} - \delta < b < \bar{b}$ esetén $\varphi_1(b) < \varphi_2(b)$. Emiatt

$$H_1(b) = F_1(\varphi_1(b)) < F_1(\varphi_2(b)) < F_2(\varphi_2(b)) = H_2(b)$$

minden $b \in \left(\bar{b} - \delta, \bar{b}\right)$ esetén. Alkalmazva a Cauchy-középértéktételt egy $\left[b, \bar{b}\right]$ intervallumon azt kapjuk, hogy létezik $\bar{b} - \delta < b < b' < \bar{b}$, hogy

$$1 \geq \frac{1 - H_2(b)}{1 - H_1(b)} = \frac{H_2\left(\bar{b}\right) - H_2(b)}{H_1\left(\bar{b}\right) - H_1(b)} = \frac{h_2(b')}{h_1(b')} \Longrightarrow h_2\left(b'\right) \leq h_1\left(b'\right),$$

amiből már a számlálót és a nevezőt is becsülhetjük a b' pontban, figyelembe véve (7.3)-at:

$$\varphi_1\left(b'\right) = \frac{H_2(b')}{h_2(b')} + b' > \frac{H_1(b')}{h_1(b')} + b' = \varphi_2\left(b'\right),$$

ami ellentmondás. □

Végül is azt mutattuk meg, hogy ha az egyik játékos értékelésének eloszlása a fordított kockázati ráta értelmében sztochasztikusan dominálja a másik játékos eloszlását, akkor ez a dominancia öröklődik az egyensúlyi licitekkel képzett licit-eloszlásokra is. Ugyanis a fenti tétel feltételei mellett

$$\frac{F_1}{f_1} < \frac{F_2}{f_2} \Longrightarrow \beta_1 < \beta_2 \Longleftrightarrow \varphi_2 < \varphi_1 \Longleftrightarrow \frac{H_1}{h_1} < \frac{H_2}{h_2}.$$

---

[1] Nem szükséges visszatérni az inverz függvényekhez, ha az erősebb $\omega_2 < \omega_1$ feltevéssel élünk. Ugyanis ekkor $\beta_1(\omega_2) < \beta_1(\omega_1) = \beta_2(\omega_2)$, ami nem lehetséges a függvények folytonossága miatt.

9.

AUKCIÓ MINT MECHANIZMUS

LÁTTUK, HOGY A játékosok különböző eloszlásait megengedve a bevételekvivalencia-elv sérül. A hátralévő fejezetekben azt a kérdést vizsgáljuk, hogy a bevételekvivalencia-elvből mennyit és hogyan lehet megmenteni a szimmetrikus esetről az aszimmetrikus esetre való áttérés mellett, tehát amikor az egyes licitálók más és más értékeloszlással rendelkeznek.

A mechanizmus szerkesztéssel kapcsolatos fejezeteteket avval kezdjük, hogy definiálunk egy olyan struktúrát, amely az eddigi aukció fogalmunkat általánosítja.

A jelen fejezet legfontosabb része a revelációs elv, amely arra szolgál, hogy az eddigiek talán legfontosabb függvényét, a licitfüggvényt kivegyük a modellből. Ez először meghökkentő, de egyben természetes gondolat is, hiszen ha egy kialakult Nash-egyensúlyra tekintünk, azaz ha ismerjük az egyes játékosok szigorúan monoton növő licitfüggvényeit, akkor a licitekből az értékelés visszaszámolható, azaz mindegy, hogy a játékosok az értékelésüket közlik az aukció lejátszásakor, vagy az értékelésük által egyértelműen meghatározott licitjüket. Mindkét esetben a játékosok végül is felfedik a valódi értékelésüket. Ebben az értelemben minden Nash-egyensúlyi helyzetben lejátszott aukció tekinthető olyan mechanizmusnak – ez a direkt-mechanizmus –, ahol minden játékos igazmondó, azaz a valódi értékelését fedi fel.

9.1. A modell

Az egész fejezetben az alábbi modellt vizsgáljuk. Legyen N a játékosok száma. Jelölje $F_1,\ldots,F_N$ az értékelések abszolút folytonos eloszlásait a $[0,\omega_i]$ tartókon. Az eddigi szokásoknak megfelelően $f_1,\ldots,f_N$ a sűrűségfüggvények. Jelölje $\Xi=\times_{i=1}^{N}[0,\omega_i]\subset\mathbb{R}^N$ és $\Xi_{-i}=\times_{j\neq i}\left[0,\omega_j\right]\subset\mathbb{R}^{N-1}$. Tegyük fel, hogy az értékelések függetlenek. Jelölje $f:\Xi\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\prod_{i=1}^{N}f_i(x_i)$$

az együttes sűrűségfüggvényt, ahol $x=(x_1,\ldots,x_N)$. Hasonlóan $f_{-i}:\Xi_{-i}\to\mathbb{R}$ az i-től különböző játékosok együttes sűrűsége, tehát $x_{-i}\in\Xi_{-i}$ mellett

$$f_{-i}(x_{-i})=\prod_{j\neq i}f_j\left(x_j\right).$$

A $\psi_i:[0,\omega_i]\to\mathbb{R}$ függvény

$$\psi_i(x)=x-\frac{1-F_i(x)}{f_i(x)}$$

az i játékos virtuális értékelése.

9.2. Mechanizmus

Valamely konkrét aukció forma meghatározása két dolgot jelent. Definiálnunk kell tetszőleges licit helyzetben, hogy ki az aukció nyertese, azaz hogy kié az árverés tárgya és, hogy ez kinek mekkora fizetési kötelezettséget jelent.

9.1. definíció (Mechanizmus)**.** *Mechanizmusnak* nevezünk egy $(\mathscr{B}, \pi, \mu)$ hármast, ahol

1. $\mathscr{B} \subset \mathbb{R}^N$ egy tetszőlegesen választott, de a továbbiakban rögzített halmaz, amelyet *szignál halmaznak* nevezünk;
2. $\pi : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^N$ az *allokáció függvény*, melynek $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ koordináta függvényeire minden $x \in \mathscr{B}$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$ szignál vektor esetén $0 \leq \pi_i(x) \leq 1$ és $\sum_{i=1}^N \pi_i(x) \leq 1$.
3. $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^N$ a *befizetési függvény*, melynek $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ koordináta függvényei a $\mu_i : \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ függvények.

Egy $b \in \mathscr{B}$ szignál vektor mellett a $(\pi(b), \mu(b))$ párt a mechanizmus egy *kimenetének* mondjuk.

A fenti struktúrához rendelt intuíció valamely aukcióval kapcsolatban a következő.

1. A $\mathscr{B}$ szignálhalmaz az aukció résztvevői által leadható összes licitvektorok halmaza. $b \in \mathscr{B}$ jelentése tehát a $b = (b_1, \ldots, b_N)$ jelölés mellett, hogy b_i az i-edik játékos által leadott licit, azaz jel az ő értékeléséről.
2. A $\pi : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^N$ allokáció függvény i-edik π_i koordináta függvénye azt fejezi ki, hogy a b szignál vektor esetén $\pi_i(b)$ az i játékos nyerésének valószínűsége. Feltűnő, hogy csak $\sum_{i=1}^N \pi_i(b) \leq 1$ -et követelünk meg. Ennek oka, hogy nem akarjuk kizárni azon licitvektorokat, amelyek nem eredményeznek nyertest. Gondoljunk például egy rezervációs ár mellett lejátszott aukcióra. Ha egyetlen játékos licitje sem éri el a rezervációs árat, akkor az aukció lejátszásának szabályai szerint a tárgy a kikiáltónál marad, tehát nincs nyertes.

   Ha az aukció szabályai olyanok, hogy minden olyan $b \in \mathscr{B}$ szignál esetén, amikor van az aukciónak nyertese a nyertes személye egyértelműen meghatározott, akkor a $\pi_i(b), i = 1, \cdots, N$ számok közül egyetlen egynek az értéke 1, a többi pedig 0. Viszont, ha figyelembe vesszük, hogy azonos licitek is lehetségesek, akkor nehéz ilyen szabályozást elképzelni. Emiatt valószínűségek a $\pi_i(b)$ számok. Például, ha az a lejátszás szabálya, hogy az azonos licittel rendelkező nyertesek közt valamilyen szétlövést rendeznek, akkor $\pi_i(b) = 0$ minden nem nyertes i licitálóra, és $\pi_i(b) \leq 1$ minden nyertes i licitálóra olyan módon, hogy a nyertes licitálókra összegezve a $\pi_i(b)$ számokat az összeg 1 legyen.
3. A $\mu : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^N$ függvény i-edik koordináta függvénye egy $b \in \mathscr{B}$ szignál rendszer mellett az i játékos $\mu_i(b)$ fizetési kötelezettségét jelenti. Avval, hogy a játékos

részt vesz az aukción, azt fogadja el, hogy teljesíteni fogja a μ_i befizetési szabály által előírt kötelezettségét.

Példaként érdemes felírni az eddigi konkrét aukciókat mint mechanizmusokat.

Első áras: Egy $b = (b_1, \ldots, b_N)$ licit vektor mellett

$$\begin{aligned} \pi_i(b) &= \begin{cases} 1 & \text{, ha } b_i > \max\left\{b_j : j \neq i\right\}; \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \\ \mu_i(b) &= \pi_i(b) \cdot \max\left\{b_j : j = 1, \ldots, N\right\}. \end{aligned}$$

Első áras r rezervációs árral: Egy $b = (b_1, \ldots, b_N)$ licit vektor mellett

$$\begin{aligned} \pi_i(b) &= \begin{cases} 1 & \text{, ha } b_i > b_j \forall j \neq i \text{ és } b_i \geq r; \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \\ \mu_i(b) &= \pi_i(b) \cdot \max\left\{b_j, r : j = 1, .., N\right\}. \end{aligned}$$

Másod áras: Egy $b = (b_1, \ldots, b_N)$ licit vektor mellett

$$\begin{aligned} \pi_i(b) &= \begin{cases} 1 & \text{, ha } b_i > b_j \forall j \neq i; \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \\ \mu_i(b) &= \pi_i(b) \cdot \max2\left\{b_j : j = 1, .., N\right\}. \end{aligned}$$

Harmad áras: Egy $b = (b_1, \ldots, b_N)$ licit vektor mellett

$$\begin{aligned} \pi_i(b) &= \begin{cases} 1 & \text{, ha } b_i > b_j \forall j \neq i; \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \\ \mu_i(b) &= \pi_i(b) \cdot \max2\left\{b_j : i \neq j, j = 1, .., N\right\}. \end{aligned}$$

Mindenki fizet: Egy $b = (b_1, \ldots, b_N)$ licit vektor mellett

$$\begin{aligned} \pi_i(b) &= \begin{cases} 1 & \text{, ha } b_i > b_j \forall j \neq i; \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \\ \mu_i(b) &= b_i. \end{aligned}$$

Vesztes fizet: Egy $b = (b_1, \ldots, b_N)$ licit vektor mellett

$$\begin{aligned} \pi_i(b) &= \begin{cases} 1 & \text{, ha } b_i > b_j \forall j \neq i; \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases} \\ \mu_i(b) &= (1 - \pi_i(b))\, b_i. \end{aligned}$$

Kivéreztetés: Egy $b = (b_1, \dots, b_N)$ licit vektor mellett

$$\pi_i(b) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } b_i > b_j \forall j \neq i; \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases}$$

$$\mu_i(b) = \begin{cases} \max_{j \neq i} b_j & \text{, ha } b_i > b_j \forall j \neq i; \\ b_i & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

9.2. definíció (stratégia)**.** Legyen $(\mathscr{B}, \pi, \mu)$ egy mechanizmus. Tegyük fel, hogy minden i játékosra adott egy $\beta_i : [0, \omega_i] \to \mathbb{R}$ licitfüggvény. Azt mondjuk, hogy a $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ licitrendszer a mechanizmus egy *stratégiája*, ha a

$$\beta(x) = (\beta_1(x_1), \beta_2(x_2), \dots, \beta_N(x_N))$$

definícióval bevezetett együttes licitfüggvény értékei a $\mathscr{B}$ halmazba esnek, azaz, ha $\beta : \Xi \to \mathscr{B}$.

9.3. definíció (igazmondás stratégia)**.** Amennyiben az értékelések halmaza a szignál halmaz részhalmaza, azaz $\Xi \subseteq \mathscr{B}$, a $\beta : \Xi \to \mathscr{B}, \beta(x) = x$ identitás függvény egy stratégia és ezt nevezzük az *igazmondás stratégiának*.

Jelölésbeli kellemetlenség, hogy amennyiben $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ egy függvény, akkor az i-edik koordináta függvényt $\beta_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ módon szokás jelölni, azaz a $\beta_i(x) \in \mathbb{R}$ szám a $\beta(x) \in \mathbb{R}^N$ vektor i-edik koordinátája. Itt viszont éppen fordítva a β_i függvények adottak a β definíciója előtt, és ezek segítségével definiáltuk β-t. Formálisan tehát a β_i jel két különböző objektumot jelöl. Ha β_i argumentuma egy x vektor, akkor $\beta_i(x)$ a fent bevezetett együttes licitfüggvény i-edik koordináta függvényének értékét jelöli, ha pedig β_i argumentuma egy x_i szám, akkor $\beta_i(x_i)$ az i-edik játékosnak az x_i értékeléséhez tartozó licitjét jelenti.
Ilyen módon minden $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Xi$ értékelés mellett

$$\beta_i(x) = \beta_i(x_i).$$

Ennek megfelelően $\beta_{-i}(x_{-i}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ azt a vektort jelöli, amelyet a $\beta(x) = (\beta_1(x_1), \dots, \beta_N(x_N)) \in \mathbb{R}^N$ vektor i-edik koordinátájának elhagyásával kapunk.

9.4. definíció (egyensúlyi stratégia)**.** A $\beta : \Xi \to \mathscr{B}$ stratégia egy *egyensúlyi stratégiája* a $(\mathscr{B}, \pi, \mu)$ mechanizmusnak, ha minden $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Xi$ értékelésre és minden i játékosra a

$$b \mapsto \pi_i(b) x_i - \mu_i(b) \tag{9.1}$$

$\mathscr{B} \to \mathbb{R}$ függvénynek a $b = \beta(x)$ pontban az i-edik koordináta irányában maximuma van. Ez azt jelenti, hogy minden i mellett a

$$\pi_i(\beta(x)) x_i - \mu_i(\beta(x)) \geq \pi_i(\beta_{-i}(x_{-i}), b_i) x_i - \mu_i(\beta_{-i}(x_{-i}), b_i)$$

egyenlőtlenség minden b_i mellett fennáll, amelyre $(\beta_{-i}(x_{-i}), b_i) \in \mathscr{B}$.

9.5. definíció. Az $(\mathscr{B}, \pi, \mu)$ mechanizmus β egyensúlyi stratégiája melletti *egyensúlyi kimenetek* halmaza, az

$$\{(\pi(\beta(x)), \mu(\beta(x))) : x \in \Xi\} \subseteq [0,1]^N \times \mathbb{R}^N$$

halmaz.

A (9.1) függvény interpretációja nyilvánvaló. A $b \in \mathscr{B}$ licit helyzetben $\pi_i(b)$ az i játékos nyerési valószínűsége, tehát a b licit vektor az i számára $\pi_i(b) \cdot x_i$ bevételt jelent, ami $\mu_i(b)$ kiadással jár. Így a fent kiemelt (9.1) voltaképpen a kockázatok iránt semleges i játékos profitja a licitvektor függvényében.

A profitfüggvény eddigi jelöléseivel összhangba jutunk, ha bevezetjük az i-edik játékos profitfüggvényét valamely rögzített $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$ licitfüggvények mellett. Jelölje

$$\Pi_i(b_i, x_i) = \pi_i(\beta_{-i}(x_{-i}), b_i) x_i - \mu(\beta_{-i}(x_{-i}), b_i),$$

ahol $x_{-i} \in \Xi_{-i}$ rögzítve van.
A $\Pi_i(b_i, x_i)$ azt fejezi ki, hogy ha a $j \neq i$ játékosok az ő x_j értékelésük esetén a $\beta_j(x_j)$ szignált mint licitet közvetítik, akkor az i játékos b_i licitje az i játékos számára $\Pi_i(b_i, x_i)$ profitot eredményez.
A definíciót úgy is fogalmazhatjuk, hogy a β pontosan akkor egyensúlyi licitrendszer, ha az értékelések minden $x \in \Xi, x = (x_1, \ldots, x_N)$ esetére a

$$b_i \mapsto \Pi_i(b_i, x_i)$$

függvényeknek $b_i = \beta_i(x_i)$ pontban maximuma van, valamennyi $i = 1, \ldots, N$ játékos mellett.

9.3. Revelációs elv

9.6. definíció (direkt-mechanizmus)**.** Egy mechanizmust *direkt-mechanizmusnak* nevezünk, ha a szignál halmaz azonos az értékelések halmazával. Egy direkt-mechanizmus szignál halmazát nem szokás kiírni, így ha (Q, M) jelöli a direkt-mechanizmust, akkor $Q : \Xi \to \mathbb{R}^N$ az allokációs szabály, és $M : \Xi \to \mathbb{R}^N$ a befizetési szabály.

Érdemes felírni, hogy mit jelent egy direkt-mechanizmusban, ha az igazmondás egy egyensúlyi stratégia. Minden $x \in \Xi$ értékelésre és minden i játékosra a

$$Q_i(x) x_i - M_i(x) \geq Q_i(x_{-i}, t) x_i - M(x_{-i}, t)$$

egyenlőtlenség minden $t \in [0, \omega_i]$ mellett teljesül.

9.7. állítás. *Legyen β a $(\mathscr{B},\pi,\mu)$ mechanizmus egy egyensúlyi stratégiája. Jelölje*

$$Q=\pi\circ\beta \quad \text{és} \quad M=\mu\circ\beta.$$

Ekkor (Q,M) olyan direkt-mechanizmus, melynek az igazmondás egy egyensúlyi stratégiája, és a $(\mathscr{B},\pi,\mu)$ mechanizmus β egyensúlyi stratégiáihoz tartozó egyensúlyi kimenetelek azonosak a (Q,M) direkt-mechanizmus igazmondás melletti egyensúlyi kimeneteleivel.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy bárhogy is rögzítsük az $x\in\Xi$ értékelésvektort, úgy minden i játékosra a $t\in[0,\omega_i]$

$$t\mapsto Q_i(x_{-i},t)x_i-M_i(x_{-i},t)$$

függvény az x_i pontban maximális. No de azt tudjuk, hogy β egyensúlyi stratégia, ezért

$$\pi_i(\beta(x))x_i-\mu_i(\beta(x))\geq\pi_i(\beta_{-i}(x_{-i}),\beta_i(t))x_i-\mu_i(\beta_{-i}(x_{-i}),\beta_i(t)).$$

Mivel a $Q=\pi\circ\beta$ kompozíció i-edik koordináta függvénye $\pi_i\circ\beta$, és az $M=\mu\circ\beta$ kompozíció i-edik koordináta függvénye $\mu_i\circ\beta$, ezért a jobb oldal ekvivalens a

$$\pi_i(\beta(x_{-i},t))x_i-\mu_i(\beta(x_{-i},t))=Q_i(x_{-i},t)x_i-M_i(x_{-i},t)$$

kifejezéssel, míg a bal oldal ekvivalens átalakítása:

$$Q_i(x)x_i-M_i(x)=Q_i(x_{-i},x_i)x_i-M_i(x_{-i},x_i).$$

Pont ezt kellett belátnunk.

A (Q,M) persze egy direkt-mechanizmus, amelynek az igazmondó stratégiához tartozó egyensúlyi kimenetelei a $(Q(x),M(x))=(\pi(\beta(x)),\mu(\beta(x)))$ alakú párok. $\square$

10.

ÖSZTÖNZŐ MECHANIZMUS

HA A JÁTÉKOS p valószínűséggel nyeri a számára x értékű tárgyat, és ehhez m várható befizetés társul, akkor a profitja

$$qx - m.$$

Hasonlóan, ha $q(z)$ jelöli a tárgy megnyerésének valószínűségét, a z szinten kinyilvánított kiértékelés mellett, és ha $m(z)$ a z értékelés implikálta várható költség, akkor

$$q(z)x - m(z)$$

a várható profitja annak a licitálónak, aki x értékeléssel rendelkezik, de x helyett z-re cseréli értékelése kinyilvánítását.

A revelációs elv motivációja szerint szép lenne, ha ennek a függvénynek mindig $z = x$-ben maximuma lenne. Ez azonban nem minden direkt-mechanizmusra áll fenn.

A fejezet arról szól, hogy ez a racionalitási elvárásunk lényegében éppen azokra az aukciókra teljesül, amelyekre a bevételekvivalencia-elvet is általánosítani tudjuk.

10.1. Az ösztönző mechanizmus definíciója

10.1. definíció. Legyen (Q, M) egy direkt-mechanizmus. Definiálja $q_i : [0, \omega_i] \to \mathbb{R}$ és $m_i : [0, \omega_i] \to \mathbb{R}$ az alábbi függvényeket

$$\begin{aligned} q_i(z) &= E(Q_i(z, X_{-i})) = \int_{\Xi_{-i}} Q_i(z, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i}, \\ m_i(z) &= E(M_i(z, X_{-i})) = \int_{\Xi_{-i}} M_i(z, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i}. \end{aligned}$$

10.2. definíció (ösztönző mechanizmus)**.** Egy (Q, M) direkt-mechanizmust *ösztönzőnek* nevezünk, ha minden $i = 1, \dots, N$ mellett és minden $x_i \in [0, \omega_i]$-re a

$$z_i \mapsto q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)$$

függvény x_i-ben veszi fel a $[0, \omega_i]$ intervallum feletti maximumát.

Természetesen merül fel a kérdés, hogy adjunk példát $m, q : [0, \omega] \to \mathbb{R}$ függvényekre, amelyre igaz, hogy a

$$z \mapsto q(z)x - m(z)$$

függvény éppen x-ben maximális, de tetszőleges $x \in [0, \omega]$ mellett. Ha még differenciálhatóságot is felteszünk, akkor a szélsőérték elsőrendű feltételéből azonnal kapjuk, hogy ilyen függvényekre $m'(x) = q'(x)x$ szükségképpen fennáll, amiből

$$m(x) - m(0) = \int_0^x m'(t)\, dt = \int_0^x q'(t)t\, dt = q(x)x - \int_0^x q(t)\, dt$$

adódik egy parciális integrálás után.

Most azt mutatjuk meg, hogy ha q még monoton növekedő is, akkor a fenti szükséges feltétel már elegendővé válik. Mi több, a (q,m) függvény páros pontosan akkor teljesíti a szóban forgó racionalitási feltételt, ha q egy monoton növekedő függvény és

$$m(x) = m(0) + q(x)x - \int_0^x q(z)\,dz$$

fennáll minden $x \in [0,\omega]$ mellett.

Összefoglalásképpen azt mondhatjuk tehát, hogy csak monoton növekedő q mellett van esély a (q,m) racionalitására és ekkor m konstanstól eltekintve egyértelműen meghatározott a q által.

10.2. Kapcsolat a bevételekvivalencia-elvvel

Egy direkt-mechanizmus ösztönzőségének ekvivalens felírásai következnek.

10.3. definíció (egyensúlyi hasznosság függvény, vagy várható egyensúlyi hasznosság függvény)**.** Definiálja minden $i = 1,\ldots,N$ mellett

$$U_i(x_i) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$$

az *egyensúlyi hasznosság függvényt.*

10.4. állítás. *Egy (Q,M) direkt-mechanizmus mellett az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

1. *(Q,M) egy ösztönző direkt-mechanizmus,*

2. *Minden i játékosra és bármely két $x_i, z_i \in [0,\omega_i]$ értékelésre*

$$U_i(x_i) \geq q_i(z_i)x_i - m_i(z_i),$$

3. *Minden i játékosra és minden $x_i \in [0,\omega_i]$ értékelésre az $(x_i, U_i(x_i))$ pontban húzott $q_i(x_i)$ meredekségű egyenes egy támaszegyenese az U_i függvénynek, azaz minden $z_i \in [0,\omega_i]$ mellett*

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i),$$

4. *Minden i mellett a*

   a) *q_i függvény monoton növő, és*

   b) *U_i függvény a q_i egy integrálfüggvénye, azaz minden $x_i \in [0,\omega_i]$ értékelésre*

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(z)\,dz,$$

5. Minden i mellett a

a) q_i függvény monoton növő, és

b) teljesül a REP egyenlőség, azaz minden $x_i \in [0, \omega_i]$ értékelésre

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(z)\,dz. \qquad \text{(REP)}$$

Bizonyítás. Az állítások ekvivalens voltát körbe igazoljuk. A bizonyítás az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények konvexitásának jellemzésén alapul. [1]

$1 \to 2$: A feltevés, hogy tetszőleges x_i mellett a $z_i \mapsto q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)$ függvény éppen x_i-ben vesz fel maximumát azt jelenti, hogy

$$q_i(z_i)x_i - m_i(z_i) \leq q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) = U_i(x_i).$$

$2 \to 3$: Mivel a fenti egyenlőtlenség minden $x_i, z_i \in [0, \omega_i]$ mellett fennáll, ezért a két változót felcserélve

$$U_i(z_i) \geq q_i(x_i)z_i - m_i(x_i) = q_i(x_i)z_i - q_i(x_i)x_i + q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) = \\ U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i).$$

$3 \to 4$: Az U_i függvénynek tehát minden x_i pontban van támaszegyenese, melynek meredeksége $q_i(x_i)$. Az U_i tehát egy konvex függvény, amelynek bal- és jobboldali deriváltja közt van $q_i(x_i)$. Mivel egy konvex függvénynek mind a bal- mind a jobboldali deriváltja monoton nő, ezért q_i is monoton nő. Monoton növő függvény Riemann-integrálható és tudjuk, hogy egy konvex függvény tetszőleges a bal- és a jobb oldali deriváltja közti függvény integrálfüggvénye.

$4 \to 5$: Kiindulva abból, hogy U_i a q_i egy integrálfüggvénye azt kapjuk, hogy

$$q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) = U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(z_i)\,dz_i = -m_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(z_i)\,dz_i.$$

Ezt átrendezve éppen a (REP) azonosságot kapjuk.

[1] Mivel nem teljesen közismert az a tény, hogy egy ilyen függvény pontosan akkor konvex, ha valamely a bal- és a jobb oldali deriváltja közti függvény integrálfüggvénye, ezért a függelék tartalmazza ennek rövid tárgyalását.

$5 \to 1$: Először is felírva a (REP) azonosságot tetszőleges $z_i, x_i \in [0, \omega_i]$ mellett

$$\begin{aligned} m_i(z_i) &= m_i(0) + z_i q_i(z_i) - \int_0^{z_i} q_i(t)\,dt, \\ m_i(x_i) &= m_i(0) + x_i q_i(x_i) - \int_0^{x_i} q_i(t)\,dt. \end{aligned}$$

A két egyenlet különbségét képezve

$$m_i(z_i) - m_i(x_i) = z_i q_i(z_i) - x_i q_i(x_i) - \int_{x_i}^{z_i} q_i(t)\,dt.$$

No de a q_i függvények monotonitása szerint

$$\int_{x_i}^{z_i} q_i(t)\,dt \le q_i(z_i)(z_i - x_i),$$

tehát folytatva

$$m_i(z_i) - m_i(x_i) \ge z_i q_i(z_i) - x_i q_i(x_i) - q_i(z_i)(z_i - x_i) = q_i(z_i)x_i - x_i q_i(x_i).$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$x_i q_i(x_i) - m_i(x_i) \ge q_i(z_i)x_i - m_i(z_i),$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $z_i \mapsto q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)$ függvény az x_i pontban maximális.

Ezt kellett belátni. □

A fenti igazolásból látható, hogy egy ösztönző mechanizmus egyensúlyi hasznosság függvényei konvex és monoton növő függvények, amelyekre $U_i(0) = -m_i(0)$.

A fenti ekvivalens feltevések közül az 5.-re tekintünk úgy, mint a bevétel-ekvivalencia-elv általánosítására. A (REP) azonosságot ugyanis úgy interpretálhatjuk, hogy ösztönző (Q, M) direkt-mechanizmus mellett az m_i várható befizetés lényegében csak a Q allokációs szabálytól függ: Adott Q allokáció mellett tetszőleges olyan M befizetési szabállyal, amely (Q, M) mechanizmust ösztönzővé teszi, a kapott m_i várható befizetések alakja ugyanaz, ezek egymástól csak egy konstans eltolásban különböznek.

10.3. Egzisztencia

Miután szép, szükséges és elégséges feltételeket találtunk egy direkt-mechanizmus ösztönző voltára, rátérünk annak vizsgálatára, hogy adott allokációs szabályhoz milyen feltételek mellett definiálható olyan befizetési szabály, amellyel a kapott direkt-mechanizmus ösztönzővé válik. Jól használható elegendő feltételt kapunk: Ha az allokációs szabály olyan, hogy a többiek fix értékelése mellett nagyobb értékelés nem csökkenti az aktuális licitáló nyerési valószínűségét, akkor mindig definiálható olyan befizetési függvény, amely a mechanizmust ösztönzővé varázsolja.

10.5. állítás. *Legyen Q egy tetszőleges allokációs szabály.*

1. *Definiálja*
$$M_i(x) = Q_i(x)x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z, x_{-i})\, dz.$$
Ha $M = (M_1, \ldots, M_N)$, akkor a (Q, M) direkt-mechanizmusban $m_i(0) = 0$-val áll fenn a (REP) azonosság, tehát minden $x_i \in [0, \omega_i]$ mellett
$$m_i(x_i) = q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(z)\, dz$$
teljesül.

2. *A Q allokációs szabályhoz pontosan akkor található olyan M befizetési szabály, melyre a (Q, M) mechanizmus ösztönző, ha a q_i függvények monoton nőnek minden i mellett.*

3. *Speciálisan, ha minden i mellett és minden rögzített $x_{-i} \in \Xi_{-i}$ vektor esetén a*
$$z \mapsto Q_i(z, x_{-i})$$
függvény monoton növő, akkor a fenti M befizetés szabállyal (Q, M) egy ösztönző direkt-mechanizmus.

Bizonyítás. Definíció szerint $m_i(x_i) = \int_{\Xi_{-i}} M(x_i, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i}$. Így a Fubini–tétel és q_i definíciója miatt

$$\begin{aligned} m_i(x_i) &= \int_{\Xi_{-i}} \left(x_i Q_i(x_i, x_{-i}) - \int_0^{x_i} Q_i(z, x_{-i})\, dz \right) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i} = \\ &x_i \int_{\Xi_{-i}} Q_i(x_i, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i} - \int_{\Xi_{-i}} \int_0^{x_i} Q_i(z, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dz dx_{-i} = \\ &\quad x_i q_i(x_i) - \int_0^{x_i} \int_{\Xi_{-i}} Q_i(z, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})\, dx_{-i} dz = x_i q_i(x_i) - \int_0^{x_i} q_i(z)\, dz. \end{aligned}$$

Teljesül tehát a bizonyítandó egyenlőség.

Összefoglalva: ha q_i függvények monoton növők, akkor a befizetési függvény fenti definíciójával teljesül az előző állítás 5. pontja, ergo a definiált (Q, M) direkt-mechanizmus ösztönző.

Fordítva, ha valahogyan definiálható az adott allokációs szabályhoz olyan befizetési szabály, amellyel a kapott direkt-mechanizmus ösztönző, akkor szintén az előző állítás 4. vagy 5. pontja miatt valamennyi q_i függvény monoton növő.

Legyen most $x_{-i} \in \Xi_{-i}$ és $0 \le z < w \le \omega_i$. Ekkor $Q(z, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i}) \le Q(w, x_{-i}) f_{-i}(x_{-i})$, ezért e függvények Ξ_{-i} feletti integráljaira is igaz ez az egyenlőtlenség, ami éppen azt jelenti, hogy $q_i(z) \le q_i(w)$. Ezt kellett belátni. □

10.4. A kikiáltó bevétele

Mivel a kikiáltó bevétele egészen nyilvánvaló módon csak az aukció résztvevőitől származik, azaz csak az m_i várható befizetési függvényektől függ, továbbá az m_i befizetések konstanstól eltekintve csak a Q allokációtól függenek egy ösztönző mechanizmus mellett, ezért a kikiáltó várható árbevételét is meghatározza a Q allokációs szabály, ahogyan azt korábban a bevételekvivalencia-elvet kielégítő konkrét aukcióknál is láttuk. Az állításnak fontos érdekessége, hogy újra megjelenik a virtuális értékelés koncepciója. Később ennek a gondolatnak az alapján kapjuk a virtuális értékelés érdekes interpretációit. Az állítás igazolása után ennek egy előrehozott példáját adjuk, arra a már vizsgált esetre vonatkozólag, amikor a licitálók azonos értékeloszlással rendelkeznek.

10.6. állítás. *Legyen (Q,M) egy ösztönző direkt-mechanizmus. Ekkor a kikiáltónak az i-edik játékostól származó várható haszna*

$$E\left(m\left(X_i\right)\right) = m_i\left(0\right) + \int_{\Xi} Q_i\left(x\right) f\left(x\right) \psi_i\left(x_i\right) dx,$$

ahol ψ_i az i játékos virtuális értékelése. Így a kikiáltó várható bevételére

$$E\left(R\right) = \sum_{i=1}^{N} E\left(m_i\left(X_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(0\right) + \int_{\Xi} \left(\sum_{i=1}^{N} Q_i\left(x\right) \psi_i\left(x_i\right)\right) f\left(x\right) dx.$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy ösztönző mechanizmusra teljesül a bevételekvivalencia-elv, tehát minden i játékosra és annak minden $x_i \in [0,\omega_i]$ értékelésére

$$m_i\left(x_i\right) = m_i\left(0\right) + q_i\left(x_i\right) x_i - \int_0^{x_i} q_i\left(z\right) dz.$$

A transzformált valószínűségi változó formulája miatt, ezért

$$E\left(m_i\left(X_i\right)\right) = \int_0^{\omega_i} m_i\left(x_i\right) f_i\left(x_i\right) dx_i =$$
$$\int_0^{\omega_i} m_i\left(0\right) f_i\left(x_i\right) dx_i + \int_0^{\omega_i} q_i\left(x_i\right) x_i f_i\left(x_i\right) dx_i - \int_0^{\omega_i}\int_0^{x_i} q_i\left(z\right) dz f_i\left(x_i\right) dx_i.$$

A kettős integrál a Fubini-tétel miatt

$$\int_0^{\omega_i}\int_0^{x_i} q_i\left(z\right) dz f_i\left(x_i\right) dx_i = \int_0^{\omega_i}\int_0^{\omega_i} \chi_{[0,x_i]}\left(z\right) q_i\left(z\right) f_i\left(x_i\right) dz dx_i =$$
$$\int_0^{\omega_i}\int_0^{\omega_i} \chi_{[z,\omega_i]}\left(x_i\right) q_i\left(z\right) f_i\left(x_i\right) dx_i dz = \int_0^{\omega_i} q_i\left(z\right) \int_z^{\omega_i} f_i\left(x_i\right) dx_i dz =$$
$$\int_0^{\omega_i} q_i\left(z\right)\left(1 - F_i\left(z\right)\right) dz.$$

A virtuális értékelés $\psi_i = \mathrm{id} - \frac{1-F_i}{f_i}$ bevezetésével folytatva, majd újra a Fubini-tételt használva kapjuk kívánt formulát.

$$\begin{aligned}
E\left(m\left(X_i\right)\right) &= m_i\left(0\right) + \int_0^{\omega_i} q_i\left(x_i\right) x_i f_i\left(x_i\right) - q_i\left(x_i\right)\left(1 - F_i\left(x_i\right)\right) dx_i \\
&= m_i\left(0\right) + \int_0^{\omega_i} q_i\left(x_i\right) f_i\left(x_i\right)\left(x_i - \frac{1 - F_i\left(x_i\right)}{f_i\left(x_i\right)}\right) dx_i \\
&= m_i\left(0\right) + \int_0^{\omega_i} q_i\left(x_i\right) f_i\left(x_i\right) \psi_i\left(x_i\right) dx_i \\
&= m_i\left(0\right) + \int_0^{\omega_i} \left(\int_{\Xi_{-i}} Q_i\left(x_i, x_{-i}\right) f_{-i}\left(x_{-i}\right) dx_{-i}\right) f_i\left(x_i\right) \psi_i\left(x_i\right) dx_i \\
&= m_i\left(0\right) + \int_{\Xi} Q_i\left(x\right) f\left(x\right) \psi_i\left(x_i\right) dx.
\end{aligned}$$

Ezek összegére felírt formula már nyilvánvaló. □

Mielőtt folytatnánk az aszimmetrikus eset vizsgálatát, magunknak egy pillanat kitérőt megengedve, alkalmazzuk a fenti eredményt szimmetrikus helyzetben, reguláris játékosokkal. Például egy másodáras aukcióra is teljesülnek az alábbi feltételek.

10.7. *megjegyzés.* Legyen most a (Q, M) ösztönző direkt-mechanizmus hatékony. Tegyük fel, hogy a játékosok eloszlása azonos, és a közös virtuális értékelésük szigorúan monoton növő függvény. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i\left(x\right) \psi\left(x_i\right) = \max\left\{\psi\left(x_1\right), \psi\left(x_2\right), \ldots, \psi\left(x_N\right)\right\},$$

ezért ha még azt is feltesszük, hogy $m_i\left(0\right) = 0$ minden játékos mellett, akkor

$$E\left(R\right) = E\left(\max\left\{\psi\left(X_1\right), \psi\left(X_2\right), \ldots, \psi\left(X_N\right)\right\}\right).$$

Bizonyítás. A mechanizmus hatékonysága azt jelenti, hogy az aukció nyertese a legnagyobb értékelésű játékos, tehát

$$Q_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x_i > x_j \text{ minden } i \neq j; \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Így $\sum_{i=1}^{N} Q_i(x)\psi_i\left(x_i\right) = \psi\left(x_k\right)$ arra a k indexre, amelyre $x_k > x_i$ minden $i \neq k$ mellett. Persze a regularitás feltevése szerint $x_k > x_i$ ekvivalens $\psi\left(x_k\right) > \psi\left(x_i\right)$ feltétellel, így

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i\left(x\right) \psi\left(x_i\right) = \psi(x_k) = \max\left\{\psi\left(x_1\right), \ldots, \psi\left(x_N\right)\right\}.$$

Ezt kellett belátni. □

A nyilvánvaló értelmezés tehát, hogy a fenti esetben a kikiáltó várható bevétele úgy is tekinthető, mintha a virtuális értékelésekkel mint licitfüggvényekkel játszanának a játékosok egy elsőáras aukciót.

11.

OPTIMÁLIS MEGVALÓSÍTHATÓ MECHANIZMUS

A FEJEZETBEN AZT keressük, hogy bizonyos újabb észszerű racionalitási feltevés mellett, mi a kikiáltó várható hasznának maximuma. Ez a feltevés azt jelenti, hogy a licitálóktól nem elvárható, hogy megjelenjenek olyan aukción, amely számukra negatív hasznossággal jár.

11.1. Megvalósítható direkt-mechanizmus

Visszatérve az általános esetre, egy nyilvánvaló becslés adható a 10.6. állításbeli függvényre.

11.1. állítás. *Tekintsük a (Q,M) direkt-mechanizmust és legyen ψ_i az i játékos virtuális értékelése. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i(x)\,\psi_i(x_i) \leq \max\{\psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \ldots, \psi_N(x_N), 0\}.$$

Bizonyítás. Világos, hogy $\psi_i(x_i) \leq \psi_i(x_i) \vee 0 \leq \max\{\psi_k(x_k) \vee 0 : k = 1, \ldots, N\}$. Így a $Q_i(x) \geq 0$ szerint

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} Q_i(x)\,\psi_i(x_i) &\leq \sum_{i=1}^{N} Q_i(x) \max\{\psi_k(x_k) \vee 0 : k = 1, \ldots, N\} \\
&= \max\{\psi_k(x_k) \vee 0 : k = 1, \ldots, N\} \sum_{i=1}^{N} Q_i(x) \\
&\leq \max\{\psi_k(x_k) \vee 0 : k = 1, \ldots, N\}.
\end{aligned}$$

Ezt kellett belátni. □

11.2. definíció (egyénileg racionális)**.** Azt mondjuk, hogy a (Q,M) direkt-mechanizmus *egyénileg racionális*, ha minden i mellett $U_i \geq 0$.

Egy ösztönző mechanizmus mellett $U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(z)\,dz$. Mivel itt q egy valószínűség, ergo nem negatív, ezért minden U_i egy-egy monoton növő függvény. Így figyelembe véve az $U_i(x_i) = q_i(x_i)\,x_i - m_i(x_i)$ definíciót, $U_i(0) = -m_i(0)$. Emiatt az

$$U_i \geq 0; \quad U_i(0) \geq 0; \quad m_i(0) \leq 0$$

ekvivalens feltételek egy ösztönző mechanizmus mellett.

11.3. állítás. *Egy (Q,M) direkt-mechanizmus pontosan akkor egyszerre ösztönző és egyénileg racionális, ha minden $i = 1, \cdots, N$ mellett a*

1. *q_i monoton növő,*
2. *$m_i(x_i) = m_i(0) + x_i q_i(x_i) - \int_0^{x_i} q_i(t)\,dt$,*

3. $m_i(0) \leq 0$

feltételek egyszerre teljesülnek.

11.4. definíció (megvalósítható)**.** Egy direkt-mechanizmust *megvalósíthatónak* nevezünk, ha az ösztönző és egyénileg racionális.

Látjuk tehát, hogy egy megvalósítható mechanizmus annyival több, mint egy ösztönző mechanizmus, hogy kizárja az $m_i(0) > 0$ eset lehetőségét. Ez úgy interpretálható, hogy a 0 értékelés mellett nem lehet pozitív a várható költség, ami annyit tesz, hogy minden játékos számára megengedett dolog az aukciótól való távolmaradás.

Az eddigi eredményeink összefoglalása a következő állítás.

11.5. állítás. *Legyen (Q, M) egy megvalósítható direkt-mechanizmus. Ekkor ennek várható bevételére*

$$E(R) \leq E(\max\{\psi_1(X_1), \psi_2(X_2), \ldots, \psi_N(X_N), 0\}).$$

Bizonyítás. Mivel ösztönző a mechanizmus, ezért 10.6. állítás és a tetszőleges mechanizmusra is fennálló 11.1. állítás szerint

$$E(R) \leq \sum_{i=1}^{N} m_i(0) + \int_{\Xi} \max\{\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_N), 0\} f(x)\, dx =$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(0) + E(\max\{\psi(X_1), \ldots, \psi(X_N), 0\}).$$

Ha a mechanizmus még egyénileg racionális is, akkor $m_i(0) \leq 0$, így a fenti összeg első tagja nem pozitív. □

11.2. Példa a kikiáltó számára maximális bevételt adó megvalósítható mechanizmusra

Most arra törekszünk, hogy olyan megvalósítható direkt-mechanizmust konstruáljunk, amelyre a fenti egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül.

Első lépésként arra emlékezzünk, hogy tetszőleges allokációhoz definiálható olyan befizetési szabály, amivel a mechanizmus teljesíti a bevételekvivalencia-elvet. Ha az allokációs szabály még olyan is, hogy az i-edik értékelés növelésével az i-edik játékos nyerési valószínűsége nem csökken, akkor az így kapott mechanizmus ösztönző.

A következő definíció egyben állítás is, ezért igazolásra szorul.

11.6. definíció (optimális megvalósítható mechanizmus)**.** Reguláris modell mellett

$$Q_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{, ha} \quad \psi_i(x_i) = \psi_{i_1}(x_{i_1}) = \cdots = \psi_{i_k}(x_{i_k}) \\ & \qquad\quad = \max\{\psi_k(x_k) : k = 1, \ldots, N\}, \\ & \quad \text{és ha} \quad \psi_i(x_i) \geq 0; \\ 0 & \text{, egyébként,} \end{cases}$$

és

$$M_i(x) = Q_i(x)x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z, x_{-i})\, dz.$$

Legyen $M = (M_1, \ldots, M_N)$ és hasonlóan $Q = (Q_1, \ldots, Q_N)$.

Ekkor (Q, M) egy olyan megvalósítható mechanizmus, amelyre $m_i(0) = 0$ fennáll minden i játékos mellett.

Bizonyítás. A $Q_i(x) = \frac{1}{k}$ azt jelenti, hogy a $(\psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \ldots, \psi_N(x_N))$ vektor koordinátái közül $\psi_i(x_i)$ az egyik legnagyobb és az i-ediket is beleértve éppen k darab legnagyobb van, amelyek nem lehetnek negatívak. Így csak az

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i(x) = 0 \quad \text{vagy} \quad \sum_{i=1}^{N} Q_i(x) = k\frac{1}{k} = 1$$

esetek fordulhatnak elő, ezért Q valóban egy allokációs függvény. Így (Q, M) egy mechanizmus, amelyre

$$m_i(0) = 0 \quad \text{és} \quad m_i(x_i) = m_i(0) + x_i q_i(x_i) - \int_0^{x_i} q_i(z)\, dz$$

a 10.5. állítás szerint.

Most megmutatjuk, hogy minden rögzített $x_i \in \Xi_{-i}$ vektorra a

$$z \mapsto Q_i(z, x_{-i})$$

függvény monoton növő. Legyen tehát $z < w$. Ha $Q_i(z, x_{-i}) = 0$, akkor $Q_i(z, x_{-i}) = 0 \leq Q_i(w, x_{-i})$ nyilvánvalóan fennáll. Ha viszont $Q_i(z, x_{-i}) = \frac{1}{k}$, akkor $\psi_i(z) < \psi_i(w)$ miatt $Q_i(w, x_{-i}) = 1$. Ez azt jelenti, hogy $Q_i(z, x_{-i}) \leq 1 = Q_i(w, x_{-i})$ megint csak nyilvánvalóan teljesül. Innen már nyilvánvalóan következik a q_i függvények monotonitása.

A 11.3. állítás szerint tehát a mechanizmus megvalósítható, sőt az $m_i(0) = 0$ feltételek is teljesülnek. □

Mivel a 10.6. állítás szerint a kikiáltó várható bevételére a

$$E(R) = \sum_{i=1}^{N} m_i(0) + \int_{\Xi} \left(\sum_{i=1}^{N} Q_i(x)\, \psi_i(x_i) \right) f(x)\, dx$$

formula áll fenn minden ösztönző mechanizmus mellett, ezért az teljesen nyilvánvaló, hogy a megvalósítható mechanizmusok körére szorítkozva, olyan mechanizmus biztosítja a kikiáltó maximális várható bevételét, amelyre $m_i(0) = 0$ áll fenn minden licitáló mellett. Ebben az értelemben nyilvánvaló, hogy a 11.6. definícióban megadott példa egyben optimális mechanizmus is.

A következő állítás egyrészt ezt szögezi le, másrészt a virtuális értékelések segítségével megteremti annak lehetőségét, hogy jobban megértsük a 11.6. definíciót.

11.7. állítás. *Reguláris modellben a 11.6. definícióban megadott megvalósítható mechanizmus adja a kikiáltó legnagyobb bevételét. A*

$$\max\{E(R):(Q,M)\ \textit{megvalósítható mechanizmus}\}$$

feladat a 11.6. definícióbeli mechanizmus mellett maximális és az értéke:

$$E(R)=E(\max\{\psi_1(X_1),\psi_2(X_2),\dots,\psi_N(X_N),0\}).$$

Bizonyítás. A 11.5. állítás szerint minden (Q,M) megvalósítható mechanizmusra

$$E(R)\le E(\max\{\psi_1(X_1),\psi_2(X_2),\dots,\psi_N(X_N),0\}).$$

Legyen most (Q,M) a 11.6. definíció szerint megadva. Először is vegyük észre, hogy valamely i mellett $Q_i(x)>0$ pontosan akkor teljesül, ha $\psi_i(x_i)=\max\{\psi_1(x_1),\dots,\psi_N(x_N)\}\ge 0$. Emiatt

$$\sum_{i=1}^{N}Q_i(x)\,\psi_i(x_i)=\max\{\psi_1(x_1),\dots,\psi_N(x_N),0\}.$$

Ugyanis, ha minden i mellett $\psi_i(x_i)<0$, akkor a bal és a jobb oldal is zérus. Ha van olyan i, amelyre $\psi_i(x_i)\ge 0$, akkor

$$\sum_{i=1}^{N}Q_i(x)\,\psi_i(x_i)=\sum_{\substack{i=1\\ \psi_i(x_i)\ge 0}}^{N}Q_i(x)\,\psi_i(x_i)=k\frac{1}{k}\max\{\psi_1(x_1),\psi_2(x_2),\dots,\psi_N(x_N)\},$$

ahol k-szor fordul elő egyenlőség a $(\psi_1(x_1),\dots,\psi_N(x_N))$ vektorban. Így a kikiáltó várható bevételére a 10.6. állítás szerint

$$E(R)=\sum_{i=1}^{N}m_i(0)+\int_{\Xi}\left(\sum_{i=1}^{N}Q_i(x)\,\psi_i(x_i)\right)f(x)\,dx=$$
$$\int_{\Xi}\max\{\psi_1(x_1),\dots,\psi_N(x_N),0\}\,f(x)\,dx=E(\max\{\psi_1(X_1),\dots,\psi_N(X_N),0\}).$$

Ezt kellett belátni. □

11.3. Az optimális megvalósítható mechanizmus interpretációi

Próbáljunk most a 11.6. definíció optimális megvalósítható mechanizmusához intuitív értelmezést találni. Az allokációs szabály jelentése nyilvánvaló. Adott $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Xi$ értékelés vektor mellett írjuk fel a virtuális értékelés vektort: $(\psi_1(x_1), \ldots, \psi_N(x_N)) \in \mathbb{R}^N$. Ha minden virtuális értékelés negatív, akkor nem nyer senki. Ha van legalább zérus virtuális értékelés, akkor a legnagyobb virtuális értékelésű játékos nyer. Pontosabban ő 1 valószínűséggel nyer, ha egyedül birtokolja a legnagyobb virtuális értékelésű címet, de ha több ilyen is van, mondjuk k darab, akkor $1/k$ valószínűséggel nyernek a maximális virtuális értékelésű játékosok.

A befizetési szabályról annyit láttunk, hogy úgy van definiálva, hogy teljesítse a bevételekvivalencia-elvet. Nézzük most a befizetési szabály értelmezését. Definíció szerint ez

$$M_i(x) = Q_i(x)x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z, x_{-i})\, dz.$$

Diszkutáljuk tehát a $Q_i(\cdot, x_{-i}) : [0, \omega_i] \to [0, 1]$ függvényt. Ehhez vezessük be az $y_i : \Xi_{-i} \to [0, \omega_i]$ függvényt:

$$y_i(x_{-i}) = \min\left\{z_i \in [0, \omega_i] : \psi_i(z_i) \geq \psi_j\left(x_j\right) \forall j \neq i, \psi_i(z_i) \geq 0\right\}.$$

Az $y_i(x_{-i})$ tehát az i játékos legkisebb nyerő értékelése.
A Q_i definíciója szerint, a többi játékos rögzített $x_{-i} \in \Xi_{-i}$ értékelései mellett

$$Q_i(z, x_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } z > y_i(x_{-i}), \\ \frac{1}{k}, & \text{ha } z = y_i(x_{-i}), \\ 0, & \text{ha } z < y_i(x_{-i}). \end{cases}$$

Így persze

$$\int_0^{x_i} Q_i(z, x_{-i})\, dz = \begin{cases} x_i - y_i(x_{-i}), & \text{ha } x_i > y_i(x_{-i}) \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ebből pedig

$$M_i(x) = Q_i(x)x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z, x_{-i})\, dz = \begin{cases} x_i - (x_i - y_i(x_{-i})), & \text{ha } x_i > y_i(x_{-i}), \\ \frac{1}{k} y_i(x_{-i}), & \text{ha } x_i = y_i(x_{-i}), \\ 0, & \text{ha } x_i < y_i(x_{-i}). \end{cases}$$

Összegezve elmondhatjuk tehát, hogy

$$M_i(x) = Q_i(x)\, y_i(x_{-i}).$$

Ennek már nyilvánvaló interpretációja adható. Az i játékos befizetési szabálya a játékos nyerési valószínűségének és annak az értékelésének a szorzata, amellyel még éppen nyerte volna az aukciót.

Egy újabb pillanatra térjünk vissza a szimmetrikus esetre. Ekkor $y_i(x_{-i})$ definíciójában $\psi_i(z_i) \geq \psi_j(x_j)$ pontosan akkor áll fenn, ha $\psi(z_i) \geq \psi(x_j)$, ami $z_i \geq x_j$ fennállásával ekvivalens. Ha $r = \psi^{-1}(0)$, akkor a regularitási feltevés miatt $\psi(z_i) \geq 0$ pontosan akkor igaz, ha $z \geq r$. Emiatt

$$y_i(x_{-i}) = \min\left\{z_i \in [0,\omega] : z \geq x_j \forall j \neq i, z_i \geq r\right\} = \max\left\{x_j : j \neq i\right\} \vee r.$$

Látható tehát, hogy ez egy másodáras aukció az $r = \psi^{-1}(0)$ optimális rezervációs árral.

A 11.7. állításnak persze szép és egyszerű interpretációját adhatjuk a nem szimmetrikus eset mellett is. Az

$$E(R) = E(\max\{\psi_1(X_1), \psi_2(X_2), \ldots, \psi_N(X_N), 0\}) \tag{11.1}$$

formula azt jelenti, hogy az optimális megvalósítható mechanizmus a kikiáltó számára ugyanaz, mintha minden játékos a ψ_i virtuális értékelésével licitálna, és ilyen módon játszanának elsőáras aukciót, de egyénenként meghatározott $\psi_i^{-1}(0)$ rezervációs árral. Ebben a kikiáltó által elképzelt elsőáras aukcióban az i játékos akkor nyer, ha az ő virtuális értékelése a legnagyobb, de legalább zérus. Ez a 4. fejezet fényében azt jelenti, hogy a kikiáltó minden játékosnak külön-külön azt a rezervációs árat ajánlja, amely rezervációs ár a kikiáltó maximális bevételét biztosítaná abban az esetben, ha a többi játékosnak is az adott játékossal azonos értékeloszlása lenne. Így minden játékos más és más rezervációs árral szembesülve licitál a virtuális értékelésével. Ebben az elképzelt aukcióban persze a kikiáltó várható bevételét a fenti (11.1) formula adja.

12.

VCG-MECHANIZMUS

AZ ELŐZŐ FEJEZETBEN tárgyalt optimális megvalósítható mechanizmus hibája, hogy nem hatékony abban az értelemben, hogy nem feltétlenül igaz, hogy a tárgyat elnyerő licitáló értékelése lenne a legnagyobb a licitálók közt. Gondoljunk csak arra, hogy ez egy egyénileg meghatározott rezervációs árral játszott elsőáras aukciónak feleltethető meg.

A 7. fejezetben azt láttuk, hogy még rezervációs ár nélküli esetben is előállhat a hatékonyság sérülése. Kiszámoltuk ugyanis, – emlékezzünk a 7.2. ábrára –, hogy amennyiben két licitálóval játszott elsőáras aukciót modellezünk, akkor már egyenletes eloszlások esetén is megjelenik ez a sérülés, feltéve, hogy a két játékos értékeloszlásának tartója nem azonos.

Az előző fejezetben talált optimális mechanizmust ezért nagyon durvának érezzük, ha a racionalitási szempontok közé be akarjuk emelni azon elvárásunkat, hogy az aukciót az a játékos nyerje, akinek legtöbbet ér az aukció tárgyának birtoklása. Ebben a fejezetben tovább szűkítjük azon mechanizmusok körét, amelyek közt keressük azt, amelyik a lehető legnagyobb várható bevételt hozza a kikiáltó számára. Ezt a szűkítést a racionalitási elvárásaink újabb bővítésével tesszük meg.

Végül ki fog derülni, hogy nincs semmi új a nap alatt, a hatékonyságot is elvárva egy másodáras aukciót kell játszanunk a kikiáltó várható bevételének optimalizálásához.

12.1. Hatékony allokáció

A VCG-mechanizmus definíciójának megértéséhez fontos a következő feladat. Jelölje $\langle\lambda, x\rangle$ az $x, \lambda \in \mathbb{R}^N$ vektorok belső szorzatát és Λ a valószínűség eloszlások halmazát, azaz $\Lambda = \left\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in [0,1]^N : \sum_{j=1}^N \lambda_j \leq 1\right\}$. Rögzített $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ értékelésvektor mellett keressük az $\langle\cdot, x\rangle$ függvény Λ feletti maximumát. Formálisabban:

$$\left.\begin{array}{l}\max\langle\lambda, x\rangle \\ \lambda \in \Lambda\end{array}\right\}(\ddagger) \qquad \text{, azaz} \qquad \left.\begin{array}{c}\max \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j \\ 0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N; \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j \leq 1.\end{array}\right\}(\ddagger)$$

Látnunk kell, hogy mi a $\langle\cdot, x\rangle : \Lambda \to \mathbb{R}$ célfüggvény optimális értéke a Λ halmaz felett, és hogy pontosan mely $\lambda \in \Lambda$ vektorokra vétetik fel az optimum.

Nézzük először a célfüggvény optimális értékét. Legyen tehát $x = (x_1, \cdots, x_N)$ rögzítve.

a) Ha minden $i = 1, \cdots, N$ mellett $x_i \leq 0$, akkor minden $\lambda \in \Lambda, \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ esetén $\sum_{j=1}^N \lambda_j x_j \leq 0$, de ha például $\lambda = (0, \cdots, 0)$-t választjuk, akkor $\langle\lambda, x\rangle = 0$ lesz. A célfüggvény optimális értéke tehát 0.

b) Tekintsük most azt az esetet, amikor van olyan $1 \leq i \leq N$, amelyre $x_i > 0$. Ekkor minden $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \Lambda$ mellett

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j \leq \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \max\{x_1, \cdots, x_N\} = \max\{x_1, \cdots, x_N\} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \leq \max\{x_1, \cdots, x_N\}.$$

Tegyük fel, hogy éppen r darab maximális koordinátája van x-nek. Ekkor

$$\max\{x_1, \cdots, x_N\} = x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_r}.$$

Válasszuk a $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_r}$ nem negatív számokat úgy, hogy $\sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} = 1$ legyen. A többi j indexre legyen $\lambda_j = 0$. Így

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} x_{i_k} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} \max\{x_1, \cdots, x_N\} = \max\{x_1, \cdots, x_N\}.$$

A fenti a) és b) esetet összegezve azt kapjuk, hogy a (‡) feladatnak tetszőleges $x \in \mathbb{R}^N$ mellett van megoldása, és ha adott x-re $W(x)$ jelöli a (‡) feladat célfüggvényének optimális értékét, azaz

$$W(x) = \max_{\lambda \in \Lambda} \langle \lambda, x \rangle,$$

akkor [1]

$$W(x) = \max\{x_1, \cdots, x_N, 0\} = \max\{x, 0\}.$$

Most térjünk rá annak vizsgálatára, hogy adott x értékelésvektor mellett pontosan milyen eloszlások szolgáltatják a célfüggvény optimumát. Így a kérdés az, hogy ha $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \in \arg\max_{\mu \in \Lambda} \langle \mu, x \rangle$, ergo ha

$$\langle \lambda, x \rangle = W(x) = \max\{x, 0\},$$

akkor λ milyen alakú lehet.
Először is azt vegyük észre, optimális $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ esetén, ha $x_i < 0$, akkor erre az i indexre $\lambda_i = 0$-nak kell teljesülnie. Ugyanis, ha $\lambda_i > 0$ lenne, akkor

$$\lambda_i x_i < 0 x_i$$

és a $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_i, \cdots, \lambda_N)$ eloszlást az i-edik koordinátájában nullázva is eloszlást kapunk. Márpedig ezen megváltoztatott $(\lambda_1, \cdots, 0, \cdots, \lambda_N)$ eloszlással a célfüggvény értéke szigorúan nagyobb, mint az eredeti λ eloszlással.
Három esetet különböztetünk meg:

[1] Az egyszerűbb jelölés kedvéért a továbbiakban $x = (x_1, \cdots, x_N)$ mellett $\max\{x, 0\} = \max\{x_1, \cdots, x_N, 0\}$.

a) Ha $x = (0, \cdots, 0)$ a nullvektor, akkor triviálisan minden $\lambda \in \Lambda$ megfelel, hiszen

$$W(x) = \max\{x, 0\} = 0 = \langle \lambda, x \rangle \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

b) Ha minden $j = 1, \cdots, N$ koordinátára $x_j \leq 0$, de van olyan i, amelyre $x_i < 0$. Ekkor optimális λ mellett csak $\lambda_i = 0$ lehetséges, ha viszont $x_j = 0$, akkor λ_j-re semmilyen megkötésünk nincs. Az optimális $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ tehát olyan, hogy azon i indexekre, amelyekre $x_i < 0$ $\lambda_i = 0$, a többi indexre pedig csak annak kell teljesülnie, hogy az összeg 1-nél több ne legyen.

c) Az az eset maradt, mikor van olyan i index, hogy $x_i > 0$. Tegyük fel, hogy $\lambda \in \arg\max_{\mu \in \Lambda} \langle \mu, x \rangle$. Ekkor

$$W(x) = \max\{x, 0\} = \max\{x\} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j \leq \max\{x\} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \leq \max\{x\}.$$

A fenti sorban emiatt mindenütt egyenlőség van. Az utolsóra ez persze csak úgy lehetséges, hogy $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$. Na most:

i) Ha valamely j mellett $x_j < 0$, akkor $\lambda_j = 0$.

ii) Ha valamely j mellett $0 \leq x_j < \max\{x\} = x_t$, akkor $\lambda_j > 0$ mellett

$$\lambda_j x_j + \lambda_t x_t < \lambda_j x_t + \lambda_t x_t = \left(\lambda_j + \lambda_t\right) x_t.$$

Így a $\left(\cdots, \lambda_j, \cdots, \lambda_t, \cdots\right)$ eloszlást átrendezve a $\left(\cdots, 0, \cdots, \lambda_j + \lambda_t, \cdots\right)$ eloszlássá a célfüggvény értéke nő, ergo $\langle \lambda, x \rangle$ csak úgy lehet optimális, ha $\lambda_j = 0$.

Az i) és ii) esetek szerint optimális λ-ra tetszőleges

$$x_j < \max\{x\} \text{ esetén } \lambda_j = 0.$$

Ha tehát pontosan r darab koordinátában van maximuma x-nek, azaz

$$0 < \max\{x\} = x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_r},$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} = 1 \text{ és } \lambda_j = 0 \text{ egyébként}$$

egy optimális $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \Lambda$ mellett.

Az alábbi állítást gondoltuk meg.

12.1. állítás. *Adott $x \in \mathbb{R}^N$ mellett tekintsük a (‡) feladatot.*

$$\left.\begin{array}{l} \max\langle \lambda, x \rangle \\ \lambda \in \Lambda. \end{array}\right\} (\ddagger)$$

Adott x mellett jelölje $W(x)$ az $\langle \cdot, x \rangle : \Lambda \to \mathbb{R}$ célfüggvény optimális értékét.

1. Ekkor

$$W(x) = \max\{x, 0\},$$

2. A $\lambda \in \Lambda$ *eloszlásra* $\max\{x, 0\} = \langle \lambda, x \rangle$ *akkor és csak akkor, ha*

a) $\max\{x\} \leq 0$ *esetén azon j indexekre, amelyre* $x_j < W(x) = 0$ *a* $\lambda_j = 0$*, ha pedig az* $i_1, i_2, \cdots, i_r$ *indexekre*

$$x_{i_1} = x_{i_2} =, \cdots, = x_{i_r} = 0 = W(x),$$

akkor a $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_r} \in [0, 1]$ *számok tetszőlegesek lehetnek avval a feltétellel, hogy*

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} \leq 1.$$

b) $\max\{x\} > 0$ *esetén azon j indexekre, amelyekre* $x_j < W(x) = \max\{x\}$ *a* $\lambda_j = 0$*, ha pedig az* $i_1, i_2, \cdots, i_r$ *indexekre*

$$x_{i_1} = x_{i_2} =, \cdots, = x_{i_r} = \max\{x\} = W(x),$$

akkor a $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_r} \in [0, 1]$ *számok tetszőlegesek lehetnek avval a feltétellel, hogy*

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} = 1.$$

A továbbiakban annyiban módosítjuk a 9.1. szakaszban definiált modellt, hogy a licitálók eloszlásainak tartója kicsit általánosabb. Innen azt tesszük fel, hogy az i-edik licitáló értékelését kifejező eloszlás tartója az $[\alpha_i, \omega_i]$ intervallum. Itt $\alpha_i < 0$ is lehetséges.

12.2. definíció (jóléti függvény, hatékony allokáció)**.** A $Q^\star : \Xi \to \Lambda$ allokáció *hatékony*, ha minden $x \in \Xi$ értékelésvektor esetén

$$Q^\star(x) \in \arg\max_{\mu \in \Lambda} \langle \mu, x \rangle.$$

Definiálja $W : \Xi \to \mathbb{R}$ a *jóléti függvényt*:

$$W(x) = \max\left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j : \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \Lambda \right\}.$$

A világos intuíció szerint $W(x)$ fejezi ki az x értékelésű licitálók maximális összhasznosságát. A definíció és a (‡) feladatra adott válasz szerint

$$W(x) = \max\{x, 0\} = \sum_{j=1}^{N} Q_j^\star(x) x_j.$$

12.3. definíció. Jelölje valamely i licitáló esetén $W_{-i}(x)$ a nem i licitálók hasznosság maximumát:

$$W_{-i}(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} Q_j^\star(x)\, x_j = W(x) - Q_i^\star(x)\, x_i.$$

12.2. A VCG-mechanizmus optimalitása

Most a VCG-befizetési szabály definíciója következik.

12.4. definíció (VCG-befizetési szabály)**.** Adott $Q^\star : \Xi \to \Lambda$ hatékony allokáció esetén definiálja minden $i = 1, \cdots, N$ mellett

$$M_i^V(x) = W(\alpha_i, x_{-i}) - W_{-i}(x)$$

a VCG-*befizetési* szabályt.

Persze első célunk, hogy belássuk egy $\left(Q^\star, M^V\right)$ VCG-direkt-mechanizmus ösztönző voltát. Ehhez van szükségünk a $z_i \mapsto Q_i^\star(z_i, x_{-i})\, x_i - M_i^V(z_i, x_{-i})$ függvény vizsgálatára. E függvény három legfontosabb tulajdonságát foglaljuk össze a következő lemmában.

12.5. lemma. *Rögzített $x \in \Xi$ értékelésvektor és rögzített $i = 1, \cdots, N$ mellett*

1. *Fennáll az*

$$Q_i^\star(z_i, x_{-i})\, x_i - M_i^V(z_i, x_{-i}) = \langle Q^\star(z_i, x_{-i}), x\rangle - W(\alpha_i, x_{-i})$$

   azonosság;

2. *Az alábbi $[\alpha_i, \omega_i] \to \mathbb{R}$*

$$z_i \mapsto Q_i^\star(z_i, x_{-i})\, x_i - M_i^V(z_i, x_{-i})$$

   függvény $z_i = x_i$ pontban maximális;

3. *Teljesül a lenti azonosság és nemnegativitás*

$$Q_i^\star(x)\, x_i - M_i^V(x) = W(x) - W(\alpha_i, x_{-i}) \geq 0.$$

Bizonyítás. Egyszerű átalakításokkal

$$Q_i^\star(z_i, x_{-i})\, x_i - M_i^V(z_i, x_{-i}) = Q_i^\star(z_i, x_{-i})\, x_i + W_{-i}(z_i, x_{-i}) - W(\alpha_i, x_{-i}).$$

A jobb oldali első két tagot tovább írva:

$$Q_i^\star(z_i, x_{-i})\, x_i + W_{-i}(z_i, x_{-i}) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} Q_j^\star(z_i, x_{-i})\, x_j + Q_i^\star(z_i, x_{-i})\, x_i = \langle Q^\star(z_i, x_{-i}), x\rangle,$$

tehát az első pont indoklásával készen is vagyunk.

Most tekintsünk a $\langle Q^{\star}(z_i, x_{-i}), x\rangle$ számra. Ez a kifejezés a (‡) feladat $\langle\cdot, x\rangle$ célfüggvényének valamely Λ pontbeli értéke. No de $Q^{\star}(x)$ definíciója pont az, hogy olyan Λ-beli eloszlásvektor, ahol e célfüggvény maximális, ergo

$$\langle Q^{\star}(z_i, x_{-i}), x\rangle \le \langle Q^{\star}(x), x\rangle = \langle Q^{\star}(x_i, x_{-i}), x\rangle.$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a $\langle Q^{\star}(\cdot, x_{-i}), x\rangle$ függvény az értelmezési tartománya x_i pontjában maximumát veszi fel. A már igazolt állítás szerint a szóban forgó

$$z_i \mapsto Q_i^{\star}(z_i, x_{-i})\, x_i - M_i^V(z_i, x_{-i})$$

függvény a $\langle Q^{\star}(\cdot, x_{-i}), x\rangle$ függvénytől csak egy a z_i változótól független konstansban különbözik, ergo ez a függvény is felveszi x_i-ben a legnagyobb értékét.

Az utolsó állítás egyenlősége nyilvánvaló következménye az elsőnek, ha $z_i = x_i$ helyettesítésre gondolunk:

$$\begin{aligned} Q_i^{\star}(x)\, x_i - M_i^V(x) = Q_i^{\star}(x_i, x_{-i})\, x_i - M_i^V(x_i, x_{-i}) = \\ \langle Q^{\star}(x_i, x_{-i}), x\rangle - W(\alpha_i, x_{-i}) = \langle Q^{\star}(x), x\rangle - W(\alpha_i, x_{-i}) = \\ W(x) - W(\alpha_i, x_{-i}). \end{aligned}$$

Persze tudjuk azt is, hogy $W(x) = \max\{x, 0\}$. Ez utóbbi függvény nyilván monoton növő függvénye az x_i változónak, ergo $\alpha_i \le x_i$ szerint $W(x_i, x_{-i}) \ge W(\alpha_i, x_{-i})$. □

12.6. állítás. *Legyen $Q^{\star} : \Xi \to \Lambda$ hatékony allokáció, és $M^V : \Xi \to \mathbb{R}^N$ egy* VCG-*befizetési függvény. Ekkor a $\left(Q^{\star}, M^V\right)$* VCG-*mechanizmus egy*

1. *ösztönző és egyénileg racionális, azaz megvalósítható direkt-mechanizmus;*

2. *olyan mechanizmus, amely által generált valamennyi várható egyensúlyi hasznosság eltűnik az egyes játékosok minimális értékelése mellett.*
   Formálisabban: Minden $i = 1, \cdots, N$ licitálóra

   $$U_i(\alpha_i) = q_i(\alpha_i)\,\alpha_i - m_i(\alpha_i) = 0.$$

Bizonyítás. Az ösztönző mechanizmus definíciója szerint azt kell látnunk, hogy a

$$z_i \mapsto q_i(z_i)\, x_i - m_i(z_i) = E\left(Q_i^{\star}(z_i, X_{-i})\right) x_i - E\left(M_i^V(z_i, X_{-i})\right)$$

függvény minden rögzített $x \in \Xi$ értékelés és minden $i = 1, \cdots, N$ licitáló mellett a $z_i = x_i$ pontban maximális. Az előző lemma második pontjában lévő függvénybe komponálva az $N-1$ koordinátából álló $X_{-i} = (X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_N)$ valószínűségi vektorváltozót azt kapjuk, hogy a minden egyes $z_i \in [\alpha_i, \omega_i]$ mellett

$$Q_i^{\star}(z_i, X_{-i})\, x_i - M^V(z_i, X_{-i}) \le Q_i^{\star}(x_i, X_{-i})\, x_i - M^V(x_i, X_{-i})$$

az X_{-i} minden kiértékelése mellett. Így a várható érték monotonitása miatt

$$\begin{aligned}
&q_i(z_i)x_i - m_i(z_i) = \\
&\quad E\left(Q_i^\star(z_i, X_{-i})\right)x_i - E\left(M_i^V(z_i, X_{-i})\right) = E\left(Q_i^\star(z_i, X_{-i})x_i - M_i^V(z_i, X_{-i})\right) \leq \\
&\quad E\left(Q_i^\star(x_i, X_{-i})x_i - M_i^V(x_i, X_{-i})\right) = E\left(Q_i^\star(x_i, X_{-i})\right)x_i - E\left(M_i^V(x_i, X_{-i})\right) = \\
&\qquad\qquad q_i(x_i)x_i - m_i(x_i),
\end{aligned}$$

ami éppen azt jelenti, hogy a szóban forgó VCG-mechanizmus ösztönző.

Az egyéni racionalitáshoz az kell, hogy az $U_i^V(x_i) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$ egyéni hasznosságok nem negatívak legyenek. Ehhez az előzőhöz hasonlóan, de most a lemma harmadik pontjára koncentrálva azt kapjuk, hogy

$$U_i^V(x_i) = E\left(Q_i^\star(x_i, X_{-i})x_i - M_i^V(x_i, X_{-i})\right) = E\left(W(x_i, X_{-i}) - W(\alpha_i, X_{-i})\right).$$

Persze minden egyes i és akármilyen $x_i \in [\alpha_i, \omega_i]$ mellett a

$$W(x_i, X_{-i}) - W(\alpha_i, X_{-i})$$

egy nem negatív valószínűségi vektorváltozó, ezért ennek a várható értéke is nem negatív.

Mivel a konstans zérus függvény várható értéke is nulla, ezért azt is látjuk, hogy a licitálók egyéni várható hasznosságai valóban nullává válnak a tartó α_i baloldali végpontjában. □

12.7. állítás. *Legyen $Q^\star : \Xi \to \Lambda$ hatékony allokáció, és $M^V : \Xi \to \mathbb{R}^N$ egy VCG-befizetési függvény. Láttuk, hogy $\left(Q^\star, M^V\right)$ megvalósítható. Most legyen $M : \Xi \to \mathbb{R}^N$ egy másik befizetési függvény, amellyel a $(Q^\star, M)$ megvalósítható direkt-mechanizmus. Jelölje U_i^V és m_i^V a VCG-mechanizmus várható hasznosságát és várható befizetését, hasonlóan U_i és m_i a másik mechanizmus várható hasznosságát és várható befizetését. Ekkor*

- *Minden $i = 1, \cdots, N$ licitálóra és minden $x_i \in [\alpha_i, \omega_i]$ értékelésre*

$$U_i(x_i) - U_i^V(x_i) = U_i(\alpha_i) \geq 0,$$

- *Minden $i = 1, \cdots, N$ licitálóra és minden $x_i \in [\alpha_i, \omega_i]$ értékelésre*

$$m_i^V(x_i) - m_i(x_i) = U_i(\alpha_i) \geq 0.$$

Bizonyítás. Mivel mindkét mechanizmus ösztönző, ezért az ösztönző mechanizmusok 10.4. állításban megfogalmazott karakterizációja szerint

$$\begin{aligned} U_i(x_i) &= U_i(\alpha_i) + \int_{\alpha_i}^{x_i} q_i(t)\,dt; \\ U_i^V(x_i) &= U_i^V(\alpha_i) + \int_{\alpha_i}^{x_i} q_i(t)\,dt, \end{aligned}$$

ahol $q_i(t) = E(Q^\star(t, X_{-i}))$. Az imént láttuk, hogy a VCG-mechanizmus generálta hasznosságok a bal végpontban eltűnnek, azaz $U_i^V(\alpha_i) = 0$ minden licitáló mellett, így $U_i(x_i) = U_i(\alpha_i) + U_i^V(x_i)$. Ebből már látszik is, hogy minden $x_i \in [\alpha_i, \omega_i]$ mellett

$$U_i(x_i) - U_i^V(x_i) = U_i(\alpha_i) \geq 0,$$

hiszen $(Q^\star, M)$ is egyénileg racionális.

Az egyensúlyi hasznosságokra definíció szerint

$$\begin{aligned} U_i(x_i) &= x_i q_i(x_i) - m_i(x_i); \\ U_i^V(x_i) &= x_i q_i(x_i) - m_i^V(x_i). \end{aligned}$$

A felső egyenletből az alsót kivonva kapjuk, hogy

$$m_i^V(x_i) - m_i(x_i) = U_i(x_i) - U_i^V(x_i) = U_i(\alpha_i) \geq 0.$$

Ezt kellett belátni. □

Meggondoltuk tehát, hogy adott $Q^\star$ hatékony allokációval tetszőleges olyan M befizetési szabályra, amelyre $(Q^\star, M)$ megvalósítható a kapott várható egyensúlyi hasznosság függvények csak konstansban különböznek egymástól. Ezen várható egyensúlyi hasznosságok közt a VCG- mechanizmusé a legkisebb.

Hasonlóan, a várható befizetési függvények is egymás eltoltjai, méghozzá ugyanavval a konstanssal. Ezen várható befizetések közt a VCG-hez tartozó a lehető legnagyobb. Az is adódik még, hogy

$$m_i^V(\alpha_i) = \alpha_i q_i(\alpha_i).$$

A fejezet legfontosabb eredményéhez érkeztünk:

12.8. állítás. *Adott hatékony allokáció mellett a* VCG*-mechanizmus garantálja a kikiáltó legnagyobb várható bevételét az adott hatékony allokációhoz található összes ösztönző és egyénileg racionális, azaz az összes megvalósítható mechanizmusok közül.*

Bizonyítás. Adott $Q^\star$ hatékony allokációhoz legyen $(Q^\star, M^V)$ a VCG-mechanizmus, és $(Q^\star, M)$ valamely megvalósítható mechanizmus. Jelölje, mint korábban m_i^V a VCG-hez tartozó, és m_i a másikhoz tartozó várható befizetéseket. A kikiáltó bevétele a licitáló befizetéseiből és csak abból keletkezik. E várható árbevétel tehát a

$$\sum_{j=1}^{N} m_j\left(X_j\right) \qquad \text{és} \qquad \sum_{j=1}^{N} m_j^V\left(X_j\right)$$

valószínűségi változók összegének várható értékei. Jelölje $E\left(R^V\right)$ a kikiáltónak a VCG-hez tartozó várható bevételét, és $E\left(R\right)$ a másik mechanizmus esetén adódó várható bevételt. Ekkor

$$E\left(R\right) =$$

$$E\left(\sum_{j=1}^{N} m_j\left(X_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{N} E\left(m_j\left(X_j\right)\right) \leq \sum_{j=1}^{N} E\left(m_j^V\left(X_j\right)\right) = E\left(\sum_{j=1}^{N} m_j^V\left(X_j\right)\right) =$$

$$E\left(R^V\right).$$

Ezt kellett belátni. □

12.3. A VCG-befizetési szabály értelmezése

Miután megértettük, hogy a VCG-mechanizmus az optimális, ha a kikiáltó várható bevételét maximalizáljuk a megvalósítható és hatékony mechanizmusok közt, felmerül a kérdés, hogy nem túl trükkösen definiáltuk-e az M^V kifizetéseket. Jó lenne látni, hogy honnan jön a gondolat, hogy éppen

$$M_i^V\left(x\right) = W\left(\alpha_i, x_{-i}\right) - W_{-i}\left(x\right)$$

módon kell definiálni a mechanizmus befizetését. A fejezet hátralévő részében erre szeretnénk választ keresni.

Egy kicsit egyszerűbb esetet vizsgálunk avval, hogy a további feltevésünk szerint minden licitáló értékelésének bal végpontja zérus, azaz $\alpha_i = 0$, minden $i = 1, \cdots, N$ mellett.

Tekintsünk egy $x \in \Xi$ értékelést.

1. A legegyszerűbb eset, mikor x-ben csak egyetlen legnagyobb koordináta van. Ha ez az i-edik, akkor a fejezet első szakaszában megértett hatékony allokáció szabályai szerint

$$Q_i^\star\left(x\right) = 1, \qquad \text{és minden más } j \neq i\text{-re} \quad Q_j^\star\left(x\right) = 0.$$

Persze ekkor

$$\begin{aligned} W(0, x_{-i}) &= \max\{x_{-i}\} = \max2\{x\}, \\ W_{-i}(x) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} Q_j^\star(x) x_j = 0. \end{aligned}$$

Így a győztes i licitáló befizetése $M_i^V(x) = \max2\{x\}$.

Most nézzük a vesztesek befizetését, azaz $j \neq i$. Ekkor

$$\begin{aligned} W\left(0, x_{-j}\right) &= \max\{x_k : k \neq j\} = \max\{x\}, \\ W_{-j}(x) &= Q_i^\star(x) x_i = \max\{x\}. \end{aligned}$$

A vesztes befizetése tehát $M_j^V(x) = 0$.

Ott tartunk tehát, hogy abban az esetben, amikor a licitálók között nincs holtverseny,

$$M_i^V(x) = Q_i^\star(x) \cdot \max2\{x\},$$

minden $i = 1, \cdots, N$ licitáló esetén.

2. Most tegyük fel, hogy pontosan r licitáló közt van az élen nem zérus értékű holtverseny, azaz

$$\max\{x\} = x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_r} > 0.$$

Tudjuk a $Q^\star$ allokáció hatékonysága miatt, hogy ekkor $\sum_{t=1}^{r} Q_{i_t}^\star(x) = 1$, és a vesztes licitálók allokációjának valószínűsége zérus.

Legyen j egy vesztes index, azaz $x_j < \max\{x\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} W\left(0, x_{-j}\right) &= \max\{x\}, \\ W_{-j}(x) &= W(x) - Q_j^\star(x) x_j = \max\{x\}. \end{aligned}$$

A vesztes befizetése tehát most is $M_j^V(x) = 0$.

Végül nézzük a győztesek befizetését, azaz a vizsgált licitáló indexe valamely $1 \leq t \leq r$ mellett i_t. Figyeljünk arra, hogy ekkor $x_{i_t} = \max\{x\} = \max2\{x\}$, így

$$\begin{aligned} W(0, x_{-i_t}) &= x_{i_r} = \max\{x\} = \max2\{x\}, \\ W_{-i_t}(x) &= W(x) - Q_{i_t}^\star(x) x_{i_t} \\ &= x_{i_t} - Q_{i_t}^\star(x) x_{i_t} \\ &= \left(1 - Q_{i_t}^\star(x)\right) \max2\{x\}. \end{aligned}$$

Így az $M_{i_t}^V(x) = \max2\{x\} - \Big(1 - Q_{i_t}^\star(x)\Big) \max2\{x\} = Q_{i_t}^\star(x) \cdot \max2\{x\}$ szabály adja meg a nyertes licitálók befizetési kötelezettségét.

Azt igazoltuk tehát, hogy a holtversenyes és a nem holtversenyes esetben is

$$M_i^V(x) = Q_i^\star(x) \cdot \max2\{x\}$$

adja a befizetési szabályt.

12.4. Összegzés

A VCG-mechanizmusra mint másodáras aukcióra kell gondolnunk úgy, hogy szembe nézünk az azonos értékelések lehetőségével is. A döntés előtt, de az értékelések megismerése után adott egy hatékony $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ allokáció. A vesztesek nem fizetnek semmit és nem kapnak semmit. A győztesek mindegyike befizeti az értékelésének, ergo a második legnagyobb értékelésnek az ő λ_{i_t} nyerési valószínűségekkel súlyozott értékét. Persze a maximális értékelést adók közül csak az egyik kapja meg az aukció tárgyát, de ennek valószínűsége az ő befizetésével egyenesen arányos.

Az algoritmus tehát a kikiáltó szempontjából végtelen egyszerű: Ő mindenképpen a második legnagyobb értékelést kapja.

Fontos még látni, hogy több hatékony allokáció is létezik, de az azokkal képzett VCG-mechanizmusok egymással egyenértékűek abban az értelemben, hogy a kikiáltó számára ugyanakkora várható árbevétellel járnak. Ha így van, akkor persze magától értetődik a legtermészetesebb előtérbe helyezése: Ha k darab $k \geq 1$ maximális értékelés van, akkor a maximális értékelésűek közt mindenki azonos $\frac{1}{k}$ valószínűséggel nyeri az aukció tárgyát, míg a többiek 0 valószínűséggel nyerik azt. A veszteseknek nincs befizetési kötelezettsége, és a nyertesek, attól függetlenül, hogy végül hozzájutnak a tárgyhoz vagy sem, befizetik a rájuk eső

$$\frac{1}{k} \cdot \max2\{x\}$$

összeget, majd a k nyertes közt valamilyen azonos nyerési valószínűségű szétlövést rendeznek.

Függelék

A.

VALÓS KONVEX FÜGGVÉNYEK

A.1. Konvexitás és integrálfüggvény

A.1. definíció (konvex függvény)**.** Legyen I egy intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt konvexnek nevezzük, ha minden $x, y \in I$, $x < y$, és minden $\lambda \in [0,1]$ mellett

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Az f függvényt szigorúan konvexnek mondjuk, ha minden $\lambda \in (0,1)$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

is fennáll. Az f függvény (szigorúan) konkáv, ha $-f$ (szigorúan) konvex.

A.2. *megjegyzés.* Könnyű számolással ellenőrizhetjük, hogy $x \leq c \leq y$, $x \neq y$ mellett

$$c = \frac{y-c}{y-x} x + \frac{c-x}{y-x} y.$$

Ezek szerint az f függvény konvexitását a következőképpen is fogalmazhatjuk:

Az f pontosan akkor konvex, ha minden $x \leq c \leq y$, $x \neq y$ esetén

$$f(c) \leq \frac{y-c}{y-x} f(x) + \frac{c-x}{y-x} f(y).$$

A.3. állítás. *Legyen $g : I \to \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett (szigorúan) monoton növő függvény, $c \in I$ rögzített pont. Definiálja*

$$F(x) = \int_c^x g(t)\, dt$$

a g integrálfüggvényét. Ekkor $F : I \to \mathbb{R}$ függvény (szigorúan) konvex.

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in [0,1]$ és $x < y$, és $u = \lambda x + (1-\lambda)y$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) - F(u) &= \lambda(F(x) - F(u)) + (1-\lambda)(F(y) - F(u)) \\
&= -\lambda \int_x^u g + (1-\lambda) \int_u^y g(t)\, dt.
\end{aligned}$$

De g (szigorúan) monoton növekedése miatt $\int_u^y g(t)\, dt \geq (y-u)g(u)$ ($\int_u^y g(t)\, dt > (y-u)g(u)$) valamint $\int_x^u g \leq (u-x)g(u)$ ($\int_x^u g < (u-x)g(u)$). Így folytatva az előző becslést azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) - F(u) &\geq (1-\lambda)(y-u)g(u) - \lambda(u-x)g(u) \\
&= g(u)(y - u - \lambda y + \lambda u - \lambda u + \lambda x).
\end{aligned}$$

Kiszámolva $g(u)$ fenti együtthatóját azt kapjuk, hogy

$$y - u - \lambda y + \lambda x = y - \lambda x - (1-\lambda)y - \lambda y + \lambda x = y - \lambda x - y + \lambda y - \lambda y + \lambda x = 0.$$

Azt bizonyítottuk tehát, hogy

$$\lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) - F(\lambda x + (1-\lambda y)) \geq 0.$$

Ezt kellett belátni. □

A.4. *megjegyzés.* Jelölje tetszőleges $f : I \to \mathbb{R}$ függvény és rögzített $c \in I$ mellett

$$F_c(u) = \frac{f(u) - f(c)}{u - c}$$

az f függvény c ponthoz tartozó különbségi hányados függvényét.

A.5. állítás (konvexitás és a különbségi hányados monotonitása)**.** *Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett függvény. Az f pontosan akkor (szigorúan) konvex, ha minden $c \in I$ esetén az F_c különbségi hányados függvény (szigorúan) monoton nő.*

Bizonyítás. Legyen $u < c < v$. Tekintsük az alább ekvivalens átalakításokat:

$$\begin{aligned}
f(c) &\leq \frac{v-c}{v-u} f(u) + \frac{c-u}{v-u} f(v) \\
((v-c)+(c-u))f(c) &\leq (v-c)f(u) + (c-u)f(v) \\
(v-c)(f(c)-f(u)) &\leq (c-u)(f(v)-f(c)) \\
F_c(u) &\leq F_c(v)
\end{aligned}$$

Amennyiben $u < v < c$, akkor az alábbi ekvivalens átalakítások szükségesek:

$$\begin{aligned}
f(v) &\leq \frac{c-v}{c-u} f(u) + \frac{v-u}{c-u} f(c) \\
(c-u)f(v) &\leq (c-v)f(u) + ((c-u)-(c-v))f(c) \\
(c-u)(f(v)-f(c)) &\leq (c-v)(f(u)-f(c)) \\
-F_c(v) &\leq -F_c(u) \\
F_c(v) &\geq F_c(u)
\end{aligned}$$

A $c < u < v$ esetén pedig

$$\begin{aligned}
f(u) &\leq \frac{v-u}{v-c} f(c) + \frac{u-c}{v-c} f(v) \\
(v-c)f(u) &\leq ((v-c)-(u-c))f(c) + (u-c)f(v) \\
(v-c)(f(u)-f(c)) &\leq (u-c)(f(v)-f(c)) \\
F_c(u) &\leq F_c(v)
\end{aligned}$$

Világos, hogy mindhárom esetben az első egyenlőtlenség a konvexitás definíciója, amelyekkel $F_c(u) \leq F_c(v)$ ekvivalens. Ezt kellett belátni. □

A.6. állítás (konvex függvény korlátossága)**.** *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett konvex függvény. Ekkor f korlátos is.*

Bizonyítás. Legyen $a < c < b$ tetszőlegesen rögzítve. Tudjuk, hogy $F_c(a) \leq F_c(u) \leq F_c(b)$ fennáll minden $u \in [a,b], u \neq c$ esetén. Ha például $F_c(u) \geq 0$, akkor

$F_c(u) \leq F_c(b) = |F_c(b)|$, és ha $F_c(u) < 0$, akkor $|F_c(u)| \leq |F_c(a)|$. Ebből $L = \max\{|F_c(a)|, |F_c(b)|\}$ bevezetésével $|F_c(u)| \leq L$ adódik. No de így

$$|f(u)| \leq |f(u) - f(c)| + |f(c)| \leq L|u-c| + |f(c)| \leq L|b-a| + |f(c)|$$

becslés teljesül már minden $u \in I$ esetén. Ezt kellett belátni. □

A.7. állítás (konvex függvény folytonossága)**.** *Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett konvex függvény. Ekkor az f az I intervallum minden belső pontjában folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $a < x < b$, ahol $a, b \in I$. Megmutatjuk, hogy f folytonos az x pontban: Világos, hogy bevezetve a $K = \max\{|F_x(a)|, |F_x(b)|\}$ jelölést, tetszőleges $u \in (a,b)$ mellett $|F_x(u)| \leq K$, hiszen az F_x különbségi hányados függvény monoton növő. Ekkor viszont minden $u \in (a,b)$ szám esetén $|f(u) - f(x)| \leq K|u-x|$, ezért f valóban folytonos az x pontban. □

A.8. definíció (konvex függvény bal- és jobb oldali deriváltja)**.** Legyen x az f konvex függvény I értelmezési tartományának egy belső pontja. Definiálja f'_- és f'_+ a bal és jobb oldali derivált-függvényeket:

$$\begin{aligned} f'_-(x) &= \sup\{\frac{f(y) - f(x)}{y - x} : y \in I, y < x\}; \\ f'_+(x) &= \inf\{\frac{f(y) - f(x)}{y - x} : y \in I, y > x\}. \end{aligned}$$

Világos, hogy az F_x különbségi hányados függvény monotonitása, és mivel x belső pontja f értelmezési tartományának, a szóban forgó szuprémum és infimum létezik és megegyezik a különbségi hányados függvény alábbi bal és jobb oldali határértékével.

$$f'_-(x) = \lim_{y \to x-} F_x(y) \text{ valamint } f'_+(x) = \lim_{y \to x+} F_x(y)$$

A.9. állítás. *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor*

1. *minden $x \in (a,b)$ mellett $f'_-(x) \leq f'_+(x)$;*
2. *minden $c, d \in (a,b)$ esetén, ha $c < d$, akkor $f'_+(c) \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \leq f'_-(d)$;*
3. *Az f'_- és az f'_+ bal illetve jobb oldali derivált függvények monoton nőnek;*
4. *Az f'_- bal oldali derivált függvény balról folytonos és az f'_+ jobb oldali derivált függvény jobbról folytonos.*

Ha feltesszük továbbá, hogy f még szigorúan konvex is, akkor a fenti ii.) pontban $f'_+(c) < \frac{f(d)-f(c)}{d-c} < f'_-(d)$, és a iii.) pontbeli deriváltak szigorúan monoton nőnek.

Bizonyítás. Az első két pont nyilvánvaló következménye a definícióknak és a különbségi hányados függvény monotonitásának. Ha $c < d$ akkor az első két pont szerint

$$f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \leq f'_-(d) \leq f'_+(d).$$

Ez azt mutatja, hogy mind az f'_- és mind az f'_+ függvény monoton növő.

Az utolsó állításhoz azt kell megmutatnunk, hogy $x < w$, $x \to w$ esetén $f'_-(x) \to f'_-(w)$. Először is $\lim_{x\to w-} f'_-(x)$ nyilvánvalóan létezik, hiszen minden $x < w$ esetén $f'_-(x) \leq f'_-(w)$ az f'_- bal oldali deriváltfüggvény monotonitása miatt. Ebből azt is látjuk, hogy

$$\lim_{x\to w-} f'_-(x) \leq f'_-(w).$$

No de tetszőlegesen rögzített $y < w$ mellett:

$$\frac{f(y) - f(w)}{y - w} = \lim_{x\to w-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \lim_{x\to w-} f'_-(x)$$

Eszerint

$$f'_-(w) = \sup\{\frac{f(y) - f(w)}{y - w} : y < w\} \leq \lim_{x\to w-} f'_-(x)$$

A jobb oldali derivált jobbról folytonosságához azt kell megmutatnunk, hogy $w < x$, $x \to w$ esetén $f'_+(x) \to f'_+(w)$. Először is $\lim_{x\to w+} f'_+(x)$ nyilvánvalóan létezik, hiszen minden $w < x$ esetén $f'_+(w) \leq f'_+(x)$ az f'_+ jobb oldali deriváltfüggvény monotonitása miatt. Ebből azt is látjuk, hogy

$$\lim_{x\to w+} f'_+(x) \geq f'_+(w).$$

No de tetszőlegesen rögzített $w < y$ mellett:

$$\frac{f(y) - f(w)}{y - w} = \lim_{x\to w+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \lim_{x\to w+} f'_+(x).$$

Eszerint

$$f'_+(w) = \inf\{\frac{f(y) - f(w)}{y - w} : w < y\} \geq \lim_{x\to w+} f'_+(x)$$

Ezt kellett belátni. □

A.10. állítás (konvex függvény differenciálhatósága)**.** *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex függvény, és jelölje*

$$E = \{x \in (a,b) : f \textit{ nem differenciálható } x\text{–}\textit{ben}\}$$

Ekkor az E halmaz legfeljebb megszámlálható, és az f' függvény folytonos is a $(a,b) \setminus E$ halmazon.

Bizonyítás. Világos, hogy

$$E = \{x \in (a,b) : f'_-(x) < f'_+(x)\}.$$

Ezért, ha $c,d \in E$ két különböző pont, akkor $c < d$ mellett

$$f'_-(c) < f'_+(c) \leq f'_-(d) < f'_+(d).$$

Ez azt jelenti, hogy $(f'_-(c), f'_+(c))$ valamint $(f'_-(d), f'_+(d))$ nem üres diszjunkt nyílt intervallumok. Világos, hogy nem üres diszjunkt nyílt intervallum csak annyi lehet a számegyenesen, ahány racionális szám van. Így az E halmaz számossága legfeljebb megszámlálható.

Tekintsük az $f' = f'_- = f'_+$ függvényt, amelynek értelmezési tartománya $(a,b) \setminus E$. Világos, hogy ez mind balról mind jobbról is folytonos, ezért folytonos. □

A.11. állítás. *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex függvény. Ekkor minden $[c,x] \subseteq (a,b)$ mellett*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'_-(t)\, dt = f(c) + \int_c^x f'_+(t)\, dt$$

Emiatt persze tetszőleges olyan $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyre $f'_- \leq h \leq f'_+$ teljesül, a h monoton növő emiatt Riemann-integrálható, és fennáll az

$$f(x) = f(c) + \int_c^x h(t)\, dt$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Mivel az f'_- és az f'_+ függvények monoton nőnek a $[c,x]$ korlátos és zárt intervallum felett, ezért $\int_c^x f'_-$ és $\int_c^x f'_+$ Riemann–integrálok léteznek.

Legyen $I \in \mathscr{D}[c,x]$, $I = \{c = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = x\}$ egy felosztás. Ekkor az f konvexitása szerint minden k index mellett

$$f'_+(x_{k-1}) \leq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leq f'_-(x_k),$$

vagy ami evvel ekvivalens

$$f'_+(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \leq f(x_k) - f(x_{k-1}) \leq f'_-(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Összeadva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} f'_+(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \leq f(x) - f(c) \leq \sum_{k=1}^{n} f'_-(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Vegyük észre, hogy az f'_+ és f'_- függvények monoton növekedő volta miatt a bal oldali összeg egy alsó közelítő összeg és a jobb oldali szumma egy felső közelítő összeg. Pontosabban

$$s(f'_+, I) \leq f(x) - f(c) \leq S(f'_-, I).$$

Ez minden I felosztásra igaz, ezért

$$\int_c^x f'_+ \leq f(x) - f(c) \leq \int_c^x f'_- \leq \int_c^x f'_+$$

A fenti sor egyenlőtlenségeit, tehát egyenlőségre is cserélhetjük. Ezt kellett belátni. □

A.12. állítás. *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény. Az f pontosan akkor konvex, ha f' függvény monoton növő.*

Bizonyítás. Amennyiben f konvex, akkor láttuk, hogy $f' = f'_-$ függvény monoton növő.

Megfordítva, ha f' függvény monoton növő, akkor minden $[c,x] \subseteq (a,b)$ korlátos és zárt intervallumon Riemann–integrálható, és f egy olyan a (c,x) intervallum minden pontjában differenciálható függvény, melynek deriváltfüggvénye f' és f még folytonos is c és b pontokban. Alkalmazhatjuk tehát f' –ra a Newton-Leibniz–tételt. Így

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f',$$

ami azt jelenti, hogy f egy monoton növő függvény integrálfüggvénye egy additív konstanstól eltekintve. Láttuk, hogy ez esetben f konvex. □

A.13. állítás. *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény. Az f pontosan akkor szigorúan konvex, ha f' függvény szigorúan monoton növő.*

A.14. állítás. *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ egy kétszer differenciálható függvény. Az f pontosan akkor konvex, ha $f'' \geq 0$.*

A.15. állítás. *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ egy kétszer differenciálható függvény. Ha $f'' > 0$, akkor f szigorúan konvex.*

A.2. Támaszegyenesek

A.16. definíció (támaszfüggvény)**.** Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett függvény, $x_0 \in I$ rögzített. Az

$$A_{m,x_0}(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

függvényt az f függvény x_0 pontbeli m meredekségű támaszfüggvényének nevezzük, ha minden $x \in I$ mellett

$$f(x) \geq A_{m,x_0}(x).$$

A.17. állítás. *Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett függvény, $x_0 \in I$ rögzített. Az alábbi feltételek tetszőleges $m \in \mathbb{R}$ valós számra ekvivalensek:*

1. *Minden* $u < x_0 < v$; $u, v \in I$ *esetén* $\frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} \leq m \leq \frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0}$,

2. *Minden* $x \in I$ *mellett* $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) = A_{m,x_0}(x)$.

A.18. állítás. *Legyen* $f : I \to \mathbb{R}$ *egy intervallumon értelmezett konvex függvény,* $x_0 \in I$ *belső pont rögzített. Az alábbi feltételek tetszőleges* $m \in \mathbb{R}$ *valós számra ekvivalensek:*

1. $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$

2. *Minden* $x \in I$ *mellett* $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) = A_{m,x_0}(x)$.

Bizonyítás. Az f konvexitása szerint a $f'_-(x_0)$ szám az $\frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0}$ alakú számok legkisebb felső korlátja, ahol $u < x_0$ és az $f'_+(x_0)$ szám az $\frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0}$ alakú számok legnagyobb alsó korlátja, ahol $v > x_0$. Ez azt jelenti, hogy az itteni i feltétel ekvivalens az előző állítás i feltételével. □

A.19. állítás. *Legyen* $f : I \to \mathbb{R}$ *egy intervallumon értelmezett függvény. Az* f *pontosan akkor konvex, ha az értelmezési tartománya minden belső pontjában van támaszfüggvénye.*

Bizonyítás. Ha f konvex, akkor láttuk, hogy $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ az értelmezési tartomány minden x_0 belső pontjában, teljesül tehát az előző állítás i pontja, ami azt jelenti, hogy tetszőlegesen választott $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$ szám mellett A_{m,x_0} egy támaszfüggvénye f-nek az x_0 pontban.

Ha minden pontban van az f függvénynek támaszfüggvénye, akkor tetszőleges $u < x_0 < v$ esetén $F_{x_0}(u) \leq F_{x_0}(v)$. Láttuk, hogy egyszerű algebrai átalakításokkal ez

$$f(x_0) \leq \frac{v - x_0}{v - u} f(u) + \frac{x_0 - u}{v - u} f(v)$$

alakba írható. Mivel ez minden $u < x_0 < v$ hármasra fennáll, ez éppen f konvexitásának definíciója az I intervallumon. □

A.20. állítás (konvex függvény differenciálhatósága)**.** *Legyen* $f : I \to \mathbb{R}$ *egy intervallumon értelmezett konvex függvény. Az* f *pontosan akkor differenciálható az értelmezési tartománya egy belső pontjában, ha egy ilyen pontban csak egyetlen támaszfüggvénye van.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy konvex függvény pontosan akkor differenciálható az értelmezési tartománya x_0 belső pontjában, ha a bal és jobb oldali deriváltja egybeesik. Ez úgy is fogalmazható, hogy csak egyetlen egy m szám írható a bal és jobb oldali deriváltak közé, azaz ha csak egyetlen egy támaszegyenese van az x_0 pontban. □

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Jeremy Bulow and Paul Klemperer. Rational frenzies and crashes. *Journal of Political Economy*, 102(1):1–23, 1994. URL: http://www.jstor.org/stable/2138791.

[2] Vick M. Coppinger, Vernon L. Smith, and Jon A. Titus. Incentives and behavior in english, dutch and sealed-bid auctions. *Economic Inquiry*, 18(1):1–22, 1980. doi:10.1111/j.1465-7295.1980.tb00556.x.

[3] James Cox, Bruce Roberson, and Vernon Smith. *Theory and Behavior of Single Object Auctions*, volume 2. Greenwich: JAI Press, 01 1982.

[4] Csekő Imre. *Rövid bevezetés az egyensúly elméletébe*. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest, 2016. URL: http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/2668.

[5] Dancs István, Magyarkuti Gyula és Medvegyev Péter. *Bevezetés a matematika analízisbe*. Aula Kvk., 1995. URL: http://mek.oszk.hu/00800/00855.

[6] Benjamin Edelman, Michael Ostrovsky, and Michael Schwarz. Internet advertising and the generalized second-price auction: Selling billions of dollars worth of keywords. *American Economic Review*, 97(1):242–259, March 2007. URL: http://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/aer.97.1.242, doi:10.1257/aer.97.1.242.

[7] Maxim Engers and Brian McManus. Charity auctions. *International Economic Review*, 48(3):953–994, 2007. doi:10.1111/j.1468-2354.2007.00451.x.

[8] Emel Filiz-Ozbay and Erkut Y. Ozbay. Auctions with anticipated regret: Theory and experiment. *American Economic Review*, 97(4):1407–1418, September 2007. URL: http://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/aer.97.4.1407, doi:10.1257/aer.97.4.1407.

[9] Jacob K. Goeree and Theo Offerman. The amsterdam auction. *Econometrica*, 72(1):281–294, 2004. URL: http://www.jstor.org/stable/3598856.

[10] Jacob K. Goeree, Charles R. Plott, and John Wooders. Bidders' choice auctions: Raising revenues through the right to choose. *Journal of the European Economic Association*, 2(2-3):504–515, 2004. doi:10.1162/154247604323068186.

[11] Jacob K. Goeree, Emiel Maasland, Sander Onderstal, and John L. Turner. How (not) to raise money. *Journal of Political Economy*, 113(4):897–918, 2005. doi:10.1086/431288.

[12] Werner Güth and Radosveta Ivanova-Stenzel. Asymmetric auction experiments with(out) commonly known beliefs. Papers on strategic interaction, Max Planck Institute of Economics, Strategic Interaction Group, 2003. URL: https://EconPapers.repec.org/RePEc:esi:discus:2002-36.

[13] Werner Güth, Radosveta Ivanova-Stenzel, and Elmar Wolfstetter. Bidding behavior in asymmetric auctions: An experimental study. *European Economic Review*, 49(7):1891 – 1913, 2005. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0014292104000753`, `doi:10.1016/j.euroecorev.2004.09.003`.

[14] Isa Hafalir and Vijay Krishna. Asymmetric auctions with resale. *American Economic Review*, 98(1):87–112, 2008. URL: `https://EconPapers.repec.org/RePEc:aea:aecrev:v:98:y:2008:i:1:p:87-112`.

[15] Kenneth Hendricks and Robert Porter. An empirical study of an auction with asymmetric information. *American Economic Review*, 78(5):865–83, 1988. URL: `https://EconPapers.repec.org/RePEc:aea:aecrev:v:78:y:1988:i:5:p:865-83`.

[16] Kenneth Hendricks and Robert Porter. Collusion in Auctions. Discussion Papers 817, Northwestern University, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, January 1989. URL: `https://ideas.repec.org/p/nwu/cmsems/817.html`.

[17] Radosveta Ivanova-Stenzel and Doron Sonsino. Comparative study of one-bid versus two-bid auctions. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 54(4):561 – 583, 2004. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167268103001574`, `doi:10.1016/j.jebo.2002.11.002`.

[18] Paul Klemperer. *Auctions: Theory and Practice*. Princeton University Press, 2004. URL: `https://press.princeton.edu/titles/7728.html`.

[19] Vijay Krishna. *Auction Theory*. Elsevier, 1 edition, 2002. URL: `https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:monogr:9780124262973`, `doi:10.1016/B978-0-12-374507-1.00050-9`.

[20] Vijay Krishna and Motty Perry. Efficient Mechanism Design. Game Theory and Information 9703010, University Library of Munich, Germany, March 1997. URL: `https://ideas.repec.org/p/wpa/wuwpga/9703010.html`.

[21] Jonathan Levin. Wars of attrition. Technical report, Oct 2004. URL: `https://web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20286/Wars%20of%20Attrition.pdf`.

[22] David Lucking-Reiley. Using field experiments to test equivalence between auction formats: Magic on the internet. *The American Economic Review*, 89(5):1063–1080, 1999. URL: `http://www.jstor.org/stable/117047`.

[23] Magyarkuti Gyula. *Mértékelmélet és dinamikus programozás*. TypoTeX Kiadó, ISBN 978-963-279-254-5., 2014. URL: `https://www.tankonyvtar.hu`.

[24] Robert C. Marshall and Leslie M. Marx. Bidder collusion. *Journal of Economic Theory*, 133(1):374 – 402, 2007. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022053105002784`, `doi:10.1016/j.jet.2005.12.004`.

[25] Andreu Mas-Colell, Michael Whinston, and Jerry Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995. URL: `https://EconPapers.repec.org/RePEc:oxp:obooks:9780195102680`.

[26] Steven A. Matthews. A Technical Primer on Auction Theory I: Independent Private Values. Discussion Papers 1096, Northwestern University, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, May 1995. URL: `https://ideas.repec.org/p/nwu/cmsems/1096.html`.

[27] Medvegyev Péter. *Bevezetés a valószínűségszámításba*. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest ISBN 978-963-503-647-9, 2017. URL: `http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/3088/`.

[28] Flavio Menezes and Paulo K. Monteiro. *An Introduction to Auction Theory*. Oxford University Press, 2004. URL: `https://doi.org/10.1093/019927598X.001.0001`.

[29] Paul Milgrom. *Putting Auction Theory to Work*. Churchill Lectures in Economics. Cambridge University Press, 2004. `doi:10.1017/CBO9780511813825`.

[30] Paul Milgrom. Simplified mechanisms with an application to sponsored-search auctions. *Games and Economic Behavior*, 70(1):62 – 70, 2010. Special Issue In Honor of Ehud Kalai. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0899825608002212`, `doi:10.1016/j.geb.2008.12.003`.

[31] Paul R. Milgrom and Robert J. Weber. A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica*, 50(5):1089–1122, 1982. URL: `http://www.jstor.org/stable/1911865`.

[32] John Morgan. Financing public goods by means of lotteries. *The Review of Economic Studies*, 67(4):761–784, 2000. URL: `http://dx.doi.org/10.1111/1467-937X.00153`, `doi:10.1111/1467-937X.00153`.

[33] John Morgan, Ken Steiglitz, and George Reis. The spite motive and equilibrium behavior in auctions. *Contributions in Economic Analysis & Policy*, 2003. URL: `https://www.degruyter.com/view/j/bejeap.2002.2.issue-1/bejeap.2003.2.1.1102/bejeap.2003.2.1.1102.xml`, `doi:10.2202/1538-0645.1102`.

[34] Roger B. Myerson. Optimal Auction Design. Discussion Papers 362, Northwestern University, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, December 1978. URL: `https://ideas.repec.org/p/nwu/cmsems/362.html`.

[35] Roger B Myerson and Mark A Satterthwaite. Efficient mechanisms for bilateral trading. *Journal of Economic Theory*, 29(2):265 – 281, 1983. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022053183900480`, `doi:https://doi.org/10.1016/0022-0531(83)90048-0`.

[36] Naoko Nishimura, Timothy N. Cason, Tatsuyoshi Saijo, and Yoshikazu Ikeda. Spite and counter-spite in auctions. *mimeo, Purdue University*, 2005.

[37] Paul Pezanis-Christou and Abdolkarim Sadrieh. Elicited bid functions in (a)symmetric first-price auctions. Working Papers 85, Barcelona Graduate School of Economics, June 2003. URL: `https://ideas.repec.org/p/bge/wpaper/85.html`.

[38] Michael Rothschild and Joseph E Stiglitz. Increasing risk: I. a definition. *Journal of Economic Theory*, 2(3):225 – 243, 1970. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022053170900384`, `doi:10.1016/0022-0531(70)90038-4`.

[39] Nicolas Treich and Olivier Armantier. Subjective probabilities in games: an application to the overbidding puzzle. *International Economic Review*, 50(4):1079–1102, 11 2009.

[40] Hal Varian. Position auctions. *International Journal of Industrial Organization*, 25(6):1163–1178, 2007. URL: `https://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:indorg:v:25:y:2007:i:6:p:1163-1178`.

[41] Hal R. Varian. *Mikroökonómia középfokon, Egy modern megközelítés*. Akadémiai Kiadó Rt., Budapest, 2008.

TÁRGYMUTATÓ

Aukcióelmélet előadások

A vevő és az eladó közti egyezség megteremtésére kézenfekvő ötlet valamilyen aukció szervezése. A gondolat messze nem új. Az ókori babilóniaiak, görögök, de a Római Birodalom polgárai is hatalmas tranzakciókat bonyolítottak aukciók segítségével. Manapság így értékesítenek mobil telefon frekvenciákat, olajmezőket, de Németországban az egyes kis szélerőmű tulajdonosok is aukció keretében adják el az általuk megtermelt megújuló energiát. Sokfajta aukció képzelhető el.

A nyertes fizetheti a legnagyobb licitet, a második (harmadik stb.) legnagyobb licitet, de még az is elképzelhető, hogy minden résztvevő fizet és csak a legnagyobb licitet adó nyer. Milyen aukció mechanizmus adja a lehető legnagyobb bevételt? Garantálható-e, hogy a nyertes az legyen, akinek számára az áru birtoklása a legnagyobb hatékonyságot jelenti? Mi van, ha rezervációs árat vezetünk be, vagy mit jelent a kockázatok preferálása?

Ezekre a kérdésekre kell legelőször választ keresnünk ahhoz, hogy megérthessük a modern aukcióelmélet rejtelmeit.