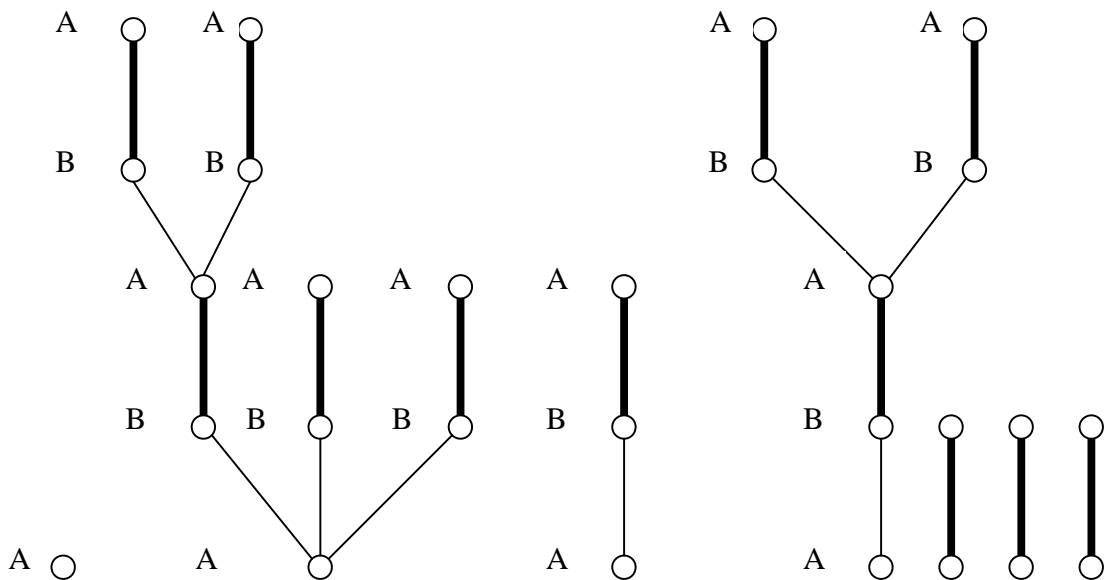


# OPERÁCIÓKUTATÁS

No. 10

Fiala Tibor

## KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁS



Fiala Tibor

# KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁS

OPERÁCIÓKUTATÁS No. 10

A sorozatot szerkeszti: Komáromi Éva

Kiadó: BCE Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

ISBN: 978-963-503-443-7

Budapest, 2010

Fiala Tibor:

# KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁS

Lektorálták: Szegő László (1-7. fejezetek)

Solymosi Tamás (8. fejezet)

Forgó Ferenc (9. fejezet)

Temesi József (Függelék)

Készült az Aula Kiadó Digitális Gyorsnyomdájában.  
Nyomdavezető: Dobozi Erika

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>1. Gráfelméleti alapok</b>	<b>3</b>
1.1. Alapfogalmak . . . . .	3
1.2. Fák jellemzése . . . . .	8
1.3. Páros gráfok . . . . .	12
1.4. Euler-gráfok . . . . .	15
<b>2. Maximális folyam, minimális vágás</b>	<b>17</b>
2.1. Folyam és vágás . . . . .	17
2.2. A Ford-Fulkerson-algoritmus . . . . .	20
<b>3. A Ford-Fulkerson-algoritmus kombinatorikai következményei</b>	<b>27</b>
3.1. Menger tételei . . . . .	27
3.2. A Kőnig-tétel . . . . .	33
3.3. Teljes párosítások páros gráfban . . . . .	38
<b>4. Párosítások páros gráfban</b>	<b>41</b>
4.1. Optimalitási kritérium . . . . .	41
4.2. Maximális párosítás páros gráfban algoritmus . . . . .	46
4.3. A párosítás és teljes párosítás politópok . . . . .	48
<b>5. Súlyozott párosítások páros gráfban</b>	<b>55</b>
5.1. Maximális összsúlyú párosítás . . . . .	55
5.1.1. algoritmus . . . . .	56
5.1.2. A maximumfeladat duálisa . . . . .	59
5.2. Maximin párosítás . . . . .	62
5.3. Minimális összsúlyú teljes párosítás . . . . .	63

5.3.1.	A minimumfeladat duálisa . . . . .	64
5.3.2.	Primál-duál-algoritmus . . . . .	67
<b>6.</b>	<b>Maximális párosítások nempáros gráfban</b>	<b>75</b>
6.1.	Maximális párosítás . . . . .	76
6.2.	Páratlan ponthalmaz fedés (odd set cover) . . . . .	86
6.3.	Pontok fedése élekkel . . . . .	93
<b>7.</b>	<b>Optimális súlyozott párosítások nempáros gráfban</b>	<b>95</b>
7.1.	Különböző optimumfeladatok . . . . .	95
7.2.	Minimális súlyú teljes párosítás primál-duál algoritmussal . . . . .	97
7.3.	Az Edmonds-féle párosítás politópok . . . . .	105
7.4.	A kínai postás feladat . . . . .	112
<b>8.</b>	<b>Matroidok</b>	<b>117</b>
8.1.	Alapfogalmak . . . . .	117
8.2.	A mohó algoritmus . . . . .	122
8.3.	A matroid politóp . . . . .	127
<b>9.</b>	<b>Teljesen unimoduláris mátrixok</b>	<b>133</b>
9.1.	Alapvető tulajdonságok . . . . .	133
9.2.	Teljesen unimoduláris pont-él mátrixok . . . . .	136
9.3.	Alkalmazások . . . . .	138
	<b>Összefoglalás</b>	<b>141</b>
	<b>Függelék</b>	<b>141</b>
	<b>A. Poliéder és politóp</b>	<b>143</b>
	<b>B. A <math>\mathbb{B}^n</math> vektortér</b>	<b>151</b>
	<b>Név- és tárgymutató</b>	<b>157</b>
	<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>161</b>

# Ábrák jegyzéke

1.1. Irányítatlan gráf pont-él mátrixa . . . . .	5
1.2. Élsorozat, ami nem út . . . . .	7
1.3. Zárt élsorozat, ami nem kör . . . . .	8
1.4. Az {a, d, e} körhöz tartozó oszlopvektorok . . . . .	12
1.5. Az {a, b, c, d} körhöz tartozó oszlopvektorok . . . . .	12
1.6. A komponensek Euler-bejárásainak felfűzése . . . . .	16
2.1. Folyam javítása lánc mentén . . . . .	21
2.2. Maximális folyam példa . . . . .	23
2.3. Egy maximális folyam feladat . . . . .	25
3.1. 5-szörösen (A, B) élösszefüggő, 1-szeresen (A, B) pontösszefüggő gráf . . . . .	28
3.2. Irányított pont-Menger-konstrukció . . . . .	32
3.3. Független élek és lefogó pontok páros gráfban . . . . .	34
3.4. Páros gráfhoz rendelt maximális folyam feladat . . . . .	36
3.5. Minimális lefogó pontrendszer és minimális vágás . . . . .	37
4.1. Javítás javító út mentén . . . . .	42
4.2. X-Y alternáló utak . . . . .	44
4.3. X-alternáló fák . . . . .	45
4.4. Példa a maximális párosítás algoritmusra . . . . .	48
5.1. Példa a primál algoritmusra . . . . .	57
5.2. Irányított gráf a primál algoritmusban $k = 2$ esetén . . . . .	57
5.3. Maximális összsúlyú párosítás . . . . .	58
5.4. Példa a maximin párosítás algoritmusra . . . . .	63
5.5. Példa a primál-duál-algoritmusra . . . . .	69

5.6. Példa a primál-duál-algoritmusra . . . . .	69
5.7. Példa a primál-duál-algoritmusra . . . . .	70
5.8. A primál-duál-algoritmus vége . . . . .	70
6.1. $X$ -alternáló élsorozat, ami nem út . . . . .	75
6.2. Kontrakció . . . . .	77
6.3. Blossom és virág . . . . .	77
6.4. Példa az alaptételre . . . . .	78
6.5. $\mathcal{G}'$ -beli javító út folytatása $\mathcal{G}$ -beli javító úttá . . . . .	79
6.6. Kontrakció után maximális, de előtte nem . . . . .	80
6.7. Rekurzív algoritmus 1. . . . .	83
6.8. Rekurzív algoritmus 2. . . . .	84
6.9. Rekurzív algoritmus 3. . . . .	85
6.10. Példa páratlan ponthalmaz fedésre . . . . .	88
6.11. Páros és páratlan hosszú $X$ -alternáló utak találkozása . . . . .	90
7.1. Visszavezetés teljes párosításra . . . . .	96
7.2. Minimális összsúlyú teljes párosítás optimális duálváltozókkal . . . . .	99
7.3. Példa a primál-duál algoritmusra . . . . .	102
7.4. A primál-duál algoritmus lépései . . . . .	102
7.5. A primál-duál algoritmus lépései . . . . .	102
7.6. A primál-duál algoritmus lépései . . . . .	104
7.7. A primál-duál algoritmus lépései . . . . .	104
7.8. Él nem szerepelhet háromszor . . . . .	113
7.9. A legrövidebb utak él-diszjunktak . . . . .	114
7.10. A kínai postás probléma megoldása . . . . .	114
8.1. $B-A$ elemeit $X$ nem fedi . . . . .	119
8.2. A nagykövetek IQ-jának összegét maximalizáljuk . . . . .	126
8.3. Példa a matroid-politóp felírására . . . . .	127
8.4. Adjunk maximális összsúlyú élhalmazt, és duál optimális megoldást!131	



# Táblázatok jegyzéke

5.1. (4, 4) pontú teljes páros gráf súlyokkal . . . . .	55
5.2. Primál és duál optimális megoldás . . . . .	61
5.3. Maximális összsúlyú párosítás . . . . .	62
5.4. Primál és duál optimális megoldás . . . . .	65
5.5. Minimális összsúlyú teljes párosítás . . . . .	66
5.6. Maximális összsúlyú teljes párosítás . . . . .	67
5.7. Példa a primál-duál-algoritmusra . . . . .	68
8.1. Semi-matching feladat . . . . .	120
8.2. Semi-matching feladat megoldása . . . . .	120



# Bevezetés

Ez a kis könyv azoknak az előadásoknak az anyagát tartalmazza, melyeket a szerző kombinatorikus optimalizálás témakörben a Corvinus Egyetem operációkutatás szakirányos hallgatóinak tartott. Ezzel a címmel az első összefoglaló mű Lawler 1976-ban megjelent könyve [Law76] volt, melyre jelentős mértékben támaszkodunk. A témakör nagy összefoglaló monográfiája Schrijver 2003-ben publikált könyve [Sch03], amiből elsősorban a poliéder-politópos megközelítést tartjuk követendőnek. Ugyancsak Schrijvertől származik az a kisebb lélegzetű tanfolyami anyag [Sch09], amelyik sok témában tárgyalásunk vezérfonalát képezi.

Az első fejezetben gráfelméleti alapfogalmakat ismertetünk. A második fejezet a maximális folyam, minimális vágás témakörben alapvető jelentőségű Ford–Fulkerson-algoritmussal foglalkozik. A 3. fejezetben a Ford–Fulkerson-algoritmus következményeként tárgyaljuk a Menger-tételeket, valamint a páros gráfokra vonatkozó König-tételt.

Páros gráfok maximális párosításainak és minimális lefogyó rendszereinek keresése a kombinatorika klasszikus feladata. Ezt ismerteti a 4. fejezet. Az 5. fejezetben páros gráfok súlyozott párosításaival foglalkozunk. Nempáros gráfban a maximális párosítás előállítása Edmonds kontrakciós algoritmusán alapul, ezt tárgyaljuk a 6. fejezetben. A 7. fejezetben az optimális súlyozott párosításokat vizsgáljuk ugyancsak nempáros gráfokban. A 8. fejezetben ismerkedhetünk meg a matroidokkal kapcsolatos alapvető tudnivalókkal. Végül a 9. fejezetben tárgyaljuk a teljesen unimoduláris mátrixok témakörét, természetesen kombinatorikai alkalmazásokkal.

Alapvető jelentőségű az A. függelék, amelyik a poliéderekkel illetve politópokkal kapcsolatos tudnivalókat foglalja össze. Nevezetes tény, hogy a poliéder és a politóp ugyanaz a fogalom. Az egyetemen a tárgy oktatását ezzel szoktam kezdeni, itt csak azért került a függelékbe, mert ez inkább a konvex analízis témakörébe tartozik.

Köszönetet mondok Szegő Lászlónak az első hét fejezet gondos lektorálásáért és értékes javaslataiért. Köszönetet mondok Forgó Ferencnek, Solymosi Tamásnak és Temesi Józsefnek egy-egy fejezet lektorálásáért. Hálával tartozom Fiala Péternek, aki a munka során szakmai és didaktikai szempontból egyaránt magas színvonalon mutatta az utat a  $\text{\LaTeX}$  ösvényein.

# 1. fejezet

## Gráfelméleti alapok

### 1.1. Alapfogalmak

A gráfok pontokból (vagy csúcsokból) és élekből állnak. Minden él két pontot köt össze. Irányított gráf esetén az éleknek iránya van, és minden él a kezdőpontjából a végpontja felé mutat. Ilyenkor az  $a$ -ból  $b$ -be mutató él nem azonos a  $b$ -ből  $a$ -ba mutató éellel. Irányítatlan gráf esetén az élek összekötnek két pontot, de nincs irányuk. Ha egy él összeköti az  $a$  és  $b$  pontokat, akkor ugyanez az él összeköti a  $b$  és  $a$  pontokat is. A geometriai gráf-fogalom egyszerű: a pontokat a háromdimenziós tér pontjainak tekinthetjük, az élek pedig két pontot összekötő (görbe) vonalak. Irányított él esetén az irányt nyíllal jelöljük. Algoritmusok ismertetésénél, illetve számítógépes programok írásakor szükségünk van az absztrakt, halmazelméleti gráf-fogalomra.

**1.1. Definíció** (Irányított gráf). *Irányított gráfnak nevezzük a  $\mathcal{G} = (P, E)$  párost, ahol  $P$  egy véges halmaz,  $E \subset P \times P$ , és  $(a, b) \in E$  esetén  $a \neq b$ .  $P$  a gráf pontjainak halmaza,  $E$  elemei a gráf élei. Tehát minden  $e \in E$  él egy rendezett pontpár,  $e = (a, b)$ , ahol  $a \in P, b \in P$  és  $a \neq b$ .*

Az  $(a, b)$  élnek  $a$  a kezdőpontja,  $b$  a végpontja, úgy is mondjuk, hogy az  $(a, b)$  él  $a$ -ból  $b$ -be mutat. Az  $(a, b)$  él nem azonos a  $(b, a)$  éellel, viszont azzal ellentétes irányú. Az  $a \neq b$  feltétellel az ún. hurokéleket kizártuk. A  $P \times P$  halmaz részhalmazáiban minden elem legfeljebb egyszer szerepel, tehát többszörös vagy ún. párhuzamos élek nincsenek.

**1.2. Definíció** (Irányítatlan gráf). *Irányítatlan gráfnak nevezzük a  $\mathcal{G} = (P, E)$  párost, ahol  $P$  egy véges halmaz,  $E$  pedig  $P$  kételemű részhalmazainak egy halmaza.  $P$  a gráf*

pontjainak halmaza,  $E$  elemei a gráf élei. Tehát minden  $e \in E$  él egy rendezetlen pontpár,  $e = \{a, b\} = \{b, a\}$ , ahol  $a \in P, b \in P$  és  $a \neq b$ .

Ezek szerint minden él a  $P$  ponthalmaznak valamelyik kételemű részhalmaza. Az  $\{a, b\}$  élnek (ami azonos a  $\{b, a\}$  éllel)  $a$  és  $b$  a két végpontja, úgy is mondjuk, hogy az  $\{a, b\}$  él összeköti az  $a$  és  $b$  pontokat. Az  $a \neq b$  feltétellel az ún. hurokéleket kizártuk.  $a = i$  és  $b = j$  esetén  $\{a, b\} = \{i, j\}$ , tehát két pont között legfeljebb egy él lehet. Ez azt jelenti, hogy a párhuzamos éleket ezúttal is kizártuk. Kényelmi okokból az  $\{a, b\}$  élt  $(a, b)$ -vel, sőt  $ab$ -vel is jelöljük.  $e = \{a, b\}$  esetén azt mondjuk, hogy az  $e$  él illeszkedik az  $a$  és  $b$  pontokra. Használhatjuk az  $a \in e$  jelölést is, mert  $a$  a kételemű részhalmaz egyik eleme.

Párhuzamos élekre kizárólag a 7. fejezetben, a kínai postás feladat megoldásakor lesz szükségünk. Erre az esetre nem adunk külön absztrakt definíciót, hanem a geometriai gráf-fogalom használatát javasoljuk.

Gráfokat meg lehet adni grafikusán (a pontok és élek felrajzolásával), valamint a szomszédsági vagy (és) az illeszkedési mátrix megadásával.

**1.3. Definíció** (pont-pont mátrix). Egy  $n$  pontú gráf pont-pont mátrixának vagy szomszédsági mátrixának nevezzük azt az  $n \times n$ -es  $\mathbf{A}$  mátrixot, melyre

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } (i, j) \text{ a gráf éle} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

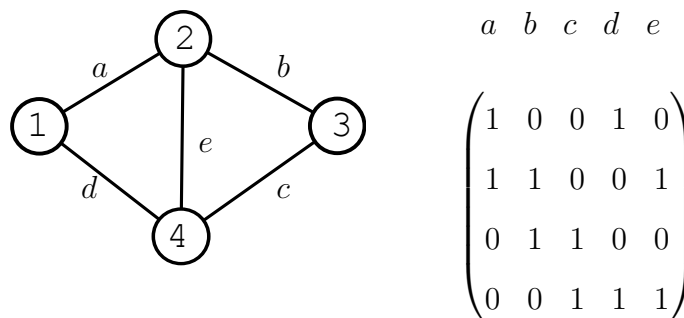
Írányítatlan esetben a pont-pont mátrix szimmetrikus.

**1.4. Definíció** (pont-él mátrix). Egy  $n$  pontból és  $m$  élből álló irányított gráf pont-él mátrixának vagy illeszkedési mátrixának nevezzük azt az  $n \times m$ -es  $\mathbf{B}$  mátrixot, melyre

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } a \text{ } j \text{ él az } i \text{ pontból indul,} \\ -1 & \text{ha } a \text{ } j \text{ él az } i \text{ pontba mutat,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egy  $n$  pontból és  $m$  élből álló irányítatlan gráf pont-él mátrixának vagy illeszkedési mátrixának nevezzük azt az  $n \times m$ -es  $\mathbf{B}$  mátrixot, melyre

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } a \text{ } j \text{ él egyik végpontja az } i \text{ pont,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



1.1. ábra. Irányítatlan gráf pont-él mátrixa

Az illeszkedési mátrix minden sora egy pontot, minden oszlopa egy élt képvisel. Irányított esetben minden oszlopban egy darab 1-es és egy darab  $(-1)$ -es áll, a többi elem 0. Irányítatlan esetben a nullákon kívül minden oszlopban 2 db 1-es áll. Az 1.1. ábrán egy irányítatlan gráfot láthatunk a pont-él mátrixával együtt.

**1.1. Feladat.** Egy  $n$  pontú irányítatlan gráf pont-pont mátrixa legyen  $A$ , a pont-él mátrix pedig  $B$ . Határozzuk meg a  $C = BB^T - A$  mátrixot!

**1.5. Definíció (Pont foka).** Irányítatlan gráfban az  $i$  pontban végződő élek számát az  $i$  pont fokának nevezzük.

**1.1. Állítás.** Irányítatlan gráfban a páratlan fokú pontok száma páros. A fokszámok összege az élek számának kétszerese.

*Bizonyítás.* Legyenek  $i = 1, 2, \dots, n$  a gráf pontjai, és  $d_i$  az  $i$  pont fokszáma. Ha minden pontban megszámláljuk az ott végződő éleket, és így összeadjuk a fokszámokat, akkor minden élt kétszer számoltunk. Tehát  $m$ -mel jelölve az élek számát

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2m \quad (1.1)$$

A jobboldalon az élek számának a kétszerese áll, ami páros, tehát a baloldalon a páratlan összeadanadók száma páros kell, hogy legyen.  $\square$

A következő részgráfokkal kapcsolatos definíciók egyaránt érvényesek irányított és irányítatlan gráfokra.

**1.6. Definíció (Részgráf).** A  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráf részgráfja a  $\mathcal{G}' = (P', E')$  gráf, ha  $P' \subset P$  és  $E' \subset E$ .

**1.7. Definíció** (Feszített részgráf). Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy gráf, és  $P' \subset P$  a csúcsoknak egy részhalmaza. A  $P'$  ponthalmaz által kifeszített részgráfnak azt a  $(P', E')$  gráfot nevezzük, melyre

$$E' = \{(x, y) \in E \mid x \in P', y \in P'\} \quad (1.2)$$

Tehát  $P'$  az eredeti gráfból azokat az éleket feszíti ki, melyeknek mindkét végpontja  $P'$ -ben van. Hasonló módon lehet értelmezni egy  $E'$  élhalmaz által kifeszített részgráfot.

**1.8. Definíció** (Feszített részgráf II.). Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy gráf, és  $E' \subset E$  az éleknek egy részhalmaza. Az  $E'$  élhalmaz által kifeszített részgráfnak, azt a  $(P', E')$  gráfot nevezzük, melyre

$$P' = \{x \in P \mid \exists y \in P, (x, y) \in E'\} \quad (1.3)$$

Tehát  $P'$  az  $E'$  élhalmaz éleinek végpontjaiból áll.

**1.9. Definíció** (Teljes gráf). Teljes gráfnak nevezzük egy irányítatlan gráfot, ha bármely két pontja össze van kötve egy éllel.

Egy  $n$  pontú teljes gráf éleinek száma  $n(n-1)/2$ .

**1.10. Definíció** (Élsorozat, út).  $k$  hosszúságú élsorozatnak nevezzük a  $\mathcal{G}$  gráf éleinek egy  $e(1), e(2), \dots, e(k)$  sorozatát, ha

$$e(i) = (p_i, p_{i+1}) \mid i = 1, 2, \dots, k, \text{ ahol}$$

$p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}$  a gráf pontjai. Azt mondjuk, hogy ez az élsorozat a  $p_1$  pontból (a kezdőpontból) a  $p_{k+1}$  pontba (a végpontba) vezet, illetve összeköti a  $p_1$  pontot a  $p_{k+1}$  ponttal (ezek az út végpontjai).

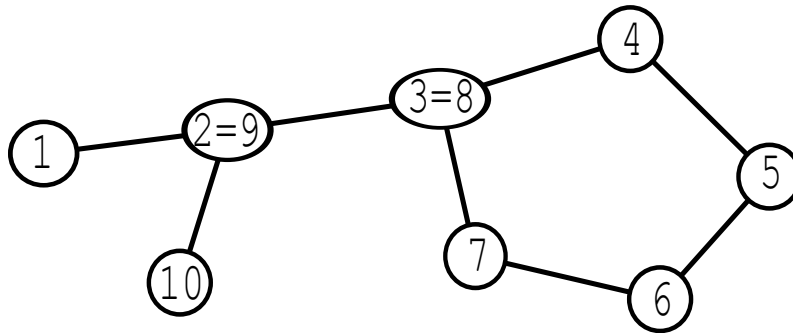
Az élsorozatot útnak nevezzük, ha a  $p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}$  pontok páronként különbözőek.

Gyakran nem pusztán az élsorozatot, hanem az élsorozat élei által kifeszített részgráfot nevezzük útnak. Tehát az útnak  $k+1$  pontja és  $k$  db éle van. Az 1.2. ábrán egy 10 pontból és kilenc élből álló élsorozatot látunk irányítatlan gráfban. A  $(2, 3)$  és  $(8, 9)$  élek azonosak.

**1.11. Definíció** (Zárt élsorozat, kör).  $k$  hosszúságú zárt élsorozatnak nevezzük a  $\mathcal{G}$  gráf éleinek egy  $e(1), e(2), \dots, e(k)$  sorozatát, ha

$$e(i) = (p_i, p_{i+1}) \mid i = 1, 2, \dots, k, \text{ ahol}$$





1.2. ábra. Élsorozat, ami nem út

$p_1, p_2, \dots, p_k, p_{k+1}$  a gráf pontjai, és

$$p_{k+1} = p_1.$$

A zárt élsorozatot körnek nevezzük, ha a

$$p_1, p_2, \dots, p_k \text{ pontok páronként különbözőek, és} \quad (1.4)$$

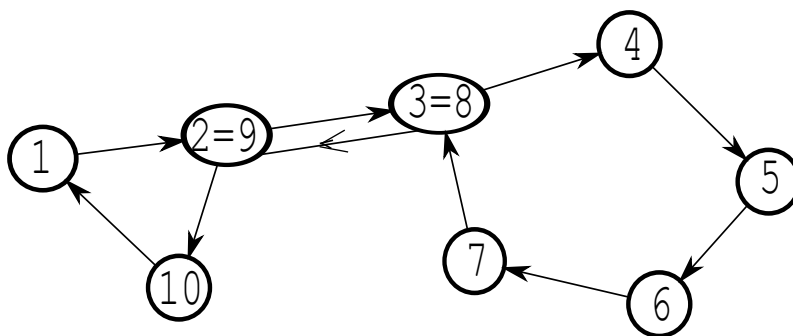
$$\text{irányítatlan gráf esetén } k \geq 3. \quad (1.5)$$

Gyakran nem pusztán a zárt élsorozatot, hanem az élsorozat élei által kifeszített részgráfot nevezük körnek. Tehát a körnek  $k$  pontja és  $k$  db éle van. Hangsúlyozzuk, hogy a  $p_1, p_2, \dots, p_k$  pontokról kötöttük ki, hogy páronként különbözőek, hiszen  $p_{k+1} = p_1$ . A  $k \geq 3$  feltételt irányítatlan gráf esetén azért szükséges, mert ha  $p$  és  $q$  szomszédos pontok, akkor a  $(p, q), (q, p)$  két azonos élből álló zárt élsorozatot nem tartjuk körnek. Irányított gráf esetén a  $(p, q), (q, p)$  zárt élsorozat két különböző élből álló 2 hosszúságú kör.

A körön belül bármelyik  $p_i$  és  $p_j$  pont (két különböző) úttal van összekötve. Az 1.3. ábrán egy 10 pontból és 10 élből álló zárt élsorozatot látunk irányított gráfban. A  $(2, 3)$  és a  $(8, 9)$  élek nem azonosak, az élsorozat mégsem kör, mert például a 3-as és 8-as pontok azonosak.

**1.12. Definíció** (Összefüggő gráf). *Egy gráf összefüggő, ha bármely két pont összeköthető úttal.*

Ha egy irányítatlan gráf nem összefüggő, akkor összefüggő komponensekre esik szét, ahol két különböző komponens nincs éllel összekötve.



1.3. ábra. Zárt élsorozat, ami nem kör

## 1.2. Fák jellemzése

Ebben az alfejezetben eleve feltesszük, hogy a szóbanforgó gráfok irányítatlanok.

**1.13. Definíció (Fa).** Egy irányítatlan gráfot fának nevezünk, ha összefüggő és nem tartalmaz kört.

**1.14. Definíció (Feszítő fa).** Ha adott egy irányítatlan alapgráf, akkor ennek egy részgráfja feszítő fa, ha fa, és az alapgráf minden pontjába eljut.

Tehát az alapgráf minden pontja a részgráfban is benne van. Gyakran fogunk hivatkozni a következő egyszerű lemmára.

**1.1. Lemma.** Ha egy irányítatlan gráfban minden pont foka legalább 2, akkor van a gráfban kör.

*Bizonyítás.* Induljunk el egy  $P_1$  pontból, és szomszédos éleken keresztül haladjunk a  $P_2, \dots, P_k, \dots$  pontokba. Mindaddig, amíg a  $P_k$  pont új, tovább lehet menni még nem használt éleken, hiszen  $P_k$  fokszáma is legalább 2. A gráf végeessége miatt előbb utóbb olyan  $P_k$  pontba érkezünk, amelyik korábban már szerepelt,  $P_k = P_i$ . Ekkor a  $P_i, P_{i+1}, \dots, P_k = P_i$  pontok egy kör pontjai.  $\square$

Az 1.1. lemma felhasználásával kimondhatjuk az alábbi tételt:

**1.1. Tétel (Fák jellemzése).** Tegyük fel, hogy a  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráfnak  $n$  pontja van. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- $\mathcal{G}$  egy fa.
- $\mathcal{G}$  bármely két csúcsát pontosan egy út köti össze.

c)  $\mathcal{G}$  összefüggő, és  $n - 1$  éle van.

d)  $\mathcal{G}$ -ben nincs kör, és  $n - 1$  éle van.

e)  $\mathcal{G}$ -ben nincs kör, és ha behúzzunk egy új élt, akkor pontosan egy kör lesz.

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy az a) állítás ekvivalens a többivel.

$a) \Leftrightarrow b)$  Ha két pont között van két út, akkor a két út által meghatározott részgráfban található kör. Ennek részletezését az olvasóra bízunk. Ha pedig van az eredeti gráfban kör, akkor a kör két pontja a körön belül kétféleképpen összeköthető úttal.

$a) \Rightarrow c)$  Az összefüggőség adott. Az élszámot  $n$  szerinti teljes indukcióval igazoljuk.  $n = 2$ -re az állítás nyilvánvaló. Ha egy  $n$  pontú gráfban nincs kör, akkor létezik olyan  $c$  csúcs, amibe pontosan egy él fut. Ha ugyanis minden pont foka legalább 2 lenne, akkor az 1.1. lemma szerint lenne kör. Ha viszont egy pont foka 0, akkor nem összefüggő a gráf. A  $c$  csúcsot a belefutó éllel együtt vágjuk le a  $\mathcal{G}$  gráfból! A kapott gráf is összefüggő lesz, és körmentes, tehát annak  $n - 2$  éle van. Az eredeti gráf éleinek száma ezért  $n - 1$ .

$c) \Rightarrow a)$  Szintén  $n$  szerinti indukcióval igazoljuk.  $n = 2$ -re nyilvánvaló. Ha  $n - 1$  él van, akkor az 1.1. állítás szerint a fokszámok összege  $2n - 2$ , tehát van 2-nél kisebb fokszám. Az 1 fokú pontot levágva működik a teljes indukció, hiszen a kisebb gráf is összefüggő, és  $n - 2$  pontja van.

$a) \Rightarrow d)$  A körmentesség adott. Az élszámot  $n$  szerinti teljes indukcióval igazoljuk.  $n = 2$ -re az állítás nyilvánvaló. Ha egy  $n$  pontú gráfban nincs kör, akkor létezik olyan  $c$  csúcs, amibe pontosan egy él fut. Ha ugyanis minden pont foka legalább 2 lenne, akkor az 1.1. lemma szerint lenne kör. Ha viszont egy pont foka 0, akkor nem összefüggő a gráf. A  $c$  csúcsot a belefutó éllel együtt vágjuk le a  $\mathcal{G}$  gráfból! A kapott gráf is összefüggő lesz, és körmentes, tehát annak  $n - 2$  éle van. Az eredeti gráf éleinek száma ezért  $n - 1$ .

$d) \Rightarrow a)$  Ezt is  $n$  szerinti indukcióval igazoljuk.  $n = 2$ -re nyilvánvaló. Ha  $n - 1$  él van, akkor az 1.1. állítás szerint a fokszámok összege  $2n - 2$ , tehát van 2-nél

kisebb fokszám. Az 1 fokú pontot levágva működik a teljes indukció, hiszen a kisebb gráfban sincs kör, és  $n - 2$  pontja van.

$a) \Rightarrow e)$  Ha egy új  $e$  él behúzásával két kör keletkezne,  $e$  mindkettőnek éle lenne. A két kör egyesítése egy nyolcasra hasonlító részgráf; ebből  $e$ -t kivágva még mindig maradna kör. Ha egy új él behúzásával nem keletkezik kör, akkor  $\mathcal{G}$  nem lehetett összefüggő.

$e) \Rightarrow a)$   $\mathcal{G}$ -ben nincs kör. Ha  $\mathcal{G}$  nem lenne összefüggő, akkor egy új él behúzásakor nem feltétlenül keletkezne kör.

□

Ennek a tételnek a kövekezményeként megkapjuk két kombinatorikus optimalizálási feladat megoldását:

**1.2. Feladat.** *Legyen adott  $n$  pont. Minimálisan hány él behúzására van szükség, hogy az  $n$ -pontból összefüggő gráfot kapjunk?*

**Megoldás:** Minimálisan  $n - 1$  él behúzására van szükség. Ennél kevesebb él esetén a gráf nem lesz összefüggő,  $n - 1$  él viszont elegendő, ha egy fészítő fa éleit húzzuk be.

**1.3. Feladat.** *Legyen adott  $n$  pont. Maximálisan hány élt lehet behúzni úgy, hogy ne keletkezzen kör?*

**Megoldás:** Maximálisan  $n - 1$  él behúzása lehetséges. Legalább  $n$  él behúzása esetén feltétlenül keletkezik kör.  $n - 1$  élt viszont be lehet húzni úgy, hogy ne keletkezzen kör, mégpedig úgy, hogy egy fészítő fa éleit húzzuk be.

**1.4. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy egy fában van legalább 2 db 1-fokú pont!*

**1.15. Definíció (Erdő).** *Egy irányítatlan gráfot erdőnek hívunk, ha nem tartalmaz kört.*

Egy erdő általában nem összefüggő, de az összefüggő komponensei fák.

**1.5. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy egy  $n$  pontú  $p$  összefüggő komponensből álló erdőnek  $n - p$  éle van!*

**1.16. Definíció (Bináris test,  $\mathbb{B}^n$  vektortér).** *Bináris testnek nevezzük azt a  $\mathbb{B}$  algebrai sruktúrát, ahol mindössze két szám – a 0 és az 1 – létezik, és ezek körében a négy alapművelet végezhető el. Az összeadást és a kivonást*

$$1+1=0, 0-1=1$$

definiálja, a szorzás és az osztás a valós számok körében megszokott módon működik.

$\mathbb{B}^n$ -nel jelöljük azt a vektorteret, ahol a vektorok  $n$ -dimenziósak, minden koordinátájuk 0 vagy 1, és ezek a vektorok a bináris test felett alkotnak vektorteret.

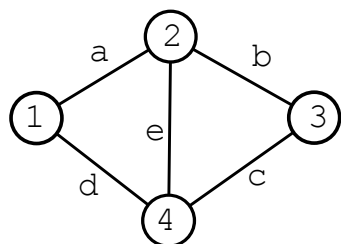
Ebben a vektortérben mindössze két skalár van  $-a$  0, és az 1–ezért vektorok nemtriviális lineáris kombinációja valójában vektorok összege. A  $\mathbb{B}^n$  vektortér éppúgy  $n$  dimenziós, mint az  $\mathbb{R}^n$ . A bázissal és dimenzióval kapcsolatos alapvető ismereteket a  $B$  függelék tartalmazza.

A következő tétel az erdőket jellemzi a  $\mathbb{B}^n$  vektortérben értelmezett lineáris függetlenség segítségével.

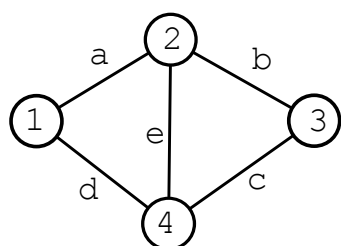
**1.2. Tétel** (Erdők jellemzése). Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf,  $F \subset E$  pedig éleknek egy halmaza. Az  $F$  élhalmaz (által kifesztített részgráf) pontosan akkor nem tartalmaz kört, ha a pont-él mátrixban az  $F$  éleihez tartozó oszlopvektorok a  $\mathbb{B}^n$  vektortérben lineárisan függetlenek.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy az  $F$  élhalmaz (által kifesztített részgráf) tartalmaz egy  $\mathcal{K} = (Q, H)$  kört. Gyűjtsük össze a pont-él mátrixból a  $H$ -beli élekhez tartozó oszlopvektorokat, s az így kapott mátrixot jelöljük  $C(H)$ -val. Azt állítjuk, hogy ekkor  $C(H)$  oszlopvektorainak összege a  $\mathbb{B}^n$  vektortérben a 0-vektor. Ennek az az oka, hogy ha egy pont nincs a  $\mathcal{K} = (Q, H)$  körben, akkor a hozzá tartozó sorban  $C(H)$  minden eleme 0, ha viszont egy pont benne van a körben, akkor a hozzá tartozó sorban  $C(H)$ -nak páros számú eleme lesz 1-es, mert egy kör bármely pontjára a körnek páros számú éle illeszkedik. Páros számú 1-es összege viszont a  $\mathbb{B}$  bináris testben 0. Tehát  $C(H)$  oszlopvektorai lineárisan összefüggőek, így az  $F$  élhalmazhoz tartozó oszlopvektorok is lineárisan összefüggőek.

Fordítva: legyen  $F \subset E$  egy olyan élhalmaz, hogy a pont-él mátrixban az  $F$  éleihez tartozó oszlopvektorok a  $\mathbb{B}^n$  vektortérben lineárisan összefüggőek. Ekkor létezik egy  $H \subset F$  élhalmaz, hogy a hozzá tartozó oszlopvektorok összege –tehát  $C(H)$  oszlopainak összege– a  $\mathbb{B}^n$  vektortérben a 0-vektor. Ezek szerint  $C(H)$ -ban minden sorösszeg 0, tehát minden sorban páros számú 1-es található. Ha egy pont benne van a  $H$  által kifesztített részgráfban, akkor ebben a foka nem lehet 0, tehát a foka 2, vagy 4, vagy 6, és így tovább. Tehát a  $H$  által kifesztített részgráfban minden pont foka legalább 2, ezért az 1.1. lemma szerint a  $H$  tartalmaz kört.  $\square$



	a	b	c	d	e
1	1	0	0	1	0
2	1	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1

1.4. ábra. Az  $\{a, d, e\}$  körhöz tartozó oszlopvektorok

	a	b	c	d	e
1	1	0	0	1	0
2	1	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1

1.5. ábra. Az  $\{a, b, c, d\}$  körhöz tartozó oszlopvektorok

Az 1.4. ábrán egy 4 pontból és 5 élből álló gráfot látunk a pont-él mátrixával együtt. Az  $\{a, d, e\}$  körhöz tartozó oszlopvektorok összege a 0-vektor. Az  $\{a, b, c, d\}$  körhöz tartozó oszlopvektorokat mutatja az 1.5. ábra. A 4 oszlopvektor összege ezúttal is a 0-vektor. Megemlítjük még, hogy a körmentes élhalmazok és a lineáris függetlenség közötti ekvivalencia volt a matroid-elmélet csírája.

**1.6. Feladat.** Egy  $n$  pontú irányítatlan gráf pont-él mátrixa legyen  $C$ . Mutassuk meg, hogy  $C$  rangja  $\mathbb{B}^n$ -ben legfeljebb  $n - 1$ .

### 1.3. Páros gráfok

A gráfelméletben kitüntetett szerepet játszanak az ún. páros gráfok. Arról van szó, hogy a pontok halmaza két diszjunkt halmaz egyesítése, és minden élnek az egyik végpontja az egyik halmazban, a másik végpontja pedig a másik ponthalmazban található. Például az egyik ponthalmaz a fiúk halmaza, a másik ponthalmaz a lányoké, és az élek egy fiút egy lánnyal kötnek össze, állítanak párba. Ilyenkor két fiú nincs éllel összekötve, és két lány sincs. Az egyszerűség kedvéért ebben az alfejezetben eleve feltételezzük, hogy  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf.

**1.17. Definíció** (Páros gráf). A  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráfot párosnak nevezzük, ha  $P = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , és minden  $e \in P$  élnek az egyik végpontja  $A$ -ban, a másik végpontja pedig  $B$ -ben van. A páros gráfot úgy is jelöljük, hogy  $\mathcal{G} = (A, B; E)$ .

Természetesen felvetődik a kérdés: hogyan lehet felismerni, hogy egy gráf páros?

**1.3. Tétel.** Egy gráf pontosan akkor páros, ha a gráfban nincs páratlan hosszúságú kör.

*Bizonyítás.* Ha a gráf páros, akkor  $\mathcal{G} = (A, B, E)$ , és minden kör hossza páros szám lesz, hiszen a kör mentén végighaladva ugyanannyiszor megyünk  $A$ -ból  $B$ -be, mint  $B$ -ből  $A$ -ba.

Másfelől tegyük fel, hogy a  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráfban nincs páratlan hosszúságú kör. Feltehetjük azt is, hogy  $\mathcal{G}$  összefüggő, ugyanis egy gráf nyilvánvalóan pontosan akkor páros, ha minden összefüggő komponense páros. Legyen  $i_0 \in P$  egy tetszőleges pont (a gyökér). Ekkor definiálni fogjuk az  $A$  és  $B$  ponthalmazokat. Legyen

$$A = \{i \in P \mid \exists(i_0 \rightarrow i) \text{ páros hosszúságú út} \}, \text{ és}$$

$$B = \{j \in P \mid \exists(i_0 \rightarrow j) \text{ páratlan hosszúságú út} \}.$$

Tehát egy  $A$  halmazba összegyűjtjük azokat a pontokat, melyek  $i_0$ -ból páros hosszúságú úton elérhetők, a  $B$  halmazba pedig azokat, melyek  $i_0$ -ból páratlan hosszúságú úton elérhetők. Az  $i_0$  pont is az  $A$  halmazban van, mert  $i_0$ -ból nulla hosszúságú úton elérhető, és a 0 páros szám. A gráf összefüggősége miatt  $A$  és  $B$  uniója az összes pont. Másfelől azt állítjuk, hogy  $A$  és  $B$  diszjunktak. Tegyük fel indirekt módon, hogy egy  $k$  pontba páros hosszúságú és páratlan hosszúságú úton is el lehetne jutni  $i_0$ -ból. Ha ez a két út él-diszjunkt, akkor a két út együtt páratlan kört alkot. Ha viszont van közös élük, akkor is a két út együtt páratlan hosszúságú zárt élsorozatot alkot. Az olvasóra bízunk annak részletezését, hogy minden páratlan hosszúságú élsorozat tartalmaz páratlan kört.

Az is igaz, hogy két  $A$ -beli pont között nem lehet él. Ha ugyanis éllel lennének összekötve az  $A$ -beli  $i$  és  $j$  pontok, akkor az  $i_0$ -ból  $i$ -be vezető páros hosszúságú út, az  $i_0$ -ból  $j$ -be vezető páros hosszúságú út, és az  $(i, j)$  él együtt egy páratlan hosszúságú zárt élsorozatot alkotna. Ismét az olvasóra bízunk annak részletezését, hogy minden páratlan hosszúságú élsorozat tartalmaz páratlan kört. Ugyanígy két  $B$ -beli pont között sem lehet él. Tehát a gráf valóban páros.  $\square$

Megemlíjtük még, hogy minden fa páros gráf, hiszen fában nincs kör, így páratlan hosszúságú kör sincs.

Most ismertetünk egy algoritmust, amelyik egy összefüggő gráfról eldönti, hogy páros-e. Ez az algoritmus egy tipikus ún. címkéző eljárás. Először csak egy kezdőpont kap címkét, utána fokozatosan kapnak címkét a kezdőpont szomszédai, aztán további már megcímkézett pontok szomszédai, és így tovább. Ha az algoritmus talál egy páratlan kört, akkor leáll azzal az üzenettel, hogy a gráf nem páros. Ha az algoritmus nem talál páratlan kört, akkor végül minden pont címkét kap. Páros címkét kapnak azok a pontok, melyekbe a kezdőpontból páros hosszúságú út vezet, páratlan címkét kap a többi pont. Így ki lesz jelölve a páros gráf  $A$  illetve  $B$  ponthalmaza. A  $c(i)$  címkén kívül minden megcímkézett  $i$  pontnak lesz egy  $p(i)$  értéke is, ez annak a pontnak a neve, ahonnan a címkézés során az  $i$  pontba érkeztünk (previous). Amikor egy pont összes szomszédját megcímkéztük, a pont „vizsgált” minősítést kap.

### 1.1. Algoritmus.

1) Legyen  $1$  egy tetszőleges csúcs,  $c(1) = \text{páros}$ ,  $p(1) = \text{Gyökér}$ ,  
 $i := 1$

2) Vizsgáljuk az  $i$  csúcsot, tehát  $i$  valamennyi  $j$  szomszédjára

-ha  $c(i)$  pttlan, akkor:

-ha  $j$  címkézetlen, legyen  $c(j)$  páros,  $p(j) = i$

-ha  $c(j)$  páros, akkor nem nyúlunk hozzá

-ha  $c(j)$  pttlan, akkor a gráf nem páros, 3a) köv.

-ha  $c(i)$  páros, akkor:

-ha  $j$  címkézetlen, legyen  $c(j)$  pttlan,  $p(j) = i$

-ha  $c(j)$  pttlan, akkor nem nyúlunk hozzá

-ha  $c(j)$  páros, akkor a gráf nem páros, 3a) köv.

Ezután az  $i$  csúcsot vizsgáltnak nyilvánítjuk. 3b) köv.

3a) Van páratlan kör:  $j$ -ből visszaléphetünk  $1$ -ig kétféleképpen:

$j, p(j), p(p(j)), \dots, 1$ , illetve

$j, i, p(i), p(p(i)), \dots, 1$



A két út közül az egyik hossza páros, a másiké páratlan, tehát találtunk páratlan kört. A gráf nem páros. STOP

3b) Keresünk egy címkézett, de vizsgálatlan  $i$  csúcsot, és a 2) pontra térünk vissza.

Ha nincs már címkézett, de vizsgálatlan csúcs, akkor

$A$  legyen a  $p$  páratlan címkéjű pontok halmaza,

$B$  a párosoké, és a gráf páros. STOP

Ha az algoritmus nem talál páratlan kört, akkor nem fut a 3a) pontra, tehát előbb utóbb minden pont vizsgált lesz, és az algoritmus a 3b) pontban áll le.

## 1.4. Euler-gráfok

Ebben az alfejezetben eleve feltételezzük, hogy  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy összefüggő, irányítatlan gráf. A Königsbergi hidak tanulmányozása során Leonhard Euler 1736-ban vetette fel, és oldotta meg a következő problémát. Mikor lehet egy gráf élein körbehaladni úgy, hogy visszaérjünk a kiindulópontba, és közben minden élen pontosan egyszer haladjunk végig?

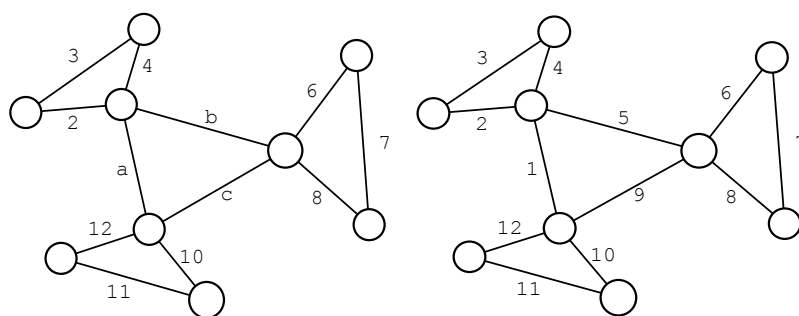
**1.18. Definíció** (Euler-bejárás). *Egy  $\mathcal{G}$  irányítatlan gráfban Euler-bejárásnak nevezzük egy zárt élsorozatot, ha az élsorozat a gráf valamennyi élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha létezik Euler-bejárás, akkor a gráfot Euler-gráfnak mondjuk.*

Az Euler-bejárás élei különbözőek, hiszen a gráf mindegyik éle egyszer fordul elő, de pontok többször is előfordulhatnak, ezért nem minden Euler-bejárás kör.

**1.4. Tétel** (Euler-gráf). *Egy  $\mathcal{G}$  irányítatlan gráfban pontosan akkor létezik Euler-bejárás, ha a gráf összefüggő, és minden pont foka páros.*

*Bizonyítás.* Ha a  $\mathcal{G}$  gráfban van Euler-bejárás, akkor végigjárva a zárt élsorozatot, minden pontba ugyanannyiszor érkezünk be, ahányszor elhagyjuk a pontot, ezért minden pont foka páros.

Fordítva: tegyük fel, hogy  $\mathcal{G}$  összefüggő, és minden pont foka páros. Az Euler-bejárás létezését az élek száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Az összefüggőség miatt egyik pont foka sem lehet 0, tehát minden fok legalább 2, ezért



1.6. ábra. A komponensek Euler-bejárásainak felfűzése

az 1.1. lemma szerint van a gráfban egy  $\mathcal{K}$  kör. Hagyjuk el a  $\mathcal{G}$  gráfból a  $\mathcal{K}$  kör éleit, de a csúcsait nem! A kapott  $\mathcal{G}'$  gráfban is páros lesz minden foksám, viszont az is elképzelhető, hogy  $\mathcal{G}'$  nem összefüggő. Mindenesetre  $\mathcal{G}'$  összefüggő komponensekből áll, ahol mindegyik komponensben minden foksám páros. Az egynél több pontból álló komponensekben teljes indukció szerint rendre kijelölhetőek a komponensek Euler-bejárásai. A  $\mathcal{G}$  gráf Euler-bejárását úgy kapjuk, hogy a  $\mathcal{K}$  kör bejárásakor a  $\mathcal{K}$  körre felfűzzük a komponensek Euler-bejárásait. A felfűzést az 1.6. ábra mutatja. Tegyük fel, hogy a  $\mathcal{K}$  kör a baloldali ábrán az  $\{a, b, c\}$  élek által kifeszített háromszög. Az  $\{a, b, c\}$  élek kivágása után három komponens keletkezik, ezek Euler-bejárásai rendre a  $\{2, 3, 4\}$ , a  $\{6, 7, 8\}$  és a  $\{10, 11, 12\}$  élek által kifeszített háromszögek. A felfűzés utáni teljes Euler-bejárást (ami már nem kör) a jobboldali ábra mutatja, ahol az élek sorszámjai 1-től 12-ig terjednek.  $\square$

**1.7. Feladat.** Fogalmazzuk meg az Euler-feltételt irányított gráfokra!

## 2. fejezet

# Maximális folyam, minimális vágás

Ebben a fejezetben  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányított gráf, melynek  $n$  pontja és  $m$  éle van. Feltételezzük, hogy van két kitüntetett pont.  $\mathbf{F} \in P$  a forrás,  $\mathbf{N}_y \in P$  a nyelő. A forrásból csak kifelé mennek élek, a nyelőbe pedig csak befelé. A többi  $n - 2$  pont közönséges pont. Feltételezzük, hogy minden  $e = (i, j)$  élnek van egy pozitív kapacitása, amit  $u(e)$ -vel, vagy  $u_{ij}$ -vel jelölünk. Tetszőleges  $i \in P$  pontra  $ki(i)$  vel jelöljük az  $i$ -ből kifelé mutató élek halmazát,  $be(i)$ -vel pedig a befelé mutató élek halmazát.

### 2.1. Folyam és vágás

**2.1. Definíció** (lehetséges folyam). *Lehetséges folyamnak vagy egyszerűen folyamnak nevezünk egy  $\mathbf{x} : E \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt (vagy vektort), ha*

$$0 \leq x(e) \leq u(e) \text{ minden } e \text{ éltre, és} \quad (2.1)$$

$$\sum_{e \in ki(i)} x(e) - \sum_{e \in be(i)} x(e) = 0 \text{ minden közönséges } i \text{ pontra.} \quad (2.2)$$

Az  $x(e)$  értéket az  $e$  él terhelésének nevezzük.

Eszerint az élek terhelései nemnegatívak, nem haladhatják meg a kapacitásokat, és minden közönséges pontban teljesül az ún. egyensúlyi egyenlet, tehát a kimenő összeg azonos a bemenő összeggel.

**2.2. Definíció** (folyam értéke). *Az  $\mathbf{x}$  folyam értékének nevezzük a*

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{e \in ki(\mathbf{F})} x(e) \quad (2.3)$$

értéket, tehát a forrásból kiinduló élek terheléseinek összegét.

A maximális folyam feladatban olyan lehetséges folyamot keresünk, amelyiknek az értéke maximális. Mivel a lehetséges folyam feltételrendszere egy korlátos és zárt halmazzal definiál, a folyam értéke ezen egy folytonos (lineáris) függvény, a feladatnak mindig van megoldása. (Megjegyezzük, hogy a maximális folyam létezését pusztán kombinatorikai eszközökkel is be lehet bizonyítani.[EK72])

**2.3. Definíció (Vágás).** Legyen adott pontoknak egy  $H \subset P$  részhalmaza, amelyik tartalmazza a forrást, de nem tartalmazza a nyelőt! A  $H$  ponthalmaz által meghatározott vágásnak nevezzük a  $P = H \cup \bar{H}$  partíciót, ahol  $\bar{H}$  a  $H$  halmaz komplementere.

$$P = H \cup \bar{H}, \text{ ahol } \bar{H} \text{ a } H \text{ halmaz komplementere,} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{F} \in H, \text{ és } \mathbf{N}_y \in \bar{H} \quad (2.5)$$

Gyakran (kényelmi okokból) magát a  $H$  halmazzal mondjuk vágásnak.

$n$  pont esetén  $n - 2$  pontról szabadon eldönthetjük, hogy a  $H$  halmazba vagy annak komplementerébe tartozzon, ezért a vágások száma  $2^{n-2}$ .

**2.4. Definíció (Vágás élei).** Legyen adott a  $P = H \cup \bar{H}$  vágás! A vágás éleinek nevezzük a  $H$ -ból  $\bar{H}$ -ba mutató éleket.

$$H \rightarrow \bar{H} = \{(i, j) \in E \mid i \in H, \text{ és } j \in \bar{H}\} \quad (2.6)$$

Hangsúlyozzuk, hogy a  $\bar{H}$ -ból  $H$ -ba mutató élek nem a vágás élei.

**2.5. Definíció (Vágás kapacitása).** Legyen adott  $P = H \cup \bar{H}$  vágás! A vágás kapacitását úgy kapjuk, hogy a vágás éleinek kapacitásait összeadjuk.

$$u(H \rightarrow \bar{H}) = \sum_{i \in H, j \in \bar{H}} u_{ij} = \sum_{e \in H \rightarrow \bar{H}} u(e) \quad (2.7)$$

A minimális vágás feladat úgy szól, hogy olyan vágást keresünk, melynek a kapacitása minimális. Mivel a vágások száma véges, ennek a feladatnak is mindig van megoldása.

**2.1. Állítás (folyam értéke).** Tetszőleges  $\mathbf{x}$  folyam és bármelyik  $H$  vágás esetén

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{H \rightarrow \bar{H}} x(e) - \sum_{\bar{H} \rightarrow H} x(e) \quad (2.8)$$

*Bizonyítás.* Összegezzük a (2.2) egyenletet  $H - \{\mathbf{F}\}$  pontjaira!

$$\sum_{i \in (H - \{\mathbf{F}\})} \left( \sum_{e \in ki(i)} x(e) - \sum_{e \in be(i)} x(e) \right) = 0.$$

Csoportosítsuk át a jobboldalon álló kifejezést élek szerint! Azoknak az éleknek a terhelése, melyeknek mindkét végpontja a  $H - \{\mathbf{F}\}$  halmazban van,  $0 = 1 - 1$  együtthatóval fog szerepelni, mert minden ilyen él a kezdőpontjából kifelé, és a végpontjába befelé mutat. Tehát csak azok az élek maradnak meg, melyeknek egyik végpontja a  $H - \{\mathbf{F}\}$  halmazban, a másik pedig azon kívül található. Ezeket az éleket három csoportra lehet bontani. Vannak az  $\mathbf{F}$ -ből ( $H - \{\mathbf{F}\}$ )-be mutató, a ( $H - \{\mathbf{F}\}$ )-ből  $\bar{H}$ -ba mutató és a  $\bar{H}$ -ból ( $H - \{\mathbf{F}\}$ )-be mutató élek. Tehát

$$0 = - \sum_{\mathbf{F} \rightarrow (H - \{\mathbf{F}\})} x(e) + \sum_{(H - \{\mathbf{F}\}) \rightarrow \bar{H}} x(e) - \sum_{\bar{H} \rightarrow (H - \{\mathbf{F}\})} x(e)$$

Egészítsük ki a jobboldali első összeget az  $\mathbf{F}$ -ből  $\bar{H}$ -ba mutató élek terheléseivel, ekkor az összes  $\mathbf{F}$ -ből kivezető él terhelésének összegét, tehát a folyam értékét kapjuk. Egészítsük ki a jobboldali második összeget az  $\mathbf{F}$ -ből  $\bar{H}$ -ba mutató élek terheléseivel, ekkor az összes  $H$ -ból  $\bar{H}$ -ba mutató él terhelésének összegét kapjuk. A két kiegészítés kiejti egymást. A jobboldali harmadik szummában eleve az összes  $\bar{H}$ -ból  $H$ -ba mutató él szerepel, hiszen  $\bar{H}$ -ból  $\mathbf{F}$ -be mutató élek nincsenek. Az eredmény

$$0 = - \sum_{e \in ki(\mathbf{F})} x(e) + \sum_{H \rightarrow \bar{H}} x(e) - \sum_{\bar{H} \rightarrow H} x(e)$$

Ezzel az állítást igazoltuk. □

**2.1. Következmény** (folyam értéke). *Tetszőleges  $x$  folyam esetén a folyam értéke azonos a nyelőbe beérkező terhelések összegével.*

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{e \in be(\mathbf{N}_y)} x(e)$$

*Bizonyítás.* A (2.8) egyenletben válasszuk a  $H = P - \{\mathbf{N}_y\}$  vágást, ekkor  $\bar{H} = \{\mathbf{N}_y\}$ , és  $\bar{H}$ -ből egyáltalán nem indul ki él. □

**2.1. Tétel** (gyenge dualitás). *Tetszőleges  $x$  folyam értéke legfeljebb akkora, mint bármelyik  $H$  vágás kapacitása.*

$$v(\mathbf{x}) \leq u(H \rightarrow \bar{H}) = \sum_{e \in H \rightarrow \bar{H}} u(e) \quad (2.9)$$

Ha az  $x$  folyam értéke azonos a  $H$  vágás kapacitásával, akkor az  $x$  folyam maximális, a  $H$  vágás pedig minimális. Ilyenkor a  $H$ -ból  $\overline{H}$ -ba mutató élek telítettek ( $x(e) = u(e)$ ), a  $\overline{H}$ -ból  $H$ -ba mutató élek terhelése pedig 0.

*Bizonyítás.* A tétel állítása azonnal következik a (2.8) egyenlőségből, hiszen az ott szereplő első szumma nyilvánvalóan nem haladja meg a vágás kapacitását, ugyanakkor a második összeg, amit kivonunk, nyilvánvalóan nemnegatív. Egyenlőség pontosan akkor van, ha az első szumma minden tagja eléri a felső korlátot, és a második összeg értéke 0.  $\square$

## 2.2. A Ford-Fulkerson-algoritmus

A Ford-Fulkerson-algoritmus (ld. [FF56]) kiindulópontja egy tetszőleges  $x$  lehetséges folyam. Ezt a folyamatot egy a forrást és a nyelőt összekötő ún. lánc mentén módosítjuk úgy, hogy a folyam értéke növekedjen, mindaddig, amíg ez lehetséges. A lánc pontokból és élekből áll. A pontok egy a forrástól a nyelőig haladó sorozatot alkotnak. Az élek két szomszédos pontot kötnek össze. Ha az él alacsonyabb sorszámú ponttól a magasabb sorszámú felé mutat, előremutató élről beszélünk, ellenkező esetben az él hátramutató.

**2.6. Definíció (Lánc).** *A maximális folyam feladat esetén láncnak nevezünk egy  $k + 1$  pontból, és  $k$  élből álló  $\mathcal{G}' = (P', E')$  részgráfot, ahol*

$$P' = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_k\},$$

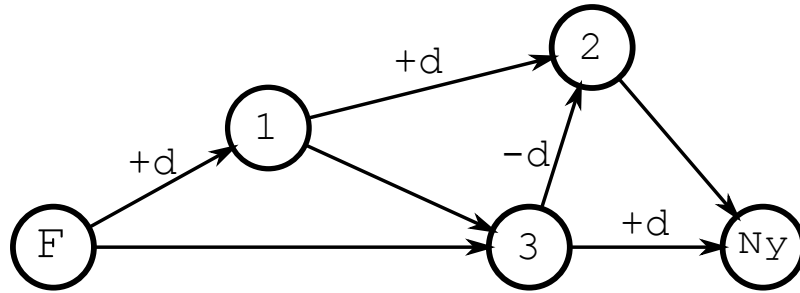
$$p_0 = \mathbf{F}, \text{ és } p_k = \mathbf{Ny},$$

$$E' = \{e(1), e(2), \dots, e(k)\}, \text{ és minden } i = 1, 2, \dots, k \text{ esetén}$$

$$e(i) = \begin{cases} (p_{i-1}, p_i) & \text{vagy} \\ (p_i, p_{i-1}). \end{cases}$$

Előremutatónak nevezük az  $e(i)$  élt, ha  $p_{i-1}$ -ből  $p_i$ -be mutat, hátramutató az  $e(i)$  él, ha  $p_i$ -ből  $p_{i-1}$ -be mutat.

A láncnak speciális esete az irányított út; ekkor mindegyik él előre mutat. Lánc mentén akkor lehet növelni egy előremutató él terhelését, ha  $x(e) < u(e)$ , egy hátramutató él terhelését pedig akkor lehet csökkenteni, ha  $x(e) > 0$ . A 2.1. ábrán a folyamnak lánc mentén történő javítása látható. Ezen az ábrán  $\mathbf{F}, 1, 2, 3, \mathbf{Ny}$



2.1. ábra. Folyam javítása lánc mentén

egy lánc pontjai. Az  $(F, 1)$ ,  $(1, 2)$  és  $(3, Ny)$  élek előremutatóak, ezeken a terhelést  $d$ -vel növeljük. A  $(3, 2)$  él hátramutató, ezen  $d$ -vel csökkentjük a terhelést. A kapott folyam ismét eleget tesz az egyensúlyi egyenleteknek, mert az 1-es pontban a bemenő összeg és a kimenő összeg ugyanannyival nőtt, a 2-es és 3-as pontokban az előjelváltásnak köszönhetően sem a bemenő összeg sem pedig a kimenő összeg nem változik. Ezt fogalmazza meg a következő állítás.

**2.2. Állítás.** *Tegyük fel, hogy a maximális folyam feladatban  $x$  egy lehetséges folyam, és találtunk egy láncot, melyre*

$$\begin{aligned} x(e) < u(e) & \text{ a lánc előremutató élein, és} \\ x(e) > 0 & \text{ a lánc hátramutató élein.} \end{aligned}$$

Legyen  $\varepsilon$  kis pozitív szám, és készítsük el az  $x'$  folyamot a következőképpen:

$$x'(e) = \begin{cases} x(e) + \varepsilon & \text{a lánc előremutató élein} \\ x(e) - \varepsilon & \text{a lánc hátramutató élein} \\ x(e) & \text{a láncon kívül} \end{cases}$$

Ha  $\varepsilon$  elegendően kicsi, akkor  $x'$  is lehetséges folyam lesz, és  $v(x') = v(x) + \varepsilon$ .

*Bizonyítás.* A láncnak egy éle indul ki a nyeléből, ez előremutató, tehát a folyam értéke  $\varepsilon$ -nal nő.  $x'$  azért marad lehetséges folyam mert elég kis  $\varepsilon$  esetén  $0 \leq x'(e) \leq u(e)$  továbbra is teljesülni fog, másfelől az egyensúlyi egyenletek minden  $\varepsilon$ -ra érvényesek maradnak.  $\square$

Most ismertetjük a maximális folyam és a minimális vágás előállítására szolgáló Ford-Fulkerson-algoritmust. Az algoritmus egy tetszőleges lehetséges fo-

lyammal indul, és ezt lánc mentén próbálja javítani. A lánc keresése címkéző eljárással történik. Először csak a forrás kap címkét, utána a forrás bizonyos szomszédai, aztán a már megcímkézett pontok bizonyos szomszédai. Ha egy pont címkét kap, akkor a forrásból addig a pontig lánc (pontosabban lánc-kezdemény) mentén javítani lehetne a folyamot. Ha a nyelő is címkét kap, akkor a folyamot javítani tudjuk, és minden kezdődik előlről. Ha nem tudjuk megcímkézni a nyelőt, akkor - amint látni fogjuk - a folyam maximális, és a megcímkézett pontok egy minimális vágásnak a  $H$  halmazát alkotják. A csúcsokhoz rendelt  $c(i)$  címke azt jelzi, hogy maximálisan mekkora folyamérték-növekedést lehetne a forrástól az  $i$  csúcsig tartó lánc-kezdemény mentén végigvezetni. Ezenkívül még egy mennyiséget tartunk nyilván a csúcsoknál:  $p(i)$  azt mutatja, hogy a címkézés során honnan érkeztünk  $i$ -be (previous).

### 2.1. Algoritmus (Maximális folyam).

Start:  $\mathbf{x}$  egy tetszőleges lehetséges folyam (például  $x_{ij} = 0$  a hálózat minden  $(i, j)$  élére).

Az aktuális folyamhoz növelő utat vagy láncot keresünk:

1) Egyik csúcs sem vizsgált, legyen  $\mathbf{F}$  az egyetlen címkézett csúcs,  $c(\mathbf{F}) = \infty$ ,  $p(\mathbf{F}) = \text{Gyökér}$ , legyen továbbá  $i = \mathbf{F}$ .

2) vizsgáljuk az  $i$  csúcsot, tehát

-minden olyan  $(i, j)$  élre, ahol  $j$  még címkézetlen és  $x_{ij} < u_{ij}$ , címkézzük meg a  $j$  csúcsot a következőképpen  

$$c(j) := \min(c(i), u_{ij} - x_{ij}), \quad p(j) := i,$$
és az  $(i, j)$  él legyen előremutató.

-minden olyan  $(j, i)$  élre, ahol  $j$  még címkézetlen és  $0 < x_{ji}$ , címkézzük meg a  $j$  csúcsot a következőképpen

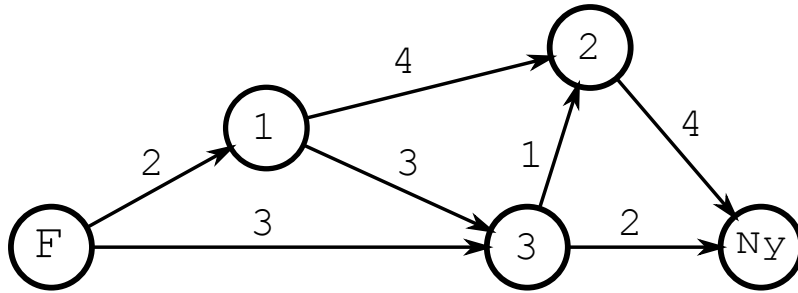
$$c(j) := \min(c(i), x_{ji}), \quad p(j) := i,$$

és a  $(j, i)$  él legyen hátramutató.

Ezután az  $i$  csúcsot „vizsgált”nak nyilvánítjuk.

3a) Ha a 2) pontban címkét kapott a nyelő, akkor  $\mathbf{Ny}$ -ből a  $p(\mathbf{Ny})$ ,  $p(p(\mathbf{Ny}))$ ,  $p(p(p(\mathbf{Ny})))$ , ...pontokon a forrásig visszafelé haladva megkapjuk azt az  $\mathcal{L}$  láncot, melynek minden éle  $(p(j), j)$  vagy  $(j, p(j))$  alakú. Az  $\mathcal{L}$  láncon az  $\mathbf{x}$  folyam értékét előremutató él





2.2. ábra. Maximális folyam példa

mentén  $c(\text{Ny})$ -nyel növeljük, hátramutató él mentén  $c(\text{Ny})$ -nyel csökkentjük, majd visszatérünk az 1) pontra.

3b) Ha a nyelő még nem kapott címkét, akkor keresünk egy címkézett, de vizsgálatlan  $i$  csúcsot, és a 2) lépésre térünk vissza.

Ha nincs már címkézett, de vizsgálatlan csúcs, akkor

$H$  legyen a megcímkézett csúcsok halmaza. Ezzel

$P = H \cup \bar{H}$  egy minimális vágás, az aktuális  $x$  folyam maximális, és az algoritmus véget ér.

A 2)-es pontban szereplő minimumokat a következőképpen lehet értelmezni.  $c(i)$  az az érték, amekkora folyamérték-növekedést végig lehetne vezetni a forrástól az  $i$  pontig terjedő lánc-kezdemény mentén az algoritmus eddigi lépései szerint. Az  $(i, j)$  élen történő terhelés-növelés felső korlátja  $u_{ij} - x_{ij}$ . Az  $(i, j)$  él segítségével ennek a két számnak a minimumát lehet a forrástól a  $j$  pontig végigvezetni, így kapjuk  $c(j)$ -t. Hasonlóan a  $(j, i)$  élen történő terhelés-csökkentés korlátja  $x_{ji}$ . A  $(j, i)$  él segítségével  $c(i)$ -nek és  $x_{ji}$ -nek a minimumát lehet a forrástól a  $j$  pontig végigvezetni, így kapjuk  $c(j)$ -t.

**2.1. Feladat.** Kövessük végig a Ford-Fulkerson-algoritmust a 2.2. ábrán látható példán! Az élek mellett látható számok az él kapacitását jelölik.

**2.2. Tétel.** Tegyük fel, hogy a Ford-Fulkerson-algoritmus a 3b) pontban ér véget. Ekkor az aktuális  $x$  folyam maximális. Jelöljük  $H$ -val a megcímkézett pontok halmazát! Ezzel  $P = H \cup \bar{H}$  egy minimális vágás, és a vágás kapacitása azonos a maximális folyam értékével.

*Bizonyítás.* A 3b) pontban úgy ér véget az algoritmus, hogy nincs megcímkézve a nyelő, de természetesen meg van címkézve a forrás. Tehát  $F \in H$ , és  $Ny \in \bar{H}$ . Ha  $e = (i, j)$  a vágás éle, tehát  $i \in H$  és  $j \in \bar{H}$ , akkor  $x_{ij} = u_{ij}$ , mert különben a  $j$  pont is címkét kapott volna a 2) pontban. Tehát a vágás élei telítettek. Ugyanakkor ha az  $f = (j, i)$  élre  $j \in \bar{H}$  és  $i \in H$ , akkor  $x_{ij} = 0$ , mert különben a  $j$  pont is címkét kapott volna a 2) pontban. Tehát a  $\bar{H}$ -ből  $H$ -ba mutató élek terhelése 0. A 2.8. egyenlet következményeként az  $x$  folyam értéke azonos a  $H$  vágás kapacitásával, tehát a 2.1 tétel miatt mindekettő optimális.  $\square$

Kombinatorikai szempontból alapvető jelentőségű a következő egészértékűségi tétel.

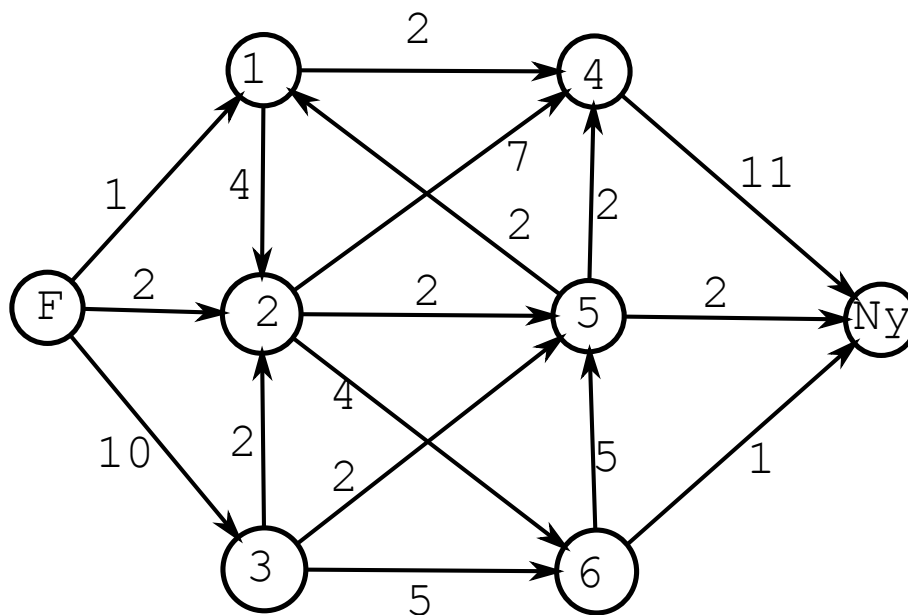
**2.3. Tétel (Egészértékűség).** *Tegyük fel, hogy a maximális folyam feladatban minden él kapacitása pozitív egész szám. Ekkor a Ford-Fulkerson algoritmus véges számú lépés után a 3b) pontban befejeződik, és a kapott  $x$  maximális folyam is egész. (Tehát minden él terhelése egész szám.)*

*Bizonyítás.* A Ford-Fulkerson-algoritmusban csak összeadást és kivonást végzünk, ezek pedig nem vezetnek ki az egész számok köréből. A 3a) pontban a folyam értékének növekedése is egész szám, tehát legalább 1. Ezért az algoritmus során csak véges számú esetben kerül sor a 3a) lépésre, hiszen bármelyik vágás kapacitása a folyamérték felső korlátja.  $\square$

Tanulságos dolog, hogy irracionális kapacitások esetén a Ford-Fulkerson-algoritmus jelenlegi változata nem feltétlenül véges. Többek között Uri Zwick publikált egy egyszerű példát [Zwi95] arra, hogy az algoritmus során végtelen sokszor futunk rá a 3a) pontra, sőt a keletkező folyamok sorozata nem a maximális folyamhoz konvergál. Ugyanakkor a Ford-Fulkerson algoritmus segítségével minden esetre bizonyítható az erős dualitás tétel.

**2.4. Tétel (Erős dualitás).** *A maximális folyam feladatban a maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás kapacitásával.*

*Bizonyítás.* A Ford-Fulkerson-algoritmusban egy tetszőleges lehetséges folyamot használhatunk induláskor. Legyen most az induló lehetséges folyam egy  $x$  maximális folyam. (Ilyen létezik, mert korlátos zárt halmazon folytonos függvény felveszi a maximumát.) Ebben az esetben a 3a) pontra egyszer sem futunk rá,



2.3. ábra. Egy maximális folyam feladat

mert a maximális folyam értéke nem növelhető. A 2) pontra legfeljebb annyiszor futunk rá, ahány pontja van a gráfnak. Tehát az algoritmus a 3b) pontban ér véget, és a 2.2. tétel szerint megad egy minimális vágást is.  $\square$

Megemlítjük, hogy ez az erős dualitás tétel nem következik automatikusan a klasszikus LP dualitásból, mert itt a maximális folyam probléma folytonos ugyan, de a minimális vágás feladat diszkrét.

**Feladat.** Határozzunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a 2.3. ábrán látható feladatban! Az élek mellett látható számok az él kapacitását jelölik.

Megoldás:

Lánc	javítás
F-1-4-Ny	1
F-2-5-Ny	1
F-3-6-Ny	1
F-2-4-Ny	1
F-3-6-5-Ny	1
F-3-5-4-Ny	2
F-3-2-4-Ny	2
F-3-5-2-4-Ny	1
F-3-5-1-2-4-Ny	1
F-3-6-5-1-4-Ny	1

Egy minimális vágás  $H$  halmaza:  $H = \{F, 3, 6, 5\}$ . A maximális folyam értéke 12.

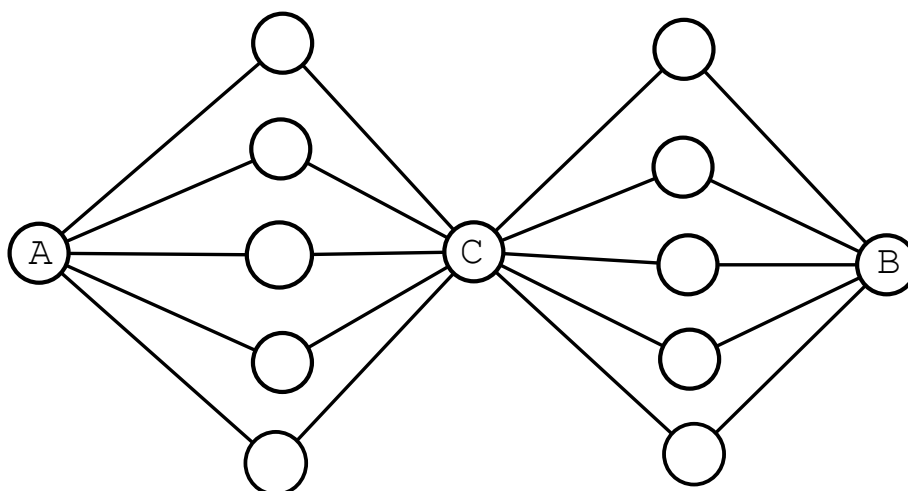
## 3. fejezet

# A Ford-Fulkerson-algoritmus kombinatorikai következményei

### 3.1. Menger tételei

A XX. századi gráfelmélet ünnepelt eredményei voltak Menger tételei, melyek azért is figyelemreméltóak, mert itt a primál és a duál feladat is diszkrét, mégis teljesül az erős dualitás tétel, tehát a primál feladat maximuma azonos a duál feladat minimumával. Menger eredeti publikációja 1927-ben jelent meg (ld. [Men27]). Az eredmények egyaránt vonatkoznak irányított és irányítatlan gráfokra, ezért ebben az alfejezetben ezt a két típust felváltva használjuk. Legyen rögzítve két kitüntetett pont,  $A$  és  $B$ ! A maximumfeladat abból áll, hogy a két pont között szeretnénk minél több pont-diszjunkt illetve él-diszjunkt utat találni. Két út, melyek az  $A$  és  $B$  pontokat kötik össze, akkor él-diszjunkt, ha nincsenek közös éleik. Hasonlóan az  $A$  és  $B$  pontokat összekötő két út akkor pont-diszjunkt, ha nincsen közös belső pontjuk, tehát nincs más közös pontjuk, mint az  $A$  és  $B$  végpontok.

A minimumfeladat úgy szól, hogy minél kevesebb él elvágásával szeretnénk elérni, hogy az  $A$  pont ne legyen összekötve a  $B$  ponttal. Analóg feladat, hogy minél kevesebb pont kivágásával érjük el, hogy  $A$  ne legyen összekötve  $B$ -vel. Pont kivágása esetén az összes olyan élt is el kell hagyni, melynek egyik végpontja a kivágott pont. Pontok kivágása esetén csak akkor lehet  $A$ -t és  $B$ -t szétválasztani, ha nincs  $A$  és  $B$  közötti él. Annak megfelelően, hogy a gráf lehet irányított illetve irányítatlan, valamint számolhatjuk az él-diszjunkt illetve pont-diszjunkt utakat,



3.1. ábra. 5-szörösen  $(A, B)$  élösszefüggő, 1-szeresen  $(A, B)$  pontösszefüggő gráf

4 Menger tétel következik, ezeket pedig 4 definíció előzi meg.

**3.1. Definíció** (Irányítatlan élösszefüggőség). Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráf,  $A \in P$  és  $B \in P$  két különböző pont. Azt mondjuk, hogy a gráf  $k$ -szorosán  $(A, B)$  élösszefüggő, ha bármely  $k - 1$  él elhagyása esetén  $A$  és  $B$  még összeköthető úttal.

**3.2. Definíció** (Irányítatlan pontösszefüggőség). Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráf,  $A \in P$  és  $B \in P$  két különböző pont, és tegyük fel, hogy  $A$  és  $B$  nincs éllel összekötve. Azt mondjuk, hogy a gráf  $k$ -szorosán  $(A, B)$  pontösszefüggő, ha bármely  $k - 1$  ( $A$ -tól és  $B$ -től különböző) pont kivágása esetén  $A$  és  $B$  még összeköthető úttal.

A 3.1. ábrán látható gráf ötszörösen  $(A, B)$  élösszefüggő, mert bármelyik 4 él elhagyása után  $A$  és  $B$  még összeköthető úttal. Ugyanakkor a gráf csak egyszeresen  $(A, B)$  pontösszefüggő (elegendő a  $C$  pontot kivágni). Hasonló példa adható irányított gráfokra is.

**3.3. Definíció** (Irányított élösszefüggőség). Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányított gráf,  $A \in P$  és  $B \in P$  két különböző pont. Azt mondjuk, hogy a gráf  $k$ -szorosán  $(A, B)$  élösszefüggő, ha bármely  $k - 1$  él elhagyása esetén  $A$ -ból  $B$ -be el lehet jutni irányított úton.

**3.4. Definíció** (Irányított pontösszefüggőség). Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányított gráf,  $A \in P$  és  $B \in P$  két különböző pont, és tegyük fel, hogy  $A$ -ból  $B$ -be nem vezet él. Azt mondjuk, hogy a gráf  $k$ -szorosán  $(A, B)$  pontösszefüggő, ha bármely  $k - 1$  ( $A$ -tól és  $B$ -től különböző) pont kivágása esetén  $A$ -ból  $B$ -be még el lehet menni irányított úton.

A  $k$ -szoros összefüggőségből természetesen mind a négy esetben következik a  $(k - 1)$ -szeres összefüggőség. Ezért a gyenge dualitás tételeknek megfelelő állításokat egyenlőtlenség formájában fogalmazzuk meg.

**3.1. Állítás** (Irányítatlan élösszefüggőség). *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráf,  $A \in P$  és  $B \in P$  két különböző pont. Ha  $A$  és  $B$  között létezik  $k$  darab él-diszjunkt út, akkor a gráf legalább  $k$ -szorosan  $(A, B)$  élösszefüggő.*

*Bizonyítás.* Egy él elhagyása a  $k$  darab él-diszjunkt út közül legfeljebb egyet tud megszüntetni.  $(k - 1)$  darab él elhagyása a  $k$  darab él-diszjunkt út közül legfeljebb  $(k - 1)$ -et tud tönkretenni, tehát legalább egy út megmarad.  $\square$

**3.2. Állítás** (Irányítatlan pontösszefüggőség). *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráf,  $A \in P$  és  $B \in P$  két különböző pont, és tegyük fel, hogy  $A$  és  $B$  nincs éllel összekötve. Ha  $A$  és  $B$  között létezik  $k$  darab pont-diszjunkt út, akkor a gráf legalább  $k$ -szorosan  $(A, B)$  pontösszefüggő.*

*Bizonyítás.* Egy pont elhagyása a  $k$  darab pont-diszjunkt út közül legfeljebb egyet tud megszüntetni.  $(k - 1)$  darab pont elhagyása a  $k$  db pont-diszjunkt út közül legfeljebb  $(k - 1)$ -et tud tönkretenni, tehát legalább egy út megmarad.  $\square$

Ugyanilyen egyszerűen igazolhatók az irányított gráfokra vonatkozó állítások.

**3.3. Állítás** (Irányított élösszefüggőség). *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányított gráf,  $A \in P$  és  $B \in P$  két különböző pont. Ha  $A$ -ból  $B$ -be létezik  $k$  darab él-diszjunkt út, akkor a gráf legalább  $k$ -szorosan  $(A, B)$  élösszefüggő.*

Az állítás azért igaz, mert  $(k - 1)$  darab él elhagyása a  $k$  darab él-diszjunkt út közül legfeljebb  $(k - 1)$ -et tud megszüntetni, tehát legalább egy út megmarad.

**3.4. Állítás** (Irányított pontösszefüggőség). *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányított gráf,  $A \in P$  és  $B \in P$  két különböző pont, és tegyük fel, hogy  $A$ -ból  $B$ -be nem vezet él. Ha  $A$ -ból  $B$ -be létezik  $k$  darab pont-diszjunkt út, akkor a gráf legalább  $k$ -szorosan  $(A, B)$  pontösszefüggő.*

Az állítás azért igaz, mert  $(k - 1)$  darab pont elhagyása a  $k$  darab pont-diszjunkt út közül legfeljebb  $(k - 1)$ -et tud megszüntetni, tehát legalább egy út megmarad. Most következnek a Menger-tételek. A 4 tétel közül kettőt egy megfelelő maximális folyam feladat konstrukciójával bizonyítunk. Javasoljuk, hogy az olvasó az ismertetett technikák alkalmazásával bizonyítsa be a másik két tételt.

**3.1. Tétel (Irányítatlan él-Menger).** *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráf,  $A \in P$  és  $B \in P$  két különböző pont. Ha a gráf  $k$ -szorosan  $(A, B)$  élösszefüggő, akkor  $A$  és  $B$  között létezik  $k$  darab él-diszjunkt út.*

*Bizonyítás.* A  $\mathcal{G}$  gráf  $A$ -tól és  $B$ -től különböző pontjait közönséges pontoknak nevezük. A  $\mathcal{G}$  gráfból készítünk egy  $\mathcal{G}'$  irányított gráfot a következőképpen.  $\mathcal{G}'$ -nek ugyanannyi pontja lesz, mint  $\mathcal{G}$ -nek.  $A$  képe lesz a forrás, az itt végződő éleket a forrásból kifelé irányítjuk.  $B$  képe a nyelő, az idefutó éleket a nyelőbe befelé irányítjuk. Az eredeti gráf minden  $(i, j)$  közönséges pontokat összekötő éle helyett két irányított élt szerepeltetünk az új gráfban: ezek  $(i, j)$  és  $(j, i)$ . Valamennyi élnek a kapacitása legyen 1.

Tekintsük a  $\mathcal{G}'$ -re vonatkozó maximális folyam feladatát! Mivel minden kapacitás egész szám, a Ford-Fulkerson algoritmussal egészértékű maximális folyamat kapunk. Ebben minden él terhelése 0 vagy 1, hiszen az élek kapacitása 1. Tehát véges sok egészértékű maximális folyam létezik. Ezek közül válasszunk ki egy olyat, melyre

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{e \in E} x(e)$$

tehát az élek terheléseinek összege minimális! Ezt a folyamat jelöljük  $\mathbf{x}'$ -vel.

Az  $\mathbf{x}'$  folyamban nem fordulhat elő, hogy az  $(i, j)$  élnek és a  $(j, i)$  élnek egyaránt 1 a terhelése. Ekkor ugyanis minkét él terhelését levihetnénk 0-ra, továbbra is egészértékű maximális folyamat kapnánk, de az élek terheléseinek összege csökkenne. Az sem fordulhat elő, hogy egy  $K$  irányított kör valamennyi élén 1 a terhelés. Ekkor ugyanis a kör valamennyi élének a terhelését levihetnénk 0-ra. Egy irányított kör elkerüli a forrást és a nyelőt, tehát nem változna a folyam értéke. Ugyanakkor a kör pontjain a bemenő összeg és a kimenő összeg egyaránt 1-gyel csökkenne, tehát továbbra is lehetséges folyamat kapnánk. Ez viszont el-  
lentmond annak, hogy  $\mathbf{x}'$ -ben az élek terheléseinek összege minimális volt.

Most belátjuk, hogy az  $\mathbf{x}'$  maximális folyam értéke legalább  $k$ . Tegyük fel indirekt módon, hogy a maximális folyam értéke és a minimális vágás kapacitása legfeljebb  $k - 1$ . A minimális vágás is 1 kapacitású élekből áll, tehát a minimális vágás kapacitása a vágás éleinek száma. Ha a minimális vágásnak csak  $k - 1$  él volna, akkor ennek a  $k - 1$  élnek  $k - 1$  irányítatlan él felel meg az eredeti gráfban. A  $k$ -szoros összefüggőség miatt a  $k - 1$  él elhagyása után is létezne a  $\mathcal{G}$  gráfban



egy  $S$  út, amelyik  $\mathcal{A}$ -t  $\mathcal{B}$ -vel köti össze.  $S$  pontjainak a képe az új gráfban legyen az  $S'$  pontsorozat.  $S'$  a forrással kezdődik, és a nyelővel végződik, tehát van egy olyan szakasz, ahol a pontsorozat átlép a vágás  $H$  halmazából a  $\overline{H}$ -be.  $i \in H$  és  $i + 1 \in \overline{H}$  esetén az  $(i, i + 1)$  él is a vágás éle, ami a vágás  $k - 1$  élétől különbözik, tehát lenne a vágásnak még egy éle, ami ellentmondás.

Ezek szerint a maximális folyam értéke legalább  $k$ . Így a forrásból legalább  $k$  db olyan él indul, amelyiknek 1 a terhelése. Mindegyik ilyen élből egy  $i$  ponton keresztül tovább lehet haladni egy másik 1 terhelésű eredeti élre, mert az  $i$  pontban a bemenő összeg azonos a kimenő összeggel. Az  $(i, j)$  1 terhelésű élből a  $j$  ponton keresztül tovább lehet haladni egy harmadikra, és így tovább, mindaddig, amíg meg nem érkezünk a nyelőbe. Egy ilyen út bejárása során nem érkezhetünk ugyanennek az útnak korábban már érintett pontjába, mert akkor 1 terhelésű élekből álló irányított kört kapnánk. Az is biztosítva van, hogy a forrásból különböző 1-terhelésű élekkal indított utak él-diszjunktak lesznek, hiszen minden él kapacitása 1. Tehát az  $x'$  folyam  $\mathcal{G}$ -beli vetülete is 0 vagy 1 értékű.  $\mathcal{G}$ -ben az 1 terhelésű élek által kifizített részgráf él-diszjunkt  $\mathcal{A}$ -t és  $\mathcal{B}$ -t összekötő utakból áll, és ezek száma legalább  $k$ .  $\square$

**3.2. Tétel (Irányítatlan pont-Menger).** *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráf,  $\mathcal{A} \in P$  és  $\mathcal{B} \in P$  két különböző pont, és tegyük fel, hogy  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  nincs éllel összekötve. Ha a gráf  $k$ -szorosán  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  pontösszefüggő, akkor  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  között létezik  $k$  darab pont-diszjunkt út.*

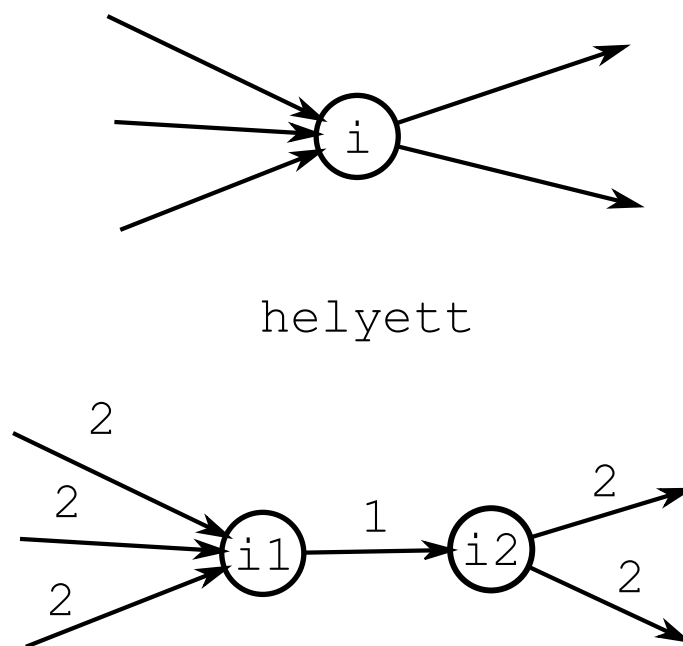
**3.1. Feladat.** *Bizonyítsuk be az irányítatlan pont-Menger-tételt!*

Most az irányított gráfokra vonatkozó Menger-tételek következnek.

**3.3. Tétel (Irányított él-Menger).** *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányított gráf,  $\mathcal{A} \in P$  és  $\mathcal{B} \in P$  két különböző pont. Ha a gráf  $k$ -szorosán  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  élösszefüggő, akkor  $\mathcal{A}$ -ból  $\mathcal{B}$ -be létezik  $k$  darab él-diszjunkt irányított út.*

**3.2. Feladat.** *Bizonyítsuk be az irányított él-Menger-tételt!*

**3.4. Tétel (Irányított pont-Menger).** *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányított gráf,  $\mathcal{A} \in P$  és  $\mathcal{B} \in P$  két különböző pont, és tegyük fel, hogy  $\mathcal{A}$ -ból  $\mathcal{B}$ -be nem vezet él. Ha a gráf  $k$ -szorosán  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  pontösszefüggő, akkor  $\mathcal{A}$ -ból  $\mathcal{B}$ -be létezik  $k$  darab pont-diszjunkt irányított út.*



3.2. ábra. Irányított pont-Menger-konstrukció

*Bizonyítás.* A  $\mathcal{G}$  gráfból elhagyhatjuk az  $\mathcal{A}$ -ba mutató és a  $\mathcal{B}$ -ből induló éleket, ezek ugyanis nem befolyásolják  $\mathcal{A}$ -ból  $\mathcal{B}$ -be vezető utak számát. A kapott gráfot továbbra is  $\mathcal{G}$ -vel jelölük, ez is  $k$ -szorosán  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  pont-összefüggő. A  $\mathcal{G}$  gráf  $\mathcal{A}$ -tól és  $\mathcal{B}$ -től különböző pontjait közönséges pontoknak nevezzük. Készítünk egy nagyobb  $\mathcal{G}'$  gráfot a következőképpen. Az eredeti gráf minden közönséges  $i$  pontja helyett az új gráfnak két pontja lesz:  $i1$  és  $i2$ . A 3.2. ábrán látható módon  $i1$ -ből  $i2$ -be egy új él mutat, ennek a kapacitása 1. Az eredetileg  $i$  be mutató  $\mathcal{G}$ -beli élek képe  $i1$ -be mutat, az eredetileg  $i$ -ből induló élek képe  $\mathcal{G}'$ -ben  $i2$ -ből indul ki. Ezeket régi éleknek nevezzük. A régi élek kapacitása 2.  $\mathcal{G}'$ -ben szerepel a két kitüntetett pont képe is, az  $\mathcal{A}$  pont képe lesz a forrás, és a  $\mathcal{B}$  pont képe lesz a nyelő. Tekintsük a  $\mathcal{G}'$ -re vonatkozó maximális folyam feladatot! Mivel minden kapacitás egész szám, a Ford-Fulkerson algoritmussal egészértékű maximális folyamat kapunk, ezt jelöljük  $x$ -szel. Ebben az új élek terhelése 0 vagy 1, hiszen az új élek kapacitása 1. Az eredeti gráfban nem volt  $\mathcal{A}$ -ból  $\mathcal{B}$ -be mutató él, ezért az új gráfban minden eredeti él vagy egy  $i1$  pontba mutat, vagy valamelyik  $i2$  pontból indul ki. A folyamegyensúlyi egyenletek miatt a 3.2. ábrán látható módon  $i1$ -ben a kimenő összeg 0 vagy 1, tehát a bemenő összeg is 0 vagy 1. Hasonlóan  $i2$ -ben a bemenő összeg 0 vagy 1, tehát a kimenő összeg is 0 vagy 1. Ez azt jelenti, hogy minden eredeti él terhelése 0 vagy 1, tehát a 2 kapacitás nem érhető el, az eredeti élek nem

telítettek. Az is látszik, hogy minden  $i_1$  pontba legfeljebb egy olyan él fut, aminek 1 a terhelése, és minden  $i_2$  pontból legfeljebb egy olyan él megy ki, aminek 1 a terhelése. Ha az  $i_1$  pontba bemegy egy 1 terhelésű él, akkor  $(i_1, i_2)$  terhelése is 1, tehát  $i_2$ -ből kimegy egy 1 terhelésű él.

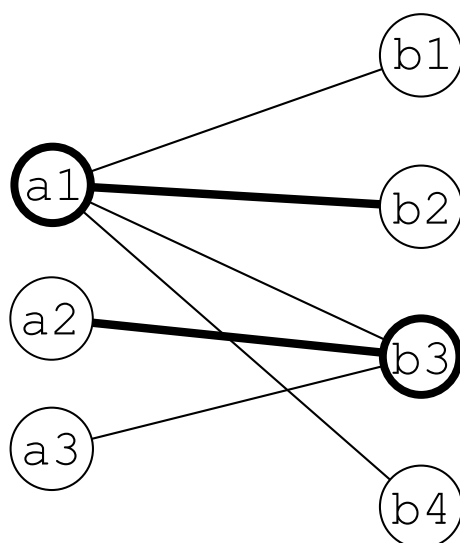
Most belátjuk, hogy a maximális folyam értéke legalább  $k$ . Tegyük fel indirekt módon, hogy a maximális folyam értéke és a minimális vágás kapacitása legfeljebb  $k - 1$ . A minimális vágás csupa új élből áll, mert a minimális vágás élei telítettek, és ez eredeti éllel nem fordulhat elő. A minimális vágás kapacitása a vágás éleinek száma. Ha a vágásnak csak  $k - 1$  éle volna, akkor ennek a  $k - 1$  élnek  $k - 1$  közönséges pont felel meg az eredeti gráfban. A  $k$ -szoros összefüggőség miatt a  $k - 1$  pont kivágása után is létezne a  $\mathcal{G}$  gráfban egy  $S$  irányított út, amelyik  $A$ -ból  $B$ -be vezet.  $S$  képe az új gráfban legyen  $S'$ .  $S'$  a forrásból a nyelőbe vezető irányított út, ami elkerüli a minimális vágás  $k - 1$  élét. De az  $S$  út is áthalad a vágás  $H$  halmazából a  $\overline{H}$ -be, tehát az  $S$  úton lenne a vágásnak még egy éle, ami ellentmondás.

Tehát a maximális folyam értéke legalább  $k$ . Ezek szerint a forrásból legalább  $k$  db olyan él indul, amelyeknek 1 a terhelése. Mindegyik ilyen élből az  $i_1$  és  $i_2$  pontokon keresztül tovább lehet haladni egy másik 1 terhelésű eredeti élre, abból egy harmadikra, és így tovább, mindaddig, amíg meg nem érkezünk a nyelőbe. Egy ilyen út bejárása során nem érkezhetünk korábban már érintett  $i_1$  pontba, mert  $(i_1, i_2)$  kapacitása 1. Ugyanez biztosítja azt is, hogy a forrásból különböző 1-terhelésű élekkel indított utak pont-diszjunktak lesznek. Tehát a maximális egész folyam  $\mathcal{G}$ -beli vetülete is 0 vagy 1 értékű.  $\mathcal{G}$ -ben az 1 terhelésű élek által kifeszített részgráf pont-diszjunkt  $A$ -ból  $B$ -be vezető irányított utakból áll, és ezek száma legalább  $k$ . □

## 3.2. A König-tétel

Ebben az alfejezetben  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  egy irányítatlan páros gráf,  $A$  és  $B$  a két diszjunkt ponthalmaz,  $P = A \cup B$  a pontok,  $E$  az élek halmaza. Például  $A$  lehet egy gimnáziumi osztályból a fiúk halmaza,  $B$  ugyanebből az osztályból a lányoké, és az élek azt jelzik, hogy méretük és egyéb adottságaik folytán melyik fiú melyik lánnyal indulhat egy táncversenyen.

**3.5. Definíció** (független élek). *Egy irányítatlan gráfban két él független, ha nincs*



3.3. ábra. Független élek és lefogó pontok páros gráfban

közös végpontjuk. Éleknek egy  $X$  halmaza akkor független, ha bármely két  $X$ -beli él független. A független élhalmazokat párosításnak nevezzük.

Alapvető feladat, hogy minél több független élt találjunk, tehát maximális párosítást keressünk. A gimnáziumi példában ez azt jelenti, hogy az osztály minél több párt akar a táncversenyen indítani.

**3.6. Definíció** (lefogó pontok). Egy pont lefogja azokat az éleket, melyeknek az egyik végpontja a szóbanforgó pont. Egy  $Q \subset P$  pontrendszer azokat az éleket fogja le, melyeknek legalább az egyik végpontja  $Q$ -ban van.

A  $P$  ponthalmaz nyilvánvalóan lefogja az összes élt. Érdekes feladat az, hogy minél kevesebb ponttal fogjuk le a gráf összes éleit. A gimnáziumi osztállyal kapcsolatos példában ezt úgy lehet elképzelni, hogy egy konkurrens osztály tanulói meg akarják akadályozni, hogy az osztály akár csak egy párt is el tudjon indítani a táncversenyen. Céljukat bizonyos fiúk és lányok bokánrúgásával akarják elérni, és humanitárius okokból minél kevesebb bokarúgással akarják a feladatot megoldani.

A 3.3. ábrán egy páros gráfot látunk. Az  $(a1, b2)$  és  $(a2, b3)$  élek függetlenek, de három független élt nem találunk. Ugyanakkor  $a1$  és  $b3$  két pont, és ezek valamennyi élt lefogják.

A független élek számának maximalizálása illetve a lefogó pontok számának minimalizálása egy tipikus dualitás-szituáció. Most is igaz, hogy a maximumfeladat

célfüggvénye nem haladhatja meg a minimumfeladat célfüggvényét. Ez az állítás nem csak páros gráfokra érvényes.

**3.5. Állítás.** Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf,  $F \subset E$  egy független élekből álló halmaz,  $Q \subset P$  pedig egy lefogó pontrendszer. Ekkor

$$|F| \leq |Q| \quad (3.1)$$

Tehát a független élek maximális száma nem haladhatja meg a lefogó pontok minimális számát.

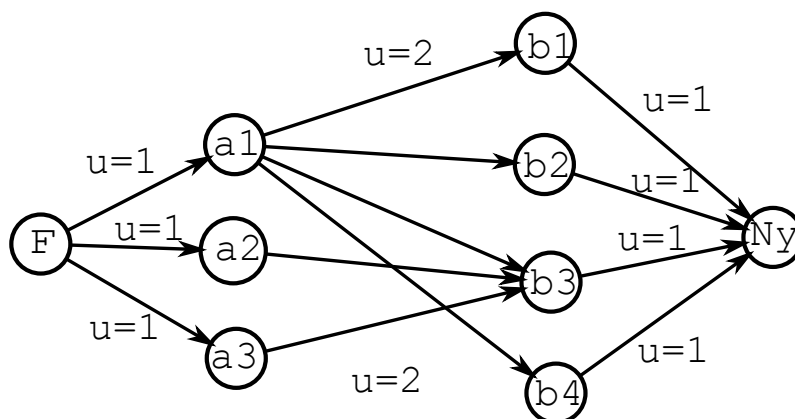
*Bizonyítás.* Pusztán az  $F$ -beli élek lefogásához szükség van annyi pontra, ahány él van  $F$ -ben, mert egy pont sem tud két független élt lefogni, hiszen két független élnek nincs közös végpontja. Valamennyi él lefogásához legalább  $|F|$  db pontra van szükség.  $\square$

A kombinatorika klasszikus eredménye az a Kőnig Dénestől származó tétel ([Kőn31]), mely szerint páros gráf esetén a független pontok maximális száma azonos a lefogó pontok minimális számával. Ezt az eredményt a könyv különböző fejezeteiben különböző módszerekkel fogjuk bizonyítani. Itt természetesen a Ford-Fulkerson-algoritmust használjuk.

**3.5. Tétel (Kőnig Dénes).** Legyen  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  egy irányítatlan páros gráf. Ekkor a független élek maximális száma azonos a lefogó pontok minimális számával.

*Bizonyítás.* Jelöljük a független élek maximális számát  $f_{\max}$ -szal, a lefogó pontok minimális számát  $l_{\min}$ -nel. Készítünk egy  $\mathcal{G}'$  irányított gráfot a következőképpen.  $\mathcal{G}$  éleit  $A$ -ból  $B$ -be irányítjuk, ezek lesznek az eredeti élek. A pontok halmazát kiegészítjük egy  $F$  forrással és egy  $N_y$  nyelővel.  $F$ -ből egy-egy irányított élt indítunk  $A$  pontjaiba,  $B$  pontjaiból pedig egy-egy irányított élt indítunk a nyelőbe. Ezeket hívjuk mesterséges éleknek. Minden mesterséges él kapacitása 1 lesz, az eredeti élek kapacitása pedig 2. A 3.4. ábrán egy páros gráfból származtatott maximális folyam feladatot látunk. A forrásból az  $A$  halmazba mutató illetve a  $B$  halmazból a nyelőbe mutató ún. mesterséges élek kapacitása 1, ugyanakkor valamennyi eredeti él kapacitása 2. Ezekután tekintjük a  $\mathcal{G}'$  gráffal kapcsolatos maximális folyam feladatot.

Az élek kapacitásai egészek, tehát a Ford-Fulkerson-algoritmus egészértékű maximális folyamot ad eredményül. Ezt jelöljük  $x$ -szel.  $x$ -ben minden él terhelése 0



3.4. ábra. Páros gráfhoz rendelt maximális folyam feladat

vagy 1, hiszen mesterséges éleken 1 a felső korlát, eredeti éleken pedig a 2 felső korlát nem érhető el. Ennek az az oka, hogy  $A$ -beli pontban a bemenő összeg legfeljebb 1, ezért a kimenő összeg is legfeljebb 1. Hasonlóan  $B$ -beli pontban a bemenő összeg is legfeljebb 1, tehát az 1 terhelésű eredeti élek függetlenek. Találunk annyi független eredeti élt, amennyi az  $x$  folyam értéke, tehát

$$v(\mathbf{x}) \leq f_{\max}$$

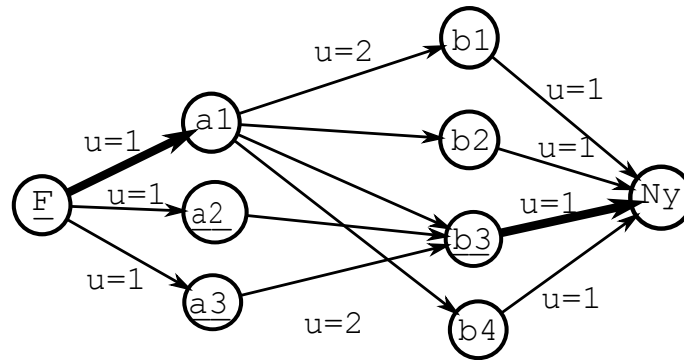
Most belátjuk a fordított irányú egyenlőtlenséget, tehát azt, hogy  $f_{\max} \leq v(\mathbf{x})$ . Legyen  $X \subset E$  egy maximális számú független eredeti élből álló halmaz, és definiáljuk az  $y$  folyamot a következőképpen:

$$y(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \text{ egy } X\text{-beli eredeti él,} \\ 1 & \text{ha } e \text{ F-ből egy } X\text{-beli él } A\text{-beli végpontjába mutat,} \\ 1 & \text{ha } e \text{ egy } X\text{-beli él } B\text{-beli végpontjából Ny-be mutat,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor  $y$  egy lehetséges folyam, aminek az értéke  $X$  éleinek száma. Tehát  $v(\mathbf{x}) \geq v(\mathbf{y}) = f_{\max}$ . Ezek szerint az  $x$  maximális folyam értéke egyenlő a független élek maximális számával.

$$v(\mathbf{x}) = f_{\max}$$

Most megmutatjuk, hogy a minimális vágás kapacitása a lefogó pontok minimális számával azonos. Legyen  $A \cup B = H \cup \overline{H}$  a Ford-Fulkerson algoritmus által szolgáltatott minimális vágás! A vágás élei telítettek, tehát a vágás élei kivétel nélkül



3.5. ábra. Minimális lefogó pontrendszer és minimális vágás

mesterséges élek, mert az eredeti élek terhelése nem éri el a 2-t. A vágás élei vagy  $F$ -ből  $A$ -ba vagy  $B$ -ből  $Ny$ -be mutatnak. A vágás éleinek  $A$ -beli végpontjaiból álló ponthalmaz legyen  $V(A)$ , a vágás éleinek  $B$ -beli végpontjaiból álló ponthalmaz pedig legyen  $V(B)$ ! Azt állítjuk, hogy  $V(A) \cup V(B)$  lefogja az eredeti páros gráf éleit.

Valóban, tegyük fel, hogy  $a \in (A - V(A))$ ,  $b \in (B - V(B))$ , és  $(a, b)$  a  $\mathcal{G}$  gráf éle! Ekkor  $\mathcal{G}'$ -ben elmehetünk a forrásból a nyelőbe az  $\{F, a, b, Ny\}$  útvonal mentén. Eközben a vágás  $H$  halmazából átlépünk  $\bar{H}$ -be, tehát az útvonal három éle közül valamelyik a vágás éle lenne. Ez azonban nem lehetséges, mert a vágás élei telítettek.

Tehát  $V(A) \cup V(B)$  egy lefogó pontrendszer, az ebben lévő pontok száma a minimális vágás éleinek a száma, az pedig a minimális vágás kapacitása, mert a vágás éleinek kapacitása 1. Ezzel beláttuk, hogy

$$l_{\min} \leq u(H \rightarrow \bar{H}) = v(\mathbf{x}) = f_{\max}$$

Ezt a (3.1) egyenlettel összevetve

$$l_{\min} = f_{\max}$$

adódik. □

A 3.5. ábrán a minimális vágás  $H$  halmazának pontjait aláhúzással jelöltük, tehát  $H = \{F, a2, a3, b3\}$ . A vágás élei az  $(F, a1)$  és  $(b3, Ny)$  élek, ezeket vastag nyilak ábrázolják. A vágás éleihez tartozó eredeti pontok –tehát  $a1$  és  $b3$  – egy minimális lefogó pontrendszert alkotnak. Az ábrából kiolvasható a minimális

vágás  $H$  halmazára vonatkozó szabály:

$$H = \mathbf{F} \cup (A - V(A)) \cup V(B) \quad (3.2)$$

$$\overline{H} = V(A) \cup (B - V(B)) \cup \mathbf{N}_y \quad (3.3)$$

Megemlítjük még, hogy nempáros gráf esetén a független élek maximális száma gyakran kisebb a lefogó pontok minimális számánál. Például a 3 pontú teljes gráf esetén  $f_{\max} = 1$ , de  $l_{\min} = 2$ .

### 3.3. Teljes párosítások páros gráfban

A König-tételnek számos híres következménye van, ezeknek egy jelentős része teljes párosításokra vonatkozik.

**3.7. Definíció** (Teljes párosítás). *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráf. Teljes párosításnak nevezzük egy  $X \subset E$  élhalmazt, ha a gráf minden pontja pontosan egy  $X$ -beli élnek végpontja. A teljes párosítást 1-faktornak is szokták nevezni.*

Két  $X$ -beli él ezek szerint nem találkozhat, tehát a teljes párosítás független élekből áll.  $X$  párokba rendezi a gráf pontjait, tehát ilyenkor a pontok száma páros. Egy  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  páros gráf esetén a teljes párosítás  $A$ -beli pontokat  $B$ -beli pontokkal köt össze, állít párba. Ezért ilyenkor  $A$  és  $B$  ugyanannyi pontból áll.  $|A| = |B| = n$  esetén  $(n, n)$ -pontú páros gráfról beszélünk.

**3.8. Definíció** (ponthalmaz szomszédai). *A  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráfban a  $Q \subset P$  ponthalmaz szomszédai azokból a  $Q$ -n kívüli pontokból állnak, melyek  $Q$  valamely pontjával szomszédosak. A  $Q$  halmaz szomszédainak halmazát  $N(Q)$ -val jelöljük.*

$$N(Q) = \{p \in (P - Q) \mid \exists q \in Q, (p, q) \in E\}$$

A következő eredmény szükséges és elégséges feltételt ad arra nézve, hogy egy  $(n, n)$ -pontú páros gráfban létezzen teljes párosítás.

**3.6. Tétel** (Hall-tétel). *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  irányítatlan  $(n, n)$ -pontú páros gráf.  $\mathcal{G}$ -ben pontosan akkor létezik teljes párosítás, ha tetszőleges  $C \subset A$  ponthalmaz esetén*

$$|N(C)| \geq |C|$$



*Bizonyítás.* Ha létezik teljes párosítás akkor ennek az élei  $C$  pontjaihoz ugyanannyi szomszédot biztosítanak a másik oldalról, ahány pontja van  $C$ -nek. Másfelől tegyük fel, hogy  $\mathcal{G}$ -ben nincs teljes párosítás. Ekkor a független élek maximális száma  $n$ -nél kevesebb, tehát a König-tétel miatt a lefogó pontok minimális száma is kisebb, mint  $n$ . Legyen  $C \cup D$  egy minimális lefogó pontrendszer, ahol

$$C \subset A, D \subset B, \text{ és } |C| + |D| < n$$

$A - C$  minden szomszédja  $D$ -ben van, hiszen az  $(A - C)$ -ből induló éleket  $C$  nem tudja lefogni. De  $|A - C| = n - |C| > |D|$ . Ez viszont azt jelentené, hogy az  $A - C$  ponthalmaznak kevesebb szomszédja van, mint ahány pontja, ami ellentmond a tétel feltevésének.  $\square$

Teljes párosítás létezésének elégséges feltétele az, hogy a páros gráf  $k$ -reguláris.

**3.9. Definíció** ( $k$ -reguláris gráf). Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráf, és egy  $k$  pozitív egész szám.  $\mathcal{G}$   $k$ -reguláris, ha minden pont foka  $k$ .

Ha a  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  páros gráf  $k$ -reguláris, akkor  $A$  ugyanannyi pontból áll, mint  $B$ , hiszen az élek száma egyik oldalról  $k \times |A|$ , másik oldalról  $k \times |B|$ .

**3.7. Tétel** (1-faktorok uniója). Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  irányítatlan  $(n, n)$ -pontú páros gráf, és tegyük fel, hogy  $\mathcal{G}$   $k$ -reguláris. Ekkor létezik  $X \subset E$  teljes párosítás, sőt a gráf éleinek halmaza  $k$  darab teljes párosítás uniója.

$$E = X(1) \cup X(2) \cup \dots \cup X(k),$$

ahol  $X(1), X(2), \dots, X(k)$   $k$  darab teljes párosítás.

*Bizonyítás.* Legyen  $C \subset A$  egy ponthalmaz.  $C$ -ből  $k \times |C|$  él indul ki. Ezeket az éleket a másik oldalon legalább  $|C|$  pont fogadja, mert ha ennél kevesebb pont fogadná, akkor lenne olyan pont, amibe legalább  $k + 1$  él fut. Tehát  $C$  szomszédainak száma legalább  $|C|$ . A Hall-tétel szerint van  $X \subset E$  teljes párosítás. Hagyjuk el a gráfból  $X$  éleit, ekkor  $(k - 1)$ -reguláris gráfot kapunk, amire indukcióval alkalmazható a tétel.  $k = 1$  esetén a tétel állítása nyilvánvaló.  $\square$

**3.3. Feladat.**  $k$ -reguláris páros gráfban bizonyítsuk be a teljes párosítás létezését közvetlenül a König-tételből (a Hall-tétel nélkül)!



## 4. fejezet

# Párosítások páros gráfban

Ebben a fejezetben  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  egy irányítatlan páros gráf,  $A$  és  $B$  a két diszjunkt ponthalmaz,  $P = A \cup B$  a pontok,  $E$  az élek halmaza. A gráf párosításainak szisztematikus tanulmányozásával foglalkozunk.  $X$ -szel jelölve egy párosítást megállapíthatjuk, hogy  $X$  független élekből áll, és az  $X$ -beli élek által kifizített részgráfban minden  $P$ -beli pont foka 0 vagy 1.

### 4.1. Optimalitási kritérium

**4.1. Definíció** (fedetlen pont). *Az  $X$  párosítás lefedi a  $p$  pontot, ha  $p \in X$  valamelyik élének végpontja. Ellenkező esetben a  $p$  pont ( $X$  által) fedetlen.*

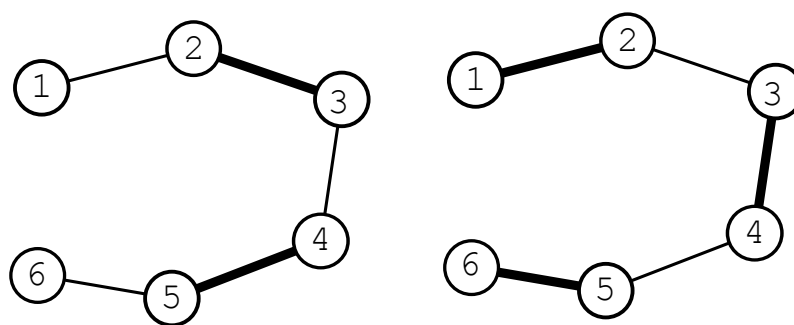
Általában nem fér kétség ahhoz, hogy  $X$  melyik párosítás, ilyenkor egyszerűen fedetlen pontról beszélünk.

**4.2. Definíció** (alternáló út). *Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf,  $X \subset E$  pedig egy párosítás. Egy út  $X$ -alternáló, ha az út élei felváltva  $X$ -hez tartozó illetve  $X$ -en kívüli élek.*

Amikor egyértelmű, hogy melyik párosításról van szó, egyszerűen alternáló útról beszélünk.

**4.3. Definíció** (javító út). *Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf,  $X \subset E$  pedig egy párosítás.  $X$ -javító útnak nevezünk egy olyan alternáló utat, amelyiknek mindkét végpontja ( $X$  által) fedetlen.*

Amikor egyértelmű, hogy melyik párosításról van szó, egyszerűen javító útról beszélünk. Javító út mentén megtehetjük, hogy  $X$  éleit a párosításból kivesszük,



4.1. ábra. Javítás javító út mentén

az  $X$ -en kívüli éleket pedig a párosításba betesszük. Eredményképpen olyan élhalmazt kapunk, ahol továbbra is minden pont foka legfeljebb 1, tehát egy új párosítást kapunk, és ennek az eredeténél eggyel több éle lesz. Figyelemreméltó, hogy az új párosítás élei lefedik mindazokat a pontokat, melyeket a régi párosítás lefedett. A javító útnak fontos tulajdonsága, hogy pontjai az egyik végpontból páros, a másik végpontból pedig páratlan hosszúságú  $X$ -alternáló úttal érhetőek el. A 4.1. ábra a javítás folyamatát ábrázolja. Az ábrán a párosítás éleit vastag vonallal, a többi élt vékony vonallal jelöljük. Baloldalon az 1-es és a 6-os pont fedetlen, ezeket egy  $X$ -alternáló út köti össze. Az út mentén felcseréljük az  $X$ -beli és az  $X$ -en kívüli éleket, így kapjuk a jobboldalon látható új párosítást. Az új párosításban eggyel több él van, mint a régiben. Az új párosítás élei lefedik mindazokat a pontokat, melyeket a régi párosítás lefedett.

Most megfogalmazunk egy optimalitási kritériumot, ami nem csak páros gráfban érvényes, ezért a 6. fejezetben is használni fogjuk.

**4.1. Tétel** (Optimalitási kritérium). *Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf,  $X \subset E$  pedig egy párosítás.  $X$  pontosan akkor maximális, ha a  $\mathcal{G}$  gráfban nem létezik  $X$ -javító út.*

*Bizonyítás.* Ha van  $X$ -javító út, akkor ezen az úton az  $X$ -beli és az  $X$ -en kívüli éleket felcserélve olyan új párosítást kapunk, aminek 1-gyel több éle van, tehát  $X$  nem volt maximális.

Másfelől tegyük fel, hogy  $X$  nem maximális, ezért létezik olyan  $Y$  párosítás, melynek több éle van, tehát

$$|X| < |Y|$$

Jelöljük  $\mathcal{G}'$ -vel az  $X \cup Y$  élhalmaz által feszített részgráfot! Ez a részgráf biztosan nem összefüggő, ha  $X$ -nek és  $Y$ -nak van közös éle, mert minden ilyen  $e$  él  $\mathcal{G}'$ -

ben egy két pontból és egy élből álló összefüggő komponens.  $\mathcal{G}'$ -ben minden pont foka legfeljebb 2, hiszen a foksámhoz  $X$  és  $Y$  egyaránt legfeljebb 1-gyel tud hozzájárulni. Ha egy pont foka 2, akkor ebben a pontban 1 db  $X$ -beli és 1 db  $Y$ -beli él találkozik. Mindezt összevetve a  $\mathcal{G}'$  gráf mindegyik összefüggő komponense az alábbi három típus valamelyikébe tartozik.

- 1) szeparált  $e$  él, ahol  $e \in X \cap Y$
- 2) páros hosszúságú  $X - Y$  - alternáló kör
- 3)  $X - Y$  - alternáló út

A szeparált él  $X$ -ben és  $Y$ -ban is benne van, ezért egyik végpontjához sem csatlakozhat sem  $X$ -beli, sem  $Y$ -beli él. Az  $X - Y$ -alternáló kör és út élei felváltva vannak  $X$ -ben illetve  $Y$ -ban. Hangsúlyozzuk, hogy egy  $X - Y$ -alternáló kör az alternálás ténye miatt akkor is páros hosszúságú, ha egyébként a gráf nempáros.

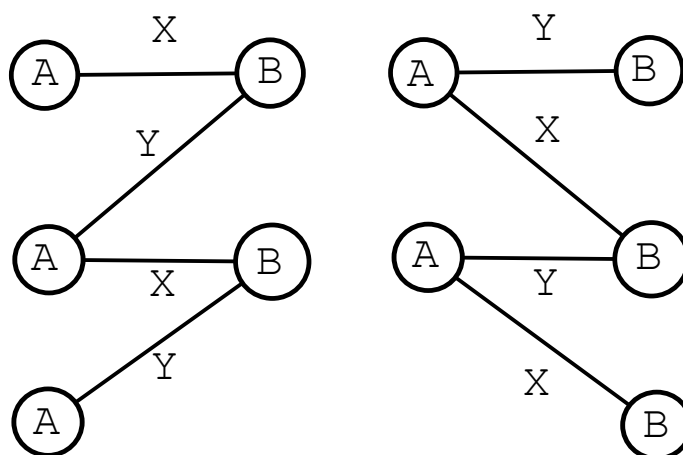
Az első két típusú részgráfban  $X$ -nek és  $Y$ -nak ugyanannyi éle van. Ezért  $|X| < |Y|$  csak a harmadik típusban teljesülhet, mégpedig úgy, hogy egy  $X - Y$ -alternáló út összefüggő komponens  $\mathcal{G}'$ -ben, és az út mindkét végén  $Y$ -beli él található. Ekkor ennek az útnak mindkét végpontja  $X$  által fedetlen, tehát az út  $X$ -javító.  $\square$

Egy fontos következményt említünk, amelyik az optimalitási kritériumhoz hasonlóan nemcsak páros gráfban érvényes.

**4.1. Következmény.** Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf,  $X \subset E$  pedig egy párosítás. Ekkor létezik  $\mathcal{G}$ -ben olyan  $X^*$  maximális párosítás, amelyik lefedi az  $X$  által fedett pontokat. Ha  $i \in P$  nem izolált pont (, tehát létezik belőle kiinduló él), akkor létezik  $\mathcal{G}$ -ben olyan  $X^*$  maximális párosítás, amelyik az  $i$  pontot lefedi.

*Bizonyítás.* A javító út mentén történő javítások során az új párosítás lefedi a régi által fedett pontokat, ugyanakkor több éle van, mint az előzőnek. Javító utak mentén történő javítások során előbb-utóbb maximális  $X^*$  párosításhoz jutunk (ld. 4.1. tétel). Az állítás második része abból következik, hogy ha  $i$  nem izolált, akkor létezik  $i$ -ből induló él. Egy ilyen él lehet az  $X$  párosítás.  $\square$

Tehát eljutottunk odáig, hogy ha valaki (egy pont) bekerült egy párosításba, akkor maximális párosításba is be tud kerülni. Ehhez hasonló eredmény következik, ezúttal kimondottan páros gráfokra.



4.2. ábra. X-Y alternáló utak

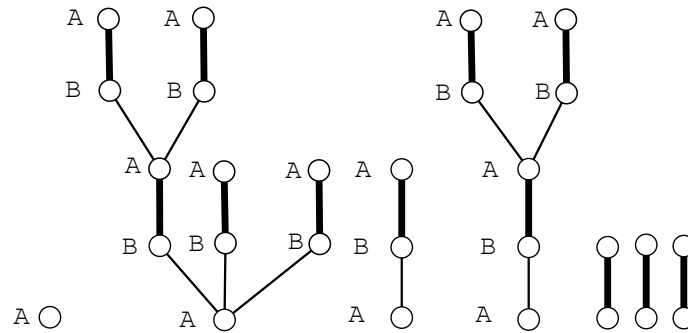
**4.2. Tétel (Mendelsohn-Dulmage).** *Legyen adott egy  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  irányítatlan páros gráf, valamint  $X$  és  $Y$  két párosítás. Ekkor létezik olyan  $Z \subset X \cup Y$  párosítás amelyik lefedi az  $X$  által fedett  $A$ -beli és az  $Y$  által fedett  $B$ -beli pontokat.*

*Bizonyítás.* A 4.1. tétel bizonyításához hasonlóan tekintsük az  $X \cup Y$  élhalmaz által kifizített  $\mathcal{G}'$  részgráf összefüggő komponenseit. Mindegyik komponensben választani fogunk  $X$  és  $Y$  közül úgy, hogy a kiválasztott párosítás élei az adott komponensben lefedjék az  $X$  által fedett  $A$ -beli és az  $Y$  által fedett  $B$ -beli pontokat. A kiválasztott párosítás komponensbeli élei alkotják az adott komponensben a  $Z$  párosítást. Ugyanúgy, mint a 4.1. tétel bizonyításában, megállapíthatjuk, hogy mindegyik komponens az alábbi három típus valamelyikéhez tartozik.

- 1) szeparált  $e$  él, ahol  $e \in X \cap Y$
- 2) páros hosszúságú  $X - Y$  - alternáló kör
- 3)  $X - Y$  - alternáló út

Az első két típusnál  $X$  élei lefedik valamennyi  $Y$  által fedett pontot, és fordítva, tehát mindegy, hogy  $X$  és  $Y$  közül melyiket választjuk. Amikor az összefüggő komponens egy  $X - Y$ -alternáló út, akkor előfordulhat, hogy az út mindkét végén  $X$ -beli él áll, vagy az út mindkét végén  $Y$  éle található. Az első esetben  $Z = X$  a helyes választás, mert  $X$  élei egy ilyen komponensben valamennyi  $Y$  által fedett pontot lefedik. Hasonlóan a második esetben  $Z = Y$  a helyes választás.

Már csak az a két eset maradt hátra, amikor az összefüggő komponens egy  $X - Y$ -alternáló út, melynek az egyik végén  $X$ -beli, a másik végén  $Y$ -beli él

4.3. ábra.  $X$ -alternáló fák

áll. A 4.2. ábra bal oldalán látható esetben  $Z = X$ -et kell választani, mert  $X$  élei az adott komponensben lefedik az  $Y$  által fedett  $B$ -beli pontokat. Az ábra jobb oldalán látható esetben  $Y$  élei fedik le az adott komponensben  $X$  által fedett  $A$ -beli pontokat, tehát  $Z = Y$  a helyes választás.  $\square$

Megemlítjük következő alkalmazást:  $A$  a munkavállalók,  $B$  a feladatok halmaza. A szakszervezet sorba rendezi a munkavállalókat, és a sor elejéről akar foglalkoztatni annyit, amennyi csak lehetséges. A cégvezetés a feladatokat rendezi sorba, és ennek a sornak az elejéről akar minél több feladatot kiosztani. Ekkor van olyan maximális párosítás, amelyik a szakszervezeteknek és a cégvezetésnek is megfelel.

**4.4. Definíció** ( $X$ -alternáló fa). Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf,  $X \subset E$  pedig egy párosítás.  $X$ -alternáló fának nevezzük egy fát, ha

*A fában pontosan egy  $X$  által fedetlen pont van, ez a gyökér.*

*A fa bármely másik pontjából a gyökérbe vezető út  $X$ -alternáló.*

A 4.3. ábrán 4 db  $X$ -alternáló fát (és még 3  $X$ -beli élt) láthatunk. A párosítás éleit vastag vonallal, a többi élt vékony szaggatott vonallal jelöljük. A négy  $X$ -alternáló fa, 4 db  $A$ -beli fedetlen pontban gyökerezik. Balról az első pusztán a gyökérből áll. A második 11 pontból és 10 élből áll. Ebben a fában a párosításnak 5 éle található, és a  $B$ -beli pontok száma is 5.

## 4.2. Maximális párosítás páros gráfban algoritmus

Az a cél, hogy találjunk maximális számú független élt és minimális számú lefogó pontot. Az algoritmus egy tetszőleges  $X$  párosítással indul. Ha  $A$ -ban nincs  $X$  által fedetlen csúcs, a párosítás maximális, és az  $A$  halmaz egy minimális lefogó pontrendszer. Egyébként mindegyik  $A$ -beli fedetlen csúcshoz összegyűjtjük, és megcímkézzük azokat a csúcsokat, ahova  $X$ -alternáló úton el lehet jutni. Ha  $B$ -beli fedetlen csúcshoz jutunk, akkor van javító út.  $A$ -beli fedetlenhez nem jutunk, mert  $B$ -ből  $A$ -ba mindig párosítás-éllal jövünk vissza. Ha nem jutunk  $B$ -beli fedetlenhez, és nem lehet már új csúcsot megcímkézni, akkor minden  $A$ -beli fedetlen pontból, mint gyökérből, felépült egy  $X$ -alternáló fa. (A címkézés során mindig olyan csúcsba megyünk, amelyik még nem volt megcímkézve). Ezeknek a fának a csúcsei vannak megcímkézve, a többi címkézetlen. Ilyenkor már nincs  $X$ -javító út, tehát  $X$  egy maximális párosítás. Az  $A$ -beli fákon kívüli csúcsok, valamint a  $B$ -beli valamelyik fához tartozó csúcsok minimális lefogó rendszert alkotnak.

### 4.1. Algoritmus (Maximális párosítás páros gráfban).

Start:  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  a páros gráf,  $X$  egy tetszőleges párosítás.

Egyik csúcs sincs megcímkézve. Egyik csúcs sem vizsgált.

1) Valamennyi  $A$ -beli ( $X$  által) fedetlen csúcs megkapja a  $Gy$  címkét (gyökér). Ha nincs ilyen csúcs, a 3b) pontra megyünk. Egyébként  $i$  legyen egy ilyen csúcs.

2a) Megvizsgáljuk az  $i$  csúcsot ( $i \in A$ ) a következőképpen:

Valamennyi  $(i, j) \in X$  élre, ahol  $j$  még címkézetlen

-Ha  $j$  fedetlen, a  $j$  csúcs az  $i$  címkét kapja, és 3a) következik.

-Ha  $j$  fedett, a  $j$  az  $i$  címkét kapja, és a  $j$ -t fedő  $X$ -beli él másik ( $A$ -ban lévő)  $k$  végpontja a "j" címkét kapja.

Ezután az  $i$  csúcsot „vizsgált”nak nyilvánítjuk.

2b) Keresünk egy  $i \in A$  címkézett, de még vizsgálatlan csúcsot, és visszatérünk a 2a) lépésre.

Ha nincs  $A$ -beli címkézett, de vizsgálatlan csúcs,



akkor 3b) következik.

3a) (Javítás) Találtunk egy javító utat, ami  $B$ -ben végződik.

Ezt a  $j$  csúcsból a címkék szerint visszalépve kapjuk meg, az út kezdő csúcsának címkéje  $Gy$ . Elvégezzük a javítást. Minden csúcstól elveszük a címkét. Egyik csúcs sem vizsgált. Az 1) lépés következik.

3b) (Optimum) A címkézés befejeződött, nincs javító út, az aktuális  $X$  párosítás maximális.

Legyen  $C \subset A \cup B$  a címkével ellátott csúcsok halmaza.

Ekkor  $Q = (A - C) \cup (B \cap C)$  egy minimális lefogó pontrendszer,

STOP

**4.3. Tétel.** *A maximális párosítás algoritmus tetszőleges páros gráf és induló párosítás esetén véges számú lépésben véget ér. Az utolsó  $X$  párosítás maximális.  $C$ -vel jelölve az algoritmus végén megcímkézett pontok halmazát, a*

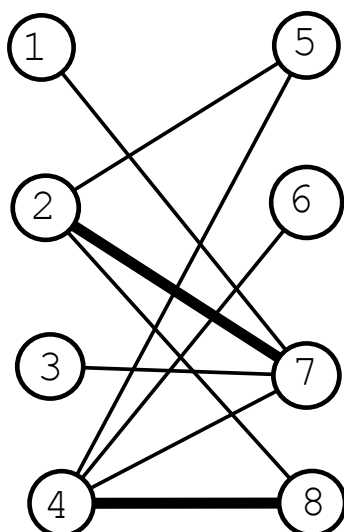
$$Q = (A - C) \cup (B \cap C)$$

*ponthalmaz egy minimális lefogó pontrendszer.*

*Bizonyítás.* A 3a) pontban a párosítás éleinek száma eggyel nő, ezért csak véges sokszor futunk rá a 3a) pontra. Két javítás között legfeljebb annyiszor futunk a 2a) pontra, ahány pontja van a gráfnak. Tehát az algoritmus véges számú lépés után a 3b) lépéssel ér véget. Most megmutatjuk, hogy a  $Q$  ponthalmaz lefogja a gráf összes élet. Ha  $Q$  nem fog le egy  $e = (i, j)$  élt, akkor  $i$   $A$ -beli címkézett pont, és  $j$  pedig  $B$ -beli címkézetlen. Ez viszont azt jelentené, hogy az  $i$  csúcs vizsgálatakor  $j$  nem kapott címkét, ami ellentmondás.

Másfelől megmutatjuk, hogy az utolsó  $X$  párosításnak legalább annyi éle van, mint ahány pontból áll a  $Q$  ponthalmaz.  $A - C$  minden pontja fedett, mert  $A$ -ban az  $X$  által fedetlen pontok megkapják a Gyökér címkét.  $A - C$  különböző pontjait a párosítás különböző élei fedik le, tehát  $(A - C)$ -ből a párosításnak  $|A - C|$  db éle indul ki.  $(B \cap C)$  pontjai is fedettek, mert az algoritmus végén már nincs javítás, ezért  $B$ -beli fedetlen pont nem kaphatott címkét.  $(B \cap C)$ -ből a párosításnak  $|B \cap C|$  db éle indul ki, és ezek egyike sem fut  $(A - C)$ -be, mert az algoritmus szerint az él másik végpontja is címkét kap, vagy már korábban címkét kapott. Ezzel beláttuk, hogy

$$|Q| \leq |X|$$



4.4. ábra. Példa a maximális párosítás algoritmusra

Ezt összevetve a 3.1 egyenlőtlenséggel

$$|Q| = |X|$$

adódik, tehát a párosítás maximális, a lefogó pontrendszer pedig minimális.  $\square$

**4.1. Feladat.** Kövessük végig a maximális párosítás algoritmust a 4.4. ábrán látható páros gráf esetén! Induláskor legyen  $X = \{(2, 7), (4, 8)\}$ . Rajzoljuk fel az  $X$ -alternáló fákat!

### 4.3. A párosítás és teljes párosítás politópok

**4.5. Definíció** (Párosítás politóp). A  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  irányítatlan páros gráf párosítás politópjának nevezzük a következő egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát

$$x(e) \geq 0 \mid e \in E \quad (4.1)$$

$$\sum_{p \in e} x(e) \leq 1 \mid p \in A \cup B \quad (4.2)$$

A párosítás politópot  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ -vel jelöljük.

Tehát minden élhez tartozik egy nemnegatív változó. Minden csúcsra összegezzük a csúcsból kiinduló élekhez tartozó változók értékeit, és az így kapott csúcsösszeg nem lehet nagyobb 1-nél.  $n$  csúcs és  $m$  él esetén  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$   $n + m$  db féltér metszete, tehát egy konvex halmaz  $\mathbb{R}^m$ -ben. Minden változó 0 és 1 között van,

hiszen egyik csúcsösszeg sem lehet 1-nél nagyobb, ezért a konvex halmaz korlátos, tehát poliéder. A párosítás politóp feltételrendszere hagyományos alakban a következő:

$$x_{ij} \geq 0 \mid (i, j) \in E \quad (4.3)$$

$$\sum_{j, (i,j) \in E} x_{ij} \leq 1 \mid i \in A \quad (4.4)$$

$$\sum_{i, (i,j) \in E} x_{ij} \leq 1 \mid j \in B \quad (4.5)$$

Nevezetes tény, hogy páros gráf esetén ennek a poliédernek az extrémális pontjai (csúcsai) egészek, tehát  $m$  dimenziós  $0 - 1$  vektorok, ráadásul a  $\mathcal{G}$  gráf párosításainak a karakterisztikus vektorai. Ezt a tényt röviden úgy mondjuk, hogy  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$  csúcsai a párosítások.

**4.1. Állítás.** *Legyen  $\mathcal{G}$  egy irányítatlan páros gráf. Egy  $\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$  vektor nem extrémális pontja a párosítás politópnak, ha létezik olyan  $e$  él, hogy*

$$0 < x(e) < 1 \quad (4.6)$$

*Bizonyítás.* Tetszőleges  $p$  pont csúcsösszegét jelöljük  $s(p)$ -vel!

$$s(p) = \sum_{p \in e} x(e)$$

Jelöljük továbbá  $\mathcal{G}'$ -vel azt a részgráfot, melyet a (4.6) feltételnek eleget tevő  $e$  élek feszítenek ki! Ezeket az éleket röviden tört-éleknek fogjuk nevezni.

Ha egy  $e$  tört-él befut a  $p$  pontba, és  $s(p) = 1$ , akkor  $p$  egy másik tört-élnak is végpontja, tehát  $p$ -ből tovább lehet menni egy másik tört-élen. Legyen ez a másik tört-él  $f = (p, q)$ ! Ha  $s(q)$  értéke is 1, akkor a  $q$  pontból is tovább lehet menni egy újabb tört-élen, és így tovább. Tehát vagy találunk olyan tört-élekből álló kört, melynek minden pontjában  $s(p) = 1$ , vagy  $\mathcal{G}'$ -nek valamelyik összefüggő komponense tört-élekből álló élsorozat, melynek a belső pontjaiban  $s(p) = 1$ , de a két végpontjában a csúcsösszeg 1-nél kisebb (a két végpont azonos is lehet). A kör esetén legyen

$$y(e) = x(e) + \varepsilon, \text{ ha } e \text{ a kör páros sorszámú éle,}$$

$$y(e) = x(e) - \varepsilon, \text{ ha } e \text{ a kör páratlan sorszámú éle,}$$

$$y(e) = x(e) \text{ egyébként}$$

Legyen továbbá

$$z(e) = x(e) - \varepsilon, \text{ ha } e \text{ a kör páros sorszámú éle,}$$

$$z(e) = x(e) + \varepsilon, \text{ ha } e \text{ a kör páratlan sorszámú éle,}$$

$$z(e) = x(e) \text{ egyébként}$$

Itt felhasználtuk azt, hogy páros gráfban minden kör hossza páros. Elegendően kicsi pozitív  $\varepsilon$  esetén  $y$  és  $z$  egyaránt benne van a párosítás politópban, ugyanakkor

$$\mathbf{x} = (\mathbf{y} + \mathbf{z})/2$$

tehát  $\mathbf{x}$  nem lehet extrémális pont.

Ugyanezt a konstrukciót használhatjuk abban az esetben, ha olyan tört-élekből álló élsorozatot találtunk, melynek a belső pontjaiban  $s(p) = 1$ , de a két végpontjában a csúcsösszeg 1-nél kisebb. Legyen tehát

$$y(e) = x(e) + \varepsilon, \text{ ha } e \text{ az élsorozat páros sorszámú éle,}$$

$$y(e) = x(e) - \varepsilon, \text{ ha } e \text{ az élsorozat páratlan sorszámú éle,}$$

$$y(e) = x(e) \text{ egyébként}$$

továbbá

$$z(e) = x(e) - \varepsilon, \text{ ha } e \text{ az élsorozat páros sorszámú éle,}$$

$$z(e) = x(e) + \varepsilon, \text{ ha } e \text{ az élsorozat páratlan sorszámú éle,}$$

$$z(e) = x(e) \text{ egyébként}$$

Elegendően kicsi pozitív  $\varepsilon$  esetén az élsorozat végpontjaiban az 1-nél kisebb csúcsösszeg 1-nél kisebb marad, belső pontban pedig nem változik. Tehát kis epszilonna  $y$  és  $z$  egyaránt benne van a párosítás politópban, ugyanakkor

$$\mathbf{x} = (\mathbf{y} + \mathbf{z})/2$$

ami azt jelenti, hogy  $\mathbf{x}$  ezúttal sem lehet extrémális pont.

□

**4.4. Tétel** (A párosítás politóp csúcsai). *Legyen  $\mathcal{G}$  egy irányítatlan páros gráf. A  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$  párosítás politóp extrémális pontjai a gráf párosításainak karakterisztikus vektorai.*

*Bizonyítás.* Legyen  $X$  egy párosítás  $\mathcal{G}$ -ben,  $x$  pedig a párosítás karakterisztikus vektora, tehát

$$x(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in X \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor  $x$  benne van a párosítás politópban, hiszen nemnegatív, és minden csúcsösszeg legfeljebb 1 (két párosításbeli él nem találkozhat egy pontban). Tegyük fel, hogy  $y \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ ,  $z \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ , és

$$x = (y + z)/2$$

Két különböző 0 és 1 közötti szám számtani közepe egyfelől pozitív, másfelől 1-nél kisebb, tehát  $y$  és  $z$  nem lehetnek különbözőek. Ezért  $y = z = x$ , tehát  $x$  a politóp extrémális pontja.

Tegyük fel most fordítva, hogy  $x$  a párosítás politóp extrémális pontja! Az előző állítás szerint  $x$  egész, tehát  $x(e) = 0$  vagy 1 minden  $e \in E$  esetén. Tekintsük a

$$X = \{e \in E \mid x(e) = 1\}$$

élhalmazt! Ez egy párosítás, mert ha  $X$  két éle egy csúcsban találkozna, akkor ott a csúcsösszeg értéke legalább 2 volna. Tehát  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$  minden csúcsa egy párosítás (karakterisztikus vektora).  $\square$

A most bizonyított tétel azért nagyjelentőségű, mert lineáris programozásból közismert, hogy ha egy LP feladat lehetséges halmaza korlátos, akkor amellet, hogy a feladatnak van optimális megoldása, optimális csúcs is létezik (ld. A függelék). A  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$  poliéder korlátos, tehát a megfelelő LP feladatnak van olyan optimális megoldása is, amelyik extrémális pont, ezért egész, sőt egy párosítás (karakterisztikus vektora).

**4.6. Definíció** (Teljes párosítás politóp). *A  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  egy  $(n, n)$  pontú irányítatlan páros gráf. A gráf teljes párosítás politópjának nevezzük a következő egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát*

$$x(e) \geq 0 \mid e \in E \tag{4.7}$$

$$\sum_{p \in e} x(e) = 1 \mid p \in A \cup B \tag{4.8}$$

A teljes párosítás politópot  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ -vel jelöljük.

Tehát minden élhez tartozik egy nemnegatív változó. Minden csúcsra összegezzük a csúcsba futó élekhez tartozó változók értékeit, és az így kapott csúcsösszeg értéke 1.  $n$  darab  $A$ -beli csúcs,  $n$  darab  $B$ -beli csúcs és  $m$  él esetén  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$   $m$  db féltér és  $2n$  db (hiper)sík metszete, tehát egy konvex halmaz  $\mathbb{R}^m$ -ben. Minden változó 0 és 1 között van, hiszen mindegyik csúcsösszeg 1, ezért a konvex halmaz korlátos, tehát poliéder. A teljes párosítás politóp feltételrendszere hagyományos alakban a következő:

$$x_{ij} \geq 0 \mid (i, j) \in E \quad (4.9)$$

$$\sum_{j, (i,j) \in E} x_{ij} = 1 \mid i \in A \quad (4.10)$$

$$\sum_{i, (i,j) \in E} x_{ij} = 1 \mid j \in B \quad (4.11)$$

Nevezetes tény, hogy páros gráf esetén ennek a poliédernek az extrémális pontjai (csúcsai) is egészek, tehát  $m$  dimenziós 0–1 vektorok, ráadásul a  $\mathcal{G}$  gráf teljes párosításainak a karakterisztikus vektorai. Ezt a tényt röviden úgy mondjuk, hogy  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  csúcsai a teljes párosítások.

**4.2. Állítás.** *Legyen  $\mathcal{G}$  egy  $(n, n)$  pontú irányítatlan páros gráf. Egy  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$  vektor nem extrémális pontja a teljes párosítás politópnak, ha létezik olyan  $e$  él, hogy*

$$0 < x(e) < 1 \quad (4.12)$$

*Bizonyítás.* A bizonyítás ugyanúgy történik, mint a 4.1 állítás bizonyítása, sőt még egyszerűbb, mert jelenleg minden csúcsösszeg értéke 1, ezért a tört-élek által kifeszített gráfban biztosan van tört-élekből álló kör. A részletek végiggondolását az olvasóra bízunk.  $\square$

**4.5. Tétel** (A teljes párosítás politóp csúcsai). *Legyen  $\mathcal{G}$  egy  $(n, n)$  pontú irányítatlan páros gráf. Az  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  teljes párosítás politóp extrémális pontjai a gráf teljes párosításainak karakterisztikus vektorai.*

*Bizonyítás.* Legyen  $X$  egy teljes párosítás  $\mathcal{G}$ -ben,  $\mathbf{x}$  pedig a párosítás karakterisztikus vektora, tehát

$$x(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in X \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor  $x$  benne van a teljes párosítás politópban, hiszen nemnegatív, és minden csúcsösszeg 1 (a párosítás minden csúcsot lefed). Tegyük fel, hogy  $y \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ ,  $z \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ , és

$$x = (y + z)/2$$

Két különböző 0 és 1 közötti szám számtani közepe egyfelől pozitív, másfelől 1-nél kisebb, ugyanakkor  $x$  mindegyik koordinátája 0 vagy 1, tehát  $y$  és  $z$  nem lehetnek különbözőek. Ezért  $y = z = x$ , tehát  $x$  a politóp extrémális pontja.

Tegyük fel most fordítva, hogy  $x$  a párosítás politóp extrémális pontja! Az előző állítás szerint  $x$  egész, tehát  $x(e) = 0$  vagy 1 minden  $e \in E$  esetén. Tekintsük az

$$X = \{e \in E \mid x(e) = 1\}$$

élhalmazt! Ez egy teljes párosítás, mert minden csúcsösszeg 1. Tehát  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  minden csúcsa egy teljes párosítás (karakterisztikus vektora).  $\square$

Megjegyezzük, hogy egy  $(n, n)$  pontú páros gráf esetén a teljes párosítás politóp üres is lehet. Amikor a teljes párosítás politóp nemüres, minden lineáris célfüggvénynek van optimuma az  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  poliéderen (a poliéder korlátos). A most bizonyított tételnek az a jelentősége, hogy a megfelelő LP feladatnak olyan optimális megoldása is van, amelyik egész, tehát egy teljes párosítás (karakterisztikus vektora).

**4.2. Feladat.** *Adjunk meg olyan  $(2, 2)$  pontú páros gráfot, ahol a teljes párosítás politóp üres!*

**4.3. Feladat** (Birkhoff, von Neumann-tétel). *Mutassuk meg, hogy minden duplán sztochasztikus mátrix permutáció-mátrixok konvex kombinációja. (Egy  $n \times n$ -es mátrix duplán sztochasztikus, ha elemei nemnegatívak, valamint minden sorban és oszlopban az elemek összege 1. Permutáció-mátrix minden sorában és oszlopában pontosan egy 1-es áll, a többi elem 0.)*

Útmutatás: Azt igazoljuk, hogy a duplán sztochasztikus mátrixokból álló poliédernek az extrémális pontjai a permutáció-mátrixok!

**4.4. Feladat.** *Írjuk fel azt a poliédert, melynek extrémális pontjai a páros gráf éleit lefogó pontrendszerek (karakterisztikus vektorai)!*





## 5. fejezet

# Súlyozott párosítások páros gráfban

Minden  $e = (i, j)$  élnek van egy  $w(e) = w_{ij} \geq 0$  súlya ( $i \in A, j \in B$ ). Élhalmaz súlyát a benne szereplő élek súlyainak összegeként határozzuk meg, tehát  $X \subset E$  esetén

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e)$$

Súlyokkal ellátott páros gráfokat egyszerűen megadhatunk számtáblázattal. A táblázat sorai az  $A$  ponthalmaz elemeinek, az oszlopok pedig a  $B$  ponthalmaz elemeinek felelnek meg. A cellák az élek, az él súlya a cellában látható szám. A nemlétező éleknek megfelelő cellákat üresen hagyjuk. Az 5.1. táblázat egy  $(4, 4)$  pontú teljes páros gráfot mutat az élek súlyaival együtt. A bekeretezett celláknak megfelelő élek egy teljes párosítást alkotnak.

### 5.1. Maximális összsúlyú párosítás

Olyan  $X$  párosítást keresünk, melynek az összsúlya maximális az összes párosítás között. Ehhez először minden  $k$ -ra meghatározunk egy  $k$  élű maximális párosítást, majd ezek közül a legnagyobb összsúlyú lesz az  $X$  párosítás.

5.1. táblázat.  $(4, 4)$  pontú teljes páros gráf súlyokkal

5	4	7	2
5	3	6	4
4	6	7	4
5	3	5	4

### 5.1.1. algoritmus

Olyan  $X(1), X(2), \dots, X(k)$  párosításokat készítünk, hogy minden  $k$ -ra  $X(k)$   $k$  db élből áll, és a  $k$  élű párosítások között maximális összsúlyú (azaz extrémális).

#### 5.1. Algoritmus (Primál algoritmus).

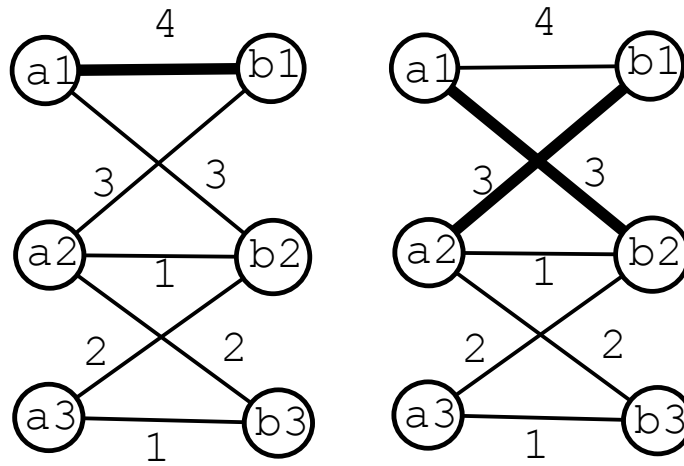
- 1)  $X(1) =$  egy maximális súlyú él.  $k = 1$
- 2) Ha  $X(k)$  adott, úgy irányítjuk a gráfot, hogy  $X(k)$  élei  $A$ -ból  $B$ -be mutatnak, a hosszuk  $w(e)$ , a többi él  $B$ -ből  $A$ -ba mutat, ezek hossza  $-w(e)$ .
- 3a) Ha van fedetlen  $B$ -beli pontból fedetlen  $A$ -beli pontba vezető irányított út, akkor ezek közül egy minimális hosszúságút keresünk (ez nyilván  $X(k)$ -alternáló és javító), ennek az élhalmaza legyen  $F$ .  

$$X(k+1) = X(k) \otimes F$$
 (tehát  $X(k)$  és  $F$  szimmetrikus differenciája irányítatlanul).  
 $k$ -t eggyel növeljük, a 2) pont következik.
- 3b) Ha nincs fedetlen  $B$ -beli pontból fedetlen  $A$ -beli pontba vezető irányított út, akkor  $k+1$  élű párosítás nem létezik.  
 STOP

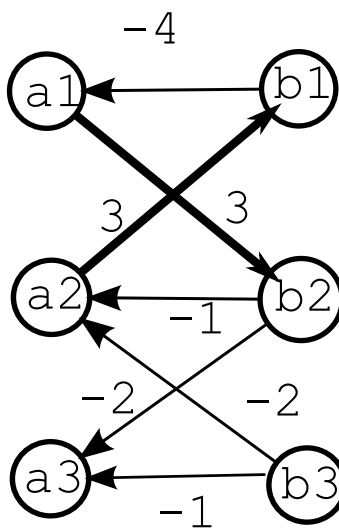
Az eredeti feladat létszámkorlát nélkül a legnagyobb összsúlyú párosítás megtalálása volt. Ezt úgy kapjuk, hogy az  $X(1), X(2), \dots, X(k)$  párosítások közül kiválasztjuk a legnagyobb összsúlyút.

Példaként tekintsük az 5.1. ábrán látható  $(3, 3)$ -pontú páros gráfot az élek mellé írt súlyokkal! Az élekre írt számok az él súlyát jelölik. Ezen az ábrán  $X(1)$  és  $X(2)$  látható, a párosítások éleit vastag vonalak mutatják. ( $X(2)$   $X(1)$ -ből a  $b_2 \rightarrow a_1 \rightarrow b_1 \rightarrow a_2$  javító út mentén történő javítással készült.)  $k = 2$  esetén az 5.2. ábra mutatja az algoritmus szerinti irányított gráfot. Itt  $b_3$  az egyetlen  $B$ -beli,  $a_3$  pedig az egyetlen  $A$ -beli fedetlen pont. Az egyetlen  $b_3 \rightarrow a_2 \rightarrow b_1 \rightarrow a_1 \rightarrow b_2 \rightarrow a_3$  szóbajövő javító út a legrövidebb. Ennek a hossza  $-2 + 3 - 4 + 3 - 2 = -2$ . Ezért a javítás után  $w(X(3)) = w(X(2)) - (-2) = 6 + 2 = 8$ . A végeredmény az 5.3. ábrán látható.

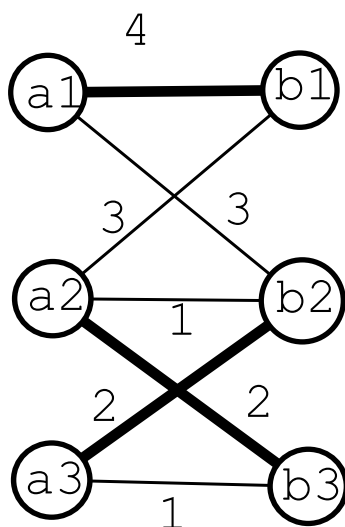
**5.1. Tétel.** Ha az 5.1. algoritmusban  $X(k)$  extrémális volt, akkor  $X(k+1)$  is extrémális.



5.1. ábra. Példa a primál algoritmusra



5.2. ábra. Irányított gráf a primál algoritmusban  $k = 2$  esetén



5.3. ábra. Maximális összsúlyú párosítás

*Bizonyítás.* Az irányított gráfban jelöljük  $s(e)$ -vel egy él hosszát!

$$s(e) = \begin{cases} w(e) & \text{ha } e \in X(k) \text{ a párosítás éle} \\ -w(e) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egy  $H$  élsorozat hosszát az egyes élek előjeles hosszainak összegeként értelmezzük, és  $s(H)$ -val jelöljük.

$$s(H) = \sum_{e \in H} s(e)$$

Kezdjük azzal, hogy az irányított gráfban nincs negatív **hosszúságú** kör, mert  $X(k)$  extrémális (Egy körben az  $X(k)$ -beli élek összsúlya legalább akkora, mint az  $X(k)$ -n kívüli élek összsúlya). Tehát ha van fedetlen  $B$ -beli pontból fedetlen  $A$ -beli pontba vezető irányított út, akkor az ilyen utak között létezik minimális hosszúságú.

Legyen  $Y$  tetszőleges  $k + 1$  elemű párosítás.  $X(k) \cup Y$ -nak van olyan  $U$  komponense, ami  $X(k)$ -javító út.  $Y \otimes U$   $k$  élből áll (amikor  $Y$  és  $U$  szimmetrikus differenciáját képezzük, az élszám eggyel csökken), ezért

$$w(Y \otimes U) \leq w(X(k)). \quad (5.1)$$

$U$  hossza az irányított gráfban legalább akkora, mint  $F$  hossza (Emlékeztető:  $X(k)$ -ből  $F$ -fel javítva készült  $X(k + 1)$ , és  $F$  minimális hosszúságú volt).

$$s(U) \geq s(F) \quad (5.2)$$

így

$$w(Y) = w(Y \otimes U) - s(U) \leq w(X(k)) - s(F) = w(X(k+1)). \quad (5.3)$$

Ezzel beláttuk, hogy  $X(k+1)$  is extrémális.  $\square$

### 5.1.2. A maximumfeladat duálisa

Jelöljük egy tetszőleges  $e$  él  $A$ -beli végpontját  $a(e)$ -vel, a  $B$ -beli végpontot pedig  $b(e)$ -vel.

**5.1. Definíció** (duál lehetséges). Az  $\mathbf{u} : A \rightarrow \mathbb{R}$  és  $\mathbf{v} : B \rightarrow \mathbb{R}$  vektorokat *duál lehetségesnek* nevezzük, ha

$$\begin{aligned} u(a) &\geq 0 \mid a \in A, \\ v(b) &\geq 0 \mid b \in B, \\ u(a(e)) + v(b(e)) &\geq w(e) \mid e \in E \end{aligned}$$

Az  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  duál lehetséges vektorok halmazát  $\mathcal{D}(\mathcal{G}, \mathbf{w}, \max)$ -vel jelöljük.

Ez azt jelenti, hogy minden csúcshoz tartozik egy duálváltozó. Az  $A$ -beli csúcsokhoz tartozó duálváltozókat  $\mathbf{u}$ -val, a  $B$ -beli csúcsokhoz tartozókat  $\mathbf{v}$ -vel jelöljük. A duálváltozók nemnegatívak, és bármely él esetén az él két végpontjához tartozó duálváltozók összege eléri az él súlyát. Klasszikus jelöléssel  $(n, k)$  pontú páros gráfra ez úgy is írható, hogy

$$\begin{aligned} u_i &\geq 0 \mid i = 1, 2, \dots, n \\ v_j &\geq 0 \mid j = 1, 2, \dots, k \\ u_i + v_j &\geq w_{ij} \mid (i, j) \in E \end{aligned}$$

Hangsúlyozzuk, hogy ez a duál lehetséges definíció csak ebben az alfejezetben érvényes, ahol a primál feladat egy párosítás összsúlyának a maximalizálása. A 3. fejezetben szereplő példa esetén  $w_{ij}$  lehet az  $(i, j)$  pár várható nyerebérdíja a táncversenyen. Képzeld el, hogy a konkurrencia  $u_i$  összeget kínál az  $i$ -edik fiúnak, és  $v_j$  összeget a  $j$ -edik lánynak azért, hogy el se induljanak a táncversenyen. A duál-lehetségesség azt jelenti, hogy a felajánlott összegek nemnegatívak, és minden lehetséges pár vesztegetési pénze eléri a táncversenyen várható nyerebérdíjuk értékét. A konkurrens cég minimalizálni akarja azt az összeget, amivel elérhetik, hogy egyetlenegy pár se induljon a táncversenyen.

**5.2. Definíció.**  $A$ 

$$\max_{X \text{ párosítás}} w(X)$$

diszkrét maximumfeladat duálisának nevezzük a

$$\min_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, \mathbf{w}, \max)} \left( \sum_{a \in A} u(a) + \sum_{b \in B} v(b) \right)$$

minimumfeladatot.

Most a maximumfeladat diszkrét, a minimumfeladat folytonos. Ebben a helyzetben is érvényes a gyenge dualitás.

**5.1. Állítás.** Legyen  $X$  egy tetszőleges párosítás a  $\mathcal{G}$  páros gráfban, legyen továbbá  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, \mathbf{w}, \max)$  egy tetszőleges duál lehetséges vektor. Ekkor

$$w(X) \leq \sum_{a \in A} u(a) + \sum_{b \in B} v(b).$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$u(a) + v(b) = w(e) \text{ a párosítás valamennyi } e = (a, b) \text{ élére, és} \quad (5.4)$$

$$X \text{ lefedi a pozitív duálváltozóval rendelkező pontokat.} \quad (5.5)$$

*Bizonyítás.*

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e) \leq \sum_{e \in X} u(a(e)) + \sum_{e \in X} v(b(e))$$

Itt akkor áll fenn egyenlőség, ha (5.4) teljesül. A jobboldalon a különböző  $e$  élekhez tartozó  $a(e)$  pontok különbözőek, mert  $X$  egy párosítás. Ugyanígy a különböző élekhez tartozó  $b(e)$  pontok is különbözőek. Valamennyi duálváltozó nemnegatív, tehát a jobboldali összeg nem csökken, ha az összegzést valamennyi  $A$ -beli és  $B$ -beli pont duálváltozójára kiterjesztjük.

$$\sum_{e \in X} u(a(e)) + \sum_{e \in X} v(b(e)) \leq \sum_{a \in A} u(a) + \sum_{b \in B} v(b).$$

Itt pedig akkor áll fenn egyenlőség, ha (5.5) teljesül, tehát a kiterjesztés során esetleg megjelenő új tagok értéke 0.  $\square$

**5.1. Példa.** Az 5.2. táblázat egy  $(4, 4)$  pontú teljes páros gráf maximális összsúlyú párosítását mutatja az optimális duálváltozókkal együtt.

A maximális párosítás összsúlya  $12 + 10 + 12 + 9 = 43$ . A duálváltozók összege  $4 + 3 + 0 + 2 + 8 + 10 + 9 + 7 = 43$ . Javasoljuk, hogy az olvasó ellenőrizze az (5.4) egyenlőségeket!

5.2. táblázat. Primál és duál optimális megoldás

u \ v	4	3	0	2
8	12	11	5	5
10	7	3	10	11
9	12	12	8	9
7	11	6	7	9

Nevezetes tény, hogy páros gráfban a maximális összsúlyú párosítás feladattal kapcsolatban az erős dualitás tétel is érvényes.

**5.2. Tétel** (Egerváry [Ege31]). *Tetszőleges  $\mathcal{G}$  páros gráf és  $w$  súlyfüggvény esetén*

$$\max_{X \text{ párosítás}} w(X) = \min_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, \mathbf{w}, \max)} \left( \sum_{a \in A} u(a) + \sum_{b \in B} v(b) \right). \quad (5.6)$$

*Bizonyítás.* A 4.3. alfejezetben bevezettük a  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$  párosítás politópot. A 4.5. definíciót tanulmányozva megállapíthatjuk, hogy a folytonos LP dualitás szabályainak megfelelően a

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})} \mathbf{w}\mathbf{x}$$

maximumfeladat duálisa a

$$\min_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, \mathbf{w}, \max)} \left( \sum_{a \in A} u(a) + \sum_{b \in B} v(b) \right)$$

minimumfeladat. Alkalmazhatjuk a folytonos LP dualitás tételét.

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})} \mathbf{w}\mathbf{x} = \min_{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ duál lehetséges}} \left( \sum_{i \in A} u_i + \sum_{j \in B} v_j \right)$$

A párosítások a  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$  poliéder csúcsai, tehát a poliéder részhalmazát képezik. Ezért

$$\max_{X \text{ párosítás}} w(X) \leq \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})} \mathbf{w}\mathbf{x}$$

Ha viszont egy poliéderen egy folytonos LP feladatnak van optimális megoldása, akkor optimális csúcsa is van (ld. A.2. következmény), ezért

$$\max_{X \text{ párosítás}} w(X) = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})} \mathbf{w}\mathbf{x}$$

□

5.3. táblázat. Maximális összsúlyú párosítás

u\v				
	5	4	3	2
	1	3	6	4
	4	6	7	3
	5	3	5	4

Ez az eredmény azon alapul, hogy a párosítás politóp csúcsai egészek, és éppen a párosítások karakterisztikus vektorai. A bizonyítás jól mutatja a poliéder-politóp technika erejét.

**5.1. Feladat.** Az 5.3. táblázat egy  $(4, 4)$  pontú teljes páros gráf maximális összsúlyú párosítását mutatja. Adjuk meg a duál feladat egy optimális megoldását!

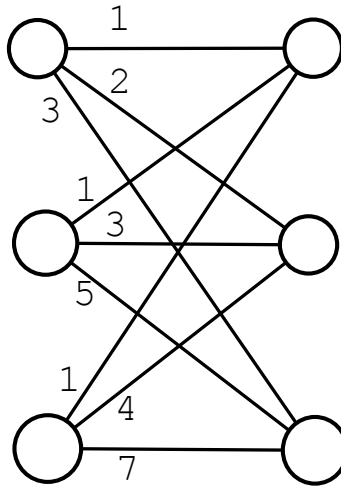
## 5.2. Maximin párosítás

Ismeretes, hogy egy lánc erejét a leggyengébb láncszem ereje határozza meg. Ebben az alfejezetben a  $k = 1, 2, \dots$  értékekre olyan  $k$  élből álló párosítást keresünk, ahol a súlyok minimuma maximális. A szóbanforgó  $k$  élből álló párosítást  $X(k)$ -val jelöljük. Először csak a maximális súlyú éleket használjuk. Amikor ezek körében már elkészült a maximális párosítás, bevonjuk a keresésbe a második legnagyobb súlyú éleket, aztán a harmadik legnagyobb súly következik, és így tovább. Az aktuális szintet a  $W$  változó tárolja. Az algoritmus során  $W$  a súlyok értékein megy végig a maximális súlytól lefelé haladva egészen a minimális súlyig.  $W$  értékének csökkentését úgy mondjuk, hogy  $W$ -t eggyel alacsonyabb szintre vesszük.

### 5.2. Algoritmus (Maximin párosítás).

- 1)  $X(1) =$  egy maximális súlyú él.  $W = \max\{w_{ij}\}$ ,  $k = 1$ .
- 2) Javító utat keresünk  $X(k)$ -hoz a  $\{w_{ij} \geq W\}$  élek által meghatározott részgráfban.
  - Ha van javító út, 3a) következik.
  - Ha nincs javító út, 3b) következik.
- 3a) Elvégezzük a javítást, ezzel  $X(k+1)$  adott,





5.4. ábra. Példa a maximin párosítás algoritmusra

$k$ -t eggyel növeljük, 2) pont.

3b)  $W$ -t eggyel alacsonyabb szintre vesszük.

- ha  $W$  nem ment le a minimális súly alá,  
a 3a) pont következik.
- ha  $W$  lement a minimális súly alá,  
akkor nincs  $k+1$  élű párosítás, STOP.

Megjegyezzük, hogy az algoritmust akkor is célszerű leállítani, ha  $k$  elérte a nyilvánvaló felső korlátot, például  $|A|$  és  $|B|$  közül a kisebbiket.

**5.2. Feladat.** Kövessük végig a maximin párosítás algoritmust az 5.4. ábrán látható páros gráf esetén! Az élekre írt számok az él súlyát jelölik.

### 5.3. Minimális összsúlyú teljes párosítás

Ebben az alfejezetben  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  egy  $(n, n)$  pontú irányítatlan páros gráf, és adottak a  $w(e) = w_{ij} \geq 0$  súlyok. Feltételezzük, hogy a gráfban van teljes párosítás. Olyan teljes párosítást keresünk, melynek az összsúlya minimális. A tömörség kedvéért minden duálváltozót  $y$ -nal fogunk jelölni.

### 5.3.1. A minimumfeladat duálisa

**5.3. Definíció** (duál lehetséges). Az  $y : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  vektort *duál lehetségesnek* nevezük, ha

$$y(a(e)) + y(b(e)) \leq w(e) \mid e \in E \quad (5.7)$$

A duál lehetséges vektorok halmazát  $\mathcal{D}(\mathcal{G}, \mathbf{w}, \min)$ -vel jelöljük.

Ez azt jelenti, hogy minden  $p$  csúcshoz tartozik egy előjelkötetlen  $y(p)$  duálváltozó. Bármely él esetén az él két végpontjához tartozó duálváltozók összege nem haladhatja meg az él súlyát. Klasszikus jelöléssel ez úgy is írható, hogy

$$y_i + y_j \leq w_{ij} \mid (i, j) \in E.$$

Ismét hangsúlyozzuk, hogy ez a duál lehetséges definíció is csak ebben az alfejezetben érvényes, ahol a primál feladat egy teljes párosítás összsúlyának a minimalizálása.

**5.4. Definíció.** A

$$\min_{X \text{ teljes párosítás}} w(X)$$

*diszkrét minimumfeladat duálisának* nevezzük a

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, \mathbf{w}, \min)} \left( \sum_{p \in A \cup B} y(p) \right)$$

*maximumfeladatot.*

Most a maximumfeladat folytonos, a minimumfeladat diszkrét. Jelenleg is érvényes a gyenge dualitás.

**5.2. Állítás.** Legyen  $X$  egy tetszőleges teljes párosítás a  $\mathcal{G}$  páros gráfban, legyen továbbá  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, \mathbf{w}, \max)$  egy tetszőleges duál lehetséges vektor. Ekkor

$$w(X) \geq \sum_{p \in A \cup B} y(p).$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$y(a) + y(b) = w(e) \text{ a teljes párosítás valamennyi } e = (a, b) \text{ élére.} \quad (5.8)$$

5.4. táblázat. Primál és duál optimális megoldás

u \ v	4	1	1	-1
4	8	9	5	3
3	7	8	9	6
1	9	2	2	1
2	7	6	7	1

*Bizonyítás.*

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e) \geq \sum_{e \in X} (y(a(e)) + y(b(e)))$$

Itt akkor áll fenn egyenlőség, ha (5.8) teljesül. A jobboldalon a különböző  $e$  élekhez tartozó  $a(e)$  pontok különbözőek, és lefedik a teljes  $A$  halmazt, mert  $X$  egy teljes párosítás. Ugyanígy a különböző élekhez tartozó  $b(e)$  pontok is különbözőek, és együtt a teljes  $B$  halmazt adják.

$$\sum_{e \in X} y(a(e)) + y(b(e)) = \sum_{p \in A \cup B} y(p).$$

□

**5.2. Példa.** Az 5.4. táblázat táblázat egy  $(4, 4)$  pontú teljes páros gráf minimális összsúlyú teljes párosítását mutatja az optimális duálváltozókkal együtt.

A minimális teljes párosítás összsúlya  $5 + 7 + 2 + 1 = 15$ . A duálváltozók összege  $4 + 3 + 1 + 2 + 4 + 1 + 1 + (-1) = 15$ . Javasoljuk, hogy az olvasó ellenőrizze az 5.8 egyenlőségeket!

Nevezetes tény, hogy páros gráfban a minimális összsúlyú párosítás feladatára is érvényes az erős dualitás tétel.

**5.3. Tétel (Egerváry).** Ha a  $\mathcal{G}$  páros gráfban van teljes párosítás, és  $w$  tetszőleges nem-negatív súlyfüggvény, akkor

$$\min_{X \text{ teljes párosítás}} w(X) = \max_{y \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, w, \min)} \left( \sum_{p \in A \cup B} y(p) \right) \quad (5.9)$$

*Bizonyítás.* A 4.3. alfejezetben bevezettük az  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  párosítás politópot. A 4.6. definíciót tanulmányozva megállapíthatjuk, hogy a folytonos LP dualitás szabályainak megfelelően a

$$\min_{x \in \mathcal{L}(\mathcal{G})} wx$$

5.5. táblázat. Minimális összsúlyú teljes párosítás

u \ v				
	5	4	3	2
	1	3	6	4
	4	6	7	3
	5	3	5	4

minimumfeladat duálisa a

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, w_{\min})} \left( \sum_{p \in A \cup B} y(p) \right)$$

maximumfeladat. Alkalmazhatjuk a folytonos LP dualitás tételét.

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathcal{G})} \mathbf{w}\mathbf{x} = \max_{y \text{ duál lehetséges}} \left( \sum_{p \in A \cup B} y(p) \right)$$

A teljes párosítások az  $\mathcal{L}(\mathcal{G})$  poliéder csúcsai, tehát a poliéder részalmazát képezik. Ezért

$$\min_{X \text{ teljes párosítás}} w(X) \geq \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathcal{G})} \mathbf{w}\mathbf{x}$$

Ha viszont egy folytonos LP feladatnak egy poliéderen van optimális megoldása, akkor optimális csúcsa is van (ld. A.2. következmény), ezért

$$\min_{X \text{ teljes párosítás}} w(X) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathcal{G})} \mathbf{w}\mathbf{x}.$$

□

Ez az eredmény is azon alapul, hogy a teljes párosítás politóp csúcsai egészek, és éppen a teljes párosítások karakterisztikus vektorai. Ez a bizonyítás is a poliéder-politóp technika hatékonyságát mutatja.

**5.3. Feladat.** Az 5.5. táblázat egy  $(4, 4)$  pontú teljes páros gráf minimális összsúlyú teljes párosítását mutatja. Adjuk meg a duál feladat egy optimális megoldását!

**5.4. Feladat.** Az 5.6. táblázat egy  $(4, 4)$  pontú teljes páros gráf súlyait mutatja. Adjunk meg egy **maximális** összsúlyú teljes párosítást, és a duál feladat egy optimális megoldását!

5.6. táblázat. Maximális összsúlyú teljes párosítás

u \ v				
	7	7	5	2
	11	9	2	6
	6	5	9	2
	9	9	2	4

### 5.3.2. Primál-duál-algoritmus

Feltételezzük, hogy a  $\mathcal{G} = (A, B; E)$  páros gráfban van teljes párosítás.  $P = A \cup B$  a pontok halmaza,  $|A| = |B| = n$ . Minden  $e$  élhez adott egy  $w(e) \geq 0$  súly. Olyan teljes párosítást keresünk, ahol az összsúly minimális. Az algoritmusban használni fogjuk a következő jelöléseket:

- Minden  $i \in P$  csúcshoz tartozik egy  $y(i)$  előjelkötetlen duálváltozó.
- $E(y) \subset E$  azon eredeti  $e = (i, j)$  élekből áll, melyekre  $y(i) + y(j) = w(e)$ .
- $\mathcal{G}' = (P, E(y))$   $\mathcal{G}$ -nek részgráfja.
- $X$  egy párosítás  $\mathcal{G}'$ -ben.
- $Q$  a  $\mathcal{G}'$ -beli  $X$  által fedetlen pontok halmaza.

### 5.3. Algoritmus (primál-duál-algoritmus).

Induláskor  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , és  $X = \emptyset$ . (Ezzel  $\mathcal{G}'$  is adott.)

Iteráció:  $Q$  az  $X$  által fedetlen  $P$ -beli pontok halmaza.

Ha  $Q$  üres, STOP. Egyébként az  $E(y)$  élhalmazt, és ezzel a  $\mathcal{G}'$  gráfot aktualizáljuk.

1.eset:  $\mathcal{G}'$ -ben van  $Q \cap A \rightarrow Q \cap B$   $X$ -alternáló út.

$U$  legyen egy ilyen javító út,  $X$ -et ezzel javítjuk, és iterálunk.

2.eset:  $\mathcal{G}'$ -ben nincs  $Q \cap A \rightarrow Q \cap B$   $X$ -alternáló út.

Ekkor

$-S$  legyen azon  $\mathcal{G}'$ -beli  $q$  csúcsok halmaza, melyekre páros hosszúságú  $Q \cap A \rightarrow q$

5.7. táblázat. Példa a primál-duál-algoritmusra

1	2	3
1	3	5
1	4	7

$X$ -alternáló út létezik.

$-T$  legyen azon  $\mathcal{G}'$ -beli  $q$  csúcsok halmaza, melyekre páratlan hosszúságú  $Q \cap A \rightarrow q$   $X$ -alternáló út létezik.

$-q \in S$  esetén növeljük  $y(q)$ -t  $d$ -vel,

$-q \in T$  esetén csökkentjük  $y(q)$ -t  $d$ -vel, ahol  $d$  a legnagyobb olyan érték, amire  $y$  még duál lehetséges marad, tehát

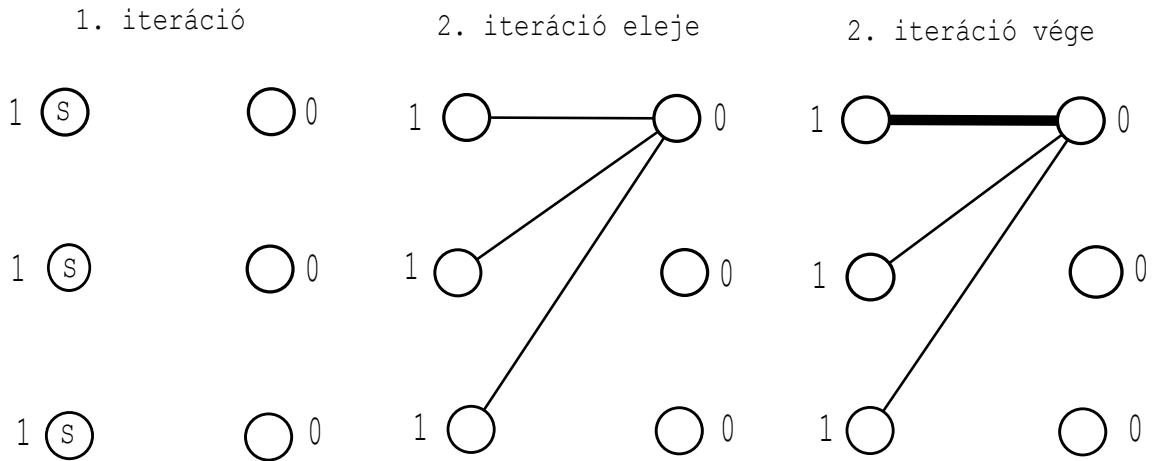
$$y(i) + y(j) \leq w(e) \text{ minden } e = (i, j) \in E\text{-re.}$$

Iterálunk.

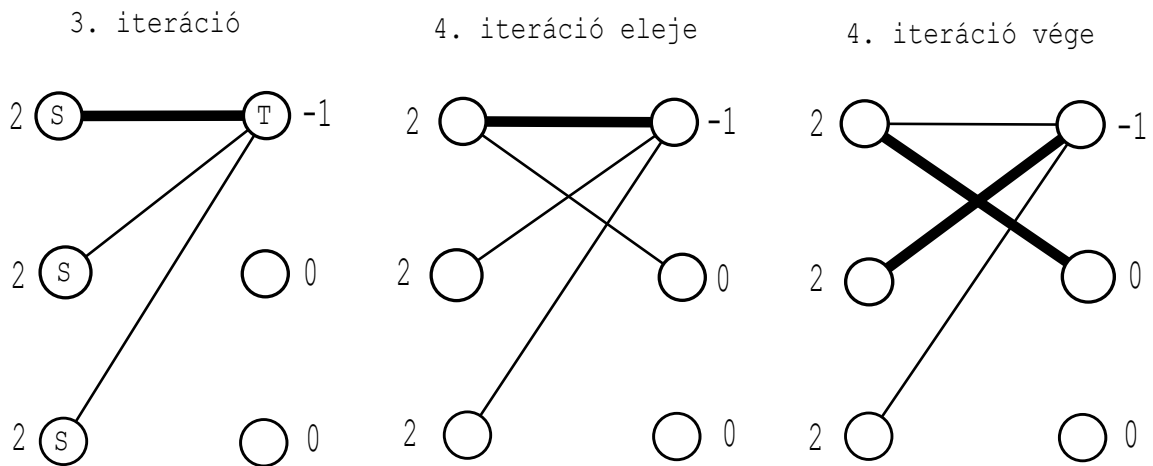
Az algoritmus értelmezéséhez hozzátartozik, hogy az  $S$  halmaz készítésekor a 0 hosszúságú alternáló út is páros hosszúságú, tehát a fedetlen  $A$ -beli pontok eleve az  $S$  halmazban vannak. Ezért mindaddig, amíg amíg  $X$  nem teljes,  $|S| > |T|$ , tehát  $d$  hozzáadásakor illetve kivonásakor a duál célfüggvény növekszik. A gráf páros, ezért  $S \subset A$ , és  $T \subset B$ . Az algoritmus akkor ér véget, ha  $\mathcal{G}'$ -ben teljes párosítást kaptunk.

**5.3. Példa.** Kövessük végig a primál-duál-algoritmust az 5.4. ábrán megadott  $(3, 3)$  pontú páros gráfon! Az élek súlyai az 5.7. táblázatban is láthatóak.

Induláskor minden duálváltozó 0, az  $X$  párosítás üres. Az  $E(y)$  élhalmaz is üres, tehát a  $\mathcal{G}'$  gráf 6 db izolált és fedetlen pontból áll. Az 1. iterációban ezek közül az  $A$  halmaz három pontja az  $S$  halmazba kerül mert fedetlen  $A$ -beli pontból 0 hosszúságú alternáló úton elérhető. Az 5.5. ábra az 1. iteráció végén valamint a 2. iteráció elején és végén érvényes állapotokat ábrázolja. Az 1. iteráció végén  $d = 1$  választással még duál-lehetséges  $y$  vektorhoz jutunk ( $1 + 0 = 1$ ). Ezért az  $A$  oldalon a három duálváltozó értéke 1 lesz, a  $B$  oldalon marad 0, és a duálváltozók összege 3-ra emelkedett. A 2. iterációban  $E(y)$ -ban megjelenik három él (ezeknek 1 a súlya), és mindegyikük két fedetlen pontot köt össze. Az elsőt beválasztjuk az  $X$  párosításba, ezt az ábrán vastag vonal jelöli. A párosítás elemszáma 1-gyel



5.5. ábra. Példa a primál-duál-algoritmusra

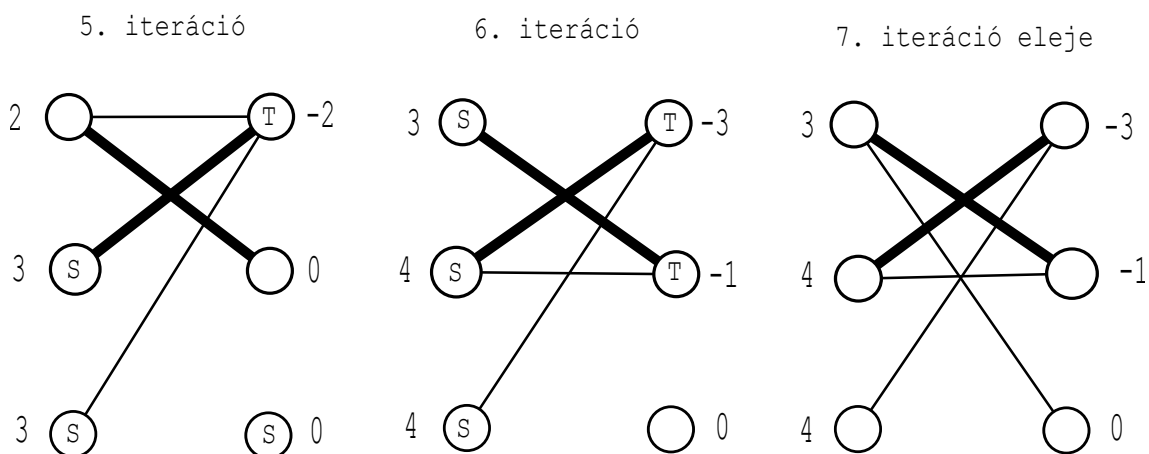


5.6. ábra. Példa a primál-duál-algoritmusra

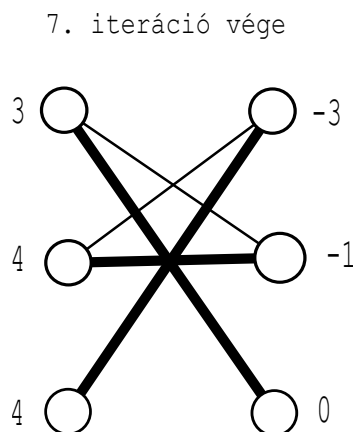
nőtt.

Az 5.6. ábra a 3. iteráció végén valamint a 4. iteráció elején és végén érvényes állapotokat ábrázolja. Az  $A$  ponthalmaz pontjai legyenek  $a_1, a_2, a_3$  (felülről lefelé), a  $B$  ponthalmaz pontjai pedig  $b_1, b_2, b_3$ . A 3. iterációban 2 darab  $A$ -beli fedetlen pont van, ezek  $a_2$  és  $a_3$ . Ezeken kívül  $b_1$  fedett pontként kerül a  $T$  halmazba,  $a_1$  pedig fedett pontként az  $S$  halmazba.  $d$ -t ismét 1-ig emelhetjük, mert az  $(a_1, b_2)$  él súlya 2. Az új duálváltozók az ábrán láthatóak, összegük 5-re emelkedett. A 4. iteráció elején az  $(a_1, b_2)$  új él bekerül az  $E(y)$  élhalmazba. Egy javító utat talá-lunk, ennek a pontjai  $b_2, a_1, b_1, a_2$ . Elvégezve a javítást, az  $X$  párosítás most már két élből áll.

Az 5.7. ábrán az 5. iterációban, a 6. iterációban és a 7. iteráció elején kialakult álla-



5.7. ábra. Példa a primál-duál-algoritmusra



5.8. ábra. A primál-duál-algoritmus vége

potokat láthatjuk. Az 5. iterációban egy  $A$ -beli fedetlen pont van,  $a_3$ . Ezen kívül  $b_1$  fedett pontként kerül a  $T$  halmazba,  $a_2$  pedig fedett pontként az  $S$  halmazba.  $d$ -t ezúttal is 1-ig emelhetjük, mert az  $(a_2, b_2)$  él súlya 3. Az új duálváltozók az ábrán láthatóak, összegük 6-ra emelkedett. A 6. iterációban az  $(a_2, b_2)$  él bekerült az  $E(y)$  élhalmazba, ugyanakkor  $(a_1, b_1)$  kiesik az  $E(y)$  élhalmazból, és újra osztjuk az  $S$  és  $T$  címkéket. Most is egy  $A$ -beli fedetlen pont van,  $a_3$ . Ezen kívül  $b_1$  fedett pontként kerül a  $T$  halmazba,  $a_2$  fedett pontként az  $S$  halmazba,  $b_2$  fedett pontként kerül a  $T$  halmazba,  $a_1$  pedig fedett pontként az  $S$  halmazba.  $d$ -t ezúttal is 1-ig emelhetjük, mert az  $(a_1, b_3)$  él súlya 3. Az új duálváltozók az ábrán láthatóak, összegük 7-re emelkedett.

A 7. iteráció elején az  $(a_1, b_3)$  él bekerül az  $E(y)$  élhalmazba. Egy javító utat találunk, ennek a pontjai  $b_3, a_1, b_2, a_2, b_1, a_3$ . Elvégezve a javítást, az  $X$  párosítás



most már három élből áll, tehát teljes. A végső állapot az 5.8. ábrán látható. A párosítás összsúlya  $3 + 3 + 1 = 7$ , és ez természetesen a duálváltozók összegével azonos.

A most ismerttetett primál-duál algoritmus szerint az 1. esetben a párosítás éleinek száma 1-gyel nő. A 2. esetben a duál változók összege, tehát a duál célfüggvény növekszik, ezt is tartalmazza a következő tétel.

**5.4. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az  $X$  párosítás még nem teljes, és az 5.3 algoritmus a 2. esetre fut rá. Ekkor  $d > 0$ . Az  $X$  által fedett pontok duálváltozóinak összege  $d$ -től nem függ. A fedetlen  $A$ -beli pontok mindegyikének a duálváltozója  $d$ -vel nő. A fedetlen  $B$ -beli pontok duálváltozója nem változik.*

*Bizonyítás.* A fedetlen  $A$ -beli pontok az  $S$  halmazba kerülnek, mert ezek  $A$ -beli fedetlen pontból 0 hosszúságú alternáló úton érhetőek el. A fedetlen  $B$ -beli pontok nem kerülnek a  $T$  halmazba, mert különben lenne javító út. A párosítás minden éle az  $E(y)$  élhalmazban van, mert  $\mathcal{G}'$ -ben készül a párosítás. Legyen  $e = (a, b) \in E(y)$  a  $\mathcal{G}'$  gráf éle!

Most belátjuk, hogy ha  $a \in S$ , akkor  $b \in T$ . Létezik ugyanis egy fedetlen  $A$ -beli pontból  $a$ -ba vezető alternáló út, aminek a hossza páros. Ha az út hossza legalább 2, akkor ez az út egy  $X$ -beli éllel érkezik  $a$ -ba.  $(a, b) \in X$  esetén az  $a$ -ba érkező él csak az  $(a, b)$  él lehet, mert a párosítás két éle nem találkozhat. Így  $b$  ugyanabból a fedetlen  $A$ -beli pontból 1-gyel rövidebb alternáló úton érhető el, ezért  $b \in T$ .  $(a, b) \notin X$  esetén az  $a$ -ba érkező alternáló utat megtoldhatjuk az  $(a, b)$  éllel, tehát  $b \in T$ . Ha az  $a$  pont maga fedetlen, akkor  $b$  ebből 1-hosszúságú alternáló úttal érhető el, tehát  $b \in T$ .

Ez azt jelenti, hogy amikor  $\mathcal{G}'$ -ben egy él egyik végpontjának a duálváltozója  $d$ -vel nő, akkor a másik végponté  $d$ -vel csökken, tehát az él továbbra is bentmarad az  $E(y)$  halmazban. Ha egyik végpont duálváltozója sem nő, akkor az él kikerülhet az  $E(y)$  halmazból, de ekkor sem korlátozza  $d$  értékét. Tehát  $d$  növelését csak a  $\mathcal{G}'$ -n kívüli élek korlátozzák, ezeken viszont az (5.7) feltételben a kisebb reláció szerepel, ezért lesz  $d > 0$ .

Másfelől belátjuk, hogyha  $e = (a, b) \in X$ , és  $b \in T$ , akkor  $a \in S$ . Ez azért igaz, mert most  $b$  egy fedetlen  $A$ -beli pontból páratlan hosszúságú alternáló úton érhető el, ez az út  $X$ -en kívüli éllel fut be  $b$ -ba, így ezt az utat  $\mathcal{G}'$ -ben folytathatjuk az  $(a, b)$  éllel. Tehát a párosítás  $e = (a, b)$  éleire a következő két lehetőség maradt:

1. Az  $e \in X$  él  $a$  végpontja  $S$ -ben, a  $b$  végpontja  $T$ -ben van, ezért  $y(a) + y(b)$  értéke  $d - d = 0$ -val változik, tehát nem függ  $d$ -től.
2. Az  $e \in X$  él egyik végpontja sem tartozik sem  $S$ -be illetve  $T$ -be, tehát egyik végpont duálváltozója sem változik.

Ezeket egybevetve az  $X$  által fedett pontok duálváltozóinak összege nem változik.  $k$  darab fedetlen  $A$ -beli pont esetén az összes duálváltozó összege  $kd$ -vel nő. Megemlítjük még, hogy  $d$ -re van felső korlát, mert a duál célfüggvény felülről korlátos (ld. 5.2. állítás).  $\square$

Ha a súlyok egész számok, akkor a duálváltozók is egészek, mert az algoritmus csak az összeadás és kivonás műveleteket alkalmazza. Ilyenkor a most igazolt tételből következik az algoritmus végeessége, hiszen az 1. esetben a párosítás elemszáma növekszik, a második esetben pedig a duál célfüggvény értéke nő legalább 1-gyel. A primál-duál algoritmus azonban akkor is véges, ha a súlyok között nem egész –akár irracionális– számok is előfordulnak.

**5.5. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az  $X$  párosítás még nem teljes, és az 5.3. algoritmus két szomszédos javító lépés között többször egymásután a 2. esetre fut rá. Ekkor  $|T|$  növekszik.*

*Bizonyítás.* Ha egy iterációban a 2. eset fordul elő, akkor kiosztjuk az  $S$  és  $T$  címkéket. Ha a rákövetkező iteráció is a 2. esetre vezet, akkor a címkék újraosztásakor valamennyi előző címke megmarad változatlanul, hiszen fedetlen pont fedetlen pont maradt, az alternáló utak is alternáló utak maradtak. Ugyanakkor a  $\mathcal{G}'$  gráfba bekerül legalább egy  $e = (a, b)$  él, amelyik az előző iterációban nem volt  $E(y)$ -ban. Ez csak úgy fordulhat elő, hogy az előző iterációban  $a$  duálváltozója nőtt,  $b$  duálváltozója nem csökkent, tehát  $a \in S$ , és  $b \notin T$  teljesült.  $e = (a, b)$  nem lehetett a párosítás éle, mert a párosítás élei  $E(y)$ -ban voltak. A címkék újraosztásakor  $a$  ismét  $S$  címkét kap,  $b$  pedig megkapja a  $T$  címkét, mert az  $a$ -ba vezető páros hosszúságú  $X$  alternáló út az  $(a, b)$  éllel folytatható. Tehát két szomszédos javítás között vagy egyszer futunk a 2. esetre, vagy pedig  $T$  pontjainak száma növekszik.  $\square$

Például az 5.7. ábrán látható, hogy az 5. iterációban a  $T$  halmaz 1 pontból áll, a 6. iterációban pedig 2-ből.

A most bizonyított tétel szerint a 5.3. algoritmus két szomszédos javító lépés között legfeljebb  $n$ -szer fut rá a 2. esetre, hiszen  $T$  legfeljebb  $n$  pontból áll. Ebből következik, hogy a primál-duál-algoritmus tetszőleges  $w$  nemnegatív súlyfüggvény esetén véges számú lépésben végetér.

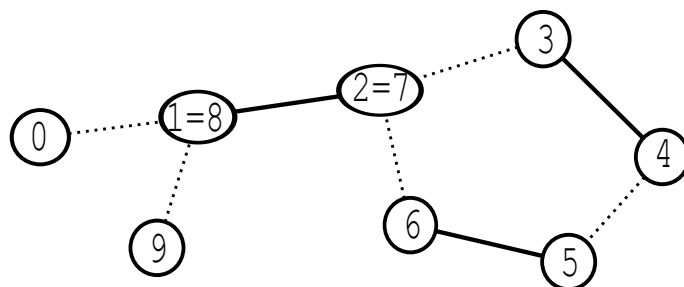


## 6. fejezet

# Maximális párosítások nempáros gráfban

Ebben a fejezetben  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf,  $X$  pedig általában egy párosítás, vagyis független élek halmaza. Olyan párosítást keresünk, amelyik maximális, tehát maximális számú független élből áll. A negyedik fejezettől eltérően a  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráf nem (feltétlenül) páros, ezért páratlan hosszúságú körök is előfordulhatnak. Néhány eredményt már korábban igazoltunk erre az esetre is. Érvényes például a (3.1) felső korlát, tehát a független élek száma nem haladhatja meg egy lefogó pontrendszer pontjainak számát. Emlékeztetünk a 4.1 optimalitási kritériumra, mely szerint egy  $X$  párosítás pontosan akkor maximális, ha nem létezik  $X$ -javító út. Ugyanakkor nempáros gráfban sok helyen alapvetően bonyolultabbá válnak a dolgok. Előfordulhat például, hogy két különböző fedetlen pontot összekötő  $X$ -alternáló élsorozat nem út, mert bizonyos pontok ismétlődnek. Ezt mutatja a 6.1. ábra.

A lefogó pontok minimális száma gyakran nagyobb, mint a független élek ma-



6.1. ábra.  $X$ -alternáló élsorozat, ami nem út

ximális száma (erre példa a 3 pontú teljes gráf, vagy bármelyik páratlan hosszúságú kör). Minimális számú lefogó pont előállítására NP-nehéz feladat [Sch03], ezért erre nem ismerünk hatékony algoritmust. Ugyanakkor Jack Edmonds munkássága nyomán hatékony algoritmussal tudunk maximális párosítást előállítani.

## 6.1. Maximális párosítás

A maximális párosítás előállítására szolgáló algoritmusok leglényegesebb része a kontrakció. Ha adott a gráfban egy  $C$  ponthalmaz, akkor megtehetjük azt, hogy  $C$  pontjait egy pontra összehúzzuk. Ilyenkor kontrakciót hajtunk végre. (Ezt úgy is mondjuk, hogy kontrahálunk.)

**6.1. Definíció** (kontrakció). *Legyen adott a  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráfban egy  $C \subset P$  ponthalmaz.  $C$  pontjainak egy  $c$  pontra történő kontrakciójával keletkezik az a  $\mathcal{G}' = (P/C, E/C)$  gráf, melyben*

$$P/C = (P - C) \cup \{c\},$$

$$E/C = \{(i, j) \mid (i, j) \in E, i \notin C, j \notin C\} \cup \{(i, c) \mid i \notin C, j \in C, (i, j) \in E\}.$$

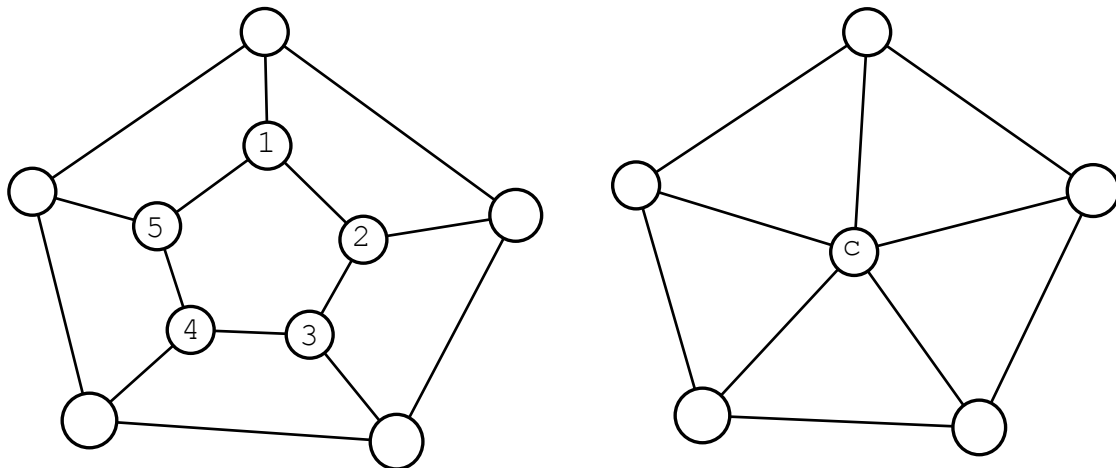
*Az új  $(i, c)$  éleket csak egy példányban (tehát multiplicitás nélkül) szerepeltetjük. A kontrakció után kapott  $\mathcal{G}'$  gráfot  $\mathcal{G}/C$ -vel is jelöljük. Az új  $c$  pontot gyakran pszeudocsúcsnak mondjuk. Ha  $X$  egy párosítás, akkor  $X/C$ -vel jelöljük az*

$$X/C = \{(i, j) \mid (i, j) \in X, i \notin C, j \notin C\} \cup \{(i, c) \mid i \notin C, j \in C, (i, j) \in X\}$$

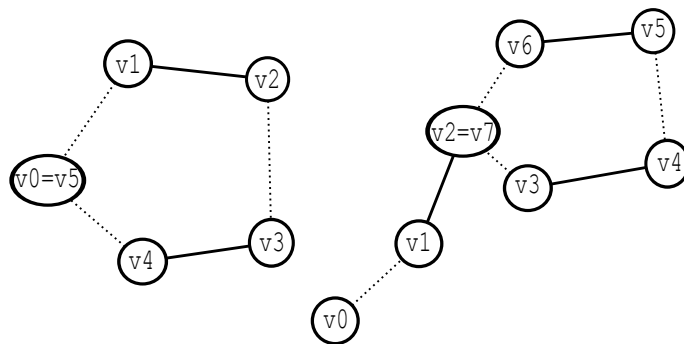
*élhalmazt.*

Tehát kihagyjuk a gráfból a  $C$  ponthalmaz pontjait, helyükre egyetlen új  $c$  pont kerül. Megtartjuk azokat az éleket, melyeknek egyik végpontja sem volt  $C$ -ben. Azokat az  $(i, j)$  éleket, melyeknek csak a  $j$  végpontja volt  $C$ -ben, az  $(i, c)$  éllel helyettesítjük, és a kontrahált gráfba minden ilyen új élt csak egy példányban veszünk be. Ha  $X$  egy párosítás, akkor  $X/C$  nem feltétlenül lesz párosítás.

A 6.2. ábrán a  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ponthalmazt húztuk össze egy  $c$  pontra.



6.2. ábra. Kontrakció



6.3. ábra. Blossom és virág

**6.2. Definíció (blossom).** Legyenek  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  a gráf pontjai, ahol

$a$   $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  pontok páronként különbözőek,

$v_0 = v_k$  fedetlen pont,

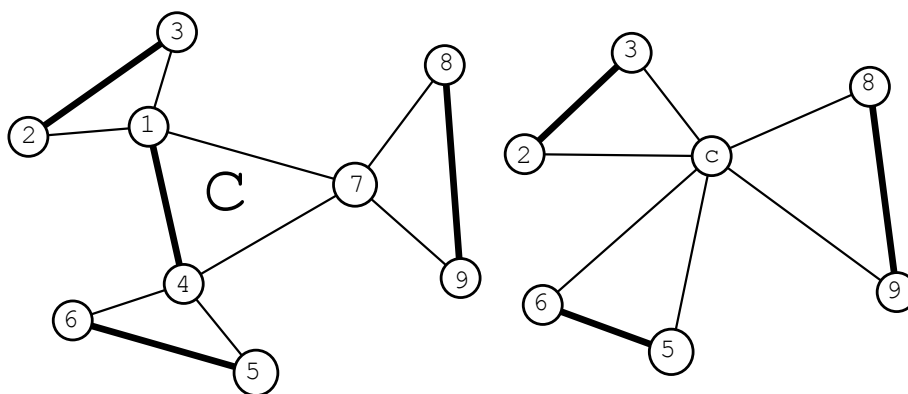
$(v_i, v_{i+1}) \in X$ , ha  $i$  páratlan, és

$(v_i, v_{i+1}) \notin X$ , ha  $i$  páros.

Ezt a páratlan számú élből álló kört blossom-nak nevezzük.

Emlékeztetünk arra, hogy a javító út két **különböző** fedetlen pontot összekötő  $X$ -alternáló út. Némi iróniával azt mondhatjuk, hogy a blossom két „azonos” fedetlen pontot összekötő  $X$ -alternáló „út”.

A 6.3. ábra bal oldalán egy öt élből álló blossom látható. A  $v_0$  pont fedetlen. A  $(v_1, v_2)$  és a  $(v_3, v_4)$  élek a párosítás élei, a másik három él nem tartozik a párosításhoz. A blossom-ok jelentőségét fogalmazza meg a következő - Edmondstól



6.4. ábra. Példa az alaptételre

származó - alaptétel [Edm65].

**6.1. Tétel (Alaptétel).** *Legyen  $C$  a  $\mathcal{G}$  gráfban egy blossom. Ha  $X$  egy párosítás, akkor  $X/C$  is párosítás. Az  $X$  párosítás pontosan akkor maximális  $\mathcal{G}$ -ben, ha  $X/C$  maximális  $\mathcal{G}/C$ -ben.*

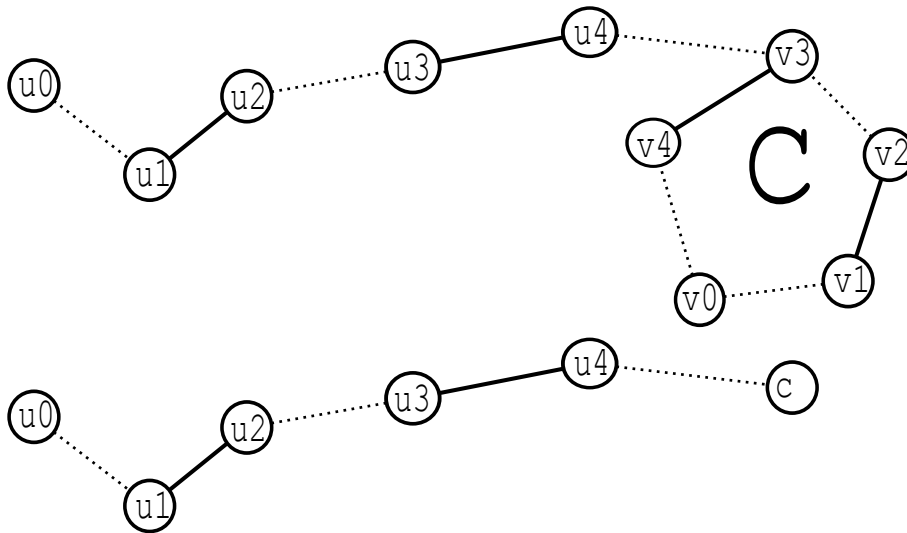
A 6.4. ábra bal oldalán a  $C$  blossom az  $\{1, 4, 7\}$  pontok által kifeszített háromszög. Kontrakció után a blossom-ból egy  $c$  pszeudo-csúcs lesz. A vastagon jelölt párosítás kontrakció előtt és kontrakció után is maximális.

*Bizonyítás.* Legyenek  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  a  $C$  blossom pontjai, legyen továbbá  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}/C$  és  $X' = X/C$ . A kontrakció során  $C$ -ből keletkező pontot  $c$ -vel jelöljük.  $X'$  nem fedile  $c$ -t, mert  $v_0$ -t  $X$  nem fedte, a többi  $v_i$ -t viszont olyan  $X$ -beli élek fedték, amik nincsenek  $X'$ -ben ( $C$  élei voltak, ezért összehúzás során megszűntek). Ezért  $X'$  is párosítás, és  $X' \subset X$ .

Először belátjuk, hogy ha  $X$  nem maximális  $\mathcal{G}$ -ben, akkor  $X'$  sem maximális  $\mathcal{G}'$ -ben. Legyen  $\mathcal{U}$  egy  $X$ -javító út  $\mathcal{G}$ -ben. Feltehető, hogy  $\mathcal{U}$  nem  $v_0$ -ban kezdődik, különben  $\mathcal{U}$ -t megfordíthatjuk. Ekkor  $\mathcal{U}$  a  $C$  blossom-on kívül kezdődik, hiszen a többi  $v_i$ -t  $X$  lefedti. Ha  $\mathcal{U}$  nem megy át  $C$  egyik csúcsán sem, akkor  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{G}'$  gráfban is  $X'$ -javító lesz. Ha  $\mathcal{U}$  átmegy egy  $C$ -beli csúcson, akkor  $\mathcal{U}$  felbontható  $\mathcal{LM}$  alakban, ahol  $\mathcal{L}$  utolsó csúcsa  $C$ -beli, a többi viszont nem.  $\mathcal{L}$  utolsó csúcsát  $c$ -vel helyettesítve  $\mathcal{L}$  egy  $X'$ -javító út lesz  $\mathcal{G}'$ -ben, mert  $\mathcal{L}$  egy  $X$ -en kívüli éllel érkezett  $C$ -be.

Most azt igazoljuk, hogy ha  $X'$  nem maximális  $\mathcal{G}'$ -ben, akkor  $X$  sem maximális  $\mathcal{G}$ -ben. Legyen  $\mathcal{U}'$  egy  $X'$ -javító út  $\mathcal{G}'$ -ben. Ha  $\mathcal{U}'$  nem megy át a  $c$  csúcson, akkor  $\mathcal{U}'$  a  $\mathcal{G}$  gráfban is  $X$ -javító. Ha  $\mathcal{U}'$  átmegy  $c$ -n, akkor  $\mathcal{U}'$  a  $c$  pontban végződik,



6.5. ábra.  $\mathcal{G}'$ -beli javító út folytatása  $\mathcal{G}$ -beli javító úttá

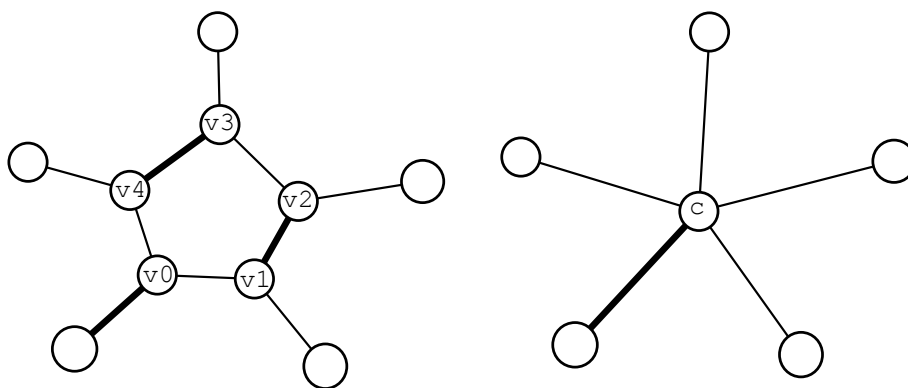
hiszen  $X'$  nem fedi le  $c$ -t. Az  $\mathcal{U}'$  élsorozat egy  $\mathcal{G}$ -beli  $\mathcal{U}$  élsorozat képe a kontrakció során.  $\mathcal{U}'$  és  $\mathcal{U}$  egy él kivételével azonosak. Ha  $\mathcal{U}'$  a  $(p, c)$  éllel érkezik  $c$ -be, akkor  $\mathcal{U}$  a  $(p, v_i)$  éllel érkezik a  $C$  blossom-ba. A  $(p, v_i)$  él  $X$ -en kívüli, tehát a folytatáshoz  $X$ -beli élt kell választani a blossom élei közül. Ha  $i$  páratlan (például a 6.5. ábrán  $i = 3$ ), akkor a  $v_i$  csúcshoz növekvő irányban illeszkedik a blossom  $X$ -beli éle, tehát  $\mathcal{U}$ -t a  $v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_k$  útvonallal kiegészítve kapunk  $G$ -ben egy  $X$ -javító utat. Ha  $i > 0$  és páros, akkor a  $v_i$  csúcshoz csökkenő irányban illeszkedik a blossom  $X$ -beli éle, tehát  $\mathcal{U}$ -t a  $v_{i-1}, \dots, v_1, v_0$  útvonallal kiegészítve kapunk  $G$ -ben egy  $X$ -javító utat. Ha  $i = 0$ , akkor  $\mathcal{U}$   $\mathcal{G}$ -ben is javító út.  $v_0 = v_k$  miatt mindhárom esetben a blossom fedetlen pontja lesz az  $\mathcal{U}$  javító út másik végpontja.  $\square$

A 6.5. ábra alján  $\mathcal{G}'$ -ben láthatunk egy javító utat. A  $c$  pseudo-csúcsba vezető  $(u_4, c)$  él az  $(u_4, v_3)$  élből keletkezett a kontrakció során. Ezért a  $\mathcal{G}$ -beli javító út pontjai

$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, v_3, v_4, v_0$$

az ábra felső részén. Hangsúlyozzuk, hogy a 6.1 alaptétel bizonyítása konstrukciót ad arra nézve, hogy hogyan készül a kontrahált gráf  $\mathcal{U}'$  javító útjából, az eredeti gráf  $\mathcal{U}$  javító útja.

A 6.6. ábra arra mutat példát, hogy az alaptétel állítása nem marad érvényes akkor, ha  $C$  csak egy páratlan hosszúságú  $X$ -alternáló kör, de nem blossom, tehát a  $v_0$  pont is fedett. Az ábra bal oldalán a vastagon jelzett párosítás nem maximális (az öt küllő független). Kontrakció után a párosítás már maximális.



6.6. ábra. Kontrakció után maximális, de előtte nem

Az alaptételnek az a jelentősége, hogy amikor egy blossom-ot találunk, akkor a maximális párosítás feladatát vissza lehet vezetni egy kisebbre. Az is előfordul, hogy az  $X$  párosítást módosítani kell ahhoz, hogy blossom-ot kapjunk. Erre vonatkozik a következő állítás.

**6.1. Állítás.** Legyen  $Q$  az  $X$  által le nem fedett csúcsok halmaza,  $v \in Q$ . Legyen továbbá  $\mathcal{U} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  egy legrövidebb hosszúságú  $X$ -alternáló  $Q \rightarrow v$  élsorozat, amelyik legalább egy élt tartalmaz. Ekkor  $\mathcal{U}$  vagy javító út, vagy pedig léteznek olyan  $i < j$  sorszámok, hogy

$$v_i = v_j, i \text{ páros, } j \text{ páratlan és}$$

$a v_0, v_1, \dots, v_{j-1}$  csúcsok páronként különbözőek.

Az utóbbi esetben a  $v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i$  ún. nyél mentén  $X$  éleit és az  $X$ -en kívüli éleket felcserélve olyan új  $X$  párosításhoz jutunk, melyre a

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j \text{ pontok egy blossom pontjai.}$$

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $\mathcal{U}$  nem javító út, és keressünk olyan  $i < j$  párt, hogy  $v_i = v_j$ , és  $j$  a lehető legkisebb. Ha  $j - i$  páros, akkor  $\mathcal{U}$ -ból törölhetjük a  $v_{i+1}, \dots, v_j$  csúcsokat, így viszont rövidebb  $X$ -alternáló  $Q \rightarrow v$  élsorozatot kapnánk. Tehát  $j - i$  páratlan. Ha  $j$  páros lenne, és  $i$  páratlan, akkor  $v_i$ -ben két  $X$ -beli él találkozna. Tehát  $i$  páros és  $j$  páratlan. A  $(v_{i-1}, v_i)$  él a párosítás éle, ezenkívül a páratlan hosszúságú  $X$ -alternáló kör két  $X$ -en kívüli éle fut még a  $v_i$  pontba. A  $v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i$  ún. nyél mentén  $X$  éleit és az  $X$ -en kívüli éleket felcserélve olyan

új  $X$  párosításhoz jutunk, amelyik ugyanannyi élből áll, mint az előző. Ugyanakkor a  $v_i$  pont most már  $X$  által fedetlen, tehát a  $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j$  pontok egy blossom pontjai.  $\square$

**6.3. Definíció (virág).** Legyenek  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_j$  a gráf pontjai, ahol

$v_i = v_j, i < j, i$  páros,  $j$  páratlan, a

$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{j-1}$  pontok páronként különbözőek,

$v_0$  fedetlen pont,

$(v_k, v_{k+1}) \in X$ , ha  $k$  páratlan, és

$(v_k, v_{k+1}) \notin X$ , ha  $k$  páros.

A  $\{(v_k, v_{k+1}) \mid k = 0, 1, \dots, j-1\}$  élsorozatot virágnak nevezzük. A  $\{(v_k, v_{k+1}) \mid k = 0, 1, \dots, i-1\}$  élek alkotják a virág nyelét, a  $\{(v_k, v_{k+1}) \mid k = i, i+1, \dots, j-1\}$  élek pedig a virág fejét.

A blossom olyan virág, ahol a nyél hossza 0. A 6.3. ábra jobb oldalán egy hét élből álló virág látható ( $i = 2, j = 7$ ). A  $v_0$  pont fedetlen. A nyél két élből, a fej pedig öt élből áll. A nyél kezdőpontja fedetlen. Fontos tulajdonság, hogy a fej pontjai a fedetlen pontból páros és páratlan hosszúságú  $X$ -alternáló úttal is elérhetőek, attól függően, hogy a fejet alkotó körben melyik irányba haladunk. A 6.1 állításban többek között azt igazoltuk, hogy amikor a nyél mentén felcseréljük az  $X$ -beli és az  $X$ -en kívüli éleket, akkor a párosítás éleinek száma nem változik, a fejből pedig blossom lesz.

Az alaptétel és a 6.1 Állítás segítségével most egy rekurzív algoritmust adunk a következő feladat megoldására.

Adott egy  $X$  párosítás. Vagy adunk egy  $\mathcal{U}$   $X$ -javító utat, és egy  $Y$  párosítást, amire  $|Y| = |X| + 1$ , vagy megállapítjuk, hogy  $X$  maximális.

**6.1. Algoritmus (Edmonds).**

$Q$ -val jelöljük az  $X$  által fedetlen csúcsok halmazát.

1.eset: Nincs  $Q \rightarrow Q$  pozitív hosszúságú  $X$ -alternáló élsorozat. Ekkor  $X$  maximális. STOP

2.eset: Van  $Q \rightarrow Q$  pozitív hosszúságú  $X$ -alternáló élsorozat.

Legyen  $U = (v_0, v_1, \dots, v_t)$  egy legrövidebb ilyen élsorozat.

2a) Ha  $U$   $X$ -javító út, akkor  $Y$ -t úgy kapjuk, hogy

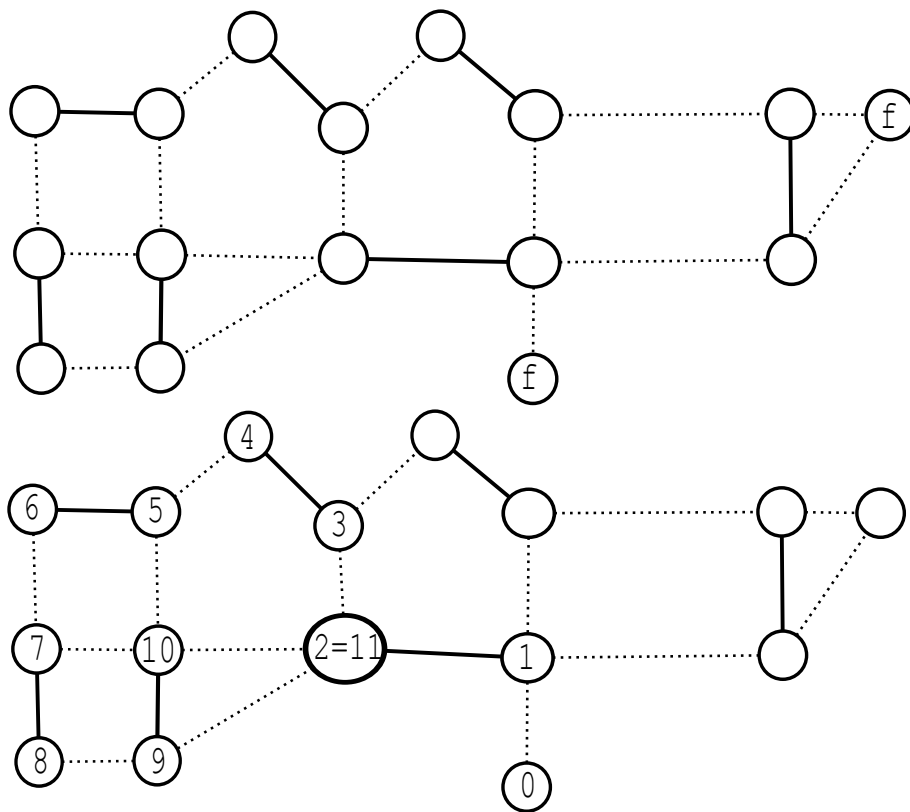
$X$ -et  $U$ -mentén feljavítjuk. STOP

- 2b) Ha  $U$  nem  $X$ -javító út, akkor keressünk olyan  $i < j$  párt, hogy  $v_i = v_j$ , és  $j$  a lehető legkisebb.  $X$ -et módosítsuk a  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i)$  nyél mentén úgy, hogy a nyél éleit felváltva bevesszük  $X$ -be, kivesszük  $X$ -ből. Ekkor  $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$  egy  $X$ -blossom. Alkalmazzuk az algoritmust rekurzív módon  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}/C$ -re és  $X' = X/C$ -re.
- Ha  $\mathcal{G}'$ -ben található  $X'$ -javító  $U'$  út, akkor készítsünk ebből egy  $U$   $X$ -javító utat  $\mathcal{G}$ -ben (ld. Alaptétel).
  - Ha  $X'$  maximális  $\mathcal{G}'$ -ben, akkor  $X$  is maximális  $\mathcal{G}$ -ben (Alaptétel).

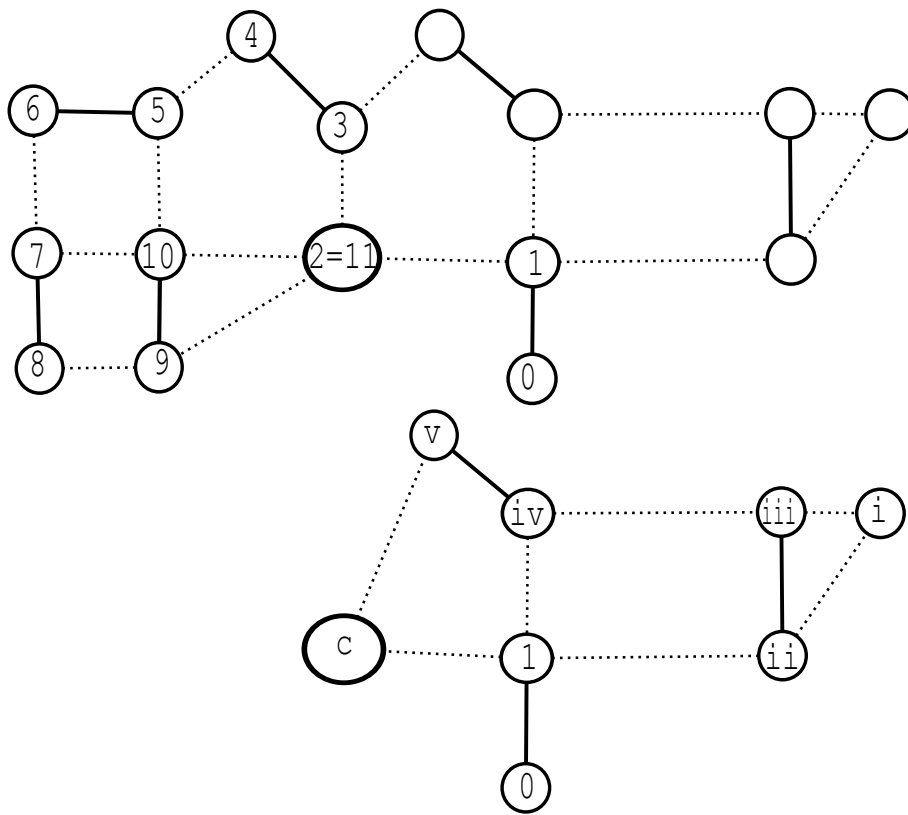
Megjegyzés: A 2a) esetben a párosítás elemszáma növekszik, a 2b) esetben pedig a kontrakció miatt csökken a pontok száma. Ezért az algoritmus véges. Megmutatható, hogy  $n$  csúcs és  $m$  él esetén az algoritmus műveletigénye  $O(n^2m)$ . Megemlítjük még, hogy a kontrakció akkor is alkalmazható, ha bármilyen módon (tehát nem a legrövidebb  $X$ -alternáló élsorozat részeként) találtunk egy blossomot.

Példaként tekintsük a 6.7. ábrán látható 16 pontból álló gráfot, és a vastag vonalakkal jelölt 7 élből álló párosítást! Két fedetlen pont van, ezeket  $f$ -fel megjelöltük. Az alsó fedetlen pontból  $X$ -alternáló élsorozatot indítunk, ennek a pontjai  $0, 1, 2, 3, 4, \dots, 11$ , és a 11-es pont azonos lesz a 2-essel. A 6.1 állításnak megfelelően 2 páros, 11 páratlan. Egy virágot kaptunk, ahol a virág feje egy 9 élt tartalmazó kör, a nyele 2 élből áll.

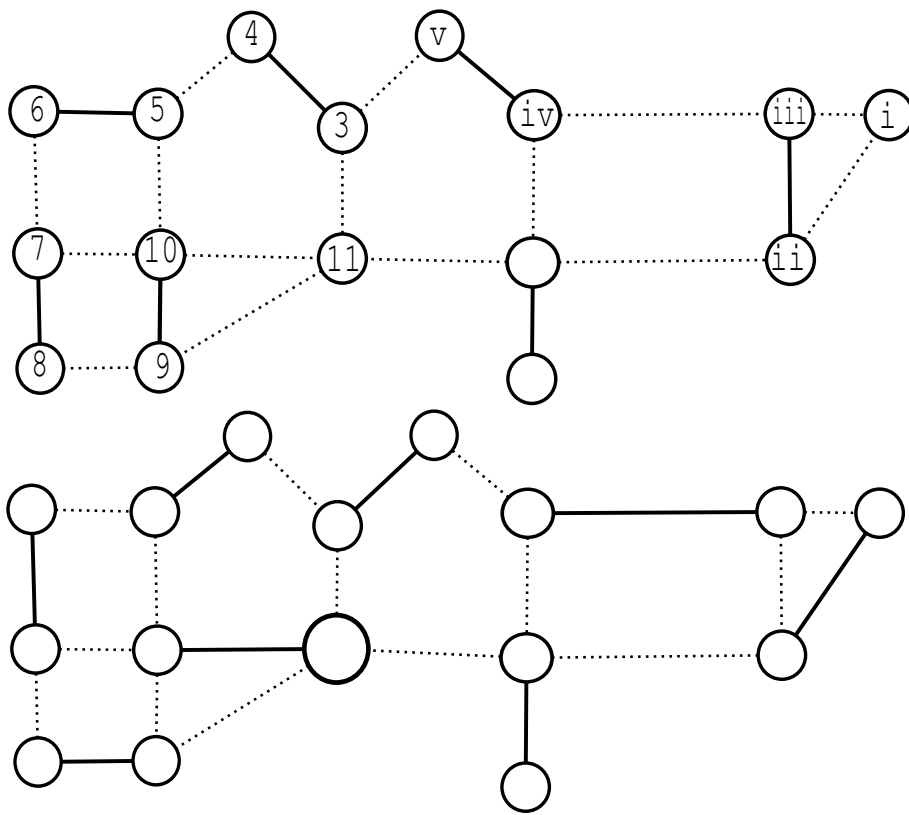
Az algoritmus 2b) pontja szerint a 6.8. ábra felső részén látható módon a nyél mentén az  $X$ -beli éleket  $X$ -ből kivesszük és fordítva. Eredményül  $X$  éleinek száma nem változik, a virág feje viszont blossom lesz. Az alaptétel szerint végrehajtjuk a kontrakciót. Eredményül a 6.8. ábra alsó felén látható 8 pontú gráfot kapjuk, ahol a kontrakció során a virág fejből a  $c$  ún. pszeudo-csúcs keletkezett. Figyelemreméltó, hogy a  $c$  csúcs fedetlen. A kis gráfban találunk egy javító utat, melynek a pontjai  $i, ii, iii, iv, v, c$ . A javító út utolsó  $(v, c)$  éle a kontrakció során az  $(v, 3)$  élből keletkezett. 3 páratlan, tehát az alaptétel bizonyításában leírt módon a javító utat a blossomon belül növekvő irányban tudjuk folytatni. Eredményül a nagy gráfban a 6.9. ábra felső részén látható  $i, ii, iii, iv, v, 3, 4, 5, \dots, 11$  javító út



6.7. ábra. Rekurzív algoritmus 1.



6.8. ábra. Rekurzív algoritmus 2.



6.9. ábra. Rekurzív algoritmus 3.

adódik. A 11-es fedetlen pont a virág fejének és nyelének közös pontja. Elvégezve a javítást, a 6.9. ábra alsó felén látható párosítást kapjuk. Ez egy 8 élből álló teljes párosítás, tehát maximális.

## 6.2. Páratlan ponthalmaz fedés (odd set cover)

Tudjuk, hogy nempáros gráfban a lefogó pontok minimális száma nagyobb lehet a független élek maximális számánál. Ezért, amikor  $f_{\max}$  értékére pontos felső becslést akarunk kapni, nem elegendő pusztán pontokkal lefogni a gráf éleit. Pontokon kívül páratlan számú pontból álló ponthalmazokat is használni fogunk, így jutunk el a páratlan ponthalmaz fedés fogalmához.

**6.4. Definíció** (páratlan fedő ponthalmaz). Legyen  $Q \subset P$  egy ponthalmaz, ahol a pontok száma páratlan.  $Q$  lefedi azokat az  $e$  éleket, melyekre

$|Q| = 1$  esetén az  $e$  él  $Q$  – ban végződik.

$|Q| > 1$  esetén  $e$  mindkét végpontja  $Q$  – ban van.

A páratlan ponthalmaz  $c(Q)$  kapacitását a következőképpen definiáljuk:

$$c(Q) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |Q| = 1 \\ k & \text{ha } |Q| = 2k + 1 \end{cases}$$

Tehát például egy 3 pontból álló ponthalmaz kapacitása 1, az öt pontból álló ponthalmazok kapacitása 2, és így tovább. Ez megfelel annak a ténynek, hogy egy 3 pontú részgráfban a független élek száma legfeljebb egy, 5 pontú részgráfban legfeljebb 2, stb.

**6.5. Definíció** (páratlan ponthalmaz fedés (odd set cover)). Az  $\Omega = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_s\}$  halmazrendszert páratlan ponthalmaz fedésnek nevezzük, ha

mindegyik  $Q_i$  a gráf páratlan számú pontjából áll, és

mindegyik  $e \in E$  élt lefedi valamelyik  $Q_i$  ponthalmaz.

A páratlan ponthalmaz fedés kapacitása a benne szereplő páratlan ponthalmazok kapacitásainak összege.

$$c(\Omega) = \sum_{i=1}^s c(Q_i)$$



**6.2. Állítás** (gyenge dualitás). *Legyen a  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráfban  $\Omega$  egy tetszőleges páratlan ponthalmaz fedés. Ekkor a független élek száma nem haladhatja meg  $\Omega$  kapacitását.*

$$f_{\max} \leq c(\Omega)$$

*Bizonyítás.* A páratlan ponthalmaz fedés bármelyik egyelemű ponthalmazra legfeljebb 1 független élt fedhet le, hiszen két független él nem találkozhat. Ugyanakkor egy  $2k + 1$  elemű páratlan ponthalmaz legfeljebb  $k$  darab független élt fedhet le, mert  $k + 1$  független élnek már  $2k + 2$  végpontja van. A lefedhető élek számának felső korlátja mindkét esetben a páratlan ponthalmaz kapacitása. A teljes páratlan ponthalmaz fedés halmazai együtt legfeljebb annyi független élt fedhetnek le, amennyi a kapacitásaik összege, tehát  $\Omega$  kapacitása.  $\square$

Minden lefogó pontrendszer páratlan ponthalmaz fedés (1 páratlan szám), ezért ez az eredmény a (3.1) felső korlát javítása. A jelenlegi felső becslés is egy tipikus dualitás-szituáció, ami természetesen a megszokott következményekkel jár.

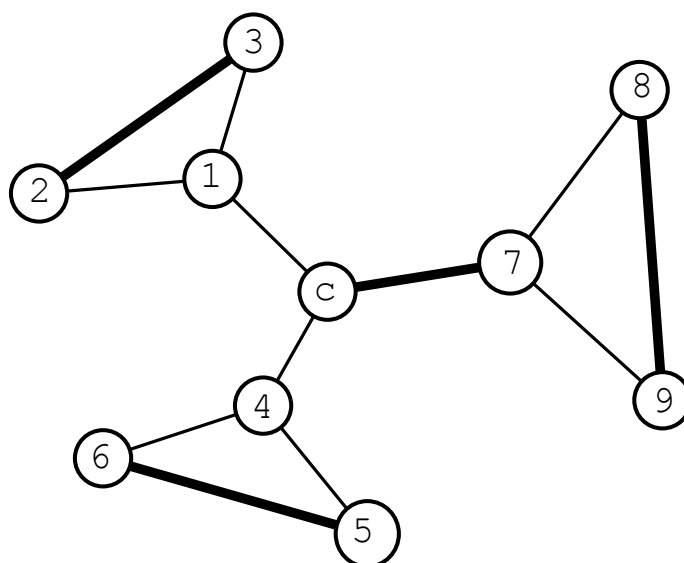
**6.1. Következmény.** *Legyen a  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráfban  $X$  egy párosítás és  $\Omega$  egy páratlan ponthalmaz fedés. Ha*

$$|X| = c(\Omega),$$

*akkor  $X$  maximális párosítás,  $\Omega$  pedig egy minimális kapacitású páratlan ponthalmaz fedés.*

Ezt a nyilvánvaló következményt gyakran használjuk annak felismerésére, hogy egy párosítás maximális. Tekintsük például a 6.10. ábrán látható gráfot! A vastagon jelzett 4 darab független él maximális párosítást alkot. Ezt onnan tudjuk, hogy találunk olyan páratlan ponthalmaz fedést, aminek 4 a kapacitása. A négy páratlan ponthalmaz a következő:  $Q_1 = \{c\}$  a centrum,  $Q_2 = \{1, 2, 3\}$ ,  $Q_3 = \{4, 5, 6\}$  és  $Q_4 = \{7, 8, 9\}$  a háromszögek.  $c(Q_1) = 1$ ,  $c(Q_2) = c(Q_3) = c(Q_4) = 1$ , tehát a kapacitások összege (csak) 4. Az olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy valamennyi él pontokkal történő lefogásához 6 pontra lenne szükség.

Nevezetes tény, hogy a páratlan ponthalmaz fedések kapacitásainak minimuma éppen a független élek maximális száma. Tehát itt egy tipikus dualitás-szituációval találkozunk, ezért a minimális kapacitású páratlan ponthalmaz fedés feladatot a maximális párosítás feladat diszkrét duálisának tekinthetjük.



6.10. ábra. Példa páratlan ponthalmaz fedésre

**6.2. Tétel** (erős dualitás). *Tetszőleges  $G$  gráfban a független élek maximális száma azonos a páratlan ponthalmaz fedések kapacitásainak minimumával.*

$$f_{\max} = \min_{\Omega \text{ páratlan ponthalmaz fedés}} c(\Omega)$$

*Bármelyik  $X$  maximális párosítás esetén olyan minimális kapacitású páratlan ponthalmaz fedés is létezik, ahol a benne szereplő  $Q_i$  páratlan ponthalmazok diszjunktak, és az egy pontból álló  $Q_i$  ponthalmazok  $X$  által fedettek.*

Például a 6.2. ábra bal oldalán látható 10 pontú gráfban a független élek maximális száma 5 (például az öt „küllő” független). Az olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy valamennyi él pontokkal történő lefogásához 6 pontra lenne szükség. Ugyanakkor megadhatunk két páratlan ponthalmazt a következőképpen:  $Q_1 =$  egy tetszőleges pont,  $Q_2 =$  a többi 9 pont.  $c(Q_1) = 1$ ,  $c(Q_2) = 4$ , tehát a kapacitások összege (csak) 5.

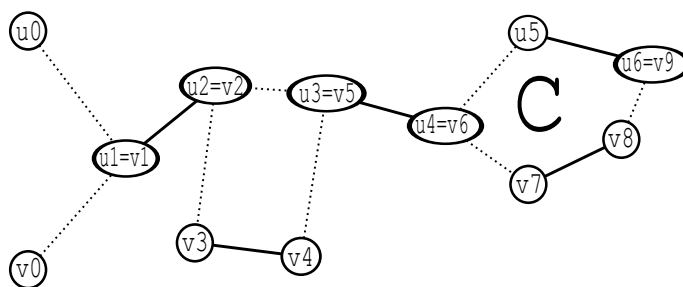
A tétel bizonyítása rekurzív és konstruktív. A rekurziót a kontrakció során kapott kisebb gráfra alkalmazzuk: feltesszük, hogy erre igaz a tétel, és ebből bebizonyítjuk a tételt a kontrakció előtti gráfra.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a gráfnak  $n$  pontja van.  $n = 1, 2, 3$  esetén a tétel állításai rendkívül egyszerűen ellenőrizhetőek. A továbbiakban  $n \geq 4$ ,  $X$  egy maximális párosítás. Négy esetet különböztetünk meg.

1. eset: az  $X$  párosítás teljes. Ekkor  $n = 2k$ ,  $|X| = k$ . Legyen  $Q_1 =$  egy tetszőleges pont,  $Q_2 =$  az összes többi pont, ezek ketten lefedik az összes élt. Ekkor  $c(Q_1) = 1$ ,  $c(Q_2) = k - 1$ , tehát a páratlan ponthalmaz fedés kapacitása is  $k$ . A két fedő halmaz diszjunkt, minden pont  $X$  által fedett, tehát a tétel valamennyi állítása teljesül.

2. eset: az  $X$  párosítás nem teljes, de létezik  $\mathcal{G}$ -ben egy  $C$  blossom. Ekkor a  $C$  blossom pontjait összehúzzuk (kontrakció) egy  $c$  pszeudo-csúcsra. Ha  $C$ -nek  $2m + 1$  éle van, akkor a kontrahált  $\mathcal{G}'$  gráfnak  $n - 2m$  pontja van,  $X/C$ -t  $X'$ -vel jelölve a párosítás éleinek száma a kontrakció során  $m$ -mel csökkent. Az alaptétel szerint  $X'$  maximális párosítás  $\mathcal{G}'$ -ben. Teljes indukcióval feltehetjük, hogy  $\mathcal{G}'$ -ben létezik olyan  $\Omega' = \{Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_s\}$  páratlan ponthalmaz fedés, amire  $|X'| = c(\Omega')$ , és a tétel többi állítása is teljesül (a fedő halmazok diszjunktak, az egypontú fedő halmazok  $X'$  által fedettek). Az alaptétel bizonyításában láttuk, hogy a  $c$  pszeudo-csúcs fedetlen. Ezért  $\{c\}$  nem lehet egypontú fedő halmaz. Ha  $c \in Q'_i$  valamelyik  $i$ -re, akkor a de-kontrakció után  $Q_i = Q'_i \cup C$  továbbra is páratlan fedő halmaz lesz (a pontok száma  $2m$ -mel nő), a többi fedő halmaz nem változik. Ha  $c$  egyik  $Q'_i$ -nek sem eleme, akkor  $C$  lesz a de-kontrakció során egy új páratlan fedő halmaz. Megmutatjuk, hogy mindkét esetben az új (vagy megújult) páratlan halmazrendszer lefedi  $G$  valamennyi élét. Ha egy él mindkét végpontja  $C$ -ben van, akkor  $C$  vagy  $Q_i = Q'_i \cup C$  lefedi az élt. Ha egy  $(i, j)$  élre  $i \notin C$  és  $j \in C$ , akkor  $\mathcal{G}'$ -ben az  $(i, c)$  élt lefedte valamelyik  $Q'_i$ . Ha egypontú volt a fedő halmaz, akkor ez csak  $\{i\}$  lehetett, mert a  $c$  fedetlen pont nem lehetett egypontú fedőhalmaz. Ekkor  $\{i\}$  lefedi az  $(i, j)$  élt. Ha az  $(i, c)$  élt többpontú fedőhalmaz fedte le, akkor ez a fedőhalmaz  $C$  pontjaival bővítve lefedi az  $(i, j)$  élt. A de-kontrakció során a párosítás elemszáma és a páratlan ponthalmaz fedés kapacitása is  $m$ -mel nő, tehát továbbra is azonosak lesznek. Könnyen látható, hogy a tétel többi állítása (a fedő halmazok diszjunktak, az egypontú fedő halmazok  $X$  által fedettek) is teljesül.

3. eset: az  $X$  párosítás nem teljes, és  $\mathcal{G}$ -ben nem létezik blossom, de létezik virág. A virág nyelén felcseréljük az  $X$ -en kívüli és az  $X$ -beli éleket. A nyél hossza páros, tehát  $X$  elemszáma nem változik, az új  $X$  párosítás is maximális. A 6.1 állítás szerint ekkor a virág feje blossom lesz. Ezzel a 3. esetet visszavezettük a 2. esetre.

6.11. ábra. Páros és páratlan hosszú  $X$ -alternáló utak találkozása

4. eset: az  $X$  párosítás nem teljes, és  $\mathcal{G}$ -ben nem létezik sem blossom sem virág. Ebben az esetben megadunk egy minimális páratlan ponthalmaz fedést, amelyben legfeljebb egy többpontú ( $|Q_i| \geq 3$ ) fedő halmaz található. Az  $X$  által fedetlen pontok halmazát jelöljük  $Q$ -val. Ezeket a pontokat gyökereknek nevezük. Definiálunk egy  $S$  és egy  $T$  ponthalmazt a következőképpen.

$$S = \{i \in P \mid \exists(Q \rightarrow i) \text{ páros hosszúságú } X\text{-alternáló út} \}, \text{ és}$$

$$T = \{j \in P \mid \exists(Q \rightarrow j) \text{ páratlan hosszúságú } X\text{-alternáló út} \}.$$

A 0 hosszúságú utak hossza páros, tehát minden fedetlen pont az  $S$  halmazban van ( $Q \subset S$ ).

-Megmutatjuk, hogy az  $S$  és  $T$  ponthalmazok diszjunktak. Valóban, legyen  $\mathcal{U}$  egy páros hosszúságú  $X$ -alternáló út, amelyik a  $G_{y1}$  gyökérből az  $i$  pontba vezet,  $\mathcal{V}$  pedig egy páratlan hosszúságú  $X$ -alternáló út, amelyik a  $G_{y2}$  gyökérből az  $i$  pontba vezet. (A 6.11. ábrán  $\mathcal{U}$  hossza 6,  $\mathcal{V}$  hossza 9.) Ha a két út egyetlen közös pontja az  $i$  pont, akkor a két út együtt a  $G_{y1} = G_{y2}$  esetben blossom-ot, a  $G_{y1} \neq G_{y2}$  esetben pedig javító utat alkotna, ami ellentmondás. Ha viszont a két útnak korábban is voltak közös pontjai, akkor a két út egyesítése virágot tartalmaz, ami szintén nem felel meg a 4. eset feltételeinek. (A 6.11. ábrán  $\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\}$  a virág nyelének pontjai,  $\{u_4, u_5, u_6, v_8, v_7, v_6\}$  a virág feje.) A virág feje az utolsó előtti közös pont és az  $i$  pont közötti részekből áll, ennek részletezését az olvasóra bizzuk (ld. még 6.1., 6.2. feladatok).

-Megmutatjuk, hogy ha egy  $X$ -beli él egyik végpontja  $S$ -ben van, akkor a másik végpont  $T$ -ben van. Valóban, legyen  $e$  az  $X$  párosítás éle, az  $i$  pont pedig ennek egy  $S$ -hez tartozó végpontja. Hogyan került  $i$  az  $S$  halmazba? Valamelyik gyökérből páros hosszúságú  $X$ -alternáló út  $X$ -beli éllel érkezik  $i$ -be. Ezen az úton az  $i$ -t megelőző  $j$  pont  $T$ -ben volt, a  $(j, i)$  él az  $X$  párosítás éle. Az  $i$  pontban a

párosításnak csak egy éle végződhet, tehát  $e = (i, j)$ .

-Megmutatjuk, hogy ha egy  $X$ -beli él egyik végpontja  $T$ -ben van, akkor a másik végpont  $S$ -ben van. Valóban, legyen  $e$  az  $X$  párosítás éle, a  $j$  pont pedig ennek egy  $T$ -hez tartozó végpontja. Hogyan került  $j$  a  $T$  halmazba? Valamelyik gyökérből páratlan hosszúságú  $X$ -alternáló út  $X$ -en kívüli éllel érkezik  $j$ -be. Ezt az utat az  $e$  éllel folytathatjuk, és akkor  $e$  másik végpontja ugyanabból a gyökérből páros hosszúságú  $X$ -alternáló úton érhető el, tehát az  $S$  halmazhoz tartozik.

Mindezt összevetve az  $X$  párosítás éleit két csoportba lehet osztani. Az első csoportba azok az élek tartoznak, melyeknek az egyik vége  $S$ -ben, a másik vége  $T$ -ben van. Ezeknek az éleknek a száma a  $T$ -beli pontok számával azonos, és ezeket az éleket a  $T$ -beli pontok lefogják. A másik csoportba az a  $p$  darab él tartozik, melyeknek egyik végpontja sem érhető el fedetlen pontból  $X$ -alternáló úttal. A második csoportba tartozó éleknek összesen  $2p$  pontja van, mindegyik  $S \cup T$ -n kívül.  $p > 0$  esetén legyen  $Q_1$  ezen pontok közül egy pont, és  $p > 1$  esetén legyen  $Q_2$  a többi  $2p - 1$  darab pont. A  $Q_1$  pont valamint  $p > 1$  esetén a  $Q_2$  páratlan ponthalmaz kapacitásainak összege  $1 + p - 1 = p$ , és ez a két páratlan halmaz lefedi a párosítás második csoportba tartozó éleit. Tehát a  $T$ -beli pontok, a  $Q_1$  pont és  $p > 1$  esetén a  $Q_2$  páratlan ponthalmaz olyan  $\Omega$  páratlan ponthalmaz-rendszert alkotnak, melynek a kapacitása az  $X$  párosítás éleinek száma. Ezek a páratlan fedőhalmazok diszjunktak, és az egy pontú halmazok  $X$  által fedett pontból állnak. Tehát a keresett  $\Omega$  páratlan ponthalmaz fedés a következő:

$$\Omega = \{\text{a } T\text{-beli pontok, } Q_1 \text{ és } p > 1 \text{ esetén } Q_2\}.$$

Hátra van még annak igazolása, hogy  $\Omega$  lefedi a gráf valamennyi élét. Két  $S$ -beli pont között nem lehet él, mert akkor  $S$  és  $T$  nem lennének diszjunktak ( $S$ -beli pont szomszédja  $T$ -beli). Nem létezhet él egy  $S$ -beli pont és a  $Q_1$  illetve  $Q_2$  ponthalmaz valamelyik  $j$  pontja között sem, mert akkor a  $j$  pont a  $T$  halmazba került volna. Tehát 3-féle él maradt:

1. Az  $e$  él egyik végpontja  $T$ -ben van
2. Az  $e$  él egyik végpontja  $Q_1$ -ben van
3. Az  $e$  él mindkét végpontja  $Q_2$ -ben van

$\Omega$  mindhárom esetben lefedi az  $e$  élt, tehát a tétel valamennyi állítása teljesül.  $\square$

**6.1. Feladat.** Legyen  $\mathcal{U}$  egy páros hosszúságú  $X$ -alternáló út, amelyik a  $G_{y1}$  fedetlen pontból az  $i$  pontba vezet,  $\mathcal{V}$  pedig egy páratlan hosszúságú  $X$ -alternáló út, amelyik a  $G_{y2}$  fedetlen pontból az  $i$  pontba vezet. Igazoljuk, hogy  $G_{y1} \neq G_{y2}$  esetén  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  vagy javító út, vagy pedig tartalmaz virágot.

**6.2. Feladat.** Legyen  $\mathcal{U}$  egy páros hosszúságú  $X$ -alternáló út, amelyik a  $G_y$  fedetlen pontból az  $i$  pontba vezet,  $\mathcal{V}$  pedig egy páratlan hosszúságú  $X$ -alternáló út, amelyik a  $G_y$  fedetlen pontból az  $i$  pontba vezet. Igazoljuk, hogy  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  vagy blossom, vagy pedig tartalmaz virágot.

**6.6. Definíció.** Tetszőleges  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráf és  $Q \subset P$  ponthalmaz esetén  $o(\mathcal{G} - Q)$ -val jelöljük a  $Q$  pontjainak elhagyásakor keletkező páratlan (pontot tartalmazó) komponensek számát.

**6.3. Feladat (Tutte-tétel).** A 6.2. tételből bizonyítsuk be, hogy egy irányítatlan gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, ha tetszőleges  $Q \subset P$  ponthalmazra  $o(\mathcal{G} - Q) \leq |Q|$ .

A független élek maximális száma pontosan megadható a ponthalmazok elhagyásakor keletkező páratlan komponensek számának segítségével is. Ezt mondja ki a következő tétel:

**6.3. Tétel (Tutte-Berge formula).** Tetszőleges  $\mathcal{G} = (P, E)$  irányítatlan gráf esetén

$$f_{\max} = \min_{U \subset P} (|P| + |U| - o(\mathcal{G} - U))/2. \quad (6.1)$$

Ezt a tételt nem bizonyítjuk, a bizonyítás megtalálható Schrijver [Sch03] monográfiájában (ld. 24.1. Tétel). Szintén bizonyítás nélkül idézzük azt a struktúra-tételt, amelyik megad egy olyan  $U$  ponthalmazt, melyre a 6.1. képletben szereplő minimum felvétetik.

**6.4. Tétel (Gallai-Edmonds dekompozíció).** A  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráfban legyen

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) = \{p \in P \mid \text{van olyan maximális párosítás, melynél } p \text{ fedetlen}\},$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{D}(\mathcal{G}) \text{ szomszédjainak halmaza, és}$$

$$\mathcal{C}(\mathcal{G}) = P - \mathcal{A}(\mathcal{G}) - \mathcal{D}(\mathcal{G}).$$

Ekkor az  $U := \mathcal{A}(\mathcal{G})$  ponthalmaz minimumot ad a 6.1. képletben. Ezenkívül  $\mathcal{G} - U$  páratlan komponenseinek uniója  $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ , a páros komponensek uniója pedig  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ .

A bizonyítás megtalálható többek között Schrijver [Sch03] sokat idézett könyvében (ld. 24.7. Tétel).

### 6.3. Pontok fedése élekkel

Ebben az alfejezetben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy hogyan lehet a gráf valamennyi pontját minél kevesebb él felhasználásával lefedni. Képzeljük el, hogy egy konferencia résztvevőit kétágyas szobákban lehet elhelyezni. Ismert, hogy ki kivel hajlandó egy szobában lakni. (A hajlandóság kölcsönös: az  $(i, j)$  él azt jelenti, hogy  $i$  és  $j$  elhelyezhető egy szobában.) Mindenkit el kell helyezni, és minimalizálni akarjuk a szobák számát. Bármelyik résztvevővel előfordulhat, hogy egyedül kerül egy kétágyas szobába. Ezt úgy oldjuk meg, hogy felvesszünk egy fiktív pontot (senki), és ebből élt húzunk mindegyik valódi pontba.

Tehát az a kérdés, hogy minimálisan hány élre van szükség valamennyi pont lefedéséhez? Egy pontot csak akkor lehet lefedni, ha a pont nem izolált, tehát létezik belőle kiinduló él. Mindegyik él két pontot (a saját végpontjait) fed le, ezért  $n$  pontú gráfban biztosan szükség van legalább  $n/2$  élre. Ha  $n$  páros, és  $n/2$  él elég valamennyi pont lefedéséhez, akkor az  $n/2$  darab lefedő él egy teljes párosítás. Ha viszont  $f_{\max}$ -tehát a független élek maximális száma - nem éri el  $n/2$ -t, akkor a lefedő élek nem lehetnek valamennyien függetlenek.

**6.5. Tétel.** Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy  $n$ -pontú gráf, és tegyük fel, hogy mindegyik pont valamelyik él végpontja. A valamennyi pontot lefedő élek minimális számát jelöljük  $fed_{\min}$ -nel. Ekkor

$$f_{\max} + fed_{\min} = n. \quad (6.2)$$

*Bizonyítás.* Ha  $X$  egy maximális párosítás  $\mathcal{G}$ -ben, akkor az  $X$  által fedetlen  $n - 2 \times f_{\max}$  darab pontot tetszőlegesen választott egy-egy éllel lefedve fedő élrendszert kapunk, ahol az élek száma  $f_{\max} + n - 2 \times f_{\max} \geq fed_{\min}$ . Ezért

$$f_{\max} + fed_{\min} \leq n. \quad (6.3)$$

Ha viszont  $M$  egy minimális számú élből álló minden pontot lefedő élhalmaz, akkor ezen belül legyen a független élek maximális száma  $k$ , a  $k$  darab független élből álló halmaz pedig  $Y$ . Két  $Y$  által fedetlen pontot  $M$ -beli él nem köt össze ( $k$  maximális), tehát  $k + n - 2 \times k = |M| = fed_{\min}$ , azaz  $k + fed_{\min} = n$ . Ugyanakkor  $k \leq f_{\max}$ , ezért

$$f_{\max} + fed_{\min} \geq n. \quad (6.4)$$

□

Ez azt jelenti, hogy a valamennyi pontot lefedő minimális számú él megadása ugyanolyan nehéz, mint maximális számú független él keresése. A maximális párosítás által fedetlen pontokat tetszés szerint lefedhetjük egy-egy éllel, és így minimális lefedő élhalmazt kapunk.



## 7. fejezet

# Optimális súlyozott párosítások nempáros gráfban

Ebben a fejezetben  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf, amelyik nem (feltétlenül) páros, tehát páratlan hosszúságú körök is előfordulhatnak. Az 5. fejezethez hasonlóan feltételezzük, hogy minden  $e = (i, j)$  élnek van egy  $w(e) = w_{ij} \geq 0$  súlya. Élhalmaz súlyát (vagy összsúlyát) a benne szereplő élek súlyainak összegeként határozzuk meg, tehát  $X \subset E$  esetén

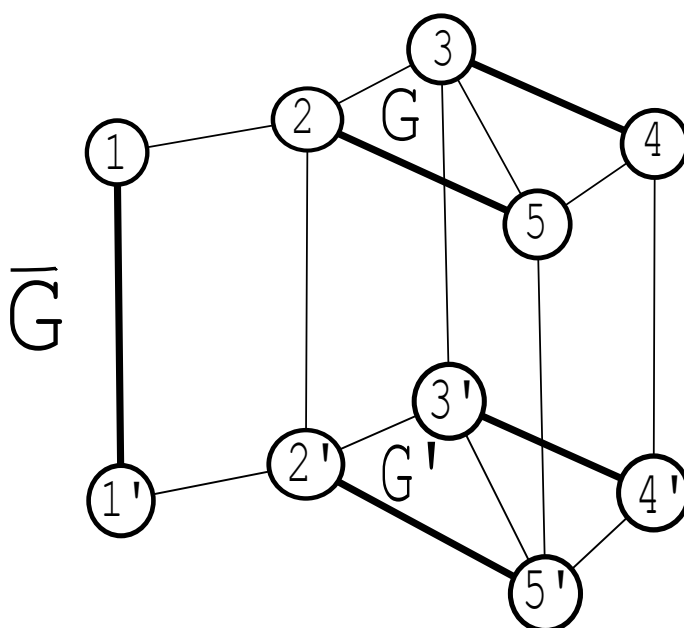
$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e).$$

### 7.1. Különböző optimumfeladatok

Alapvetően háromféle optimális párosítás előállításával foglalkozunk.

1. Maximális összsúlyú párosítás
2. Maximális összsúlyú teljes párosítás
3. Minimális összsúlyú teljes párosítás

Először megmutatjuk, hogyan lehet az 1. problémát visszavezetni a 2.-ra. A  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráfból készítünk egy  $\mathcal{G}' = (P', E')$  másodpéldányt. Tehát  $P'$  ugyanannyi pontból áll, mint  $P$ , és  $e' = (i', j')$  pontosan akkor él a másodpéldányban, ha  $e = (i, j)$  az eredeti  $\mathcal{G}$  gráf éle. (Ezt úgy mondjuk, hogy  $\mathcal{G}$  és  $\mathcal{G}'$  izomorfak.) Készítünk egy  $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{P}, \bar{E})$  gráfot a következőképpen. A  $\mathcal{G}$  és  $\mathcal{G}'$  gráfokat képzeljük



7.1. ábra. Visszavezetés teljes párosításra

el vízszintesen, egyiket a másik felett, és az eredeti éleken kívül húzzuk még be az összes függőleges élt. Tehát

$$\bar{P} = P \cup P', \text{ és}$$

$$\bar{E} = E \cup E' \cup \{(i, i') \mid i \in P\}.$$

$\mathcal{G}$ -ben és  $\mathcal{G}'$ -ben megtartjuk az eredeti súlyokat, a függőleges élek súlya 0 lesz.

Egy példa látható a 7.1. ábrán. Ha a  $\mathcal{G}$  gráfnak  $n$  pontja és  $m$  éle, van, akkor  $\mathcal{G}'$ -nek ugyanennyi, a  $\bar{\mathcal{G}}$  gráfnak  $2n$  pontja és  $2m+n$  éle van.  $\bar{\mathcal{G}}$ -ben mindenképpen van teljes párosítás, például az összes „függőleges” él teljes párosítást alkot.

**7.1. Állítás.** Az alábbi két feladat ekvivalens:

1. Maximális összsúlyú párosítás keresése  $\mathcal{G}$ -ben
2. Maximális összsúlyú teljes párosítás keresése  $\bar{\mathcal{G}}$ -ben

*Bizonyítás.* Legyen  $X$  egy maximális összsúlyú párosítás  $\mathcal{G}$ -ben, és  $s = w(X)$  a maximális összsúly. Ekkor  $X$  képe -  $X'$  - nyilvánvalóan maximális összsúlyú párosítás  $\mathcal{G}'$ -ben ugyancsak  $s$  összsúllyal. Ha  $i$   $X$  által fedetlen  $\mathcal{G}$ -ben, akkor természetesen  $i'$   $X'$  által fedetlen  $\mathcal{G}'$ -ben.  $\bar{\mathcal{G}}$ -ben maximális összsúlyú teljes párosítást

kapunk, ha  $X$  és  $X'$  éleit kiegészítjük a fedetlen  $i$  pontokhoz tartozó  $(i, i')$  élekkel, hiszen a függőleges élek súlya 0, és  $\bar{\mathcal{G}}$ -ben természetesen nem lehet  $2s$ -nél nagyobb összsúlyt elérni. Másfelől, ha adott  $\bar{\mathcal{G}}$ -ben egy maximális összsúlyú  $\bar{X}$  teljes párosítás, akkor ennek az élei  $\mathcal{G}$ -ben és  $\mathcal{G}'$ -ben is el kell, hogy ériék az  $s$  összsúlyt, mert a függőleges élek súlya 0. Tehát  $\bar{X}$  egy  $\mathcal{G}$ -beli és egy  $\mathcal{G}'$ -beli maximális összsúlyú párosítást tartalmaz (a kettő nem feltétlenül egymás tükörképe).  $\square$

A 7.1. ábrán  $\mathcal{G}$ -nek és  $\mathcal{G}'$ -nek is 5 pontja van, tehát egyikben sincs teljes párosítás.  $\bar{\mathcal{G}}$ -nak 10 pontja van, ebben egy 5 élből álló teljes párosítást látunk vastag vonallal. Az öt élből egy függőleges az eredetileg fedetlen 1-es és 1' pontokat köti össze.

Most megmutatjuk, hogyan lehet a 2. problémát visszavezetni a 3.-ra. A  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráfból most is készítünk egy  $\mathcal{G}' = (P', E')$  tükörképet (másodpéldányt). Legyen  $M$  a  $\{w(e) \mid e \in E\}$  súlyok maximuma, és definiáljuk  $\mathcal{G}'$ -ben a  $w'(e')$  súlyokat a következőképpen.

$$w'(e') = M - w(e) \mid e \in E$$

Feltételezzük, hogy  $\mathcal{G}$ -ben van teljes párosítás, tehát a pontok száma  $n = 2k$ , és minden teljes párosítás  $k$  darab élből áll. Ha  $X$  teljes párosítás  $\mathcal{G}$ -ben, akkor  $X'$  is teljes párosítás  $\mathcal{G}'$ -ben, és

$$w'(X') = kM - w(X)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy  $X$  összsúlyának maximalizálása  $X'$  összsúlyának minimalizálásával ekvivalens.

A 3. probléma megoldásával foglalkozik a következő alfejezet.

## 7.2. Minimális súlyú teljes párosítás primál-duál algoritmussal

Feltételezzük, hogy a  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráfban van teljes párosítás. Minden  $e$  élhez adott egy  $w(e) \geq 0$  súly. Olyan teljes párosítást keresünk, ahol az összsúly minimális. Az alább ismertetésre kerülő algoritmusban fontos szerepet játszanak a  $P$  ponthalmaz páratlan részhalmazai, valamint a hozzájuk tartozó ún. duál-változók. A gráf páratlan számú pontból álló ponthalmazainak halmazát  $\mathcal{PN}$ -nel jelöljük, tehát

$$Q \in \mathcal{PN} \stackrel{def}{\iff} Q \subset P, \text{ és } |Q| \text{ páratlan szám.}$$

**7.1. Definíció** (duál lehetséges). Az  $y : \mathcal{PN} \rightarrow \mathbb{R}$  vektort *duál lehetségesnek* nevezzük, ha

$$|Q| \geq 3 \text{ esetén } y(Q) \geq 0, \text{ és} \quad (7.1)$$

$$\sum_{Q \in \mathcal{PN}, e \in ki(Q)} y(Q) \leq w(e) \mid e \in E. \quad (7.2)$$

A lehetséges duál vektorok halmazát  $\mathcal{D}(\mathcal{G}, w)$ -vel jelöljük.

Ez azt jelenti, hogy minden legalább 3 pontból álló páratlan  $Q$  ponthalmazhoz nemnegatív  $y(Q)$  duálváltozó tartozik, a  $p$  csúcsokhoz tartozó  $y(p)$  duálváltozók viszont előjelkötetlenek. Bármely  $e$  él esetén az él két végpontjához tartozó duálváltozók összegéhez hozzáadjuk azoknak a legalább 3 pontú páratlan halmazoknak a duálváltozóit, melyekből az  $e$  él kimutat, és az így kapott összeg nem haladhatja meg az él súlyát. Másik jelöléssel ez úgy is írható, hogy

$$y_i + y_j + \sum_{|Q| \geq 3, |Q| \text{ páratlan}, e \in ki(Q)} y(Q) \leq w_{ij} \mid (i, j) \in E$$

Ismét hangsúlyozzuk, hogy ez a duál lehetséges definíció csak ebben az alfejezetben érvényes, ahol a primál feladat egy teljes párosítás összsúlyának a minimalizálása. Duál célfüggvénynek a duál lehetséges vektor valamennyi koordinátájának összegét tekintjük, ami a konstans  $\mathbf{1}$  vektor és az  $y$  vektor skaláris szorzata, tehát

$$\mathbf{1}y = \sum_{Q \in \mathcal{PN}} y(Q) \quad (7.3)$$

A következő állítás a gyenge dualitás tétel diszkrét változata.

**7.2. Állítás.** Legyen  $X$  egy tetszőleges teljes párosítás a  $\mathcal{G}$  gráfban, legyen továbbá  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, w)$  egy tetszőleges duál lehetséges vektor. Ekkor

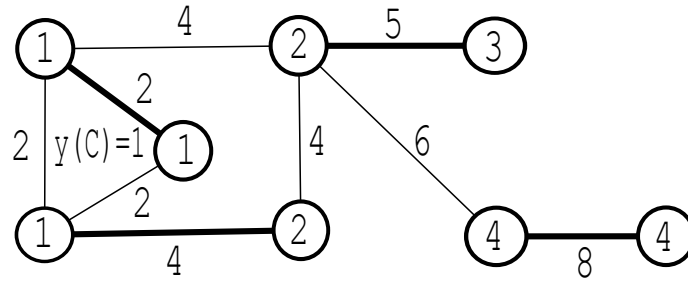
$$\mathbf{1}y \leq w(X)$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$\sum_{Q \in \mathcal{PN}, e \in ki(Q)} y(Q) = w(e) \mid e \in X, \text{ és} \quad (7.4)$$

$$y(Q) > 0 \text{ esetén } |X \cap ki(Q)| = 1 \mid Q \in \mathcal{PN}. \quad (7.5)$$

Ez azt jelenti, hogy a duál-lehetségesség definíciójában szereplő (7.2) egyenlőtlenségnek a párosítás élein egyenlőségként kell teljesülnie, és a lényeges páratlan ponthalmazokból (amiknek a duálváltozója nem 0) a párosításnak egy éle mutat ki.



7.2. ábra. Minimális összsúlyú teljes párosítás optimális duálváltozókkal

*Bizonyítás.*

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e) \geq \sum_{e \in X} \left( \sum_{Q \in \mathcal{PN}, e \in ki(Q)} y(Q) \right)$$

Itt akkor áll fenn egyenlőség, ha (7.4) teljesül. A jobboldali összegben egy  $y(Q)$  annyiszor szerepel, ahány olyan  $e$  éle van az  $X$  párosításnak, amelyik a  $Q$  pont-halmazból kimutat. Tehát a jobboldalt átcsoportosítva

$$\sum_{e \in X} \left( \sum_{Q \in \mathcal{PN}, e \in ki(Q)} y(Q) \right) = \sum_{Q \in \mathcal{PN}} y(Q) |X \cap ki(Q)|$$

$X$  teljes párosítás, tehát minden páratlan pont-halmazból van kifelé mutató éle, egyelemű pont-halmazból pontosan egy él mutat ki, ezért  $|X \cap ki(Q)| \geq 1$ , ha  $Q$  páratlan, és  $|X \cap ki(Q)| = 1$ , ha  $Q$  egy pontból áll.  $y(Q)$  csak egyelemű pont-halmaznál lehet negatív, ezért

$$\sum_{Q \in \mathcal{PN}} y(Q) |X \cap ki(Q)| \geq \sum_{Q \in \mathcal{PN}} y(Q) = \mathbf{1y}$$

Itt pedig pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha (7.5) teljesül. □

A most bizonyított állításból természetesen következik, hogy ha talál valaki egy  $y$  duál lehetséges vektort és egy  $X$  teljes párosítást, és a duál változók összege azonos a párosítás összsúlyával, akkor a párosítás minimális összsúlyú, a duál vektor pedig szintén optimális. Tekintsük például a 7.2. ábrán látható gráfot, ahol az élek mellé írt számok az élek súlyait mutatják. (A példa Csató László gazdaság-matematikai elemző szakos hallgatótól származik (2010).) A pontok duálváltozóit beleírtuk a csúcsokba. Az ábrán egy lényeges páratlan pont-halmaz van, aminek a duálváltozója pozitív: ez a bal oldalon lévő háromszög, amit  $C$ -vel jelöltünk. A vastagon húzott élek minimális összsúlyú párosítást jelölnek. Ezt

onnan tudjuk, hogy a duálváltozók duál lehetséges vektort alkotnak, és teljesülnek a (7.4) és (7.5) feltételek. Például a párosítás bal alsó élén a két végpont duál változóinak összege  $1 + 2$ , és ehhez még hozzáadódik a  $C$  blossom duálváltozója (ami 1), hiszen ez az él  $C$ -ből kifelé mutat. Az is látható, hogy  $C$ -ből a párosításnak pontosan egy éle mutat ki. A párosítás összsúlya és a duálváltozók összege egyaránt 19.

Most ismertetünk egy ún. primál-duál algoritmust, amelyik olyan  $X$  teljes párosítást és duál lehetséges  $y$  vektort készít, melyekre teljesülnek a (7.4) és (7.5) feltételek, tehát mindkettő optimális. Az algoritmusban használni fogjuk a következő jelöléseket:

-Minden  $i \in P$  csúcshoz tartozik egy  $y(i)$  előjelkötetlen duálváltozó.

-A legalább három pontból álló  $Q$  páratlan ponthalmazokhoz  $y(Q) \geq 0$  nemnegatív duálváltozó tartozik. Az  $y$  vektor duál lehetséges, tehát minden  $e = (i, j) \in E$  esetén

$$y(i) + y(j) + \sum_{|Q| \geq 3, |Q| \text{ páratlan}, e \in ki(Q)} y(Q) \leq w(e) \quad (7.6)$$

- $E(y) \subset E$  azon eredeti  $e = (i, j)$  élekből áll, melyekre

$$y(i) + y(j) + \sum_{|Q| \geq 3, |Q| \text{ páratlan}, e \in ki(Q)} y(Q) = w(e)$$

- $\mathcal{G}(y) = (P, E(y))$   $\mathcal{G}$ -nek részgráfja.

- $\Omega \subset \mathcal{PN}$  bizonyos páratlan számú pontból álló ponthalmazok családja.

- $\Omega_{\max}$  az  $\Omega$ -beli tartalmazásra nézve maximális halmazok családja.

- $\mathcal{G}' = \mathcal{G}(y)/\Omega_{\max}$ , tehát ez  $\mathcal{G}(y)$ -ből kontrakcióval készül.

- $X$  egy párosítás  $\mathcal{G}'$ -ben.

- $F$  a  $\mathcal{G}'$ -beli  $X$  által fedetlen pontok halmaza.

### 7.1. Algoritmus (primál-duál-algoritmus).

Induláskor  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ,  $X = \emptyset$ ,  $\Omega = \{\{x\} \mid x \in P\}$ .

Iteráció:  $F$  a  $\mathcal{G}'$ -beli  $X$  által fedetlen pontok halmaza.

Ha  $F$  üres, a  $\mathcal{G}'$ -beli teljes párosítást de-kontrakciókkal

$\mathcal{G}(y)$ -beli teljes párosítássá egészítjük ki. STOP.

Egyébként az  $E(y)$  élhalmazt, és ezzel a  $\mathcal{G}(y)$  és  $\mathcal{G}'$  gráfokat aktualizáljuk.

1.eset:  $\mathcal{G}'$ -ben van  $F \rightarrow F$   $X$ -alternáló élsorozat, amelyik

legalább egy élt tartalmaz. Ezek közül  $U$  legyen az egyik legrövidebb.

- Ha  $U$  egy javító út,  $X$ -et ezzel javítjuk, és iterálunk.
- Ha  $U$  nem javító út, akkor (esetleg a virágnyélen cserével) található egy  $C$  blossom. Ennek a ponthalmazát  $\Omega$ -ba betesszük (kontrakció), az élhalmazt  $X$ -ből elvesszük,  $y(C) = 0$ , és iterálunk.

2.eset:  $\mathcal{G}'$ -ben nincs  $F \rightarrow F$   $X$ -alternáló élsorozat,

amelyik legalább egy élt tartalmaz. Ekkor

- $S$  legyen azon  $\mathcal{G}'$ -beli  $q$  csúcsok halmaza, melyekre páros hosszúságú  $F \rightarrow q$   $X$ -alternáló út létezik.
- $T$  legyen azon  $\mathcal{G}'$ -beli  $q$  csúcsok halmaza, melyekre páratlan hosszúságú  $F \rightarrow q$   $X$ -alternáló út létezik.
- $q \in S$  esetén növeljük  $y(q)$ -t  $d$ -vel,
- $q \in T$  esetén csökkentjük  $y(q)$ -t  $d$ -vel,

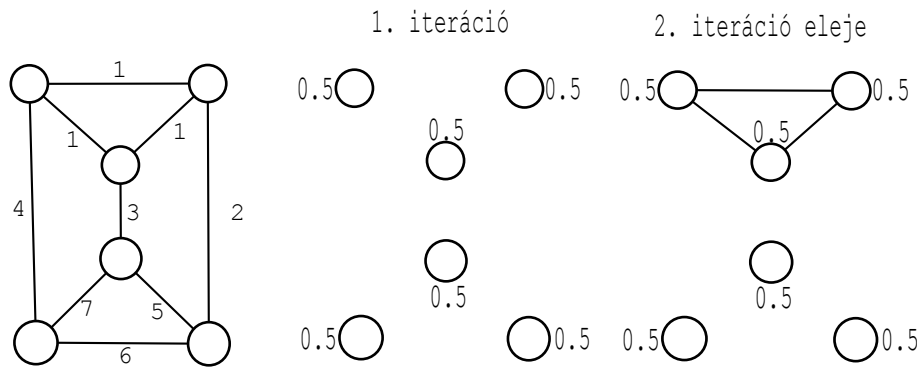
ahol  $d$  a legnagyobb olyan érték, amire  $\mathbf{y}$  még duál lehetséges marad.

Ha ütközéskor  $y(Q) = 0$  lesz valamilyen  $Q \in \Omega$ ,  $|Q| \geq 3$  pontra, akkor  $Q$ -t  $\Omega$ -ból kivesszük (de-kontrakció), és  $X$ -et a nagyobb gráf teljes párosításává egészítjük ki. Iterálunk.

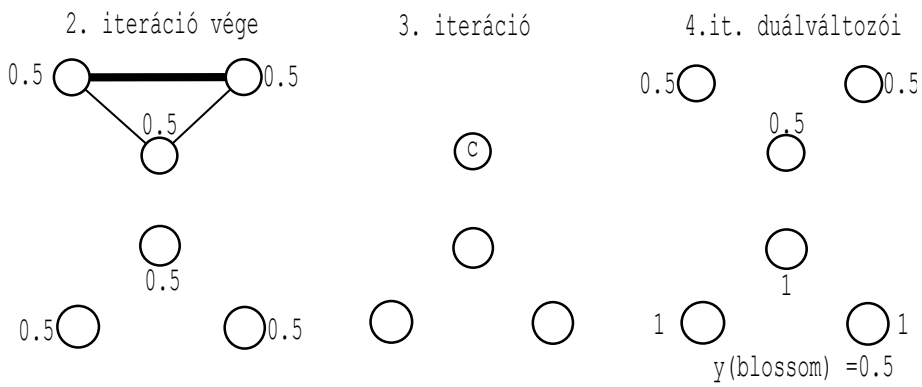
Fontos megjegyzés, hogy mindaddig, amíg a párosítás nem teljes,  $|S| > |T|$ , ezért a duál célfüggvény  $d$ -nek egész számú többszörösével növekszik (ld. Schrijver [Sch03], 26.2 alfejezet). Feltételeztük, hogy létezik teljes párosítás, ezért a duál-célfüggvény felülről korlátos (7.2. Állítás), tehát  $d$  értéke véges.

Példaként kövessük végig az algoritmust a 7.3. ábra bal oldalán látható gráf esetén. Az élek mellé írt számok az él súlyát jelzik.

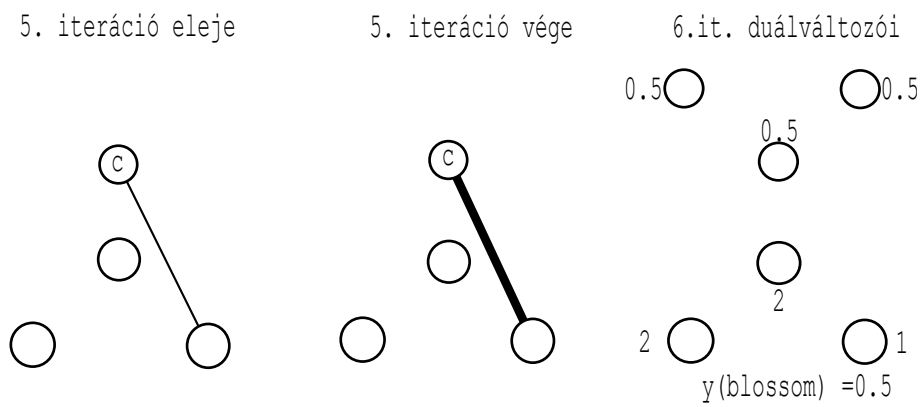
1. iteráció:  $E(y)$  egy élt sem tartalmaz, minden pont  $X$  által fedetlen, tehát minden pont  $S$ -beli. A felső háromszög élein  $d+d \leq 1$  miatt  $d = 0.5$  lesz mindegyik duálváltozó értéke. A csúcsok mellé írt számok mutatják a duálváltozókat.
2. iteráció: A felső háromszög három éle bekerül  $E(y)$ -ba. A 7.4. ábra bal oldalán látható, hogy javítás után a három él közül az egyik az  $X$  párosítás éle lesz.



7.3. ábra. Példa a primál-duál algoritmusra



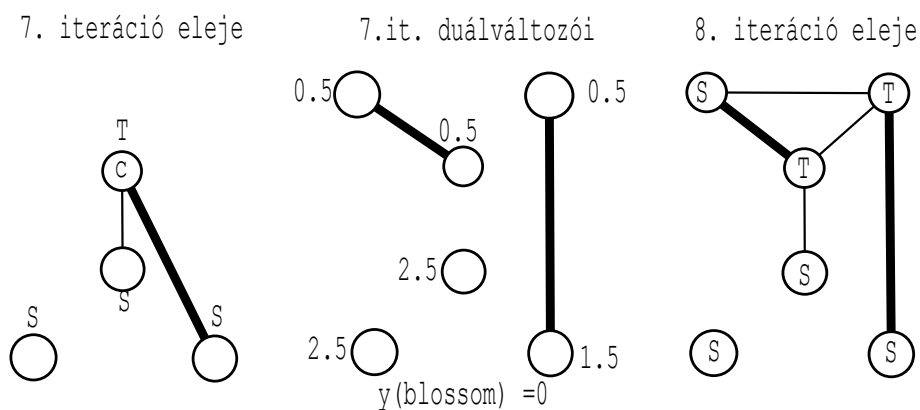
7.4. ábra. A primál-duál algoritmus lépései



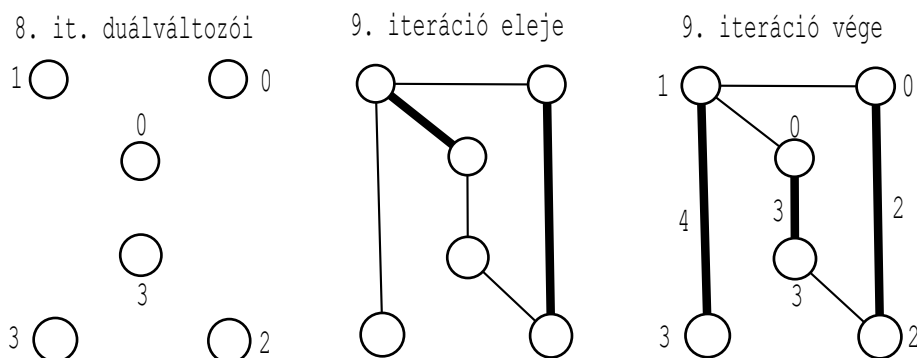
7.5. ábra. A primál-duál algoritmus lépései



3. iteráció: A felső háromszögből létrejött  $C$  blossom-ot összehúzzuk (kontrakció) egy  $c$  pszeudo-csúcsra. A kontrahált gráfban  $X$  üres,  $y(C) = 0$ .
4. iteráció: A kontrahált  $\mathcal{G}'$  gráf 4 pontból áll, egy éle sincs, tehát mind a 4 pont  $S$ -beli. A  $d$  változóra vonatkozó korlátokat az eredeti gráf élein kell meghatározni. A felső háromszögből kimutató jobb oldalon lévő függőleges él súlya 2, ez az él jelenti a legszigorúbb  $0.5 + (0 + d) + (0.5 + d) \leq 2$  felső korlátot. Itt a zárójelen kívüli 0.5 a háromszög jobb-szélső pontjának duálváltozója. Ez a pont nincs a  $\mathcal{G}'$  gráfban, ezért nem került az  $S$  halmazba.  $(0 + d)$  a  $c$  pszeudo-csúcs (tehát a háromszög) duálváltozója,  $(0.5 + d)$  pedig a függőleges él alsó pontjához tartozik. Az eredmény  $d = 0.5$ , az új duálváltozók a 7.4. ábra jobb oldalán láthatóak. A felső háromszög (blossom) duálváltozója 0.5 lett.
5. iteráció: A 7.5. ábra bal oldalán látható, hogy a 2 súlyú él képe a  $\mathcal{G}'$  gráfban bekerült az élek közé, majd javítás során az  $X$  párosításba.
6. iteráció: A  $\mathcal{G}'$  gráf két fedetlen pontja az  $S$  halmazba kerül, ezeknek a duálváltozója  $d$ -vel növekszik.  $d$  felső korlátját ismét az eredeti gráf élein határozzuk meg. A 3 súlyú függőleges él adja a legszigorúbb  $0.5 + 0.5 + (1 + d) \leq 3$  korlátot. Itt az egyik 0.5 ennek az élnek a felső végpontjához tartozik, a másik 0.5 pedig a háromszöghöz (blossom).  $(1 + d)$  lesz a 3 súlyú függőleges él alsó végpontjának duálváltozója. Az eredmény  $d = 1$ . Az ábra jobb oldalán látható, hogy két csúcsnak nőtt 1-gyel a duálváltozója.
7. iteráció: A 7.6. ábra bal oldalán látható, hogy 3 súlyú függőleges él bekerült a  $\mathcal{G}'$  gráfba. Továbbra is két  $X$  által fedetlen pont van, viszont a  $c$  pszeudo-csúcs a  $T$  halmazba került, mert fedetlen csúcsból 1 hosszúságú  $X$ -alternáló úttal érhető el. A  $d = 0.5$  értékkel új duálváltozókat kapunk, ugyanakkor a  $C$  blossom duálváltozója lemegy 0-ra, következik a de-kontrakció. A párosítás  $\mathcal{G}'$ -beli élének a képe a de-kontrakció után az eredeti gráf 2 súlyú függőleges éle. Ezt egészítjük ki a felső háromszög élei közül párosítással.
8. iteráció: A 7.6. ábra jobb oldalán látható az új  $S$  illetve  $T$  halmaz.  $S$ -beli pont duálváltozója  $d$ -vel nő,  $T$ -beli ponté  $d$ -vel csökken. A legszigorúbb felső korlátot a 4 súlyú függőleges él adja:  $(0.5 + d) + (2.5 + d) \leq 4$ . Ebből  $d = 0.5$  adódik, és a a 7.7. ábra bal oldalán látjuk az új duálváltozókat.



7.6. ábra. A primál-duál algoritmus lépései



7.7. ábra. A primál-duál algoritmus lépései

9. iteráció: A 4 súlyú él mellett az 5 súlyú él is bekerült az  $E(y)$  halmazba. 3-hosszúságú javító útát találunk, amelyik két függőleges  $X$ -en kívüli, és egy  $X$ -beli élt tartalmazt. Elvégezve a javítást teljes párosításhoz jutunk, ami optimális. A párosítás összsúlya  $4+3+2=9$ . Ugyanennyi a duálváltozók összege is ( $1+0+0+3+3+2$ ). Említésre méltó, hogy természetesen teljesül a (7.4) feltétel.

Alapvető jelentőségű a következő eredmény:

**7.1. Tétel.** *Ha a  $\mathcal{G} = (P, E)$  gráfban van teljes párosítás, akkor a primál-duál-algoritmus tetszőleges nemnegatív  $w$  súlyfüggvény esetén véges számú lépésben befejeződik. Az eredmény egy minimális összsúlyú teljes párosítás a hozzátartozó duál optimális változókkal együtt.*

Ez a tétel a páros gráfokra vonatkozó primál-duál-algoritmusnál alkalmazott módszerhez hasonló gondolatmenettel (ld. 5.5. Tétel) igazolható, erre azonban

most nem térünk ki. A bizonyítás megtalálható Schrijver [Sch03] monográfiájában (26.1. Tétel).

### 7.3. Az Edmonds-féle párosítás politópok

Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy egy  $Q$  ponthalmaz esetén  $ki(Q)$ -val jelöltük azon élek halmazát, melyeknek egyik végpontja  $Q$ -ban, a másik pedig  $Q$ -n kívül van. Azoknak az éleknek a halmazát, melyeknek mindkét végpontja  $Q$ -ban van,  $belül(Q)$ -val fogjuk jelölni.

$$e = (i, j) \in belül(Q) \stackrel{def}{\iff} i \in Q, \text{ és } j \in Q$$

A 4. fejezetben úgy írtuk fel egy páros gráf párosítás politópját, hogy minden élhez nemnegatív változót rendeltünk, és minden csúcsra felírtuk, hogy a csúcsösszeg értéke legfeljebb 1. Ezt nempáros gráfra is megtehetjük, és a kapott konvex halmaz természetesen tartalmazni fogja a párosítások karakterisztikus vektorait. Nem lesz igaz viszont az a 4.1. állításnak megfelelő kijelentés, hogy az így kapott poliéder csúcsai egészek. Tekintsük példaként a három pontú teljes gráfot. Ennek bármely két éle szomszédos, tehát a következő konvex halmazról van szó.

$$x, y, z \geq 0$$

$$x + y \leq 1$$

$$y + z \leq 1$$

$$z + x \leq 1$$

Megmutatjuk, hogy ennek a poliédernek nem csak a párosítások (karakterisztikus) vektorai a csúcsai, hanem extrémális pont a  $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  vektor is. Valóban, ha ez a  $\mathbf{v}$  vektor a  $\mathbf{v1}$  és  $\mathbf{v2}$  vektorok számtani közepe, akkor  $\mathbf{v1} = (\frac{1}{2} + a, \frac{1}{2} + b, \frac{1}{2} + c)$ , és  $\mathbf{v2} = (\frac{1}{2} - a, \frac{1}{2} - b, \frac{1}{2} - c)$ . Ha  $\mathbf{v1}$  és  $\mathbf{v2}$  is a poliéderhez tartozik, akkor felhasználva, hogy mindegyik csúcsösszeg legfeljebb 1

$$a + b \leq 0 \text{ és}$$

$$-a - b \leq 0$$

adódik. Ebből  $a + b = 0$ , tehát  $a = -b$  következik. Ez az érvelés bármelyik két szomszédos élre megismételhető, tehát  $b = -c$  és  $c = -a$  is igaz. Ezekből  $a = -a$

következik, tehát  $a = b = c = 0$ , vagyis  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ .

Hasonló a helyzet a teljes párosítások konvex burkát kijelölni „hivatott”

$$\begin{aligned}x, y, z &\geq 0 \\x + y &= 1 \\y + z &= 1 \\z + x &= 1\end{aligned}$$

feltételrendszerrel. A három pontú teljes gráfban nincs teljes párosítás, a most megadott poliéder mégsem üres, egy pontból áll, ez pedig a  $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  pont, ami nyilvánvalóan extrémális pont is. Mindkét esetben az okozza a problémát, hogy a feltételrendszer nempáros gráfok esetén olyan extrémális pontokat is megenged, melyeknek nem minden koordinátája egész. A tört koordinátákkal is rendelkező extrémális pontok kiszűréséhez további feltételekre van szükség.

**7.2. Definíció** (Edmonds-féle teljes párosítás politóp I.). Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy  $2n$  pontú irányítatlan gráf. A gráf teljes párosítás politópjának nevezzük a következő feltételrendszer megoldáshalmazát:

$$x(e) \geq 0 \mid e \in E, \quad (7.7)$$

$$\sum_{e \in ki(p)} x(e) = 1 \mid p \in P, \quad (7.8)$$

$$\sum_{e \in ki(Q)} x(e) \geq 1 \mid Q \in \mathcal{PN}, |Q| \geq 3. \quad (7.9)$$

A teljes párosítás politóp itteni alakját  $\mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)$ -gyel jelöljük.

Tehát minden élhez tartozik egy nemnegatív változó. Minden csúcsra összegezzük a csúcsba futó élekhez tartozó változók értékeit, és az így kapott csúcsösszeg értéke 1. Ha  $Q$  egy páratlan ponthalmaz, akkor a  $Q$ -ból kifelé mutató élekre összegzett változók értéke legalább 1. A feltételek száma véges, és  $\mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)$  félterek és (hiper)síkok metszete, tehát egy konvex halmaz. Minden változó 0 és 1 között van, hiszen mindegyik csúcsösszeg 1, ezért a konvex halmaz korlátos, tehát poliéder. A teljes párosítás politóp feltételrendszere hagyományos alakban a következő:

$$x_{ij} \geq 0 \mid (i, j) \in E, \quad (7.10)$$

$$\sum_{j, (i,j) \in E} x_{ij} = 1 \mid i \in P, \quad (7.11)$$

$$\sum_{(i,j) \in E, i \in Q, j \notin Q} x_{ij} \geq 1 \mid Q \in \mathcal{PN}, |Q| \geq 3. \quad (7.12)$$

A teljes párosítás politóp tulajdonságainak ismertetése előtt megadjuk ennek egy másik alakját.

**7.3. Definíció** (Edmonds-féle teljes párosítás politóp II.). *Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy  $2n$  pontú irányítatlan gráf. A gráf teljes párosítás politópjának nevezzük a következő feltételrendszer megoldáshalmazát:*

$$x(e) \geq 0 \mid e \in E, \quad (7.13)$$

$$\sum_{e \in ki(p)} x(e) = 1 \mid p \in P, \quad (7.14)$$

$$\sum_{e \in belül(Q)} x(e) \leq k \mid Q \in \mathcal{PN}, |Q| = 2k + 1, k \geq 1. \quad (7.15)$$

A teljes párosítás politóp itteni alakját  $\mathcal{L}(\mathcal{G}, 2)$ -vel jelöljük.

Tehát minden élhez tartozik egy nemnegatív változó. Minden csúcsra összegezzük a csúcsba futó élekhez tartozó változók értékeit, és az így kapott csúcsösszeg értéke 1. Ha  $Q$  egy  $2k + 1$  pontból álló ponthalmaz,  $k \geq 1$ , akkor összegezzük a  $Q$ -n belüli élekre a változók értékét, és az így kapott összeg legfeljebb  $k$ . A feltételek száma ezúttal is véges, és  $\mathcal{L}(\mathcal{G}, 2)$  is félterek és (hiper)síkok metszete, tehát konvex halmaz. Minden változó 0 és 1 között van, ezért ez a konvex halmaz is korlátos, tehát poliéder. A teljes párosítás politóp itteni feltételrendszere hagyományos alakban a következő:

$$x_{ij} \geq 0 \mid (i, j) \in E, \quad (7.16)$$

$$\sum_{j, (i,j) \in E} x_{ij} = 1 \mid i \in P, \quad (7.17)$$

$$\sum_{(i,j) \in E, i \in Q, j \in Q} x_{ij} \leq k \mid Q \in \mathcal{PN}, |Q| = 2k + 1, k \geq 1. \quad (7.18)$$

Mindenekelőtt igazoljuk, hogy a kétféle felírással ugyanazt a politópot definiáltuk.

**7.3. Állítás.** *A teljes párosítás politóp két feltételrendszere ekvivalens, tehát*

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}, 1) = \mathcal{L}(\mathcal{G}, 2).$$

*Bizonyítás.* (7.9) és (7.15) ekvivalenciáját kell igazolni. Legyen  $x : E \rightarrow \mathbb{R}$  egy tetszőleges vektor, és jelöljük egy tetszőleges  $p$  pont csúcsösszegét  $s(p)$ -vel!

$$s(p) = \sum_{e \in ki(p)} x(e)$$

Tetszőleges  $Q$  ponthalmaz esetén

$$\sum_{p \in Q} s(p) = \sum_{p \in Q} \left( \sum_{e \in ki(p)} x(e) \right) = 2 \sum_{e \in belül(Q)} x(e) + \sum_{e \in ki(Q)} x(e). \quad (7.19)$$

Ez azért igaz, mert amikor az  $e$  él mindkét végpontja  $Q$ -ban van,  $x(e)$  mindkét végpont csúcsösszegében szerepel, a többi él  $Q$ -ból kifelé mutat, és ezekre  $x(e)$  csak egyszer szerepel. Ha a  $Q$  ponthalmaz  $2k + 1$  pontból áll, és minden csúcsösszeg értéke 1, akkor

$$2 \sum_{e \in belül(Q)} x(e) + \sum_{e \in ki(Q)} x(e) = 2k + 1 \quad (7.20)$$

(7.9) esetén a második szumma legalább 1, tehát az első szumma értéke legfeljebb  $k$ . (7.15) viszont azt jelenti, hogy az első szumma értéke legfeljebb  $k$ , ekkor pedig a második szumma értéke legalább 1.  $\square$

Most rátérünk a teljes párosítás politóp és a teljes párosítások közötti kapcsolat ismertetésére. Már tudjuk, hogy a kétféle alak ekvivalens, ezért bármelyiket használhatjuk.

**7.2. Tétel.** *Legyen  $X$  egy teljes párosítás a  $\mathcal{G}$  gráfban. Ekkor  $X$  karakterisztikus vektora benne van a teljes párosítás politópban, és annak extrémális pontja.*

*Bizonyítás.* Legyen  $x$  a  $X$  teljes párosítás karakterisztikus vektora, tehát

$$x(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in X \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Először belátjuk, hogy  $x$  benne van a teljes párosítás politópban. Valóban,  $x$  nemnegatív, és minden csúcsösszeg 1 (a párosítás minden csúcsot lefed). (7.9) is teljesül, hiszen egy  $2k + 1$  elemű páratlan ponthalmazból a teljes párosításnak legalább

egy éle kimutat (legfeljebb  $k$  darab  $Q$ -beli pontnak lehet belül a párja, legalább egy pontnak a párja kívül van). Természetesen (7.15) is teljesül. Most belátjuk, hogy  $x$  extrémális pont. Tegyük fel, hogy  $y \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)$ ,  $z \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)$ , és

$$x = (y + z)/2$$

Két különböző 0 és 1 közötti szám számtani közepe egyfelől pozitív, másfelől 1-nél kisebb, ugyanakkor  $x$  mindegyik koordinátája 0 vagy 1, tehát  $y$  és  $z$  nem lehetnek különbözőek. Ezért  $y = z = x$ , és  $x$  a poliéder extrémális pontja.  $\square$

A következő tétel azt állítja, hogy a teljes párosítás politóp nem más, mint a teljes párosítások (karakterisztikus vektorainak) konvex burka, tehát a megfordítás is igaz.

**7.3. Tétel.** *Az Edmonds-féle teljes párosítás politóp nem más, mint a teljes párosítások karakterisztikus vektorainak konvex burka.*

*Bizonyítás.* Legyen  $w$  egy tetszőleges nemnegatív súlyfüggvény, és a teljes párosítás politópnak az első alakját használva tekintsük a

$$\min_{x \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)} wx$$

minimumfeladatot. A folytonos LP dualitás szabályainak megfelelően ennek a feladatnak a duálisa a

$$\max_{y \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, w)} \left( \sum_{Q \in \mathcal{PN}} y(Q) \right)$$

maximumfeladat (ld. 7.2. Definíció). A duál célfüggvényben az egypontú és a legalább 3 pontú  $Q$  halmazok duál változóinak egyaránt 1 az együtthatója. Az egypontú duálváltozók előjelkövetlenek, mert ezekhez egyenlőség alakú primál feltétel tartozik (csúcsösszeg=1). A legalább 3 pontú duálváltozók nemnegatívak, mert ezek  $\geq$  típusú primál feltételhez tartoznak (kimenő összeg legalább 1). Alkalmazhatjuk a folytonos LP dualitás tételét.

$$\min_{x \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)} wx = \max_{y \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, w)} \left( \sum_{Q \in \mathcal{PN}} y(Q) \right)$$

A 7.1. tétel szerint a 7.1. primál-duál algoritmus tetszőleges nemnegatív súlyfüggvény esetén véges számú lépésben végetér, és olyan optimális teljes párosítást ad, melynek az összsúlya azonos a duál-célfüggvény értékével. Ezért

$$\min_{X \text{ teljes párosítás}} w(X) = \max_{y \in \mathcal{D}(\mathcal{G}, w)} \left( \sum_{Q \in \mathcal{PN}} y(Q) \right)$$

Ebből következik, hogy

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)} \mathbf{w}\mathbf{x} = \min_{X \text{ teljes párosítás}} w(X)$$

Jelöljük a teljes párosítások karakterisztikus vektorainak konvex burkát  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ -vel. Ezen minden lineáris célfüggvénynek létezik minimuma, és van optimális csúcs is.  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  csúcsai a teljes párosítások (karakterisztikus vektorai) közül kerülnek ki, így:

$$\min_{X \text{ teljes párosítás}} w(X) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}(\mathcal{G})} \mathbf{w}\mathbf{x}.$$

Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges nemnegatív  $w$  súlyfüggvény esetén

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)} \mathbf{w}\mathbf{x} = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}(\mathcal{G})} \mathbf{w}\mathbf{x},$$

tehát az  $\mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)$  illetve az  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  poliédereken a súlyfüggvény minimuma azonos. Megmutatjuk, hogy mindkét poliéder benne van az

$$\mathbf{1}\mathbf{x} = n$$

síkban, és akkor alkalmazhatjuk az  $A$  függelék A.4. tételét. Ha  $\mathbf{x}$  az  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  poliéder egyik csúcsa, akkor  $\mathbf{x}$  egy teljes párosítás karakterisztikus vektora. A teljes párosításnak  $n$  darab éle van, tehát  $\mathbf{1}\mathbf{x} = n$ .  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  pontjai a teljes párosítások (karakterisztikus vektorainak) konvex kombinációi, tehát a teljes  $\mathcal{M}(\mathcal{G})$  poliéderen  $\mathbf{1}\mathbf{x} = n$ . Másfelől  $\mathcal{L}(\mathcal{G}, 1)$  minden pontjában mindegyik csúcsösszeg értéke 1. Ha ezeket összeadjuk, a csúcsok száma, tehát  $2n$  lesz az eredmény. Másfelől a csúcsösszegek összege  $2 \times \sum_{e \in E} x(e)$ , tehát  $\mathbf{1}\mathbf{x}$  kétszerese.  $\square$

Most rátérünk az Edmonds-féle párosítás politóp ismertetésére.

**7.4. Definíció** (Edmonds-féle párosítás politóp). *Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy  $n$  pontú irányítatlan gráf. A gráf párosítás politópjának nevezzük a következő feltételrendszer megoldáshalmazát*

$$x(e) \geq 0 \mid e \in E, \tag{7.21}$$

$$\sum_{e \in ki(p)} x(e) \leq 1 \mid p \in P, \tag{7.22}$$

$$\sum_{e \in belül(Q)} x(e) \leq k \mid Q \in \mathcal{PN}, |Q| = 2k + 1, k \geq 1. \tag{7.23}$$

A párosítás politópot  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ -vel jelöljük.



Tehát minden élhez tartozik egy nemnegatív változó. Minden csúcsra összegezzük a csúcsba futó élekhez tartozó változók értékeit, és az így kapott csúcsösszeg értéke legfeljebb 1. Ha  $Q$  egy  $2k + 1$  pontból álló ponthalmaz,  $k \geq 1$ , akkor összegezzük a  $Q$ -n belüli élekre a változók értékét, és az így kapott összeg legfeljebb  $k$ . A feltételek száma ezúttal is véges, és  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$  is félterek és (hiper)síkok metszete, tehát konvex halmaz. Minden változó 0 és 1 között van, ezért ez a konvex halmaz is korlátos, tehát poliéder. A teljes párosítás politóp itteni feltételrendszere hagyományos alakban a következő:

$$x_{ij} \geq 0 \mid (i, j) \in E, \quad (7.24)$$

$$\sum_{j, (i,j) \in E} x_{ij} \leq 1 \mid i \in P, \quad (7.25)$$

$$\sum_{(i,j) \in E, i \in Q, j \in Q} x_{ij} \leq k \mid Q \in \mathcal{PN}, |Q| = 2k + 1, k \geq 1. \quad (7.26)$$

A teljes párosítás esetétől eltérően itt csak egyféle alakkal dolgozunk. Most rátérünk a párosítás politóp és a párosítások közötti kapcsolat ismertetésére.

**7.4. Tétel.** *Legyen  $X$  egy párosítás a  $\mathcal{G}$  gráfban. Ekkor  $X$  karakterisztikus vektora benne van a párosítás politópban, és annak extrémális pontja.*

*Bizonyítás.* Legyen  $x$  az  $X$  párosítás karakterisztikus vektora, tehát

$$x(e) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } e \in X, \\ 0 & \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Először belátjuk, hogy  $x$  benne van a párosítás politópban. Valóban,  $x$  nemnegatív, és minden csúcsösszeg legfeljebb 1 (a párosítás élei nem találkoznak). (7.23) is teljesül, hiszen egy  $2k + 1$  elemű páratlan ponthalmaz esetén legfeljebb  $k$  darab  $Q$ -beli pontnak lehet a párja is  $Q$ -ban. Most belátjuk, hogy  $x$  extrémális pont. Tegyük fel, hogy  $y \in \mathcal{K}(\mathcal{G}), z \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ , és

$$x = (y + z)/2.$$

Két különböző 0 és 1 közötti szám számtani közepe egyfelől pozitív, másfelől 1-nél kisebb, ugyanakkor  $x$  mindegyik koordinátája 0 vagy 1, tehát  $y$  és  $z$  nem lehetnek különbözőek. Ezért  $y = z = x$ , és  $x$  a poliéder extrémális pontja.  $\square$

Megemlítjük, hogy például az üres párosításnak az origó felel meg, ami szintén csúcsa a  $\mathcal{K}(\mathcal{G})$  poliédernek. A következő tétel azt állítja, hogy a párosítás politóp nem más, mint a párosítások (karakterisztikus vektorainak) konvex burka.

**7.5. Tétel.** *Az Edmonds-féle párosítás politóp nem más, mint a párosítások karakterisztikus vektorainak konvex burka.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás úgy történik, hogy a 7.1. alfejezetben ismertetett konstrukcióval a  $\mathcal{G}$  gráf párosításait egy nagyobb  $\bar{\mathcal{G}}$  gráf teljes párosításainak részeként kezeljük, és  $\bar{\mathcal{G}}$ -re alkalmazzuk a 7.3. tételt. Ennek ismertetésétől eltekintünk. A részletek megtalálhatóak Schrijver [Sch03] monográfiájában.  $\square$

## 7.4. A kínai postás feladat

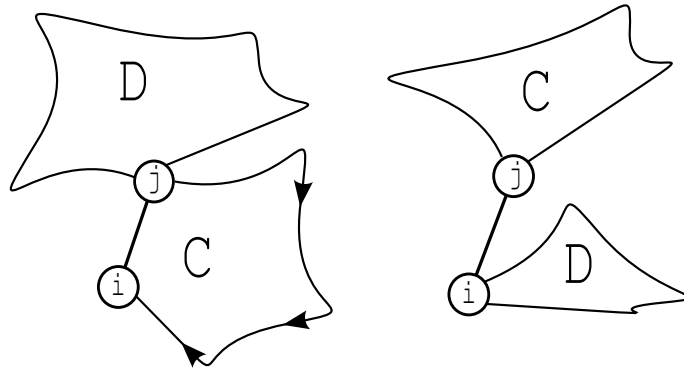
Mei-Ko Kwan 1960-ban vetette fel és oldotta meg a következő problémát. (Kínai nyelven írt cikkének angol fordítása 1962-ben jelent meg [Gua65].)

**Feladat.** *Adott egy összefüggő irányítatlan  $\mathcal{G}$  gráf, ahol minden él hossza pozitív ( $d(e) > 0$ ). Olyan zárt élsorozatot kell keresni, amelyik mindegyik élt tartalmazza legalább egyszer, és a hossza minimális.*

Az első fejezetben láttuk, hogy egy zárt élsorozatban pontosan akkor szerepelhet a gráf valamennyi éle pontosan egyszer (Euler-bejárás), ha minden pont foka páros. Ellenkező esetben egy minimális hosszúságú minden élt tartalmazó zárt élsorozatban vannak olyan élek, melyeknek többször is előfordulnak. Először megmutatjuk, hogy egyik élnak sem kell háromszor előfordulnia.

**7.4. Állítás.** *Egy minimális hosszúságú valamennyi élt tartalmazó zárt élsorozatban egyik él sem szerepel 3-szor.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy egy  $(i, j)$  él egy minimális élsorozatban háromszor szerepelne, kétszer egymásután  $i \rightarrow j$  irányban, egyszer pedig  $j \rightarrow i$  irányban (ld. a 7.8. ábra bal oldalán). Az élsorozat köztes szakaszait  $C$ -vel illetve  $D$ -vel jelölve megállapíthatjuk, hogy az  $i \rightarrow jCi \rightarrow jDj \rightarrow i$  élsorozatnál  $iC^{-1}jDj \rightarrow i$  rövidebb, miközben ugyanazokon az éleken megy át, és szintén  $i$ -ből  $i$ -be érkezik. ( $C^{-1}$ -zel a  $C$  élsorozat fordított irányú bejárását jelöljük.) Hasonló konstrukciókat lehet adni a többi estre is. Például, ha egy  $(i, j)$  él háromszor szerepelne váltakozó



7.8. ábra. Él nem szerepelhet háromszor

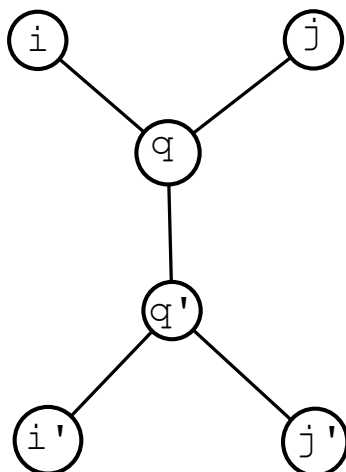
irányban, akkor  $i \rightarrow jCj \rightarrow iDi \rightarrow j$  helyett  $iDi \rightarrow jC$  lenne rövidebb úgy, hogy  $i$ -ből  $j$ -be érkezik, és ugyanazokon az éleken megy át (ld. a 7.8. ábra jobb oldalán). Javasoljuk, hogy az olvasó készítse el a hasonló konstrukciót a hiányzó esetre.  $\square$

Ha egy minimális élsorozat esetén megduplázzuk azokat az éleket, melyek kétszer szerepelnek, akkor olyan - párhuzamos éleket is tartalmazó - gráfot kapunk, amelyben van Euler-bejárás, ezért minden pont foka páros. Az új gráf éleinek összhossza a megduplázott élek hosszainak összegével haladja meg az eredeti gráf éleinek összhosszát. Tehát úgy kell bizonyos éleket megduplázni, hogy minden pont foka páros legyen, és a megduplázott élek összhossza minimális legyen. Ezt a feladatot visszavezetjük minimális összsúlyú teljes párosítás keresésére teljes gráfban. Legyen  $Q$  a páratlan fokú pontok halmaza. Az első fejezetben láttuk, hogy  $Q$ -ban páros számú pont van.  $Q$  pontjain készítünk egy  $\mathcal{G}' = (Q, F)$  teljes gráfot úgy, hogy minden  $f = (q, r) \in F$  élre

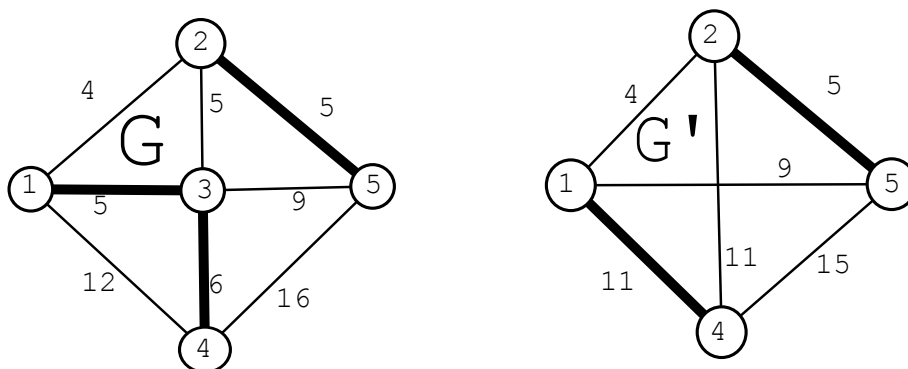
$$w(f) = d(q, r),$$

ahol  $d(q, r)$  a két végpont távolsága  $\mathcal{G}$ -ben,  $\mathcal{G}'$ -ben pedig az  $f$  él súlya. Ezekután  $\mathcal{G}'$ -ben készítünk egy minimális összsúlyú teljes párosítást (például a 7.1. Algoritmussal). A  $\mathcal{G}'$ -beli teljes párosítás éleinek  $\mathcal{G}$ -ben páratlan fokú pontpárokat összekötő legrövidebb utak felelnek meg. Ezek a legrövidebb utak él-diszjunktak. Ha ugyanis a 7.9. ábrán látható módon az  $i \leftrightarrow i'$  és  $j \leftrightarrow j'$  legrövidebb utaknak lenne egy közös  $(q, q')$  éle, akkor az  $i \leftrightarrow q \leftrightarrow j$  és  $i' \leftrightarrow q' \leftrightarrow j'$  utak együttes hossza kisebb lenne, mint  $i \leftrightarrow i'$  és  $j \leftrightarrow j'$  hosszának összege.

A  $\mathcal{G}$  gráfban a  $\mathcal{G}'$ -beli minimális összsúlyú teljes párosítás éleinek megfelelő



7.9. ábra. A legrövidebb utak él-diszjunktak



7.10. ábra. A kínai postás probléma megoldása

legrövidebb utak éleit kell kétszer bejárni. Ezeknek a legrövidebb utaknak az éleit megkettőzve olyan – párhuzamos éleket is tartalmazó – gráfot kapunk, ahol minden pont foka páros lesz. Példaként tekintsük a 7.10. ábrán látható  $\mathcal{G}$  gráfot! Négy olyan csúcs van, melynek páratlan a foka, tehát  $\mathcal{G}'$  egy 4 pontból álló teljes gráf.  $\mathcal{G}'$ -ben az  $(1, 4)$  él súlya  $\mathcal{G}$ -ben az 1-es és 4-es pont távolsága, tehát  $11 = 5 + 6$ .  $\mathcal{G}'$ -ben a  $(4, 5)$  él súlya  $\mathcal{G}$ -ben a 4-es és 5-ös pont távolsága, tehát  $15 = 6 + 9$ , és így tovább. Két vastag él jelzi  $\mathcal{G}'$ -ben a minimális összsúlyú teljes párosítást (ennek a meghatározásához most nem volt szükség a 7.1. Algoritmusra, hiszen mindössze három teljes párosítás közül kellett választanunk). Ez a két él  $\mathcal{G}$ -ben az 1-es és 4-es pontokat összekötő 1, 3, 4 legrövidebb útnak, valamint a 2-es és 5-ös pontokat összekötő 2, 5 legrövidebb útnak felel meg. A két legrövidebb út él-diszjunkt, ahogyan azt előre vártuk. Ezek megvastagítása azt jelzi, hogy ezeknek az éleit megduplázzuk. Eredményül minden pont foka pá-

ros lesz. A kapott –kettőzött éleket is tartalmazó –gráf élei bejárhatóak úgy, hogy minden élen pontosan egyszer megyünk végig. Egy ilyen lehetséges bejárást ad meg a következő pontsorozat: 1, 3, 1, 4, 3, 4, 5, 2, 5, 3, 2, 1. A teljes élsorozat hossza  $5 + 5 + 12 + 6 + 6 + 16 + 5 + 5 + 9 + 5 + 4 = 78$ . Ezt úgy is megkaphatjuk, hogy az élek hosszait összeadjuk, és ehhez hozzáadjuk a megduplázott élek hosszait:  $62 + 5 + 6 + 5 = 78$ .



## 8. fejezet

# Matroidok

A matroid egy olyan struktúra, ami első megközelítésben a lineáris algebrából ismert függetlenség absztrakciója. Közismert, hogy lineárisan független vektorok bármely részhalmaza is lineárisan független. Ezenkívül, ha adott 4 lineárisan független vektor, és egy másik csomagban 5 darab lineárisan független vektor, akkor az 5 között kell lennie egynek, amelyik független az első csomagban lévő 4 vektortól.

### 8.1. Alapfogalmak

**8.1. Definíció** (Matroid). *Matroidnak nevezzük egy  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  struktúrát, ahol  $H$  egy véges halmaz,  $\mathcal{P}$  pedig  $H$  bizonyos részhalmazaiából áll, és eleget tesz a következő axiómáknak:*

1.  $\emptyset \in \mathcal{P}$ , továbbá  $X \in \mathcal{P}$  és  $Y \subset X$  esetén  $Y \in \mathcal{P}$
2. Ha  $Y \in \mathcal{P}$   $k$  elemből áll,  $X \in \mathcal{P}$   $k + 1$  elemből áll, akkor létezik  $x \in X - Y$ , amire  $Y + x \in \mathcal{P}$ .

A  $\mathcal{P}$  halmazrendszerhez tartozó halmazokat független halmazoknak nevezzük. Összefüggőnek (nem függetlennek) mondjuk  $H$ -nak azon részhalmazait, melyek  $\mathcal{P}$ -ben nem szerepelnek.

Az első axióma azt mondja, hogy a független halmazok családja leszálló, tehát független halmaznak a részhalmaza is független. A második axióma szerint egy független halmaz ( $Y$ ) egy nagyobb méretű független halmazból ( $X$ -ből) bővíthető.

**8.1. Példa.**  $H$  elemei egy mátrix oszlopvektorai,  $\mathcal{P}$  elemei pedig azok a részhalmazok, amelyek lineárisan független oszlopvektorokból állnak.

Mindkét axióma közismert a lineáris algebrából. Ez a példa azt mutatja, hogy a matroid fogalom a lineáris függetlenség fogalmának (is) absztrakciója.

**8.2. Példa** (él-matroid).  $A$   $H$  halmaz egy irányítatlan gráf éleiből áll,  $\mathcal{P}$  elemei pedig azok az élhalmazok, melyek nem tartalmaznak kört.

Az első fejezetben láttuk, hogy a pont-él mátrixban egy  $F$  élhalmazhoz tartozó oszlopvektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek a  $\mathbb{B}^n$  vektortérben, ha az  $F$  élhalmaz nem tartalmaz kört (1.2. tétel). Ezért a második példa az első példának speciális esete. Ettől függetlenül most tisztán gráfelméleti eszközökkel belátjuk, hogy egy irányítatlan gráf körmentes élhalmazainak családja eleget tesz a két matroid-axiómának. Az első axióma nyilvánvaló: egy körmentes élhalmaznak a részhalmazai sem tartalmaznak kört. A második axiómával kapcsolatban legyen  $Y$  egy körmentes élhalmaz, és tekintsük az  $Y$  által kifeszített gráf  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  összefüggő komponenseit (ezek fák). Legyen  $X$  egy körmentes élhalmaz, melyre  $|X| = |Y| + 1$ . Ha  $X$ -nek van olyan éle, melynek legfeljebb az egyik végpontja van valamelyik  $Y_i$  komponensben, akkor ez az él lehet  $x$ , mert ekkor  $Y + x$  sem tartalmaz kört. Ha  $X$ -nek van két különböző  $Y_i$  komponens összekötő éle, akkor ez lehet  $x$ . Egyébként  $X$  mindegyik élére igaz, hogy a két végpont ugyanabban az  $Y_i$  komponensben van. Ekkor viszont  $X$ -nek egyik komponensben sem lehetne több éle, mint  $Y$ -nak. Ez azért igaz, mert  $Y_i$  az adott komponensben feszítő fa, tehát semelyik körmentes részgráfnak nem lehet több éle, mint  $Y_i$ -nek. Mivel  $X$ -ben sincs kör, így  $X$ -nek nem lehetne több éle, mint  $Y$ -nak, ami ellentmondás.

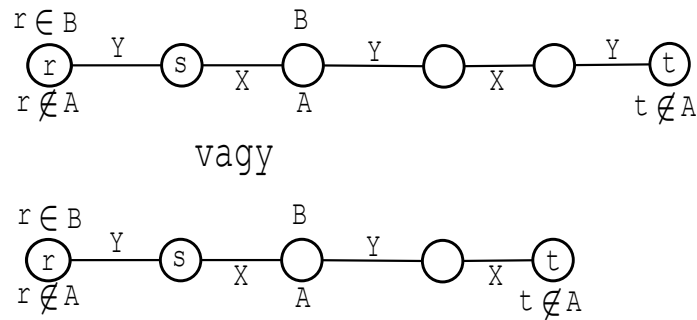
**8.3. Példa** (Partíció-matroid). Adott egy  $H = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m$  partíció, és adottak a  $d_i \geq 0$  egész számok ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).  $X \subset H$  pontosan akkor van  $\mathcal{P}$ -ben, ha

$$|X \cap B_i| \leq d_i \quad |i = 1, 2, \dots, m$$

Az első axióma most is nyilvánvaló. A második axiómát illetően legyen  $X$  és  $Y$  két független halmaz, és tegyük fel, hogy  $|X| = |Y| + 1$ . Ekkor legalább egy  $i$ -re  $|X \cap B_i| > |Y \cap B_i|$ , és így  $Y$   $B_i$ -ben bővíthető.

**8.4. Példa** (Párosítás matroid).  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf.  $H \subset P$  tetszőleges ponthalmaz. Egy  $A \subset H$  ponthalmaz pontosan akkor van  $\mathcal{P}$ -ben (tehát pontosan akkor független halmaza a matroidnak), ha van olyan párosítás, ami  $A$  pontjait lefedi.





8.1. ábra. B-A elemeit X nem fedi

Itt fontos látni a különbséget  $P$  és  $\mathcal{P}$  között.  $P$  a gráf pontjainak halmaza,  $\mathcal{P}$  pedig a matroid független halmazainak családja. Hangsúlyozzuk, hogy a független halmazok ponthalmazok, tehát nem a párosítás éleiből, hanem a párosítás által lefedett pontokból állnak. Most bebizonyítjuk, hogy ez a példa valóban matroid.

**8.1. Tétel** (Párosítás matroid). *Legyen  $\mathcal{G} = (P, E)$  egy irányítatlan gráf,  $H \subset P$  pedig egy tetszőleges ponthalmaz. A 8.4. példában definiált  $\mathcal{P}$  halmazrendszer eleget tesz a két matroid-axiómának.*

*Bizonyítás.* Az első matroid axióma nyilvánvaló (ha egy párosítás lefed egy ponthalmazt, akkor annak részhalmazait is lefed).

A második axiómára térve legyen  $A, B \subset H$ ,  $|A| = k$  és  $|B| = k + 1$ . Feltesszük, hogy  $A$ -t lefed az  $X$  párosítás,  $B$ -t lefed az  $Y$  párosítás. Ha van  $(B - A)$ -ban olyan elem, amit  $X$  lefed, akkor  $A$  ezzel bővíthető. Tegyük fel tehát, hogy  $(B - A)$  **elemeit X nem fedi**, és tekintsük  $X \cap Y$ , valamint  $X \cup Y - X \cap Y$  komponenseit.

$X \cap Y$  komponensei szeparált élek. Ha egy végpont  $B$ -ben van, akkor  $A$ -ban is, hiszen  $X$  lefed mindkét végpontot.

$X \cup Y - X \cap Y$  komponense lehet egy páros kör (azért páros, mert  $X$  és  $Y$  élei váltják egymást). Ezen a körön minden  $B$ -beli pont  $A$ -ban is benne van, mert  $X$  a kör összes pontját fedi. Tehát idáig  $A$ -nak legalább annyi pontja van, mint  $B$ -nek. Tehát  $X \cup Y - X \cap Y$ -nak van olyan út-komponense, ahol  $B$ -nek több pontja van, mint  $A$ -nak. (ld. 8.1. ábra.) Ha az út belső pontja  $B$ -ben van, akkor  $A$ -ban is, mert  $X$  lefed a belső pontokat.  $r \in B$ , és  $r \notin A$  esetén  $r$  egy ilyen út egyik végpontja, és  $r$ -ből  $Y$ -beli él indul mondjuk  $s$ -be. Az út másik végpontja legyen  $t$ . Ha  $t$   $A$ -ban van, akkor  $B$ -ben is, mert különben  $B$ -nek nem lenne több pontja, mint  $A$ -nak. Ekkor viszont az út folytatódna  $t$ -ből. Tehát  $t$  nincs  $A$ -ban. Felcserélve  $X$  és  $Y$  éleket, az új  $X$  eggyel több pontot ( $r$ -et is) fed le, tehát az  $A$  halmaz az  $r$  ponttal

8.1. táblázat. Semi-matching feladat

4	6	4	5
3	8	1	6
2	9	2	10
1	2	3	18

8.2. táblázat. Semi-matching feladat megoldása

4	6	4	5
3	8	1	6
2	9	2	10
1	2	3	18

bővíthető. □

**Feladat** (Semi-matching). A 8.1. táblázatban látható számok egy  $\mathbf{W}$  mátrix elemei. Maximalizálni kell az

$$s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} x_{ij}$$

összeget, feltéve hogy

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1 \mid i = 1, 2, \dots, n, \text{ és}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ vagy } 1 \mid \forall i, j.$$

Megoldás: Ez egy partíció-matroid feladat. Minden sorból legfeljebb egy elemet választhatunk ki úgy, hogy az összeg maximális legyen. A megoldást a 8.2. táblázat mutatja. A lineáris algebrai terminológiát viszi tovább a következő két definíció.

**8.2. Definíció** (bázis). Bázisnak nevezünk egy maximális – tehát nem bővíthető– független halmazt.

A következő nyilvánvaló állítás azt mondja, hogy két bázis ugyanannyi elem-ből áll.

**8.1. Állítás.** Ha az  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  matroidban  $A \subset H$  és  $B \subset H$  két maximális független részhalmaz, akkor elemszámuk azonos.

$$|A| = |B|$$

*Bizonyítás.* Az 1. matroid axióma szerint  $|A| > |B|$  esetén lenne olyan  $A' \subset A$  független halmaz, melyre  $|A'| = |B| + 1$ . Ekkor a 2. matroid axióma szerint a  $B$  független halmaz bővíthető volna.  $\square$

**8.3. Definíció (rang).** Legyen  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  egy matroid, és  $A \subset H$ . Az  $A$ -ban lévő legnagyobb elemszámú független részhalmaz elemszámát az  $A$  halmaz rangjának nevezzük.  $A$  rang jele  $r(A)$ , tehát

$$r(A) = \max_{B \subset A, B \in \mathcal{P}} |B|$$

Emlékeztetünk arra, hogy a nem független halmazokat összefüggőnek neveztük.

**8.4. Definíció (kör).** Az  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  matroidban körnek nevezünk minden minimális – tehát nem szűkíthető– összefüggő halmazt.

**8.2. Tétel (Axióma-tétel).** Legyen  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  egy matroid, és  $A \subset H$ . Ekkor

- Tetszőleges  $A \subset H$  esetén, ha  $X$  és  $Y$  az  $A$ -nak két maximális ( $A$ -n belül nem bővíthető)  $\mathcal{P}$ -beli részhalmaza, akkor  $|X| = |Y|$ .
- Fordíva: Ha  $\mathcal{P}$  a  $H$  halmaz részhalmazaiából álló halmazrendszer, amelyik eleget tesz az 1. matroid-axiómának, valamint az itteni a) tulajdonságnak, akkor  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  egy matroid.

*Bizonyítás.* Az a) állítás bizonyításához tegyük fel, hogy  $\mathfrak{M}$  matroid,  $A \subset H$ ,  $X$  és  $Y$   $A$ -nak két maximális  $\mathcal{P}$ -beli részhalmaza, melyekre  $|X| > |Y|$ . Legyen  $X' \subset X$  olyan, hogy  $|X'| = |Y| + 1$ . Az 1. axióma szerint  $X'$  is független. A 2. matroid axióma miatt létezik olyan  $x \in (X' - Y)$ , hogy  $Y + x \in \mathcal{P}$ . Ez viszont ellentmond annak, hogy  $Y$   $A$ -ban maximális.

A b) állítás igazolásához tegyük fel, hogy tetszőleges  $A \subset H$  esetén, ha  $X$  és  $Y$   $A$ -nak két maximális  $\mathcal{P}$ -beli részhalmaza, akkor  $|X| = |Y|$ . Legyen  $X$  és  $Y$  két  $\mathcal{P}$ -beli halmaz,  $|X| = k + 1$ ,  $|Y| = k$ , továbbá  $A = X \cup Y$ . Az a) feltétel miatt  $Y$  nem lehet  $A$ -ban maximális (van olyan maximális, amelyik  $X$ -et tartalmazza). Ezért létezik olyan  $x \in (X - Y)$ , hogy  $Y + x \in \mathcal{P}$ . Ez pedig éppen a 2. matroid axióma.  $\square$

**8.1. Feladat.** *Igazoljuk, hogy ha egy matroidban  $B$  és  $C$  két bázis, továbbá  $e \in B$ , akkor van olyan  $f \in C$ , hogy  $B - e + f$  is bázis.*

A következő tételnek fontos szerepe van például a szállítási feladat hurok-transzformációkkal való megoldásakor.

**8.3. Tétel.** *Egy  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  matroidban legyen  $A \subset H$  független. Ha az  $e \in H$  elemmel történő bővítés után  $A + e$  nem független, akkor  $A + e$  pontosan egy kört tartalmaz.*

*Bizonyítás.* Legyen

$$C(1) = \{e, a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_k\}, \text{ és}$$

$$C(2) = \{e, a_1, a_2, \dots, a_s, y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

két különböző kör, ahol semelyik  $x_i$  nem azonos semelyik  $y_j$ -vel. Természetesen  $(C(1) \cup C(2) - e) \subset A$ .  $E = \{e, a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$  független, mert  $C(1)$  kör, és  $F = \{a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_m\}$  is független, tehát  $E$  bővíthető  $F$  elemeivel addig, míg a kapott  $E'$  független halmaz elemszáma el nem éri  $F = (C(1) \cup C(2) - e)$  elemszámát. A bővítések után is  $E' \subset C(1) \cup C(2)$ , tehát  $C(1) \cup C(2)$ -ben egyetlen  $f$  elem van, ami nincs  $E'$ -ben. Ha  $f = x_i$ , akkor  $C(2)$  független lett volna (hiszen  $E'$  része). Ha viszont  $f = y_j$ , akkor  $C(1)$  lett volna független.  $\square$

## 8.2. A mohó algoritmus

Ebben az alfejezetben feltételezzük, hogy az  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  matroid alaphalmazán értelmezve van egy  $w$  nemnegatív súlyfüggvény, tehát  $e \in H$  esetén  $w(e) \geq 0$ . Tetszőleges  $A \subset H$  halmazra a halmaz összsúlyának nevezzük a

$$w(A) = \sum_{e \in A} w(e)$$

összeget. Olyan független halmazt keresünk, amelyiknek az összsúlya maximális a független halmazok között.

A  $w$  súlyfüggvényt használva sorbarendezhetjük  $H$  elemeit úgy, hogy a súlyok monoton csökkenő sorozatot alkossanak. Legyen

$$H = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}, \text{ ahol}$$

$$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_k).$$

Ezzel a rendezéssel  $H$  bármelyik részhalma is rendezve van, ezért  $H$  részhalmaid sorozatnak tekinthetjük.

**8.5. Definíció** (lexikografikus rendezés). *A  $H$  elemeiből álló  $m$  hosszúságú  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  sorozat lexikografikusan nagyobb az  $n$  hosszúságú  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  sorozatnál, ha*

$$w(b_1) = w(a_1), w(b_2) = w(a_2), \dots, w(b_i) = w(a_i), \text{ valamilyen } i\text{-re, de } w(b_{i+1}) > w(a_{i+1}),$$

*vagy pedig*

$$w(b_1) = w(a_1), w(b_2) = w(a_2), \dots, w(b_n) = w(a_n), \text{ de } m > n.$$

Ez azt jelenti, hogy az első olyan indexnél, ahol eltérés van,  $b_{i+1}$  nagyobb, mint  $a_{i+1}$  ( $i$  értéke 0 is lehet), vagy pedig az első  $n$  pozícióban a két sorozat azonos, de a  $b$  sorozat az  $a$  sorozatnál hosszabb.

**8.6. Definíció** (lexikografikusan maximális független). *Adott  $w$  nemnegatív súlyfüggvény esetén az  $A \subset H$ ,  $A \in \mathcal{P}$  független halmaz lexikografikusan maximális, ha nincs olyan  $B \subset H$ ,  $B \in \mathcal{P}$  független halmaz, amelyik  $A$ -nál lexikografikusan nagyobb.*

Ebben a definícióban  $H$  elemeinek azt a rendezését használjuk, melynél a súlyok monoton csökkenő sorozatot képeznek.

Lexikografikusan maximális független halmaz előállítására alkalmazható az ún. mohó algoritmus. A mohóság abban áll, hogy először maximális súlyú egyelemű független halmazt keresünk, majd ezt úgy toldjuk meg egy új elemmel, hogy a kapott kételemű halmaz független legyen, és ekkor is a lehetséges új elemek közül a legnagyobb súlyút választjuk, és így tovább.

**8.1. Algoritmus** (Mohó algoritmus).

1) Legyen  $e_1$  egy maximális súlyú elem, ami egyelemű halmazként független.

$$w(e_1) = \max\{w(e) \mid e \in H, \{e\} \in \mathcal{P}\}$$

Legyen  $k = 1$ .

2) Ha  $e_1, e_2, \dots, e_k$  adottak, olyan  $(k+1)$ -edik elemet keresünk, amivel az első  $k$ -t kibővítve független halmazhoz jutunk, és  $e_{k+1}$  az ilyen elemek közül maximális súlyú.

$$w(e_{k+1}) = \max\{w(e) \mid e \in H, \{e_1, e_2, \dots, e_k, e\} \in \mathcal{P}\}$$

-Ha nem találunk ilyen elemet, akkor  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  egy maximális összsúlyú független halmaz. STOP

-Ha találunk egy ilyen  $e_{k+1}$  elemet,  $k := k + 1$ , és visszatérünk a 2) pontra.

Megjegyezzük, hogy  $e_1$ -et mindenképpen megkapjuk, mert ha egyáltalán létezik nem üres független halmaz, akkor annak minden egyelemű részhalmaza független. Az algoritmus végén kapott  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  független halmaznak a mérete is maximális (mert tovább nem bővíthető), tehát ez egy bázis.

Példaként tekintsük azt az esetet, amikor adott egy  $n$  pontú irányítatlan gráf, és a matroid ennek az él-matroidja. Pozitív súlyok esetén minden maximális súlyú független halmaz egy feszítő fa éleiből áll. A feszítő fa éleinek száma  $n - 1$  (ld. 1.2. alfejezet), tehát konstans. Ezért a maximális feszítő fa feladat ekvivalens a minimális feszítő fa feladattal, amit hagyományosan a mohó algoritmussal (például Prim [Pri57] algoritmusával) oldunk meg ([sTS05]).

Az algoritmus lépéseit végigkövetve nyilvánvalóan megállapítható, hogy az algoritmus lexikografikusan maximális független halmazt állít elő. Most bebizonyítjuk, hogy az eredmény egy maximális összsúlyú független halmaz, tehát az ebben az alfejezetben megfogalmazott optimumfeladat megoldása.

**8.4. Tétel** (Mohó algoritmus tétel). *Legyen  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  egy matroid, ahol a  $H$  halmaz  $e$  elemei súlyozva vannak, és  $w(e) \geq 0$ . Ekkor tetszőleges lexikografikusan maximális független halmaz maximális összsúllyal rendelkezik a független halmazok körében.*

*Bizonyítás.* Legyen  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  egy lexikografikusan maximális független halmaz, továbbá

$$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

egy független halmaz, ahol az elemek a súlyok csökkenő sorrendjében vannak felsorolva, tehát

$$w(b_i) \geq w(b_{i+1}), \text{ és}$$

$$w(y_i) \geq w(y_{i+1})$$

minden szóbanforgó  $i$ -re. Ekkor semelyik  $k$ -ra nem fordulhat elő, hogy  $w(b_k) < w(y_k)$ . Tegyük fel, hogy mégis. Tekintsük ekkor a

$$B_{k-1} = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\}, \text{ és}$$

$$Y_k = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$$

halmazokat. A 2. matroid-axióma szerint lenne olyan  $1 \leq i \leq k$  index, hogy

$$\{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, y_i\}$$

független halmaz, ez viszont lexikografikusan nagyobb lenne  $B$ -nél (mert  $w(y_i) \geq w(y_k) > w(b_k)$ ). Tehát minden  $k$ -ra

$$w(b_k) \geq w(y_k).$$

Ugyanakkor  $B$  elemszáma is maximális a független halmazok között (lexikografikusan maximális sorozat nem folytatható), tehát  $m \geq n$ , ezért  $w(B) \geq w(Y)$ , vagyis  $B$  összsúlya maximális.  $\square$

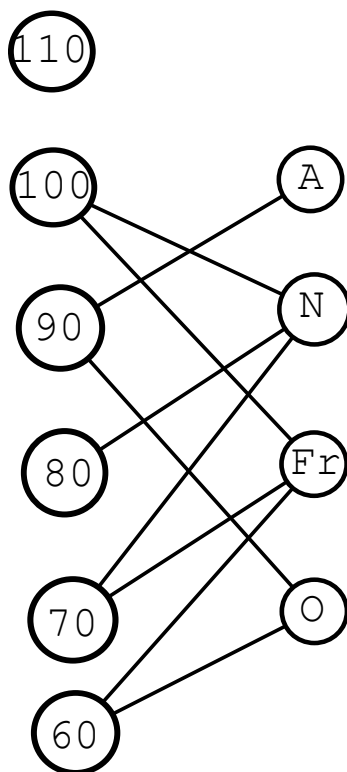
Nevezetes tény, hogy a mohó-algoritmus optimalitása éppen a matroidokra jellemző. Olyan esetben, amikor a 2. axióma nem teljesül, a mohó algoritmussal nem feltétlenül kapunk optimális eredményt.

**8.5. Tétel** (Edmonds, Rado [Rad42]). *Legyen  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  egy halmazrendszer, amelyik eleget tesz az 1. matroid-axiómának, tehát*

$$\emptyset \in \mathcal{P}, \text{ továbbá ha } X \in \mathcal{P}, \text{ és } Y \subset X, \text{ akkor } Y \in \mathcal{P} \text{ is teljesül.}$$

*Ha tetszőleges nemnegatív súlyozás esetén egy lexikografikusan maximális  $\mathcal{P}$ -beli halmaz maximális összsúlyú, akkor  $\mathfrak{M}$  egy matroid.*

*Bizonyítás.* Ha  $\mathfrak{M}$  nem matroid, akkor a 8.2. tétel szerint létezik olyan  $A \subset H$ ,  $X \subset A$  és  $Y \subset A$  úgy, hogy  $X$  és  $Y$   $\mathcal{P}$ -beli,  $A$ -n belül mindkettő maximális, de  $|X| = k < |Y|$ . Rendeljük  $X$  valamennyi eleméhez az  $1 + \varepsilon$  súlyt, ahol  $\varepsilon$  kicsi,  $Y - X$  elemeihez rendeljük az 1 súlyt, a  $H$  halmaz további elemeinek súlya legyen 0. Ekkor a mohó algoritmus az első  $k$  lépésben  $X$  elemeit választja ki, mert ezeknek van a legnagyobb súlya. A  $k$ -edik lépés után  $Y$ -beli elem nem jöhet szóba, mert  $X$  az  $A$  halmazon belül nem bővíthető. Az  $A$  halmazon kívül minden elem súlya 0, tehát a mohó algoritmus által készített halmaz összsúlya  $k \times (1 + \varepsilon)$ . Ez a halmaz lexikografikusan maximális, és  $\mathcal{P}$ -beli. Az  $Y$   $\mathcal{P}$ -beli halmaz összsúlya legalább  $k + 1$ . Elég kis  $\varepsilon$  esetén  $k \times (1 + \varepsilon) < k + 1$ , ami ellentmondás.  $\square$



8.2. ábra. A nagykövetek IQ-jának összegét maximalizáljuk

**8.2. Feladat.** *Legyen*

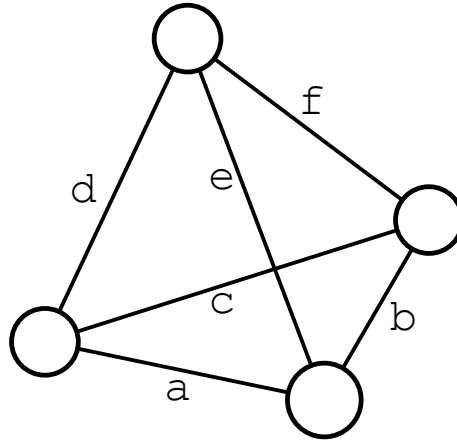
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ és}$$

$$\mathbf{w} = (10 \ 9 \ 8 \ 4 \ 1)$$

*A mohó algoritmussal adjunk meg maximális összsúlyú lineárisan független oszlopvektorokat! (A  $\mathbf{w}$  vektor elemei az  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopvektorainak súlya.)*

**8.3. Feladat.** *Angliába, Németországba, Franciaországba és Olaszországba kell nagyköveteket küldeni. A 8.2. ábra jobb oldalán kezdőbetűk jelölik a négy országot. Hat személy közül kell választanunk, a jelöltek IQ értékei az ábra bal oldalán láthatóak. Az élek azt mutatják, hogy nyelvtudás és egyéb képességek miatt, melyik személy melyik országban jöhet szóba. Válasszunk ki jelölteket úgy, hogy az IQ-k összege maximális legyen!*





8.3. ábra. Példa a matroid-politóp felírására

### 8.3. A matroid politóp

Legyen  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  egy matroid,  $x : H \rightarrow \mathbb{R}$  egy vektor, továbbá  $A \subset H$  esetén

$$x(A) = \sum_{h \in A} x(h)$$

Tetszőleges  $A$  halmaz rangját  $r(A)$ -val jelöljük.

**8.7. Definíció** (Matroid politóp). *Matroid-politóp*nak nevezzük a következő feltételrendszer megoldáshalmazát

$$x(h) \geq 0 \mid h \in H \tag{8.1}$$

$$x(A) \leq r(A) \mid A \subset H \tag{8.2}$$

A matroid politópot  $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$ -mel jelöljük.

Tehát a  $H$  halmaz minden eleméhez nemnegatív változó tartozik. Az  $x$  vektor értékeinek összege egyik részalmazon sem haladhatja meg a részalmaz rangját.

**Feladat.** Tekintsük a 8.3. ábrán látható 4 pontú teljes gráfot! Írjuk fel a gráf él-matroidjára vonatkozó matroid-politóp feltételrendszerét!

Megoldás:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x(a), x(b), x(c), x(d), x(e), x(f) \leq 1 \\
 x(a) + x(b) + x(c) &\leq 2 \\
 x(a) + x(e) + x(d) &\leq 2 \\
 x(b) + x(f) + x(e) &\leq 2 \\
 x(c) + x(f) + x(d) &\leq 2 \\
 x(a) + x(b) + x(d) + x(f) &\leq 3 \\
 x(b) + x(c) + x(d) + x(e) &\leq 3 \\
 x(c) + x(a) + x(e) + x(f) &\leq 3 \\
 x(a) + x(b) + x(c) + x(d) + x(e) &\leq 3 \\
 x(a) + x(b) + x(c) + x(d) + x(f) &\leq 3 \\
 x(a) + x(b) + x(c) + x(e) + x(f) &\leq 3 \\
 x(a) + x(b) + x(d) + x(e) + x(f) &\leq 3 \\
 x(a) + x(c) + x(d) + x(e) + x(f) &\leq 3 \\
 x(b) + x(c) + x(d) + x(e) + x(f) &\leq 3
 \end{aligned}$$

A matroid alaphalmaza a gráf 6 éléből áll. Ennek az üreshalmazon kívül 63 részalhmaza van, tehát a matroid-politópót 63 egyenlőtlenség definiálja. Ezek közül azonban sokat elhagyhatunk, mert számos egyenlőtlenség a többinek következménye. Miután felírtuk, hogy az egy élből álló halmazokon  $x$  értéke legfeljebb 1, felesleges felírni, hogy a két élből álló halmazokon  $x$  értéke legfeljebb 2, ezzel 15 feltételt elhagyhatunk. A 20 darab három élből álló részalmaz közül 16-nak három a rangja, ezt a 16 feltételt is elhagyhatjuk. Marad 4 darab háromelemű részalmaz –a négy háromszög –melyeknek 2 a rangja. A teljes alaphalmaz rangja 3, mert van 3 független él (például  $a, b$  és  $d$ ), de több független él nincs. A 15 darab négyelemű élhalmazból három olyan van, amelyik egy 4-hosszúságú kör, ezekre felírtuk, hogy  $x$  összértéke legfeljebb 3. A maradék 12 négyelemű élhalmaz úgy néz, ki, hogy egy háromszögből kimutat egy él. Erre nem írjuk fel, hogy  $x$  értéke legfeljebb 3, mert a háromszögon legfeljebb 2, a kimutató élen legfeljebb 1. Itt megtakarítottunk 12 feltételt. Mindegyik ötelemű élhalmazra felírjuk, hogy  $x$  értéke legfeljebb 3. Ha az így kapott 6 db feltételt összeadjuk, és elosztjuk 5-tel, akkor megkapjuk azt, hogy  $x$  összértéke a teljes élhalmazon is legfeljebb 3. Ezért a nemnegativitáson kívül összesen  $6 + 4 + 3 + 6 = 19$  feltételt írtunk fel.

**8.2. Állítás.** Ha egy  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  matroidban  $B$  független, akkor  $B$  karakterisztikus függvénye

$$x(h) = \begin{cases} 1 & , \text{ha } h \in B \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

eleget tesz a matroid-politóp definíciójában szereplő feltételeknek, és a  $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$  politóp egy extrémális pontja.

*Bizonyítás.* Legyen  $A \subset H$ . Ha  $A = B$ , akkor  $B$  függetlensége miatt  $A$  rangja az elemszámmal, tehát (8.2)-ben egyenlőség áll fenn. Egyébként  $x(A) = |A \cap B| \leq r(A)$ , mert  $A \cap B$  ( $B$  részeként) független. Az 1. matroid-axióma miatt  $B$  egyelemű részhalmazai is függetlenek, tehát  $h \in B$  esetén  $x(h) \leq 1$  is szerepel  $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$  definíciójában. Ezért  $B$  karakterisztikus függvénye a poliéder egyik extrémális pontja. (Sem a 0 sem pedig az 1 nem lehet két különböző 0 és 1 közötti szám számtani közepe.)  $\square$

**8.3. Állítás.** Legyen adott egy  $\mathfrak{M}$  matroid. Ha  $\mathbf{x}$  egy egészértékű vektor a  $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$  poliéderben, akkor  $\mathbf{x}$  egy független halmaz karakterisztikus függvénye.

*Bizonyítás.* Egyelemű halmaz rangja 0 vagy 1, tehát  $x(h) \leq 1$  minden  $h \in H$  esetén (a matroid politóp korlátos). Legyen  $B$  azon elemek halmaza, melyekre  $x(h) = 1$ . Ekkor  $x(B) = |B|$ . Ha  $B$  nem lenne független, akkor  $B$  rangja kisebb lenne, mint  $|B|$ .  $\square$

A következő tételben a súlyfüggvénynek negatív értékei is lehetnek.

**8.6. Tétel.** Legyen  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  egy matroid,  $\mathbf{w} : H \rightarrow \mathbb{R}$  egy tetszőleges súlyfüggvény. Ekkor a

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\mathfrak{M})} \mathbf{w}\mathbf{x}$$

LP feladatnak van egészértékű optimális  $\mathbf{z}$  megoldása.

*Bizonyítás.*  $H$  elemeit rendezzük úgy, hogy  $w(h_1) \geq w(h_2) \geq \dots \geq w(h_m)$  teljesüljön, és legyen  $n$  az utolsó olyan index, amire  $w(h_n) \geq 0$ . Használni fogjuk az

$$X_0 = \emptyset$$

$$X_i = \{h_1, h_2, \dots, h_i\} \mid i = 1, 2, \dots, n$$

jelöléseket. Legyen

$$B = \{h_i \mid i \leq n, \text{ és } r(X_{i-1}) < r(X_i)\}. \quad (8.3)$$

Tehát  $B$  azokból az elemekből áll, melyeknek a megjelenésekor az  $X_i$  halmaz rangja emelkedik.  $B$  egy független halmaz, mert indukcióval könnyen látható, hogy  $B$  elemszáma  $B$  rangjával azonos. Legyen  $z$  a  $B$  halmaz karakterisztikus függvénye. Ekkor  $z$  nyilvánvalóan lehetséges megoldása a fenti LP-nek (8.2. állítás). Azt állítjuk, hogy ez a  $z$  vektor az LP feladat egyik optimális megoldása. Az optimalitást úgy igazoljuk, hogy felírjuk az LP feladat duálisát, és adunk egy duál-lehetséges megoldást, ahol a duál célfüggvény értéke  $wz$ -vel azonos. A fenti LP feladat duálisa:

$$\text{Min } \sum_{A \subset H} y_A r(A), \text{ feltéve hogy} \quad (8.4)$$

$$y_A \geq 0 \mid A \subset H, \text{ és} \quad (8.5)$$

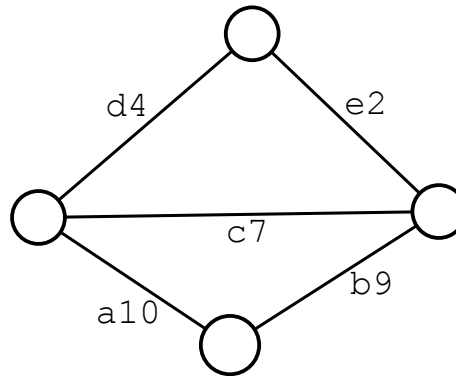
$$\sum_{A \subset H, h \in A} y_A \geq w(h) \mid h \in H \quad (8.6)$$

Tehát a matroid politóp definíciójának megfelelően minden  $A \subset H$  halmazhoz tartozik egy nemnegatív  $y_A$  duálváltozó. Az  $y_A$  együtthatója a duál-célfüggvényben az  $A$  halmaz rangja. Tetszőleges  $h$  elemre összegezzük azon  $A$  halmazok duálváltozóit, melyekben  $h$  benne van, és az így kapott összeg értéke legalább  $w(h)$ . Tekintsük a következő duál-lehetséges vektort:

$$y_A = \begin{cases} w(h_i) - w(h_{i+1}) & \text{ha } A = X_i \text{ valamilyen } i = 1, 2, \dots, n \text{ értékre,} \\ w(h_n) & \text{ha } A = X_n, \\ 0 & \text{a többi } A \subset H \text{ esetén.} \end{cases}$$

Ez valóban duál-lehetséges, mert nemnegatív, és  $w(h_i) \geq 0$  esetén  $h_i$  benne van az  $X_i, X_{i+1}, \dots, X_n$  halmazokban, és ezeken a halmazokon az  $y$  vektor koordinátáinak összege  $w(h_i)$ . (A  $w(h) < 0$  eset nyilvánvaló.) Most megmutatjuk, hogy a primál- és a duál célfüggvényérték azonos. Valóban, felhasználva, hogy  $r(X_i) - r(X_{i-1})$  értéke 1 vagy 0 attól függően, hogy  $h_i$  benne van-e a  $B$  halmazban vagy sem

$$wz = w(B) = \sum_{h_i \in B} w(h_i)(r(X_i) - r(X_{i-1})) = \sum_{i=1}^n w(h_i)(r(X_i) - r(X_{i-1}))$$



8.4. ábra. Adjunk maximális összsúlyú élhalmzást, és duál optimális megoldást!

adódik. A jobboldali szummát átrendezve

$$\mathbf{wz} = w(h_n)r(X_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (w(h_i) - w(h_{i+1}))r(X_i) = \sum_{i=1}^n y_{X_i}r(X_i)$$

adódik. Mivel az  $X_i$  halmazok kivételével  $y_A = 0$ ,

$$wz = \sum_{i=1}^n y_{X_i}r(X_i) = \sum_{A \in H} y_A r(A).$$

□

Most már megfogalmazható ennek az alfejezetnek a fő eredménye.

**8.7. Tétel** (A matroid politóp jellemzése). *Legyen  $\mathfrak{M} = (H, \mathcal{P})$  egy matroid. Ekkor a  $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$  matroid-politóp a független halmazok karakterisztikus vektorainak konvex burka.*

A tételeből az is következik, hogy a matroid-politóp minden csúcsa 0-1-vektor, és valamely független halmaz karakterisztikus vektora.

*Bizonyítás.* Jelöljük a  $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$  matroid-politópon belül az egész vektorok konvex burkát  $\mathcal{L}$ -lel. A 8.6. tétel szerint tetszőleges  $w$  súlyfüggvény esetén a  $wx$  célfüggvénynek a maximuma  $\mathcal{L}$ -en ugyanannyi, mint  $\mathcal{K}(\mathfrak{M})$ -en. Az A függelék A.2. tétele szerint  $\mathcal{L} = \mathcal{K}(\mathfrak{M})$ . □

**8.4. Feladat.** *A 8.4. ábrán látható gráfon az élek mellé írt betűk az él nevét, a számok az él súlyát jelzik. Adjunk meg egy maximális összsúlyú független élhalmzást! Oldjuk meg a duál feladatot is!*



## 9. fejezet

# Teljesen unimoduláris mátrixok

Ebben a fejezetben egy fontos mátrixosztályt tárgyalunk, amelynek nagy jelentősége van számos kombinatorikai eredmény bizonyításában. A tárgyaláshoz szükséges determinánsokkal kapcsolatos és egyéb lineáris algebrai ismeretek megtalálhatóan például Dancs István és Puskás Csaba [sCP01] könyvében.

### 9.1. Alapvető tulajdonságok

**9.1. Definíció.** *Egy mátrix teljesen unimoduláris, ha bárhogyan kiválasztva  $k$  darab sort és  $k$  darab oszlopot, a kapott részmatrix determinánsa vagy 1, vagy  $-1$  vagy 0.*

$k = 1$  esetén  $(1 \times 1)$ -es részmatrixszal van dolgunk, tehát egy teljesen unimoduláris mátrix minden eleme 1, vagy  $-1$  vagy 0. A definícióból az is következik, hogy egy teljesen unimoduláris mátrixnak bármelyik sorát vagy oszlopát megszorozhatjuk  $(-1)$ -gyel vagy 0-val, eredményül ismét teljesen unimoduláris mátrixot kapunk. Mindenekelőtt bebizonyítunk egy Hoffmantól és Kruskaltól származó tételt, amelyik a teljesen unimoduláris mátrixok jelentőségét mutató tételt készíti elő.

**9.1. Tétel (Hoffman-Kruskal).** *Legyen  $\mathbf{A}$  egy egész mátrix lineárisan független sorokkal,  $\mathbf{b}$  egész vektor, és tekintsük az*

$$\mathcal{L} = \{x \mid \mathbf{A}x = \mathbf{b}, \text{ és } x \geq 0\}$$

*poliedrikus halmazt. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

a) *az  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopaiból kiválasztott bármelyik  $\mathbf{B}$  bázis determinánsa  $+1$  vagy  $-1$ .*

b) az  $\mathcal{L}$  poliedrikus halmaz extrémális pontjai bármely egész  $\mathbf{b}$  esetén egészek.

c) az  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopaiból kiválasztott tetszőleges  $\mathbf{B}$  bázis inverze,  $\mathbf{B}^{-1}$  is egész.

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy a)-ból következik b), b)-ből következik c), és c)-ből következik a).

- a)  $\rightarrow$  b) Lineáris programozásból ismert, hogy az extrémális pontok éppen a bázismegoldások. Ha viszont a  $\mathbf{B}$  bázis determinánsa  $+1$  vagy  $-1$ , akkor  $\mathbf{B}^{-1}$  egész, tehát  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  is egész.
- b)  $\rightarrow$  c) Legyen  $\mathbf{e}(i)$  az  $i$ -edik alap-egységvektor (az  $i$ -edik koordinátája  $1$ , a többi  $0$ ).  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}(i)$  a  $\mathbf{B}^{-1}$  mátrix  $i$ -edik oszlopa. Legyen  $\mathbf{d}$  olyan egész vektor, hogy  $\mathbf{d} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}(i) > \mathbf{0}$ , legyen továbbá  $\mathbf{b}' = \mathbf{B}(\mathbf{d} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}(i)) = \mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{e}(i)$ . Ekkor  $\mathbf{d} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}(i)$  bázismegoldása az  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  feltételrendszernek, tehát extrémális pontja az  $L$  poliedrikus halmaznak. A  $\mathbf{b}'$  vektor egész, ezért b)-ből következik, hogy  $\mathbf{d} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}(i)$  is egész. A  $\mathbf{d}$  vektor is egész, ezért  $\mathbf{B}^{-1}$   $i$ -edik oszlopa egész. Ezt minden  $i$ -re állíthatjuk, tehát  $\mathbf{B}^{-1}$  is egész.
- c)  $\rightarrow$  a)  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ , tehát  $\det(\mathbf{B}^{-1})\det(\mathbf{B}) = 1$ . Eszerint  $\det(\mathbf{B})$   $1$  osztója az egész számok körében, tehát  $+1$  vagy  $-1$ .

□

Következményként bebizonyítjuk azt a tételt, amelyik a teljesen unimoduláris mátrixok jelentőségét mutatja.

**9.2. Tétel.** [HK56] Legyen  $\mathbf{A}'$  egy egész mátrix,  $\mathbf{b}$  egész vektor, és tekintsük a

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \text{ és } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

poliedrikus halmazt. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

- i)  $\mathbf{A}'$  teljesen unimoduláris.
- ii) a  $\mathcal{K}$  poliedrikus halmaz extrémális pontjai bármely egész  $\mathbf{b}$  esetén egészek.
- iii)  $\mathbf{A}'$  bármelyik nonszinguláris  $\mathbf{M}$  almátrixának az inverze,  $\mathbf{M}^{-1}$  is egész.

*Bizonyítás.* Legyen  $\mathbf{A} = (\mathbf{A}', \mathbf{I})$ . Megmutatjuk, hogy az előző tétel a), b) és c) állításai rendre ekvivalensek az itteni i), ii) és iii) állításokkal.



- $a) \leftrightarrow i)$   $\mathbf{A}$  oszlopaiból úgy áll össze egy bázis, hogy  $k$  darab oszlopot veszünk  $\mathbf{A}'$ -ből, és  $n - k$  oszlopot az  $\mathbf{I}$  egységmátrixból. Sorok átrendezésével

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}$$

adódik, tehát  $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{M})$ .  $\mathbf{B}$  pontosan akkor bázis, ha  $\mathbf{M}$  invertálható. Ha  $\mathbf{M}$  nem invertálható, akkor a determinánsa 0.

- $b) \leftrightarrow ii)$   $\mathbf{y} \in \mathcal{K}$  esetén  $\mathbf{A}'\mathbf{y} \leq \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$  azzal ekvivalens, hogy  $\mathbf{A}'\mathbf{y} + \mathbf{I}\mathbf{s} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ , és  $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$  valamilyen egész  $\mathbf{s}$  vektorra, tehát  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{b} - \mathbf{A}'\mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$ .  $\mathbf{y}$  pontosan akkor nem extrémális pontja  $\mathcal{K}$ -nak, ha  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2$ , ahol  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{K}$ , és  $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$ . Ez viszont azzal ekvivalens, hogy  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{b} - \mathbf{A}'\mathbf{y}_1 \end{pmatrix}$  és  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{b} - \mathbf{A}'\mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$  jelöléssel  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{L}$ ,  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ , és  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2$ , tehát  $\mathbf{x}$  nem extrémális pontja  $\mathcal{L}$ -nek.

- $c) \leftrightarrow iii)$  Az  $a) \leftrightarrow i)$  pontban szereplő konstrukcióhoz kiszámolható, hogy a  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}$  inverze

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Tehát, ha  $\mathbf{B}^{-1}$  egész, akkor  $\mathbf{M}^{-1}$  is egész, ha viszont  $\mathbf{M}^{-1}$  egész, akkor  $\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}$  is egész, tehát  $\mathbf{B}^{-1}$  is.

□

Tehát teljesen unimoduláris mátrix esetén a  $\mathcal{K}$  poliedrikus halmaz csúcsai egészek, és az invertálható almátrixok inverze is egész. Ezt az eredményt sokszor nem az eredeti  $\mathbf{A}'$  mátrix által definiált poliedrikus halmazra alkalmazzuk, hanem egy abból származtatott szintén teljesen unimoduláris mátrixra. Ezért fontos a következő állítás, amelyik azt mutatja, hogy egy adott teljesen unimoduláris mátrixból hogyan tudunk további teljesen unimoduláris mátrixokat konstruálni.

**9.1. Állítás.** *A következő állítások ekvivalensek:*

- a)  $\mathbf{A}$  teljesen unimoduláris.
- b)  $\mathbf{A}^T$  teljesen unimoduláris.
- c)  $-\mathbf{A}$  teljesen unimoduláris.
- d)  $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$  teljesen unimoduláris.
- e)  $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$  teljesen unimoduláris.

*Bizonyítás.* Azt fogjuk belátni, hogy az a) állítás ekvivalens a másik négygyel.

- a)  $\leftrightarrow$  b).  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{A}^T$  esetén ugyanazok az aldeterminánsok fordulnak elő.
- a)  $\leftrightarrow$  c).  $-\mathbf{A}$  aldeterminánsa vagy azonos  $\mathbf{A}$  megfelelő aldeterminánsával, vagy annak  $(-1)$ -szerese.
- a)  $\leftrightarrow$  d). Ha  $\mathbf{M}$  az  $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$  mátrixnak egy  $k \times k$ -as almátrixa, akkor vagy van  $\mathbf{A}$ -nek két azonos oszlopa (egy a baloldali  $\mathbf{A}$ -ból, egy a jobboldaliból), és ezért  $\mathbf{M}$  determinánsa 0, vagy pedig  $\mathbf{M}$   $\mathbf{A}$ -nak is almátrixa.
- a)  $\leftrightarrow$  e). Legyen  $\mathbf{M}$  az  $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$  mátrixnak egy  $k \times k$ -as almátrixa, amelyiknek  $s$  oszlopa származik  $\mathbf{A}$ -ból,  $k - s$  oszlopa pedig az egységmátrixból. A sorok megfelelő átrendezésével

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I}_{k-s} \end{pmatrix}$$

adódik, ahol  $\mathbf{C}$  az  $\mathbf{A}$  mátrixnak almátrixa,  $\mathbf{I}_{k-s}$  pedig egy kisebb egységmátrix. Ekkor  $\det(\mathbf{M}') = \det(\mathbf{C})$ , és az átrendezés miatt  $\det(\mathbf{M}) = \pm \det(\mathbf{M}')$ .

□

## 9.2. Teljesen unimoduláris pont-él mátrixok

Viszonylag nehéz jól használható szükséges és elégséges feltételt találni annak eldöntésére, hogy egy mátrix teljesen unimoduláris-e. Ugyanakkor gyakran eredményesen alkalmazható a következő elégséges feltétel.

**9.3. Tétel.** *Legyen  $\mathbf{A}$  egy  $(0, 1, -1)$  mátrix. Ha teljesül az alábbi két feltétel, akkor  $\mathbf{A}$  teljesen unimoduláris.*

1. Minden oszlopban legfeljebb két 0-tól különböző elem van.
2. A mátrix sorait particionálhatjuk egy  $\mathcal{S}$  és egy  $\mathcal{T}$  halmazra úgy, hogy bármelyik oszlopban 2 nemnulla elem ugyanabban a halmazban van, ha különböző előjelűek, és különböző halmazokban van, ha azonos előjelűek.

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy  $k \times k$ -as  $\mathbf{A}(k)$  almátrixot. Az 1. és 2. tulajdonságok erre is érvényesek.  $k$ -szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy a  $k \times k$ -as aldetermináns  $+1$ ,  $-1$  vagy  $0$ .  $k = 1$  esetén ez triviális.

Ha van a  $k \times k$ -as almátrixban csupa 0 oszlop, akkor a determináns 0.

Ha van olyan oszlop, amiben csak 1 nemnulla elem van, kifejtjük a determinánst eszerint az oszlop szerint.  $\text{Det}(\mathbf{A}(k)) = (\pm 1) \times \text{det}(\mathbf{A}(k-1))$  adódik.

Ha minden oszlopban 2 db nemnulla elem van, akkor az  $\mathcal{S}$ -beli sorok összege azonos a  $\mathcal{T}$ -beli sorok összegével, tehát a sorok lineárisan összefüggők, ezért a determináns 0.  $\square$

**9.1. Következmény.** Ha egy  $(0, 1, -1)$  mátrix mindegyik oszlopban legfeljebb egy  $+1$  és legfeljebb egy  $-1$  található, akkor a mátrix teljesen unimoduláris.

*Bizonyítás.* Az  $\mathcal{S}$  halmaz tartalmazza az összes sort, a  $\mathcal{T}$  halmaz legyen üres.  $\square$

Irányított gráf pont-él mátrixa esetén minden oszlopban egy  $+1$  és egy  $-1$  található, tehát bebizonyítottuk a következő tételt.

**9.4. Tétel.** Minden irányított gráf pont-él mátrixa teljesen unimoduláris.

Irányítatlan gráfok pont-él mátrixai nem mind teljesen unimodulárisak. Például a három pontú teljes gráf pont-él mátrixa az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix, és ennek a determinánsa 2. Ugyanakkor könnyen igazolható a következő eredmény:

**9.5. Tétel.** Egy irányítatlan gráf pont-él mátrixa pontosan akkor teljesen unimoduláris, ha a gráf páros.

*Bizonyítás.* Először azt látjuk be, hogy ha a gráf nem páros, akkor van a pont-él mátrixában olyan almátrix, amelynek a determinánsa 2. Valóban, nempáros gráfban létezik páratlan hosszúságú kör, amelyik  $k$  darab élből és  $k$  darab pontból áll. Válasszuk ki a pont-él mátrixból a kör  $k$  darab pontjához tartozó sorokat, és a kör  $k$  darab éléhez tartozó oszlopokat. A kapott  $k \times k$ -as almátrix egy páratlan hosszúságú kör pont-él mátrixa, például ( $k = 5$  esetén)

$$\mathbf{A}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fejtsük ki ezt a determinánst az első oszlop szerint! Az eredmény

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

Ha  $k$  5-nél nagyobb páratlan szám, akkor ugyanígy 2 lesz a determináns értéke. Ezután belátjuk, hogy ha a gráf páros, akkor a pont-él mátrix teljesen unimoduláris. Ez az állítás a 9.3. tételből következik, ha az  $\mathcal{S}$  halmaz a páros gráf egyik ponthalmazához (férfiak) tartozó sorokból áll, a  $\mathcal{T}$  halmaz pedig a páros gráf másik ponthalmazához (nők) tartozó sorokat tartalmazza.  $\square$

### 9.3. Alkalmazások

Ebben az alfejezetben olyan eredményekkel foglalkozunk, melyeket korábban már (többféleképpen is) igazoltunk.

**Feladat** (König-tétel). *Igazoljuk a páros gráfokra vonatkozó König-tételt abból kiindulva, hogy irányítatlan páros gráf pont-él mátrixa teljesen unimoduláris!*

*Megoldás:* Tegyük fel, hogy a páros gráfnak  $m$  éle és  $n$  pontja van, és legyen  $\mathbf{A}$  egy páros gráf pont-él mátrixa. Tekintsük a

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{1}(n), \text{ és } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

poliédert, és a

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}} \mathbf{1}^{(m)} \mathbf{x}$$

LP feladatot! Itt  $\mathbf{1}^{(m)}$  illetve  $\mathbf{1}^{(n)}$  azt az  $m$ -dimenziós sorvektort illetve  $n$ -dimenziós oszlopvektort jelöli, melynek minden koordinátája 1. A lehetséges pontok halmaza korlátos, tehát van optimális megoldás. Az LP feladat normál-feladat, tehát van optimális bázismegoldás is (ld. [sJT07]). A 9.5. tétel szerint az  $\mathbf{A}$  mátrix teljesen unimoduláris, tehát az optimális bázismegoldás egész. Ekkor az optimális  $\mathbf{x}$  vektor egy párosítás karakterisztikus vektora, az optimum értéke pedig a független élek maximális száma. Az LP feladat duálisa

$$\begin{aligned} \min w &= \mathbf{y} \mathbf{1}^{(n)} \text{ feltéve, hogy} \\ \mathbf{y} \mathbf{A} &\geq \mathbf{1}^{(m)}, \text{ és} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Az  $\mathbf{y} \mathbf{A} \geq \mathbf{1}^{(m)}$  feltétel  $-\mathbf{A}^T \mathbf{y}^T \leq -\mathbf{1}^{(m)^T}$  alakba írható, tehát a Hoffman-Kruskal-tétel szerint a duál feladat bázismegoldásai is egészek. Egy  $\mathbf{y}$  duál-optimális megoldásnak egyik koordinátája sem lehet 1-nél nagyobb, mert egy esetleg 1-nél nagyobb koordinátát 1-re csökkentve a  $w = \mathbf{y} \mathbf{1}^{(n)}$  célfüggvény értéke csökkenne, és továbbra is teljesülne az  $\mathbf{y} \mathbf{A} \geq \mathbf{1}^{(m)}$  egyenlőtlenség. Így a duál-optimális megoldásokat elegendő egy korlátos poliéderben keresni. Ezért létezik olyan  $\mathbf{y}$  duál-optimális bázismegoldás, melynek minden koordinátája 0 vagy 1. Ez az  $\mathbf{y}$  egy lefogó pontrendszer karakterisztikus vektora, és a dualitás tétel miatt a lefogó pontok minimális száma a független élek maximális számával egyenlő.

**9.1. Feladat.** *Bizonyítsuk be a páros gráf maximális összsúlyú teljes párosításával kapcsolatos dualitás tételt (5.2. tétel) az  $\mathbf{A}$  pont-él mátrix teljesen unimoduláris voltát kihasználva!*

*Útmutatás:* Legyen  $\mathbf{A}$  a páros gráf pont-él mátrixa. Tekintsük az

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{1}, \text{ és } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

poliédert, és a

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{1} \mathbf{x}$$

LP feladatot, valamint ennek a duálisát!

**9.2. Feladat.** *Tegyük fel, hogy egy maximális folyam feladatban minden él kapacitása pozitív egész szám! A 9.4. tétel segítségével bizonyítsuk be, hogy létezik egészértékű maximális folyam!*

*Útmutatás:* Egészítsük ki a hálózatot egy  $f$  éllel, amelyik a nyelőből a forrásba mutat, és legyen  $A$  a kapott irányított gráf pont-él mátrixa! Jelöljük a kapacitásokat  $u$ -val, és tekintsük az

$$\mathcal{M} = \{x \mid Ax = \mathbf{0}, \text{ és } u \geq x \geq \mathbf{0}\}$$

poliédert, valamint a

$$\max_{x \in \mathcal{M}} x(f)$$

LP feladatot!

# Összefoglalás

A kombinatorika erdejében található néhány jól kitaposott ösvény, melyek egyebek mellett azzal örvendeztetik meg a bakancsos turistát, hogy arra járva diszkrét eredményeket folytonos módszerrel bizonyítunk. A diszkrét és folytonos feladat kapcsolata számos esetben abban áll, hogy olyan konvex testet vizsgálunk, melynek a csúcsai egészek. Erre példa a(z Edmonds féle) párosítás- és teljes párosítás politópok alkalmazása, a matroid politóp jellemzése valamint a teljesen unimoduláris mátrixok által meghatározott poliedrikus halmazok esete.

Már a Teremtés Könyvében olvasható, hogy "Nem jó az embernek egyedül" (Préd. 4, 9.). Ez az ősi tanítás optimumfeladatokra is érvényes. Szinte minden maximumfeladathoz elválaszthatatlanul hozzátartozik egy minimumfeladat, melyet általában az eredeti feladat duálisának nevezünk. A kapcsolat hagyománytisztelő módon szimmetrikus: minimumfeladatok duálisa mindig maximumfeladat. Ugyanakkor nagy változatosság lelhető fel abban a tekintetben, hogy a primál- és duál feladatok közül melyik diszkrét, és melyik folytonos.

A maximális folyam probléma folytonos, de a vágások száma véges, tehát itt folytonos feladat duálisa diszkrét. Fordított a helyzet például a maximális összsúlyú párosítások keresésekor; ebben az esetben a primál feladat diszkrét, és a duálisa folytonos. Két diszkrét feladat alkotja a primál-duál párt a Menger-tételek, a Kőnig-tétel és a minimális összsúlyú páratlan pontthalmaz-fedés esetén.

Amikor mindkét feladat diszkrét, kivételesnek számít az az eset, hogy az erős dualitás tétel is igaz. Kirándulásunk során fontosnak tartottuk ezeknek a kivételeknek a felkeresését.





# A. függelék

## Poliéder és politóp

Használni fogjuk a konvex halmazok elméletében alapvető jelentőségű ún. szeparációs tételt:

**A.1. Tétel** (Szeparációs tétel). *Legyen  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  egy nemüres, zárt konvex halmaz, és  $y \notin \mathcal{H}$  azon kívül egy pont. Ekkor található olyan  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  vektor, és olyan  $b$  konstans, melyre az  $\mathbf{a}\mathbf{x} = b$  hipersík szigorúan elválasztja az  $y$  pontot és a  $\mathcal{H}$  halmazt, tehát*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{y} &> b, \text{ és} \\ \mathbf{a}\mathbf{x} &< b \text{ minden } \mathbf{x} \in \mathcal{H} \text{ esetén.} \end{aligned}$$

A bizonyítás megtalálható például Komáromi Éva [Kom02] könyvében (7. Állítás).

**A.1. Definíció** (Poliedrikus halmaz, poliéder). *A  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  halmazt poliedrikus halmaznak nevezzük, ha található olyan  $\mathbf{A}$  mátrix és  $\mathbf{b}$  vektor, hogy*

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \tag{A.1}$$

*A korlátos poliedrikus halmazokat poliédernek nevezzük.*

Ha  $\mathbf{a}^{(i)}$ -vel jelöljük az  $\mathbf{A}$  mátrix  $i$ -edik sorát, akkor

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^{(i)}\mathbf{x} \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m\},$$

tehát minden poliedrikus halmaz véges sok féltér metszete.

**A.2. Definíció** (Politóp). *Politópnak nevezzük véges sok pont konvex burkát.*

Tehát, ha  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ , akkor

$$\mathcal{K} = \{ \lambda_1 \mathbf{x}(1) + \lambda_2 \mathbf{x}(2) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}(k) \mid \lambda_i \geq 0, \text{ és } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \} \quad (\text{A.2})$$

egy politóp. Valós számok konvex kombinációja (súlyozott számtani közepe) a valós számok maximuma és minimuma közé esik, érvényes tehát a következő állítás:

**A.1. Állítás.** Ha  $\mathcal{K}$  az  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  pontok által kifeszített politóp, akkor tetszőleges  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  vektor esetén

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}} \mathbf{c}\mathbf{x} = \max_i \mathbf{c}\mathbf{x}(i). \quad (\text{A.3})$$

Ez azt jelenti, hogy amikor egy lineáris célfüggvényt egy politópon maximalizálunk, akkor a célfüggvény maximuma az  $\mathbf{x}(i)$  pontokban felvett célfüggvényértékek maximuma. Nevezetes tény, hogy a poliéder és a politóp azonos fogalmak. Ennek a függeléknek ez a fő eredménye, amit több lépésben fogunk igazolni.

**A.3. Definíció** (extremális pont). Egy  $\mathcal{K}$  konvex halmaz extremális pontjának nevezzük a  $\mathbf{p} \in \mathcal{K}$  pontot, ha  $\mathbf{p}$  nem állítható elő pozitív hosszúságú  $\mathcal{K}$ -beli szakasz felezőpontjaként. Az extremális pontokat  $\mathcal{K}$  csúcsainak is mondjuk.

Könnyen igazolható az alábbi állítás:

**A.2. Állítás.** Legyen a  $\mathcal{K}$  politóp az  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k)$  pontok konvex burka. Ekkor  $\mathcal{K}$  minden extremális pontja az  $\mathbf{x}(i)$  pontok valamelyike.

A következő állítás lineáris algebrai szempontból jellemzi az extremális pontokat.

**A.3. Állítás.** Legyen  $\mathcal{H} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}$  egy poliedrikus halmaz, és  $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$ . Jelöljük  $\mathbf{A}_z$ -vel azt a mátrixot, amelyik az  $\mathbf{A}$  mátrix azon  $\mathbf{a}(i)$  soraiból áll, melyekre a  $\leq$  korlát egyenlőségként teljesül, tehát  $\mathbf{a}(i)\mathbf{z} = b_i$ . A  $\mathbf{z}$  pont pontosan akkor extremális pontja  $\mathcal{H}$ -nak, ha  $\mathbf{A}_z$  rangja  $n$ .

*Bizonyítás.* Ha  $\mathbf{A}_z$  rangja kisebb  $n$ -nél, akkor van olyan  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  vektor, hogy  $\mathbf{A}_z \mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Elég kis pozitív  $t$ -re  $\mathbf{A}(\mathbf{z} + t\mathbf{u}) \leq \mathbf{b}$ , és  $\mathbf{A}(\mathbf{z} - t\mathbf{u}) \leq \mathbf{b}$  is teljesül, tehát  $\mathbf{z} + t\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ , és  $\mathbf{z} - t\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ .  $\mathbf{z} = (\mathbf{z} + t\mathbf{u} + \mathbf{z} - t\mathbf{u})/2$ , tehát  $\mathbf{z}$  nem extremális pont.

Másfelől tegyük fel, hogy  $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$  nem extrémális pont, tehát  $\mathbf{z} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ , és  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Ha  $\mathbf{a}^{(i)}$  az  $\mathbf{A}_z$  mátrix tetszőleges sora, akkor

$$\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{x} \leq b_i = \mathbf{a}^{(i)}\mathbf{z}, \text{ és}$$

$$\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{y} \leq b_i = \mathbf{a}^{(i)}\mathbf{z},$$

ezért  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0$ , és  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \leq 0$ . De  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = -\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ , tehát  $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = 0$ . Ekkor viszont  $\mathbf{A}_z$  rangja kisebb, mint  $n$ .  $\square$

**A.4. Állítás.** Minden poliedrikus halmaznak véges sok extrémális pontja van.

*Bizonyítás.* Az előző állítás jelöléseit használva, ha  $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$  egy extrémális pont, akkor  $\mathbf{z}$  megoldása az

$$\mathbf{A}_z\mathbf{z} = \mathbf{b}_z$$

egyenletrendszernek, ahol  $\mathbf{b}_z$  a  $\mathbf{b}$  vektor azon koordinátáiból áll, melyekre  $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{z} = b_i$ . Az  $\mathbf{A}_z$  együtthatómátrix rangja  $n$ , tehát a megoldás egyértelmű. Az  $\mathbf{A}$  mátrix  $n$  rangú almátrixainak száma véges, tehát az extrémális pontok száma is véges.  $\square$

**A.2. Tétel.** Minden poliéder az extrémális pontjainak a konvex burka.

*Bizonyítás.* Legyen  $\mathcal{M}$  a poliéder,  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(t)$  legyenek  $\mathcal{M}$  extrémális pontjai,  $\mathcal{K}$  pedig az extrémális pontok konvex burka.  $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$  nyilvánvaló. Most belátjuk, hogy  $\mathbf{z} \in \mathcal{M}$  esetén  $\mathbf{z} \in \mathcal{K}$ . Legyen  $s = n - \text{rang}(\mathbf{A}_z)$ . Az állítást  $s$  szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

$s = 0$  esetén  $\mathbf{z}$  az egyik csúcs (A.3. állítás). Ha  $s > 0$ , akkor létezik olyan  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  vektor, hogy  $\mathbf{A}_z\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Legyen

$$\lambda_0 = \max\{\lambda \mid \mathbf{z} + \lambda\mathbf{u} \in \mathcal{M}\}, \text{ és } \mathbf{x} = \mathbf{z} + \lambda_0\mathbf{u}$$

$$\mu_0 = \max\{\mu \mid \mathbf{z} - \mu\mathbf{u} \in \mathcal{M}\}, \text{ és } \mathbf{y} = \mathbf{z} - \mu_0\mathbf{u}$$

$\lambda_0$  és  $\mu_0$  véges, mert a poliéder korlátos. Ekkor  $\mathbf{A}_z\mathbf{x} = \mathbf{A}_z\mathbf{z} + \mathbf{A}_z(\lambda_0\mathbf{u}) = \mathbf{A}_z\mathbf{z}$ . Ha  $i$  egy olyan index, ahol  $\lambda$  maximuma felvétetik, akkor ütközés miatt

$$\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{x} = b_i$$

Ez azt jelenti, hogy  $\mathbf{A}_x$  tartalmazza  $\mathbf{A}_z$  összes sorát, és még az  $i$ -edik sort.  $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{u} \neq 0$  (mert  $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{z} < b_i$ ), ezért az  $i$ -edik sor nem lineáris kombinációja  $\mathbf{A}_z$  sorainak ( $\mathbf{A}_z\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ), tehát  $\mathbf{A}_x$  rangja  $\mathbf{A}_z$  rangjánál nagyobb.

Az indukciós feltevés miatt  $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ . Ugyanígy  $\mathbf{y} \in \mathcal{K}$  is megállapítható,  $\mathbf{z}$  pedig  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  konvex kombinációja.  $\square$

Ezzel azt is igazoltuk, hogy ha a poliéder nem üres, akkor van extrémális pontja. Ennek a nagy jelentőségű tételnek számos fontos következménye van.

**A.1. Következmény.** *Minden poliéder politóp.*

Ez azért igaz, mert az extrémális pontok száma véges (ld. A.4. állítás). Az A.1. állítás felhasználásával adódik az

**A.2. Következmény.** *Ha poliéderen maximalizálunk egy lineáris célfüggvényt, akkor a célfüggvény extrémális pontban is felveszi a maximumát.*

Ezt a következményt használtuk például az 5.2. tétel és az 5.3. tétel bizonyításában.

**A.4. Definíció** (origó körüli politóp). *Origó körüli politópnak nevezünk egy  $\mathcal{M}$  politópot, ha tartalmazza az origónak egy környezetét, tehát van olyan  $r > 0$ , hogy*

$$B(0, r) \subset \mathcal{M} \quad (\text{A.4})$$

**A.5. Definíció** (halmaz konjugáltja). *Egy  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$  halmaz konjugáltjának nevezzük azon vektorok halmazát, melyeknek  $\mathcal{H}$  bármely elemével vett skaláris szorzata legfeljebb 1.*

$$\mathcal{H}^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{xy} \leq 1 \text{ minden } \mathbf{x} \in \mathcal{H} \text{ esetén.}\} \quad (\text{A.5})$$

A  $\mathcal{H}$  halmaz konjugáltját  $\mathcal{H}^*$ -gal jelöljük.

**A.5. Állítás.** *Politóp konjugáltja poliedrikus halmaz. Origó körüli politóp konjugáltja poliéder.*

*Bizonyítás.* Legyen a  $\mathcal{K}$  politóp az  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k)$  pontok konvex burka. Ekkor

$$\mathcal{K}^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{yx}(i) \leq 1 \ (i = 1, 2, \dots, k)\} \quad (\text{A.6})$$

Ha ugyanis  $\lambda_i$ -vel megszorozzuk az  $\mathbf{yx}(i) \leq 1$  relációt, és a kapott egyenlőtlenségeket  $i$ -re összegezzük, akkor azt kapjuk, hogy  $\mathbf{yx} \leq 1$  a politóp tetszőleges  $\mathbf{x}$  pontjára. Az (A.6) képletben szereplő  $k$  darab egyenlőtlenség egy poliedrikus halmazt határoz meg. Ha  $\mathcal{K}$  origó körüli politóp, és  $\mathbf{yx} \in \mathcal{K}^*$ , akkor tekintsük az

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} (r - \varepsilon)$$

vektort. Ez  $\mathbf{y}$ -nal azonos irányú, a hossza  $r$ -nél kisebb, tehát benne van az origó  $r$  sugarú környezetében, így  $\mathcal{K}$ -ban is.  $\mathbf{y}\mathbf{x} \leq 1$  miatt  $\|\mathbf{y}\| (r - \varepsilon) \leq 1$ , tehát

$$\|\mathbf{y}\| \leq \frac{1}{r - \varepsilon}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy  $\mathcal{K}^*$  korlátos poliedrikus halmaz, vagyis poliéder.  $\square$

**A.6. Állítás.** *Ha  $\mathcal{K}$  egy origó körüli politóp, akkor  $\mathcal{K}^*$  is origó körüli politóp.*

*Bizonyítás.* Az A.5. állítás miatt  $\mathcal{K}^*$  egy poliéder, tehát az A.2. tétel szerint politóp.  $\mathcal{K}$  nyilvánvalóan korlátos. Ha  $\mathcal{K}$ -ben nincs  $d$ -nél hosszabb vektor ( $d$  egy pozitív szám), akkor az origó  $1/d$  sugarú környezete benne van  $\mathcal{K}^*$ -ban.  $\square$

**A.7. Állítás.** *Ha  $\mathcal{K}$  egy origó körüli politóp, akkor  $\mathcal{K}^{**} = \mathcal{K}$ .*

*Bizonyítás.* Az A.6. állítás szerint  $\mathcal{K}^*$  is politóp, vagyis véges sok pont konvex burka, tehát

$$\mathcal{K}^* = \text{konv}\{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(s)\}.$$

Természetesen

$$\mathcal{K}^{**} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}\mathbf{y}(i) \leq 1 \text{ minden } i = 1, 2, \dots, s \text{ esetén.}\}$$

Azt állítjuk, hogy

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}\mathbf{y}(i) \leq 1 \text{ minden } i = 1, 2, \dots, s \text{ esetén.}\}$$

$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{**}$  nyilvánvaló. Ezért azt fogjuk igazolni, hogy

$$\mathcal{K} \supset \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}\mathbf{y}(i) \leq 1 \text{ minden } i = 1, 2, \dots, s \text{ esetén.}\}$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy  $\mathbf{x}^*\mathbf{y}(i) \leq 1$  minden  $i$ -re, de  $\mathbf{x}^* \notin \mathcal{K}$ . Az A.1. szeparációs tétel szerint létezik olyan a vektor, és olyan  $b$  konstans, hogy

$$\mathbf{a}\mathbf{x}^* > b, \text{ és}$$

$$\mathbf{a}\mathbf{x} < b \text{ minden } \mathbf{x} \in \mathcal{K} \text{ esetén.}$$

Az origó  $\mathcal{K}$ -nek belső pontja, ezért  $b > 0$ . Feltehető, hogy  $b = 1$  (különben  $\mathbf{a}$ -t és  $b$ -t  $1/b$ -vel szorozzuk). Eszerint  $\mathbf{a} \in \mathcal{K}^*$ , tehát

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{y}(1) + \lambda_2\mathbf{y}(2) + \dots + \lambda_s\mathbf{y}(s), \text{ ahol } \lambda_i \geq 0, \text{ és } \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1. \quad (\text{A.7})$$

De ekkor

$$1 < \mathbf{a}\mathbf{x}^* = \lambda_1\mathbf{y}(1)\mathbf{x}^* + \lambda_2\mathbf{y}(2)\mathbf{x}^* + \dots + \lambda_s\mathbf{y}(s)\mathbf{x}^* \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = 1,$$

ami ellentmondás.  $\square$

**A.3. Tétel.** Ha  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  egy politóp, akkor  $\mathcal{K}$  poliéder.

*Bizonyítás.* A tételt  $n$ -szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.  $n = 1$  esetén minden politóp egy zárt intervallum, ami nyilvánvalóan két félegyenes metszete.

Legyen  $\mathcal{K}$  az  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(k)$  pontok konvex burka. Ha  $\mathcal{K}$  benne van egy  $(n - 1)$ -dimenziós síkban, akkor indukcióval igazolható az állítás. Ha nincs, akkor az  $\mathbf{x}(2) - \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(3) - \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(4) - \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(1)$  vektorok kifeszítik az  $n$ -dimenziós teret. Ezért  $\mathcal{K}$ -ben van olyan  $\mathbf{x}(0)$  pont, hogy ennek  $r$ -sugarú körnevezete is  $\mathcal{K}$ -ban van,  $B(\mathbf{x}(0), r) \subset \mathcal{K}$ . Eltolással elérhető, hogy  $\mathbf{x}(0)$  legyen az origó. (Egy politóp eltoltja is politóp, poliéder eltoltja is poliéder.) Tehát  $\mathcal{K}$  origó körüli politóp. Tekintsük  $\mathcal{K}$  konjugáltját. Az A.6. állítás szerint  $\mathcal{K}^*$  is origó körüli politóp. Az A.5. állítás szerint  $\mathcal{K}^{**}$  poliéder, az A.7. állítás miatt  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{**}$ , tehát  $\mathcal{K}$  is poliéder.  $\square$

**A.4. Tétel.** Legyen  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$  és  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  két poliéder. Ha minden  $\mathbf{w}$  célfüggvény esetén

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}} \mathbf{w}\mathbf{x} = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{w}\mathbf{x},$$

akkor a két poliéder azonos.

*Bizonyítás.* Ha  $\mathcal{L} \neq \mathcal{M}$ , akkor feltehető, hogy létezik olyan  $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$ , amelyik nincs  $\mathcal{M}$ -ben.  $\mathcal{M}$  korlátos, zárt konvex halmaz, tehát az A.1. szeparációs tétel szerint létezik olyan  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  vektor, és olyan  $b$  konstans, hogy

$$\mathbf{a}\mathbf{y} > b, \text{ és}$$

$$\mathbf{a}\mathbf{x} < b \text{ minden } \mathbf{x} \in \mathcal{M} \text{ esetén.}$$

Ekkor viszont

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}} \mathbf{a}\mathbf{x} > b \geq \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{a}\mathbf{x},$$

ami ellentmondás.  $\square$

**A.5. Tétel.** Legyen  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$  és  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  két poliéder, és tegyük fel, hogy valamilyen  $c$  valós számra mindkettő része a

$$\mathbf{1}\mathbf{x} = c \tag{A.8}$$

(hiper)síknak. ( $\mathbf{1}$  azt a vektort jelöli, amelynek minden koordinátája 1.) Ha minden nem-negatív  $\mathbf{w}$  célfüggvény esetén

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}} \mathbf{w}\mathbf{x} = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{w}\mathbf{x},$$

akkor a két poliéder azonos.

*Bizonyítás.* Legyen  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  tetszőleges,

$$m = \min_i a_i,$$

és tekintsük azt a  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  vektort, melyre

$$w_i = a_i - m \mid i = 1, 2, \dots, n.$$

A  $\mathbf{w}$  vektor nemnegatív, tehát

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}} \mathbf{w}\mathbf{x} = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{w}\mathbf{x}.$$

Ugyanakkor  $\mathcal{L}$ -en és  $\mathcal{M}$ -en belül bármely  $\mathbf{x}$  vektor koordinátáinak összege  $c$ , tehát

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}} \mathbf{w}\mathbf{x} = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}} \mathbf{a}\mathbf{x} - mc = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{a}\mathbf{x} - mc = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{w}\mathbf{x}.$$

Tehát tetszőleges  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  esetén

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}} \mathbf{a}\mathbf{x} = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{a}\mathbf{x},$$

és ezzel a tétel állítását visszavezettük az A.4. tételre. □





## B. függelék

### A $\mathbb{B}^n$ vektortér

Az 1. fejezetben bevezettük a  $\mathbb{B}$  bináris testet és a  $\mathbb{B}^n$  vektorteret. A bináris testben mindössze két skalár van, a 0 és az 1, és  $1 + 1 = 0$ . Ebben a függelékben igazoljuk, hogy  $\mathbb{B}^n$ -hez hasonlóan  $n$  darab lineárisan független vektor a  $\mathbb{B}^n$  vektortérben is bázist alkot, és a  $\mathbb{B}^n$  vektortér  $n$ -dimenziós.

**B.1. Definíció.**  $i$ -edik alap-egységvektornak nevezzük azt az  $\mathbf{e}(i) \in \mathbb{B}^n$  vektort, melynek az  $i$ -edik koordinátája 1, a többi pedig 0.

Tehát

$$\mathbf{e}(i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ahol az 1-es az  $i$ -edik helyen áll.

**B.1. Tétel.** Legyen  $k \leq n$ . Ha az  $\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{u}(k) \in \mathbb{B}^n$  vektorok lineárisan függetlenek, akkor megadható olyan  $\mathbf{A}$  invertálható mátrix, hogy

$$\mathbf{A}\mathbf{u}(i) = \mathbf{e}(i) \mid i = 1, 2, \dots, k.$$

*Bizonyítás.* A tételt konstruktív módon bizonyítjuk. Az állításban szereplő  $\mathbf{A}$  mátrix konstrukciója nem más, mint a numerikus matematikában alapvető jelentőségű Gauss-elimináció bináris változata. Jelöljük  $\mathbf{U}$ -val azt a mátrixot, amelynek az oszlopai az  $\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{u}(k) \in \mathbb{B}^n$  vektorok. Tehát

$$\mathbf{U} = \left( \mathbf{u}(1) \quad \mathbf{u}(2) \quad \mathbf{u}(3) \quad \dots \quad \mathbf{u}(k) \right),$$

az  $U$  mátrixnak  $n$  sora és  $k$  oszlopa van. Ezt a mátrixot átranzformáljuk az

$$E = \left( \mathbf{e}(1) \quad \mathbf{e}(2) \quad \mathbf{e}(3) \quad \dots \quad \mathbf{e}(k) \right)$$

mátrixba az alábbi két lépés szisztematikus alkalmazásával:

1. a mátrix két sorát felcseréljük.
2. a mátrix  $i$ -edik sorát hozzáadjuk a  $j$ -edik sorához.

Mindkét lépés realizálható úgy, hogy az aktuális mátrixot balról megszorozzuk egy invertálható mátrixszal. A sorcsere esetén jelöljük  $C(i, j)$ -vel azt az  $n \times n$ -es mátrixot, melyet az egységmátrixból az  $i$ -edik és  $j$ -edik sor felcserélésével kapunk. Például  $i = 2$  és  $j = 4$  esetén

$$C(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Amikor ezzel balról szorzunk egy  $B$  mátrixot, eredményül felcseréljük  $B$   $i$ -edik és  $j$ -edik sorát. Ha a sorcserét még egyszer elvégezzük, akkor visszakapjuk az eredeti  $B$  mátrixot, tehát  $C(i, j)^{-1} = C(i, j)$ .

A 2. lépéssel kapcsolatban jelöljük  $L(i, j)$ -vel azt az  $n \times n$ -es mátrixot, melyet úgy kapunk, hogy az egységmátrix  $j$ -edik sorának  $i$ -edik elemét 1-re módosítjuk. Például  $i = 2$  és  $j = 4$  esetén

$$L(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Amikor ezzel balról szorzunk egy  $B$  mátrixot, eredményül  $B$   $j$ -edik sorához hozzáadjuk  $B$   $i$ -edik sorát. Ha ezt még egyszer elvégezzük, akkor  $1 + 1 = 0$  miatt visszakapjuk az eredeti  $B$  mátrixot, tehát  $L(i, j)^{-1} = L(i, j)$ .

Tehát a sorcsere, és egy sornak a másikkhoz történő hozzáadása egyaránt invertálható mátrixszal balról történő szorzást jelent. Most rátérünk az eliminációs lépések ismertetésére.

Az első lépéssorozattal az  $U$  mátrix első oszlopát elimináljuk, tehát a mátrixot

$$U(1) = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

alakra hozzuk, a következőképpen: Szükség esetén sorcserevel elérjük, hogy a mátrix első sorának első eleme 1 legyen. (Ha az első oszlopban nem lenne 1-es, akkor  $u(1)$  a 0-vektor lenne, tehát nem lenne független.) Ezután az első sort rendre hozzáadjuk azokhoz a (tőle különböző) sorokhoz, melyeknek az első eleme 1-es volt.  $1 + 1 = 0$  miatt elérjük, hogy az első oszlopban  $e(1)$  álljon.

A második lépéssorozattal az  $U(1)$  mátrix második oszlopát elimináljuk, tehát a mátrixot

$$U(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{pmatrix}$$

alakra hozzuk, a következőképpen: Szükség esetén a második és  $k$ -edik ( $k > 2$ ) sor cseréjével elérjük, hogy a mátrix második sorának második eleme 1 legyen. (Ha a második oszlopban a második illetve az azalatti elemek között nem lenne 1-es, akkor  $u(1)$  és  $u(2)$  nem lenne független.) Ezután a második sort rendre hozzáadjuk azokhoz a (tőle különböző) sorokhoz, melyeknek a második eleme 1-es volt.  $1 + 1 = 0$  miatt elérjük, hogy a második oszlopban  $e(2)$  álljon, és eközben az első oszlop nem változik.

A harmadik lépéssorozattal az  $U(2)$  mátrix harmadik oszlopát elimináljuk, tehát

a mátrixot

$$\mathbf{U}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

alakra hozzuk, a következőképpen: Szükség esetén a harmadik és  $k$ -adik ( $k > 3$ ) sor cseréjével elérjük, hogy a mátrix harmadik sorának harmadik eleme 1 legyen. (Ha a harmadik oszlopban a harmadik illetve az azalatti elemek között nem lenne 1-es, akkor  $\mathbf{u}(3)$  az  $\mathbf{u}(1)$  és  $\mathbf{u}(2)$  vektorok lineáris kombinációja lenne.) Ezután a harmadik sort rendre hozzáadjuk azokhoz a (tőle különböző) sorokhoz, melyeknek a harmadik eleme 1-es volt.  $1 + 1 = 0$  miatt elérjük, hogy a harmadik oszlopban  $\mathbf{e}(3)$  álljon, és mindeközben az első két oszlop nem változik.

Így tovább haladva a  $k$ -adik oszlopot is elimináljuk, és az

$$\mathbf{U}(k) = \left( \mathbf{e}(1) \quad \mathbf{e}(2) \quad \mathbf{e}(3) \quad \dots \quad \mathbf{e}(k) \right)$$

alakhoz jutunk. Az  $\mathbf{U}(k)$  mátrix az  $\mathbf{U}$  mátrixból készült úgy, hogy véges sok invertálható mátrixszal szoroztunk balról, s ezzel a tétel állítását beláttuk.  $\square$

Legfontosabb következményként kapjuk a lineáris algebra alaptételét a  $\mathbb{B}^n$  vektortérben.

**B.2. Tétel.** *Ha az  $\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots, \mathbf{u}(n) \in \mathbb{B}^n$  vektorok lineárisan függetlenek, akkor tetszőleges  $\mathbf{v} \in \mathbb{B}^n$  vektor ezek lineáris kombinációja, tehát felírható*

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}(1) + v_2 \mathbf{u}(2) + \dots + v_n \mathbf{u}(n)$$

alakban, ahol mindegyik  $v_i$  skalár 0 vagy 1.

*Bizonyítás.* Az előző tételt a  $k = n$  esetre alkalmazzuk. Nyilvánvalóan minden vektor az  $\mathbf{e}(1), \mathbf{e}(2), \dots, \mathbf{e}(n)$  alap-egységvektorok lineáris kombinációja. Az  $\mathbf{A}\mathbf{v}$  vektor is lineáris kombinációja az alap-egységvektoroknak.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}(1) + v_2 \mathbf{e}(2) + \dots + v_n \mathbf{e}(n)$$

esetén

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}(1) + v_2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}(2) + \dots + v_n \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}(n),$$

tehát

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}(1) + v_2 \mathbf{u}(2) + \dots + v_n \mathbf{u}(n).$$

□

Ezzel beláttuk, hogy  $n$  darab lineárisan független vektor bázist alkot a  $\mathbb{B}^n$  vektortérben.  $k < n$  esetén  $k$  darab lineárisan független vektor nem alkot bázist, mert például

$$\mathbf{A}\mathbf{u}(i) = \mathbf{e}(i) \mid i = 1, 2, \dots, k$$

esetén az  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}(k+1)$  vektor nem állítható elő a  $k$  darab  $\mathbf{u}(i)$  vektor lineáris kombinációjaként. Tehát a  $\mathbb{B}^n$  vektortér valóban  $n$ -dimenziós.



# Név- és tárgymutató

- alap-egységvektor 151
- algoritmus 14, 22, 46, 56, 62, 67, 81, 100, 123
- alternáló fa 45
- alternáló út 41
- $\mathbb{B}^n$  vektortér 10, 151
- bázis 120, 155
- bináris test 10, 151
- Birkhoff, von Neumann 53
- blossom 76, 80
- csúcs 131, 144
- de-kontrakció 89, 100, 103
- dimenzió 155
- duál lehetséges 59, 60, 64, 68, 98–100
- Edmonds 76, 81, 105–107, 110
- Egerváry 61, 65
- él-matroid 118, 124
- elimináció 151
- élsorozat 6, 75, 81, 101, 112
- erdő 10
- erdők jellemzése 11
- erős dualitás 24, 25, 27, 61, 65, 88
- Euler-bejárás 15, 16, 112
- Euler-gráf 15
- extremális pont 52, 53, 108, 111, 134, 144
- fa 8, 45
- fák jellemzése 8
- fedetlen pont 41, 45, 46, 56, 67, 71, 77, 81, 90, 100
- feszített részgráf 6
- feszített részgráf II. 6
- feszítő fa 8, 124
- fok 5, 39, 112, 113
- folyam 17
- folyam értéke 17
- Ford-Fulkerson 27, 35
- Ford-Fulkerson-algoritmus 20, 22
- független élek 33
- független halmaz 117
- Gallai 92
- Gauss-algoritmus 151
- Gauss-elimináció 151
- gyenge dualitás 19, 29, 60, 64, 87, 98
- gyökér 13, 14, 22, 45, 46, 90
- Hall-tétel 38
- Hoffman-Kruskal-tétel 133
- irányítatlan élösszefüggőség 28
- irányítatlan gráf 3
- irányítatlan pontösszefüggőség 28
- irányított élösszefüggőség 28
- irányított gráf 3
- irányított pontösszefüggőség 28

- javító út 41, 42, 46, 47, 56, 58, 62, 67, 71, 77–80, 82, 92, 101, 104
- k-reguláris gráf 39
- kínai postás feladat 112
- komponens 7, 92, 118
- Kőnig 1, 35
- Kőnig-tétel 33, 35, 138
- konjugált 146
- kontrahálás 76, 79, 89, 103
- kontrakció 76, 78, 79, 82, 88, 100, 103
- konvex burok 112, 131, 144
- kör 6, 121
- Kwan 112
- láncc 20
- Lawler 1
- lefogó pont 46, 76, 86
- lefogó pontok 34
- lehetséges folyam 17
- lexikografikusan maximális 123
- lexikografikus rendezés 122
- matroid 117, 122, 126
- matroid politóp 126
- maximális összsúlyú párosítás 55, 95
- maximális összsúlyú teljes párosítás 95
- maximális párosítás 46, 76
- maximális párosítás nempáros gráfban 76, 81
- maximális párosítás páros gráfban 46
- maximin párosítás 62
- maximumfeladat duálisa 59
- Menger-tételek 1, 27, 30, 31
- minimális összsúlyú teljes párosítás 63, 113, 139
- minimális súlyú teljes párosítás 97
- minimumfeladat duálisa 64, 98
- mohó algoritmus 122
- NP-nehéz 76
- odd set cover 86
- optimalitási kritérium 41, 75
- optimumfeladatok 95
- origó körüli politóp 146
- összefüggő gráf 7
- összefüggő halmaz 117
- összefüggőség 28, 29
- páratlan komponens 92
- páratlan ponthalmaz fedés 86
- páros gráf 12, 13, 137
- páros gráfok jellemzése 13
- párosítás matroid 118
- párosítás politóp 48, 105, 110
- partíció-matroid 118
- permutáció-mátrix 53
- poliéder 49, 51, 52, 61, 66, 105–107, 109–111, 129, 139, 143–148
- poliedrikus halmaz 143
- politóp 48–53, 105–108, 126, 143
- pont-él mátrix 4, 11, 137
- pont-pont mátrix 4, 5
- pont foka 5, 39, 112, 113
- pontok fedése élekkel 93
- Prim 124
- primál-duál algoritmus 67, 97, 100
- primál algoritmus 56
- pszeudo-csúcs 76, 78, 79, 82, 89, 103
- rang 121
- részgráf 5



Schrijver 1  
súlyozott párosítások nempáros gráfban  
95  
súlyozott párosítások páros gráfban 55  
szeparációs tétel 143, 148  
teljesen unimoduláris mátrix 133  
teljesen unimoduláris pont-él mátrixok  
136  
teljes gráf 6  
teljes párosítás 38, 92  
teljes párosítás politóp 48, 51, 106, 107  
Tutte 92  
Tutte-Berge 92  
út 6  
vágás 17, 18  
vágás élei 18  
vágás kapacitása 18  
virág 81, 82, 86, 89, 90, 92, 101  
virág feje 81  
virág nyele 81  
X-alternáló fa 45  
zárt élsorozat 6



# Irodalomjegyzék

- [Edm65] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 1(17):449–467, 1965.
- [Ege31] J. Egerváry. Mátrixok kombinatorikus tulajdonságairól. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38(1):16–28, 1931.
- [EK72] J. Edmonds and R. M. Karp. Theoretical Improvements in algorithmic efficiency for Network flow problems. *J. ACM*, 1(19):248–264, 1972.
- [FF56] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian J. Math.*, 9(1):399–404, 1956.
- [Gua65] M.-G. Guan. Graphic programming using odd or even points. *Chinese Mathematics*, 1(1):273–277, 1965.
- [HK56] A.J. Hoffmann and J. B. Kruskal. Integral boundary points of convex polyhedra. *Annals of Mathematics Studies*, 38(1):223–246, 1956.
- [Kön31] D. König. Graphok és mátrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38(1):116–119, 1931.
- [Kom02] É. Komáromi. *Lineáris programozás*. BKÁE Operációkutatás Tanszék, Budapest, 2002.
- [Law76] Eugene Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Dover Publications, Inc., Mineola, N.Y. 11501, 1976.
- [Men27] K. Menger. Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae*, 10(1):96–115, 1927.
- [Pri57] R.C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *The Bell System Technical Journal*, 36(1):1389–1401, 1957.

- [Rad42] R. Rado. A theorem on independence relations. *The Quarterly Journal of Mathematics (Oxford)*, 13(2):83–89, 1942.
- [Sch03] Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization-Polyhedra and Efficiency*. Springer, Berlin, 2003.
- [Sch09] Alexander Schrijver. *A course on Combinatorial Optimization*. CWI, Amsterdam, <http://homepages.cwi.nl/lex/files/dict.pdf>, 2009.
- [sCP01] I. Dancs és Cs. Puskás. *Vektorterek*. AULA Kiadó, Budapest, 2001.
- [sJT07] Z. Varró és J. Temesi. *Operációkutatás*. AULA, Budapest, 2007.
- [sTS05] J. Stahl és T. Solymosi. *Optimumszámítás*. BKÁE Operációkutatás Tanszék e-könyvtár, Budapest, 2005.
- [Zwi95] U. Zwick. The smallest networks on which the Ford–Fulkerson maximum flow procedure may fail to terminate. *Theoretical Computer Science*, 148(1):165–170, 1995.

## Az „OPERÁCIÓKUTATÁS” sorozatban eddig megjelentek:

Nagy Tamás<sup>1</sup> – Klafszyk Emil:  
SZTOCHASZTIKUS JELENSÉGEK

Komáromi Éva<sup>2</sup>:  
LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

Deák István<sup>3</sup>:  
BEVEZETÉS A SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSBA

Hujter Mihály<sup>4</sup>:  
PERFEKT GRÁFOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Etienne de Klerk<sup>5</sup> – Cornelis Roos<sup>6</sup> – Terlaky Tamás<sup>7</sup>:  
NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS

Szántai Tamás<sup>8</sup>:  
PERT ALKALMAZÁSOK

Komáromi Éva:  
KOCKÁZAT, DÍJ, TARTALÉK

Rapcsák Tamás:  
NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS

Szűcs Gábor:  
DISZKRÉT SZIMULÁCIÓ MATEMATIKAI ALAPJAI

A kötetek megrendelhetők az AULA könyvesboltjában:  
1093 Budapest, Fővám tér 13-15. Telefon: (36)-482-8771

<sup>1</sup> Miskolci Egyetem Matematikai Intézete, Alkalmazott Matematika Tanszék, e-mail: [matente@gold.uni-miskolc.hu](mailto:matente@gold.uni-miskolc.hu)

<sup>2</sup> Budapesti Corvinus Egyetem Operációkutatás Tanszéke, e-mail: [komaromi@bkae.hu](mailto:komaromi@bkae.hu)

<sup>3</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézete, Differenciálegyenletek Tanszék, Operációkutatási Csoport, e-mail: [deak@math.bme.hu](mailto:deak@math.bme.hu)

<sup>4</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézete, Differenciálegyenletek Tanszék, Operációkutatási Csoport, e-mail: [hujter@math.bme.hu](mailto:hujter@math.bme.hu)

<sup>5</sup> Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo (ON), Canada, [edeklerk@math.uwaterloo.ca](mailto:edeklerk@math.uwaterloo.ca); <http://www.math.uwaterloo.ca/~edeklerk>

<sup>6</sup> Department of Information Systems and Algorithms, T.U. Delft, Delft, The Netherlands, [C.Roos@ewi.tudelft.nl](mailto:C.Roos@ewi.tudelft.nl); <http://www.isa.ewi.tudelft.nl/~roos>

<sup>7</sup> Department of Computing and Software, McMaster University, Hamilton (ON), Canada, [terlaky@mcmaster.ca](mailto:terlaky@mcmaster.ca); <http://www.cas.mcmaster.ca/~terlaky>

<sup>8</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézete, Differenciálegyenletek Tanszék, e-mail: [szantai@math.bme.hu](mailto:szantai@math.bme.hu)