# KORRELÁCIÓ, TORLÓDÁSI JÁTÉKOK, A GYÁVA NYÚL JÁTÉK[1]

FORGÓ FERENC
*Budapesti Corvinus Egyetem*

*Komlósi Sándor 70-ik születésnapjára*

Az $n$-személyes, kétkiszolgálós, egyszerű, vegyes, lineáris torlódási játékok osztályát vizsgáljuk abból a szempontból, hogy mennyire képes a puha korrelált egyensúly (Forgó 2010) által biztosított társadalmi hasznosság megközelíteni a társadalmi hasznosság abszolút maximumát. Erre a célra a kényszerítési érték mérőszámát (Ashlagi et al. 2008) használjuk. Bebizonyítjuk, hogy a vizsgált játékosztályra a kényszerítési érték pontosan 2. Ennek a játékosztálynak egy alosztályát alkotják az $n$-személyes gyáva nyúl játékok, amelyek esetében a kényszerítési érték ugyancsak 2. Ugyanakkor, ha $n = 2$ (a klasszikus gyáva nyúl játék) vagy $n = 3$, akkor a kényszerítési érték $\frac{3}{2}$. Egy környezetvédelmi példán illusztráljuk, hogy miként működik a puha korrelált egyensúly protokollja.

*Kulcsszavak:* korrelált egyensúly, puha korrelált egyensúly, torlódási játékok, gyáva nyúl játék, kényszerítési érték

## 1 Bevezetés

A játékelméletben egészen a kezdetektől látható az a cél, hogy minél nagyobb társadalmi hasznosságot (social welfare, $SW$) tudjunk elérni úgy, hogy ez lehetőleg a játékosok egyéni törekvéseinek eredményeképpen jöjjön létre. Sokféle eszköz áll rendelkezésre, amelyekben közös az eredeti tisztán nemkooperatív és egyszeri szimultán döntéseken alapuló modell módosítása, kiegészítése, általánosítása. Neumann János óta (1928) világos a kevert bővítés jelentősége. Enélkül a legérdekesebb véges játékok esetében általában még az egyensúlyt sem tudjuk biztosítani. Nem véletlen, hogy Nash híres egzisztencia tétele is erre vonatkozik, Nash (1950).

Az általánosítások közül ebben a cikkben a ,,klasszikus" korrelált egyensúllyal ($CE$), Aumann (1974, 1987), illetve ennek is egy speciális általánosításával foglalkozunk, amit puha korrelált egyensúlynak ($SCE$) nevezünk, Forgó (2010). A korrelált egyensúly egyes változataiban közös vonás, hogy az ,,egyensúly" interpretálásában nagy szerepet játszik egy szemléletes forgatókönyv (protokoll). Ennek a forgatókönyvnek a részleteiben különböznek a $CE$ egyes általánosításai.

[1]A kutatást az NKFI K-119930 támogatta. Beérkezett: 2017. február 24. E-mail: ferenc.forgo@uni-corvinus.hu.

Fontos, hogy egy adott játékosztályban mennyire képes pl. az $SCE$ javítani az $SW$-n. Erre a célra Ashlagi et al. (2008) kétféle mérőszámot javasoltak és használtak. A mediációs érték (mediation value, $MV$) azt mutatja meg, hogy az $SCE$ hányszorosára tudja növelni a legjobb esetben az $SW$-t valamilyen referencia szinthez képest. Ilyen lehet pl. a legjobb Nash egyensúlypont ($NEP$), vagy akár a legjobb tiszta Nash egyensúlypont ($PNEP$). A másik a kényszerítési érték (enforcement value, $EV$), ami azt mutatja meg, hogy az $SW$ abszolut maximuma hányszorosa az $SCE$ által elérhető maximális $SW$-nek. Az $MV$ egy „legjobb eset" (best case), míg az $EV$ egy „legrosszabb eset" (worst case) mérőszám. Az $EV$ egy költségmodell keretében megfelel a „stabilitás ára (price of stability)" mutatószámnak, Roughgarden and Tardos (2002), amikor is a viszonyítási alap a legjobb $NEP$. Ebben a cikkben a vizsgált játékosztály a kétszemélyes egyszerű lineáris torlódási játékok osztálya és elsősorban az $EV$ érdekel bennünket.

Megmutatjuk, hogy minden $2 \times 2$-es szimmetrikus bimátrix játék ekvivalens egy kétkiszolgálós, kétszemélyes egyszerű lineáris torlódási játékkal. Ezek között kitüntetett figyelmet érdemelnek a társadalmi dilemmák. Legtöbbet a fogolydilemmával és $n$-személyes általánosításaival foglalkoztak, Carrol (1988) és Hamburger (1973). Közismert, hogy az ($n$-személyes) fogolydilemma esetében egyetlen $CE$ van és ez egybeesik az egyetlen $NEP$-el. Az $SCE$ azonban képes Pareto-javítani a $NEP$ kifizetésen, Forgó (2010), Forgó (2016). Ebben a cikkben a társadalmi dilemmák közül a „gyáva nyúl" (game of chicken) játékkal és $n$-személyes általánosításával foglalkozunk. Egy kitűnő referencia Szilagyi and Somogyi (2010). Megmutatjuk, hogy az $EV$ pontos értéke a vegyes kétkiszolgálós egyszerű lineáris torlódási játékok osztályán 2, az ennek alosztályát alkotó $n$-személyes gyáva nyúl játékok osztályán ez az érték szintén 2. A két- és háromszemélyes gyáva nyúl játékok osztályán viszont jobb a helyzet, $EV = \frac{3}{2}$. Az $SW$-t maximalizáló $SCE$ kiszámítását egy négyszemélyes gyáva nyúl játékon illusztráljuk.

A cikk szerkezete a következő. A második fejezetben az $SCE$-vel kapcsolatos legfontosabb definíciókat és előzményeket tárgyaljuk. A harmadik fejezetben a kétkiszolgálós torlódási játékokkal foglalkozunk és ezeknek a társadalmi dilemmákkal való kapcsolatát vizsgáljuk. A negyedik fejezetben meghatározzuk az $EV$ értékét a „gyáva nyúl" típusú vegyes kétkiszolgálós egyszerű lineáris torlódási játékok, valamint a két- és háromszemélyes gyáva nyúl játékok osztályán. Az ötödik fejezetben egy példát ismertetünk. A hatodik fejezetben összefoglaljuk az eredményeket és további kutatási irányokat jelölünk ki.

## 2 Fogalmak és előzmények

A Nash-egyensúly egy fontos általánosításához vezet, ha a kevert stratégia fogalmát tágabban értelmezzük. Legyen $N = \{1, \ldots, n\}$ a játékosok halmaza és $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ egy véges játék. Amikor $G$ kevert bővítéséről beszélünk, akkor legalábbis a leggyakoribb interpretációban, feltesszük azt, hogy a játékosok egymástól függetlenül, kevert stratégiájuk által meghatározottan, véletlenszerűen választanak tiszta stratégiát, amit sokszor akciónak is neveznek. Ehhez mindegyik játékos külön-külön egy véletlen mechanizmust (random device, $RD$) használ. Ezek az eloszlások egy valószínűségeloszlást generálnak az $S = \times_{i=1}^{n} S_i$ akcióprofilok véges halmazán. Ha félretesszük azt a feltételezést, hogy az egyéni randomizálások egymástól függetlenek, akkor bővülnek a lehetőségek: tetszőleges valószínűségeloszlást használhatunk $S$-en egy akcióprofil véletlenszerű kiválasztására. Ez tulajdonképpen az akcióválasztások összehangolása (korrelálása), amit úgy kell megvalósítani, hogy ne kelljen valamilyen szerződésben a játékosokat az összehangolt cselekvésre kötelezni.

Az egyszerűség kedvéért először kétszemélyes (bimátrix) játékokat tekintünk, a több személyre való kiterjesztés csak jelölésbeli kellemetlenségeket okozna, a lényeg ugyanaz. Jelöljük az első (sor)játékos akcióinak halmazát $I$-vel, a másodikét (oszlop) $J$-vel, az első játékos kifizetéseit $a_{ij}$, a másodikét $b_{ij}$-vel, $i \in I, j \in J$. Jelölje $A = [a_{ij}]$ és $B = [b_{ij}]$ a két játékos kifizetőmátrixát. Legyen $p_{ij}$ az $(i, j)$ akcióprofil választásának valószínűsége. A $p_{ij}$ valószínűségeket rendezzük el egy nemnegatív $P$ mátrixban, amely elemeinek összege 1. A $P$ mátrix köztudott. Ezt a valószínűségeloszlást és az azt reprezentáló $P$ mátrixot korrelált stratégiának nevezzük. Ez már nem a szó eredeti értelmében vett stratégia, és talán az elnevezés sem szerencsés, de általában ez használatos.

A véletlen választást, az $RD$-t , egy „játékvezető" működteti. Amint a választás megtörtént, a játékvezető az első játékosnak, úgy, hogy a második ezt ne tudja, javasolja, hogy az $i$ akciót játssza. Ugyanígy javasolja a második játékosnak, hogy a $j$ akciót játssza. A korrelált stratégiát korrelált egyensúlynak hívjuk, ha várható értékben egyik játékosnak sem érdeke a játékvezető javaslatát elutasítani és valami mást játszani, mint az éppen javasolt akció, feltéve, hogy a másik játékos megfogadja a játékvezető javaslatát. Itt tulajdonképpen a játék lejátszásának egy forgatókönyvét adtuk meg. Ez a forgatókönyv a korrelált egyensúly feltalálójának, Aumannak (1974) a nevéhez fűződik.

A fentiek alapján a korrelált egyensúlyok halmaza egyenlő az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer összes megoldásainak halmazával

$$\begin{gathered} p_{ij} \geq 0\,, \quad i \in I,\; j \in J \\ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} = 1 \\ \sum_{j \in J} (a_{ij} - a_{kj}) p_{ij} \geq 0\,, \quad i, k \in I \\ \sum_{i \in I} (b_{ij} - b_{il}) p_{ij} \geq 0\,, \quad j, l \in J\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Ezt az egyenlőtlenségrendszert használhatjuk a korrelált egyensúly formális definíciójára is. Az egyenlőtlenségeket szokás „ösztönző feltételeknek" (incentive constraints) nevezni.

**1. Definíció.** *A $P = [p_{ij}]$ valószínűségeloszlást a $G = (A, B)$ bimátrix játék korrelált egyensúlyának ($CE$) nevezzük, ha kielégíti az (1) egyenlőtlenségrendszert.*

A korrelált egyensúly valóban általánosítása a Nash-egyensúlynak, amit a következő egyszerűen igazolható tételben fogalmazunk meg.

**1. Tétel** (Aumann 1974). *Ha $(x, y)$ a $G = (A, B)$ bimátrix játék $NEP$-je, akkor a $p_{ij} = x_i y_j$, $i \in I$, $j \in J$ korrelált stratégia $CE$. Ha viszont $p_{ij}$ egy olyan $CE$, amelyre fennáll, hogy $p_{ij} = u_i v_j$, $i \in I$, $j \in J$ valamely $u, v$ valószínűségi vektorokra (vagyis a $p_{ij}$ valószínűségekből összeállított $P$ mátrix rangja 1), akkor az $(u, v)$ stratégiaprofil egy $NEP$.*

A $CE$-t nemcsak bimátrix játékokra, hanem akárhány személyes véges játékokra is lehet definiálni, mint azt a későbbiekben meg is fogjuk tenni. A $CE$ itt is egy eloszlás a játék lehetséges kimenetelein. Az interpretáció teljesen ugyanaz: a játékvezető kisorsol egy akció $n$-est, majd minden játékosnak titokban javasolja, hogy játssza a kisorsolt akciót. Ekkor egyetlen játékos sem tudja javítani a várható kifizetését azzal, hogy eltér a játékvezető által javasolt akciótól.

A $CE$-k halmaza sokkal egyszerűbb szerkezetű, mint a $NEP$-eké: egy konvex politóp. Általában végtelen sok $CE$ létezik. Ezek közül lehet úgy választani (pl. a játékvezető választhat), hogy valamilyen célt reprezentáló függvényt maximalizálunk a $CE$-k halmazán és a kiválasztott $CE$-t majd a játékvezető implementálja egy megfelelő $RD$ segítségével. Ha a játékosok hasznosságai összeadhatók, akkor egy ilyen cél lehet a hasznosságok összegének a maximalizálása. Az így kapott $CE$ egyszerre valósít meg „kollektív" hasznosságot és stabilitást, abban az értelemben, hogy a kollektív „optimum" önmegvalósító (self enforcing), ha a játékosok hajlandók a játék szabályait elfogadni (azt tehát, hogy a mindenki által ismert eloszlás szerint sorsol a játékvezető és a leírt titoktartási szabályokat betartják).

Felmerült az a kérdés, hogy a $CE$ további általánosításával lehetne-e még nagyobb $SW$-t elérni. A továbbiakban, hacsak nem jelezzük, $SW$-n automatikusan az egyes játékosok hasznosságainak (kifizetéseinek) az összegét értjük. Világos, hogy ez egyáltalán nem magától értetődő, de mivel az irodalomban az egyes egyensúlytípusok összehasonlításánál általában ezt használják, nem érdemes ettől eltérni.

Moulin és Vial (1978) tértek el először az Aumann-féle protokolltól. Csak bimátrix játékokat vizsgáltak. Nagyobb elkötelezettséget követelnek a játékosoktól: Legelőször dönteniük kell, hogy vakon követik-e a játékvezető javaslatát a sorsolás megtörténte után, vagy nem akarják elkötelezni magukat, amikor is nem kapnak semmilyen javaslatot, de azt csinálhatnak, amit akarnak. Valami olyasmire gondolhatunk, mint amikor valakinek döntenie kell, hogy szabad kezet adjon-e a brókerének a befektetés kiválasztásához, vagy pedig saját maga hozza meg a befektetési döntést.

Szemléletes, ha a forgatókönyvet a következőképpen képzeljük el. A játékvezető elvégzi a sorsolást az adott, közismert valószínűségeloszlás szerint. A kisorsolt akciókat (illetve egy papírt, amire az akció fel van írva) beteszi az egyes játékosok számára kijelölt piros borítékokba. A játékosok valamennyi akcióját, azt is, amelyik a piros borítékban van, beteszi egy fehér borítékba. A játékosok egymástól függetlenül (szimultán) választanak a piros és a fehér boríték közül. Ha egy játékos a pirosat választotta, akkor azt az akciót kell végrehajtania, ami a borítékban van. Ha a fehéret választotta, akkor szabadon választ a borítékban lévő akciók közül, vagyis az akcióhalmazából bármelyiket választhatja. A valószínűségeloszlást, amely szerint a játékvezető a sorsolást végzi, gyenge korrelált egyensúlynak (weak correlated equilibrium, $WCE$)-nek nevezzük, ha egyik játékos sem tudja növelni a várható kifizetését azzal, ha a piros boríték helyett a fehéret választja, feltéve, hogy mindenki más a pirosat választotta.

Moulin és Vial (1978) mutattak példát arra, amikor a $WCE$ nagyobb $SW$-t ad, mint bármelyik $CE$.

Felmerül a kérdés, hogy nem lehet-e a $CE$ protokollját másképpen megváltoztatni úgy, hogy továbbra is a $CE$ általánosítását kapjuk, de olyan játékok esetében is (nem mindegyiknél természetesen) el tudunk érni Pareto-jobb kifizetéseket, amelyeknél a $WCE$ ezt nem tudja megtenni. A következő protokoll alapján Forgó (2010) a $CE$ egy új általánosítását vezette be, amelyet ,,puha korrelált egyensúlynak" (soft correlated equilibrium, $SCE$) nevezett. A protokoll leírásánál célszerű ismét a ,,borítékos" interpretációt használni a szemléletesség kedvéért.

Most is azzal kezdünk, hogy a játékvezető egy köztudott valószínűségeloszlás szerint kisorsol egy akcióprofilt. Minden játékos számára a saját piros borítékjába teszi a kiválasztott akciót. A fehér borítékjába a többi akciókat. Vegyük észre a $WCE$-től való eltérést: míg ott minden akciót elhelyezett a játékvezető a fehér borítékba, itt a kiválasztott (piros borítékban lévő) akciót nem. Innentől kezdve a protokoll ugyanaz. A játékosok szimultán választanak a piros és a fehér borítékok közül. A valószínűségeloszlást $SCE$-nek nevezzük, ha várható értékben egyik játékosnak sem érdeke a fehér borítékot választani, feltéve, hogy az összes többi a pirosat választotta.

Nézzük meg, hogy miképpen tudjuk jellemezni a háromféle korrelált egyensúlyt, a $CE$-t, a $WCE$-t és az $SCE$-t egy lineáris egyenlőtlenségrendszer segítségével $n$-személyes véges játékok esetében. Az egyenlőtlenségek az úgy nevezett ,,ösztönző feltételek", amelyek annak a várható hasznát, hogy egy játékos engedelmeskedik a játékvezetőnek, hasonlítja össze azzal, amikor ezt nem teszi meg, mindig feltéve, hogy a többi játékos követi a játékvezető utasításait.

Legyen $G = \{S_1, \ldots, S_n; f_1, \ldots, f_n\}$ egy $n$-személyes játék normál formában, az $S_1, \ldots, S_n$ véges akcióhalmazokkal és az $f_1, \ldots, f_n$ kifizetőfüggvényekkel. Az ösztönző feltételeket az $i$ rögzített játékosra írjuk fel és az egyszerűség kedvéért ezt az indexet elhagyjuk ott, ahol ez nem okoz félreértést.

A következő jelöléseket használjuk:

$N = \{1, \ldots, n\}$: a játékosok halmaza.

$I = \{1, \ldots, m\}$: az $i$ játékos akcióhalmaza, amelyeket az akciók indexei reprezentálnak.

$S_{-}$: az $i$ játékos kivételével az összes többi játékos akcióhalmazainak

Descartes-szorzata (a csonka akcióprofilok halmaza).

$s_- \in S_-$: egy csonka akcióprofil.

$(j, s_-)$, $j \in I, s_- \in S_-$: egy (teljes) akcióprofil.

$S = \{(j, s_-) : j \in I, s_- \in S_-\}$: a (teljes) akcióprofilok halmaza.

$f(j, s_-)$: az $i$ játékos kifizetése, ha ő a $j$ akciót játssza, a többiek pedig $s_-$-t.

$p$: egy valószínűségeloszlás $S$-en.

$p(j, s_-)$: az a valószínűség, amelyet a $p$ eloszlás a $(j, s_-)$ akcióprofilhoz rendel.

A $CE$ olyan $p$ valószínűségeloszlás, amely minden $i$-re ($i \in N$) kielégíti az alábbi ösztönző feltételt

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-)$$

minden $j, k \in I$-re, vagy, ami ezzel ekvivalens

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)\frac{p(j, s_-)}{\sum_{t_- \in S_-} p(j, s_-)} \geq \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)\frac{p(j, s_-)}{\sum_{t_- \in S_-} p(j, s_-)}$$

minden $j, k \in I$-re, feltéve, hogy $\sum_{s_- \in S_-} p(j, s_-) > 0$. Itt a bal oldalon a kifizetés várható értéke szerepel akkor, ha az $i$ játékos engedelmeskedik a játékvezetőnek, a jobb oldalon pedig annak a kifizetésnek a várható értéke, ha a $k \in I$ stratégiát választja függetlenül attól, hogy mi a játékvezető javaslata.

A $WCE$ olyan $p$ valószínűségeloszlás, amely kielégíti minden $i$ ($i \in N$) játékos alábbi ösztönző feltételeit

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k, s_-)p(j, s_-) \quad \text{minden } k \in I\text{-re.}$$

A bal oldalon annak a kifizetésnek a várható értéke van, amit az $i$ játékos kap, ha elkötelezi magát, hogy mindig végrehajtja a játékvezető javaslatát, a jobb oldalon pedig az a várható kifizetés szerepel, amelyet az $i$ játékos akkor kap, ha nem kötelezi el magát és a $k \in I$ akciót választja. Világos, hogy a $WCE$ általánosítása a $CE$-nek, hiszen ösztönző feltételei a $CE$ bizonyos ösztönző feltételeinek összegzésével álltak elő.

Az $SCE$ definiálásához kell némi előkészület. Egy rögzített $j \in I$-re tekintsük az alábbi feltételeket:

$$\sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-)p(j, s_-) \geq \sum_{s_- \in S_-} f(l, s_-)p(j, s_-) \quad \text{minden } l \in I\text{-re,}$$

és nevezzük ezeket $j$-halmaznak. Világos, hogy a $j$-halmazok egyesítése minden $j \in I$-re pontosan a $CE$ ösztönző feltételeinek a halmazát adja az $i$ játékosra. A $WCE$ ösztönző feltételeit az $i$ játékosra úgy kapjuk, hogy minden $j$-halmazból a $k$ indexű feltételeket összegezzük, $k \in I$.

Ugyanezt tesszük az $SCE$ esetében, azzal a különbséggel, hogy a $j$-halmazból más feltételeket adunk össze, mint a $WCE$ esetében. Tekintsük a következő halmazt

$$K = \prod_{j=1}^{m} (I \setminus \{j\}) \ .$$

A $K$ elemeit megengedett (index)halmazoknak nevezzük. Például, ha $m = 3$, akkor $(2, 3, 2)$ megengedett, míg $(1, 3, 2)$ nem megengedett. Az $SCE$ ösztönző feltételeit az $i \in N$ játékos számára az alábbi egyenlőtlenségekkel definiáljuk

$$\sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(j, s_-) p(j, s_-) \geq \sum_{j \in I} \sum_{s_- \in S_-} f(k_j, s_-) p(j, s_-)$$

minden $(k_1, \ldots, k_m) \in K$ megengedett halmazra.

Valóban, az $SCE$ ösztönző feltételei az $i$ játékos számára $m$ egyenlőtlenség összes lehetséges összegei, amelyek mindegyikét egy-egy $j$-halmazból vesszük azzal a megkötéssel, hogy azokat az egyenlőtlenségeket, amelyeket a $WCE$ definiálásakor használtunk, nem választhatjuk. Már a $WCE$ és az $SCE$ definíciójából is látszik, hogy a $CE$ két különböző általánosításáról van szó, és ezek egyike sem általánosítása a másiknak.

Az $SCE$ ösztönző feltételeinek száma az $i$ játékosra $(m-1)^m$. Ez nagyon sok, összehasonlítva azzal, hogy ugyanez a $WCE$ esetében $m$, míg a $CE$ esetében $m^2$. Ezek között az egyenlőtlenségek között sok redundáns van, amelyek kiküszöbölése nehéz feladat, de még a redundancia megszüntetése után is túl sok marad ahhoz, hogy nagy $m$ esetében bármit is lehessen vele kezdeni. A probléma azonban megoldható. Lehet ugyanis egy olyan ekvivalens egyenlőtlenségrendszert definiálni, amely esetében a feltételek száma csak kvadratikusan növekszik $m$ növekedésével.

**2. Tétel** (Forgó 2010). *Minden $i \in N$ játékos esetében van olyan lineáris egyenlőtlenségrendszer, amelynek mérete (a változók és feltételek száma) kvadratikusan nő az akciók számának növekedésével, és az általa meghatározott lehetséges tartomány alkalmas vetítése megegyezik az $SCE$-k halmazával.*

Mivel az $SCE$ (és a $WCE$) fogalomalkotásnak a legfőbb célja az, hogy ,,jobb" várható kifizetéseket érjünk el, mint a $CE$-vel, az általánosítás erejét azzal lehet demonstrálni, hogy mutatunk olyan fontos játékosztályokat, ahol az $SCE$ jobban teljesít. A bináris játékokban (minden játékosnak csak két lehetséges akciója van), ahol a $WCE$-ek halmaza megegyezik a $CE$-ek halmazával, az $SCE$ jobban teljesíthet, de nem bináris játékokban is lehet hatásos, Forgó (2010). A későbbiekben ezt a torlódási játékok egyes osztályaira tesszük majd meg.

Hogyan interpretálhatjuk az $SCE$-t általában? (Az egyes konkrét játékokban konkrétabb értelmezést is adhatunk.) Gondoljunk az egész forgatókönyvre úgy, hogy van egy klub, és a játékosok szabadon dönthetnek arról, hogy belépnek-e. Tudják, hogy a klubtagság előnyökkel és hátrányokkal is járhat. Előny, hogy a sorsolás után a kisorsolt akciók csak a klubtagok számára lehetőségek, a kívül maradottaknak nem. Hátrány, hogy ha belépnek a klubba, a klub szabályzata kimondja, hogy feltétlenül engedelmeskedni kell és azt az akciót kell végrehajtani, amely ki lett sorsolva. $SCE$-ben senkinek sem érdeke a klubból kilépni, ha a többiek benn maradnak. Különböző játékokban konkrét formát ölt a „klub", a „szabályok", az „akciók" stb.

Milyen játékosok hajlandók részt venni olyan játékokban, amelyeket a $WCE$ vagy az $SCE$ protokollja szerint játszanak? Azt várhatjuk, hogy a minél nagyobb várható kifizetésben érdekelt, szabálykövető, intelligens játékosok hajlandók részt venni olyan játékban, amiben megvan a lehetősége nagyobb kifizetés elérésének, amennyiben mindenki betartja a szabályokat és/vagy megvan az eszköz a szabályok betartatásának. A $WCE$ és az $SCE$ ebből a szempontból is hasonlóak, csak a szabályok különböznek valamennyire. A legtöbb sportágban alkalmaznak és betartatnak sokszor teljesen önkényesnek tűnő szabályokat, amelyek egyik célja, hogy a játékot érdekessé tegyék. A sport népszerűsége nem kérdőjelezhető meg.

A korreláción kívül vannak más eszközök is a hatékonyság növelésére. Az egyik experimentális kutatás, amelyet Bracht and Feltovich (2008) végzett el, azt mutatja, hogy a játékosok az elvárható módon cselekszenek olyan játékokban, ahol az előzetes elkötelezettség lehetősége integráns része a játéknak, és azt a célt szolgálja, hogy a várható kifizetéseket növelni lehessen. Egy másik kísérletben Cason and Sharma (2006) azt találta, hogy a $CE$ realizálható, ha a játékosok biztosak abban, hogy mások is követik a játékvezető ajánlásait. Ez azt sugallja, hogy a kritikus kérdés nem annyira a szabályok és a protokoll, hanem a játékosok kölcsönös bizalma. Természetesen ezt a bizalmat csak úgy lehet tesztelni, ha a szabályok és a protokoll mindenki számára világosak.

# 3 Puha korrelált egyensúly egyszerű, kétkiszolgálós, lineáris torlódási játékokban

Ha különböző korrelált egyensúly koncepciók ($CE, WCE, SCE$) „erejét" szeretnénk összehasonlítani abból a szempontból, hogy mennyire növeli az $SW$-t a $NEP$-hez képest, többféle megközelítést alkalmazhatunk. A számítástudományban jól bevált az ún. legrosszabb eset elemzés (worst case analysis) és az átlagos eset elemzés (average case analysis). Az előbbit használva azt határozzuk meg, hogy egy problémaosztályon belül a legrosszabb esetben mennyire javul az $SW$ értéke abszolút vagy relatív értelemben valamely korrelált egyensúly forgatókönyvének alkalmazásával. Az utóbbit használva a problémaosztályból véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint választunk egy problémát, arra alkalmazzuk a korrelációt, és a korreláció eredményeképpen kapott átlagos javulást tekintjük mértéknek. Ezen kívül még vannak más megközelítések is.

Az első és talán a legszebb példája a legrosszabb eset elemzésnek játékelméleti kontextusban Roughgarden és Tardos (2002) munkája, akik a költségalapú torlódási játékok egy osztályán határozták meg az „anarchia árát" (price of anarchy), ami a legrosszabb $NEP$ társadalmi költségének és a minimális társadalmi költségnek a hányadosa. A „stabilitás ára" (price of stability) ugyanez a hányados azzal különbséggel, hogy a legjobb $NEP$ társadalmi költsége a viszonyítási alap.

Ha nem a $NEP$ a viszonyítási alap, hanem a korrelált egyensúly valamilyen fajtája és ugyanezt a megközelítést alkalmazzuk, akkor egy „alacsonyabb szintű" irányított stabilitás árát kaphatjuk meg. Christodoulou és Koutsoupias (2005) kiszámították a $CE$ esetében a stabilitás árát a torlódási játékok egy osztályára. Ashlagi et al. (2008) társadalmi költségek helyett a társadalmi jóléttel számoltak. Első látásra úgy tűnik, mintha ez nem lenne lényeges különbség, de az említett szerzők meggyőző példákat mutatnak arra, hogy egészen eltérő eredményeket kaphatunk a két megközelítéssel. Mi a következőkben ez utóbbit választjuk, tehát a játékosok kifizetőfüggvényeinek összegeként értelmezett $SW$-t használjuk. A mérőszámok formális definícióit kicsit későbbre halasztjuk.

A játékosztály, amit tekintünk, a torlódási játékok egy alosztálya. Az egyszerű torlódási játékokban a játékosok választhatnak bizonyos kiszolgálók között, amelyeknek a szolgálatait szeretnék igénybe venni. Egy játékos hasznossága (kifizetése) csak attól függ, hogy hányan használják (választották) az illető kiszolgálót. Például ha a közlekedők választhatnak két alternatív útvonal között, amelyek $A$ várost $B$ várossal kötik össze, akkor, ha sok közlekedő választja az egyik utat, ezáltal torlódást és lassulást okozva, akkor az ezen úton haladók hasznossága csökken a használók számának növekedésével. Mi csak két-kiszolgálós torlódási játékokkal foglalkozunk.

Először az általános esetet nézzük, amikor a játékosok száma $n \geq 2$. Egy ilyen játékot a legegyszerűbben egy „torlódási alakkal" (congestion form) adhatunk meg, ami két nemnegatív $n$ komponensű vektor: $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. A jelentése a következő: ha $j$ darab játékos választja az $F1$ első kiszolgálót, akkor mindegyik játékos $a_j$ hasznossághoz jut, és ha $k$ darab játékos választja az $F2$ második kiszolgálót, akkor ezek mindegyike $b_k$ hasznossághoz jut. A torlódási alakból konstruálni tudunk egy torlódási játékot. A játékosok halmaza $N = \{1, \ldots, n\}$, minden játékos akcióhalmaza $\{F1, F2\}$, amelyet röviden $\{1, 2\}$-vel jelölünk, a kifizetéseket pedig az $a$ és $b$ hasznosságvektorok határozzák meg. Egy akcióprofil $(i_1, \ldots, i_n)$, ahol $i_j \in \{1, 2\}$, $j \in N$. Például, ha $n = 4$, akkor $(1, 1, 2, 1)$ azt a helyzetet jelenti, amikor az $1, 2, 4$ játékosok az $F1$ kiszolgálót, a 3 játékos pedig az $F2$ kiszolgálót választja. Jelöljük az akcióprofilok halmazát $S$-el.

Legyen $I_1(i_1, \ldots, i_n) = \{k \in N : i_k = 1\}$, és $I_2 = N \setminus I_1$, amelyek azoknak a játékosoknak a halmazai, akik rendre az $F1$ és $F2$ kiszolgálókat választották az $(i_1, \ldots, i_n) \in S$ akcióprofilban. Jelölje $p_{i_1,\ldots,i_n}$ annak a valószínűségét, hogy a játékvezető az $(i_1, \ldots, i_n)$ akcióprofilt választja, $|T|$ pedig egy $T$ véges halmaz elemeinek számát. Az $f_j(i_1, \ldots, i_n)$ hasznosság, amit a $j$ játékos kap, írható a következőképpen:

$$f_j(i_1, \ldots, i_n) = \begin{cases} a_{|I_1(i_1,\ldots,i_n)|}, & \text{ha } i_j = 1 , \\ b_{|I_2(i_1,\ldots,i_n)|}, & \text{ha } i_j = 2 . \end{cases}$$

Definiáljuk a $g_j$ függvényt

$$g_j(i_1,\dots,i_n)=\begin{cases} a_{|I_1(i_1,\dots,i_n)|+1}\,, & \text{ha } i_j=2\,,\\ b_{|I_2(i_1,\dots,i_n)|+1}\,, & \text{ha } i_j=1\,.\end{cases}$$

$g_j(i_1,\dots,i_n)$ az a hasznosság, amelyet a $j$ játékos kapna, ha az $F2$ kiszolgálóról az $F1$-re váltana, vagy az $F2$-ről $F1$-re, feltéve, hogy senki más nem változtatja meg a választását.

Ebben a speciális esetben (két kiszolgáló van) a torlódási játék egy bináris játék, amelyben az $SCE$-k halmazát definiáló ösztönző feltételek igen egyszerű formát öltenek. A $j$ játékos ösztönző feltétele (csak egy ilyen van!) az alábbi módon írható fel

$$\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in S} f_j(i_1,\dots,i_n)p_{i_1,\dots,i_n} \ge \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in S} g_j(i_1,\dots,i_n)p_{i_1,\dots,i_n}\,.$$

Az $SW$ várható értéke

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in S} f_j(i_1,\dots,i_n)p_{i_1,\dots,i_n}\,.$$

Ha az $SW$-t maximalizálni akarjuk az $SCE$-k halmazán, akkor egy $LP$ feladatot kapunk, amelyet „teljes méretű $LP$"-nek fogunk nevezni. Az a tény, hogy a torlódási játékban a kifizetéseket csak az határozza meg, hogy hányan választják az $F1$ és $F2$ kiszolgálókat, lehetővé teszi egy olyan $LP$ feladat használatát, amelynek a nemnegativitási és a normalizáló feltételeken kívül csak egy feltétele van. Ezt fogjuk „kisméretű $LP$"-nek nevezni. Jelölje $t$ azoknak a játékosoknak a számát, akik az $F2$ kiszolgálót választották, $t=0,1,\dots,n$. Legyen továbbá $S_t=\{(i_1,\dots,i_n)\in S : |I_2(i_1,\dots,i_n)|=t\}$ azoknak az akcióprofiloknak a halmaza, amelyekben $t$ játékos választotta $F2$-t. Tegyük fel, hogy valamennyi $p_{i_1,\dots,i_n}$ valószínűség egyenlő, $(i_1,\dots,i_n)\in S_t$, és jelöljük ezt $p_t$-vel.

Ennek a jelölésnek a használatával minden játékos ösztönző feltétele az alábbi

$$\begin{aligned}(a_n-b_1)p_0+\sum_{t=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{t-1}(b_t-a_{n-t+1})+\binom{n-1}{t}(a_{n-t}-b_{t+1})\right]p_t\,+\\ +\,(b_n-a_1)p_n\ge 0\,.\end{aligned}\tag{3}$$

A normalizáló feltétel és a nemnegativitási feltételek

$$\begin{gathered}\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}p_t=1\,,\\ p_0,p_1,\dots,p_n\ge 0\,,\end{gathered}\tag{4}$$

és az $SW$

$$\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}\big(b_t t+a_{n-t}(n-t)\big)p_t\,.$$

Így a kisméretű $LP$ az a feladat, amely az $SW$-t maximalizálja a (3) és (4) feltételek mellett. Ez egy ,,könnyű" feladat, a játékosok számában lineáris idő alatt oldható meg, Dyer (1984). Nem nehéz megmutatni, hogy ha $p_0^*$, $p_1^*$, $\ldots$, $p_n^*$ a kisméretű $LP$ egy optimális megoldása, akkor a

$$p^*_{i_1,\ldots,i_n} = p^*_t, \quad (i_1,\ldots,i_n) \in S_t,\ t = 0,1,\ldots,n \tag{5}$$

a teljes méretű $LP$ egy (nem az egyetlen!) optimális megoldása, amely ugyanakkora $SW$ értéket szolgáltat, mint a kisméretű $LP$ optimális célfüggvényértéke.

Az $SCE$ erejének mérésére általában két mutatószámot használnak, amelyeket Ashlagi et al (2008) javasoltak a $CE$-re. Ezek a ,,mediációs érték" ($MV$) és a ,,kényszerítési érték" ($EV$). Mi ebben a cikkben csak az $EV$-vel foglalkozunk, ami költségmodellben a stabilitás árának felel meg.

Legyen $C$ a véges játékok egy osztálya és $G \in C$. Jelölje $P(G)$ a $G$ akcióprofiljain értelmezett összes valószínűségeloszlások halmazát, és $S(G)$ az $SCE$-k halmazát. Jelöljük $SW(p)$-vel a $p$ eloszláshoz tartozó várható társadalmi hasznosságot (a játékosok várható hasznosságainak az összege). Definiáljuk az $EV(G)$ kényszerítési értéket az alábbi módon

$$EV(G) = \frac{\max_{p\in P(G)} SW(p)}{\max_{p\in S(G)} SW(p)}\ .$$

Az $EV$ kényszerítési értéket a $C$ játékosztályon pedig így definiáljuk

$$EV = \sup_{G\in C} EV(G)\ .$$

Az $EV$ egy valódi ,,legrosszabb-eset" elemzés eredménye, és azt mutatja, hogy (relatíven) maximum mennyit veszíthetünk az $SW$ maximumához képest az $SCE$ protokollját alkalmazva. Nyilván az $EV = 1$ a legjobb érték.

Ha ezeket az értékeket konkréten ki szeretnénk számolni, illetve becslést adni rájuk, a legegyszerűbb esetre, a két-kiszolgálós, lineáris torlódási játékokra kell szorítkozunk, illetve, ha még egyszerűbb esetet akarunk elemezni, akkor a játékosok számát is a lehető legkisebbnek, kettőnek kell vennünk. Persze ez utóbbi esetben a linearitás automatikusan teljesül. Ezek a játékok szoros kapcsolatban vannak a társadalmi dilemma (social dilemma, $SD$) játékokkal.

Egy $SD$ olyan szimmetrikus kétszemélyes bináris bimátrix játék, amelynek valamely ,,dilemma típusú" tulajdonsága van (általában intuícióellenes vagy problémás $NEP$ létezése) A leghíresebb $SD$ a fogolydilemma (prisoners' dilemma, $PD$). Más példák: nemek háborúja, gyáva nyúl, szarvasvadászat, galamb-héja stb.). Bevezető játékelmélet könyvekben lehet olvasni a hozzájuk tartozó történetekről (például Osborne and Rubinstein (1994), Forgó et al. (1999)). A szimmetrikus kétszemélyes bináris bimátrix játékok és az egyszerű torlódási játékok kapcsolatát két, szinte triviális állítás formájában fogalmazzuk meg.

**1. Állítás** (Forgó 2016). *Minden szimmetrikus bináris bimátrix játék egy kétszemélyes, kétkiszolgálós (lineáris) torlódási játék.*

*Bizonyítás.* Egy szimmetrikus bináris bimátrix játékot az $a, b, c, d$ paraméterek határoznak meg

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ A & a,a & b,d \\ B & d,b & c,c \end{array}$$

Az ehhez tartozó torlódási alak

$$\begin{array}{lcc} & F1 & F2 \\ \text{Használók száma} & A & B \\ 1 & b & d \\ 2 & a & c \end{array} \tag{6}$$

Például a generikus $PD$ a $0 \le b < c < a < d$ paraméterekkel adható meg. A hozzátartozó torlódási alakban $A$ reprezentálja a „kooperál", $B$ pedig a „nem kooperál" „kiszolgálókat". Ez egy vegyes torlódási játék, amennyiben az egyik kiszolgálónál növekszik, míg a másiknál csökken a játékosok hasznossága a torlódás növekedésével. Az sem mindegy, hogy a legalacsonyabb hasznosság annál a kiszolgálónál van-e, amelynél a hasznosságok növekszenek a „torlódás" növekedésével úgy, mint a $PD$ esetében, vagy ott van a legalacsonyabb hasznosság, ahol a hasznosságok csökkennek a torlódás növekedésével, úgy, mint a „gyáva nyúl" ($GN$) játéknál, amit a következő fejezetben fogunk vizsgálni.

Az 1. Állítás megfordítása is igaz.

**2. Állítás** (Forgó 2016). *Minden kétszemélyes kétkiszolgálós torlódási játék reprezentálható egy szimmetrikus bimátrix játékkal.*

*Bizonyítás.* Ha a torlódási alak a (6) formában van megadva, akkor mindkét játékosnak $F1$ és $F2$ a választási lehetősége, és a játékot az alábbi szimmetrikus bimátrix játékként adhatjuk meg:

$$\begin{array}{ccc} & F1 & F2 \\ F1 & a,a & b,d \\ F2 & d,b & c,c \end{array}$$

□

# 4 „Gyáva nyúl" típusú, vegyes, kétkiszolgálós, egyszerű, lineáris torlódási játékok

Az $n$-személyes $GN$-típusú vegyes kétkiszolgálós egyszerű lineáris torlódási játékot (ezentúl röviden csak $GN$-típusú játék) az alábbi torlódási alakkal adjuk meg.

$$\begin{array}{ll} F1 & F2 \\ a_1 = (n-1)x & b_1 = y \\ a_2 = (n-2)x & b_2 = y + z \\ \dots & \dots \\ a_t = (n-t)x & b_t = y + (t-1)z \\ \dots & \dots \\ a_{n-1} = x & b_{n-1} = y + (n-2)z \\ a_n = 0 & b_n = y + (n-1)z\ . \end{array} \tag{7}$$

A lineáris torlódási függvényeket meghatározó $x, y, z$ nem-negatív paraméterekről feltesszük, hogy $x > 0$, $y$ és $z$ közül legalább az egyik nem 0. Az $F1$ első kiszolgáló esetében nem növekszik, az $F2$ második kiszolgáló esetében nem csökken egy használó hasznossága. Kissé sérti az általánosságot, de nagymértékben megkönnyíti az elemzést, ha a legalacsonyabb hasznosságot 0-ra normalizáljuk.

Először meghatározzuk ezen a játékosztályon az $EV$ értékét. Ha bevezetjük a $q_t = \binom{n}{t} p_t$, $t = 0, 1, \dots, n$ új változókat, a kisméretű $LP$ feladat ($SW$ maximalizálása a (3), (4) feltételek mellett) a (7) táblázatot felhasználva némi átalakítás és egyszerűsítés után a következő formát ölti, miután bevezetjük a következő jelöléseket, amelyekben explicitté tesszük a paraméterektől való függőséget.

$$C(n, x, y, z, t) = t(n - 2t + 1)x + (2t - n)y + t(2t - n - 1)z$$
$$W(n, x, y, z, t) = t(n - t)x + t(y + (t - 1)z)\ .$$

A kisméretű $LP$

$$\begin{aligned} P: \qquad & \max \sum_{t=0}^{n} W(n, x, y, z, t) q_t \\ & \sum_{t=0}^{n} C(n, x, y, z, t) q_t \geq 0 \\ & \sum_{t=0}^{n} q_t = 1, \quad q_t \geq 0, \ \ t = 0, 1, \dots, n\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Emlékeztetünk arra, hogy korábbi jelöléseinkkel összhangban $t$ játékos választja $F2$-t, $n - t$ játékos pedig $F1$-et. Az $n, x, y, z$ paraméterek adott értékei mellett a $P$ feladat optimális célfüggvényértéke adja meg azt a maximális $SW$-t, amit az $SCE$ segítségével realizálni lehet. Hasznos lesz a következőkben az alábbi egyszerű lemma. Jelöljük $P(n, x, y, z)$-vel $P$ optimális célfüggvényértékét.

**1. Lemma**. *Ha* $\lambda > 0$, *akkor* $W(n, \lambda x, \lambda y, \lambda z, t) = \lambda W(n, x, y, z, t)$ *és* $P(n, \lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda P(n, x, y, z)$ *minden* $n, x, y, z, t$*-re.*

*Bizonyítás.* A $P$ feladat célfüggvényébe és feltételeibe való behelyettesítéssel azonnal kapjuk a lemma állítását. □

**1. Következmény**. *EV értékét nem befolyásolja az $x, y, z$ paramétereknek egy $\lambda > 0$ faktorral való átskálázása.*

**2. Következmény**. *Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $y$ és $z$ közül valamelyik értéke 1.*

**3. Tétel**. *A GN-típusú játékok osztályára $EV \leq 2$.*

*Bizonyítás.* Két esetet különböztetünk meg.

a) $x \leq z$. Ekkor $W$ a $t$ valós szám konvex (lineáris, ha $x = z$) kvadratikus függvénye a $[0, n]$ intervallumon. Így maximumát az intervallum valamelyik (vagy mindkettő) végpontjában veszi fel. Mivel $W(n, x, y, z, 0) = 0$ és $W(n, x, y, z, n) > 0$, a maximumpont $t = n$. Mivel $C(n, x, y, z, n) = n(n-1)(z-x) + ny > 0$, ezért $q_n = 1$, $q_t = 0$, $t \neq n$ kielégíti a (8) feltételt, és ezáltal lehetséges megoldása $P$-nek, ezért $EV = 1$.

b) $x > z$. Tegyük fel, hogy $n$ páros. Ekkor $q_{\frac{n}{2}} = 1$, $q_i = 0$, $i \neq \frac{n}{2}$ egy $SCE$, amit ellenőrizhetünk a $P$ feltételeibe való behelyettesítéssel. Valóban

$$C(n, x, y, z, \frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(x - z) > 0\ .$$

A $W(n, x, y, z, t)$ egész számegyenesen vett $t$ szerinti abszolút maximuma a

$$t^* = \frac{y + nx - z}{2(x - z)} \tag{9}$$

pontban van. Azonnal látszik, hogy $t^* \geq \frac{n}{2}$. Ha $t^* \geq n$, mivel $W$ a $t$ konkáv kvadratikus függvénye és ezért monoton növekvő a maximumpontjáig, ezért a $[0, n]$ intervallumon a maximumát a $t = n$ pontban veszi fel. Így az alábbi becslést kapjuk $EV$-re

$$EV \leq \frac{W(n, x, y, z, n)}{W(n, x, y, z, \frac{n}{2})} = \frac{n(y + (n-1)z)}{\frac{n^2}{4}(x + z) - \frac{n}{2}z + \frac{n}{2}y} < 2\ . \tag{10}$$

Tekintsük most azt az esetet, amikor $t^* < n$. Ekkor (9)-ből az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk

$$y < nx - (2n - 1)z\ . \tag{11}$$

Ha $z > 0$, akkor a 2. Következmény miatt feltehetjük, hogy $z = 1$. Így

$$EV \leq \frac{W(n, x, y, 1, t^*)}{W(n, x, y, 1, \frac{n}{2})} =$$

$$= \frac{\frac{(y+nx-1)^2}{4(x-1)}}{\frac{n^2}{4}(x+1) - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}y} = \frac{(y + nx - 1)^2}{n^2(x^2 - 1) + 2n(x-1)(y-1)}\ .$$

Ha a jobb oldal $y$ szerinti deriváltját vesszük, akkor könnyű látni, hogy az pozitív minden $n \geq 2$-re, vagyis $y$ növekvő függvénye. A $z = 1$ behelyettesítéssel (11)-ből azt kapjuk, hogy

$$y < 1 + nx - 2n\ . \tag{12}$$

Így

$$EV \leq \frac{W(n,x,1+nx-2n,1,n)}{W(n,x,1+nx-2n,1,\frac{n}{2})} = \frac{4}{3} < 2\,. \tag{13}$$

Ha $z = 0$, akkor $y > 0$ és a 2. Következmény miatt $y = 1$ feltehető. Ekkor (11) az alábbi egyszerű formát ölti

$$1 < nx$$

és

$$EV \leq \frac{W(n,x,1,0,t^*)}{W(n,x,1,0,\frac{n}{2})} = \frac{\frac{(1+nx)^2}{4x}}{\frac{n^2}{4}x + \frac{n}{2}} = \frac{(1+nx)^2}{n^2x^2+2nx}\,, \tag{14}$$

ami kisebb, mint $\frac{4}{3}$ ha $nx > 1$.

A bizonyítás hasonló, ha $n$ páratlan. Az egyetlen különbség, hogy ebben az esetben $q_{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2}$, $q_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2}$, $q_i = 0$, $i \neq \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1$ $SCE$-vel kell számolnunk a (10), (13) és (14) nevezőiben. □

**4. Tétel**. *A $GN$-típusú játékok osztályára $EV \geq 2$.*

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy $n$-személyes $GN$-típusú játékot az $x = 1 + \frac{2}{n}$, $y = 0$, $z = 1$ paraméterekkel, és tegyük fel, hogy $n \geq 4$ és páros. Először meghatározzuk $\max_{q \in L_P} \sum_{t=0}^{n} W(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t) q_t$ pontos értékét, ahol $L_P$ a $P$ kisméretű $LP$ lehetséges tartománya. Azt állítjuk, hogy a $q_{\frac{n}{2}} = \frac{n+2}{2n+2}$, $q_{\frac{n}{2}+1} = \frac{n}{2n+2}$, $q_i = 0$, $i \neq \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$ $SCE$ optimális megoldása az alábbi formában felírt kisméretű $LP$-nek

$$\begin{aligned} P: \qquad & \max \sum_{t=0}^{n} W(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t) q_t \\ & -\sum_{t=0}^{n} C(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t) q_t \leq 0 \\ & \sum_{t=0}^{n} q_t = 1, \quad q_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \ldots, n\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Behelyettesítéssel láthatjuk, hogy a megadott megoldás lehetséges, és a célfüggvény értéke $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. A $P$ duálisa az alábbi kétváltozós $LP$

$$\begin{aligned} D: \quad & \min v \\ & v \geq C(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t)u + W(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t) \quad (t = 0, 1, \ldots, n) \\ & u \geq 0\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Azt állítjuk, hogy $u = \frac{n}{2} - 1$, $v = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ a (16) egy lehetséges megoldása. Egyszerű számolással (kvadratikus függvény maximalizálása) láthatjuk, hogy a következő konkáv kvadratikus függvény

$$Q(t) = C(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t)u + W(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t)$$

$t$ szerinti folytonos maximumpontja $t = \frac{n+1}{2}$, amely nem egész, de pontosan a $[\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1]$ egész végpontú szakasz felezőpontja. A kvadratikus függvény szimmetriája miatt az egészértékű maximum a két végpontban van és a függvényérték mindkét pontban $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, amely egyenlő a $P$-nek a $q_{\frac{n}{2}} = \frac{n+2}{2n+2}$, $q_{\frac{n}{2}+1} = \frac{n}{2n+2}$, $q_i = 0$, $i \neq \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1$ lehetséges megoldásában (ami egy $SCE$) felvett célfüggvényértékével. Így a lineáris programozás gyenge dualitás tétele értelmében ez az $SCE$ a $P$ optimális megoldása. Most tehát éppen azt mutattuk meg, hogy

$$\max_{q \in L_P} \sum_{t=0}^{t=n} W(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t) q_t = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \, .$$

A $W(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t)$ függvény a $t$-szerinti abszolút folytonos maximumát a $[0, \infty)$ tartományon a

$$t^* = \frac{n(1+\frac{2}{n}) - 1}{\frac{4}{n}} \, ,$$

pontban veszi fel. Ez nem lehet kisebb, mint $n$, ha $n \geq 4$, amit viszont feltettünk. Így $W(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, t)$ $t$-szerinti folytonos maximuma a $[0, n]$ tartományon $W(n, 1+\frac{2}{n}, 0, 1, n) = n(n-1)$. Ezért a következő becslést kapjuk $EV$-re

$$EV \geq \frac{n(n-1)}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \frac{2n(n-1)}{n(n+1) - 2} \, . \tag{17}$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala $n$ növekvő függvénye, amely 2-höz tart, ha $n \to \infty$ páros $n$-eken keresztül. □

**3. Következmény**. *A $GN$-típusú játékok osztályára $EV = 2$.*

Tekintsük most azt a speciális esetet amikor $n = 2$ és

$$y + z < x < 2y + 2z \, . \tag{18}$$

Ez a jól ismert gyáva nyúl játék ($GN$-játék), amelyik bimátrix formában a következő

$$\begin{bmatrix} y+z, y+z & y, x \\ x, y & 0, 0 \end{bmatrix} .$$

Mindkét játékos első stratégiája egy alacsony kockázatú akció ($L$), a második pedig egy magas kockázatú ($H$). Két $NEP$ van a tiszta stratégiák között: $(L, H)$ és $(H, L)$. Az $SW$ maximuma $2(y+z)$, amely az $(L, L)$ stratégiapároshoz tartozik. Ez azt jelenti, hogy ha bármelyik játékos egyedül választja $H$-t, akkor a legmagasabb hasznosságot éri el, míg ha mindketten $H$-t választják, az katasztrofális számukra. Abból a célból, hogy egy $GN$-típusú játék egy $n$-személyes $GN$-játékot adjon, ezeknek a tulajdonságoknak a megmaradását követeljük meg, vagyis a torlódási alakban specifikáltakon kívül feltesszük a következőket:

(i) egy játékos a maximális hasznosságot akkor éri el, ha egyedül játssza $H$-t, míg mindenki más $L$-et,

(ii) a maximális $SW$-t az $L$ kollektív választása adja.

A torlódási alakban most $F1$ a $H$ szerepét, míg $F2$ az $L$-ét játssza. Így a torlódási alakból, a korábbi jelöléseket használva a két követelmény:

(i) $(n-1)x > y + (n-1)z$

(ii) $W(n) > W(t)$, minden $t = 0, 1, \ldots, n-1$ esetében.

Amint azt a 3. Tétel bizonyításában láttuk, (ii) fennáll, ha $x \le z$. Ha pedig $x > z$, akkor a

$$t^* = \frac{y + nx - z}{2(x-z)} \ge n\ ,$$

vagy az ezzel ekvivalens

$$y \ge nx - (2n-1)z \tag{19}$$

egyenlőtlenség teljesülése esetén (ii) fennáll. Felmerül a kérdés, hogy jobb $EV$-t kapunk-e, ha a $GN$-játékok osztályára korlátozzuk magunkat? A feleletet a következő tétel adja meg.

**5. Tétel**. *A $GN$-játékok osztályára $EV = 2$.*

*Bizonyítás.* Mivel a $GN$ játékok egyúttal $GN$-típusú játékok is, ezért a 3. Tétel állítása szerint $EV \le 2$. Annak belátásához, hogy $EV \ge 2$, azt fogjuk megmutatni, hogy a 4. Tétel bizonyításában szereplő $x = 1+\frac{2}{n}$, $y = 0$, $z = 1$ ($n \ge 4$ és páros) paraméterekkel adott $GN$-típusú játék egyúttal egy $GN$ játék is. Ha a paramétereket behelyettesítjük (i)-be és (19)-be, akkor azt kapjuk, hogy

$$(n-1)(1+\frac{2}{n}) > (n-1)\ ,$$
$$n(1+\frac{2}{n}) - 2n + 1 \le 0\ ,$$

ami könnyen igazolhatóan fennáll, ha $n \ge 3$. □

Kis $n$-ekre 2-nél lényegesen jobb értékeket kapunk. Különösen fontos maga a „klasszikus" $GN$-játék esete, amikor $n = 2$.

**6. Tétel**. *A 2-személyes $GN$-játékokra $EV = \frac{3}{2}$.*

*Bizonyítás.* Elegendő a 3. Tétel bizonyításából a b) esetet és abból is azt az alesetet tekinteni, amikor $t^* = \frac{y+2x-z}{2(x-z)} > 2$, mivel a bizonyításban azt már beláttuk, hogy ha $t^* \le 2$, akkor $EV \le \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$. A maximális $SW$ a (18) feltétel szerint $2(y+z)$. Az $SW$ maximumát az $SCE$-k halmazán az alábbi $LP$ optimális célfüggvényértéke adja

$$\max\ (x+y)p_1 + 2(y+z)p_2$$
$$2ypq_0 + (z-x)q_1 + 2(x-y-z)q_2 \le 0$$
$$q_0 + q_1 + q_2 = 1$$
$$q_0,\ q_1,\ q_2 \ge 0.$$

Könnyű megmutatni egyszerű behelyettesítéssel, hogy $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{2}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$ a (20) egy lehetséges megoldása. Ebből kapjuk az alábbi becslést, felhasználva a (18) egyenlőtlenséget

$$\frac{2(y+z)}{\frac{2}{3}(x+y)+\frac{2}{3}(y+z)} \leq \frac{2x}{\frac{2}{3}(x+y)+\frac{1}{3}x} \leq \frac{3}{2} \,.$$

Tekintsük most az $x = 1+\varepsilon$, $y = 0$, $z = 1$ paraméterekkel definiált $GN$-játékot, ami nyilvánvalóan kielégíti a (18) feltételt, ha $\varepsilon$ elég kicsi. Könnyen igazolható, hogy $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{2}{3}$, $q_2 = \frac{1}{3}$ a (20) feladat egy optimális megoldása, és a célfüggvény értéke $\frac{2}{3}(1+\varepsilon)+\frac{2}{3}$. Az $SW$ abszolút maximuma 2. Így

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{\frac{2}{3}(1+\varepsilon)+\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \,,$$

amivel a tétel állítását bebizonyítottuk. □

Érdekes, hogy az $EV$ nem romlik, ha a játékosok számát eggyel növeljük.

**7. Tétel**. *A 3-személyes $GN$-játékokra $EV = \frac{3}{2}$.*

*Bizonyítás.* Az $SW$ maximumát az $SCE$-k halmazán az alábbi $LP$ optimális célfüggvényértéke adja:

$$\begin{gathered} \max\,(2x+y)q_1 + 2(x+y+z)q_2 + (3y+6z)q_3 \\ 3yq_0 + (-2x+y+2z)q_1 - yq_2 + (6x-3y-6z)q_3 \leq 0\,, \\ q_0+q_1+q_2+q_3 = 1 \\ q_0, q_1, q_2, q_3 \geq 0\,. \end{gathered} \tag{21}$$

Az $SW$ maximuma vagy $2(x+y+z)$ vagy $3y+6z$. Az első esetben $q_2 = 1$, $q_i = 0$, $i \neq 2$ egy $SCE$ és $EV = 1$. A második esetben a $2(x+y+z) < 3y+6z$ egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $x > z+\frac{1}{2}$. Mivel $q_2 = 1$, $q_i = 0$, $i \neq 2$ egy lehetséges megoldás, az alábbi becsléshez jutunk

$$EV \leq \frac{3y+6z}{2x+2y+2z} < \frac{3y+6z}{2(z+\frac{1}{2})+2y+2z} = \frac{3y+6z}{2y+4z+1} < \frac{3}{2} \,. \tag{22}$$

Tekintsük ismét azt a $GN$-játékot, amelynek paraméterei $x = 1+\varepsilon$, $y = 0$, $z = 1$. Könnyen belátható, hogy $q_2 = 1$, $q_i = 0$, $i \neq 2$ egy $SCE$ és optimális megoldása a (21) feladatnak, az optimális célfüggvény érték pedig $4+2\varepsilon$. Az $SW$ abszolút maximuma 6. Így

$$EV \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{6}{4+2\varepsilon} = \frac{3}{2} \,. \tag{23}$$

A (22)-t és (23)-at összevetve azt kapjuk, hogy $EV = \frac{3}{2}$, ami a tétel állítása. □

Már $n = 8$-tól kezdve a (17) egyenlőtlenségből egy ennél nagyobb alsó korlátot ($EV \geq 1,6$) kapunk, majd ez az alsó korlát a (17) egyenlőtlenség szerint $n$ növekedésével (páros $n$-eken keresztül) monoton növekedve tart 2-höz.

# 5 Egy példa

Van négy vállalat, amelyek közül mindegyik dönthet, hogy egy tóba az ipari vizet tisztítatlanul, vagy tisztítva ereszti be. Kétoldalú szerződéseik vannak egymással, amelyekben megígérik, hogy a vizet tisztítják mielőtt a tóba eresztik. Ha bármelyikük is megszegi az ígéretét, akkor büntetést kell fizetnie. A büntetés mértéke függ a tóba bekerülő káros anyagok teljes mennyiségétől, amely arányos a szerződést megszegő vállalatok számával. Így tehát mindegyik vállalat számára két cselekvési lehetőség van: tisztítani ($T$) vagy nem tisztítani a vizet ($P$). A hasznosságok az elérhető nyereségből vezethetők le és olyanok, hogy minden vállalat egy gyáva nyúl játékot játszik mindegyik másikkal. Tegyük fel, hogy a hasznosságok az alábbi táblázatban találhatóak. (Az egyik vállalat a sor- a másik az oszlopjátékos.)

| | $T$ | $P$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(6,6)$ | $(2,7)$ |
| $P$ | $(7,2)$ | $(0,0)$ |

Ebből egy torlódási játék konstruálható az alábbi torlódási alakkal:

| vállalatok száma | $T$ | $M$ |
|---|---|---|
| 1 | 21 | 6 |
| 2 | 14 | 10 |
| 3 | 7 | 14 |
| 4 | 0 | 18 |

Láthatjuk, hogy ez egy 4-személyes $GN$-játék. Az $SW$ maximalizáló $SCE$-ket a következő (kisméretű) $LP$ megoldásával kapjuk:

$$\max\ 27q_1 + 48q_2 + 63q_3 + 72q_4$$

feltéve, hogy

$$24q_0 + 3q_1 - 6q_2 - 3q_3 + 12q_4 \leq 0$$
$$q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$$
$$q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \geq 0\,.$$

Az optimális megoldás: $q_0 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0{,}8$, $q_4 = 0{,}2$ az $SW = 64{,}8$ optimális célfüggvényértékkel. A legjobb (tiszta) $NEP$ esetében $SW = 63$. Így az $SCE$ protokoll alkalmazásával 2,86%-os társadalmi hasznosság javulás érhető el a Nash-egyensúllyal összehasonlítva.

Ennek az $SCE$-nek az implementálására létesíthetünk egy „klub”-ot, amelyhez bármely vállalat csatlakozhat, vagy kívül maradhat. A csatlakozók visszavonhatatlanul elkötelezik magukat, hogy a klub vezetésének utasításait követik, bármi legyen is az. Mielőtt bárki is belépne a klubba, a vezetőség nyilvánosságra hozza, hogy 0,2 valószínűsége van annak, hogy egyöntetűen minden klubtagnak tisztítani kell és 0,8 valószínűséggel háromnak tisztítani kell, egynek pedig nem. Hogy melyik legyen az, akinek nem kell tisztítani, azt egy további sorsolás dönti el. Logikus a szimmetriára való tekintettel, hogy mindegyik vállalat azonos valószínűséggel (0,25) részesüljön ebben a kedvezményben. Így végeredményben a sorsolás olyan lehet, hogy öt cédulát teszünk egy urnába a következő megjelölésekkel (ez a tisztítási kötelezettségre vonatkozik):

| | Valószínűség |
|---|---|
| Mindenki | $0,2$ |
| Mindenki az 1. vállalat kivételével | $0,2$ |
| Mindenki a 2. vállalat kivételével | $0,2$ |
| Mindenki a 3. vállalat kivételével | $0,2$ |
| Mindenki a 4. vállalat kivételével | $0,2$ |

Ez az $SCE$ stabil abban az értelemben, hogy ha mindenki csatlakozik a klubhoz, akkor egyetlen vállalat sem érdekelt abban, hogy egyedül elhagyja azt.

# 6 Összefoglalás

Megmutattuk, hogy az $n$-személyes, vegyes, egyszerű, kétkiszolgálós lineáris torlódási játékok egy osztályában, az $n$-személyes „gyáva nyúl"-típusú játékok körében a korrelált egyensúly egy általánosítása, a puha korrelált egyensúly még a legrosszabb esetben is biztosítani tudja, hogy a társadalmi jólét (a vizsgált modellben a játékosok hasznosságainak összege) abszolút maximumának legalább a felét elérjük, vagyis a kényszerítési érték 2. A gyáva nyúl játékokra, amelyek a gyáva nyúl típusú játékok egy alosztálya és természetes általánosítása $n$ játékosra a klasszikus kétszemélyes gyáva nyúl játéknak, ugyanez a garancia vonatkozik. A két- és háromszemélyes gyáva nyúl játékokra megmutattuk, hogy a kényszerítési érték $\frac{3}{2}$. A puha korrelált egyensúly protokollját egy környezetvédelmi példán illusztráltuk.

További kutatómunkára sokféle irányban mutatkozik lehetőség. Elsősorban azt érdemes megnézni, mi történik, ha a kiszolgálóhelyek száma legalább 3. Ebben az esetben a gyenge korrelált egyensúly is növelheti a társadalmi hasznosságot és így lehetőség nyílik a korrelált egyensúly, a gyenge- és puha korrelált egyensúly teljesítményének összehasonlítására, illetve annak elemzésére, hogy mikor melyik általánosítás a legmegfelelőbb. A társadalmi hasznosságot is lehetne a hasznosságok összege (utilitariánus megközelítés) helyett a legkisebb hasznossággal (egalitáriánus megközelítés) definiálni és az eredményeket összehasonlítani. Át lehet térni, megváltoztatva a megváltoztatandókat, társadalmi hasznosságról a társadalmi költségekre, és ugyanazokat a kérdéseket feltenni. Így „stabilitás ára" típusú eredményeket kaphatunk a puha korrelált egyensúlyra, amelyet már közvetlenül tudunk összehasonlítani a Nash-egyensúlyra és a klasszikus korrelált egyensúlyra vonatkozó eredményekkel. Egy másik irány lehet a legrosszabb eset elemzés mellett az átlagos eset vizsgálata. Ekkor a szimuláció jön elsősorban szóba, munkát adva ezen terület kutatóinak is.

## Irodalom


1. Ashlagi I., Monderer D. and Tennenholz M. (2008) On the value of correlation. *Journal of Artificial Intelligence*, 33:575–613.
2. Aumann R. J. (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies. *Journal of Mathematical Economics*, 1:67–96.
3. Aumann R. J. (1987) Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality. *Econometrica*, 55:1–18.
4. Bracht J. and Feltovich N. (2008) Efficiency in the trust game: an experimental study of precommitment, *International Journal of Game Theory*, 37:39–72.
5. Carrol J. W. (1988) Iterated N-player prisoners' dilemma games. *Philosophical Studies*, 53:411–415.
6. Cason T. N. and Sharma T. (2006) Recommended play and correlated equilibria: An experimental study. Krannert Graduate School of Management, Perdue University West Lafayette, Indiana, Institute for Research in the Behavioral, Economic, and Management Sciences, Paper No. 1191.
7. Christodoulou G. and Koutsoupias E. (2005) *On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games.* In Proceedings of the 13th Annual European Symposium, ESA: 59–70.
8. Dyer M. E. (1984) An $O(n)$ algorithm for the multiple choice-knapsack linear program. *Mathematical Programming*, 29:57–63.
9. Forgó F., Szép J. and Szidarovszky F. (1999) *Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods, Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
10. Forgó F. (2010) A generalization of correlated equilibrium: A new protocol. *Mathematical Social Sciences*, 60:186–190.
11. Forgó F. (2014) Measuring the power of soft correlated equilibrium in 2-facility simple non-increasing linear congestion games. *Central European Journal of Operations Research*, 22:139–165.
12. Forgó F. (2016) The prisoners' dilemma, congestion games and correlation. In: *Progress in Economics Research*, 34:129-141 Editor: Albert Tavadze, Nova Science Publishers, Inc. New York.
13. Hamburger H. (1973) N-person prisoners' dilemma. *Journal of Mathematical Sociology*, 3:27–48.
14. Moulin H., Vial J.-P. (1978) Strategically zero-sum games: the class of games whose completely mixed equilibria cannot be improved upon. *International Journal of Game Theory*, 7:201–221.
15. Nash J. (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36:48–49.
16. Nash J. (1951) Non-Cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54:286–295.
17. von Neumann J. (1928) Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100:295–320.
18. Osborne M. J. and Rubinstein A. (1996) *A Course in Game Theory.* The MIT Press Cambridge MA.
19. Roughgarden T. and Tardos E. (2002) How Bad is Selfish Routing? *Journal of the ACM*, 49:236–259.

20. Szilagyi M. N. and Somogyi I. (2010) A systematic analysis of the $N$-person chicken game. *Complexity*, 15:56–62.

## CORRELATION, CONGESTION GAMES, CHICKEN GAME

We study the class of $n$-person, two-facility, simple, mixed, linear congestion games and determine how close the social welfare achievable by soft correlated equilibria (Forgó 2010) can get to the absolute maximum of social welfare. For this purpose we use the enforcement value (Ashlagi et al. 2008). We prove that the enforcement value for the class of games under study is exactly 2. For the class of $n$-person chicken games that form a subclass of $n$-person, two-facility, simple, mixed, linear congestion games the enforcement value is also 2. For the special case $n = 2$ (the classical chicken game) and $n = 3$, however, the enforcement value is $\frac{3}{2}$. We illustrate the working of the protocol of soft correlated equilibrium in an example of environmental background.

*Keywords*: correlated equilibrium, soft correlated equilibrium, congestion games, chicken game, enforcement value