BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
Matematikai közgazdaságtan és gazdaságelemzés tanszék

MAKROÖKONÓMIA:

Alapvető modellek és módszerek

Vincze János

Budapest, 2018. november

Tartalomjegyzék

1 Makroökonómiáról és a jegyzetről általában **5**

2 Makroökonómiai alapfogalmak és mérésük **6**
2.1 Jövedelem és vagyon - flow és stock 6
2.2 A hozzáadott érték fogalma 7
2.2.1 GDP definíció 8
2.2.2 GDP mérleg: zárt gazdaság 9
2.2.3 Nyitott gazdaság: van külkereskedelem 9
2.2.4 GDP és GNP 10
2.2.5 Komplikációk 11
2.2.6 Jövedelemoldali GDP elszámolás 14
2.3 Nominális és reál változók, infláció 14
2.3.1 Reál és nominális GDP 14
2.3.2 Reál GDP index: két alternatíva 17
2.3.3 Volumenindex problémák* 17
2.3.4 Fogyasztói árindex (CPI) 17
2.4 Feladatok 18

3 Fogyasztás **18**
3.1 Technikai kitérő 19
3.1.1 Kamatláb mértékegységek és közelítések 19
3.1.2 Példa: 19
3.1.3 Loglineáris közelítés 20
3.1.4 Egyváltozós konstans együtthatós differencia egyenlet* . . 20
3.2 Intertemporális fogyasztási-megtakarítási probléma 21
3.2.1 Szekvenciális költségvetési korlát 21
3.2.2 A megtakarítási döntés: véges periódus 22
3.2.3 Végtelen időszakos fogyasztási-megtakarítási probléma . . 26
3.2.4 Egy speciális hasznossági függvény* 27
3.3 Hitelfelvételi korlátok 30
3.4 Bizonytalanság* 30
3.5 Időben inkonzisztens preferenciák* 30
3.5.1 Racionalitás? 34
3.6 Endogén (a modell által meghatározott) kamatláb 34
3.7 Feladatok 37

4 Beruházás **39**
4.1 Arbitrázsmentesség és tőkehozam 39
4.1.1 Bankbetét 40
4.1.2 Lejárat nélküli kötvény 40
4.1.3 Részvény 40
4.1.4 Vállalatok fizikai tőkéje 42
4.1.5 Lakás 43
4.1.6 Kamatok és hozamok 44

4.1.7 Arbitrázsmentesség és a valóság 44
4.2 Állóeszköz-felhalmozás 45
4.2.1 A háztartás egyben termelő is 45
4.2.2 Amikor a vállalat termel, de bérli a tőkét 48
4.2.3 Közömbösségi tételek 50
4.3 A Q-elmélet 50
4.4 Beruházás és kockázat 51
4.5 Autóvásárlás és autóhasználat 51
4.6 Tőke és endogén kamatláb 51
4.7 A neoklasszikus beruházási elmélet és a valóság 54
4.8 Feladatok 54

5 Munkapiac **56**
5.1 A neoklasszikus modell 57
5.1.1 Munkakínálat 57
5.1.2 Munkakereslet 58
5.1.3 Neoklasszikus munkapiaci egyensúly 59
5.2 Keresési modellek* 60
5.3 Feladatok 63

6 Egyensúly és növekedés **63**
6.1 A Solow-modell 63
6.1.1 Aranykori megtakarítási ráta 64
6.2 A neoklasszikus modell végtelen időszakra tervező reprezentatív ágens feltevéssel (Ramsey-modell) 65
6.2.1 Háztartási optimalizálás fogyasztási, beruházási és munkakínálati döntéssel 65
6.3 Együttélő nemzedékek* 70
6.4 Gazdasági növekedés 72
6.4.1 Solow-modell és növekedés 73
6.4.2 A Ramsey-modell exogén technológiai fejlődéssel 77
6.4.3 Az együttélő nemzedékek modellje technológiai fejlődéssel* 79
6.5 Endogén növekedési elméletek 80
6.6 Feladatok 81

7 Költségvetési politika **83**
7.1 A ricardo-i ekvivalencia problémája 83
7.1.1 Mikor nem teljesül a ricardo-i ekvivalencia? 85
7.1.2 Torzító adók és maximális adóbevétel 85
7.2 Hosszú távú egyensúly, aktivitás-passzivitás 86
7.2.1 Lehet-e passzív a fiskális politika? 86
7.2.2 Maastricht-i kritériumok 87
7.3 Feladatok 88

8 Pénz, infláció, monetáris politika **88**
8.1 Pénzkínálat központi bankkal és kereskedelmi bankokkal 89
8.1.1 A valóság bonyolultabb, mint a modell (ahogy várható volt) 91
8.1.2 Hogyan teremt (vagy szüntet meg) bázispénzt a központi bank? 92
8.2 Pénzkereslet: a Baumol-Tobin modell 92
8.2.1 Pénzkereslet általában 94
8.3 A Ramsey-modell pénzzel 94
8.3.1 A pénz közömbössége 95
8.3.2 A pénz szuperközömbössége 96
8.4 Árszintmeghatározás zárt gazdaságban* 96
8.5 Seignioriage: az állam haszna a pénzteremtésből 98
8.5.1 Kitérő: egy egyszerűsítés 99
8.6 Monetáris politikai eszközök* 101
8.7 Feladatok 102

9 A pénz nem-közömbössége és a gazdasági ciklusok **103**
9.1 A pénz reálhatásai 103
9.1.1 Rugalmas árak 103
9.1.2 Bérmerevség 104
9.1.3 Ármerevség 104
9.2 Infláció és ciklusok* 105
9.2.1 A új-klasszikus Phillips-görbe 105
9.2.2 Az új-keynesiánus Phillips görbe 108
9.3 Összegzés 108

1 Makroökonómiáról és a jegyzetről általában

A makroökonómia kifejezés "nagybani" gazdaságtant jelent, egész nemzetgazdaságok problémáival foglalkozik. Tipikus „makró” terület a munkanélküliség, az infláció, illetve a jövedelem (GDP) növekedése és annak ingadozásai. Ezek olyan általános gazdaságpolitikai kérdések, amelyekre mindenképpen megpróbálunk valamilyen választ találni. Következésképpen a gazdaságpolitikai elképzelések mögött szükségképpen a makroökonómia valamilyen elmélete rejlik. Szinte minden közgazdásznak köze van a makroökonómiához, de a gyakorlati specialisták főként nemzeti (gazdasági vagy pénzügyminisztériumok, illetve központi bankok) és nemzetközi intézményekben (Európai Unió, Világbank, OECD, IMF) dolgoznak. De makroelemzőket foglalkoztat számos üzleti szervezet, elsősorban bankok, pénzügyi tanácsadók, és nagyvállalatok. Az egyetemi (akadémiai) és gyakorlati makroökonómia nincs mindig teljesen összahangban, gyakran beszélnek "Wall Street Economics"-ról, ellentétben a "tudományos" makroökonómiával. MIndenesetre kiemelkedő akadémiai makroökonómusok gyakran töltenek be vezető pozíciókat gazdaságpolitikai intézményekben.

Ez a jegyzet a Gazdaságmatematikai Elemző osztatlan szak első éves kurzusát látogató hallgatók számára készült elsősorban, de minden olyan szakon használható, amely törekszik a makroökonómiai modellek használatának elsajátíttatására. (A jegyzet Gregory N. Mankiw Makroökonómia című tankönyvének (Osiris, 2005) kísérőjeként funkcionál az oktatásban.) Szokásos makroökonómiai bevezető könyvekhez képest hiányoznak, illetve csak elvétve fordulnak elő, empirikus és gazdaságpolitikai utalások, viszont a könyv magasabb matematikai és mikroökonómiai előképzettséget tételez fel, mint azok. Ennek indoka az, hogy a nevezett szak hallgatói a makroökonómia kurzus idejére már túl vannak az egyetemi szintű analízis és algebra képzés első félévén, továbbá egy szemeszternyi mikroökonómián, mégpedig egy olyan mikroökonómia kurzuson, amely szintén nagyrészt analitikus beállítottságú. A kurzus felépítésének egyik fontos szempontja az volt, hogy a hallgatók érzékeljék az összefüggéseket és folytonosságot a mikroökonómiai ismeretekkel, bizonyos értelemben az anyag tekinthető a mikroökonómia kurzus egyfajta folytatásának is. Másfelől, szempont volt az is, hogy alkalmat adjon az egyetemen tanult matematikai ismeretek közgazdaságtani alkalmazására, illusztrálva azt, hogy a matematikai ismeretek nélkül a magasabb szintű közgazdasági ismeretek megértése nem lehetséges.

Mivel az elsőéves hallgatók még nem tanulnak valószínűségszámítást, a bemutatott modellek körében nincsenek olyanok, amelyek kockázattal vagy bizonytalansággal foglalkoznak. Továbbá a dinamikus modellek mélyebb tárgyalásához szükséges matematikai (elsősorban lineáris algebrai) ismeretek is hiányoznak, ami miatt a dinamikus modelleknek csak néhány aspektusát (elsősorban a stacionárius állapotot) tudjuk vizsgálni. Ez a két ismérv viszonylag jól behatárolja az ismertethető modellek körét. Egy másik korlátozása a jegyzet tematikájának az, hogy – majdnem - kizárólag zárt gazdasági modellekkel foglalkozik, ennek oka részben az, hogy a nyitott gazdasági modellekben nincsen sok elvi újdonság (néhány bemutatott modell akár nyitott gazdasági modellként is interpretálható), részben pedig az, hogy a nemzetközi makroköonómia a szak tematikája szerint a nemzetközi gazdaságtan tárgyhoz tartozik.

A jegyzet nyolc fejezetre tagolódik, minden fejezet egy-vagy két hét tananyagának felel meg. Ezek a következők: Makroökonómiai alapfogalmak, Fogyasztás-megtakarítás, Beruházás és portfolió választás, Munkapiac. Egyensúly és növekedés, Költségvetési politika, Pénz és nominális árak, Ciklusok és infláció. A fejezetek szorosan egymásra épülnek, a sorrend alapvetően nem változtatható.

A kurzus fontos része a modellek megoldása is, adott esetben számszerűen. A főszövegben szerepelnek numerikus példák, a fejezetek végén pedig az adott fejezethez tartozó feladatok. Néhány alfejezet *-gal van jelölve, ezek inkább a különösen érdeklődő hallgatók okulására szolgálnak.

2 Makroökonómiai alapfogalmak és mérésük

2.1 Jövedelem és vagyon - flow és stock

Vagyona lehet egy családnak, egy vállalatnak, de egy egész országnak is. Hogyan határozhatjuk meg a családi vagyonunkat? Olyan tételeket kell figyelembe vennünk, mint a rendelkezésünkre álló készpénz, bankbetét, kötvény és részvények értéke, továbbá a házunk (lakásunk), amennyiben a tulajdonosai vagyunk. Ezek pénzben mért értékét összeadva megkapjuk a család vagyonát egy adott időpillanatban. A gazdálkodó egységek vagyonát főként a gazdasági tevékenységükhöz szükséges épületek, gépek, készletek, föld értékének az összege adja. Vannak azonban a vagyonnak "negatív" tételei is. Hiába ér 20 millió forintot a házam, ha van rajta 10 millió forint tartozás. Ilyenkor a nettó vagyonom csak 10 millió forint. A vagyon egy állomány (stock) típusú mennyiség hasonlóan egy tartályban levő folyadék, például köbméterben mért, mennyiségéhez, azaz minden egyes pillanatban van egy értéke. A vagyon természetes mértékegysége valamilyen pénzegység, Magyarországon élőknek a forint, de, mint később látni fogjuk, mérhetjük kevésbé természetes, ám időbeli összehasonlítás céljára alkalmasabbnak tűnő módokon is.

A vagyonunk nagysága folytonosan változik, hasonlóan egy tóban levő víz mennyiségéhez, mivel bizonyos tevékenységeink, vagy külső körülmények, növelik (csökkentik) a vagyonunkat, ahogyan a tó vízszintje is változik az esőzés, a párolgás, folyók vízbevitele vagy vízkivitele hatására. A családok esetében az egyik legfontosabb befolyó (vagyonnövelő) tétel a munkajövedelem. Amikor ezt mennyiségileg meg akarjuk határozni mindig hozzá kell tennünk, hogy milyen "időegység" alatt. Például 100 000 forint jövedelem 1 hét, 1 hónap vagy 1 év alatti "befolyása" óriási különbséget jelent. A vagyonunkat a fogyasztási kiadásaink csökkentik, és szintén nem mindegy, hogy naponta költök 50 ezer forintot, vagy csak havonta. Ezek a vagyont változtató mennyiségek a folyomány (flow) típusú mennyiségek, amelyek természetes mértékegysége pénzegység/időegység (pl. ezer forint/hónap).

A vállalati könyvvitel mind stock, mind pedig flow mérleget is készít, a családok általában se ilyent, sem olyant nem készítenek, de készíthetnének. A nemzetgazdasági elszámolások általában a flow (jövedelem) elszámolásokra koncentrálnak, de fontos tudni, hogy a kétfajta mérleg elválaszthatatlan: a jövedelemmérleg a vagyon változását veszi számba.

A fizikában tipikus flow mennyiség a megtett út/ idő hányados, azaz a sebesség. Pillanatnyi flow-t vagy pillanatnyi sebességet nem lehet megfigyelni. Megfigyelhetjük viszont egy test helyzetét két közeli időpontban, és közelíthetjük a sebességet a távolság és az időtartam hányadosával. Egyre csökkentve a megfigyelési időpontok távolságát, egyre pontosabb közelítéshez jutunk. A fenti módszer a közgazdaságtanban általában, és konkrétan a makroökonómiában, sohasem valósítható meg. Lényegében csak a flow-k összegét tudjuk megfigyelni két egymáshoz nem túl közeli időpontok között. Például meg tudjuk figyelni egy vállalat januári jövedelmét, de nem tudjuk megfigyelni a január 4-én délelőtt 10 óra és 10 óra 1 perc közöti jövedelmét. Tipikus az éves megfigyelési gyakoriság, mivel sok gazdasági egység ilyen időközönként készít mérleget. Mivel a gazdasági tevékenységek ingadozásai nem igazodnak az éves ciklushoz igyekszünk gyakoribb adatokat használni, és a makroökonómusok a negyedéves, esetleg havi adatokat preferálják. Jó lenne-e az, ha tudnánk majdnem folytonos időben mérni, például napi flow-kat megfigyelni? Az így mért flow-k nagyon nagy ingadozásokat mutatnának, amiket nem tudnánk értelmezni, mivel nagyon esetleges okaik vannak. Például a jövedelem függhet attól, hogy éppen munkanap van-e vagy ünnepnap. A hosszabb időegységenként (havonta, negyedévente, évente) való megfigyelésnek tehát van egy "simító" hatása, amit kedvezőnek is tekinthetünk.

2.2 A hozzáadott érték fogalma

Tegyük fel, hogy valaki teheneket tart és tejet termel. Legyen a tehéntartás "anyag (közbenső) költsége" (takarmány, villamos energia stb.) C_t forint. A tejet összesen Y_T forintért adják el egy tejüzemnek. Ekkor azt mondjuk, hogy a tejtermelés hozzáadott értéke (value-added)

$$VA_T = Y_T - C_T.$$

Ez a hozzáadott érték megoszlik a tulajdonos jövedelme (tőkejövedelem) és az esetleges alkalmazottak jövedelme (bérjövedelem) között. Számunkra pillanatnyilag érdektelen, hogy milyen mértékben.

A tejüzem számára a nyers tej anyagköltség, ami mellett vannak egyéb anyagköltségei (például a dobozok költsége) C_F' értékben. A tejüzem a feldolgozott dobozolt tejet eladja egy kereskedőnek T_F összegért. A tejüzem hozzáadott értéke tehát

$$VA_F = Y_F - (Y_T + C_F).$$

Ez ismét megoszlik bérekre és tőkejövedelemre. Mennyi tehát a tej vertikum hozzáadott értéke?

$$VA_T + VA_F = (Y_T + Y_F) - (C_T + Y_T + C_F) = Y_F - (C_T + C_F).$$

Tegyük fel, hogy a tejüzem és a tejfarm összeolvadnak egy integrált tejgyártó vállalattá, vagyis a nyers tej vétele-eladása helyett házon belül "adják át" a nyers tejet. Mennyi az egyesült (integrált) tejipari vállalat hozzáadott értéke?

$$VA_{TF} = Y_F - (C_T + C_F).$$

A két eredmény ugyanaz, vagyis bárhogyan is szerveződik a tejipar, a hozzáadott érték változatlan, és megkapjuk akkor, ha az összes bevételből kivonjuk az összes közbenső költséget. (Vigyázat a munkabér makroökonómiai szempontból nem közbenső költség, habár a vállalati költségelszámolásnál azt is költségnek tekintik. A vállalati mérleg azonban a tulajdonosok jövedelmét és vagyonát igyekszik meghatározni, míg mi "nemzetgazdasági" jövedelemben gondolkodunk.)

Nyilvánvaló, hogy amennyiben továbbmennénk és a tejkereskedőt is bevonnánk az elszámolásba a konklúzió ugyanaz lenne: függetlenül attól, hogy a három vertikum hogyan integrálódik, a következő eredményt kapjuk

$$VA = Y_C - \sum_i C_i.$$

ahol Y_C a tej végső fogyasztónak eladott értéke és C_i az i-edik vertikum külső közbenső költsége. (Vagyis közbenső költségének az a része, amit nem a vertikum előző tagjának fizet.)

Tehát a hozzáadott érték fogalmának nagy előnye az outputtal (kibocsátás vagy összes termelési érték) szemben az, hogy invariáns a vertikális struktúrára nézve. Azaz mindegy, hogy egy autógyár külső szállítótól szerzi be a karosszériát, vagy maga gyártja, a jozzáadott érték változatlan marad, habár a két szervezeti megoldás különbözik az összes termelés és az összes anyagfelhasználás nagyságában. Azok a statisztikák, amelyek ágazati adatokat is tartalmaznak közölnek ágazati output (kibocsátás) adatokat is, de az ágazaton belüli kereskedelem kiszűrésével.

2.2.1 GDP definíció

A GDP egy nemzetgazdaság által egy adott időszakban megtermelt jövedelem, azaz az összes bevétel és összes költség különbsége.

$$GDP = Y - U.$$

Itt Y az output (termékek és szolgáltatások összértéke), U a termelésben felhasznált (közbenső) inputok értéke. (A GDP (gross domestic product) szószerinti magyar fordítása bruttó nemzeti termék.) A GDP tehát nem más, mint az adott területen "termelt" összes hozzáadott érték. Statisztikailag megkaphatjuk a fenti módon: összegezzük minden gazdasági egység eladásainak értékét és kivonjuk belőle az összes közbenső költséget. Ugyanezt kapjuk elvben akkor is, ha összeadjuk az összes tőke és munkajövedelmet.

Felmerülhet, hogy miért hívjuk az összes hozzáadott értéket "bruttó hazai termék"-nek. Az elnevezések általában olyan esetlegességeken múlnak, eredetük gyakran kideríthetetlen. A későbbiekben fogunk magyarázatot találni a "bruttó" és a "hazai" szavak használatára. A "termék" elnevezés "hozzáadott érték" helyett azonban nehezen indokolható. Felesleges fejtörés helyett hívjuk GDP-nek.

2.2.2 GDP mérleg: zárt gazdaság

Mire tudjuk használni az összes jövedelmet, feltéve hogy az országnak nincsenek kapcsolatai a külvilággal? Fogyaszthatunk belőle, illetve felhalmozhatjuk "fizikai" vagyonként (épületeket, vagy a jövőbeli termelés során használt gépeket vásárolhatunk). (Figyelem: most nem beszélünk sem bankbetétről, sem hitelről, sem részvényről. Később meglátjuk miért nem.) Tehát

$$GDP = C + I.$$

Ha nem fogyasztanánk semmit, akkor az ország vagyona adott periódus (pl. hónap) alatt a havi GDP-vel nőne. De mivel fogyasztunk, ezért a vagyon változás meghatározásához le kell vonnunk a havi fogyasztás összegét:

$$\nabla W = I = GDP - C.$$

A vagyon növekményének meg kell testesülni valamiben, ezek az új gépek, épületek (együttesen állóeszközök). Ennek külön nevet is adunk, bruttó állótőke felhalmozásnak, vagy nemzetgazdasági beruházásnak, nevezzük. Zárt gazdaságban:

$$I = GDP - C.$$

2.2.3 Nyitott gazdaság: van külkereskedelem

Eddig úgy tekintettük, hogy az országnak nincsenek külső kapcsolatai. Mi történik, ha van külkereskedelem? Habár ebben jegyzetben nem lesz szó nyitott gazdasági modellekről, a nemzetgazdasági elszámolások megértéséhez hasznos a külső kapcsolatok (nyitott gazdaság) figyelembevétele. Legyen M az importált, és X az exportált áruk és szolgáltatások összértéke. Az összes rendelkezésre álló forrás most már a hazai hozzáadott érték és az import összege: $GDP+M$, de az összes felhasználáshoz még hozzájön az export is: $C+I+X$. Tehát a módosított GDP mérleg:

$$GDP = C + I + (X - M),$$

és ezt az összefüggést szokás alapvető GDP azonosságnak nevezni.

Ez a kifejezés használható a GDP harmadik típusú meghatározására. Összeadjuk az ország fogyasztását, beruházását és kereskedelmi mérlegét $(X - M)$, és így is megkaphatjuk a GDP összegét.

2.2.4 GDP és GNP

Ez azonban már nem jövedelemmérleg. Ha kapcsolatban vagyunk a külvilággal, akkor előfordulhat, hogy külföldiek Magyarországon szereznek jövedelmet és magyarok külföldön. Ezek a jövedelmek általában tőkejövedelmek, de bizonyos országokban a külföldi munkajövedelmek sem elhanyagolhatók. Legyen ezek egyenlege a nettó külföldi jövedelem (NFI). Az ország teljes jövedelme tehát:

$$GNP = GDP + NFI.$$

A GNP (gross national product) vagyis szószerinti magyar fordításban bruttó nemzeti termék. A "hazai" szó fejezi ki azt, hogy az ország területén képződött jövedelemről van szó, a "nemzeti" pedig azt, hogy az ország gazdasági egységeinek (háztartások, vállalatok, állam) bárhonnan szerzett jövedelméről. A GNP természetesen lehet kisebb, vagy nagyobb, mint a GDP, mivel a külföldiek belföldön szerzett jövedelme lehet nagyobb vagy kisebb, mint a belföldiek külföldön szerzett jövedelme.

Viszont, ha figyelembe vesszük a külvilágot is, akkor a nemzeti vagyont nemcsak a beruházásaink növelik, hanem mindaz, amennyivel a külföld "tartozik" nekünk. (Amennyiben mi tartozunk, az levonódik a vagyonunkból, mint a háztartásnál a jelzáloghitel.) Külföldi követelésnek nevezzük azt, amivel a külföld tartozik nekünk, tehát a nettó külföldi követelés követeléseink és tartozásaink különbsége (NFA (net foreign assets)). Ennek adott periódus alatti változását a folyó fizetési mérleg egyenlegének (CA (current account)) nevezzük.

$$\Delta NFA = CA.$$

Mikor nő a külföld nettó tartozása? 1. Amennyiben a külkereskedelmi mérlegünk pozitív, vagyis ha egy adott időszak alatt többet adunk el külföldön, mint amennyit onnan vásrolunk. 2. Ha a külföldről származó jövedelmünk (tőke és munkajövedelem) egyenlege pozitív. Tehát

$$CA = X - M + NFI.$$

Ha CA pozitív, akkor az euró vagy dollár bankbetéteink, külföldi részvényeink vagy államkötvényeink értéke összességében jobban nő, mint a külföldiek forint bankbetéteinek, magyar részvényeinek és államkötvényeinek az összértéke.

Az alapvető GNP azonosság tehát az alábbi alakban írható:

$$GNP = C + I + CA.$$

Egy más megfogalmazásban a teljes nemzeti jövedelmet három dologra fordíthatjuk: fogyasztunk, felhalmozunk, vagy finanszírozzuk a külvilágot. (A negatív CA azt jelenti, hogy minket finanszíroz a külvilág.)

Az ország vagyonának változása pedig:

$$\nabla W = I + CA = GNP - C.$$

Vagyis a nemzeti jövedelemből az egész el nem fogyasztott rész növeli a vagyonunkat, amit két formában tartunk, itthon fizikai tőkeként, illetve a külföldre szóló nettó követelésként. (A fizikai tőke nem lehet negatív értékű.)

Példák: 1.
Az alábbi adatok jellemeznek egy gazdaságot:

NFA	GDP	C	I	NFI
-50	100	75	20	-10

Számolja ki a $GNP, X - M$ és CA mutatókat!
Mennyi lesz a következő időszak elején a NFA mennyisége?
Mekkora a K/GDP hányados, és mi mértékegysége és jelentése?
Megoldás:

$$\begin{aligned} GNP &= 100 - 10 = 90 \\ X - M &= 5 \\ CA &= -5 \\ NFA(+1) &= -55. \end{aligned}$$

2.
Milyen változások történnek a GDP mérlegben, és a folyó fizetési mérleg egyenlegében, ha
a. Mr Smith londoni üzletember a Gundel étteremben ebédel?
Az export nő, ezért a GDP és a CA is nő.
b. a MOL megvásárol 100 benzinkutat Bulgáriában?
Sem a GDP, sem a CA nem változik.
c. a MOL egy olajfúró tornyot vásárol Ausztriában azért, hogy Zala megyében olajat termeljen ki vele?
Az import nő, a beruházás ugyanannyival nő, ezért a GDP nem változik. A CA csökken, mivel az import nő.

2.2.5 Komplikációk

Amortizáció Mindannyian tudjuk, hogy a gépek, épületek fizikai állapota állandóan romlik, időnként le kell selejtezni a berendezéseket. Ezt a jelenséget amortizálódásnak nevezzük. Az I az úgynevezett bruttó beruházás, amivel csak akkor nőne a tőke mennyisége, ha nem lenne amortizáció. Ha $K-$val jelöljük az országban található fizikai tőkeállomány értékét, akkor ennek növeménye

$$\nabla K = I - A,$$

ahol $I - A$-t nettó beruházának is szokás nevezni.

A teljes vagyona az országnak tehát ebből a két (K és NFA) áll. Tehát a korrekt vagyonmárleg:

$$\nabla W = \nabla K + \nabla NFA.$$

Fájdalom, nemzetgazdasági szinten az amortizáció becslésére, nemhogy megfigyelésére, sem vállalkoznak mindig. Pedig az "igazi" (nettó) hazai jövedelem a $GDP - A$, és az "igazi" (nettó) nemzeti jövedelem $GNP - A$. Ezekkel a számokkal azonban nem találkozunk általában a statisztikákban, s így vagyonmérleggel sem.

A külföldi követelések és adósságok elszámolása sok tekintetben könnyebb, mint a fizikai tőkeállomány meghatározása. Ezzel kapcsolatban is számos gond és nehézség van azonban, amelyekkel majd a "Nemzetközi Gazdaságtan" tárgyban fogunk foglalkozni.

Eddig nem vezettük be a megtakarítás fogalmát (S). A (bruttó) megtakarítás nem más, mint a vagyon változása, azaz

$$S = GNP - C = I + CA.$$

a nettó megtakarítást pedig megkapjuk, ha levonjuk ebből az amortizációt.

Beruházás, költség és fogyasztás megkülönböztetése Amikor élelmiszert vásárolunk a boltban, akkor fogyasztási kiadásról beszélünk, mivel általában az élelmiszereket nem sokkal később el is fogyasztjuk, vagyis a vagyonunk csökken. Viszont mi van, ha házat (lakást) vásárolunk? A lakás a vagyonunk része, amikor megvesszük, csak a vagyonunk összetétele módosul, de annak nagysága nem. Tehát ez számunkra vagyon (portfólió) átrendezés, és nem fogyasztás. Azt mondhatjuk ugyan, hogy a vagyonunk "likvidebb" lett, mivel megnövekedett a pénz vagy bankbetét állományunk, de vagyonunk összege nem változott. Nemzetgazdasági szinten csak az újonnan épített lakás jelent beruházást (a fizikai tőke növekedését). Ha már meglevő lakást vásárolunk, akkor az nem jelenti az ország teljes tőkeállományának megváltozását.

Hogyan különböztetjük meg a termékek és szolgáltatások felhasználásában a különböző tételeket? Elvben az anyagfelhasználás és a beruházás termelési (jövedelemszerzési) célú költés, és ezeken a termelő célú kiadásokon belül beruházásnak tekintjük azt, ami nem használódik el azonnal, hanem növeli a gazdaság rendelkezésére álló fizikai tőkét. Az anyagfelhasználás esetében az amortizáció mindig azonnal megtörténik. A lakossági és kormányzati fogyasztás pedig önmagukban valamilyen „hasznosságot" okoznak, és szintén azonnal elhasználódnak. Az "azonnal" szó nehezen értelmezhető, és ennek megfelelően a statisztikusok nem tudják az elveket könnyen követni. Például az autóvásárlást, amennyiben vállalati autóról van szó, beruházásnak tekintik, amennyiben viszont magánautó, akkor fogyasztásnak. A statisztikai hivatalok gyakorlatában általában a beruházás a vállalati gépvásárlás és építkezés, valamint a lakáscélú építkezés összege, míg a fogyasztás tartalmazza mind a nem tartós áruk és szolgáltatások, mind pedig a tartós jószágokra fordított kiadásokat is (a lakást kivéve). További problémát jelent a termelő és fogyasztási célú felhasználás megkülönböztetése. A vállalati telefonhasználat termelő felhasználásnak számít, habár részben gyakran fogyasztási célú, amennyiben az alkalmazottak magánbeszélgetéseket is folytatnak. Egy családi vállalkozásnál pedig a kettő megkülönböztethetetlen.

Lakossági, kormányzati és közösségi fogyasztás Eddig nem tettünk különbséget a fogyasztáson belül a háztartások és a kormány szerepe között. Van azonban a fogyasztásnak kimondottan közösségi része (rendvédelem, állami adminisztráció stb.), amit az állam finanszíroz és az állami intézmények a "vásárlók". Ezt a közösségi fogyasztást a statisztikák megkülönböztetik a lakossági fogyasztástól.

Sok olyan szolgáltatás van, amelyet az állam természetben nyújt (például oktatási, egészségügyi), de a lakosság egyénenként veszi igénybe. Ezek gyakran ingyenesek, vagy az áruk sokkal alacsonyabb, mint ami a „piaci" ár lenne. Általában ilyenkor a szolgáltatás a költségén kerül beszámításra, ami lehet magasabb, mint lakosság által fizetett ár, de szokásos körülmények között alacsonyabb, mint a potenciális piaci ár. A lakossági fogyasztásnak ez a része az állam által finanszírozott, és léteznek statisztikák, amelyek ezt elkülönítik a lakosság által finanszírozott lakossági fogyasztástól.

A GDP mérleg egy gyakran használt változata:

$$GDP = C + G + I + (X - M),$$

ahol G a kormányzati vásárlásokat jelöli.

Készletváltozás és statisztikai hiba A készletek is stock jellegű változó, vagyonunk (és a nemzeti vagyon) egy részét készlet formájában tartjuk. A készletváltozást a továbbiakban a beruházás részének tekintjük, de elvben megkülönböztethető attól. A háztartási készletek általában elhanyagolható nagyságúak, normális körülmények között nem tartunk hónapokra elegendő élelmiszert a spájzban. Bizonyos készletek (pl. olajtartalékok) azonban nemzetgazdasági fontosságúak lehetnek. Sajnos az összes készlet gyakori megfigyelése még az állóeszközök megfigyelésénél is nehezebb. Az itt elkövethető statisztikai hiba nagysága meghaladja a készletek jelentőségét, mivel a készletváltozás aránya a GDP-hez viszonyítva kicsi, és mindkét irányban lehet tévedni.

Vagyonnyereség vagy veszteség Az amortizáció egyirányú folyamat, a fizikai tőke romlik, de beavatkozás nélkül nem javul. De amennyiben pénzben mérünk, akkor viszont vagyonunk minden része átértékelődhet pozitív és negatív irányban is. Például a lakásárak nőhetnek vagy csökkenhetnek akkor is, ha fizikai értelemben a lakásunk nem változott. Az ilyen átértékelések számbavétele a vállalati könyvelésben sem oldható meg teljes precizitással, de a vállalati könyvvitel kénytelen valamilyen megoldást találni. Ennek a "nehéz" feladatnak az elkerülése az egyik fontos oka annak, hogy miért is nincsenek hivatalos statisztikai mérlegeink a nemzeti vagyonról.

Adók és GDP Az output elvi definíciója szerint a termelt javak és szolgáltatások összértéke egy periódus alatt az adott országhoz tartozó gazdasági egységekre összegezve. Az összértéket a vásárló által fizetett áron számoljuk, vagyis a termelő bevételéhez hozzáadjuk az úgynevezett közvetett adókat (mint például az ÁFA) is.

Feketegazdaság és nem-piaci tevékenységek A gyakorlatban számos probléma merül fel a jövedelem definíció alkalmazásakor. A "fekete gazdaság" például nem figyelhető meg pontosan, a statisztikusok legfeljebb közvetett becsléseket tudnak adni ennek nagyságára. Például a kábítószerkereskedők tevékenysége elvben a GDP részét kell képezze, de ennek mértékéről csak hozzávetőleges becslések adhatók. A házimunkát és az "önmagunknak" nyújtott szolgáltatásokat nem egyöntetűen kezelik a statisztikusok. Például, ha otthon főz valaki, akkor az nem része a GDP-nek, habár elvben annak kellene lennie. Ha lakást adunk bérbe, akkor az ebből kapott bevétel biztosan része a GDP-nek, mivel "lakhatási szolgáltatást" nyújtunk. Ha magunk lakunk a saját lakásunkban, akkor ugyan nincs megfigyelhető bérleti díj, de a statisztikai hivatalok gyakran megpróbálnak „beszámítani" egy bérleti díjat, és ezt a „önmagunknak nyújtott szolgáltatást" is a társadalmi össztermék részének tekintik.

2.2.6 Jövedelemoldali GDP elszámolás

A termékmérleg a GDP-t úgymond felhasználási oldalról határozza meg. De a GDP definíciószerűen felírható az országban keletkező jövedelmek oldaláról is, azaz a belföldön realizált tényezőjövedelmek (munka és tőkejövedelem), valamint a közvetett adók összegeként. A munkajövedelmek alapvetően a bérek, míg a tőkejövedelmek tulajdonosi jövedelmekre (profitok, bérleti díjak stb.) és hitelezői jövedelmekre (kamatok) oszthatók. Gyakran nem könnyű megkülönböztetni a munka és tőkejövedelmeket. Például hogyan osztható fel a cégében dolgozó magánvállalkozó jövedelme munka és tőkejövedelemre?

2.3 Nominális és reál változók, infláció

2.3.1 Reál és nominális GDP

Eddig a nominális, pénzértékben számolt GDP-t definiáltuk. Két periódus nominális GDP értékeinek változása mögött azonban ár és mennyiségi változások is meghúzódhatnak. Például a tejfogyasztás forintban mért összege növekedhet azért, mert a tej ára nő, de azért is, mert több tejet fogyasztunk. Természetes igény, hogy ezt a kétfajta hatást megkülönböztessük. Szeretnénk egy olyan megkülönböztetést, ami a nominális GDP-t ár és mennyiség szorzatára bontja. A reál GDP-t az úgynevezett volumen (mennyiségi) indexével jellemezzük. A volumen indexek mellett párhuzamosan definiálhatunk áraggregátumokat, árindexeket is.

Ehhez az indexszámok elméletének fogalmaira van szükségünk. Általában egy bázisindex a bázis és tárgyidőszak elemi árainak és mennyiségeinek függvénye, amelyet az aggregált mennyiség, vagy az aggregált árszint két időpont közötti növekedési ütemeként interpretálunk. Az alábbiakban t jelöli a rögzített bázis időszakot, s pedig tetszőleges egész szám, mivel a bázisindexet "előre" és "visszafelé" is számolunk. A legegyszerűbb indexszámok a következők:

1. Laspeyres mennyiségi index

$$Q^L_{t.t+s} = \frac{\sum_i p_{i,t} q_{i,t+s}}{\sum_i p_{i,t} q_{i,t}}.$$

   Itt a mennyiségeket bázisidőszaki árakon összegezzük.

2. Laspeyres árindex

$$P^L_{t.t+s} = \frac{\sum_i p_{i,t+s} q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t} q_{i,t}}.$$

   Itt az árakat bázisidőszaki mennyiségekkel összegezzük.

3. Paasche mennyiségi index

$$Q^P_{t.t+s} = \frac{\sum_i p_{i,t+s} q_{i,t+s}}{\sum_i p_{i,t+s} q_{i,t}}.$$

   Most a tárgyidőszaki árakkal összegzünk.

4. Paasche árindex

$$P^P_{t.t+s} = \frac{\sum_i p_{i,t+s} q_{i,t+s}}{\sum_i p_{i,t} q_{i,t+s}}.$$

Itt pedig a tárgyidőszaki mennyiségekkel összegzünk.

Ha van például egy $Q_{2000,2010}$ volumenindexünk, akkor természetesen definiálható a 2000-es forintban mért 2010-es mennyiség, mint

$$Q_{2000,2010} = \sum_i p_{i,2000} * q_{i,2010}.$$

Másfelől, ha van egy $P_{2000,2010}$ aggregált árindexünk, akkor az aggregált árszintet gyakran az alábbi módon fejezik ki:

$$Q_{2000,2010} * 100,$$

ahol a bázis időszaki árszintet 100-nak tekintjük.

A fenti indexszámok jelentésének megértéséhez legyen

$$w_{i,t} = \frac{p_{i,t} q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t} q_{i,t}}$$

az i-edik termék kiadási súlya a t-edik periódusban.

Egy Laspeyres árindex felírható, mint az egyedi indexek bázis időszaki kiadási súlyokkal súlyozott számtani átlaga:

$$P^L_{t.t+s} = \frac{\sum_i p_{i,t+s} q_{i,t}}{\sum_i p_{i,t} q_{i,t}} = \sum_i w_{i,t} \left(\frac{p_{i,t+s}}{p_{i,t}} \right).$$

(A Laspeyres mennyiségi index pedig az egyedi mennyiségi indexek bázis időszaki kiadási súlyokkal súlyozott számtani átlaga.)

A Paasche árindex felírható, mint az egyedi indexek tárgyidőszaki kiadási súlyokkal súlyozott harmonikus átlaga:

$$P^P_{t.t+s} = \left(\frac{\sum_i p_{i,t+s} q_{i,t+s}}{\sum_i p_{i,t} q_{i,t+s}} \right) = \frac{1}{\sum_i w_{i,t+s} \left(\frac{p_{i,t+s}}{p_{i,t}} \right)^{-1}}.$$

(A Paasche mennyiségi index pedig az egyedi mennyiségi indexek bázis időszaki kiadási súlyokkal súlyozott harmonikus átlaga.)

Egy adott mennyiségi indexhez mindig definiálhatunk egy deflátor árindexet úgy, hogy a mennyiségi index és a deflátor árindex szorzata kiadja az értékindexszet, amit a

$$V_{t,t+s} = \frac{\sum_i p_{i,t+s} q_{i,t+s}}{\sum_i p_{i,t} q_{i,t}}$$

formulával definiálunk.

Belátható, hogy Laspeyres-típusú mennyiségi index deflátor árindexe a Paasche árindex

$$V_{t,t+s} = Q^L_{t.t+s} P^P_{t.t+s}$$

és a Paasche mennyiségi index deflátor árindexe a Laspeyres árindex

$$V_{t,t+s} = Q^P_{t.t+s} P^L_{t.t+s}$$

Szomszédos időszakok bázisindexekből képezhetünk indexeket azokat mintegy összeláncolva (láncindex):

$$IL_{t,t+s} = IL_{t,t+1} \cdot IL_{t+1,t+2} \cdot ... \cdot IL_{t+s-1,t+s}$$

ahol $IL_{t,t+s}$ valamilyen bázisindex. Fontos különbség, hogy két időpont között "közvetlenül" képzett bázisindex mindig független a közbenső periódusok áraitól és mennyiségeitől, míg az "összeláncolt" index nem független ezektől.

2.3.2 Reál GDP index: két alternatíva

Kiindulhatunk a következő két definíció bármelyikéből:

$$GDP = Y - U$$

vagy

$$GDP = (X - M) + C + I.$$

Ha minden egyes terméknél kiszámítjuk a termelés és az adott termékből való termelő célú felhasználás különbségét, illetve ha összeadjuk a fogyasztási, beruházási és export célú felhasználást, majd kivonjuk ebből az importot, akkor ugyanazt a számot kell elvben kapnunk. Ezekből a termékszintű mennyiségi adatokból alkotunk mennyiségi bázisindexeket, azaz aggregált reál GDP indexet. A statisztikai hivatalok vagy Laspeyres típusú mennyiségi bázisindexet, vagy Laspeyres típusú bázisindexekből képezett láncindexeket használnak.

2.3.3 Volumenindex problémák*

1. Bázisindexek. Tegyük fel hogy a relatív árak trendszerűen nőnek vagy csökkennek. Ha valaminek a relatív ára csökken, akkor lehet, hogy bár nagy súlya volt a bázisidőszakban, a vásárlásokban a jelentősége ma már kicsi, de ennek ellenére a mennyiségi indexben nagy szerepet kap. Ennek megakadályozására a bázisévet változtatni szokták, igyekeznek közelebb hozni a jelenhez. Ez sem oldja meg tökéletesen a problémát, mert a torzítás most a régmúltban lesz nagy, és az adatok időbeli összehasonlíthatóság továbbra is kérdéses marad. Jobb megoldás, ha láncindexeket használunk.

2. Láncindexek. Tegyük fel, hogy kiszámítjuk az előző egyenlet jobboldalán levő tagok láncindexeit, majd ezeket összeadva szeretnénk megkapni a GDP indexet. Ekkor általában más eredményt kapunk, mintha a GDP indexet az összegre számolnánk ki.

2.3.4 Fogyasztói árindex (CPI)

A fogyasztói árindexet általában külön fogyasztói ár megfigyelésekből számítják. Az aktuális CPI nem igazi Laspeyres index, hanem csak Laspeyres-típusú. A gyakorlatban ugyanis olyan kiadási súlyokat vesznek, amelyek valamely „régi" időszak megfigyeléseiből származnak.

A CPI esetében fellép a logaritmikus torzítás jelensége. Tegyük fel, hogy valamely áru ára februárban 100-ról 75 –re csökkent, miközben minden más ár változatlan maradt. A cikk mondjuk 10 % súllyal szerepel az indexben. Ekkor kiszámolható, hogy a február/januári CPI 97,5. Tegyük fel most, hogy a többi ár továbbra is változatlan, de a kérdéses cikk ára márciusra visszamegy 100-ra. Ekkor a február/márciusi index 103,3. A láncindex számítás ekkor a március/januári indexre kb 100,7-et ad, holott az árak nem változtak. A jelenség aktuálisan egyesek szerint majdnem fél százalékkal is növelheti a közölt inflációt.

Mi a probléma? Az egyedi indexek számtani átlagait szorozzuk össze az index számításnál. Ez nem ugyanazt az eredmény adja, mint ha az egyedi indexekből képeznénk indexeket, és aztán ezeket átlagolnánk. A probléma eltűnne, ha számtani helyett mértani átlagot számolnánk. (A mértani átlag ugyanaz, mint a logaritmusok számtani átlaga, innen a logaritmikus torzítás kifejezés.)

2.4 Feladatok

1.

Az alábbiak éves adatok:

K	NFA	GDP	C	I	CA
300	10	95	80	20	5

és az amortizációs ráta 10 %/év.

Számolja ki az NFI, $GNP, X - M$ mutatókat!

Mennyi lesz a következő időszak elején a NFA és K mennyisége?

Mekkora a K/GDP hányados, mi a mértékegysége és jelentése?

2.

Az alábbi eseményekről döntse el, hogy a GDP mely felhasználás oldali tételeit érintik!

a) X úr (budapesti lakos) megvacsorázik Bécsben.

b) Az OTP kazah bankot vásárol.

c) Az Audi a termelés megduplázása érdekében újabb gépsorokat állít üzembe a győri telephelyén, amelyeket Németországból hoz be.

d) Egy ingatlanközvetítő cég megvásárol egy 10 éves házat.

3 Fogyasztás

A következőkben hozzálátunk ahhoz, hogy felépítsük azokat a modelleket, amelyekkel ma leggyakrabban magyarázzák a makroökonómiai változók viselkedését. Eleinte eltekintünk a nominális áraktól, és csak reálmennyiségekben gondolkodunk. Kiindulásunk az intertemporális fogyasztási-megtakarítási döntési probléma. Mint látni fogjuk ennek a problémának a továbbfejlesztése lesz az alapja a beruházási döntések vizsgálatának is. Az itteni eredményeket majdnem minden későbbi részben hasznosítani fogjuk.

Kezdjük némi intuícióval! Az alábbi állítások sokak véleménye szerint jellemzik megtakarításainkat,

1. Igyekszünk "simítani" a fogyasztásunkat: amikor sok a jövedelmünk félreteszünk arra az időre, amikor kevés. (Például, amikor nyugdíjasok leszünk.) 2. Elővigyázatosság: érhetnek kellemetlen meglepetések, amikre érdemes tartalékot képezni. 3. Igyekszünk gondoskodni a jövő generációiról is. 4. Ugyanakkor türelmetlenek vagyunk, előnyben részesítjük a mai fogyasztást a holnapihoz képest. 5. Nemcsak türelmetlenek vagyunk, a mindenkori jelent túlértékeljük, azaz amikor ma megtervezzük jövőbeli fogyasztásunkat, nem tudjuk beleélni magunkat abba a helyzetbe, hogy a jövőben az lesz a "jelen".

A megtakarítási modellek mindegyike a fenti állítások egyikét-másikát igyekszik matematikai formába önteni.

3.1 Technikai kitérő

3.1.1 Kamatláb mértékegységek és közelítések

A kamatláb mértékegysége: $\frac{1}{ido}$, amit gyakran $\frac{\%}{ido}$ formában adunk meg. (A kamatláb 0,02/év vagy 2 %/év, ezek alternatív kifejezések.) Hogyan térhetünk át például havi kamatlábról éves kamatlábra? Ha a havi kamatláb r_m, akkor az éves kamatláb:

$$\begin{aligned} 1 + r_a &= (1 + r_m)^{12} \\ r_a &= (1 + r_m)^{12} - 1. \end{aligned}$$

Ugyanis, ha kiindulunk 1 forintból, amit minden hónapban újra befektetünk (nem veszünk kis soha semmit) az r_m kamatláb mellett, akkor egy év múlva $(1 + r_m)^{12}$ forintunk lesz. Ugyanez az összeg áll rendelkezésre egy év múlva, ha r_a éves kamatláb mellett egy évre fektetünk be.

A visszafelé konverzió természetesen:

$$\begin{aligned} (1 + r_a)^{\frac{1}{12}} &= (1 + r_m) \\ r_m &= (1 + r_a)^{\frac{1}{12}} - 1. \end{aligned}$$

A gyakorlatban mindig éves kamatlábat szokás megadni. Tehát, ha azt látjuk, hogy egy 1 hónapos lekötésű kamatnak a hozama $r/év$, akkor azt a következtetést kellene levonnunk, hogy 1 hónap múlva minden forintunkból $(1 + r)^{\frac{1}{12}}$ forint lesz (kamatos kamat számítás). Közgazdászok és pénzügyi szakemberek így számolnának. Azonban a törvények szerint Magyarországon $(1 + \frac{r}{12})$ forintot fogunk csak kapni (lineáris kamat számítás).

3.1.2 Példa:

Ha a kamatláb r, hány periódus alatt nő a vagyonunk a duplájára, ha nem fogyasztunk belőle?

Megoldás:

$$(1 + r)^T = 2$$

egyenletet kell megoldani T-re.

$$T = \ln 2 / \ln(1 + r).$$

Az $\ln(1 + r)$ közelítőleg r (ha r kicsi), és ln2 nagyjából 0,7. Tehát gyors fejszámolással a duplázási idő $\frac{0.7}{r}$-nek adódik.

3.1.3 Loglineáris közelítés

Szó volt a növekedési ütemről és a bruttó növekedési tényezőről. Valamely x mennyiségre a bruttó növekedési tényező:

$$G_{t,t+1} = \frac{x_{t+1}}{x_t}.$$

A (nettó) növekedési ütem $g_{t,t+1} = G_{t,t+1} - 1 = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t}$.A kamatláb valójában nettó növekedési ütem: x_t a kezdeti pénzmennyiség, és x_{t+1} a holnapi. Gyakran van szükségünk a $\ln(1+g)$ és hasonló kifejezések kiszámítására, amikor g közel van 0-hoz. Ha az $\ln(1+g)-$t Taylor-sorba fejtjük $g = 0$ körül, akkor azt kapjuk, hogy

$$\ln(1+g) = g - \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{6} - \frac{g^4}{24} + ..$$

Tehát, ha például $r = 0,03$ akkor csak az első két tagot figyelembe véve:

$$\ln(1 + 0,03) \simeq 0,03 - 0,00045 = 0,02955.$$

A makroökonómiában gyakran tekintjük $\ln(1+g)$-t egyszerűen g-nek. A gyakorlati pénzügyekben többtizedes jeggyel dolgoznak, mint a makroökonómiában, de 4 tizedesjegynél többet nem számolnak (1 bázispont= 1 század százalék).

3.1.4 Egyváltozós konstans együtthatós differencia egyenlet*

Tegyük fel, hogy

$$x_{t+1} = ax_t + f.$$

Ez egy úgynevezett differencia-egyenlet, amelynek megoldása x_t sorozat, ha megadjuk az x_0 kezdő értéket. Az x pontot stacionárius pontnak nevezzük, ha

$$x = ax + f.$$

Könnyen kiszámolható, hogy

$$x = \frac{f}{1-a}.$$

Definiáljunk egy új változót:

$$y_t = x_t - x.$$

Ekkor a differencia-egyenlet ekvivalens módon felírható, mint

$$y_{t+1} = ay_t.$$

Az y_t sorozat majdnem mindig divergál, ha $abs(a) > 1$. Kivétel képez az az eset, amikor f olyan, hogy

$$\begin{aligned} x_0 &= ax_0 + f \\ f &= (1-a)x_0. \\ x_0 &= x \\ y_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ilyenkor y_t nem divergál, hanem állandó (0), és ennek megfelelően x_t is állandó (x).

3.2 Intertemporális fogyasztási-megtakarítási probléma

3.2.1 Szekvenciális költségvetési korlát

A fogyasztó arról dönt, hogy vagyonából és munkajövedelméből mennyit fogyaszt, és mennyit takarít meg. A fogyasztó szekvenciális költségvetési korlátja:

$$B_{t+1} = (1 + r_t)B_t + y_t - c_t.$$

ahol B_t a vagyon, r_t a reálkamatláb, y_t a munkajövedelem (vagy általában minden olyan típusú jövedelem, ami nem függ a vagyon nagyságától) , és c_t a fogyasztás. A megtakarítás alatt a jövedelem (tőke plusz munkajövedelem) és a fogyasztás különbségét értjük:

$$s_t = r_t B_t + y_t - c_t.$$

A vagyon lehet pozitív (követelés), vagy negatív (adósság) is. Implicit feltevésünk itt az, hogy a kamatláb ugyanakkora kölcsönvétel és hitelnyújtás esetén.

Iteráljuk "előre" a költségvetési korlát azonosságot:

$$\begin{aligned} B_1 &= (1 + r_0)B_0 + y_0 - c_0 \\ B_2 &= (1 + r_1)(1 + r_0)B_0 + (1 + r_1)(y_0 - c_0) + (y_1 - c_1) \\ &\ldots \\ B_{T+1} &= (1 + r_T)(1 + r_{T-1})\ldots(1 + r_0)B_0 + \\ &\quad (1 + r_T)(1 + r_{T-1})\ldots(1 + r_1)(y_0 - c_0) + \\ &\quad (1 + r_T)(1 + r_{T-1})\ldots(1 + r_2)(y_1 - c_1) + \\ &\quad \ldots \\ &\quad (y_T - c_T). \end{aligned}$$

Tömörebben felírva megkapjuk a költségvetési korlát jövőérték alakját:

$$B_{T+1} = \prod_{t=0}^{T} (1 + r_t)\, B_0 + \sum_{t=0}^{T} \left[\prod_{s=t}^{T} (1 + r_{s+1}) \right] (y_t - c_t)$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $q_0 = 1$,ha $t > 1$ akkor $q_t = \frac{1}{1+r_t}$.Legyen $Q_t = \frac{1}{(1+r_1)..(1+r_t)} = \prod_{s=0}^{t} q_s$, a 0. és $t-$edik időszak közötti diszkontfaktor.

A jövőérték alakban felírt korlát mindkét oldalát Q_T-vel szorozva megkapjuk a költségvetési korlát jelenérték alakját:

$$\begin{aligned} Q_T B_{T+1} &= (1+r_0)B_0 + \sum_{t=0}^{T} Q_t (y_t - c_t) \\ &= (1+r_0)B_0 + (y_0 - c_0) + \\ &\quad \frac{1}{1+r_1}(y_1 - c_1) + \\ &\quad \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}(y_2 - c_2) + \\ &\quad ... \\ &\quad \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)...(1+r_T)}(y_T - c_T). \end{aligned}$$

3.2.2 A megtakarítási döntés: véges periódus

A neoklasszikus mikroökonómiai modellel összhangban feltehetjük, hogy a fogyasztónak van egy célfüggvénye (hasznossági függvénye):

$$U(c_0, ..., c_T) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t), \text{ ahol } u' > 0, \ u" < 0, \ 0 < \beta,$$

és megtakarítási döntését úgy hozza meg, hogy ezt a célfüggvényt maximálja.

Itt β a szubjektív diszkontfaktor, a fogyasztó türelmetlenségét tükrözi. (Minél nagyobb β annál türelmesebb a fogyasztó.) Tegyük fel, hogy $c_t = c$, konstans. Ekkor a helyettesítési határráta a t és t+s időszak között: β^s.

Állítás: Optimális döntés esetén $B_{T+1} = 0$

Mivel a hasznossági függvény szigorúan monoton növekvő racionális fogyasztó nem tarthat pozitív vagyont olyankor, amikor már nem tud fogyasztani. Racionális hitelező viszont nem engedi meg az adósság felhalmozást (negatív vagyon) annak, aki már nem tud fizetni.

Tehát a (hosszú távú) költségvetési korlát felírható, mint

$$\sum_{t=0}^{T} Q_t c_t = (1+r_0)B_0 + \sum_{t=0}^{T} Q_t y_t.$$

Látható, hogy ez egy "szabályos" fogyasztói haszonmaximalizálási feladat, ahol az i-edik áru az i-edik időszakban fogyasztott áru, $p_t = Q_t$,és $p_0 = 1$.

.A szokásos módszerekkel megkaphatjuk a maximum elsőrendű feltételeit az alábbi (szekvenciális) alakban:

$$\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{Q_{t+1}}{Q_t} = q_{t+1} = \frac{1}{1+r_{t+1}}, \ \forall t - \text{re}.$$

Ezek az úgynevezett Euler egyenletek.

Más alakban felírva:

$$u'(c_t) = (1 + r_{t+1}) \beta u'(c_{t+1})$$

Az Euler egyenlet jelentése: a fogyasztás egységnyi növelése $1+r_{t+1}$ egységgel csökkenti a holnapi fogyasztást. Optimumban a fogyasztó számára a mai hasznosság növekmény (az egyenlet baloldala) ugyanaz kell, hogy legyen, mint a holnapi fogyasztás feladásával járó hasznosság áldozat (az egyenlet jobboldala).

Ha vesszük a T darab Euler egyenletet és a költségvetési korlátot, akkor a fogyasztó feladatát megoldhatjuk a $T+1$ darab fogyasztási változóra.

Hogyan hat a $t-$edik időszaki kamatláb növelése az egyes időszakok fogyasztásaira? A t-edik időszaki kamatláb változása megváltoztatja a $Q_t, Q_{t+1}, ...Q_T$ diszkontfaktorokat (árakat). Ha r_t nő, akkor mindezek a diszkontfaktorok csökkennek. A hatást két részre bontva elemezhetjük, mekkora a helyettesítési, és mekkora a jövedelmi hatás.

- Helyettesítési hatás: (A fogyasztás változása, ha ugyanazon a közömbösségi görbén maradunk, mint a kamatláb változás előtt.)
  Állítás: *Ha a t-edik kamatláb nő, akkor adott közömbösségi görbén maradva a t-1-edik és korábbi időszakok fogyasztása csökken, a későbbi időszakok fogyasztása pedig nő.*
  Bizonyítás:*Mivel csak a t-1 és t közötti Euler egyenlet változik, a t-1 és azt megelőző időszakok fogyasztása ugyanolyan irányban mozog, és ugyanez igaz a t és azt követő időszakok fogyasztására is. A t-1-edik időszak fogyasztása viszont csökken, a t. időszaki fogyasztás pedig nő, ha ugyanazon a közömbösségi görbén kell maradnunk.*

- Jövedelmi hatás: Az r_t kamatláb változása jövedelmi hatásának előjele megegyezik B_t előjelével. Mivel itt minden időszaki fogyasztás normál jószág, ezért minden időszak fogyasztása nő, ha a jövedelmi hatás pozitív, és csökken, ha negatív.

Bizonyítás: Deriváljuk a jelenérték korlátot

$$(1 + r_0)B_0 + \sum_{t=0}^{T} Q_t(y_t - c_t) = 0$$

r_t szerint. A derivált:

$$-\frac{1}{1 + r_t} \sum_{s=t}^{T} Q_s(y_s - c_s).$$

Mivel

$$\begin{aligned} (1 + r_0)B_0 + \sum_{s=0}^{t-1} Q_t(y_t - c_t) + \sum_{s=t}^{T} Q_s(y_s - c_s) &= 0 \\ B_t &= -\sum_{s=t}^{T} Q_s(y_s - c_s). \end{aligned}$$

Tehát, ha valaki a $t-$edik periódusban hitelező, akkor jól jár, ha adós, akkor pedig rosszul.

Egy egyszerű eset: konstans kamatláb, amikor ráadásul $\beta = \frac{1}{1+r}$. Ekkor felírható egy egzakt megoldás.

$$c_t = c = \frac{1-\beta}{1-\beta^T}\left((1+r_0)B_0 + \sum_{t=0}^{T}\beta^{t-1}y_t\right)$$

A formula szebb lenne, ha végtelen periódussal számolhatnánk, mivel $\beta^T \to 0$, ha $T \to \infty$.

Példa: Logaritmikus hasznosság és konstans kamatláb

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = (1+r)\beta = G.$$

Tegyük fel, hogy $y_t = y$.
A költségvetési korlát:

$$c\sum \frac{1}{(1+r)^t} = y\sum \frac{1}{(1+r)^t} + (1+r)B_0.$$

Az optimális fogyasztás konstans:

$$c = y + \frac{1+r}{\sum \frac{1}{(1+r)^t}}B_0.$$

Példa: Két időszak

$$\begin{aligned}
y_0 &= 10 \\
y_1 &= 0 \\
u(c_t) &= \ln c_t \\
\beta &= 4/5 \\
r &= 0,25 \\
B_0 &= 0
\end{aligned}$$

A költségvetési korlát:

$$c_0 + \frac{c_1}{1,25} = 10$$

Az Euler-egyenlet:

$$\frac{1}{c_0} = \frac{4}{5}\frac{5}{4}\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_1}.$$

Ezekből a fogyasztási pálya:

$$c = c_0 = c_1 = \frac{50}{9}.$$

Definíció szerint a megtakarítások:

$$\begin{aligned} s_0 &= 10 - \frac{50}{9} = \frac{40}{9} \\ s_1 &= \frac{1}{4}\frac{40}{9} - \frac{50}{9} = -\frac{40}{9}. \end{aligned}$$

Példa:
Legyen most

$$\begin{aligned} y_0 &= 10 \\ y_1 &= 10. \end{aligned}$$

A költségvetési korlát változik:

$$c_0 + \frac{c_1}{1,25} = 10 + \frac{10}{1,25}.$$

Ebből:

$$\begin{aligned} c &= 10 \\ s_0 &= 0 \\ s_1 &= 0. \end{aligned}$$

Megadhatunk általános formulákat két időszak, logaritmikus hasznosság és konstans kamatláb mellett:

Költségvetési korlát:

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = (1+r)B_0 + y_0 + \frac{y_1}{1+r}.$$

Euler-egyenlet:

$$\frac{c_1}{c_0} = \beta(1+r).$$

Tehát:

$$c_0 = \frac{1}{1+\beta}((1+r)B_0 + y_0 + \frac{y_1}{1+r}).$$

Ha azt a kamatlábat keressük, ahol a megtakarítás 0, akkor az

$$rB_0 + y_0 - c_0 = 0$$

egyenletet kell megoldani.

3.2.3 Végtelen időszakos fogyasztási-megtakarítási probléma

Annak feltételezése, hogy csak egy meghatározott időtávra tervezünk nem nagyon meggyőző. Éljünk most egy szélsőségesnek tűnő alternatív feltevéssel: a fogyasztó végtelen időtávra tervez.

$$U(c_1, ..., c_T, ...) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \text{ ahol } u' > 0,\ u\text{''} < 0,\ 0 < \beta < 1.$$

Mi indokolhat végtelen időszakra való tervezést? Amennyiben dinasztikusan gondolkodunk, törődünk az utódainkkal, és az utódaink utódaivel is, akkor a viselkedésünk hasonlíthat a végtelen periódusra tervezésre.

A szekvenciális költségvetési korlátok felírása változatlan. A jelenre diszkontált költségvetési korlát alkalmazható akkor is, ha nincsen utolsó periódus. Vegyük ennek határértékét, ha T tart a végtelenbe.

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} Q_T W_{T+1} = (1 + r_0)B_0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{T} Q_t (y_t - c_t).$$

A továbbiakban mindig fel fogjuk tételezni, hogy a baloldal 0, vagyis a (nettó) vagyon jelenértéke tart a 0−hoz. Ennek indoklása az, hogy végtelen ideig tartó pozitív jelenértékű vagyonfelhalmozás esetén lehetne többet fogyasztani minden periódusban anélkül is, hogy a fogyasztó eladósodna, tehát ez nem lenne racionális magatartás. (Legyen $c_t' = c_t + \epsilon$, ahol $\epsilon > 0$. Nyilván ϵ megválasztható úgy, hogy a vagyon jelenértéke pozitív maradjon.) Ugyanakkor hosszú távon negatív jelenértékű vagyon azt jelentené, hogy a hitelező halmozna fel pozitív jelenértékű vagyont, vagyis ő nem viselkedne racionálisan.

Az Euler-egyenleteknek intuitíve most is teljesülnie kell optimumban (be is látható, hogy ez igaz),

$$u'(c_t) = (1 + r_{t+1}) \beta u'(c_{t+1})$$

minden t-re. A végtelen sok Euler-egyenlet és a

$$(1 + r_0)B_0 + \sum_{t=0}^{\infty} Q_t (y_t - c_t) = 0$$

hosszú távú költségvetési korlát együttesen meghatározzák az optimlis $c_0, c_1, ...c_t...$sorozatot.

A $\beta = \frac{1}{1+r}$ esetben végtelen horizont esetén létrejön a teljes fogyasztás simítás:

$$c_t = c = (1 - \beta) \left((1 + r)B_0 + \sum_{t=0}^{\infty} Q^t y_t \right) = rB_0 + \frac{r}{1 + r} \left(\sum_{t=0}^{\infty} (\frac{1}{1 + r})^t y_t \right).$$

Az egyenlet úgy interpretálható, hogy "fogyaszd el (nagyjából) a vagyonod kamatait", ahol a $\sum_{t=0}^{\infty} Q^t y_t$ tagot (a munkajövedelem jelenértékét) szokás emberi tőkének nevezni. (Általában is, nemcsak ebben a speciális esetben.)

Példa: A kezdeti adósság (B_0) 100, a kamatláb 0,05, és minden évben a jövedelem 10. Ha feltesszük, hogy a fogyasztás állandó, akkor mekkorának kell lennie ahhoz, hogy a nettó vagyon jelenértéke 0-hoz tartson.?

Hogyan alakul a vagyon?

Megoldás:

A költsgvetési korlátból:

$$-0,05 * 100 + 10 = c.$$

Tehát az optimális fogyasztás

$$c = 5,$$

és az ennek megfelelő vagyon:

$$B_t = -100.$$

3.2.4 Egy speciális hasznossági függvény*

Tekintsünk egy speciális hasznossági függvényt:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}, \text{ ahol } \theta > 0,\ \theta \neq 1$$

Ennek a függvénynek "határesetei" ($\theta = 0$) a lineáris, és ($\theta \to 1$) a logaritmus függvény.

Specializáljuk erre az esetre az Euler egyenletet.

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = [(1+r)\beta]^{\frac{1}{\theta}}$$

Logaritmizáljuk az egyenletet:

$$\log c_{t+1} - \log c_t = \frac{1}{\theta}\left[\log(1+r_{t+1}) + \log\beta\right]$$

A fogyasztás növekedési üteme, ami közelítőleg ($\log c_{t+1} - \log c_t$), pozitív, ha az objektív diszkontráta ($\frac{1}{1+r_{t+1}}$) nagyobb, mint a szubjektív diszkontráta (β). A növekedési ütem növelhető a kamatláb változtatásával. A kamatláb hatás annál gyengébb, minél nagyobb a θ paraméter, amelynek reciprokát az intertemporális helyettesítés rugalmasságának is hívjuk.

Konstans kamatláb mellett a következő megoldás adódik:

$$\begin{aligned}
\gamma &= [(1+r)\beta]^{\frac{1}{\theta}} \\
c_1 &= \frac{r+\gamma+r\gamma}{(1+r)(1+\gamma)}W_1 + \sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+r)(1+\gamma)}\right]^{t-1} y_t \text{ és} \\
c_t &= c_1(1+\gamma)^{t-1}
\end{aligned}$$

A logaritmus függvény megfelel a $\theta = 1$ esetnek.

Példa: Logaritmikus hasznosság, konstans kamatláb és végtelen időszak:

$$\begin{aligned} u_t &= \ln c_t \\ B_0 &= 0 \\ y_0 &= 10 \\ y_t &= 1,02 * y_{t-1} \\ r &= 0,2 \\ \beta &= 0,8 \end{aligned}$$

Megoldás: Az Euler-egyenletek:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = 1,2 * 0,8 = 0,96.$$

A költségvetési korlát figyelembe véve az Euler egyenletet:

$$\sum \frac{1}{(1,2)^t} 0,96^t c_0 = \sum \frac{1}{(1,2)^t} 1,02^t * 10.$$

$$(1 - \frac{0,96}{1,2})^{-1} c_0 = (1 - \frac{1,02}{1,2})^{-1} 10$$

Ebből

$$\begin{aligned} c_0 &= 13,3333 \\ c_t &= 0,96^t * 13,3333 \end{aligned}$$

Általában parametrikusan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{(1+r)\beta}{1+r}} c_0 &= \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+r}} y \\ c_0 &= (1-\beta) \frac{1+r}{r-g} y. \end{aligned}$$

Tehát gyorsabban is megkaphattuk volna az eredményt:

$$c_0 = 0,2 * 1,2 * (1/0,18) * 10 = 13,3333$$

Példa: Tegyük fel, hogy $g = 0$, vagyis $y_t = y$. Van 10 egység kezdeti adósság ($(1+r)B_0 = -10$). A terv az, hogy mindig a kamatok 90 %-át fizessük vissza. Lehet-e ez optimális stratégia valamilyen hasznossági függvény mellett?

Megoldás: A vagyon pályája

$$\begin{aligned} -0,9rB_t &= y - c_t. \\ B_{t+1} &= (1+r)B_t - 0,9rB_t = (1+0,1r)B_t. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
B_t &= -(1+0,1r)^t * 10 \\
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1+r)^t} B_t &= -(\frac{1+0,1r)}{1+r})^t * 10 = 0.
\end{aligned}$$

Bár a vagyon jelenértéke 0-hoz tart a megoldás mégsem lehet optimális, mivel negatív fogyasztással járna.

Példa: Átmeneti jövedelem növekedés hatása.
Tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned}
y_0' &= y_0 + \Delta y \\
y_t' &= y_t, t > 0.
\end{aligned}$$

Mekkora részét fogyasztja el a háztartás a 0. időszaki pótlólagos egy egység jövedelemnek, ha $\beta(1+r) = 1$?
Emlékezzünk az általános formulára:

$$c_t = c = \frac{r}{1+r}\left(\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{1}{1+r})^t y_t\right).$$

Tehát most:

$$c_t = c = \frac{r}{1+r}\left(\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{1}{1+r})^t y_t + \Delta y\right).$$

Az emberi tőke értéke pontosan egy egységgel nő, tehát $(1-\beta) = \frac{r}{1+r}$ részét. (Vagyis gyakorlatilag a kamatokat.)

$$c_t' = c_t + \frac{r}{1+r}\Delta y.$$

Példa Permanens jövedelem növekedés hatása.
Most

$$y_t' = y_t + \Delta y$$

vagyis a jövedelem permanensen nő meg.
Ilyenkor a fentiek alapján:

$$\begin{aligned}
c_t &= c = \frac{r}{1+r}\left(\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{1}{1+r})^t y_t + \sum_{t=0}^{\infty}(\frac{1}{1+r})^t \Delta y\right) \\
c &= \frac{r}{1+r}\sum_{t=0}^{\infty}(\frac{1}{1+r})^t y_t + \Delta y.
\end{aligned}$$

Tehát míg a fogyasztó az átmeneti jövedelemnövekménynek csak a kamatait fogyasztja el, addig a tartós növekményt teljes egészében.

3.3 Hitelfelvételi korlátok

Lehet-e a vagyon negatív? Igen, ez azonos az eladósodással. Ugyanakkor előfordulhat, hogy valaki nem kap hitelt, vagyis a pénzügyi vagyona egyetlen időszakban sem lehet negatív. Tekintsük a szekvenciális költségvetési korlátos alakot. Ha a fogyasztó az első periódusban hitelfelvételi korláttal áll szemben, vagyis nem adósodhat el, pedig szeretne, akkor ebben a periódusban a maximális megvalósítható fogyasztását választja, ami kevesebb, mint a korlát nélküli optimum. A második periódustól rendelkezésére álló vagyon azonban így megnő, tehát a pozitív vagyonhatás miatt onnantól növelni fogja a fogyasztását a hitelfelvételi korlát nélküli optimumhoz képest. A fogyasztó nyilvánvalóan kevésbé tudja simítani a fogyasztását hitelfelvételi korlát esetén.

3.4 Bizonytalanság*

Amennyiben a jövőbeli kamatok és/vagy munkajövedelmek bizonytalanok, az optimális fogyasztási döntés nem határozható meg egyszer és mindenkorra. Ilyenkor a fogyasztónak olyan optimális stratégiát kell választania, amely a mindenkori új információknak megfelelően határozza meg a fogyasztást.

A bizonytalanság egyik fontos hatása, hogy bizonyos (plauzibilis) hasznossági függvények esetén a fogyasztó megtakarítása növekedni fog a determinisztikus esethez képest az úgynevezett óvatossági motívum megjelenése miatt. Ez a motívum azt jelenti, hogy a fogyasztó tartalékol arra az esetre, amikor nagyon rosszul alakul a jövedelme a jövőben, mivel mindenáron szeretné elkerülni azt, hogy az „éhhalál" közelébe kerüljön. A fenti konkrét hasznossági függvényben, ha θ nagyobb, mint 1, akkor a fogyasztó határhaszna a mínusz végtelenhez tart, ha a fogyasztás megközelíti a 0-t, ami azt jelenti, hogy az ilyen hasznossági függvénnyel rendelkező fogyasztó igyekszik a nagyon alacsony fogyasztási szinteket elkerülni, még akkor is, ha a megtakarításainak hozama kicsi.

3.5 Időben inkonzisztens preferenciák*

Egy éhes galamb választhat aközött, hogy azonnal egy kisebb, vagy 4 mp után egy nagyobb adag táplálékhoz jut. Tegyük fel, hogy a galamb mindig a kisebb, ám gyorsabb megoldást választja. Ekkor, ha alkalmazni akarjuk rá a fenti elméletet, akkor

$$u(K) > \beta^4 u(N),$$

ahol β a másodpercenkénti szubjektív diszkontfaktor, K a kisebb és N a nagyobb adag, valamint $u(K) < u(N)$ természetesen.

Ezután a galambot olyan választásra kényszerítjük, hogy a K táplálékot T=2,4,8,16 mp után kapja meg, azaz nem azonnal, viszont az N táplálékot mindig 4 mp-vel később. Viszont mivel $\beta^T u(K) > \beta^{T+4} u(N)$, továbbra is a kisebb táplálékot kellene választania. Ezzel szemben a kísérletezők azt találták, hogy minden galamb előbb utóbb "megfordítja" a preferenciáit, és áttér a nagyobb táplálékra. (Mintha azt mondaná: ha már kénytelen vagyok várni 16 mp-t, akkor ki tudom várni a 20 mp-et is.)

Hasonló kísérletek, és introspekciónk is, azt bizonyítja, hogy az ember nem feltétlenül különbözik a galambtól. Ebben az esetben "időbeli inkonzisztenciáról" szokás beszélni. Ha ezt a viselkedést akarjuk modellezni nem kell lemondanunk a szubjektív diszkontfüggvény feltevéséről, de valamilyen más függvénytípusra van szükségünk. Például, ha a $\frac{1}{T+k}$ függvényt ($k > 0$) használjuk, akkor biztosan lesz olyan T, hogy bár

$$u(K)\frac{1}{k} > \frac{1}{4+k}u(N),$$

$$u(K)\frac{1}{T+k} < \frac{1}{T+4+k}u(N),$$

hiszen $\frac{T+k}{T+k+4}$1-hez konvergál.

Amit ma jónak tartunk a jövőre vonatkozóan, nem biztos, hogy jónak fogjuk tartani akkor is, amikor eljön a döntés ideje, és bizonyos fokig ma is tudatában vagyunk ennek az inkonzisztenciának. Különösképpen igaz ez az időpreferenciánkra: a mai fogyasztásnak nagyobb súlyt adunk a holnapihoz képest, mint amennyit a holnapi fogyasztásnak a holnaputánihoz képest (hiperbolikus diszkontálás). Az ilyen (időben inkonzisztens) preferenciák kezelése nagy változtatást igényel a modellben, amennyiben itt már a maximalizálás egyszerű feltevését is meg kell haladnunk. Feltevéssel kell élnünk arról is, hogy a döntéshozók mennyire vannak tudatában annak, hogy holnap újra fogják gondolni a viselkedésüket, mennyire bíznak abban, hogy képesek lesznek konzisztensen viselkedni. A hiperbolikus diszkontálás jelensége azonban annál is plauzibilisebb, mivel segítségével magyarázható néhány fontos tény, például a nagyon költséges hitelkártyák, és az alacsony hozamú és illikvid biztosítás jellegű befektetések együttes előfordulása. Az ilyen típusú elméletek egyre nagyobb teret kapnak a közgazdaságtanban, ezért érdemes egy példán illusztrálni a probléma lényegét.

Tegyük fel,hogy egy háztartás preferenciáit három időszakra a következő függvény jellemzi:

$$u^1(C_1, C_2, C_3) = \log(C_1) + \beta\delta\log(C_2) + \beta^2\delta\log(C_3),$$

ahol $0 < \delta < 1$. Viszont a második időszakban már a

$$u^2(C_2, C_3) = \log(C_2) + \beta\delta\log(C_3)$$

hasznossági függvény lesz érvényben.

A továbbiakban azzal a feltevéssel élünk,hogy a jövedelem az első és második időszakban is $Y > 0$, míg a harmadik időszakban 0. Valamint legyen $r = 0$, és $\beta = 1$.

1. eset: A háztartás mind az első, mind a második periódusban adhat hitelt, vagy kölcsönt vehet fel ugyanakkora r kamatláb mellett.

Ekkor az *ex ante* optimális tervet a következő egyenletrendszer határozza meg:

$$2Y = C_1^o + C_2^o + C_3^o$$

(ami a költségvetési korlát), míg

$$\frac{C_2^o}{C_1^o} = \delta < 1$$

és

$$\frac{C_3^o}{C_2^o} = 1.$$

(az Euler-egyenletek).

Tehát a tervezett fogyasztás csökken az 1. és 2. periódus között, míg a 2. és 3. periódus között változatlan.

Azonban mi történik, ha elérkezik a 2. periódus? Ekkor a háztartás problémája a következő lesz:

$$\begin{aligned} & \max_{C_2, C_3} (\log(C_2) + \delta \log(C_3)) \\ (Y - C_1) + Y &= C_2 + C_3. \end{aligned}$$

Itt természetesen C_1 már adottság, nem döntési változó.

Ennek a feladatnak a megoldása, az utólagos terv, kiszámítható az alábbi egyenletek megoldásaként, de már csak C_2 és C_3 a döntési változók:

$$2Y - C_1 = C_2 + C_3$$

$$\frac{C_3}{C_2} = \delta < 1.$$

Azonnal látszik, hogy ennek a feladatnak a megoldásaként adódó második és harmadik időszaki fogyasztás nem lehet azonos az *ex ante* tervből származtatott második és harmadik periódusbeli fogyasztással, bármi is legyen C_1. A fogyasztó többet fog fogyasztani a 2. periódusban, mint a 3.-ban. Kérdés, hogy hogyan viselkedik ilyenkor egy háztartás. Két kézenfekvő ötlet van. 1. A háztartás szofisztikált, azaz már a kezdet-kezdetén látja azt, hogy *ex ante* terve nem kivitelezhető, mivel nem konzisztens az időben. Ezért első időszaki fogyasztását úgy határozza meg, hogy figyelembe veszi a második időszaki döntését, és azzal összhangban cselekszik. Ekkor a következő problémát oldja meg:

$$u(C_1, C_2, \delta C_2) = \log(C_1) + \delta \log(C_2) + \delta \log(\delta C_2),$$

$$2Y = C_1 + (1+\delta)C_2.$$

(Mivel figyelembe veszi, hogy $C_3 = \delta C_2$ lesz.)
A C_2 szerinti határhaszon most:

$$\delta\frac{1}{C_2} + \delta\frac{1}{C_2} = \frac{2\delta}{C_2}.$$

A C_2 ára jelenértékben: $1+\delta$.Tehát az Euler-egyenlet:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{2\delta}{1+\delta}.$$

Az ideális esetben, mint láttuk:

$$\frac{C_2^o}{C_1^o} = \delta.$$

Ez azt jelenti, hogy relatíve többet fog fogyasztani a szofisztikált fogyasztó a 2. periódusban az 1. periódushoz képest, mint az optimális, mivel $\frac{2\delta}{1+\delta} > \delta$. ha $0 < \delta < 1$.

2. A háztartás naív, az 1. periódusban azt hiszi, hogy a 2. periódusban a kezdeti tervnek megfelelően viselkedik, és ennek megfelelően az 1. periódusban az *ex ante* tervnek megfelelően fogyaszt, majd a 2. periódusban mégis az akkor érvényes preferenciáknak megfelelően cselekszik.

2. eset: A fogyasztó felvehet, vagy adhat hitelt egy vagy két időszakra az 1. periódusban. A két időszakos betét (hitel) illikvid, abban az értelemben, hogy a második periódusban nem használható, még fedezetként sem. A 2. időszakban nincs egyidőszakos hitelfelvételi lehetőség, mivel a háztartásnak nincs munkajövedelme a 3. periódusban, és illikvid vagyonát nem használhatja fedezetként.

Ekkor a háztartás megvalósíthatja az ex ante optimális tervet a következőképpen. Legyen B_1 az első időszaki egyidőszakos betét, és B_1^{ill} az első időszaki kétidőszakos (illikvid) betét. Ezeket határozza meg az alábbi két egyenlet.

$$\begin{aligned} C_1^o + B_1 + B_1^{ill} &= Y \\ C_2^o &= B_1 + Y. \end{aligned}$$

Ekkor a költségvetési korlátból következik, hogy

$$B_1^{ill} = C_3^0.$$

A 2. időszakban a háztartás szívesen nyakára hágna az illikvid befektetésnek, de ezt nem teheti, mivel az illikvid, vagyis lehetővé teszi a háztartás számára az elköteleződést. Szofisztikált háztartás hajlandó lenne fizetni is az illikviditásért, mivel az illikvid befektetés még akkor is hasznos, ha a periódusonkénti hozama kisebb, mint r, vagyis negatív.

Az elköteleződés lehetősége azonban csak akkor él, ha nincs lehetőség pótlólagos hitelfelvételre. Az utólagos terv implementálásában érdekelt fogyasztó természetesen hajlandó egyidőszakos hitelt felvenni a 2. periódusban, még az r-nél magasabb kamatláb sem számítana, hogy jelen felé hajló preferenciáinak megfelelőn többet fogyaszthasson, mint az *ex ante* optimális terve. Ebben az esetben az illikvid hitel lényegében fedezetként funkcionálna. Tényleges tőkepiacok mindkét fajta lehetőséget szolgáltatják, rövid távú hiteleket magas kamaton, és hosszú távú illikvid befektetési lehetőségeket alacsony hozammal.

3.5.1 Racionalitás?

Egy kísérletben kétfajta hipotetikus jövedelemnövekedéssel szembesítették a kísérleti alanyokat.

1. eset: 200 USD egy éven keresztül minden hónapban.

2. eset: Azonnal 2400 USD.

A kérdés az volt, hogy mennyivel fogyasztana többet a következő évben.

Az 1. esetben a medián válasz havi 100 USD volt, a 2. esetben pedig azonnal 400 USD, majd havonta 35 USD.

Ezek az eredmények nyilvánvalóan nincsenek összhangban az eddigi elméletünkkel, mintha a válaszadók nem lennének képesek a "korrekt" költségvetési korlátot felmérni.

3.6 Endogén (a modell által meghatározott) kamatláb

Idáig feltettük, hogy a kamatláb kívülről adott (exogén). Nézzük meg, hogy hogyan lehet levezetni a kamatlábat egy egyszerű intertemporális cseregazdaságban. Bár ez a modell nyilvánvalóan túl egyszerű, a tanulságok általánosíthatóak.

Legyen I háztartás, amelyik mindegyike csak két időszakra tervez. Az i-edik háztartás exogén jövedelme Y_{1i} és Y_{2i}. Hasznossági függvényük

$$U_i = \log C_{1i} + \beta_i \log C_{2i}.$$

Ennek alapján az Euler-egyenletek:

$$\frac{C_{1i}}{C_{0i}} = \beta_i(1+r),$$

és a költségvetési korlátok:

$$Y_{0i} - C_{0i} = \frac{1}{1+r}(C_{1i} - Y_{1i}).$$

Mikor jön létre egyensúly? Ha olyan a kamatláb, hogy a 0. időszaki megtakarítások ($s_i = Y_{0i} - C_{0i}$) összege 0. Hiszen ekkor a hitelkereslet és a hitelkínálat megegyezik, viszont a költségvetési korlátokból következik, hogy amikor a 0. időszaki megtakarítások összege 0, akkor $\sum_i (Y_{1i} - C_{1i}) = 0$ is teljesül. (Ez a Walras-törvény alkalmazása erre az esetre.) Az egyes háztartásokra a fenti egyenletek megoldásával :

$$
\begin{aligned}
C_{0i} &= \frac{1}{1+\beta_i}(Y_{0i} + \frac{Y_{1i}}{1+r}) \\
s_{0i} &= \frac{\beta_i}{1+\beta_i}Y_{0i} - \frac{Y_{1i}}{(1+\beta_i)(1+r)}
\end{aligned}
$$

adódik. Vagyis a megtakarítás a kamatláb növekvő függvénye.
A

$$\sum_i s_{0i} = 0$$

egyenletet kell megoldani r-ben. A megoldás kifejezhető, mint

$$1 + r = \frac{\sum_i \frac{1}{1+\beta_i} Y_{1i}}{\sum_i \frac{\beta_i}{1+\beta_i} Y_{0i}}.$$

(Más hasznossági függvény típusnál ilyen egyszerű eredményt nem kapnánk, de a megoldás általánosabb függvényekre is létezik.)

Vezessük be az autark kamatláb fogalmát. Minden háztartás autark kamatlába az, amely mellett a megtakarítása 0. Ezt könnyen meghatározhatjuk az Euler-egyenletből, ha megfigyeljük, hogy autarkiában a fogyasztás minden időszakban azonos a munkajövedelemmel.

$$\frac{Y_{1i}}{Y_{0i}} \frac{1}{\beta_i} = 1 + r_a.$$

Látjuk, hogy az autark kamatláb nő, ha a jövőbeli jövedelem aránya a maihoz, $\frac{Y_{1i}}{Y_{0i}}$, nő, illetve ha a fogyasztók türelme csökken, azaz β_i kisebb lesz.

Tegyük fel, hogy kétfajta fogyasztói csoport van. (Mindkét csoporton belül ugyanazok a jövedelmek és a szubjektív diszkontfaktorok.) Legyen $r_{a1} < r_{a2.}$ Ekkor könnyen igazolható, hogy

$$r_{a1} < r < r_{a2},$$

és az egyensúlyi kamatlábnál az első csoport tagjai hitelezők, a második csoport tagjai pedig adósok lesznek.

Példa: A következőkben feltesszük, hogy az egyes háztartástípusok egyforma arányban vannak jelen a gazdaságban.

Az 1. típusú háztartás adatai:

$$
\begin{aligned}
y_0^1 &= 10, y_1^1 = 0 \\
u(c_t) &= \ln c_t, \beta = 4/5 \\
B_0 &= 0
\end{aligned}
$$

A 2. típusú háztartás adatai:

$$\begin{aligned} y_0^2 &= 0, y_1^2 = 10 \\ u(c_t) &= \ln c_t, \beta = 4/5 \\ B_0 &= 0 \end{aligned}$$

Mekkora az egyensúlyi kamatláb?
Megoldás
Az egyes típusok kereslete a 0.időszakban:

$$\begin{aligned} c_0^1 &= \frac{5}{9}10 \\ c_0^2 &= \frac{1}{1+r}\frac{5}{9}10 \end{aligned}$$

Az egyensúlyi összefüggés:

$$\begin{aligned} \frac{5}{9}10 + \frac{1}{1+r}\frac{5}{9}10 &= 10 \\ (1+q)\frac{50}{9} &= 10 \\ \frac{50}{9}q &= \frac{40}{9} \\ q &= 0.8 \\ r &= \frac{1}{q} - 1 = 0.25. \end{aligned}$$

Példa: 3. típusú háztartás:

$$\begin{aligned} y_0^1 &= 5, y_1^1 = 5 \\ u(c_t) &= \ln c_t, \beta_1 = 4/5 \\ B_0 &= 0 \end{aligned}$$

4. típusú háztartás:

$$\begin{aligned} y_0^2 &= 5, y_1^2 = 5 \\ u(c_t) &= \ln c_t, \beta_2 = 1 \\ B_0 &= 0 \end{aligned}$$

Mekkora az egyensúlyi kamatláb?
Megoldás:
Keresletek:

$$\begin{aligned} c_{01} &= \frac{5}{9}(5+\frac{1}{1+r}5) \\ c_{02} &= \frac{1}{2}(5+\frac{1}{1+r}5) \end{aligned}$$

Egyensúlyi összefüggés:

$$\begin{aligned} \frac{5}{9}(5+5q)+\frac{1}{2}(5+5q) &= 10 \\ \frac{95}{18}q &= \frac{180-50-45}{18}=\frac{85}{18} \\ q &= \frac{85}{90} \\ r &= \frac{1}{q}-1=\frac{90}{85}-\frac{85}{85}=\frac{5}{85}=\frac{1}{17}. \end{aligned}$$

3.7 Feladatok

1.

Számolja ki a különbséget a kamatos kamat és a lineáris kamat számítás között, ha 2 %-os vagy 20 %-os az éves kamatláb!

2.

Ha A ország jövedelme 60 %-a B ország jövedelmének, és A ország g_A, és B ország g_B éves ütemben nő, akkor hány év múlva éri utol A ország B országot?

3.

Mekkora lenne a hiba (közelítőleg), ha g=0,3?

4.

Két időszakos fogyasztás.

Legyen most

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_1 &= 10 \\ u(c_t) &= \ln c_t \\ \beta &= 4/5 \\ r &= 0,25 \\ B_0 &= 0 \end{aligned}$$

Határozza meg a fogyasztás és megtakarítás pályáját!

5.

A következő adatok érvényesek:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 10 \\
y_1 &= 20 \\
u(c_t) &= \ln c_t \\
\beta &= 4/5 \\
r &= 0 \\
B_0 &= 5.
\end{aligned}
$$

Számítsa ki a fogyasztásokat és megtakarításokat!

Milyen kamatlábnál lesz a megtakarítás 0?

6.

A kezdeti nettó vagyon (B_0) 100, a kamatláb (r) 0,05, és minden évben a munkajövedelem (y) 15.

a. Mekkora állandó fogyasztásnál tart a nettó vagyon jelenértéke 0-hoz?

b. Hogyan alakul a vagyon ennél a fogyasztásnál?

7.

Legyen a jövedelem folyamat az alábbi:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
y_1 &= 0 \\
y_2 &= 1 \\
y_{2+s} &= 1,01^s.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= 0,9 \\
r &= 0,1.
\end{aligned}
$$

Számolja ki a fogyasztási és megtakarítási pályát, valamint a vagyon alakulását az időben!

8.

Az alábbi adatok alapján határozza meg az optimális fogyasztás pályáját!

$$
\begin{aligned}
u_t &= \ln c_t \\
B_0 &= 0 \\
y_0 &= 10+1 \\
y_1 &= 1,02*10 \\
y_t &= 1,02*y_{t-1}, t > 1. \\
r &= 0,2 \\
\beta &= 0,8
\end{aligned}
$$

9.

Két háztartás típus van, amelyeket a következő adatok jellemeznek:

I. típusú háztartás:

$$
\begin{aligned}
y_0^1 &= 5, y_1^1 = 5 \\
u(c_t) &= \ln c_t, \beta_1 = 4/5 \\
B_0 &= 0
\end{aligned}
$$

II. típusú háztartás:

$$
\begin{aligned}
y_0^2 &= 5, y_1^2 = 5 \\
u(c_t) &= \ln c_t, \beta_2 = 1 \\
B_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Mekkora az egyensúlyi kamatláb?

Mi lenne, ha csak az I. vagy csak a II. típusú háztartások lennének a gazdaságban?

4 Beruházás

Nemzetgazdasági szinten beruházásnak csak az új állótőke felhalmozását tekintjük. Az egyes egyének szempontjából minden tőkebefektetés beruházás, aminek a hozama nem közömbös számunkra, viszont közömbös, hogy például új, vagy régi házat vásároluk, részvényt vagy kötvényt. Ahhoz, hogy az állótőke felhalmozás speciális problémáját megértsük újra az egyéni döntéshozók problémájából fogunk kiindulni.

4.1 Arbitrázsmentesség és tőkehozam

Tegyük fel, hogy van két beruházási lehetőségem, amelyek 1 egységnyi tőkéből egy periódus múlva $1 + r_a$ illetve $1 + r_b$ vagyon tulajdonosává tesznek. Tehát a befektetésből származó vagyonváltozás (a jövedelem) r_a és r_b. Az r_a és r_b mennyiségeket fajlagos (egységnyi tőkére eső) hozamnak is nevezzük. Feltesszük pillanatnyilag, hogy a hozam lineáris, vagyis K egységnyi befektetésből a hozamok r_aK és r_bK.

Ha a hozam tökéletesen előrelátható, és nincs más motivációnk, akkor egy "telhetetlen" fogyasztó mindig a magasabb hozamú befektetést választaná. Ha nemcsak kettő, hanem számos befektetés között választhatunk, akkor csak a legmagasabb hozamúak maradhatnának életben. Ha azt látnánk, hogy számos befektetési fajta létezik, akkor ezek hozamának egyenlőnek kellene lennie! Ezt egyensúlyi vagy néha arbitrázsmentességi feltételnek is nevezzük. Nyilvánvalóan a valóságban nincsenek biztos hozamok, de egyelőre képzeljük el azt, hogy a különböző befektetési lehetőségek hozamát pontosan előrelátjuk. Hasonlítsunk össze néhány befektetés típust, és határozzuk meg a (bizonytalanság hiányát feltételező) arbitrázsmentességi összefüggéseket.

Referenciának mindig a legegyszerűbbet, az egyidőszakos kötvényt tekintjük. Az egyidőszakos a kötvény 1 egység mai (t periódusbeli) befektetésre egy periódus múlva $1 + r_{t+1}$ egységet fizet vissza, tehát az egységhozama r_{t+1}. Egyensúlyban az összes többi befektetésnek is ezt az r_{t+1} hozamot (kötvénykamat) kellene produkálnia.

4.1.1 Bankbetét

Mivel a bankbetét ugyanúgy fix kamatot fizet, ezért

$$1 + r_{t+1} = 1 + d_{t+1}$$

kell, hogy fennálljon ahol d_{t+1}a betéti kamatláb.

4.1.2 Lejárat nélküli kötvény

Egy lejárat nélküli kötvény (consol) minden időszakban rögzített g járadékot fizet. Az árát t-ben jelöljük p_t^c-vel. Bruttó hozama a $t+1$-edik ár és a járadék összege osztva a t-edik időszaki árral:

$$1 + r_{t+1} = \frac{p_{t+1}^c + g}{p_t^c}.$$

Ilyen kötvények ma már nem léteznek, de a nagyon hosszú lejáratú kötvények jól közelítik a lejárat nélküli kötvényeket.

Példa: Legyen a kamatláb (r) 0,03, a járadék kötvényenként 100 forint. Mekkora a kötvény ára forintban kifejezve, ha nem számítunk kötvényár változásra?

Megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{p^c + 100}{p^c} &= 1,03 \\ p^c &= \frac{10000}{3}. \end{aligned}$$

4.1.3 Részvény

A részvény valamilyen vállalat osztalékára szóló követelést reprezentál (egyéb jogcímek mellett). Amikor részvényt vásárolunk a befektetésünk a részvényár (P_t^S), és a befektetésből származó vagyon értéke egy periódus múlva a P_{t+1}^S ár és a d_{t+1} osztalék összege. Tehát a bruttó hozam:

$$1 + r_{t+1} = \frac{P_{t+1}^S + d_{t+1}}{P_t^S}.$$

Ez a formula nagyon hasonlít a lejárat nélküli kötvény hozamát leíró formulához.

Példa: A kamatláb 2 % /év, és azt várjuk, hogya a jövő évtől kezdve mindig részvényenként 50 forintot fizetnek osztalékként. Mekkora a mai részvényár?
Megoldás:
MIvel az osztalák állandó nem számíthatunk árváltozásra. A részvényárat ugyanúgy számolhatjuk ki, mint a lejárat nélküli kötvény árát.

$$P^s = \frac{1}{0,02}50 = 2500.$$

Példa: Mekkora a részvényár akkor, ha arra számítanak, hogy jövőre még csak 50 lesz az osztalék, de két periódus múva már 100 egységet fizetnek, és azután ezt fenntartják?
Megoldás:
A feladatból következik, hogy a t+1-edik időszaki részvényár:

$$P^s_{t+1} = \frac{1}{0,02}100 = 5000.$$

Ekkor a mai részvényár:

$$P^s_t = \frac{P_{t+1} + 50}{1,02} = 4951.$$

A részvényárakat két formában szokták felírni, néha úgy tekintjük, hogy a részvény tulajdonosa már a mai osztalékra is jogosult (közvetlenül osztalákfizetés előtt adják el arészvényt). Az osztalékot is tartalmazó részvényár ekkor:

$$\widetilde{P}^S_1 = P^S_1 + d_1.$$

Tehát az arbitrázsmentességi összefüggés:

$$\begin{aligned} 1 + r_{t+1} &= \frac{\widetilde{P^S_{t+1}}}{\widetilde{P^S_t} - d_t}. \\ \widetilde{P^S_t} &= d_t + \frac{\widetilde{P^S_{t+1}}}{1 + r_{t+1}}. \end{aligned}$$

A fenti példák megoldásait általánosíthatjuk és összefüggéseket vezethetünk le a hozamok és a tőkeárak között.

Hozam és a tőke ára Tételezzük fel az egyszerűség kedvéért, hogy r konstans. Fejezzük ki a részvényárat az alábbi módon:

$$P^S_t = \frac{P^S_{t+1} + d_{t+1}}{1 + r}.$$

Ekkor, ha előre iterálunk, osztunk a diszkontrátával és tartunk a végtelenbe, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_{t+1}^S &= (1+r)P_t^S - d_{t+1} \\ \lim_{i\to\infty} \frac{P_{t+i}^S}{(1+r)^i} &= P_t^S - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{t+i}}{(1+r)^i}. \end{aligned}$$

Feltehetjük, hogy $\lim_{i\to\infty} \frac{P_{t+i}}{(1+r)^i} = 0$,mivel, ha nem így lenne, vagy mindenki el akarná adni a részvényt, vagy mindenki venni akarna. (Például ha $\lim_{i\to\infty} \frac{P_{t+i}}{(1+r)^i} > 0$, akkor a részvényár legalább olyan ütemben nőne, mint a kamatláb hosszú távon, vagyis a hozama mindig nagyobb lenne annál.) Tehát a jelenlegi részvényár felírható, mint a jövőbeli osztalékok jelenértéke.

Ugyanez az összefüggés a lejárat nélküli kötvény esetében a

$$p_t^c = \frac{g}{r}$$

formulára egyszerűsödik.

4.1.4 Vállalatok fizikai tőkéje

Egy vállalat esetében a befektetés (a fizikai tőke felhalmozása) ára P_t^K a fogyasztási jószágban kifejezve, a hozam pedig három részből tevődik össze: a P_{t+1}^K tőke holnapi ára, amiből lejön az amortizáció $-\delta P_{t+1}^K$, továbbá a költségek levonása után a vállalatnál maradó jövedelem, r_{t+1}^K (szintén a fogyasztási jószágban kifejezve). Az egyensúlyi összefüggés most:

$$\frac{(1-\delta)\, P_{t+1}^K + r_{t+1}^K}{P_t^K} = 1 + r_{t+1}.$$

A tőke nettó hozama három részből tevődik össze. 1. A százalékos ár (átértékelési) nyereség vagy veszteség ($\frac{P_{t+1}^K - P_t^K}{P_t^K}$), 2. az amortizáció (átszámolva a fogyasztási jószágban kifejezett százalékos veszteségre, $\frac{-\delta P_{t+1}^K}{P_t^K}$, 3. a fogyasztási jószágban kifejezett befektetés egységére jutó bérleti díj, $\frac{r_{t+1}^K}{P_t^K}$. Ha a relatív tőkeárak nem változnak, akkor a formula leegyszerűsödik:

$$r_{t+1}^K - \delta = r_{t+1} \ .$$

Példa: A kamatláb 5 %/év. Van egy berendezés, amely ára (újonnan) egy év múlva várhatóan 90 %-a lesz a mai árának. Az amortizáció 20 %/év. A berendezéssel 15 egység profitot tudunk elérni egy év alatt. Mekkora mai berendezés árnál vagyunk közömbösek a kétfajta befektetés (berendezés vásárlás és kötvényvásárlás) között?

Megoldás:

A berendezés holnapi értéke: $0,8 * 0,9$ - szerese lesz a mainak. Tehát

$$\frac{(1-\delta)\, P_{t+1}^K}{P_t^K} = 0,72.$$

. Az egységnyi tőkére eső jövedelem:

$$\frac{r_{t+1}^K}{P_t^K} = \frac{15}{P_t^K}.$$

Teljesülnie kell a

$$0,72 + \frac{15}{P_t^K} = 1,05$$

összefüggésnek. Ezekből:

$$P_t^K = \frac{15}{0,33} = 45,45455.$$

4.1.5 Lakás

A lakástulajdonos helyzete hasonló a vállalati fizikai tőke tulajdonosáéhoz, csak itt az r_{t+1}^H jövedelem a lakbér (feltéve, hogy a folyó költségeket (rezsi) a bérlő fizeti és előre fizet lakbért, ami a szokásos megoldás). Az egyensúlyi összefüggés:

$$1 + r_{t+1} = r_t^H + \frac{(1-\delta^H)P_{t+1}^H}{P_t^H}.$$

Példa: A kamatláb 0.02. A lakások 10 %-kal amortizálódnak periódusonként, de a lakásár emelkedés mértéke is 10 %/periódus. A jelenlegi lakásár 1000 egység. Menyiért érdemes legalább kiadnom a lakást? (Nettó bérleti díjban gondolkodunk, vagyis ami nem tartalmazza a rezsiköltségeket.)

Megoldás:

Egy periódus múlva a lakás értéke: $1000{*}1.1{*}0.9 = 990$ lesz. Ha a lakást most eladom, és a kapott összeget befektetem, akkor egy periódus múlva $1.02{*}1000 = 1020$ értékű vagyonom lenne. Ha legalább ezt el akarom érni, akkor 30 egységnél nagyobb bérleti díjnál mindig érdemes kiadnom.

Mi történne, ha a lakásár emelkedés 20% lenne?

Ekkor egy periódus múlva a lakás értéke: $1000 * 1.2 * 0.9 = 1080$ lenne. Ez nagyobb, mint az 1020 akkor is, ha 0 bérleti díjat kérek. Tehát nem lenne egyensúly a piacon.

"Bérleti díj" és a tőke ára Láttuk, hogy felírhatjuk a tőke (lakás) jelenlegi árát a jövőbeli osztalékok ("bérleti díjak") függvényeként. De a reláció meg is fordítható. Írjuk fel például a lakás bérleti díját a jelen és jövőben várt lakásárak függvényeként.

$$r_t^H = P_t^H(1 + r_{t+1}) - (1 - \delta^H)P_{t+1}^H.$$

4.1.6 Kamatok és hozamok

Hogyan hat a kamat (r) változása a lejáratnélküli kötvény árára? Könnyen látszik, hogy a kamat növekedése csökkenti a lejáratnélküli kötvények árát, és ugyanez igaz más "osztalékkal" rendelkező értékpapírok árára is. A kamatláb emelkedés csökkenti a diszkontfaktort (vagyis a jövőbeli jövedelem jelenértékét), és így a tőke árát is, hiszen a tőke felfogható úgyis, mint "jogcím" jövőbeli jövedelmek szerzésére.

4.1.7 Arbitrázsmentesség és a valóság

Egy olyan "ideális" világban, ahol mindenki mindent előrelát, ezeknek az összefüggéseknek teljesülnie kellene, és még sok hasonlónak, hiszen a befektetési formák végtelenül változatosak. A valóság azonban komplikáltabb.

Például a bankbetétek kamata általában kisebb, mint a kötvények kamata. Ennek egyik oka az, hogy a bankbetét a kötvényhez képest pótlólagos szolgáltatást "tartalmaz", fizetésre lehet használni.

A kötvények és részvények közti hozamkülönbséget magyarázza az, hogy a kötvények hozamát a szerződésben előre meghatározzák, míg egy részvény tulajdonosának nincs szerződésben foglalt biztosítéka arra, hogy mennyi osztalékot fog kapni a jövőben. Ezért intuitíve azt gondolhatjuk, hogy a részvény kockázatosabb aktíva, mint a kötvény, de a kockázatosságból adódó hozam különbségekkel itt nem foglalkozunk.

A lakásárak sem láthatók előre, ami indokolja, hogy a gyakorlatban az egyenúlyi összefüggés nem teljesül a kockázatosság miatt. Ráadásul a lakás vétele és eladása, de a bérbadás is, számos olyan további (tranzakciós) költséggel jár, ami a valóságban sokkal bonyolultabbá teszi a lakásárak és bérleti díjak kapcsolatát.

A vállalat fizikai tőkéje esetében jelentősek lehetnek a beruházás úgynevezett fizikai igazodási költségei. Ha egy vállalat megveszi 101-edik gépét, annak beillesztése a termelési folyamatba költséges, és ez a költség nem ugyanaz, mintha ez lenne az első, és nem a 101-edik.

Általában igaz, hogy a jövőbeli hozamokat nem látjuk tökéletesen előre, és a jövő bizonytalansága több dimenzió mentén is mérhető. Például a jövőbeli osztalék sohasem tudható biztosan, de a bankbetéteim reálértékében sem lehetek biztos, ha a kamatlábat "nominálisan" határozták meg. Nem utolsósorban mások ígéreteiről (is) tudjuk, hogy gyakran nem teljesülnek, vagyis lehet, hogy az adósunk egyáltalán nem fizeti ki sem a kamatot, sem az alaptőkét.

A hozamok eltérésének kérdése az úgynevezett "relatív" hozamelméletek problémája, ami a pénzügytan egyik nagy területe. A makroökonómia alapkérdése az "abszolút" hozam probléma: mi határozza meg a kamatlábat? Az előző órán már láttunk egy kamatlábat meghatározó modellt, de ez nyilvánvalóan túlságosan egyszerű volt. Most egy további tényezőt is bekapcsolunk a hozammeghatározás elméletébe. Ehhez tanulmányoznunk kell a kamatláb és az állótőke felhalmozás közötti összefüggéseket.

4.2 Állóeszköz-felhalmozás

Az állótőke fizikai tőkét jelent, amely a termelés során nem használódik fel teljesen, habár részlegesen amortizálódik. Állótőke az épületek, a gépek-berendezések, járművek. Hagyományosan a makroökonómusok ugyanabban a mértékegységben mérik, mint a GDP-t (reáltermék), a tőke azonban stock, és nem flow. Lényegében feltesszük, hogy minden egység reál GDP-t vagy elfogyasztunk, vagy felhalmozunk, azaz növeljük belőle az állótőke készletét (stock). Az állótőke felhalmozását nevezzük bruttó beruházásnak, ami flow mennyiség. Ugyanakkor az állótőke kopik (amortizálódik), ahol a leggyakoribb feltevés az, hogy a kopás arányos a stock-kal. Tehát a tőke időegység alatti megváltozása ∇K felírható, mint

$$\nabla K = I - \delta K,$$

ahol δ az időegységre jutó amortizációs ráta. (Az $I - \delta K$ mennyiséget szokás nettó beruházásnak is nevezni. Ha nem használjuk sem a bruttó, sem a nettó jelzőt, akkor a beruházés bruttó beruházást jelent.)

A beruházás az aggregált kereslet része, jellemzője, hogy jobban ingadozik általában, mint a fogyasztás. Sokkal nagyobb beruházási növekedési ütemeket lehet látni, mint GDP vagy fogyasztás növekedési ütemeket, de másfelől nem ritka a negatív növekedés sem, azaz a beruházások csökkenése egyik évről a másikra. Ha vállalati szinten tekintjük a beruházásokat, akkor ott ez az ingadozás még sokkal nagyobb, mint nemzetgazdasági szinten. Jellemző, hogy a nemzetgazdasági beruházások minden időszakban a vállalatok egy viszonylag kis részére koncentrálódnak.

4.2.1 A háztartás egyben termelő is

Tegyük fel, hogy a háztartás termelő tevékenysége nem válik el a fogyasztástól (családi gazdaság). A fogyasztó célfüggvénye most is:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(C_t\right), \text{ ahol } u' > 0,\ u'' < 0,\ 0 < \beta < 1$$

A háztartás most két formában tarthatja a vagyonát. Vagy a bankban, aminek reálhozama r_{t+1}, vagy pedig valamilyen fizikai tőkejószágban (gép, épület stb.). Tegyük fel, hogy a háztartás bevétele akkor, ha K_t egység tőkét használ fel $F(K_t)$, ahol $F' > 0, F'' < 0$. (A tőke és a fogyasztási jószág "ugyanaz".)

A háztartás számára a költségvetési korlát:

$$B_{t+1} = \left(1 + r_t\right) B_t + F(K_t) - C_t - I_t.$$

A kezdeti bankbetéthez (B_t) hozzáadódik a tőkejövedelem ($r_t B_t + F(K_t)$), ebből a háztartás költ fogyasztásra (C_t), és beruházásra (I_t). Ami megmaradt, az berakja újra a bankba. A fizikai tőke állományának változását leíró egyenlet:

$$K_{t+1} = \left(1 - \delta\right) K_t + I_t,$$

ahol δ az amortizáció rátája.

Definiálhatjuk a

$$G(K_t) = (1-\delta)K_t + F(K_t)$$

"bruttó" termelési függvényt, ami megadja, hogy a K_t nagyságú tőke használata után összesen mennyi felhasználható erőforrás marad. Figyeljük meg továbbá, hogy

$$C_t = (1+r_t)B_t - B_{t+1} + G(K_t) - K_{t+1}.$$

Behelyettesítésekkel a következő célfüggvényt kapjuk:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left((1+r_t)B_t - B_{t+1} + G(K_t) - K_{t+1}\right).$$

ahol B_0 és K_0 adott. Döntési változóink most a B_{t+1} és K_{t+1} $(t = 0, 1, ...)$ sorozatok.

Egyszerűsítések és összevonások után a feladat elsőrendű feltételei B_{t+1} szerint:

$$u'\left(C_t\right) = \left(1 + r_{t+1}\right)\beta u'\left(C_{t+1}\right), \ t = 0, ...$$

Ezek a fogyasztói elméletből már jól ismert Euler egyenletek.

A K_{t+1} szerinti elsőrendű feltétel:

$$u'\left(C_t\right) = \beta u'\left(C_{t+1}\right) G'(K_{t+1}).$$

Az előző két egyenletből:

$$\begin{aligned} G'(K_{t+1}) &= 1 - \delta + F'(K_{t+1}) = 1 + r_{t+1} \\ F'(K_{t+1}) - \delta &= r_{t+1}, t = 0, 2, ... \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenletből következik, hogy optimumban a fizikai tőke határhozama megegyezik a pénztőke hozamával. Adott kamatláb mellett a háztartások pontosan annyi tőkét halmoznak fel, hogy a fizikai tőke határhozama megegyezzen a kamatlábbal. Figyeljük meg, hogy most a tőke határhozama nem állandó!

A feladat megoldásának menete:

1. A kamatláb és a

$$F'(K_t) - \delta = r_t, \ t = 1, ...$$

összefüggés megadja minden $t = 1, ...$-re a fizikai tőke mennyiségét.

2. A tőkefelhalmozási összefüggésből kiszámíthatóak a beruházások minden $t = 0, 1, 2, ...$-re. (A 0. időszaki tőke adottság.)

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t.$$

3. A költségvetési korlátokból

$$B_{t+1} = (1 + r_{t+1})\, B_t + F(K_t) - I_t - C_t$$

és az Euler-egyenletekből

$$u'(C_t) = (1 + r_{t+1})\, \beta u'(C_{t+1})$$

a hosszú távú költségvetési korlát

$$\sum_{t=0}^{\infty} Q_t C_t = (1+r)B_0 + \sum_{t=0}^{\infty} Q_t(F(K_t) - I_t).$$

figyelembevételével meghatározható a C_t sorozat.

Összefoglalva: a kamatláb és a termelési függvény meghatározza az optimális tőkemennyiséget, a tőkefelhalmozási összefüggés pedig ebből az optimális beruházást. Ezután az optimális fogyasztási pálya meghatározása pontosan úgy történik, mint az előző fejezetben, csak Y_t-t $F(K_t) - I_t$-vel kell helyettesítenünk.

Példa: Legyen adottak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} F(K_t) &= 10\sqrt{K_t} \\ \delta &= 0.2 \\ K_0 &= 60 \\ B_0 &= 0 \\ \beta &= 0.9 \\ u(c_t) &= \ln c_t \\ r &= 0.3 \end{aligned}$$

Megoldás:
1. Az optimális tőkemennyiség meghatározása:

$$\begin{aligned} F'(K_t) - \delta &= r_t \\ \frac{5}{\sqrt{K}} &= 0.5 \\ K &= 100. \end{aligned}$$

2. A beruházási pálya

A 0. periódusban még csak 60 egység tőke van, amiből megmarad 48 egység (12 egység amortizálódik.) Tehát a 0. időszaki beruházás:

$$I_0 = 52.$$

Az első időszaktól viszont a beruházásnak csak az amortizációt kell pótolnia.

$$I_t = I = 20, t > 0$$

3. A fogyasztás jelenértéke = tőkejövedelem jelenértéke - beruházások jelenértéke

A fogyasztás jelenértéke

$$\frac{1}{1-\beta}c_0 = \frac{1}{0.1}c_0.$$

A tőkejövedelem jelenértéke:

$$F(K_0) + \frac{F(K)}{r} = 10\sqrt{60} + \frac{1}{0.3}100$$

A beruházások jelenértéke:

$$I_0 + \frac{I}{r} = 52 + \frac{1}{0.3}20.$$

Tehát

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.1 * ((10\sqrt{60} + \frac{1}{0.3}100) - (52 + \frac{1}{0.3}20)). \\ c_t &= (0.9 * 1.3)^t c_0. \end{aligned}$$

4.2.2 Amikor a vállalat termel, de bérli a tőkét

A vállalatok jelentős része nem családi vállalkozás. Ezek egy része másoktól bérli az állóeszközeit. Tegyük fel, hogy egy olyan vállalattal van dolgunk, amely az összes fizikai tőkét bérli. Ezekről a vállalatokról feltesszük, hogy a profitjukat maximalizálják adott árak mellett:

$$\Pi(K_t) = F(K_t) - r_t^K K_t.$$

Ekkor a maximumban

$$F'(K_t) = r_t^K.$$

Mivel egyensúlyban a piacon

$$r_t^K - \delta = r_t$$

a kamatláb meghatátozza a bérleti díjat, és a bérleti díj pedig a tőke iránti keresletet. Amennyiben a tőke határterméke csökkenő, akkor nagyobb kamatláb kisebb tőkekeresletet jelent.

Láthatjuk, hogy ennek a modellnek ugyanaz a megoldása, mint az előzőnek.

A menedzser problémája A mai vállalatok nem elhanyagolható része részvénytársaság, ahol alkalmazott (menedzser) dönt a vállalati beruházásokról, és a vállalat maga birtokolja állóeszközeit. A termelési függvény és a fizikai tőke felhalmozási egyenlete a szokásos. Ezért az osztalék (d_t) felírható, mint

$$d_t = F(K_t) - I_t = F(K_t) + (1-\delta) K_t - K_{t+1},$$

azaz az osztalék a tulajdonosok rendelkezésére álló jövedelem és a beruházás különbsége.

Amennyiben a vállalat a tulajdonosok érdekében jár el (azaz helyesen van ösztönözve), akkor a menedzser a kezdeti tulajdonosok teljes vagyonnövekményét, ami egyenlő az 1. időszaki osztalék és az 1. időszaki részvényár összegével, vagyis a $\widetilde{P}_0^S = P_0^S + d_1$ árral, maximálja.

$$\max_{K_1, K_2, \ldots} \left\{ \widetilde{P}_0^S = \sum_{t=0}^{\infty} Q_t d_t \right\}$$

Ha K_{t+1} szerint deriválunk (ne felejtsük el: K_0 adottság, nem döntési változó), akkor az elsőrendű feltételek:

$$Q_{t+1}(1 - \delta + F'(K_{t+1})) = Q_t, \; t = 0, \ldots$$

Ebből újra levezethető a már ismert összefüggés:

$$\begin{aligned} 1 - \delta + F'(K_{t+1}) &= 1 + r_{t+1}, \\ F'(K_{t+1}) - \delta &= r_{t+1}, \; t = 0, \ldots \end{aligned}$$

Példa Legyen

$$\begin{aligned} F(K_t) &= 4\sqrt{K_t} \\ \delta &= 0.1 \\ r &= 0.2 \\ K_0 &= 10000 \end{aligned}$$

Mi a vállalat optimális beruházási politikája? Mennyi a részvényár?
Megoldás:
Az optimális tőkemennyiség:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{K_t}} &= 0.3 \\ \frac{20}{3} &= \sqrt{K_t} \\ K^* &= \frac{400}{9}. \end{aligned}$$

Az ehhez tartozó beruházás:

$$I^* = \frac{40}{9}.$$

A 0.periódusban azonban túl sok a tőke, tehát annyi beruházásra van szükség, hogy az 1. periódusban már az optimális tőkemennyiség érvényesüljön.

$$I_0^* = \frac{400}{9} - 9000.$$

A 0. időszaki hozam:

$$F(K_0) = 400.$$

A 0. időszaki osztalék:

$$d_0 = 400 - \frac{400}{9} + 9000.$$

A továbbiakban az osztalék

$$d = \frac{800}{3} - \frac{40}{9} = \frac{2360}{9}.$$

Tehát a részvényár, ami a jelenlegi osztalékot is magában foglalja:

$$\widetilde{P} = 9400 - \frac{400}{9} + 5 * \frac{2360}{9}$$

4.2.3 Közömbösségi tételek

Eddig tehát azt láttuk, hogy a neoklasszikus elméletben a beruházások "intézményektől függetlenül" megegyeznek. Az is igaz, hogy a finanszírozás formájától is függetlenek. Mindegy, hogy egy vállalat saját tőkéből, részvények kibocsátásából vagy hitelből finanszírozza magát, a neoklasszikus elmélet szerint mindig ugyanazt a beruházási politikát fogja megvalósítani. Vállalati pénzügyes közgazdászok jól tudják, hogy ez nem teljesül a valóságban. Mégis a makroökonómiai modellek a legutóbbi időkig lényegében ezt tételezték fel.

4.3 A Q-elmélet

Előfordulhat, hogy a tőkejavak beszerzési értéke nagyobb vagy kisebb, mint a vállalat részvényeinek értéke. Ha nagyobb lenne, akkor érdemes lenne eladni belőlük, ha kisebb, akkor viszont érdemes lenne még beruházni. A fenti modellben ez sohasem állhat elő. A valóságban azonban léteznek bizonyos súrlódások, amelyek léterehozhatják ezt a helyzetet. Például a beruházások működő tőkévé alakítása költséges. Be kell állítani a pótlólagos gépeket, és ennek többletköltségei vannak. A részvények árfolyamának tükröznie kell ezeket a költségeket, hiszen ezek csökkentik az osztalékot. A beruházások Q-elméletéből az a következtetés adódik, hogy a beruházást piaci információk alapján az motiválja, hogy hogyan viszonyul egymáshoz a részvények árfolyama, és a vállalat fizikai tőkéjének újrabeszerzési értéke. Intuitíve akkor érdemes beruházni, ha a részvényérték nagyobb, mint a tőke újrabeszerzési értéke. Továbbá az igazodási költségek miatt a vállalatnak nem érdemes azonnal reagálnia a kamatlábak változására, az időben elhúzódva fog végbemenni a tőke mennyiségének igazodása a haszonlehetőség költség változásához.

4.4 Beruházás és kockázat

Az eddigi arbitrázsmentességi érveléseink azon alapultak, hogy a jövőt illetően nincs bizonytalanság, minden hozam tökéletesen előrelátható. Ez természetesen nem teljesül a valóságban. Hogyan kell módosítanunk a hozamok kiegyenlítődési formuláját bizonytalanság, azaz kockázatos befektetések esetén? Általános feltevés az, hogy mivel nem szeretjük a kockázatot, a kockázatos befektetések akkor valósulhatnak meg, ha azokat premizáljuk: azaz minél kockázatosabb a befektetés, annál nagyobb kell, hogy legyen a várható hozama. Hogyan mérjük azonban a kockázatosságot? Intuitíve az a befektetés a kockázatosabb számunkra, ami jobban felerősíti a jövedelmünk ingadozását. A pénzügytanban a kockázatosság pontos fogalma nagyon fontos, míg a makroökonómiában kissé elhanyagoltnak mondható, ebben a bevezető anyagban nem foglalkozunk vele.

4.5 Autóvásárlás és autóhasználat

Tegyük fel, hogy N autót használnak egy országban, és ennek minden évben δ százaléka kiöregszik. Ez azt jelenti, hogy minden évben δN új autót vásárolnak, ennyi az új autók vétele iránti kereslet, míg N autó szolgáltatását igénylik az emberek. Tegyük fel, hogy a szolgáltatás iránti kereslet megnő g százalékkal, vagyis a következő évben már $(1+g)N$ autót akarnak használni. Ekkor ebben az évben az új autó eladások iránti kereslet $(g+\delta)N$ lesz. Tehát az előző évhez képest a kereslet $\frac{g+\delta}{\delta}$-szorosára nő. Például, ha az autók élettartama 10 év ($\delta = 0,1$), és a szolgáltatás iránti kereslet csak 1 százalékkal nő ($g = 0,01$), az autóvásárlások 10 %-kal növekednek. Minél kisebb δ, annál nagyobb a növekedési ütem. Nem csoda, hogy az autó eladások általában sokkal jobban ingadoznak, mint a GDP.

4.6 Tőke és endogén kamatláb

Az előző fejezetben pusztán a jövedelmek pályája és a türelmetlenség alapján határoztuk meg a kamatlábat. Most nézzük meg, mi történik, ha a fizikai tőke befektetésének a lehetősége is rendelkezésre áll.

Legyen I háztartás, amelyik mindegyike csak két időszakra tervez. Mindegyik háztartás egyforma, kezdetben K_0 nagyságú tőke áll a rendelkezésükre, és nincs kezdeti bankbetétjük valamint más jövedelemforrásuk. Csupán két időszakra terveznek. Hasznossági függvényük:

$$U = \log c_0 + \beta \log c_1.$$

A "bruttó" termelési függvény:

$$G(K_t) = (1-\delta)K_t + F(K_t),$$

tehát:

$$K_1 = (1-\delta)K_0 + I_0.$$

és

$$B_1 = (1+r)F(K_0) - c_0 - I_0.$$

Az optimális első időszaki beruházást az

$$F'(K_1) = r$$

egyenlet, együtt a tőkefelhalmozási egyenlettel határozza meg. A második időszaki beruházás

$$I_1 = -(1-\delta)K_2.$$

A költségvetési korlát:

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = (F(K_0) - I_0) + \frac{(F(K_1) - I_1)}{1+r}.$$

Az Euler-egyenletek pedig

$$\frac{c_1}{c_0} = \beta(1+r)$$

Mivel az 1. periódusban minden rendelkezésre álló erőforrást elfogyasztanak:

$$c_1 = B_1 + (1-\delta)K_1 + F(K_1).$$

Viszont mivel mindenki egyforma

$$B_1 = 0.$$

Következésképpen egyensúlyban:

$$\begin{aligned} c_0 &= F(K_0) + (1-\delta)K_0 - K_1 \\ c_1 &= (1-\delta)K_1 + F(K_1). \end{aligned}$$

A kamatlábnak úgy kell alakulnia, hogy a

$$\frac{C_2}{C_1} = \beta(1+r)$$

$$1 - \delta + F'(K_2) = 1 + r$$

optimalitási feltételek teljesüljenek.
A négy egyenletes rendszerből kapjuk a

$$1 - \delta + F'(K_1) = \frac{(1-\delta)K_1 + F(K_1)}{\beta(F(K_0) + (1-\delta)K_0 - K_1)}.$$

egyenletet, amit megoldva levezethetjük K_1-t, amiből az egyensúlyi kamatláb és a fogyasztások is kiszámíthatók. Belátható, hogy amennyibe β nő az egyensúlyi kamatláb csökken, és a K_1 nő. Vagyis ismét a "türelem" csökkenti a kamatlábat!

Példa Kétidőszakos, csak tőkével rendelkező fogyasztó
A költségvetési korlát részletesen:

$$\begin{aligned}B_1 &= F(K_0) - c_0 - I_0\\ K_1 &= (1-\delta)K_0 + I_0\\ B_2 &= (1+r)B_1 + F(K_1) - c_1 - I_1\\ K_2 &= (1-\delta)K_1 + I_1\end{aligned}$$

A viselkedési szabályok:

$$\begin{aligned}\frac{c_1}{c_0} &= (1+r)\beta\\ F'(K_1) &= r+\delta\\ B_2 &= K_2 = 0.\end{aligned}$$

Tehát:

$$\begin{aligned}(c_0+I_0) + \frac{1}{1+r}(c_1+I_1) &= F(K_0) + \frac{1}{1+r}F(K_1)\\ I_0 &= K_1 - (1-\delta)K_0.\\ I_1 &= -(1-\delta)K_1\\ \frac{c_1}{c_0} &= (1+r)\beta\\ F'(K_1) &= r+\delta.\end{aligned}$$

Példa Egyensúlyi kamatláb
Két fogyasztónk van, mindkettőjüket az alábbi közös tulajdonságok jellemzik:

$$\begin{aligned}F(K_t) &= 4\sqrt{K_t}\\ \delta &= 1\\ u(c_t) &= \ln c_t\\ \beta &= 2/3.\end{aligned}$$

Az I. típus kezdeti tőkéje 4, a II. típus kezdeti tőkéje viszont 0.
Mekkora az egyensúlyi kamatláb?
Megoldás:
A gondolatmenet a következő: 1. határozzuk meg minden háztartásra az optimális tőke, beruházás és fogyasztás pályát a kamatláb függvényében. 2. A 0. időszakban az összes tőkejövedelem meg kell egyezzen az összes fogyasztás és beruházás összegével. Ebből az egyenletből számoljuk ki az egyensúlyi kamatlábat. 3. A Walras-törvény miatt ilyenkor automatikusan teljesül az 1. időszaki piaci egyensúly is.

Az optimális tőkemennyiség mindkét típusnál:

$$\begin{aligned} K &= (\frac{2}{1+r})^2. \\ I &= K \end{aligned}$$

Az I. típus 0. időszaki fogyasztása:

$$\begin{aligned} (c_0^I + (\frac{2}{1+r})^2) + \frac{2}{3}c_0^I &= 8 + 4 * \frac{2}{(1+r)^2}. \\ c_0^I &= \frac{3}{5}(8 + 4 * \frac{2}{(1+r)^2} - (\frac{2}{1+r})^2) \end{aligned}$$

A II. típus 0. időszaki fogyasztása:

$$\begin{aligned} (c_0^{II} + (\frac{2}{1+r})^2) + \frac{2}{3}c_0^{II} &= 4 * (\frac{2}{(1+r)^2}). \\ c_0^{II} &= \frac{3}{5}(4 * \frac{2}{(1+r)^2} - (\frac{2}{1+r})^2) \end{aligned}$$

Egyensúlyban:

$$8 = \frac{3}{5}(8 + 4 * \frac{2}{(1+r)^2} - (\frac{2}{1+r})^2) + \frac{3}{5}(4 * \frac{2}{(1+r)^2} - (\frac{2}{1+r})^2) + 2 * (\frac{2}{1+r})^2.$$

Ebből:

$$r = 1.$$

4.7 A neoklasszikus beruházási elmélet és a valóság

A neoklasszikus elméletben a kamatláb és az optimális tőkeállomány között ellentétes mozgás van. Ez arra vezethető vissza, hogy a vállalatokról felteszik, hogy olyan kicsik, hogy nem éreznek jövőbeli keresleti korlátot, azt gondolják, hogy bármilyen mennyiséget el tudnak majd adni a piacon. Ezért elegendő a kamatot megfigyelni ahhoz, hogy az optimális tőkemennyiségüket meghatározzák. Ha figyelembe vesszük azt, hogy a kereslet valójában minden egyes vállalat terméke iránt korlátos, és ezzel a vállalatok is tisztában vannak, akkor a vállalatok tőkefelhalmozását nemcsak a tőke költsége, hanem a jövőben várható kereslet is befolyásolja.

4.8 Feladatok

1.

Mint fent levezettük a részvényárra igaz, hogy

$$P_t^S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{t+i}}{(1+r)^i}.$$

Vesse össze ezt a képletet a végtelen időszakos költségvetési korláttal!

2.

Egy vállalati részvény a következő nyolc évben (először jövőre) mindig 10 egység osztalékot fizet. Ezt követően az örökkévalóságig 20 egység osztalékot fog fizetni. A piaci kamatláb 5%.

Mennyit fizetne egy részvényért a 8. évben közvetlenül az osztalék fizetés után, illetve közvetlenül az osztalékfizetés előtt?

Mennyit fizetne a részvényért ma osztalékfizetés előtt és után?

3.

Egy részvény árfolyama a t-edik időszakban $P_t = 100 \cdot 1.04^t$. A piaci kamatláb minden időszakban 10%. Mennyi a t-edik időszakban fizetett osztalék, ha nincs arbitrázslehetőség?

4.

Két időszakos fogyasztási megtakarítási probléma, Az adatok:

$$\begin{aligned} B_0 &= 0, K_0 = 16, \delta = 0.15, r = 0.25 \\ F(K_t) &= 10\sqrt{K} \\ u(c_t) &= \ln c_t, \beta = 1 \end{aligned}$$

Határozza meg a fogyasztási és beruházási pályát!

5.

Legyen

$$\begin{aligned} F(K_t) &= 2\sqrt{K_t} \\ \delta &= 0.2 \end{aligned}$$

a. Mekkora K_t maximálja a pillanatnyi nettó tőkejövedelmet?

b. Mekkora K_t maximálja az osztalékok jelenértékét, ha $r = 0.05$?

5

Egyensúlyi kamatláb

Két fogyasztónk van, mindkettőjüket az alábbi közös tulajdonságok jellemzik:

$$\begin{aligned} F(K_t) &= 4\sqrt{K_t} \\ \delta &= 1 \\ u(c_t) &= \ln c_t \\ \beta &= 2/3. \end{aligned}$$

Az I. típus kezdeti tőkéje 4, a II. típus kezdeti tőkéje viszont 0.

Mekkora az egyensúlyi kamatláb?

Megoldás:

A gondolatmenet a következő: 1. határozzuk meg minden háztartásra az optimális tőke, beruházás és fogyasztás pályát a kamatláb függvényében. 2. A 0. időszakban az összes tőkejövedelem meg kell egyezzen az összes fogyasztás és beruházás összegével. Ebből az egyenletből számoljuk ki az egyensúlyi kamatlábat. 3. A Walras-törvény miatt ilyenkor automatikusan teljesül az 1. időszaki piaci egyensúly is. Az optimális tőkemennyiség mindkét típusnál:

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{2}{1+r}\right)^2. \\ I &= K \end{aligned}$$

Az I. típus 0. időszaki fogyasztása:

$$\begin{aligned} \left(c_0^I + \left(\frac{2}{1+r}\right)^2\right) + \frac{2}{3}c_0^I &= 8 + 4 * \frac{2}{(1+r)^2}. \\ c_0^I &= \frac{3}{5}\left(8 + 4 * \frac{2}{(1+r)^2} - \left(\frac{2}{1+r}\right)^2\right) \end{aligned}$$

A II. típus 0. időszaki fogyasztása:

$$\begin{aligned} \left(c_0^{II} + \left(\frac{2}{1+r}\right)^2\right) + \frac{2}{3}c_0^{II} &= 4 * \left(\frac{2}{(1+r)^2}\right). \\ c_0^{II} &= \frac{3}{5}\left(4 * \frac{2}{(1+r)^2} - \left(\frac{2}{1+r}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Egyensúlyban:

$$8 = \frac{3}{5}\left(8 + 4 * \frac{2}{(1+r)^2} - \left(\frac{2}{1+r}\right)^2\right) + \frac{3}{5}\left(4 * \frac{2}{(1+r)^2} - \left(\frac{2}{1+r}\right)^2\right) + 2 * \left(\frac{2}{1+r}\right)^2.$$

Ebből:

$$r = 1.$$

5 Munkapiac

Eddig feltételeztük, hogy a fogyasztási és a beruházási kereslet mindig kielégíthető az adott árakon. Most a munkapiac vizsgálatára térünk át, ahol a piac mindkét oldalát (kereslet és kínálat) is megvizsgáljuk. Vagyis most nemcsak mennyiségi, hanem ár-meghatározási kérdésekkel is foglalkozunk. Először a neoklasszikus elméletet tekintjük át, amely egyesek szerint hosszú távon jól írja le a munkapiacot. A munkapiacon azonban hosszú távon is létezik munkanélküliség, ami nem írható le a neoklasszikus modellel. Ennek okát gyakran a piaci súrlódásokban vélik felfedezni, amely a második témánk.

5.1 A neoklasszikus modell

5.1.1 Munkakínálat

Legyen a periódusonkénti hasznossági függvény $u(c,l)$, amely konkáv, mindkét argumentumában növekvő. Itt $l = 1 - L$ a szabadidő, L a munkakínálat, tehát a teljes rendelkezésre álló időmennyiséget 1-re normalizáltuk. A fogyasztó célfüggvénye most:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t), \text{ ahol } 0 < \beta < 1$$

A vagyonfelhalmozás egyenlete, ahol W_t a vagyon, r_t a reálkamatláb, w_t a reálbér, és c_t a fogyasztás:

$$\begin{aligned} B_{t+1} &= (1 + r_t) B_t + w_t L_t - c_t \\ &= (1 + r_t) B_t + w_t(1 - l_t) - c_t \end{aligned}$$

Ha az előző összefüggésből kifejezzük c_t-t, mint

$$c_t = (1 + r_t) B_t + w_t(1 - l_t),$$

akkor a feladatunk döntési változói a $B_1, ...B_t$ és $l_0, l_1...l_t...$ sorozatok, hiszen

$$u(c_t, l_t) = u((1 + r_t) B_t + w_t(1 - l_t), l_t)$$

alakú lesz.

A B_{t+1} szerinti elsőrendű feltétel a szokásos Euler egyenlet, csak most parciális deriváltakkal felírva:

$$\frac{\partial u}{\partial c_t} = (1 + r_{t+1}) \beta \frac{\partial u}{\partial c_{t+1}}.$$

Az l_t szerinti elsőrendű feltétel:

$$\frac{\partial u}{\partial l_t} - \frac{\partial u}{\partial c_t} w_t = 0$$

Ezzel eljutunk egy mikroökonómiából ismert eredményhez:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial u}{\partial l_t}}{\frac{\partial u}{\partial c_t}} &= w_t. \\ MRS(c_t, l_t) &= w_t. \end{aligned}$$

(A továbbiakban a parciális deriváltakra egyszerűsített jelölést vezetünk be. Például legyen $\frac{\partial u}{\partial l} = u_l$, és $\frac{\partial^2 u}{\partial l \partial c} = u_{lc}$.)

Tegyük fel, hogy a fogyasztás adott. Ekkor az összefüggés az inverz pihenéskeresleti függvény. Rögzített fogyasztás mellett nagyobb reálbér nagyobb munkakínálatot jelent, amennyiben a baloldal (a helyettesítési határráta) rögzített fogyasztás mellett a pihenés csökkenő (vagyis a munkakínálat növekvő) függvénye. Ez teljesül, ha a helyettesítési határráta csökkenő függvénye l-nek.

$$\frac{dMRS}{dl} = \frac{u_{ll}u_c - u_{cl}u_l}{u_c^2} < 0,$$

aminek $u_{cl} \geq 0$ (a szabadidő határhaszna a fogyasztás nem-csökkenő függvénye, illetve a fogyasztás határhaszna a szabadidő nem-csökkenő függvénye) egy elégséges feltétele.

Kérdés, hogy merre tolódik el a munkakínálati függvény, ha c-t növeljük? Most rögzítsük l-t és tekintsük a

$$\frac{dMRS}{dc} = \frac{u_{lc}u_c - u_{cc}u_l}{u_c^2}$$

deriváltat. Ennek az előjele pozitív, ha $u_{cl} \geq 0$. Ilyenkor adott pihenés mellett nagyobb lesz a "bérigény" (inverz pihenés kereslet), vagyis ilyenkor a fogyasztás növekedése adott bérnél kisebb munkakínálathoz vezet.

Példa: Legyen

$$u(c, l) = \ln c + \theta \ln l, \theta > 0.$$

A helyettesítési határráta:

$$\frac{u_l}{u_c} = \theta \frac{c}{l}.$$

Az elsőrendű feltétel:

$$\theta \frac{c}{l} = w.$$

Amiből a munkakínálati függvény:

$$L^S = 1 - l = 1 - \frac{\theta c}{w}.$$

5.1.2 Munkakereslet

Legyen egy vállalat termelési függvénye

$$Y_t = AF(K_t, L_t),$$

ahol A a teljes tényező termelékenység.

Ebből levezethetjük a feltételes munkakeresleti függvényt, $L(w_t, K_t)$-t. Ezt implicit módon az alábbi egyenlet határozza meg

$$A\,\frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L_t} = w_t$$

Ahhoz, hogy az egyenlet valóban maximumfeltétel legyen, szükséges, hogy a munka határterméke csökkenő legyen ($\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial L} < 0$), ameky esetben könnyen látható, hogy nagyobb reálbér kisebb munkakeresletet implikál. Ha $\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} > 0$, akkor pedig a tőkemennyiség növelése növeli a munkakeresletet. Az A paraméter növekedése nyilvánvalóan növeli a munkakeresletet.

Példa Legyen a termelési függvény:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Az inverz munkakeresleti függvény:

$$AK^{\alpha}L^{-\alpha} = w,$$

és a munkakeresleti függvény:

$$L^D = KA^{1/\alpha}w^{-1/\alpha}.$$

5.1.3 Neoklasszikus munkapiaci egyensúly

Tegyük fel, hogy minden vállalat és minden háztartás egyforma (reprezentatív ágens feltevés). Ekkor a piaci munkakeresleti és a piaci munkakínálati függvények ugyanolyanok (egy konstans szorzótól eltekintve), mint a fentebb levezetett egyéni keresleti és kínálati függvények.

Neoklasszikus egyensúlyban az összes munkakínálat és az összes munkakereslet egyenlő, és a bérek ennek megfelelően alakulnak. Ez úgy interpretálható, hogy az árak nagyon gyorsan (azonnal) igazodnak úgy, hogy „megtisztítják" a piacot (egyenlővé teszik a keresletet és a kínálatot).

Gyakran vizsgáljuk azt a kérdést, hogy egy adott paraméter változása hogyan módosítja az egyensúlyi reálbért és foglalkoztatást. Csökkenő keresleti és növekvő kínálati függvény esetén könnyen igazolható a következő két állítás: :

1. Ha a keresleti görbe jobbra tolódik, akkor a bér és foglalkoztatás nő.

2. Ha a kínálati görbe jobbra tolódik, akkor a bér csökken, és a foglalkoztatás nő.

A fenti két példban:

$$\begin{aligned} L^D &= KA^{1/\alpha}w^{-1/\alpha} \\ L^S &= 1 - \frac{\theta c}{w}. \end{aligned}$$

Ezekből w a

$$1 - \frac{\theta c}{w} = KA^{1/\alpha}w^{-1/\alpha}$$

egyenlet megoldása. Ennek az egyenletnek mindig van megoldása. Viszont értelmes megoldás csak az, ahol $1 - \frac{\theta c}{w}$ 0 és 1 közti szám.

K és A növelése jobbra tolja a keresleti görbét, ezért ezek hatására az egyensúlyi bér és foglalkoztatás is nő. Viszont c növekedése a kínálati görbét balra tolja, ezért a bér nő, míg a foglalkoztatás csökken.

Analitikusan is kiszámolható modelt kapunk, ha $\alpha = \frac{1}{2}$. Ekkor az egyensúlyi összefüggés:

$$1 - \theta c w^{-1} = K A^{1/2} w^{-1/2}.$$

Ha áttérünk a $z = w^{-1/2}$ változóra, akkor az egyensúlyi bért meghatározó egyenlet:

$$\theta c z^2 + K A^{1/2} z - 1 = 0$$

alakú lesz, vagyis z-ben kvadratikus.

Példa: Ha a hasznossági függvény kvázilineáris, $u = \log c + \theta l$, akkor

$$\theta c = w,$$

vagyis $\theta c = w$ bér mellett a háztartás bármennyit hajlandó dolgozni. A bérre csak c hat, mégpedig c növekedése növeli az egyensúlyi bért. Ilyenkor a foglalkoztatást az

$$L = K A^{1/\alpha} (\theta c)^{-1/\alpha}$$

összefüggés határozza meg. Tehát K és A növekedése növeli, c növekedése pedig csökkenti a foglalkoztatást.

5.2 Keresési modellek*

A keresési modellek a munkapiaci folyamatok időbeli alakulását modellezik, lehet bennük egyszerre munkanélküliség és betöltetlen álláshelyek. Ennek okát munkapiaci súrlódásnak szokás nevezni. Súrlódás alatt azt értjük, hogy nincs mindenki tökéletesen informálva, és időbe telik, amíg a kereslet és a kínálat egymásra talál. A keresési modellekben az egyensúlyi munkanélküliség azt jelenti, hogy a munkanélküliek táborába be és kiáramlók száma megegyezik A keresési modellek számos olyan problémát tudnak vizsgálni, amit az előző modelljeink nem. Ugyanakkor a keresési modellekben bonyolult döntési mechanizmusok vannak. A keresési modellt lehet alkalmazni a jószágpiacokon is, kérdés, hogy mennyire tartjuk ott fontosnak a súrlódások létét. Általános vélekedés, hogy ez a munkapiacokon fontosabb, mint más piacokon, kivéve a lakáspiacot. Az alábbiakban egy egyszerű, úgynevezett illeszkedési modellt mutatunk be.

Ezekben a modellekben egy munkaképes korú egyén három állapotban lehet: inaktív, aktív dolgozó és aktív munkanélküli. Az inaktív aktivizálhatja magát, illetve aktívból válhat valaki inaktívvá. Az aktív csoporton belül valaki vagy foglalkoztatott vagy munkanélküli. Az aktív munkanélküli szeretne a foglalkoztatottak közé kerülni, de egyelőre nincs rá módja. A vállalatok munkahelyeket hoznak létre, ahol egy munkahely vagy betöltött vagy betöltetlen. A munkanélküliek és a betöltetlen állások "keresik" egymást, és ha találkoznak, akkor a vállalat és a munkanálküli eldöntik, hogy illeszkednek-e egymáshoz, aminek egy fontos aspektusa az, hogy a vállalat által ajánlott bér legyen legalább akkora, mint a munkanélküli által elfogadható bér.

Ennek a modellnek felelnek meg egyébként a makrostatisztikák is. Ezek megkülönböztetnek aktivitási arányt:

$$\frac{aktívak}{munkaképes\ korúak},$$

munkanélküliségi rátát:

$$U = \frac{munkanélküliek}{aktívak},$$

és betöltetlen állások arányát:

$$v = \frac{betöltetlen\ állások}{betöltetlen\ és\ betöltött\ állások}.$$

Egy ideális piacon, mint amilyen a neoklasszikus modell piaca, $U = v = 0$ lenne. A valóságban egyik mutató sem 0 egyetlen pillanatban sem, ezért hányadosuk is értelmes mutató. Ha $\frac{U}{v}$ kicsi, akkor "túlfűtött" a munkapiac, könnyű állást találni, de nehéz új alkalmazottakat találni. Ellenkező esetben a munkapiac "nyomott", ahol az álláskeresés sokáig tart, viszont könnyen találnak új munkaerőt a vállalatok. Ha mindkét mutató nagy (függetlenül az aránytól), akkor a munkapiacon erősek a súrlódások, mert távol vagyunk az ideális (súrlódásmentes) állapottól.

Ezekben a modellekben tehát az aggregált egyensúly összhangban van az egyes munkások és vállalatok szintjén folytonosan újratermelődő egyensúlytalansággal. Legyen adott most a munkapiacon megjelenő munkások száma, amit 1-re normalizálunk. Jelölje U a munkanélküliek arányát, tehát $E = 1-U$ a foglalkoztatottak száma (aránya). Tegyük fel, hogy a munkahelyek megszűnése minden periódusban arányos a foglalkoztatással. A munkahelyek megszűnése ebben a modellben tisztán súrlódásos jelenség: emberek vagy vállalatok költöznek, a vállalaton belüli kapcsolatok miatt egyesek távoznak, vagy távozni kényszerülnek. Tehát a munkanélküliek közé beáramlók száma periódusonként: $f(1-U)$. Az álláshoz jutáshoz a betöltetlen munkahelyeknek és a munkanélkülieknek találkozniuk kell, és megfelelően illeszkedni egymáshoz. Feltesszük, hogy amennyiben létezik U munkanélküli és V állásajánlat, akkor a sikeres találkozások-illeszkedések száma egy periódusban $M(V,U)$, és az M függvény mindkét argumentumban monoton növekvő. Tehát annak a valószínűsége, hogy egy munkanélküli álláshoz jut $\frac{M(V,U)}{U}$, vagyis relatíve minél több új állás van, annál nagyobb az esélye az álláshoz jutásnak. Aggregált (makroszkopikus) egyensúlyban a munkanélküliek közé beáramlók száma megegyezik az onnan kiáramlók (álláshoz jutók) számával:

$$f(1-U) = M(V,U).$$

Mi határozza meg V-t? Tegyük fel, hogy V növekvő függvénye a munka termelékenységének (több állást ajánlanak a vállalatok, ha nagyobb a termelékenység), és csökkenő függvénye az átlagos reálbérnek, mivel magasabb bérek mellett kevesebb új állást teremtenek.

$$\frac{\partial V}{\partial w} < 0, \frac{\partial V}{\partial a} > 0,$$

ahol a-val jelöltük a termelékenységet és w-vel a bért. Az üres munkahelyek betöltésének valószínűsége: $\frac{M(V,U)}{V}$.

Tehát az aggregált egyensúlyt leíró egyenlet a következő alakú:

$$f(1-U) = M(V(w,a),U).$$

Ebből az egyenletből az Implicit Függvény Tétel segítségével adódik, hogy

$$\frac{\partial w}{\partial U} = -\frac{-f - \frac{\partial M}{\partial U}}{-\frac{\partial V}{\partial w}\frac{\partial M}{\partial U}} > 0.$$

Azaz ez egy monoton növekvő reláció a bér és a munkanélküliségi ráta között. Kell még egy egyenlet ahhoz, hogy a modellt lezárjuk.

Feltesszük, hogy a munkások viselkedését az jellemzi, hogy amikor találkoznak egy bérajánlattal nem biztos, hogy elfogadják, mivel arra számítanak, hogy a jövőben kaphatnak még jobb ajánlatot is. Minden munkásnak létezik egy olyan "rezervációs" bére, amely alatti ajánlatokat nem fogad el. Mitől függ a rezervációs bér? Egyrészt függ a munkanélküliség nagyságától: ha sok a munkanélküli, akkor a munkások félnek visszautasítani bérajánlatokat, hiszen hosszú ideig maradhatnak munkanélküliek. Másrészt függ attól is, hogy munkanélküliként mekkora a jövedelmük, amit azonosíthatunk a munkanélküli segéllyel. Ezen megfontolások alapján feltételezhetjük, hogy a munkások által elfogadott bérek átlaga a munkanélküliségi ráta csökkenő, és a munkanélküliségi segély (b) növekvő függvénye:

$$\begin{aligned} w &= W(U,b), \\ \frac{\partial W}{\partial U} &< 0, \frac{\partial W}{\partial b} > 0. \end{aligned}$$

Tehát ugyanúgy van egy növekvő és egy csökkenő függvényünk, mint a neoklasszikus modellben, csak most az (U,w) síkban. A két egyenlet megoldása megadja az egyensúlyi bért és munkanélküliséget. Kérdés, hogy hogyan reagálnak ezek a mennyiségek az (f,a,b) paraméterek változására? Azt kell tehát újra megfontolnunk, hogy a paraméterek változása melyik görbét tolja el, és milyen irányban.

A súrlódás növekedés hatása Ha f nő, akkor rögzített U mellett w-nek csökkennie kell, hogy a munkapiac aggregált egyensúlyban maradjon. (Többen válnak munkanélkülivé, tehát több munkahelyet is kell teremteni az egyensúlyhoz.) A súrlódás növekedése az egyensúlyi reálbér csökkenését, és a munkanélküliség növekedését okozza.

A termelékenység növekedés hatása Könnyen látszik, hogy termelékenység növekedés esetén adott U mellett a béreknek növekedniük kell az egyensúlyhoz. A hatás tehát a fordított, mint az előző esetben. Lényegében ugyanaz mint a munkakereslet növekedésének hatása a neoklasszikus modellben.

A munkanélküliségi segély növekedésének hatása Ez csak a rezervációs bérre hat, a görbét a feltevések szerint felfelé tolja el. A hatás tehát az egyensúlyi bér és munkanélküliség együttes növekedése, ami nagyon hasonló a munkakínálat csökkenésének hatásához a neoklasszikus modellben.

5.3 Feladatok

1

A termelési függvény:

$$F(K,L) = 10\sqrt{KL}$$

Az amortizációs ráta: 0.25, $C = 50, K = 100$, és a hasznossági függvény:

$$u(C,l) = \ln C + \ln l.$$

Mekkor az egyensúlyi bér és foglalkoztatás?

2

A hasznossági függvény most

$$\ln C + 2(1-L),$$

az egyéb feltevések változatlanok.

Mekkora az egyensúlyi bér és foglalkoztatás?

6 Egyensúly és növekedés

6.1 A Solow-modell

A Solow-modell nem tételez fel profitmaximalizáló vállalatokat és hasznosságmaximalizáló háztartásokat. Egyszerűen azt írja le hogyan alakul egy olyan gazdaság pályája, ahol az erőforrásokat mindig maximálisan kihasználják, és ahol a megtakarítási ráta konstans.

Konkrétan tegyük fel, hogy a gazdaság termelési lehetőségeit egy elsőfokú homogén, konkáv termelési függvény, $Y_t = F(K_t, L_t)$, írja le, továbbá, hogy a nemzetgazdasági megtakarítási ráta, s, konstans. Ebből:

$$I_t = sY_t.$$

Legyen a népesség konstans, és azonosan 1. A Solow-modell dinamikáját a következő differencia-egyenlet határozza meg:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sF(K_t, 1).$$

Stacionárius egyensúlyi megoldásnak nevezzük azt a K értéket, amelyből kiindulva a tőkeállomány sohasem változik. Ez kielégíti a következő egyenletet:

$$\delta K = sF(K, 1).$$

A $K = 0$ is egyensúly, de a továbbiakban csak a $K > 0$ egyensúlyi értékkel foglalkozunk. Ilyen létezik például, ha

$$\begin{aligned} \lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} &= \infty \\ \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} &= 0. \end{aligned}$$

Hogyan viselkedik a tőkeállomány, a GDP, a fogyasztás és a beruházás az időben, ha K nem az egyensúlyi értékéről indul? A

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + sF(K_t, 1)$$

differencia-egyenletre igaz, hogy K_t tetszőleges K_0-ból indulva monoton konvergál az egyensúlyi K-hoz.

Amennyiben

$$F(K_t, 1) = AK_t^\alpha$$

akkor K megoldása a

$$\delta K = sAK^\alpha$$

egyenletnek. Eredményként azt kapjuk, hogy

$$K = (\frac{As}{\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

6.1.1 Aranykori megtakarítási ráta

Keressük azt az egyensúlyi tőkemennyiséget, amely maximális fogyasztást ad. (Ezt aranykori tőkemennyiségnek nevezzük.) Mivel

$$C = F(K, 1) - \delta K,$$

ezért az aranykori tőkét megkapjuk, ha ezt az összefüggést K szerint deriváljuk, majd a deriváltat egyenlővé tesszük 0-val. A

$$F_K(K^*, 1) = \delta$$

egyenlet megoldása adja meg az aranykori tőkeállományt. Ebből következik, hogy az aranykori kamatláb

$$r = F_K(K^*, 1) - \delta = 0.$$

Az aranykori tőkemennyiségnek megfelel egy aranykori megtakarítási ráta:

$$s^* = \frac{\delta K^*}{F(K^*, 1)}.$$

Amennyiben a speciális Cobb-Douglas függvényt használjuk:

$$C = AK^\alpha - \delta K$$

és

$$K^* = \left[\frac{\alpha A}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} s &= \frac{\delta K}{AK^\alpha} = \frac{\delta}{A} K^{1-\alpha} \\ \left[\frac{sA}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} &= K, \end{aligned}$$

ebből következik, hogy

$$s^* = \alpha.$$

Ez az összefüggés úgy olvasható, hogy aranykorban a megtakarítási ráta egyenlő a tőke együtthatójával a termelési függvényben. A Solow-modell egyensúlyait most összevetjük az eddig vizsgált maximalizáló modellek egyensúlyaival.

6.2 A neoklasszikus modell végtelen időszakra tervező reprezentatív ágens feltevéssel (Ramsey-modell)

Tegyük fel, hogy minden háztartás tökéletesen egyforma. Számukat normalizáljuk egységnyire. Ha a vállalatok termelési függvénye ugyanolyan, és elsőfokú homogén, akkor a vállalatok száma érdektelen. Ezek a feltevések lehetővé teszik számunkra, hogy a továbbiakban ne tegyünk különbséget az egyéni és a piaci változók között.

6.2.1 Háztartási optimalizálás fogyasztási, beruházási és munkakínálati döntéssel

Legyen a fogyasztó hasznossági függvénye:

$$U(.) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, l_t).$$

Az u mindkét változóban szigorúan monoton növekvő, konkáv függvény,

$$l_t = 1 - L_t,$$

ahol l_t a szabadidő, és L_t a munkakínálat. (Az összes rendelkezésre álló idő 1.)

A „pénzügyi vagyon" felhalmozási egyenlete:

$$B_{t+1} = (1 + r_t)B_t + w_t L_t + r_t^K K_t - C_t - I_t,$$

ahol r_t^K a tőke bérleti díja, K_t a fizikai tőke mennyisége, I_t a fizikai tőkébe való (bruttó) beruházás nagysága, és w_t a reálbér.

A fizikai tőke állományának változását leíró egyenlet:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

ahol δ az amortizáció rátája.

Behelyettesítések után :

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u((1 + r_t)B_t + r_t^K K_t + (1 - \delta)K_t + w_t L_t - B_{t+1} - K_{t+1}, 1 - L_t)$$

(ahol B_0és K_0 adott) kifejezést kapjuk.

Döntési változóink most a $B_{t+1},\ K_{t+1},\ L_t,\ t = 0, 1, 2...$ sorozatok.

Egyszerűsítések, és összevonások után a feladat elsőrendű feltételei:

$$\frac{u_c(C_t, l_t)}{\beta u_c(C_{t+1}, l_{t+1})} = 1 + r_{t+1}$$

(ezek a már jól ismert Euler egyenletek),

$$r_{t+1}^K = r_{t+1} + \delta$$

(ez a tőke bérleti díját egyensúlyban meghatározó összefüggés),

$$\frac{u_l(C_t, l_t)}{u_c(C_t, l_t)} = w_t,$$

(ez pedig az inverz munkakínálati függvény).

A termelők problémája Tegyük fel, hogy minden vállalatra ugyanolyan elsőfokú homogén termelési függvény érvényes.

$$Y_t = F(K_t, L_t).$$

Költségminimalizáló vállalatokat feltételezve.

$$\frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L_t} = w_t,$$

és

$$\frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K_t} = r_t^K.$$

Egyensúly A modell sok változót tartalmaz, de most belátjuk, hogy redukálható egy háromváltozós rendszerre, ahol csupán $K_t.L_t$ és C_t maradnak meg.

Mivel mindenki egyforma, a pénzügyi nettó vagyon (B_t) minden háztartásnál 0 lesz egyensúlyban minden periódusban. Feltesszük, hogy a munkapiac egyensúlyban van, tehát a munkakínálat és a munkakereslet egyaránt L_t. A termékpiac egyensúlyban van, ha

$$F(K_t, L_t) = C_t + I_t.$$

Ebbe az összefüggésbe behelyettesítve a tőkefelhalmozás egyenletét:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + F(K_t, L_t) - C_t$$

adódik. Ez a gazdaság fizikai erőforrás korlátjait kifejező összefüggés az első alapegyenletünk.

Az Euler-egyenletbe behelyettesíthetjük a $1 - L_t = l_t$ azonosságot, a tőkepiaci egyensúlyi árösszefüggést, és a termelő elsőrendű feltételét a tőkére vonatkozólag:

$$\frac{u_c(C_t, 1-L_t)}{\beta u_c(C_{t+1}, 1-L_{t+1})} = 1 + F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - \delta.$$

Ez az egyenlet azt állítja, hogy az intertemporális heylettesítési határráták a fogyasztásnál, és a termelésnél azonosak, a beruházás marginális haszna és költsége (hasznosságban kifejezve) azonos. Ez a második alapösszefüggés.

Az inverz munkakeresleti és az inverz munkakínálati függgvényből:

$$F_L(K_t, L_t) = \frac{u_l(C_t, 1-L_t)}{u_c(C_t, 1-L_t)}.$$

Ez az egyenlet azt jelenti, hogy az intratemporális helyettesítési határráták is azonosak. A munka marginális haszna és költsége hasznosságban kifejezve azonos. Ez a harmadik alapösszefüggés.

A fentieket specializálhatjuk kvázi lineáris hasznossági függvény ($u(C,l) = \ln C + \theta(1-L)$), és Cobb-Douglas termelési függvény

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

esetére.

Az erőforrás korlát:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - C_t,$$

az Euler egyenlet:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1 - \delta + \alpha A \left(\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\right)^{\alpha-1}),$$

a munkapiaci egyensúly

$$(1-\alpha)\,A\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}=\theta C_t.$$

A fenti egyenletek (elvben) meghatározzák a fogyasztás, tőkeállomány és foglalkoztatás értékeit, a többi változó (bérek, szabadidő, kamatok) pedig kiszámítható azok függvényeiként. A probléma matematikailag többváltozós differencia-egyenlet rendszer, aminek megoldási módjaival jelenleg nem foglalkozunk, de vizsgáljuk a stacionárius (hosszú távú egyensúlyi) állapotot.

Hosszú távú egyensúly Keressük a rendszer egy időtől független megoldását. Ha létezik ilyen, akkor ebből az állapotból kiindulva a rendszer változói változatlanok maradnak az időben.

A tőkefelhalmozási egyenlet:

$$\delta K=F(K,L)-C.$$

Az Euler egyenlet:

$$1-\delta+F_K(L,K)=\frac{1}{\beta}.$$

A munkapiaci egyensúly:

$$F_L(K,L)=\frac{u_l(C,1-L)}{u_c(C,1-L)}.$$

A fenti speciális függvényeket választva a tőkefelhalmozási egyenlet

$$\delta K=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}-C,$$

az Euler egyenlet

$$\frac{1}{\beta}=1-\delta+\alpha A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1},$$

és a munkapiaci egyensúly

$$(1-\alpha)\,A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=\theta C.$$

Ebben a konkrét példában a modell megoldásán keresztül tanulmányozhatjuk a neoklasszikus modell logikáját.

Először is az Euler-egyenlet meghatározza $k=\frac{K}{L}$-t, a munka tőkefelszereltségét. Konkrétan:

$$k=\left[\frac{\alpha A}{\frac{1}{\beta}-1+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Ebből két fontos következtetés vonható le:

1. Ha a technológia javul (A növekszik, vagy δ csökken), akkor k növekszik.
2. Ha az emberek türelmesebbek (β nő), akkor is igaz, hogy k növekszik.

A k egyértelműen meghatározza a reálbért, ami nő, ha k nagyobb lesz:

$$w = (1-\alpha)\, Ak^{\alpha}.$$

Viszont a munkakínálati egyenletből:

$$C = \frac{(1-\alpha)\, Ak^{\alpha}}{\theta},$$

adódik, tehát a fogyasztás is nő k-val.

Végül meghatározható a foglalkoztatás

$$L = \frac{(1-\alpha)\, Ak^{\alpha}}{\theta(Ak^{\alpha} - \delta k)}.$$

(Felhasználva a

$$C = (Ak^{\alpha} - \delta k)L$$

azonosságot.)

Hogyan határozhatjuk meg k hatását a foglalkoztatásra?

$$\begin{aligned}\frac{1}{L} &= \frac{\theta}{1-\alpha} - \frac{\theta\delta k}{(1-\alpha)\, Ak^{\alpha}} = \\ &\quad \frac{\theta}{1-\alpha} - \frac{\theta\delta}{(1-\alpha)\, Ak^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Mivel $\frac{1}{L}$ csökken k-ban, ezért a foglalkoztatás k növekvő függvénye.

Mi történik az egyensúlyi fogyasztással és foglalkoztatással, ha θ, ami a pihenés iránt relatív preferenciát tükrözi, növekszik? Az előző formulákból következik, hogy ez az egyensúlyi foglalkoztatás és fogyasztás csökkenéséhez vezet. A pihenés iránti relatív preferencia növekedése csökkenti a munkakínálatot, és habár nem hat a tőkefelszereltségre, a tőkefelhalmozást is csökkenti. Alacsonyabb tőke és foglalkoztatási szinten kisebb lesz a termelés és a fogyasztás.

Összefoglalhatjuk tehát a paraméterek hatását. A technológia javulása (A növekszik és δ csökken) növeli az egy főre eső befektetések hozamát, és az egyensúlyi tőkefelszereltséget. Nő a termelés, a foglalkoztatás és a fogyasztás. A "türelem" (egy preferencia paraméter) növekedése ugyanerre az eredményre vezet, de nem a hozam növekedése miatt, hanem mert a türelmesebb emberek hajlandóak lesznek többet felhalmozni.

Mivel ebben a modellben hosszú távú egyensúlyban

$$r = \frac{1}{\beta} - 1 > 0,$$

a tőkeállomány kisebb, mint az aranykori, de megközelíti azt, ha β közel van 1-hez.

Példa: Lássunk egy példát logaritmikus hasznossági függvénnyel.
A termelési függvény:

$$\begin{aligned} F(K,L) &= 10\sqrt{KL} \\ \delta &= 0.25. \end{aligned}$$

A hasznossági függvény:

$$\begin{aligned} u(C,l) &= \ln C + \ln l \\ \beta &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} r &= 0.25 \\ \frac{5\sqrt{L}}{\sqrt{K}} &= 0.5 \\ K &= 100 * L \\ 100 * L &= C + 0.25 * 100 * L \\ C &= 75 * L \\ \frac{5\sqrt{K}}{\sqrt{L}} &= w = 50 \\ \frac{75 * L}{1 - L} &= 50 \\ L &= \frac{50}{125} = 0.4 \\ K &= 40 \\ Y &= 40 \\ I &= 10 \\ C &= 30 \end{aligned}$$

6.3 Együttélő nemzedékek*

A végtelen ideig élő háztartás modellje mellett szokás véges élettartamot, ám végtelen sok nemzedéket, feltételező modellekkel is dolgozni. A legegyszerűbb úgynevezett együttélő nemzedékek modelljében a háztartások két időszakig élnek, minden periódusban születik egy új nemzedék, amely létszáma megegyezik a rég nemzedékével. Legyen minden nemzedék létszáma egységnyi. Tételezzük fel, hogy a munkakínálat konstans (a pihenés nem argumentuma a hasznossági függvénynak). A fiatal nemzedék dolgozik, de vagyon nélkül születik. Megtakarításaiból viszont megvásárolja az idős nemzedéktól a tőkeállományt, valamint be is ruház. A t-ben született nemzedék első időszaki költségvetési korlátja:

$$I_1 + C_t^y = w_1,$$

mivel egyetlen jövedelme a munkajövedelem. Mivel a fiatal ágens 0 tőkeállományal kezd első időszaki beruházása megegyezik K_{t+1}-gyel:

$$I_t = K_{t+1}$$

Felhasználva azt, hogy a reálbér t-ben $F_L(K_t.1)$, és $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I$

$$K_{t+1} + C_t^y = F_L(K_t.1)$$

adódik. (Hitelnyújtás ebben a gazdaságban sincs, mivel a nemzedékek közötti hitelnek nincs értelme, az egyes generációkon belül pedig mindenki egyforma.)

Idős korban mindenki elfogyasztja a tőkejövedelmét és a megmaradt tőkéje értékét (miután a megmaradt tőkéjüket eladták a fiataloknak).

$$C_{t+1}^o = (1 - \delta + F_K(K_{t+1}, 1))K_{t+1}$$

ahol C_{t+1}^o a fogyasztás öregkorban, és a tőke hozadéka $t+1$-ben $F_K(K_{t+1}, 1)K_{t+1}$. Az Euler-egyenlet, ha a hasznossági függvény logaritmikus:

$$\frac{C_{t+1}^o}{C_t^y} = (1 - \delta + F_K(K_{t+1}, 1))\beta.$$

tehát

$$C_t^y = \frac{1}{\beta} K_{t+1},$$

és ez az egyenlet valamint a fiatalkori költségvetési korlát együttesen meghatározzák a modell megoldását.

A hosszú távú egyensúlyban:

$$K = F_L(K, 1) - C^y$$

$$C_y = \frac{1}{\beta} K$$

tehát az

$$\frac{1+\beta}{\beta} K = F_L(K, 1)$$

egyenlet megoldása megadja az egyensúlyi K-t, amiből az összes többi változó egyensúlyi értéke kiszámolható.

Ha Cobb-Douglas a termelési függvény, azaz

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}.$$

akkor

$$F_L(K,1) = (1-\alpha)AK^{\alpha}$$

amiből

$$K = \left[\frac{A\beta(1-\alpha)}{1+\beta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Azt állítjuk, hogy egy ilyen gazdaságban a reálkamatláb lehet negatív. Legyen K^* az a tőkeállomány, amelynél a tőke határterméke pontosan δ, vagyis $r = 0$.

$$A\alpha(K^*)^{\alpha-1} = \delta$$

Amiből

$$K^* = \left[\frac{A\alpha}{\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Ha a tőke mennyisége nagyobb, mint K^*, akkor a reálkamatláb negatív. Viszont $K > K^*$, ha

$$\begin{aligned} \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta} &> \frac{\alpha}{\delta} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} &> \frac{1+\beta}{\delta\beta}. \end{aligned}$$

Nyilván ilyen paraméterkombinációt találunk, ha, például, α-val közelítünk 0-hoz, de δ növekedése is ebbe az irányba hat. Másfelől minél kisebb β annál kisebb a jobboldali kifejezés, vagyis a türelmetlenség itt is az aranykorinál kisebb tőkefelhalmozás irányába tereli a gazdaságot.

Mi a túlzott tőkefelhalmozás oka? Ha α kicsi vagy δ nagy, akkor a tőke nagyon kevéssé hatékony termelési tényező, ezért az emberek, akik időskorban csak tőkejövedelemre számítanak, kénytelenek olyan nagy mértékben felhalmozni, hogy a tőke határterméke negatív lesz.

6.4 Gazdasági növekedés

Az utóbbi évszázadokban az országok többségét exponenciális növekedés jellemzi, a jövedelem és a népesség is exponenciálisan nőtt. Hogyan lehet az eddigi modelljeinket "növekedővé" tenni, és ennek mik a következményei? A hagyományos növekedési elméletek azon alapulnak, hogy a termelési függvényben van egy olyan tényező (termelékenység), ami az időben exogén módon exponenciálisan nő.

6.4.1 Solow-modell és növekedés

Tekintsünk egy alábbi alakú időben változó termelékenységű termelési függvényt:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha},$$

ahol A_t a teljes tényező termelékenység (TFP (total factor productivity)).

Tegyük fel, hogy a GDP konstans ütemben változik:

$$(1+g) = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t}\frac{K_{t+1}^\alpha}{K_t^\alpha}\frac{L_{t+1}^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} = (1+g_A)(1+g_K)^\alpha(1+g_L)^{1-\alpha}.$$

Gyakran ezt az összefüggést

$$g = g_A + \alpha g_K + (1-\alpha)g_L$$

alakban szokták felírni, ami egy közelítő formula.

Sok országban g gyakorlatilag azonos g_K-val. Mivel általában $g > g_L$, azaz az egy főre eső GDP is exponenciálisan nő, ezért a termelékenységnek is exponenciálisan kell növekednie.

Írjuk fel a termelési függvényt az alábbi alakban:

$$Y_t = K_t^\alpha (E_t L_t)^{1-\alpha} = K_t^\alpha H_t^{1-\alpha},$$

ahol

$$H_t = E_t L_t$$

az úgynevezett hatékony munka. Tehát egy

$$\begin{aligned} E_t^{1-\alpha} &= A_t, \\ E_t &= A_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

változó transzformációt hajtottunk végre.

Nyilvánvalóan

$$1 + g_H = (1+g_L)(1+g_E).$$

Most tehát a növekedési ütemekre

$$1 + g = (1+g_K)^\alpha (1+g_H)^{1-\alpha},$$

amiből arányos növekedést ($g = g_K$) feltételezve következik, hogy a GDP növekedési üteme megegyezik a hatékony munka növekedési ütemével

$$g = g_H.$$

Az egy főre eső GDP növekedési üteme pedig:

$$\frac{Y_{t+1}}{L_{t+1}}:\frac{Y_t}{L_t}=\frac{1+g}{1+g_L}=1+g_E.$$

Vezessük be egy X_t változóhoz az

$$x_t=\frac{X_t}{H_t}$$

jelölést. Legyen H_t növekedési üteme g_H.

Osszuk a termelési függvényt, a tőkefelhalmozási, a megtakarítási egyenletet és a GDP azonosságot $H_t=E_tL_t$-vel!

Elsőfokú homogén függvények tulajdonsága, hogy

$$\frac{Y}{H}=F(\frac{K}{H},\frac{H}{H}),$$

amiből

$$y_t=F(k_t,1)=f(k_t)$$

A tőkefelhalmozási egyenlet

$$K_{t+1}=(1-\delta)K_t+I_t$$

mindkét oldalát osztva H_t-vel:

$$\frac{K_{t+1}}{H_t}\frac{H_{t+1}}{H_{t+1}}=(1-\delta)\frac{K_t}{H_t}+\frac{I_t}{H_t}$$

kapjuk a tőkefelhalmozási egyenlet "kisbetűs" alakját:

$$(1+g_H)k_{t+1}=(1-\delta)k_t+i_t.$$

A Solow-modell megtakarítási egyenletének kisbetűs alakja:

$$i_t=sy_t,$$

míg a GDP azonosságé:

$$y_t=c_t+i_t.$$

Tehát a Solow-modell dinamikáját technológiai fejlődés mellett a következő differencia egyenlet írja le:

$$k_{t+1}=\frac{1}{1+g_H}((1-\delta)k_t+sf(k_t)).$$

Látszik, hogy ez a "kisbetűs" egyenlet megfeleltethető a növekedés-nélküli esetben tárgyalt "nagybetűsnek". A különbség az, hogy a jobboldali együtthatókat el kell osztani $1+g_H$-val. Éppen ezért a megfelelő változtatásokkal az ott levezetett kvalitatív összefüggések változatlanok maradnak. Teszőleges

$k_0 > 0$ értékből kiindulva k_t az egyensúlyi k értékhez konvergál, ahol az egyensúlyra (mivel $i = (\delta + g_H)k$)

$$(\delta + g)k = sf(k),$$

teljesül, mivel a stacionárius pályán $g = g_H$.

Ha a termelési függvényt Cobb-Douglas típusúnak vesszük, akkor:

$$f(k_t) = k_t^{\alpha}.$$

Ekkor egyensúlyban:

$$\begin{aligned} sk^{\alpha} &= (\delta + g)k \\ k &= \left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Itt is létezik olyan k^*, ami maximálja az egységnyi hatékony munkára jutó fogyasztást. A maximumot adó tőkemennyiséget megkapjuk, ha a

$$c = f(k) - (g + \delta)k$$

összefüggést k szerint deriváljuk, és a deriváltat egyenlővé tesszük 0-val:

$$\begin{aligned} f'(k) &= g + \delta \\ r &= g. \end{aligned}$$

A speciális Cobb-Douglas esetben a

$$c = k_t^{\alpha} - (\delta + g)k$$

összefüggésből a

$$k^* = \left[\frac{\alpha}{g+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

eredményt kapjuk.

Ismét látható, hogy

$$s^* = \alpha.$$

Itt a maximális fogyasztás jelentése a következő: az s^* megtakarítási ráta melletti egyensúlyi pályához tartozó fogyasztási görbe (ami exponenciális függvénye az időnek) minden t-ben nagyobb értéket ad, mint bármely más s megtakarítási rátához tartozó fogyasztási görbe.

Példa Az általunk vizsgált zárt nemzetgazdaságban a háztartások minden évben jövedelmük 18 %-át kívánják megtakarítási célokra fordítani. A jövedelem megtermeléséhez tőkét (K) és munkát (L) használnak fel. A végső kibocsátás (Y) az alábbi technológiai függvény által adott:

$$Y_t = \sqrt{K_t E_t L_t},$$

ahol E technológiai paraméter (induló értéke $E_1 = 1$). Tudjuk, hogy a gazdaságban a technológiai fejlődés üteme évente 3 %, és a népesség konstans, azonosan 1. A tőke kopását mérő amortizációs ráta 10%-os.

a. Mekkora a fajlagos (egy egységnyi hatékony munkára eső) tőkeállomány stacioner értéke?

Megoldás:

$$k = \left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

b. Ha a gazdaság már kezdetben stacioner pályán lenne, mekkora lenne a fogyasztás szintje a t. időszakban?

Megoldás:

$$C_t = (1+g)^t (1-s) k^\alpha$$

c. Ha a kezdeti tőkeállomány 1, akkor mekkora az 1. időszaki fajlagos tőkeállomány?

Megoldás:

$$k_1 = (1-\delta)k_0 + s k_0^\alpha = 1 - \delta + s.$$

e. Ha a kezdeti tőkeállomány 1, növekszik vagy csökken az időben a k_t?

Megoldás:

Növekszik, mert $1 < k$.

g. Mi a növekedési üteme az egy főre eső fogyasztás értékének a stacionárius pályán?

Megoldás:

$g_E = g$

h. Van két gazdaság, amelyek csak g_E-ben különböznek ($g_{E1} < g_{E2}$), egyébként egyensúlyi pályán mozognak. Hasonlítsa össze az egy főre eső fogyasztásokat az első periódusban és aszimptotikusan!

Megoldás:

$$k_i = \left(\frac{s}{g_i+\delta}\right)^2, i = 1, 2.$$

A kettes gazdaságban k, és ezért c is, kisebb. Mivel ugyanonnan indulnak, ezért a 0. periódusban $\frac{C_{10}}{E_0 L} > \frac{C_{10}}{E_0 L}$,tehát

$\frac{C_{10}}{L} > \frac{C_{10}}{L}$. Viszont

$$\lim_{t\to\infty}\frac{C_{1t}}{C_{2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{C_{10}/L(1+g_1)^t}{C_{20}/L(1+g_2)^t}=0,$$

tehét C_2 hosszú távon nagyon elhagyja C_1-et.

i. Mekkora az aranykori megtakarítási ráta értéke?

Megoldás:

α

j. Aranykori pályán van a gazdaság, és most hirtelen t'-ben lecsökken a megtakarítási ráta? Mi történik a fogyasztással ebben a periódusban? Mi történik aszimptotikusan?

Megoldás:

$C_{t'}$ és $c_{t'}$ az aranykorinál nagyobb lesz, k csökken hosszú távon, ezért y, c és C is az aranykorihoz képest, mivel aranykor alatt vagyunk.

k. Hirtelen t'-ben megnő a megtakarítási ráta $0,4$-re. Mi történik a fogyasztással ebben a periódusban? Mi történik aszimptotikusan?

Megoldás:

$c_{t'}$ azonnal csökken. Mivel

$$C_{t'} : C_{t'-1} = 0,6Y_t : \frac{0,82Y_t}{1,03} < 1,$$

C csökken. k nő hosszú távon, ezért y, c és C is, mivel közelebb kerülünk az aranykorhoz.

l. Aranykor felett van a gazdaság, és most hirtelen lecsökken a megtakarítási ráta t'-ben, de még az aranykori felett marad. Mi történik a fogyasztással ebben a periódusban? Mi történik aszimptotikusan?

Megoldás:

$C_{t'}$ és $c_{t'}$ azonnal nő, k csökken hosszú távon, ezért y is, de c és C nő, mivel közelebb kerülünk az aranykorhoz.

A Solow-modell két fontos következménye 1. Ha a technológia és a munka exogén módon változik, akkor a megtakarítási ráta csak a fogyasztás szintjét tudja befolyásolni, de a növekedési ütemet legfeljebb csak átmenetileg. Ez utóbbi hosszú távon a népesség növekedésétől és a termelékenység változásától függ.

2. Viszont van fogyasztást maximalizáló tőkemennyiség és megtakarítási ráta, az ehhez képest túl sok, és túl kevés megtakarítás is a maximálisnál kevesebb fogyasztáshoz vezet hosszú távon.

Ismét, lássuk hogyan viszonyulnak maximalizáló modelljeink a Solow-modellhez!

6.4.2 A Ramsey-modell exogén technológiai fejlődéssel

A megtakarítási ráta itt függ a fogyasztók haszonmaximálási döntéseitől. A fogyasztók türelmetlenek, de nagyon hosszú távon gondolkodnak.

Tekintsük az előzőekben vizsgált modellt speciális termelési ($Y_t = K_t^\alpha(E_tL_t)^{1-\alpha} = K_t^\alpha H_t^{1-\alpha}$), hasznossági ($u(C,l) = \ln C + \theta l$)) függvényekkel, valamint $g_l = 0$ egyszerűsítéssel.

Az erőforrás korlát:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + K_t^\alpha (E_t L_t)^{1-\alpha} - C_t$$

Az Euler egyenletek:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta(1-\delta+\alpha\left(\frac{K_{t+1}}{E_{t+1}L_{t+1}}\right)^{\alpha-1}).$$

A munkapiaci egyensúlyt meghatározó összefüggés:

$$(1-\alpha)\,E_t\left(\frac{K_t}{E_t L_t}\right)^\alpha = \theta C_t.$$

Itt is vezessük be a kisbetűs jelöléseket. Ekkor az erőforrás korlát

$$(1+g_E)\frac{L_{t+1}}{L_t}k_{t+1} = (1-\delta)k_t + k_t^\alpha - c_t,$$

mivel

$$\frac{K_{t+1}}{E_t L_t}\frac{E_{t+1}L_{t+1}}{E_{t+1}L_{t+1}} = \frac{E_{t+1}L_{t+1}}{E_t L_t}\frac{K_{t+1}}{E_{t+1}L_{t+1}} = (1+g_E)\frac{L_{t+1}}{L_t}k_{t+1}.$$

Az Euler egyenletek:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t}(1+g)\frac{L_{t+1}}{L_t} = \beta(1-\delta+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}),$$

mivel

$$\alpha\left(\frac{K_{t+1}}{E_{t+1}L_{t+1}}\right)^{\alpha-1} = \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}.$$

A munkapiaci egyensúly pedig

$$(1-\alpha)\,\frac{1}{L_t}k_t^\alpha = \theta c_t,$$

ugyanis a munka határterméke

$$(1-\alpha)E_t K_t^\alpha (E_t L_t)^{-\alpha},$$

míg a pihenés és fogyasztás közötti helyettesítési határráta

$$\theta C_t,$$

és mindkettőt osztva $E_t L_t$-vel kapjuk az egyensúlyi összefüggést.
Látszik, hogy az egyensúlyi bér

$$w_t = (1-\alpha)\,E_t {k_t}^\alpha,$$

az E_t-vel együtt nő.
Ha hosszú távú egyensúlyban a munkakínálat nem változik, akkor

$$(g+\delta)k = k^\alpha - c$$

$$1+g = \beta(1-\delta+\alpha k^{\alpha-1}).$$

$$(1-\alpha)\frac{1}{L}k^\alpha = \theta c.$$

Az egyenletrendszer pontosan ugyanaz, mint a "zéró-növekedésű" modellben volt, ha $g = 0$-t helyettesítünk be az első két egyenletbe. A harmadik egyenlet is megfelel a növekedés nélküli modell megfelelő egyenletének, mivel

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)\frac{1}{L}k^\alpha &= \theta c \\
(1-\alpha)\frac{1}{L}k^\alpha &= \theta\frac{C}{EL} \\
(1-\alpha)A(\frac{K}{L})^\alpha &= \theta C.
\end{aligned}$$

(Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $A = E^{1-\alpha}$.)

Az ott vizsgált paraméterek (β,δ,θ) hatása is ugyanaz, csak itt c, k és L az endogén változók. Ha g nő, akkor az kvalitatíve hasonló δ növekedéséhez, ami látszólag GDP és fogyasztás csökkentő. De ne felejtsük: csak y-ra és c-re hat negatívan g. Amikor g megnő, akkor Y és C magasabb növekedési pályára kerülnek.

A kamatlábra a növekedési modellben

$$1+r = (1+g)\frac{1}{\beta}$$

adódik, vagyis $r > g$.

Itt is igaz, mint a Solow-modellben, hogy a növekedési ütem csak a termelékenység növekedési ütemétől függ. A többi paraméter csak a változók szintjére hat. A tőkefelhalmozás fajlagos szintje (k) alacsonyabb, mint az aranykori, de ha β közel van 1-hez, akkor közel van az aranykori tőkefelhalmozási szinthez.

6.4.3 Az együttélő nemzedékek modellje technológiai fejlődéssel*

A fogyasztók csak a saját véges "életpályájukban" gondolkodnak, de itt is endogén a megtakarítási ráta. A modell egyenletei kisbetűs változatban a következők.

Az Euler-egyenletek:

$$(1+g)\frac{c^o_{t+1}}{c^y_t} = \beta(1-\delta+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}).$$

Mivel a fiatalok nem tudnak hitelezni az időseknek időskorban minden tőkét (és annak jövedelmét) elfogyasztják:

$$c_t^o = (1 - \delta + \alpha k_t^{\alpha-1})k_t.$$

A tőkefelhalmozási egyenlet ennek megfelelően:

$$(1+g)k_{t+1} = (1-\alpha)k_t^{\alpha} - c_t^y.$$

A hosszú távú egyensúlyi összefüggések:

$$(1+g)k = (1-\alpha)k^{\alpha} - c^y,$$

$$c_y = \frac{1+g}{\beta}k,$$

tehát

$$(1+g)k = (1-\alpha)k^{\alpha} - \frac{1+g}{\beta}k.$$

Amiből:

$$k = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta(1+g)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Láttuk, hogy az aranykori tőkeállomány:

$$k^* = \left[\frac{\alpha}{\delta+g}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Nyilvánvalóan az együttélő nemzedékek növekedési modelljében is vannak olyan paraméter kombinációk, amelyeknél az egyensúlyi k nagyobb, mint az aranykori, vagyis $r < g$. Ebben az esetben dinamikus inefficienciáról beszélünk, mivel minden nemzedék jobban járna, ha valamikor elfogyasztanák a "fölösleges tőkét", és onnantól kezdve a fogyasztást maximáló tőkemennyiség mellett működne a gazdaság. A dinamikus onefficienciát itt is a öregkori szegénységtől való félelem indokolhatja. Másfelől, ha $r > g$, akkor ez az érvelés nem igaz. Ahhoz ugyanis, hogy az aranykori optimumra át lehessen térni növelni kellene a tőkét, vagyis a megtakarításokat. Az első generáció biztosan rosszabbul járna, még ha hosszabb távon ez meg is érné a társadalomnak.

6.5 Endogén növekedési elméletek

Ezek az elméletek magyarázni próbálják a növekedés forrásait, a technológiai fejlődést, az "emberi tőke" felhalmozást. Megkülönböztetnek a növekedési ütemre ható, és csak a jövedelem szintjére ható beruházásokat. A kérdés, hogy ezeknek mi az optimális aránya. Ezek a modellek általában figyelembe próbálják venni azt a problémát, hogy a "tudás" speciális termék, és a tudástermelés hasznának egyéni elsajátítása nem automatikusan megoldott probléma a társadalmakban.

6.6 Feladatok

1

A Ramsey-modellben legyenek az adatok:

A termelési függvény:

$$\begin{aligned} F(K, L) &= 10\sqrt{KL} \\ \delta &= 0.25. \end{aligned}$$

A hasznossági függvény:

$$\begin{aligned} u(C, l) &= \ln C + 2 * l \\ \beta &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Határozza meg az egyensúlyt!

Hogyan alakul az egyensúly, ha a hasznossági függvény mindössze $\ln C$, alakú, vagyis a pihenés nem jelent hasznosságot?

2

Az általunk vizsgált zárt nemzetgazdaságban a háztartások minden évben jövedelmük 18 %-át kívánják megtakarítási célokra fordítani. A jövedelem megtermeléséhez tőkét (K) és munkát (L) használnak fel. A végső kibocsátás (Y) az alábbi technológiai függvény által adott:

$$Y_t = \sqrt{K_t E_t L_t},$$

ahol E technológiai paraméter. Tudjuk, hogy a gazdaságban a technológiai fejlődés üteme évente 0 %, kiinduló értéke 1, és a népesség konstans 3 %-os ütemben nő (kezdeti érték 1). A tőke kopását mérő amortizációs ráta 10%-os.

a. Mekkora a fajlagos (egy egységnyi hatékony munkára eső) tőkeállomány stacioner értéke?

Megoldás:

$$k = \left(\frac{s}{g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

b. Ha gazdaság már kezdetben stacioner pályán lenne, mekkora lenne a fogyasztás szintje és egy főre eső értéke a t. időszakban?

Megoldás:

$$\begin{aligned} C_t &= (1 + g)^t (1 - s) k^{0.5} \\ \frac{C_t}{L_t} &= (1 - s) k^{0.5} \end{aligned}$$

c. Van két gazdaság, amelyek csak g_L-ben különböznek ($g_{1L} < g_{2L}$), egyébként egyensúlyi pályán mozognak. Hasonlítsa össze az egy főre eső fogyasztásokat az első periódusban és aszimptotikusan?

Megoldás:

$$k_i = \left(\frac{s}{g_i + \delta}\right)^2$$

A kettes gazdaságban $k = K_0$, és ezért $c = C_0$ is, kisebb. Mivel

$$c_i = \frac{C_{it}}{EL_{it}} = \frac{C_{it}}{E(1+g_i)^t}$$

konstans, ezért

$$\frac{C_{1t}}{L_{1t}} > \frac{C_{1t}}{L_{2t}}$$

minden t-re.

3

Az általunk vizsgált zárt nemzetgazdaság a neoklasszikus modellnek megfelelően működik. A termelési függvény:

$$Y_t = \sqrt{K_t E_t L_t},$$

A reprezentatív háztartás hasznossági függvénye:

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} 0,5^{t-1} \log C_t.$$

A háztartás jövedelmét a tőke és munkaereje bérbeadásából szerzi (emellett endogén r reálkamatláb mellett tudnak egymásnak hitelt nyújtani). A munkakínálat konstans, 1, $E_t = 1, g_E = 0,05$.Az amortizációs ráta 20%.

a. Stacionárius növekedési pályán mekkora az alábbi változók értéke?

reálkamatláb

tőke bérleti díja

reálbér

b. Állandósult állapotban mekkora az alábbi változók egységnyi hatékony munkára eső értéke és szintjük hogyan változik?

tőkeállomány

beruházás

termelés

fogyasztás

c. Tegyük fel, hogy E_t növekedési üteme megnő.

Az a. részhez képest hogyan változik a reálkamatláb és a reálbér szintje a stacionárius egyensúlyi növekedési pályán?

d. Hogyan változik a munka és a tőke részesedése a GDP-ből?

7 Költségvetési politika

7.1 A ricardo-i ekvivalencia problémája

Vezessük be a költségvetési politikát a neoklasszikus modellbe, ami azt jelenti, hogy kormányzati kiadásokat és bevételeket (adókat) is figyelembe veszünk a modellben. Legyen a termelési függvény a szokásos:

$$Y_t = F(K_t, L_t).$$

A nemzeti jövedelem azonosság:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t,$$

ahol most G_t a kormányzati (reál) kiadásokat jelöli.

A kormány költségvetési korlátja

$$D_{t+1} = (1 + r_t)D_t + G_t - T_t,$$

ahol D_t a nettó államadósság, és T_t a nettó (reál) adók mennyisége. (Figyeljük meg: G_t nem lehet negatív, de T_t-nek nincs előjel korlátja.)

A háztartás problémája (végtelen horizontra tervező reprezentatív ágens) a szokásos:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, l_t),$$

ahol u mindkét változóban szigorúan monoton növekvő, konkáv függvény. Itt l_t a szabadidő ($l_t = 1 - L_t$) , L_t a munkakínálat. (Az összes rendelkezésre álló idő 1.)

Az eddigiektől eltérően most a költségvetési korlátot a háztartás által tartott nettó kötvény mennyiség felhalmozási egyenleteként írjuk fel:

$$B_{t+1} = (1 + r_t)B_t + w_t L_t + r_t^K K_t - I_t - C_t - T_t,$$

ahol B_t a háztartás által tartott nettó kötvény mennyiség, a r_t^K tőke bérleti díja, K_t a fizikai tőke mennyisége, I_t a fizikai tőkébe való (bruttó) beruházás nagysága, és w_t a reálbér. (A korábbi formulát megkapjuk, ha a $W_t = (1+r_t)B_t$ helyettesítést elvégezzük.)

A fizikai tőke állományának változását leíró egyenlet:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t.$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $q_t = \frac{1}{1+r_t}, Q_{1,1} = 1, Q_{1,t} = \prod_{s=1}^{t} Q_{1,s}$.

Levezethetjük a háztartás és a költségvetés hosszú távú költségvetési korlátját a „pilótajáték mentességi” feltevés segítségével.

$$\sum_{t=1}^{\infty} Q_{1,t}(C_t + I_t + T_t) = (1 + r_1)B_1 + \sum_{t=1}^{\infty} Q_{1,t} Y_t,$$

amiből felhasználva az $Y_t = w_t L_t + r_t^K K_t$ összefüggést

$$\sum_{t=1}^{\infty} Q_{1,t} T_t = (1 + r_1) D_1 + \sum_{t=1}^{\infty} Q_{1,t} G_t.$$

A kötvénypiaci egyensúly azt jelenti, hogy

$$D_t = B_t.$$

Ebből és az árupiaci egyensúlyból adódik, hogy a kormány költségvetési korlátja teljesüléséből következik a háztartás hosszú távú költségvetési korlátjának teljesülése (Walras-törvény). A modell összes egyenlete tehát:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + F(K_t, L_t) - C_t - G_t$$

$$\frac{u_c(C_t, 1 - L_t)}{\beta u_c(C_{t+1}, 1 - L_{t+1})} = 1 + F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - \delta.$$

$$1 + r_{t+1} = 1 + F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - \delta$$

$$F_L(K_t, L_t) = \frac{u_l(C_t, 1 - L_t)}{u_c(C_t, 1 - L_t)}.$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} Q_{1,t} T_t = (1 + r_1) D_1 + \sum_{t=1}^{\infty} Q_{1,t} G_t$$

A modell első három egyenlete majdnem megegyezik a Ramsey-modell megfelelő egyenleteivel, az egyetlen különbség az, hogy minden időszakban a kormánykiadásokkal csökkentett nagyságú erőforrás áll a magánszektor rendelkezésére. A szokásos három egyenlet mellé belép a kormány hosszú távú költségvetési korlátja, amely azt fejezi ki, hogy az adóbevételek jelenértéke meg kell, hogy egyezzen a kezdeti államadósságnak és az összes kiadás jelenértékének az összegével. Viszont, ha adott a G_t sorozat, akkor a beruházás és a fogyasztás pályája független az adók pályájától, s így az államadósság pályájától is. Ez a ricardo-i ekvivalencia elve, amely szerint az adósság pályája irreleváns a gazdasági egyensúly szempontjából. (A ricardo-i ekvivalencia igaz maradhat heterogén fogyasztók feltevése mellett is.) Két dolgot kell hangsúlyozni:

1. A kormányzati kiadások csökkentik az egyéb célokra felhasználható output mennyiségét, vagyis az egyensúly nem teljesen független a költségvetési politikától.

2. A költségvetési poltika fontos korlátja, hogy a (nettó) adók jelenértéke elegendő kell legyen a kormánykiadások finanszírozásához. A ricardo-i ekvialencia lényege az, hogy az adók időzítése nem számít.

7.1.1 Mikor nem teljesül a ricardo-i ekvivalencia?

Hogyan kellene módosítanunk a neoklasszikus modellt annak érdekében, hogy legyen hatása az adók pályájának?

1. Tegyük fel, hogy vannak rövid távra tervező fogyasztók. Számukra egy mai adócsökkentés jövedelem, amit nem nekik kell visszafizetniük, tehát fogyasztásukat növelni fogják. Ahhoz, hogy a növekvő államadóssághoz szükséges megtakarítás megteremtődjön, a hosszabb távra tervező fogyasztók megtakarításának nőnie kell, amit viszont csak nagyobb kamatláb mellett lehet elérni. Például az egymást átfedő nemzedékek modelljében nem teljesül a ricardo-i ekvivalencia.

2. Ha vannak hitel korlátos fogyasztók, akkor ők hasonlóan fognak reagálni az adócsökkentésre, mint a rövid távra tervezők, vagyis az ekvivalencia ismét nem teljesül.

3. A fentiekben implicite feltettük, hogy az adókat egyösszegben vetik ki (lump sum tax). Amennyiben bizonyos gazdasági tevékenység függvénye az adófizetés (pl. a jövedelmet adóztatják vagy a fogyasztást), akkor az módosíthat a gazdasági ágensek magatartásán (pl. a munkakínálaton vagy tőkekínálaton), és az ekvivalencia most sem teljesül.

7.1.2 Torzító adók és maximális adóbevétel

Az egyösszegű adókat azért nem tekintjük torzítónak, mert nem befolyásolják az optimális allokációt. Mi lenne azonban akkor, ha például a bérjövedelmet adóztatnák? Tegyük fel, hogy a bérjövedelem τ hányadát kell adóban befizetni. Ekkor a munkapiaci egyensúlyban

$$
\begin{aligned}
F_L(K,L) &= w \\
\frac{u_l(C,1-L)}{u_c(C,1-L)} &= (1-\tau)w \\
\frac{1}{(1-\tau)}\frac{u_l(C,1-L)}{u_c(C,1-L)} &= w \\
(1-\tau)F_L(K,L) &= \frac{u_l(C,1-L)}{u_c(C,1-L)}
\end{aligned}
$$

összefüggések érvényesülnének. Láthatóan egyensúlyban a munka határterméke nagyobb lesz, mint a pihenés és fogyasztás közti helyettesítési határráta, ezért hívjuk a béradót torzítónak. Ugyanakkora bruttó bér (w) mellett a munkakínálati görbe felfele tolódik, az egyensúlyi foglalkoztatás csökken és a bruttó bér nő. A gazdaságpolitikának úgy kellene terveznie, hogy a befolyt adójövedelmek jelenértéke adja ki a kormányzati kiadások jelenértékét. Hogyan függ az adóbevétel az adókulcstól? Amennyiben szokásos munkakínálati összefüggést tételezünk fel, akkor minél nagyobb az adó, annál kisebb a foglalkoztatás. Tudjuk, hogy 0 adókulcsnál az adóbevétel is 0, de joggal feltételezhetjük, hogy ha az adókulcs 1-hez tart, akkor a munkakínálat és az adóbevétel is a 0-hoz tart. (A pihenés jószág nagyon olcsó lesz a fogyasztáshoz képest.) Ebből következik az, hogy létezik maximális bevételt hozó adókulcs. Ha nagyon nagy a kormánykiadás, akkor nem is lehet finanszírozni, mert még a maximális adó sem elegendő ehhez. Viszont a finanszírozható kiadási szintekhez általában két adókulcsot is találhatunk, amelyek a megfelelő adóbevételt generálják. Van lehetőség kisebb adókulcsot választani, ahol viszont az adóalap (a bér és foglalkoztatás szorzata) nagyobb, de ugyanazt az adóbevételt nagyobb adókulccsal (de kisebb adóalappal) is el lehet érni.

7.2 Hosszú távú egyensúly, aktivitás-passzivitás

Tegyük fel, hogy a gazdaság hosszú távú egyensúlyi pályán van, ahol a GDP, a fogyasztás, a tőke és a beruházás egyenletes és egyforma ütemben nő. Ekkor a kormánykiadásoknak is ugyanebben az ütemben kell nőnie.

Nőhetnek-e az adók ennél gyorsabb ütemben? Nem, mert akkor előbb utóbb meghaladnák a GDP-t. Nőhetnek-e lassabban? Elvben igen, ekkor az adók GDP-hez viszonyított aránya a 0-hoz fog konvergálni. Azonban, mint látni fogjuk ez csak akkor lenne összhangban a hosszú távú egyensúllyal, ha a költségvetésnek kezdetben követelése (nem adóssága) lenne.

Írjuk át a költségvetés adósság felhalmozási egyenletét úgy, hogy osszunk a GDP-vel minden változót, és a GDP arányos változókat jelöljük kisbetűkkel $(d = D/Y)$, $\gamma = G/Y.\tau = T/Y)$:

$$(1 + g_{t+1})d_{t+1} = (1 + r_t)d_t + \gamma_t - \tau_t,$$

ahol g a GDP növekedési üteme. Amennyiben a G és T növekedési üteme konstans, és ugyanaz, mint a GDP-nek, továbbá a kamatláb is konstans, akkor d is konstans lesz. A stacionárius egyensúlyi d-re:

$$d = \frac{\tau - \gamma}{r - g}.$$

Amennyiben hosszú távon a kamatláb kisebb, mint a növekedési ütem, akkor a gazdaságban „irracionálisan” nagy a tőkefelhalmozás. (A Solow-modellből következik, hogy az egy főre eső fogyasztás akkor maximális, ha a kamatláb megegyezik a növekedési ütemmel). A szokásos esetben a kamatláb hosszú távon nagyobb, mint a GDP növekedési üteme, ezért ilyenkor a pozitív egyensúlyi adósság hányad azt igényli, hogy az elsődleges egyenleg a GDP százalékában $(\tau - \gamma)$ pozitív legyen hosszú távon. Az adósság lehet fenntarthatatlanul nagy, hiszen az adók nem haladhatják meg a jövedelmet (ez a tőke felélését jelentené), és a kormánykiadások nem csökkenhetnek 0 alá, vagyis d hosszú távon nem haladhatja meg semmiképpen $\frac{1}{r-g}$-t. Ez nagyon gyenge felső korlát, sokkal kisebb adóssághányadok is fenntarthatatlanok, ha figyelembe vesszük az adók torzító hatásait is.

7.2.1 Lehet-e passzív a fiskális politika?

Tegyük fel, hogy eltér az adósság/GDP arány az egyensúlyitól, és tegyük fel azt is, hogy a kormány ragaszkodik egy $\tau - \gamma$ nagyságú (nettó) elsődleges hiányhoz.

Ekkor

$$d_{t+1} = \frac{1+r}{1+g} d_t + \frac{1+r}{1+g}(\tau - \gamma),$$

Ha ez az összefüggés érvényre jutna, akkor a nem-egyensúlyi szintről induló d egyre inkább eltérne az egyensúlyi értéktől (divergálna), amennyiben $r > g$, tehát $\frac{1+r}{1+g} > 1$. Vagyis a fiskális politika nem lehet teljesen passzív, az elsődleges egyenleget stabilizálásra kell használni, azaz, amikor az adósság hányad a tervezett egyensúlya fölött van az elsődleges egyenleget az egyensúlyi értéke fölé kell vinni. Túlságosan alacsony adósságráta esetén pedig alá, természetesen. Az $r < g$ esetben viszont d konvergálna, tehát a $\tau - \gamma$ cél tartható lenne. Az államok gyakran adóssághányad célokat határoznak meg. Mivel a szükséges elsődleges deficit mértéke sohasem számolható ki pontosan (normális körülmények között) egy adóssághányad célt csak aktív költségvetési politikával lehet elérni.

Példa: Egy állam minden évben 5% GDP arányos elsődleges többlettel tervez. A gazdaság növekedési üteme 4%, a reálkamatláb 6%.

Mennyi stacionárius növekedés mellett a GDP arányos államadósság?

Megoldás:

2,5

Az államnak egy évben rendkívüli kiadása akad, ezért többlet helyett GDP arányos elsődleges hiány lesz, mégpedig 5%. Stacionárius növekedés melletti szinthez konvergál-e a jövőben a GDP arányos államadósság, ha az állam nem változtat a fiskális politikáján? (A jövőben ismét 5% lesz a GDP arányos elsődleges többlet.)

Megoldás:

Divergál.

7.2.2 Maastricht-i kritériumok

A maastrichti kritériumok szerint a GDP arányos államadósságnak 60% alattinak kell lennie (vagy legalább arrafelé konvergálni), a GDP arányos államháztartási hiánynak pedig 3% alattinak.

Példa:

Legyen a reálkamatláb 6%, és tegyük fel, hogy egy ország idén épphogy teljesíti az államadósságra vonatkozó maastrichti kritériumot!

A GDP mekkora hányadát költi az ország az államadósság finanszírozására?

Megoldás:

0,036

Tegyük fel, hogy az ország épphogy teljesíti az államháztartási hiányra vonatkozó kritériumot is.

Mekkora a GDP arányos elsődleges hiány?

Megoldás:

-0,006

Ha a GDP arányos elsődleges hiány változatlan, milyen növekedési ütem kell ahhoz, hogy az ország jövőre is teljesítse a maastrichti kritériumokat?

Megoldás:

$$\begin{aligned}(1+g_{t+1})d_{t+1} &= (1+r)d_t + p_d \\ (1+g_{t+1})0,6 &= 0,636-0,006 = 0,63 \\ 1+g_{t+1} &= 0,63/0,6 = 1,05\end{aligned}$$

7.3 Feladatok

1

Egy állam minden évben 2% GDP arányos elsődleges hiányt tervez. A gazdaság növekedési üteme 3%, a reálkamatláb 5%. Mennyi stacionárius növekedés mellett a GDP arányos államadósság?

2

Legyen a reálkamatláb 2%, és tegyük fel, hogy egy ország idén épphogy teljesíti az államadósságra vonatkozó maastrichti kritériumot! A GDP mekkora hányadát költi az ország az államadósság finanszírozására?

Tegyük fel, hogy az ország épphogy teljesíti az államháztartási hiányra vonatkozó kritériumot is. Mekkora a GDP arányos elsődleges hiány?

Ha a GDP arányos elsődleges hiány változatlan, milyen növekedési ütem kell ahhoz, hogy az ország jövőre is teljesítse a maastrichti kritériumokat?

8 Pénz, infláció, monetáris politika

A "pénz" kifejezést gyakran használjuk a vagyon szinonimájaként. (Pl. "Sok pénze van", azaz gazdag.) A közgazdaságtanban azonban a pénz a vagyon tartásának csak egyik formája. Pénz alatt olyan árut értünk, ami minden más árura kicserélhető (általános csereeszköz), de önmagában nem nyújt egyéb hasznos szolgáltatásokat. Például a lakóépület is vagyontartási forma, de házakkal nem szoktunk vásárolni a szupermarketben, viszont a ház hasznos szolgáltatást nyújt, amennyiben lakni lehet benne.

A pénz, mint ahogy a csere technológiája is, sokat változott a történelemben. Valamikor a pénzek általában olyan értékes tárgyak voltak (aranypénz, ezüstpénz), amelyeket némi fizikai átalakítással hasonló értékű áruként is el lehetett adni (pl. ékszert készíteni belőlük). A mai pénz szigorú értelemben kétfajta: 1. Fizikailag létező bankjegy vagy érme, amelyek anyagának értéke összehasonlíthatatlanul kisebb a pénzként való értéküknél. 2. Immateriális pénz, ami gyakorlatilag elektromosan nyilvántartott követelést (számlapénz) jelent. A továbbiakban nem foglalkozunk történelmi kérdésekkel, és elkerüljük annak tárgyalását is, hogy például a bitcoin milyen értelemben tekinthető pénznek. (Sokan elfogadják csereszköznek, de korántsem mindenki.)

8.1 Pénzkínálat központi bankkal és kereskedelmi bankokkal

A modern pénzügyi rendszereket általában a kétszintű bankrendszer jellemzi. A pénzteremtést kétszintű bankrendszerben az alábbi leegyszerűsített modellel ábrázolhatjuk.

A bankokat felosztjuk kereskedelmi bankokra és központi bankra. A kereskedelmi bankok hitelezéssel és betételfogadással foglalkoznak. Egyesített (konszolidált) mérlegük két oldalának egyenlősége kifejezi azt, hogy tartozásaiknak és követeléseiknek meg kell egyezniük minden időpillanatban. Az alábbi mérlegegyenlet baloldalán a követelések, jobboldalukon pedig a tartozások szerepelnek.

$$R + L = D + B_B.$$

R a bankok tartalékja a központi banknál (ezzel a központ bank tartozik a kereskedelmi bankoknak), L a bankok által nyújtott hitelek állománya (ezzel a lakosság és a vállalatok tartoznak a kereskedelmi bankoknak), D a magánszféra betéteinek állománya (a bankok tartozása a lakosság és vállalatok felé), B_B a központi bank által a kereskedelmi bankoknak nyújtott hitelek állománya (ez a bankok tartozása a központi banknak). Mostantól mindent pénzegységben mérünk.

A központi bank mérlege:

$$B_G + B_B = R + C,$$

ahol B_G a központi bank által tartott államkötvény állomány (a költségvetés tartozása a központi banknak), és C a készpénz mennyisége (amit furcsa módon a központi bank tartozásának tekintünk).

Monetáris bázisnak nevezzük az

$$M_0 = R + C$$

mennyiséget. Ennek oka az, hogy minden tranzakció (adásvétel) a gazdaságban a monetáris bázis újracsoportosításával jár, de annak összegét nem változtatja meg. Alapvetően ugyanis kétféle módon fizethetünk: 1. készpénzzel, amely esetben nem változik az összes készpénzállomány, csak az egyes készpénztulajdonosok helyzete módosul, 2. banki átutalással (a kártya tranzakció is végsősoron banki átutalás), amely esetben a vevő bankjának tartaléka csökken, és az eladó bankjának tartaléka ugyanannyival nő (mellesleg a vevő számlájának értéke a bankjánál csökken és az eladó számlájának értéke nő.) Vagyis nemcsak az furcsa, hogy a készpénzt a központi bank tartozásának tekintjük, hanem az is, hogy a bankok tartalékát tartozásnak tekintjük. Egy modern pénzügyi rendszerben (zárt gazdaságban!) a központi bank nem tartozik senkinek semmivel! Régebbi központi bankoknál a készpénz részben olyan bankjegyekből állt, amelyre arany (vagy ezüst) fedezete volt a központi banknak, és hajlandó volt a bankjegyeket erre beváltani. Innen származik az ankronisztikus "jegybanki tartozás" terminus.

A magánszektor (kereskedelmi bankok, vállalatok, háztartások) egymás közti tranzakciói nem változtatják meg a monetáris bázist, a központi bank hiteleinek (kötvényállományának) növelése vagy csökkentése okoz csak ebben változásokat. Vagyis a monetáris bázis összessége az, amit a központi bank meghatározhat.

Konszolidáljuk a központi bank és a kereskedelmi bankszektor mérlegét, vagyis adjuk össze a követeléseket és tartozásokat:

$$B_G + L = D + C.$$

A jobboldal tartalmazza a nem-banki magánszektor által tartott bankbetéteket és készpénzt. Mivel $D + C$ az, amit a magánszektor pénznek "érez", azaz összességében ennyi költési lehetőség áll rendelkezésére egy adott pillanatban, ezért ezt hívjuk pénznek, M. (A bankokat csak pénzügyi közvetítőnek tekintjük, akiknek nincs keresletük egyéb javak iránt.)

$$M = D + C.$$

A monetáris bázis és a pénzmennyiség közti kapcsolatot jellemzi a pénzmultiplikátor

$$mm = \frac{M}{M_0}.$$

Megadja azt, hogy a kereskedelmi bankok működése által egy egység monetáris bázisból hány egység pénz lesz. (Ha nem lennének kereskedelmi bankok, akkor nem lennének banki tartalékok és betétek, és a pénzmultiplikátor 1 lenne.) Mitől függ? Tekintsük az alábbi azonos átalakítást:

$$mm = \frac{1 + \frac{C}{D}}{\frac{R}{D} + \frac{C}{D}} = \frac{1 + c}{r + c}.$$

A pénzmultiplikátor a nem-banki magánszektor készpénz/betét hányadosának (c), és a banki teljes tartalék/betét aránynak (r) (ami kisebb, mint 1), a függvénye. Az előbbi közelítőleg a nem-banki szféra döntése, a két tranzakciós eszköz közti választást fejezi ki. A második arány – elvben - a bankok döntése, mekkora tartalékot tartanak indokoltnak, amely véd a betétek kivétele iránti kereslet ingadozásai ellen. Ha nem lennének tartalékok, nem tudnánk fizetni a bankbetéteinkkel. Általában van minimális - kötelező - tartalékráta, amely a kereskdelemi bankok számára kényszer, vagyis nem tökéletesen saját döntésük eredménye az, hogy mennyi tartalékot tartanak.) Ha a pénzmultiplikátor konstans, akkor a pénzkeresletből megkaphatjuk a monetáris bázis iránti keresletet úgy, hogy a pénzkeresleti függvényt megszorozzuk az $1/mm$ tényezővel. Mindkét arány növekedése csökkenti a pénzmultiplikátort, hiszen az arányok növekedése azt jelenti, hogy a banki közvetítés szerepe csökken. Ha nagy a c, akkor a lakosság és a vállalatok elkerülik a bankrendszert, és ha nagy az r, akkor a bankok ülnek a pénzükön, ahelyett, hogy hiteleznének.

Tehát a pénzteremtés modern folyamatát felfoghatjuk úgy, hogy a központi bank létrehozza a monetáris bázist, ami a kereskedelmi bankok és a nem-banki szféra cselekvésének eredőjeként pénzzé multiplikálódik.

Példa: Egy gazdaságban a fogyasztók viselkedése olyan, hogy a náluk lévő készpénz mennyiségének és betéteiknek az aránya mindig 25%. Az ország jegybankja által előírt tartalékráta 10%. A jegybank 300 000 egység hitelt adott eddig a bankoknak. A jegybank becslése szerint összesen 250 000 egység fém- és papírpénz van forgalomban.

1. Mennyit hiteleznek a bankok?

Megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{C}{D} &= 0,25 \\ C &= 250000 \\ D &= 1000000 \\ R &= 100000 \\ B_G &= 300000 \\ L &= 1200000 \end{aligned}$$

2. Mennyi pénz forog a gazdaságban?

Megoldás:

$$M = 100000 + 1000000 = 1250000$$

3. Mekkora a monetáris bázis és a pénzmultiplikátor?

Megoldás:

$$\begin{aligned} mm &= \frac{M}{M_0} = \frac{1250000}{350000} = \frac{25}{7} \\ c &= 0.25 \\ r &= 0.1 \\ mm &= \frac{1,25}{0,35} = \frac{25}{7}. \end{aligned}$$

4. Mennyi hitelt kap a költségvetés?

Megoldás:

$$B_G = M_0 - B_B = 50000$$

8.1.1 A valóság bonyolultabb, mint a modell (ahogy várható volt)

- A létező kereskedelmi bankoknak van "saját tőkéjük" is, aminek nagysága "biztonsági" okokból nem elhanyagolható. Eddig a bankok fizetőképességi problémáitól teljesen eltekintettünk.

- A központi bankoknak is van saját tőkéjük, de ez csak elszámolási konvenció.

- Árupénz esetén a pénz nem feltétlenül jelenik meg a központi bankok mérlegében (például arany vagy ezüstérme). Nemesfém pénzek esetén a pénzt nem feltétlenül bankok bocsátották ki.

- Mivel az igazi gazdaságok nyitottak, a központi bankok tartanak más központi bankok pénzeiben denominált követeléseket is (devizatartalék), de lehet ilyen adósságuk is, ami már valódi tartozás.

- A készpénz egy része a bankok pénztáraiban, ATM-ekben van. Ezt a tartalék részének tekintjük.

- Kincstárjegyek is gyakran funkcionáltak pénzként, azaz központi bank és nemesfém pénz nélkül is működhet a banki pénzteremtés.

- Elvben bárki, vagy bármely szervezet, teremthet pénzt, de ezt általában jogilag korlátozzák.

8.1.2 Hogyan teremt (vagy szüntet meg) bázispénzt a központi bank?

A gyakorlatban leggyakrabban használt módszerek:

1. vásárol vagy elad államkötvényeket.
2. hitelt nyújt a bankoknak
3. betétet fogad el a bankoktól
4. elad vagy vesz devizát
5. meghatározza a bankok által minimálisan tartandó tartalékrátát.

A makrokonómiai modellekben gyakran csak egy pénzmennyiséggel dolgozunk, és úgy teszünk, mintha csak készpénz lenne, azaz, mintha a monetáris bázis és a pénzmennyiség azonos lenne, és nem létezne bankrendszer.

8.2 Pénzkereslet: a Baumol-Tobin modell

Ez a modell annak helyzetét írja le, aki készpénzzel kell fizessen, de rendelkezik bankbetéttel is, ami kamatozik. A modellnek részben történelmi érdekessége van, részben kiválóan bemutatja azt az alapvető döntési dilemmát, amit a tranzakciós és vagyongyarapítási igények közti feszültség okoz: pénzzel kell rendelkeznem, ha vásárolni akarok, de minél több a pénzem, annál kisebb része lesz a vagyonomnak az, amely hozamot (jövedelmet) is szolgáltat.

A modellben a fogyasztó folytonosan költ, és összes kiadása egy periódus alatt :

$$\int_0^1 Y\,dt = Y$$

Az egyenletes költéshez azonos összeget vesz ki a bankból egyenlő időközönként. Azt keressük, hogy hányszor kell bemennie a bankba egy periódus alatt, ha minimalizálni akarja a költségeit, ahol kétfajta költséget számolunk el: a kamatveszteséget, és a bankbajárás költségét (időveszteség, cipőtalp kopása stb.)

Ha N alkalommal megy be a bankba, akkor Y/N összeget vesz ki minden egyes alkalommal, és 0 és $1/N$ között a zsebében levő pénzmennyiség:

$$M_t = \frac{Y}{N} - \int_0^t Y ds = \frac{Y}{N} - tY, 0 \leq t \leq \frac{1}{N},$$

aminek az időegységre jutó átlaga

$$AM_{k/N,(k+1)/N} = \frac{\int_0^{1/N} M_t dt}{1/N} = \frac{Y}{2N}.$$

Mivel minden részperiódusban ez az átlag, ez a teljes periódusra eső átlag is. Emiatt az összes kamatveszteség $\frac{iY}{2N}$.Legyen a bankból való pénz kivétel állandó (tranzakció nagyságtól független) költsége: F. Ennek megfelelően az összes állandó költség: NF.Tehát a teljes költség:

$$C(N) = \frac{iY}{2N} + FN.$$

Az N szerinti elsőrendű feltétele a költségminimalizálásnak:

$$F = \frac{iY}{2N^2},$$

amiből az optimális N^*(eltekintve az "egész szám" problémától)

$$N^* = \sqrt{\frac{iY}{2F}}.$$

Az átlagosan tartott pénzmennyiség nagysága tehát:

$$M^* = \frac{Y}{2N^*} = \sqrt{\frac{FY}{2i}},$$

vagyis a pénzkereslet nő, ha nagyobb a fix költség, ha nagyobb a vásárlási igény, és ha kisebb a kamatláb (a pénztartás haszonlehetőség költsége).

Feladat: Egy fogyasztó idén állandó ütemben költ el 2 000 000 forintot. Az éves banki kamatláb 5%, és az egyszerűség kedvéért a bank bármilyen futamidő esetén időarányos kamatot fizet. A fogyasztó számára bankba menni 2 000 forintnyi haszonáldozattal jár.

Hányszor menjen bankba, ha minimalizálni szeretné a költségeit? Mekkora az átlagos pénzkereslet? Mennyi kamattól esik el?

Megoldás:

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{100000/4000} = 5 \\ M &= 200000 \\ iM &= 10000 \end{aligned}$$

8.2.1 Pénzkereslet általában

A Baumol-Tobin pénzkeresleti modell a tranzakciós technológia egy speciális válfaját tételezi fel. Nem lehet olyan modellt felírni, amely minden tranzakciós technológiára egyformán illik, ám bizonyos tulajdonságokat általánosítani lehet a Baumol-Tobin modellből. A leggyakoribb pénzkeresleti egyenlet formája:

$$\frac{M}{P} = L(Y, i),$$

ahol $\frac{\partial L}{\partial Y} > 0$, és $\frac{\partial L}{\partial i} < 0$, ami igaz a Baumol-Tobin modellben is. Ez a függvény teljesíti azt a három tulajdonságot, amit hagyományosan elvárunk egy pénzkeresleti függvénytől.

1. Pénzillúzió hiánya: a pénzkereslet a reálpénzre irányul. ($\frac{M}{P}$ van a baloldalon.)

2. Y reprezentálja a tranzakciós motívumot, általában vagy a GDP-vel azonosítják, vagy a fogyasztással. (Több tranzakció, nagyobb reálpénzkereslet.)

3. Minél nagyobb a pénztartás haszonlehetőség költsége (a nominális kamatláb, i), annál kisebb a reálpénz kereslet.

Miért i a haszonlehetőség költség?

Írjuk fel meg 1 forint pénz egy perióduson át való tartásának reálköltségét. Ez

$$\frac{1}{P_t} - \frac{1}{P_{t+1}} \frac{1}{1 + r_{t+1}}.$$

ahol P_t a nominális árszint, $\frac{1}{P_t}$ az 1 forint reálértéke t-ben, és $\frac{1}{P_{t+1}} \frac{1}{1+r_{t+1}}$ 1 forint reálértéke $t + 1$-ben t-re diszkontálva. A formula kifejezi egy egységnyi pénz reálértékének változását t és $t + 1$ között.

Vezessük be a Fisher-azonosságot, ami a reálkamatláb, az árszint változása és a nominális kamatláb közti definíciós összefüggés:

$$1 + r_{t+1} = \frac{1 + i_{t+1}}{\frac{P_{t+1}}{P_t}} = \frac{1 + i_{t+1}}{1 + \pi_{t+1}}.$$

A Fisher-azonosságból a fenti kifejezés:

$$\frac{1}{P_t}(1 - \frac{1}{1 + i_{t+1}}) = \frac{1}{P_t} \frac{i_{t+1}}{1 + i_{t+1}}$$

alakban írható. Vagyis az egységnyi reálpénzre eső veszteség (költség) $\frac{i_{t+1}}{1+i_{t+1}}$−vel arányos. Ha a periódus hossza csökken, akkor ez a kifejezés közelít i-hez.

8.3 A Ramsey-modell pénzzel

A tőkefelhalmozási összefüggés független a monetáris változóktól, csak reálmennyiségektől függ:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + F(K_t, L_t) - C_t.$$

Továbbra is iagz, hogy

$$l_t = 1 - L_t.$$

A modellt ki kell egészíteni a Fisher-azonossággal, ami tulajdonképpen a reálkamatláb definíciója:

$$1 + r_{t+1} = (1 + i_{t+1})\frac{P_t}{P_{t+1}} = \frac{1 + i_{t+1}}{1 + \pi_{t+1}}.$$

Így az Euler-egyenletek alakja:

$$u_{c_t} = \beta(1 + r_{t+1})u_{c_{t+1}} = \beta(1 + i_{t+1})\frac{P_t}{P_{t+1}}u_{c_{t+1}}.$$

Hasonlóképpen változik az optimális tőkefelhalmozási

$$F_{K_{t+1}} - \delta = r_{t+1} = \frac{1 + i_{t+1}}{1 + \pi_{t+1}} - 1,$$

és a munkapici egyensúlyi összefüggés

$$F_{L_t} = \frac{u_{l_t}}{u_{c_t}} = \frac{W_t}{P_t} = w_t$$

is, ahol W_t a nominális bérek szintje.

Látszik, hogy eddig nagyon hasonló egyenleteket kaptunk a pénznélküli modellek egyenleteihez. Egy új egyenlet a pénzkereslet:

$$\frac{M_t}{P_t} = L(Y_t, i_{t+1}).$$

Ebben a modellben a pénzkínálat exogén, vagyis az $M_0, ...M_t, ...$ sorozat a többi változótól függetlenül határozódik meg.

8.3.1 A pénz közömbössége

A neoklasszikus elmélet szerint a pénz közömbös, azaz a pénz arányos változása minden időpontban csak az árszintet változtatja meg ugyanolyan mértékben, de semmiféle reálváltozóra nincs hatással. A fenti egyenletrendszerben, ha M_t-t kicseréljük λM_t-re akkor, ha a nominális árak és bérek is λ-szorosra nőnek, a modell többi változójára nézve a megoldás nem módosul.

Állítás: Ha a modellnek van egy megoldása valamely M_t-re és $M_t'=\lambda M_t$, ahol $\lambda > 0$, akkor a megoldás változatlan marad, ha P_t-t minden t-ben $\lambda-$val szorozzuk. (A pénz közömbös.)

8.3.2 A pénz szuperközömbössége

Azt mondjuk, hogy a pénz szuperközömbös, ha a pénzmennyiség semmilyen változtatása sem hat a reálgazdaságra, csupán az inflációra és a nominális kamatokra. A fentebb felírt modellben ez igaz, de a neoklasszikus modellnek vannak olyan változatai, amelyben nem. Kevés olyan közgazdász van, aki szerint a pénz szuperközömbös lenne. Többen vannak, viszont, akik szerint a hosszú távú egyensúlyi pályára nézve a pénz szuperközömbös, vagyis az egyensúlyi állapot már nem függ a pénzmennyiségtól, sem pedig annak növekedési ütemétől. Még többen vannak azok, akik szerint az infláció reál társadalmi költségekkel jár, erőforrásokat költünk arra, hogy a vagyonunk ne értéktelenedjen el, vagyis a pénz hosszú távon sem szuperközömbös.

Friedman-elv Egy általános jóléti elv szerint Pareto-optimumban a társadalmi határköltség és határhaszon meg kell egyezzen egymással. Ennek megfelel az, hogy az optimális monetáris politika olyan, hogy a pénz haszonlehetőség költsége (az egyének számára való költsége) megegyezzen előállításának (társadalmi) határköltségével. Mivel az utóbbi (közelítőleg) 0 egy olyan pénzrendszerben, ahol a pénz fizikális formája lényegtelen, ezért az optimális monetáris politikát $i = 0$ és $\pi = -r$ jellemzi, azaz

$$\pi_{t+1} = \frac{P_{t+1}}{P_t} - 1 = -r.$$

Az elv mögötti logika valójában egyszerű. A reálpénzkereslet nyilván $i = 0$-ban maximális. Mivel a pénzkibocsátás költségmentes, semmi sem indokolja, hogy egy hasznos (ha indirekt módon is) jószágot, ne a lehető legnagyobb mennyiségben állítsunk elő.

8.4 Árszintmeghatározás zárt gazdaságban*

Tegyük fel, hogy a pénz szuperközömbös, vagyis a reálváltozókat vegyük adottnak, és határozzuk meg az árak és a kamatlábak pályáját.

A pénzkeresleti egyenlet legyen

$$\frac{M_t}{P_t} = Y_t^{\alpha} \exp(-\gamma i_{t+1}),$$

ami logaritmusokat véve közelíthető, mint

$$m_t - p_t = \alpha y_t - \gamma i_{t+1}.$$

(Itt $m_t = \log(M_t), p_t = \log(P_t), y_t = \log(Y_t)$.)

A Fisher-azonosság közelítése:

$$r_{t+1} + \pi_{t+1} = r_{t+1} + (p_{t+1} - p_t) = i_{t+1}$$

Legyen $\Gamma = \frac{\gamma}{1+\gamma}$.

Ekkor:

$$p_t = \Gamma p_{t+1} + \frac{1}{1+\gamma}(m_t - \alpha y_t + \gamma r_{t+1}).$$

Előre iterálva megkapjuk a t időszaki árszintet, ha az alábbi képletben szereplő sorösszeg véges:

$$p_t = \frac{1}{1+\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma^i(m_{t+i} - \alpha y_{t+i} + \gamma r_{t+1+i}).$$

Tehát, ha f_t-vel jelöljük az úgynevezett fundamentumot:

$$f_t = (m_t - \alpha y_t + \gamma r_{t+1}),$$

akkor

$$p_t = \frac{1}{1+\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma^i f_{t+i}.$$

Az árszint nő, ha a pénzkínálat nő, vagy ha a pénzkereslet (a tranzakciós motívumon keresztül) csökken, bármikor a jövőben. De minél távolabb vagyunk a jelentől a fundamentum súlya annál kisebb. A reálkamatláb emelkedése szintén pénzkereslet csökkentő, azaz árszint növelő hatású.

Konstans fundamentumok esetén

$$p = f = m - \alpha y + \gamma r,$$

azaz a reálpénz kínálata $(m-p)$ mindig megegyezik a keresletével $(\alpha y - \gamma r)$.

Mi történik, ha $\Delta m = m_{t+1} - m_t$ és $\Delta y = y_{t+1} - y_t$ konstans, valamint $\alpha = 1$? Ekkor

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta m - \Delta y \\ \pi + g &= \mu, \end{aligned}$$

ahol π az infláció, g a reál növekedési ütem, és μ a pénzmennyiség növekedési ütem.

Másképpen: a pénz növekedési üteme hosszú távú egyensúlyban megegyezik a nominális GDP növekedési ütemével.

Példa Egy zárt gazdaságban a reálpénzkereslet logaritmusa

$$m_t - p_t = y_t - \frac{1}{4}\cdot i_t.$$

A várakozások szerint a reálkamatláb minden időszakban 4%, továbbá minden időszakban $y_t = 1$, $m_t = 1$.

a) Mennyi p_0?

Megoldás

$$0,01$$

Az $m_2 = 1,02$-re változik, minden egyéb időszakban $m_t = 1$ marad.
b) Mennyi p_2?
Megoldás:

$$\begin{aligned}
p &= 0,02 + \frac{1}{4}(0,04 + 0,01 - p) \\
p_2 &= \frac{4}{5}(0,02 + 0,01 + 0,0025) = \frac{0,13}{5} = 0,026
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $m_t = 1 + 0,01t$ írja le a pénzkínálat pályáját.
c) Mennyi p_0 és π_1?
Megoldás:

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0,01 + \frac{1}{4}0,01 = 0,0125 \\
\pi_1 &= 0,01
\end{aligned}$$

8.5 Seignioriage: az állam haszna a pénzteremtésből

Írjuk fel a kormány költségvetési korlátját úgy, hogy figyelembe vesszük az állam által birtokolt jegybank létét is, és dolgozzunk nominális egységekkel:

$$D_{t+1} = (1 + i_t)D_t + P_t G_t - P_t T_t - \Pi_t^{CB}.$$

Itt D_t az összes államkötvény, P_t az árindex, és Π_t^{CB} a jegybank profitja, ami ugyanúgy költségvetési bevétel, mint az adók, mivel a jegybankról feltesszük, hogy az állam tulajdonában van. Definíció szerint

$$D_t = B_t^P + B_t^{CB},$$

ahol a magánszektor által tartott államkötvény állomány B_t^P, és B_t^{CB} a jegybank által tartott államkötvény állomány. A jegybank mérlege:

$$M_{0t} = B_t^{CB} + L_t^{CB},$$

ahol most M_0-lal jelöljük a monetáris bázist. A jegybank profitja

$$\Pi_t^{CB} = i_t M_{0t},$$

hiszen a jegybanknak csak kamatbevételei vannak, de nincsenek kamatkiadásai.

Legyen

$$B_t^N = B_t^P - L_t^{CB}$$

az állam (költségvetés plusz jegybank) nettó tartozása a magánszektor felé. A fentiek alapján

$$D_t = B_t^N + M_{0t},$$

tehát a kormány költségvetési korlátja átírható, mint

$$B_{t+1}^N + M_{0,t+1} = (1 + i_t)(B_t^N + M_{0t}) + P_t G_t - P_t T_t - \Pi_t^{CB}.$$

A profit összefüggést felhasználva:

$$B_{t+1}^N = (1 + i_t)B_t^N + P_t G_t - P_t T_t - (M_{0,t+1} - M_{0t}).$$

Seigniorage-nak (az állam haszna a pénzkibocsátási monopóliumból) vagy a jegybank profitját (vagyis a nettó kamatbevételt), vagy pedig a monetáris bázis változását szokás nevezni, attól függően, hogy az (1) vagy pedig a (2) költségvetési korlátban gondolkozunk. Maradjunk most az utóbbi felírásnál.

Idáig nominális mennyiségekkel dolgoztunk, de az érdekes kérdés nyilván az, hogy mekkora reáljövedelme származhat a kormánynak a seigniorage-ból, ehhez a nominális seignirorage-t deflálnunk kell az árszinttel. Ha növekvő gazdaságban vagyunk, akkor a lényeges változó a reál seigniorage-nak a GDP-hez viszonyított aránya lesz. Osszuk tehát a költségvetési korlátot $P_t Y_t$-vel, és térjünk át kisbetűkre:

$$(1+\pi_{t+1})(1+g_{t+1})b_{t+1}^N = (1+i_t)b_t^N + \gamma_t - \tau_t - ((1+\pi_{t+1})(1+g_{t+1})m_{0,t+1} - m_{0t}). \tag{1}$$

Hosszú távú egyensúlyban a reál seigniorage a GDP százalékában (s) (röviden seigniorage a továbbiakban):

$$s = \frac{\pi + \gamma + \pi g}{(1 + \pi)(1 + g)} m_0.$$

8.5.1 Kitérő: egy egyszerűsítés

Növekedési ütem folytonos időben Legyen X valamilyen változó, az idő függénye. Ekkor a (diszkrét idejű) álagos növekedési üteme t és t+h között:

$$\frac{X_{t+h} - X_t}{X_t} \frac{1}{h}.$$

A folytonos idejű növekedési ütem ennek a határtértéke, ha $h \to 0$.

$$\frac{X'}{X},$$

ahol X' az idő szerinti derivált.

A folytonos idejű növekedési ütem "előnye", hogy két változó szorzatának növekedési üteme megegyezik a két változó növekedési ütemének összegével.

$$\frac{(XY)'}{XY} = \frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y},$$

mivel

$$(XY)' = X'Y + XY'.$$

Folytonos idejű seigniorage (Innentől elhagyjuk a 0 alsó indexet az M_0-ból.)

Ha h a periódushossz, akkor

$$\frac{M_{t+h} - M_t}{P_t Y_t}/h$$

az időegységre eső seigniorage t és $t{+}h$ között a nominális GDP százalékában. Amennyiben $h \to 0$, akkor ez

$$s = \frac{M'}{PY}$$

alakban írható, ahol M' az idő szerinti derivált.

Deriváljuk az $\frac{M}{PY}$-t az idő szerint.

$$(\frac{M}{PY})' = \frac{M'}{PY} - \frac{M}{PY}\frac{(PY)'}{PY}.$$

Viszont mivel

$$\frac{(PY)'}{PY} = \frac{P'Y}{PY} + \frac{Y'P}{PY} = \pi + g.$$

és egyensúlyban $(\frac{M}{PY})' = 0$, ezért

$$s = (\pi + g)m.$$

Innentől ezt a képletet használjuk.

Ebből a képletből látszik, hogy a seigniorage hosszú távon nem más, mint az inflációs adó, amelynek adókulcsa az egyensúlyi infláció és a reálnövekedési ütem összege (vagyis a nominális GDP növekedési üteme), és az adóalap a monetáris bázis. Hogyan lehet ezt az adóbevételt maximálni? Tegyük fel, hogy a pénzmultiplikátor konstans, így a monetáris bázis iránti kereslet konstansszorosa a pénzkeresletnek. Ha

$$\frac{M_0}{P} = YL(i),$$

akkor a pénz (monetáris bázis) kereslet jövedelem rugalmassága 1. Mivel a hosszú távú nominális kamatláb a reálkamatláb és az infláció összege (közelítőleg), a maximális seigniorage a GDP százalékában megkapható, mint a következő feladat megoldása:

$$\max_{\pi}(\pi + g)L(\pi + r).$$

Mivel a pénzkereslet a nominális kamatláb csökkenő függvénye a seigniorage nem lehet akármilyen nagy, ha a pénzkereslet eléggé kamatrugalmas.

A jegybank azonban nem az inflációt állapítja meg közvetlenül, hanem a pénzmennyiség növekedési ütemét (μ). Hosszú távon viszont (közelítőleg)

$$\mu = \pi + g,$$

tehát a feladat átírható a

$$\max_{\mu} \mu L(r + \mu - g).$$

alakba is, ahol már a pénzmennyiség növekedési üteme a döntési változó.

Egy másik lehetséges megfogalmazása ugyanannak a feladatnak:

$$\max_{i} (i - r + g) L(i).$$

Példa: A pénzkeresleti függvény:

$$\frac{M}{P} = Y \exp(-\phi i).$$

A seigniorage maximálási probléma:

$$\max((\pi + g) \exp(-\phi(\pi + r))$$

A megoldás az elsőrendű feltételből:

$$\begin{aligned}
\exp(-\phi(\pi + r)) - (\pi + g)\phi \exp(-\phi(\pi + r)) &= 0 \\
(\pi + g)\phi &= 1 \\
\pi^* &= \frac{1}{\phi} - g \\
\mu^* &= g + \pi^* = \frac{1}{\phi}.
\end{aligned}$$

8.6 Monetáris politikai eszközök*

Hogyan lehet stabilizálni az árszintet a loglineáris monetáris modellben?

Mivel konstans fundamentumok mellett az ár konstans, ezért ha a cél

$$p^* = f^*,$$

akkor a szabály:

$$m_t = f^* + \alpha y_t - \gamma r_{t+1}.$$

Ha a cél nem az árszint, hanem az inflációs stabilizálása (π^* konstans), akkor a

$$\nabla m_t = \pi^* + \alpha \nabla y_t - \gamma \nabla r_{t+1}$$

szabály biztosítja ezt.

Mi történik, ha a központi bank a kamatlábat rögzíteni akarja?

Mivel

$$m_t - p_t = \alpha y_t - \gamma i,$$

$$i = r_t + (p_{t+1} - p_t)$$

ezért

$$m_t - p_t = \alpha y_t - \gamma r_{t+1} + (p_{t+1} - p_t).$$

Az utóbbi egyenletben két ismeretlen van: m_t és p_t, vagyis a rendszer nemdeterminált.

Ellenben, ha a szabály

$$i_{t+1} = r_{t+1} + \frac{1}{\gamma}(p_t - p^*)$$

lenne, akkor

$$\begin{aligned} m_t - p_t &= \alpha y_t - \gamma r_{t+1} - (p_t - p^*) \\ m_t &= p^* + \alpha y_t - \gamma r_{t+1}, \end{aligned}$$

vagyis elérhetjük a kívánt árszint stabilizálását "feltételes" (az árakra reagáló) kamatpolitikával is.

8.7 Feladatok

1

Egy gazdaságban a fogyasztók 1 000 000 egység betétet tartanak az ország bankjaiban. A feladatban ez végig állandó. Az ország jegybankja által előírt tartalékráta 10%. A jegybank nem ad hitelt a bankoknak. A jegybank becslése szerint összesen 100 000 egység fém- és papírpénz van forgalomban a lakosságnál.

a. Mennyit hiteleznek a bankok?

b. Mennyi pénz forog a gazdaságban?

c. Mekkora a monetáris bázis és a pénzmultiplikátor?

2

Egy fogyasztó egy periódus alatt állandó ütemben költ el X forintot. A kamatláb 1%, és a fogyasztó számára bankba menni 200 forintnyi haszonáldozattal jár. Tudjuk, hogy minden időszakban kétszer jár bankba. Mennyi X?

Ha $X = 1500000$, akkor hányszor megy a fogyasztó bankba optimálisan? (Vegye itt figyelembe azt is, hogy egész számú esetben mehetünk csak bankba.)

3

Legyenek a pénzkeresleti függvényre vonatkozó adatok:

$$\begin{aligned}\frac{M}{P} &= Y\exp(-2i)\\ r &= 0,1\\ g &= 0,05\end{aligned}$$

Mekkora a seigniorage, ha $\pi = 0,05$?

Mekkora a maximális seigniorage, és ilyenkor mekkora az infláció, a pénz növekedési üteme és a nominális kamatláb?

9 A pénz nem-közömbössége és a gazdasági ciklusok

9.1 A pénz reálhatásai

Rugalmas árak mellett a pénz közömbös. Most olyan monetáris modelleket fogunk tanulmányozni, ahol az árak vagy bérek merevsége miatt ez a közömbösség nem teljesül. A probléma egyszerű tárgyalása érdekében eltekintünk a dinamikus összefüggésektől, azaz a tőkefelhalmozástól, és csak egyetlen periódus egyensúlyát tanulmányozzuk, ezért elhagyhatjuk az időindexet.

9.1.1 Rugalmas árak

A termelési függvény:

$$Y = AL^{\alpha}.$$

Ha az árak rugalmasak, akkor a következő négy egyenlet meghatározza a rövid távú egyensúlyt.

A pénzkeresleti függvény:

$$\frac{M}{P} = \omega C.$$

Az inverz munkakereslet:

$$\frac{W}{P} = A\alpha L^{\alpha-1}.$$

Az inverz munkakínálat:

$$\frac{W}{P} = \frac{C}{1-L}.$$

A piaci egyensúly:

$$AL^{\alpha} = C$$

Ez tehát négy egyenlet és négy reál változó ($\frac{M}{P}, \frac{W}{P}, C, L$). Ha az M megváltozik, akkor egyetlen reálváltozó sem változik, vagyis teljesül a pénz közömbössége.

9.1.2 Bérmerevség

Tegyük fel, hogy a nominális béreket a szakszervezetek előre meghatározták, és azok rövid távon nem változnak. Ilyenkor a munkakínálati egyenlet nem számít. Vonjuk össze a pénzkeresleti egyenletet és a piaci egyensúlyi összefüggést:

$$\frac{M}{P} = \omega A L^{\alpha}.$$

Ezt a kifejezést osszuk el az inverz munkakereslettel:

$$\frac{M}{W} = \frac{\omega}{\alpha} L.$$

Ha rögzítettek a bérek, akkor a pénzmennyiség növekedése áremeléshez vezet, azaz a reálbérek csökkenéséhez. Ez viszont növeli a munkakeresletet, és a kibocsátás (fogyasztás) is nő.

9.1.3 Ármerevség

Itt a termelők előre meghatározzák a nominális árakat, tehát a munkakeresleti egyenlet esik ki. Mivel

$$\frac{M}{P} = \omega A L^{\alpha},$$

látszik, hogy rögzített bérek mellett a pénzmennyiség növekedése növeli a foglalkoztatást (valamint a GDP-t, és a fogyasztást). A

$$\frac{W}{P} = \frac{A L^{\alpha}}{1 - L}$$

összefüggés alapján a reál és nominálbér itt nő.

Ebben a modellben tehát a mechanzmus úgy működik, hogy a pénzmennyiség (azaz a kereslet) növekedése nominál és reálbér növekedéshez, ezáltal a munkakínálat, a termelés és a fogyasztás növekedéséhez vezet.

Mindkét fenti modell konklúziója az, hogy amennyiben az árak vagy a bérek nem reagálnak azonnal a kereslet (a pénzkínálat) változásaira, akkor a pénzmennyiség növelése csökkentése ugyanilyen irányú változásokat okoz a GDP-ben is. Ez nagyon egyszerű receptnek látszik: növeljük a pénzmennyiséget mindig és a GDP is mindig nőni fog. Ez a gondolatmenet nyilvánvalóan beleütközik abba a problémába, hogy vannak kapacitáskorlátok, a GDP nem növelhető tetszőlegesen. De még mindig úgy tűnik, hogy a monetáris poltikának egyszerű dolga van: a pénzmennyiség növelésével mindig elérheti, hogy a gazdaság a kapacitások teljes kihasználásával működjön. A következőkben látni fogjuk, hogy az emberek előrelátása megakadályozhatja ebben.

9.2 Infláció és ciklusok*

Annyiban lépünk túl az előző modelleken, hogy itt nemcsak feltesszük, hogy az árak rögzítettek rövid távon, hanem avval is foglalkozunk, hogy milyen elvek alapján lesznek rögzítve. Azért, hogy „loglineáris” modellünk legyen, amit explicite meg tudunk oldani, egyszerűsítünk a munkakínálati összefüggésen, és feltesszük, hogy a béreket egy olyan „alku” határozza meg, aminek eredményeként a munkások egy kívánt reálbért érnek el, aminek értékét 1-re normalizáljuk.

9.2.1 A új-klasszikus Phillips-görbe

Az alábbi modell a fenti bérmerevséges modell "dinamizált" sztochasztikus változata. Legyen a termelési függvény Cobb-Douglas típusú, és konstans a pénz forgási sebessége, amit szintén 1-re normalizálunk. Minden változónak a logaritmusát véve (és kisbetűvel jelölve) a modell egyenletei:

A termelési függvény:

$$y_t = a_t + \alpha l_t,$$

ahol megengedjük, hogy a termelékenység az időben változzon.

A munkakereslet egyenlete:

$$w_t - p_t = a_t + \ln\alpha + (\alpha - 1)l_t.$$

A pénzkereslet:

$$m_t - p_t = y_t$$

A pénzkínálat is változhat az időben.

A fenti egyszerűsítés alapján a bérmeghatározás egyenlete:

$$w_t = p_t^e,$$

ahol a p_t^e a periódus előtt várt árszint, és a kívánt reálbér (logaritmusa) 0.

Ezekből levezethető a következő két egyenlet:

$$l_t = \ln\alpha + m_t - p_t^e,$$

$$p_t = (1-\alpha)m_t + \alpha p_t^e - a_t - \alpha\ln\alpha.$$

Látszik, hogy adott várakozások mellett a pénzkínálat növelése növeli mind az árakat, mind pedig a foglalkoztatást. Fejezzük ki az első egyenletből m_t-t, majd helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$p_t = p_t^e + (1-\alpha)l_t - a_t - \ln\alpha.$$

Definiáljuk a foglalkoztatás normális szintjét úgy, mint a kívánt reálbérhez tartozó egyensúlyi foglalkoztatást:

$$l_t^n = \frac{a_t + \ln\alpha}{1-\alpha}.$$

Ebből

$$p_t = p_t^e + (1-\alpha)(l_t - l_t^n).$$

A (várakozásokkal bővített) Phillips görbe szokásos alakja ennek azonos átalakítással nyert változata:

$$p_t - p_{t-1} = (p_t^e - p_{t-1}) + (1-\alpha)(l_t - l_t^n),$$

azaz az infláció függ a várt inflációtól és a gazdaság túl vagy alulfűtöttségétől, amit a normális foglalkoztatási szinttől való eltérés reprezentál.

A modell teljes megoldásához specifikálni kell a várakozások képzését. Az új-klasszikus elmélet racionális várakozásokat tételez fel. Két véletlen változó van (a_t és m_t). Bontsuk fel ezeket várt és váratlan komponensre, ahol a váratlan komponens várt értéke 0. Legyen:

$$x_t = x_t^e + x_t^u,$$

ahol $x = a$ vagy m.

A megoldást racionális várakozások mellett megkapjuk, ha először vesszük az áregyenlet mindkét oldalának a várható értékét:

$$p_t^e = (1-\alpha)m_t^e + \alpha p_t^e - a_t^e - \alpha \ln \alpha.$$

Ezt megoldjuk, azaz meghatározzuk az árvárakozást:

$$p_t^e = m_t^e - \frac{a_t^e}{1-\alpha} - \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha},$$

majd visszahelyettesítünk az ár és foglalkoztatási egyenletekbe:

$$p_t = m_t^e + (1-\alpha)m_t^u - a_t^u - \frac{a_t^e}{1-\alpha} - \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha}$$

$$l_t = m_t^u + \frac{a_t^e}{1-\alpha} + \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha}.$$

Látható, hogy a foglalkoztatás azonos a normális foglalkoztatás szintjével olyankor, amikor a termelékenységi paraméter a várható értékét veszi fel.

Monetáris politika az új klasszikus modellben Tehát az új klasszikus modell áregyenlete racionális várakozások mellett:

$$p_t = m_t^e + (1-\alpha)m_t^u - a_t^u - \frac{a^e}{1-\alpha} - \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha}.$$

Hogyan stabilizálhatja az árakat a monetáris politika?

1. Határozzunk meg egy állandó várható pénz mennyiséget m.
2. A várható pénzmennyiségtől való eltérés legyen:

$$m_t^u = \frac{a_t^u}{1-\alpha}.$$

Ilyenkor az ár minden periódusban egyenlő:

$$p^* = m - \frac{a^e}{1-\alpha} - \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha}.$$

A modell foglalkoztatási egyenlete:

$$l_t = m_t^u + \frac{a^e}{1-\alpha} + \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha}.$$

Árstabilitás esetén:

$$l_t = \frac{a_t^u}{1-\alpha} + \frac{a^e}{1-\alpha} + \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha},$$

vagyis a foglalkoztatás a (sztochasztikus) természetes szintjén van. Látjuk, hogy a foglalkoztatás természetes szintje változó, függ a termelékenység váratlan komponensétől is!

Viszont lehet, hogy a monetáris politikus feláldozza az árstabilitást némi foglalkoztatás növelésért:

$$m_t^u = \frac{a_t^u}{1-\alpha} + m_{xt}.m_{xt} > 0.$$

Ekkor

$$l_t = m_{xt} + \frac{a_t^u}{1-\alpha} + \frac{a_t^e}{1-\alpha} + \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha},$$

viszont

$$p_t = m_t^e + m_{xt} - a_t^u - \frac{a_t^e}{1-\alpha} - \frac{\alpha \ln \alpha}{1-\alpha}.$$

A foglalkoztatás a természetes szintjét meghaladja, de az árszint, és így az infláció is növekszik.

Tehát racionális várakozások esetén a foglalkoztatást csak a monetáris politika váratlan (nem-szisztematikus) komponense befolyásolja. Váratlan infláció generálásával lehet növelni a foglalkoztatást, de a dezinfláció, amit az m_t^u csökkentésével lehet elérni, költséges, mivel ez a foglalkoztatás csökkenésével is jár. MIért lenne érdemes dezinflálni? Az infláció ugyanis szintén olyasmi, aminek társadalmi költségei vannak, amelyek közül egy legalább a nominális kamatlábak növekedése (lásd Friedman-elv), de az infláció nem-kívánt vagyon átrendeződéssel is jár (az adósok általában nyernek, a hitelezők pedig veszítenek a pozitív váratlan inflációval). Ezek azonban olyan bonyolult összefüggések, amelyek részletes tárgyalása nem ebbe a bevezető anyagba való.

Sokak szerint az ilyen monetáris politikák okozták jelentős részben a ciklusokat a múltban. Az ilyen váratlan monetáris expanzióknak a hatása azonban csak ideiglenes lehet, mivel, ha az m_{xt} rxpanzió rendszeresen jelen van, akkor beépül a gazdasági szereplők várakozásaiba (m^e-be), és csak az árszintnövelő hatás érvényesül, viszont nem fog hatni a foglalkoztatásra még rövid távon sem.

9.2.2 Az új-keynesiánus Phillips görbe

Az úgynevezett új-keynesi modellekben létezik nominális ár és bérmerevség, mind az áru, mind a munkapiacot "nem-tökéletes" verseny jellemzi, ahol a piac a "keresleti görbén" van, és nincs kereslet-kínálati (walrasi) egyensúly. Ebben az elméletben is racionális várakozások vannak. Az árak huzamosabban merevek, ezért az ármeghatározók ennek figyelembevételével „több periódusra előre" határozzák meg áraikat. Az ebben az elméletben levezetett Phillips-görbe legegyszerűbb alakja:

$$
\begin{aligned}
p_t - p_{t-1} &= \beta(p^e_{t+1} - p_t) + \gamma(l_t - l^n_t), \\
\pi_t &= \beta\pi^e_{t+1} + \gamma(l_t - l^n_t), \\
0 &< \beta < 1, \gamma > 0.
\end{aligned}
$$

Látszik, hogy ha az infláció konstans, akkor a foglalkoztatás megfelel a természetes szintjének itt is. Az elmélet szerint az infláció felfogható, mint a jelen és jövőbeli foglalkoztatási (kibocsátási) rések "diszkontált" jelenértéke. (Figyeljük meg a formális hasonlóságot például a részvényárazási összefüggéssel!) Ha a jegybank hihetően elkötelezi magát amellett, hogy a jövőbeli kibocsátási réseket 0 "szinten tartja", akkor már ma is 0-ra csökkentheti az inflációt foglalkoztatási veszteség nélkül is.

9.3 Összegzés

Az új-klasszikus és új-keynes-i modellekben a klasszikus dichotómia megdől rövid és középtávon, habár nem feltétlenül hosszú távon. Létezik egy Phillips-görbének nevezett összefüggés, amely az infláció és a reálgazdaság között átmenetileg pozitív korrelációt reprezentál. Hosszú távon a piaci, illetve információs tökéletlenségek miatt kisebb a "természetes" output és foglalkoztatás, mint a neoklasszikus esetben. A gazdasági ingadozások legfontosabb oka ezekben a modellekben a pénzkínálat, és ezáltal az aggregált kereslet, ingadozása.