

# Hogyan tehető igazságosabbá a labdarúgó mérkőzéseket követő büntetőpárbaj?

Csató László\*

Petróczy Dóra Gréta†

2019. február 18.

## Kivonat

A labdarúgásban, több más sportághoz hasonlóan, ha egy mérkőzésen a rendes játékidőt követő hosszabbításban sem dől el, hogy melyik csapat juthat tovább, akkor ezt egy büntetőpárbaj segítségével határozzák meg. Az érvényben levő szabályok szerint mind az első öt körben, mind az esetleg szükségessé váló hirtelen halál szakaszban az egyik, pénzfeldobás révén kiválasztott csapat rúgja az első tizenegyest, ezáltal szignifikánsan nagyobb, mintegy 60%-os valószínűséggel győz, ami nem tekinthető igazságosnak és sérti a hatékonyság elvét. A cikkben a büntetőpárbajok lebonyolítására szolgáló alternatív mechanizmusokat mutatunk be, majd hasonlítunk össze egy matematikai-statisztikai modell segítségével, illetve empirikus alapokon. Ezek közül az első rúgás jogát a hátrányban levő csapatnak biztosító Felzárkóztató szabály áll legközelebb az azonos képességű csapatok egyenlő nyerési valószínűségével megfogalmazható igazságosság kritériumához. A mechanizmus teljesítménye tovább javítható egy általunk bevezetett módosítással.

*Kulcsszavak:* sport; labdarúgás; mechanizmus tervezés; igazságosság

**MSC kód:** 60J20, 91A05, 91A80

**JEL kód:** C44, C72, Z20

\* E-mail: [laszlo.csato@uni-corvinus.hu](mailto:laszlo.csato@uni-corvinus.hu)

MTA SZTAKI Mérnöki és Üzleti Intelligencia Kutatólaboratórium, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport

Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

† E-mail: [doragreta.petroczy@uni-corvinus.hu](mailto:doragreta.petroczy@uni-corvinus.hu)

Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék

# 1. Bevezetés

A sportban az igazságosság egyik lehetséges értelmezése szerint egyenlő képességű csapatoknak és játékosoknak azonos valószínűséggel kell(ene) nyerniük. Ez a látszólag egyszerű követelmény a gyakorlatban számos esetben nem teljesül. Például [Krumer és szerzőtársai \(2017\)](#) elméletileg, [Krumer és Lechner \(2017\)](#) pedig empirikusan igazolja, hogy a körmérkőzéses bajnokságok eredménye nem független a mérkőzések sorrendjétől; míg a svájci rendszerű sakkversenyek rangsorolási szabálya előnyben részesíti a javuló teljesítményű csapatokat ([Csató, 2013, 2017](#)).

Ebben a cikkben a labdarúgásban alkalmazott büntetőpárbajok fenti értelemben vett igazságosságának kérdését vizsgáljuk. Az 1968-as labdarúgó-Európa-bajnokság mérkőzései arra indították a Nemzetközi Labdarúgó-szövetséget (FIFA), hogy az 1970-es labdarúgó-világbajnokságtól kezdve az egyenes kieséses szakasz mérkőzésein, ha a rendes játékidőben, majd a hosszabbítás után egyaránt döntetlen az eredmény, a korábban használt pénzfeldobás helyett büntetőpárbaj döntsön a továbbjutásról ([Anbarcı és szerzőtársai, 2018](#)).

Az utóbbi időben körmérkőzéses csoportkörökben speciális holtversenyt eldöntő szabályként is használják a büntetőpárbajt. Például a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság csoportjaiban, amennyiben két egyenlő pontszámmal, azonos számú rúgott és kapott góllal rendelkező csapat az utolsó körben egymással döntetlenül játszik, sorrendjüket tizenegyesrúgásokkal határozzák meg, feltéve, hogy nem található egy harmadik, azonos pontszámmal rendelkező csapat ([UEFA, 2018, 20.02 paragrafus](#)). Ez nem csupán elméleti érdekesség: a 2016-os U17-es labdarúgó-Európa-bajnokság selejtezőjének elitkörre 7. csoportjában Lengyelország így végzett Írország, 8. csoportjában pedig Belgium Spanyolország előtt.

A büntetőpárbaj jelenleg érvényes szabályai értelmében (1) a játékvezető pénzfeldobással dönt arról, melyik kapura rúgják a tizenegyeseket, majd (2) az egyik, újabb pénzfeldobással kiválasztott csapat eldönti, elsőként vagy másodikként végzi el azokat ([IFAB, 2018, 10. fejezet](#)). Ezután az  $A$  és  $B$  csapat öt-öt büntetőt rúg az  $AB|AB|AB|AB|AB$  sorozatnak megfelelően. Ha az egyik csapat behozhatatlan előnyre tesz szert, a hátralevő büntetőrúgásokat már nem végzik el. Amennyiben az öt kör alatt sem születik meg a döntés, a büntetőpárbaj *hirtelen halál (sudden death)* szakasza kezdődik, változatlanul az  $AB$  sorrendben, mely egészen addig folytatódik, amíg az egyik csapat be nem rúgja, a másik csapat pedig ki nem hagyja a tizenegyesét. Ez az úgynevezett  $ABAB$  szabály.

Miután a labdarúgásban a büntetők többsége sikeres, az adott körben a második tizenegyest rúgó játékos többnyire nagyobb mentális terhet visel, különösen a harmadik, negyedik tizenegyestől, amikor egy hiba a mérkőzés azonnali elvesztését jelentheti. Statisztikai vizsgálatok szerint nagyjából az esetek 60%-ában az első tizenegyest rúgó csapat nyer ([Apesteguija és Palacios-Huerta, 2010; Palacios-Huerta, 2014; Da Silva és szerzőtársai, 2018](#)). Miután ez a tény széles körben ismert,

a pénzfeldobást nyerő csapat szinte mindig az első rúgás jogát választja. Figyelemreméltó kivétel, hogy a 2018-as labdarúgó-világbajnokság nyolcaddöntőjében a – később a torna legjobb játékosának választott – horvát csapatkapitány, *Luka Modrić* a második tizenegyesek rúgása mellett döntött a házigazda Oroszország ellen (*Mirror*, 2018). A stratégia utóbb sikeresnek bizonyult, sőt, a 2018-as labdarúgó-világbajnokság mind a négy büntetőpárbaját a másodikként rúgó csapat nyerte.

A FIFA Szabályalkotó Testülete (IFAB) éppen ezért tervezi a büntetőpárbajok igazságosabbá tételét, ahogy azt a labdarúgás aktuális, 2018. június 1-jétől hatályos szabálykönyvében is megfogalmazza (IFAB, 2018, Bevezetés – A jövő). Az egyik lehetséges alternatívát *ABBA* mechanizmust – amikor az első két tizenegyes (*AB*) tükörképe a következő kettő (*BA*) – már több alkalommal tesztelték: elsőként a 2017. májusában megrendezett férfi és női U17-es labdarúgó-Európa-bajnokságokon (UEFA, 2017b), majd a 2017. júniusi férfi és női U19-es labdarúgó-Európa-bajnokságokon (UEFA, 2017a). Az első *ABBA* rendszerű büntetőpárbajt 2017. május 11-én, a női U-17-es labdarúgó-Európa-bajnokság elődöntőjében Németország nyerte meg Norvégiával szemben (Thomson Reuters, 2017). A 2017-es angol labdarúgó-szuperkupa (FA Community Shield) győztese, az Arsenal szintén így diadalmaskodott a Chelsea felett.

Az *ABBA* szabályt használják a teniszben, a 6-6-os állást követő rövidített játék (tie-break) során, ahol ez a mechanizmus garantálja az igazságosságot (Cohen-Zada és szerzőtársai, 2017, 2018). Az IFAB 133. éves gyűlése (annual business meeting, ABM) azonban 2018. november 22-én úgy határozott, kellő támogatottság hiányában – ami elsősorban a mechanizmus komplexitásának köszönhető – a jövőben nem alkalmazza azt (FIFA, 2018). Ezzel szemben a sakkbán, ahol a páros mérkőzések páratlan számú játszmáit világossal kezdő játékos szintén 60% körüli valószínűséggel győz (González-Díaz és Palacios-Huerta, 2016), már a 2006-os világbajnoki döntőtől kezdve a 12 játszmás mérkőzés félidejében változtatnak a sorrenden, így az egyik sakkozó az 1., 3., 5., 8., 10. és 12. játszmákban játszik világossal.

Az utóbbi időben több tudományos munka foglalkozott a büntetőpárbajok különböző mechanizmusaival (Anbarci és szerzőtársai, 2015, 2018; Brams és Ismail, 2018; Echenique, 2017; Palacios-Huerta, 2012), és a téma szélesebb érdeklődésre is számot tarthat (Euronews, 2018; MTA SZTAKI, 2018).

Kiindulópontunk egy, a közelmúltban a nagy presztízsű *SIAM Review* folyóiratban megjelent cikk (Brams és Ismail, 2018), ahol a szerzők egy matematikai-statisztikai modell segítségével megmutatják, hogy az általuk javasolt *Kiegyenlítő* (*Catch-Up*) szabály sokkal közelebb áll az igazságossághoz a determinisztikus *ABAB* mechanizmusnál. Feltevéseiket elfogadva első lépésben belátjuk, a Kiegyenlítő szabály nem jobb a már a gyakorlatban kipróbált *ABBA* rendszernél. Elemzésünkbe bevonjuk a *Felzárkóztató* (*Behind First, Alternating Order*) (Anbarci és

szerzőtársai, 2015, 2018), és a determinisztikus  $ABBA|BAAB$  (Palacios-Huerta, 2012) mechanizmusokat is. Végül javaslatot teszünk a Kiegyenlítő és Felzárkóztató szabályok egy olyan módosítására, amely tovább közelíti azokat a vágyott az egyenlő nyerési valószínűségek felé.

Tanulmányunk az alábbi felépítést követi. A 2. fejezet a büntetőpárbajok lebonyolítására használható szabályok működését vázolja. A 3. fejezetben ezeket a mechanizmusokat értékeljük egy egyszerű matematikai modell, illetve empirikus adatok segítségével. Írásunkat rövid összeggzéssel zárjuk.

## 2. A büntetőpárbajok néhány mechanizmusa

A továbbiakban  $A$  csapatnak hívjuk azt, amelyik az első körben kezdi a büntetőpárbajt, és  $B$  csapatnak a másodikként rúgót. A jelenleg használt mechanizmus az úgynevezett  $ABAB$  szabály, amely szerint az első körben kezdő csapat fog minden egyes körben elsőnek rúgni. A célunk az elsőként rúgó csapat által élvezett előny (bizonyos esetekben hátrány) csökkentése, a nyerési valószínűségek kiegyensúlyozása.

Kutatók több alternatív rendszert javasoltak a büntetőpárbajok lebonyolítására. Az egyik legkézenfekvőbb módszer a jogosulatlan előny csökkentésére a már bemutatott  $ABBA$  szabály, amikor az előző kör kezdője lesz a soron következő kör második rúgója.

Ennek továbbfejlesztett változata az  $ABBA|BAAB$  rendszer, amely alapján a harmadik kört  $B$ , a negyediket  $A$ , míg az ötödik kört ismét  $A$  kezdi, majd ez a mintázat ismétlődik. Ez a Palacios-Huerta (2012) által javasolt Prouhet-Thue-Morse-sorozat egyszerűsített változata. Az eredeti felvetés szerint az  $ABBA|BAAB$  sorozat fordítva,  $BAAB|ABBA$ -val folytatódna, és így tovább. Úgy véljük, az eredeti Prouhet-Thue-Morse-sorozat használata bonyolult lenne a mérkőzések során, és nem járna jelentősen kiegyenlített esélyekkel, mint az  $ABBA|BAAB$  szabály. Az eddigiek mindegyike *determinisztikus* mechanizmus, azaz a következő rúgó kiléte nem függ a korábbi büntetőrúgások kimenetelétől.

A *Kiegyenlítő (Catch-Up)* szabály az előző körben rúgott tizenegyesek eredményének figyelembevételével határozza meg a rúgás sorrendjét (Brams és Ismail, 2018). Alapesetben az  $ABBA$  szabályhoz hasonlóan minden körben megcseréli a csapatokat, kivéve, ha az előző kör első rúgója kihagyta, a második viszont értékesítette büntetőjét, azaz az elsőnek rúgó csapat nem volt képes kihasználni előnyös helyzetét.

Illusztrációként vegyük azt az esetet, amikor az  $A$  csapat két büntetőt értékesít, a másodikat és a negyediket, míg a  $B$  csapat szintén kettőt rúg be, az első és a másodikat. Az első büntető  $B$  csapatnak sikeres (0-1), ezért a második kört  $A$  kezdi, ahol mindkét csapat értékesíti a tizenegyesét (az állás 1-2). Így a harmadik

kört  $B$  kezdi, itt mindkettlen kihagyják (1-2). Tehát  $A$  kezdi a negyedik kört, rúgója értékesíti, a  $B$  csapat játékosja ellenben kihagyja büntetőjét (2-2). Mivel az előző körben kihagyta, a Kiegyenlítő szabály értelmében az ötödik körben  $B$  az első rúgó, de mindkét csapat elhibázza a büntetőt (2-2). A büntetőpárbaj a hirtelen halál szakasszal folytatódik, ahol a Kiegyenlítő mechanizmus szerint  $A$  az első rúgó. Tehát a sorrend  $AB|AB|BA|AB|BA$  (hirtelen halál)  $AB|BA|AB\dots$

A *Felzárkóztató (Behind First, Alternating Order)* szabály értelmében mindig a hátrányban lévő csapat kezdi a következő kört, döntetlen állás esetén pedig az, aki az előző körben másodikként rúgott (Anbarcı és szerzőtársai, 2015, 2018). A korábbi példánál maradva, mivel az első körben csak  $B$  értékesíti a büntetőjét, a második kört  $A$  kezdi. A második körben mindkét csapat berúgja (az állás 1-2), ezért a harmadik kört, a Kiegyenlítő szabállyal ellentétben, ismét  $A$  kezdi. Itt mindkét játékos hibázik (1-2), ezért a negyedik kört  $A$  kezdi. Ebben a körben  $A$  berúgja,  $B$  kihagyja (2-2), tehát a következő kört  $B$  kezdi. Az ötödik körben mindkét csapat elhibázza tizenegyesét (2-2), így a büntetőpárbaj a hirtelen halál szakasszal folytatódik, amelyet a Felzárkóztató szabály értelmében  $A$  kezd.

Mind a Kiegyenlítő, mind a Felzárkóztató szabály módosítható azzal, hogy a hirtelen halál szakaszt minden esetben az első büntetőt másodikként rúgó, tehát a  $B$  csapat kezdi (feltéve, hogy a büntetőpárbaj eljut idáig). A kezdő csapat előnyének ezen kompenzálása célszerű lépésnek bizonyulhat az igazságosság felé vezető úton: az így kapott *Változó Kiegyenlítő (Adjusted Catch-Up)* szabály a Kiegyenlítőnél igazságosabb mechanizmus (Csató, 2019b). Az analóg módon definiált *Változó Felzárkóztató (Adjusted Behind First, Alternating Order)* szabály vizsgálatára elsőként jelen tanulmányban kerül sor.

A példa büntetőpárbaj lefutását a különböző szabályok szerint az 1. táblázatban foglaljuk össze, ahol ✓ a sikeres, míg ✗ a sikertelen tizenegyeseket jelöli. Látható, hogy az első, rendes szakaszban történetektől függetlenül, a Változó Kiegyenlítő és a Változó Felzárkóztató szabály alapján is a  $B$  csapat kezdi a hirtelen halál szakaszt.

### 3. A szabályok összehasonlítása

A következőkben a különböző módszerek igazságosságát fogjuk értékelni. Az empirikus kutatások alapján elfogadható feltételezés, hogy azonos képességű játékosok esetén egy tizenegyes sikeressége csupán attól függ, egy adott körben elsőként vagy másodikként rúgják (Apestegua és Palacios-Huerta, 2010). Ekkor az igazságosság biztosításához a két csapatnak azonos valószínűséggel kell(ene) nyernie a büntetőpárbajt. Az első rúgó ezért a magasabb  $p$ , míg a második az alacsonyabb  $q$  valószínűséggel talál be. Ugyanezt a modellt használja Brams és Ismail (2018).

1. táblázat. Példa a különböző büntetőpárbaokra

Szabály	$ABAB$	$ABBA$	$AB^2 BA^2$	Kiegyenlítő	Vált. Kiegy.	Felzárk.	Vált. Felz.
Csapat	A B	A B	A B	A B	A B	A B	A B
1. rúgás	X	X	X	X	X	X	X
2. rúgás	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3. rúgás	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4. rúgás	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5. rúgás	X	X	X	X	X	X	X
6. rúgás	X	X	X	X	X	X	X
7. rúgás	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓
8. rúgás	X	✓	X	X	X	X	X
9. rúgás	X	X	X	X	X	X	X
10. rúgás	X	X	X	X	X	X	X
11. rúgás	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
12. rúgás	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
13. rúgás	✓	✓	X	X	X	X	✓
14. rúgás	X	X	✓	✓	X	✓	X

$AB^2|BA^2 = ABB|BAAB$ ; Vált. Kiegy. = Változó Kiegyenlítő; Felzárk. = Felzárkóztató; Vált. Felz. = Változó Felzárkóztató

### 3.1. Nyeresi valószínűségek a hirtelen halál szakaszban

Ha a büntetőpárbaj első szakasza döntetlennel zárul, a tizenegyesek a hirtelen halállal folytatódnak. Ebben a részben addig játszanak, amíg egyik csapat értékesíti, a másik kihagyja a büntetőjét. Tegyük fel, hogy az  $A$  csapat kezdi a hirtelen halál szakaszt.  $W(A)$  legyen annak valószínűsége, hogy az  $A$  csapat megnyeri ezt, amennyiben a mérkőzés eljut eddig. A (Változó) Kiegyenlítő, a (Változó) Felzárkóztató és az  $ABBA$  szabályok megegyeznek ebben a szakaszban, az első körben  $AB$  a sorrend, a következőben (ha van ilyen)  $BA$ , majd visszatér az  $AB$ . [Brams és Ismail \(2018\)](#) levezetése alapján

$$W(A) = \frac{1 - q + pq}{2 - p - q + 2pq}.$$

Az empirikus eredményekhez közel álló  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$  valószínűségek mellett  $W(A) = 10/19 \approx 0,526$ .

Az  $ABBA|BAAB$  szabály esetén négy esetet lehet megkülönböztetni, attól függően, hány előre meghatározott körből áll a büntetőpárbaj.

- Rendes szakasz  $4k$  körig tart: a hirtelen halált  $A$  kezdi, majd kétszer  $B$ , kétszer  $A$ ...

Jelölje  $S(A)$  annak valószínűségét, hogy az  $A$  csapat megnyeri a hirtelen halál szakaszt, ami nyilván  $p$  és  $q$  függvénye.

Annak valószínűsége, hogy  $A$  az első körben nyer:  $p(1 - q)$ . Ha mindkét csapat berúgja vagy kihagyja az első körben, a hirtelen halál szakasz a második körrel folytatódik, ennek valószínűsége  $pq + (1 - p)(1 - q)$ . A második körben  $B$  kezd, tehát annak valószínűsége, hogy  $A$  a második körben nyer:  $[pq + (1 - p)(1 - q)](1 - p)q$ . A következő körben  $BA$  a sorrend, majd a negyedik körben  $AB$ , azaz éppen fordítottja az első két körnek. Az ötödik körtől pedig ismétlődik az eredeti sorrend. Így annak valószínűsége, hogy a büntetőpárbaj eljut a harmadik körig, majd  $A$  csapat megnyeri a mérkőzést:  $[pq + (1 - p)(1 - q)]^2(1 - S(A))$ .

Az  $S(A)$  valószínűséget ezek után egyszerűen megkaphatjuk a következő rekurzióból:

$$S(A) = p(1 - q) + [pq + (1 - p)(1 - q)](1 - p)q + [pq + (1 - p)(1 - q)]^2(1 - S(A)).$$

Ebből:

$$S(A) = \frac{p(1 - q) + (1 - p - q + 2pq)q(1 - p) + (1 - p - q + 2pq)^2}{1 + (1 - p - q + 2pq)^2}.$$

$p = 3/4$  és  $q = 2/3$  mellett  $S(A) = 99/193 \approx 0,513$ .

- Rendes szakasz  $4k + 3$  körig tart: a hirtelen halált  $A$  kezdi kétszer, majd kétszer  $B$ , kétszer  $A$ ...  
Jelölje  $T(A)$  annak valószínűségét, hogy az  $A$  csapat megnyeri a hirtelen halál szakaszt:

$$T(A) = \frac{p(1-q) + (1-p-q+2pq)p(1-q) + (1-p-q+2pq)^2}{1 + (1-p-q+2pq)^2}.$$

$p = 3/4$  és  $q = 2/3$  mellett  $T(A) = 106/193 \approx 0,549$ .

- Rendes szakasz  $4k + 2$  körig tart: a hirtelen halált  $B$  kezdi, majd kétszer  $A$ , kétszer  $B$ ...  
Mivel ez az első eset fordítottja, ezért annak valószínűsége, hogy  $A$  győz:  $1 - S(A)$ .
- Rendes szakasz  $4k + 1$  körig tart: a hirtelen halált  $B$  kezdi kétszer, majd kétszer  $A$ , kétszer  $B$ ...  
Ez pedig a második eset, csak  $A$  és  $B$  sorrendje felcserélve, így annak valószínűsége, hogy az  $A$  csapat nyeri meg a hirtelen halált:  $1 - T(A)$ .

### 3.2. Illusztráció: kétkörös büntetőpárbajok

Apesteugia és Palacios-Huerta (2010) empirikus eredményei alapján Brams és Ismail (2018) a  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$  értékeket használta számításaihoz, ezért jelen tanulmányban is ennél a választásnál maradunk.

Illusztrációként tekintsük azt a példát, amikor a büntetőpárbaj csupán két körből áll, ezt a hirtelen halál szakasz követi. Két kör esetén a Kiegyenlítő és a Felzárkóztató szabály megegyezik, hiszen a második körben az előző kör eredménye, és az előző körök alapján kialakult állás ugyanaz.

Brams és Ismail (2018) alapján a Kiegyenlítő (Felzárkóztató) szabályt használva,  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$  mellett annak a valószínűsége, hogy két kör után:

- az  $A$  csapat nyer:  $P^2(A) = 41/144 \approx 0,285$ ;<sup>1</sup>
- a  $B$  csapat győz:  $P^2(B) = 39/144 \approx 0,270$ ;
- az eredmény döntetlen:  $P^2(T) = 64/144 \approx 0,444$ .

A Kiegyenlítő (és a két körös eset miatt a Felzárkóztató) szabály alapján a hirtelen halál szakasz első körében  $A$  csapat kezd  $58/144 \approx 0,403$  valószínűséggel.

<sup>1</sup> Brams és Ismail (2018, 188. o.) kerekítési hibát tartalmaz. A 2-es felső index azt jelzi, hogy a valószínűség a kétkörös büntetőpárbajra vonatkozik.



Annak valószínűsége pedig, hogy a harmadik kört a  $B$  csapat kezdi,  $6/144 \approx 0,042$ .  
Következésképp annak valószínűsége, hogy az  $A$  csapat győz:

$$Q^2(A) = P^2(A) + \frac{58}{144} \times \frac{10}{19} + \frac{6}{144} \times \frac{9}{19} = \frac{1413}{2736} \approx 0,516.$$

Másrésről, a Változó Kiegyenlítő (Felzárkóztató) szabály értelmében a hirtelen halál szakaszt garantáltan a  $B$  csapat kezdi, tehát annak valószínűsége, hogy az  $A$  lesz a győztes:

$$Q^2(A) = P^2(A) + \frac{64}{144} \times \frac{9}{19} = \frac{1355}{2736} \approx 0,495.$$

Mivel az  $ABBA$  szabályt [Brams és Ismail \(2018\)](#) nem vizsgálta, ezért a nyerési valószínűségek számítását a továbbiakban részletesen bemutatjuk.

Két kör alatt háromféleképpen győzhet az  $A$  csapat:

I)  $2 - 0$ : Az  $A$  csapat mindkét büntetőjét értékesíti, míg a  $B$  mindkettőt elhibázza.

Az első körben  $A$  berúgja,  $B$  kihagyja  $p(1 - q)$  valószínűséggel. A második kört  $B$  csapat kezdi, de nem sikerül értékesíteni a büntetőt, míg a másodiknak rúgó  $A$  csapat sikeres, ennek valószínűsége  $(1 - p)q$ . A két esemény együttes valószínűsége:  $p(1 - q)(1 - p)q$ .

II)  $2 - 1$ :  $A$  mindkettőt berúgja, míg  $B$  csak az egyiket.

Ez az állás két különböző módon jöhet létre:

- $B$  az első körben rúgja be

Az első körben mindkét csapat értékesíti a büntetőjét, ennek valószínűsége:  $pq$ . A második kört  $B$  kezdi, de kihagyja, majd  $A$  berúgja  $(1 - p)q$  valószínűséggel. A két kör együttes valószínűsége:  $pq(1 - p)q$ .

- $B$  a második körben rúgja be

Az első körben  $A$  berúgja,  $B$  kihagyja  $p(1 - q)$  valószínűséggel. A második körben  $B$  kezd és mindkét csapat értékesíti a büntetőt  $pq$  valószínűséggel. A két kör együttes valószínűsége:  $p(1 - q)pq$ .

Annak valószínűsége, hogy a végeredmény  $2 - 1$ :  $pq(1 - p)q + p(1 - q)pq$ .

III)  $1 - 0$ :  $A$  egyet berúg, míg  $B$  mindkettőt kihagyja.

Ebben az esetben is két különböző forgatókönyv képzelhető el:

- $A$  az első büntetőjét értékesíti

Az első körben  $A$  berúgja,  $B$  kihagyja  $p(1 - q)$  valószínűséggel. A második körben mindkét csapat kihagyja  $(1 - p)(1 - q)$  valószínűséggel. Az együttes valószínűség:  $p(1 - q)(1 - p)(1 - q)$ .

- *A a második körben rúgja be*  
Az első körben mindkét csapat kihagyja  $(1-p)(1-q)$  valószínűséggel. A második körben elsőnek rúgó  $B$  kihagyja,  $A$  berúgja,  $(1-p)q$  valószínűséggel. Vagyis a két kör együttes valószínűsége:  $(1-p)(1-q)(1-p)q$ .

Tehát az  $1-0$  végeredmény  $p(1-q)(1-p)(1-q) + (1-p)(1-q)(1-p)q$  valószínűséggel következik be.

A  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$  feltevést használva:

- az  $A$  csapat győzelmének valószínűsége  $P^2(A) = 41/144 \approx 0,285$ ;
- a  $B$  csapat nyer  $P^2(B) = 41/144 \approx 0,285$  valószínűséggel;
- a döntetlen valószínűsége  $P^2(T) = 62/144 \approx 0,431$ .

Nem meglepő, hogy az  $ABBA$  szabály két (sőt, tetszőleges páros számú) kör alatt egyenlő esélyeket biztosít mindkét csapatnak.

Az  $ABBA$  mechanizmus alkalmazásakor a hirtelen halál szakaszt (a harmadik kört) az  $A$  csapat kezdi, tehát annak valószínűsége, hogy  $A$  megnyeri a mérkőzést:

$$Q^2(A) = P^2(A) + \frac{62}{144} \times \frac{10}{19} = \frac{1399}{2736} \approx 0,511.$$

Az  $ABBA|BAAB$  szabály az első két kör során megegyezik az  $ABBA$ -val, tehát az egyes csapatok nyeresi valószínűsége is ugyanakkora. A hirtelen halál szakaszt azonban a  $B$  csapat kezdi, és a 3.1. fejezetben kiszámoltak alapján annak valószínűsége, hogy az  $A$  nyeri meg:  $1 - S(A)$ . Tehát annak valószínűsége, hogy a mérkőzés  $A$  győzelmével zárul:

$$Q^2(A) = P^2(A) + \frac{62}{144} \times \frac{94}{193} = \frac{13741}{27792} \approx 0,494.$$

Összefoglalva, bár az eredeti  $ABAB$  szabályhoz képest mindegyik módszer igazságosabb eredményre vezet, a két körös példa alapján a Változó Kiegyenlítő (Felzárkóztató) módszer egyenlíti ki leginkább az esélyeket. Míg a Kiegyenlítő (Felzárkóztató)  $100 \times (0,516/0,484 - 1) = 6,8\%$ -os, az  $ABBA$   $4,64\%$ -os előnyt, az  $ABBA|BAAB$  mechanizmus pedig  $2,3\%$ -os hátrányt ad a büntetőpárbajt kezdő csapatnak, addig a Változó Kiegyenlítő (Felzárkóztató) szabály alapján a kezdő csapat csupán  $1,92\%$ -os hátrányban van.

2. táblázat. Az  $A$  csapat győzelmi valószínűsége ( $p = 3/4$  és  $q = 2/3$ )

	$ABBA$	$AB^2 BA^2$	Kiegyenlítő	Vált. Kiegy.	Felzárk.	Vált. Felz.
1 kör	0,526	0,513	0,526	0,526	0,526	0,526
2 kör	0,511	0,494	0,516	0,495	0,516	0,495
3 kör	0,519	0,489	0,518	0,515	0,516	0,512
4 kör	0,508	0,504	0,513	0,501	0,512	0,500
<b>5 kör</b>	<b>0,515</b>	<b>0,509</b>	<b>0,514</b>	<b>0,509</b>	<b>0,512</b>	<b>0,506</b>
6 kör	0,507	0,497	0,512	0,504	0,510	0,501
7 kör	0,513	0,492	0,512	0,507	0,510	0,503
8 kör	0,506	0,503	0,511	0,504	0,508	0,501

$AB^2|BA^2 = ABBA|BAAB$ ; Vált. Kiegy. = Változó Kiegyenlítő; Felzárk. = Felzárkóztató;  
Vált. Felz. = Változó Felzárkóztató

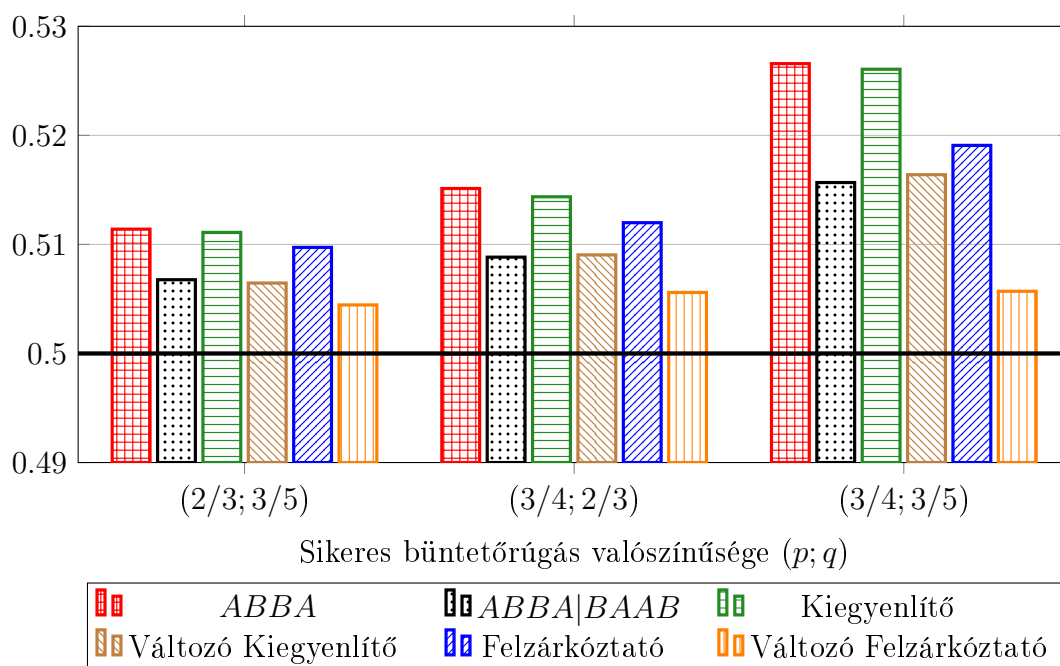
### 3.3. Melyik a leginkább igazságos mechanizmus?

A továbbiakban több körre is megnézzük a különböző módszer teljesítményét. A számítás az előző fejezethez hasonlóan végezhető, azonban a képletek egyre bonyolultabbá válnak, ezért csak numerikus eredményeket közlünk. A 2. táblázatban láthatók az első tizenegyest rúgó  $A$  csapat nyerési valószínűségei a különböző szabályokkal, legfeljebb nyolc körös, hirtelen halál szakasszal záruló büntetőpárbaj esetén, ha  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$ . Ezeket a valószínűségeket használva a jelenleg használatos  $ABAB$  szabály esetén nagyjából visszakapnánk a kezdő csapatnak azt az előnyét, amelyet az empirikus kutatások is találtak (Brams és Ismail, 2018).

A 2. táblázatban látható értékek alapján megfigyelhető egy páros-páratlan hatás. Ha a büntetőpárbaj páros számú előre meghatározott körből áll, akkor a két csapat esélyei mindegyik módszer esetén kiegyenlítettebbek. Érdekes eredmény, hogy a viszonylag egyszerű  $ABBA$  szabály páros számú kör mellett jobbnak bizonyul a Kiegyenlítő és a Felzárkóztató szabálynál. Amennyiben csak egyetlen körös a büntetőpárbaj, akkor az  $ABBA|BAAB$  módszer bizonyult a legigazságosabbnak, azonban ez a kiegyenlített hirtelen halál szakasznak köszönhető. Ha több előre meghatározott kör van, akkor a legjobb módszernek a Változó Felzárkóztató szabály bizonyul. A jelenleg használt öt körös rendszerben a Változó Felzárkóztató szabály mindössze 2,43%-os előnyt ad a kezdő csapatnak.

Az eddigiekben feltettük, hogy  $p = 3/4$  és  $q = 2/3$ . Az 1. ábrán összehasonlítjuk az  $A$  csapat nyerési valószínűségeit azokban az ötkörös esetekben, amikor ezek rendre  $(2/3; 3/5)$ ,  $(3/4; 2/3)$ , és  $(3/4; 3/5)$ . Látható, hogy a szabályok igazságossági sorrendjét  $p$  és  $q$  értéke alig befolyásolja. Az  $ABBA$  és a Kiegyenlítő, illetve az  $ABBA|BAAB$  és a Változó Kiegyenlítő szabályok ismét hasonlóan szerepelnek. A Változó Felzárkóztató mechanizmus juttatja a legkisebb előnyt a kezdő csapatnak.

1. ábra. Az A csapat győzelmi valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén



### 3.4. A szabályok empirikus összehasonlítása

3. táblázat. A sikeres büntetőrúgás empirikus valószínűsége az egyes körökben

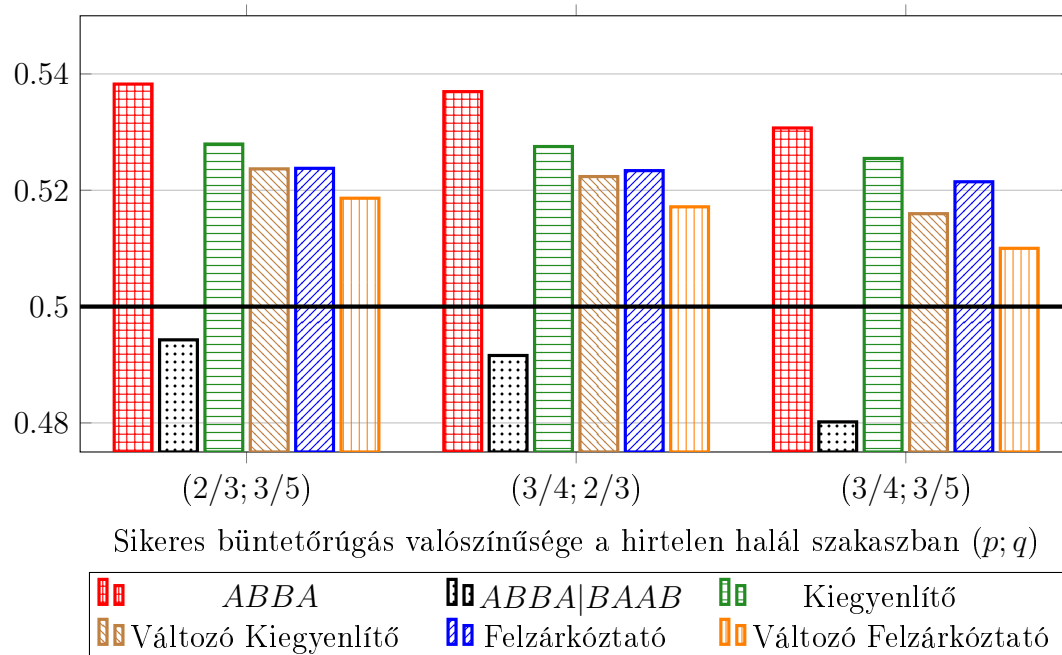
	Első rúgó	Második rúgó
1. kör	0,79	0,72
2. kör	0,82	0,77
3. kör	0,77	0,64
4. kör	0,74	0,68
5. kör	0,74	0,67

Forrás: [Apestequia és Palacios-Huerta \(2010, 2558. o.\)](#)

Az előzőekben egy olyan matematikai modellt vizsgáltunk, ahol a sikeres büntetőrúgás valószínűsége kizárólag attól függött, az adott csapat játékosa első vagy második rúgó-e. [Apestequia és Palacios-Huerta \(2010\)](#) ökonometriai vizsgálatokkal igazolja, hogy egyetlen másik változó sem tekinthető szignifikánsnak. Ugyanakkor a tizenegyesek értékesítésének esélye különbözik az egyes körökben, ahogy azt a 3. táblázat mutatja.

A hirtelen halál szakaszban érvényes valószínűségekről – a kis mintaelemszám

2. ábra. Az  $A$  csapat empirikus győzelmi valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén, hirtelen halál szakasszal



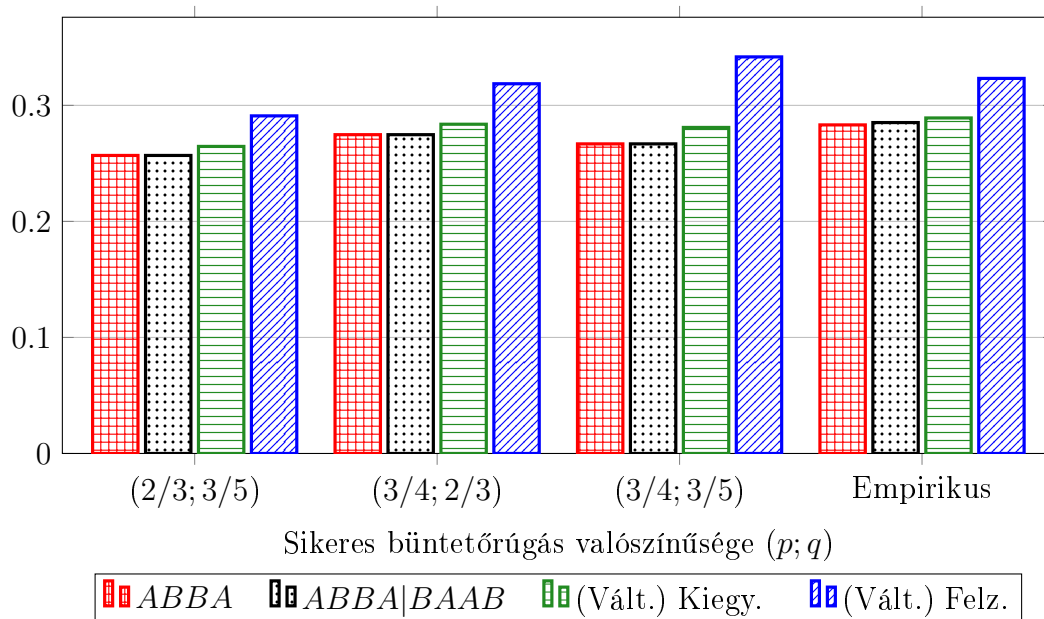
miatt – véleményünk szerint nem áll rendelkezésre megbízható adat, ezért ott a korábban alkalmazott feltevésünkkel élünk, azaz az első rúgó  $p$ , míg a második  $q$  valószínűséggel értékesíti tizenegyesét. Az így számolt „empirikus” nyerési valószínűségekről a 2. ábra tájékoztat. Ismét az  $ABBA$  szabály teljesít leggyengébben az igazságosság szempontjából. A Felzárkóztató mechanizmus jobb a Kiegyenlítőnél, és mindkét rendszer teljesítményén javít, ha a hirtelen halál szakaszt biztosan az első büntetőt másodikként rúgó  $B$  csapat kezdi. Közeli  $p$  és  $q$  értékek esetén az  $ABBA|BAAB$  determinisztikus szabály áll legközelebb az igazságossághoz, a különbség növekedésével azonban ez a mechanizmus egyre inkább hátrányos a büntetőpárbajt kezdő  $A$  csapat számára.

### 3.5. További megfontolások

A büntetőpárbajok hirtelen halál szakasza a labdarúgó mérkőzések egyik legizgalmasabb, leginkább kiélezett része. Ennek várható hossza a tizenegyesek rögzített  $p$  és  $q$  értékesítési valószínűsége mellett független a rúgási sorrendtől, azaz [Brams és Ismail \(2018\)](#) alapján:

$$EL = \frac{1}{p + q - 2pq}.$$

3. ábra. A hirtelen halál elérésének valószínűsége ötkörös büntetőpárbaj esetén



A hirtelen halál elérésének valószínűsége a 3. ábrán látható. Ez az  $ABBA$  és  $ABBA|BAAB$  szabályoknál azonos, amennyiben a  $p$  és  $q$  valószínűségek nem változnak az egyes körökben. Mivel a Változó Kiegyenlítő és Felzárkóztató mechanizmusok azonosak a Kiegyenlítővel és a Felzárkóztatóval a rendes szakaszban, a hirtelen halál elérésének valószínűségét nem befolyásolja az általunk javasolt módosítás. Ezek alapján a Kiegyenlítő rendszer alkalmazása némileg, a Felzárkóztató pedig jelentősebb mértékben izgalmasabbá tehetné a büntetőpárbajokat.

A tárgyalt szabályokkal kapcsolatban felmerülő újabb kérdés lehet azok csalásbiztossága: előfordulhat-e, hogy egy tizenegyes szándékos kihagyásával valamelyik csapat összességében jobban jár? A determinisztikus mechanizmusokat biztosan nem lehet ilyen módon manipulálni, hiszen a büntetőrúgások sorrendje nem befolyásolható. A Felzárkóztató szabály esetén egy csapatnak hátrányba kell kerülnie a következő kör(ök)ben első rúgó pozíciójának megszerzéséhez, ami nem lehet optimális stratégia. Végül a Kiegyenlítő módszer akkor teljesíti a csalásbiztosság feltételét, ha  $(p - q) \leq 1/2$  teljesül (Brams és Ismail, 2018), ami a gyakorlatban szinte biztosan fennáll. A Változó Kiegyenlítő és Felzárkóztató szabályok nem manipulálhatók, amennyiben eredeti változatuk sem az.

## 4. Összefoglalás

Az igazságosság és a méltányosság fogalma, a közgazdaságtan számos területéhez hasonlóan, a sportban is felmerülhet a szabályokkal szemben megfogalmazott követelményként. Például jogos elvárás lehet, hogy egy jobb teljesítmény nyújtó játékos vagy csapat biztosan ne kerülhessen hátrányba. Ez a feltétel több friss kutatás szerint nem mindig teljesül a gyakorlatban (Kendall és Lenten, 2017; Dagaev és Sonin, 2018; Csató, 2018; Csató és Petróczy, 2018; Csató, 2019a).

Jelen munkában az igazságosság egy másik lehetséges értelmezéséből indulunk ki, miszerint azonos képességű csapatoknak ugyanolyan valószínűséggel kell megnyerniük a mérkőzést. A labdarúgásban a hosszabbítást követő esetleges büntetőpárbaj rúgási sorrendjét meghatározó szabály a döntéshozók által elfogadottan megsérti ezt a követelményt (IFAB, 2018). Ezért hat alternatív mechanizmust hasonlítottunk össze egy matematikai modell segítségével, illetve empirikus alapokon.

Számításaink szerint a Változó Felzárkóztató szabály tűnik az igazságosság ezen fogalmához legközelebb állónak. Ezzel szemben például a Brams és Ismail (2018) által javasolt Kiegyenlítő módszert aligha célszerű alkalmazni, hiszen egyrészt nem sokkal jobb az egyszerűbb, a teniszjátszmák rövidítésében (tie-break) is használt *ABBA* mechanizmusnál, másrészt egy egyszerű módosítással javítható a teljesítménye (Változó Kiegyenlítő).

Eredményeink fontos üzenettel bírnak a Nemzetközi Labdarúgó-szövetség (FIFA) Szabályalkotó Testülete (IFAB) számára. A labdarúgás aktuális, 2018. június 1-jétől hatályos szabálykönyve továbbra is megfogalmazza a tervek között a büntetőpárbajok igazságosabbá tételét (IFAB, 2018, Bevezetés – A jövő), bár az *ABBA* szabállyal folytatott kísérleteket 2018 második felében leállították (FIFA, 2018). E tekintetben bizakodásra adhat okot, hogy a labdarúgó-világbajnokság dél-amerikai selejtezőjének igazságosabb lebonyolítására tett tudományos javaslatot a CONMEBOL (Dél-amerikai Labdarúgó-szövetség) tagállamai egyhangúan elfogadták, így a 2018-as világbajnokság selejtezőjét már ebben a rendszerben szervezték (Durán és szerzőtársai, 2017).

## Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozunk *Steven J. Brams*nak és *Mehmet S. Ismail*nak a cikkük (Brams és Ismail, 2018) nyújtotta inspirációért. Hálásak vagyunk *Csató László* (az egyik szerző édesapja) programozás során nyújtott segítségéért és *Halm Tamás* tanácsaiért.

A kutatást az NKFIH K 111797 és K 128573 pályázatok, az MTA Prémium Poszt-doktori Kutatói Program, valamint az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-18-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválósági Programja támogatta.

## Hivatkozások

- Anbarcı, N., Sun, C.-J., és Ünver, M. U. (2015). Designing fair tiebreak mechanisms: The case of FIFA penalty shootouts. Műhelytanulmány. DOI: [10.2139/ssrn.2558979](https://doi.org/10.2139/ssrn.2558979).
- Anbarcı, N., Sun, C.-J., és Ünver, M. U. (2018). Designing fair tiebreak mechanisms for sequential team contests. Műhelytanulmány. <https://www.bc.edu/content/dam/bc1/schools/mcas/economics/pdf/working-papers/wp871.pdf>.
- Apestequia, J. és Palacios-Huerta, I. (2010). Psychological pressure in competitive environments: Evidence from a randomized natural experiment. *American Economic Review*, 100(5):2548–2564.
- Brams, S. J. és Ismail, M. S. (2018). Making the rules of sports fairer. *SIAM Review*, 60(1):181–202.
- Cohen-Zada, D., Krumer, A., és Shapir, O. M. (2017). Take a chance on ABBA. IZA Discussion Papers, No. 10878, Institute for the Study of Labor (IZA), Bonn. <http://hdl.handle.net/10419/170862>.
- Cohen-Zada, D., Krumer, A., és Shapir, O. M. (2018). Testing the effect of serve order in tennis tiebreak. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 146:106–115.
- Csató, L. (2013). Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments. *Central European Journal of Operations Research*, 21(4):783–803.
- Csató, L. (2017). On the ranking of a Swiss system chess team tournament. *Annals of Operations Research*, 254(1-2):17–36.
- Csató, L. (2018). Was Zidane honest or well-informed? How UEFA barely avoided a serious scandal. *Economics Bulletin*, 38(1):152–158.
- Csató, L. (2019a). Csalásbiztosságot sértő sportszabályok. *Sigma*, XLX(1-2):17–33.
- Csató, L. (2019b). A fairer penalty shootout design in soccer. Műhelytanulmány. [arXiv: 1806.01114](https://arxiv.org/abs/1806.01114).
- Csató, L. és Petróczy, D. G. (2018). Néhány gondolat a labdarúgás rangsorolási szabályairól a 2018. évi labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője kapcsán. *Közgazdasági Szemle*, LXV(6):632–649.



- Da Silva, S., Mioranza, D., és Matsushita, R. (2018). FIFA is right: The penalty shootout should adopt the tennis tiebreak format. *Open Access Library Journal*, 5(3):1–23.
- Dagaev, D. és Sonin, K. (2018). Winning by losing: Incentive incompatibility in multiple qualifiers. *Journal of Sports Economics*, 19(8):1122–1146.
- Durán, G., Guajardo, M., és Sauré, D. (2017). Scheduling the South American Qualifiers to the 2018 FIFA World Cup by integer programming. *European Journal of Operational Research*, 262(3):1109–1115.
- Echenique, F. (2017). ABAB or ABBA? The arithmetics of penalty shootouts in soccer. Műhelytanulmány. <https://pdfs.semanticscholar.org/85d0/3edc04470d5670266c075f7860c441a17bce.pdf>.
- Euronews (2018). Penalty shootouts are unfair. Here’s how they could be fairer. 2018. július 2. <http://www.euronews.com/2018/07/02/penalty-shootouts-are-unfair-here-s-how-they-could-be-fairer-view>.
- FIFA (2018). IFAB’s 133rd Annual Business Meeting recommends fine-tuning Laws for the benefit of the game. 2018. november 22. <https://www.fifa.com/about-fifa/news/y=2018/m=11/news=ifab-s-133rd-annual-business-meeting-recommends-fine-tuning-laws-for-the-benefit.html>.
- González-Díaz, J. és Palacios-Huerta, I. (2016). Cognitive performance in competitive environments: Evidence from a natural experiment. *Journal of Public Economics*, 139:40–52.
- IFAB (2018). *Laws of the Game 2018/19*. The International Football Association Board. Effective from 1st June 2018. [http://static-3eb8.kxcdn.com/documents/662/133314\\_290518\\_LotG\\_18\\_19\\_EN\\_SinglePage\\_150dpi.pdf](http://static-3eb8.kxcdn.com/documents/662/133314_290518_LotG_18_19_EN_SinglePage_150dpi.pdf).
- Kendall, G. és Lenten, L. J. A. (2017). When sports rules go awry. *European Journal of Operational Research*, 257(2):377–394.
- Krumer, A. és Lechner, M. (2017). First in first win: Evidence on schedule effects in round-robin tournaments in mega-events. *European Economic Review*, 100:412–427.
- Krumer, A., Megidish, R., és Sela, A. (2017). First-mover advantage in round-robin tournaments. *Social Choice and Welfare*, 48(3):633–658.

- Mirror (2018). Luka Modric chose second penalty despite winning coin toss against Russia – but there’s a theory on why he did. 2018. július 9. <https://www.mirror.co.uk/sport/football/news/luka-modric-chose-second-penalty-12883102>.
- MTA SZTAKI (2018). Hogyan tehető igazságosabbá a labdarúgó mérkőzéseket követő büntetőpárbaj? 2018. június 18. <https://www.sztaki.hu/tarsadalom/hirek/hogyan-teheto-igazsagosabba-labdarugo-merkozeseket-koveto-buntetoparbaj>.
- Palacios-Huerta, I. (2012). Tournaments, fairness and the Prouhet-Thue-Morse sequence. *Economic Inquiry*, 50(3):848–849.
- Palacios-Huerta, I. (2014). *Beautiful game theory: How soccer can help economics*. Princeton University Press, Princeton, New York.
- Thomson Reuters (2017). New penalty system gets usual result as Germany win. 2017. május 12. <https://uk.reuters.com/article/uk-soccer-uefa-penalties-idUKKBN18730W>.
- UEFA (2017a). Comprehensive bidding regulations approved for all finals and final tournaments. 2017. június 1. [www.uefa.com/insideuefa/mediaservices/newsid=2474545.html](http://www.uefa.com/insideuefa/mediaservices/newsid=2474545.html).
- UEFA (2017b). Penalty shoot-out trial at UEFA final tournaments. 2017. május 1. <http://www.uefa.com/insideuefa/protecting-the-game/refereeing/news/newsid=2463576.html>.
- UEFA (2018). *Regulations of the UEFA European Football Championship 2018-20*. [https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/54/36/05/2543605\\_DOWNLOAD.pdf](https://www.uefa.com/MultimediaFiles/Download/Regulations/uefaorg/Regulations/02/54/36/05/2543605_DOWNLOAD.pdf).