KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXVI. ÉVF., 2019. JÚLIUS–AUGUSZTUS (771–787. o.)

CSÓKA PÉTER–KONDOR GÁBOR

Delegációk igazságos kiválasztása társadalmi választások elméletével

Gyakran felmerül az a kérdés, hogy hogyan válasszunk igazságos delegációt, olyan bizottságot, amely például békekonferencián, társadalmi, vállalati vagy akár egyetemi döntés-előkészítésben reprezentálja az érintettek véleményét. *Can és szerzőtársai* [2017] olyan delegációkiválasztási szabályokat vizsgál, amelyek eleget tesznek a Pareto-hatékonyság, a konzisztencia, a szavazatprofil-semlegesség és a csalásbiztosság axiómájának. A tanulmány szerzői belátják, hogy ezek az axiómák egy küszöbön alapuló szabálycsaládot karakterizálnak, amelyben a legtöbb szavazatot kapó vélemény mindig bejut a bizottságba, utána viszont a konkrét szabálytól és a szavazatoktól függően két extrém helyzet alakulhat ki. Vagy minden véleményt reprezentálnak, vagy *t* delegált esetén azoknak az egyéneknek az aránya, akiknek a véleménye nem reprezentált, mindig 0,5^{t} alatt van. Tanulmányunkban a társadalmi választások elméleti keretét használva illusztráljuk az axiómákat és az eredményeket.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C70, D71.

Bevezetés

Egy társadalom vagy közösség egyénenkénti véleményeinek megfelelő aggregálása a társadalmi választások elméletének egyik fő kérdése. A közismert lehetetlenségi tételek (*Arrow* [1951], valamint *Gibbard* [1973] és *Satterthwaite* [1975]) következtében tudjuk, hogy lehetetlen „jól viselkedő" eljárást megadni, amely alkalmazható lenne a vélemények összegzésére és a közös döntés meghozatalára.[1] Azonban ahogyan

* Köszönjük a Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület 2018. évi konferenciáján kapott hozzászólásokat, különösen *Sziklai Balázs* észrevételeit.

[1] Arrow munkásságának összefoglalójaként lásd *Csekő* [2017] vagy *Medvegyev* [2017]. A lehetetlenségi tételek részletes leírásaként lásd *Csekő* [2016] vagy *Tasnádi* [2014].

Csóka Péter, Budapesti Corvinus Egyetem Gazdálkodástudományi Kar, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék (e-mail: peter.csoka@uni-corvinus.hu).
Kondor Gábor, Budapesti Corvinus Egyetem Gazdálkodástudományi Kar, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék, a Pallas Athéné Domus Educationis Alapítvány ösztöndíjasa (e-mail: gabor.kondor@uni-corvinus.hu).
A kézirat első változata 2019. február 22-én érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2019.7-8.771

Csekő Imre is fogalmaz: „[N]em arról van szó ugyanakkor, hogy az érdekegyeztetés soha nem lehetséges, hanem arról, hogy nincs olyan mechanizmus, amely automatikusan mindig alkalmazható lenne.” (*Csekő* [2017] 344. o.)

Can és szerzőtársai [2017] úgy oldja fel a helyzetet és mutat egy elfogadható eljárást, hogy csak a vélemények összegzését modellezi, delegációkat vizsgálva. A delegáció olyan bizottság, amely például békekonferencián, társadalmi, vállalati vagy akár egyetemi döntés-előkészítésben reprezentálja az érintett ágensek véleményét. A társadalmi választások elméletének terminológiáját használva, a delegáció nem más, mint preferenciák halmaza, ahol egy preferencia az alternatívák szigorú sorba rendezése. Az alternatívák lehetnek emberek, tárgyak, de akár elvont szempontok is. A végső, egyetlen preferencia-sorrend helyett tehát több preferencia is szerepelhet a delegációban, tükrözve az eltérő véleményeket. Ezután a kérdés az, hogy minden véleményt megjelenítsünk-e a delegációban, vagy kihagyhatjuk a kisebb csoportok véleményét és delegáltjait.

Az ágensek tehát megadják preferenciájukat, *Can és szerzőtársai* [2017] pedig négy axiómát, lehetséges elvárást fogalmaz meg a delegáció tagjainak és a képviselendő preferenciáknak a kiválasztására. A *Pareto-optimalitás* azt fejezi ki, hogy ha a társadalom egybehangzóan előrébb sorol egy alternatívát egy másikkal szemben, akkor a delegáció minden tagjának is így kell tennie. A *konzisztencia* értelmében, ha két olyan diszjunkt társadalom egyesül, amelyek delegációi azonos véleményeket képviselnek, akkor az egyesített társadalmat is ennek a delegációnak kell képviselnie, nem változhat a képviselt vélemények halmaza (*Young* [1974], [1975], *Smith* [1973]). A *szavazatprofil-semlegesség (ballot neutrality)* két delegációs helyzetet köt össze úgy, hogy azonos számú ágens és potenciálisan különböző számú alternatíva esetén csak a különböző preferenciákra leadott szavazatok száma határozza meg, hogy milyen preferenciák kerülnek be a delegációba. Végül a *csalásbiztosság (strategy-proofness)* azt írja elő, hogy ne legyen olyan egyén, aki hamis vélemény kinyilvánításával számára kedvezőbb delegációt érhet el.

Can és szerzőtársai [2017] belátja, hogy a megfogalmazott axiómák a delegációs szabályok egy családját karakterizálják, amelyet *küszöbszabályként (treshold rule)* definiálnak. Ezek a társadalom összetételétől függően különböző méretű delegációkat eredményezhetnek. Valamennyi küszöbszabályra egy közös alsó korlát vonatkozik, amelynek megfelelően egy t tagú delegáció esetében azok aránya a társadalomban, akik támogatják a delegáltakat, mindig szigorúan nagyobb, mint $1 - 0{,}5^t$. Ebből következik, hogy azoknak az egyéneknek az aránya, akiknek a véleménye nem szerepel a delegációban, mindig $0{,}5^t$ alatt van. Az pedig, hogy pontosan hol helyezkedik el a küszöbszabály ehhez a korláthoz képest, bizonyos mértékig tükrözi a szabályalkotó szándékait. Tanulmányunkban illusztráljuk az axiómákat, és kritikailag elemezzük az eredményeket.

A kapcsolódó irodalom szerteágazó. A lehetetlenségi tételeket követően különösen nagy figyelmet kapott a témakör, és számos kutató járult hozzá valamilyen területen a fejlődéséhez. Egyes tanulmányok a csalásbiztosság teljesülését vagy másképpen a manipulálhatóság lehetőségét vizsgálták különböző mechanizmusok esetén. Magyar vonatkozásban *Tasnádi* [2008] az 1990 és 2010 közötti választási rendszert tekintette át, *Kóczy–Strobel* [2009] a tudománymetriában használt, úgynevezett invariáns módszerről bizonyította be, hogy manipulálható, továbbá *Csató* [2018*a*], [2018*b*] és *Csató–Petróczy* [2018] a labdarúgó-világbajnokság szabályrendszeréről látta be, hogy nem teljesíti a csalásbiztosság követelményeit.

A negatív eredmények után több olyan tanulmány is született, amely valamilyen korlátozott tartományon keresett „lehetségességi" eredményt. Például *Barbie és szerzőtársai* [2006] karakterizálja azokat a preferenciatartományokat, amelyeken a Borda-számlálás teljesíti Arrow irreleváns alternatíváktól való függetlenségi feltételét, valamint azt vizsgálja, hogy a Borda-számlálás mely tartományokon nem manipulálható. Ezenkívül *Bossert–Sprumont* [2014] részletesebben vizsgálja a csalásbiztos szabályok három osztályát. A korlátozott tartományokon kapott pozitív eredmények áttekintéséért lásd még *Gaertner* [2001].

List–Pettit [2004] azt mutatta meg, hogy ha egy véleményösszegző eljárás logikailag összefüggő kijelentésekre vonatkozik, és a többségi szavazás néhány olyan tulajdonságával rendelkezik, amelyeket egy demokratikus szavazási rendszertől természetesnek látszik megkövetelni, akkor az szükségképpen irracionális, tehát az eredményül kapott döntés sértheti a kijelentések között fennálló logikai kapcsolatokat. *List–Pettit* [2004] cikke alapján *Csáji–Rédei* [2011] bemutatja a racionális, demokratikus véleményösszegzés korlátait, továbbá a List–Pettit-tétel és az Arrow-tétel kapcsolatát tárgyalja.

A megfelelő képviselet szempontjából lényeges a „kellően jó" választási rendszerek kialakítása. Az igazságos választási körzetek meghatározásával foglalkozik *Bíró és szerzőtársai* [2012], amelyben a szerzők megmutatják, hogy az aktuális választási törvényben jelölt szabályok betartása mellett a körzetek kialakítása matematikailag lehetetlen. Ezt a kérdéskört vizsgálja még *Bíró és szerzőtársai* [2015], *Kóczy és szerzőtársai* [2017] és *Kóczy–Sziklai* [2018]. A körzethatárok kialakításával kapcsolatos irodalom részletes áttekintéséért lásd *Tasnádi* [2011].

Sziklai [2018] némileg eltérő megközelítéssel tekinti át a szakértők kiválasztásának problémáját. Ekkor az a speciális szavazati helyzet áll elő, hogy a szavazók halmaza egybeesik az alternatívák halmazával, vagyis a társadalommal. A feladat megoldására egy axiomatikusan megalapozott parametrikus algoritmust javasol.

Végül megemlítjük *Kóczy* [2009] tanulmányát, amelyben a már kiválasztott delegáció tagjainak eltérő szavazati erejéből adódó problémákat vizsgálja. Ugyanis, ha a szavazók (delegáltak) különböző súllyal szerepelnek a döntéshozó testületben, akkor a befolyásuk a döntéshozatalra közel sem nyilvánvaló. A döntéshozatali képesség feltüntetésére különböző erőmértékeket használnak, ezeknél ugyanakkor megjelennek az úgynevezett szavazatierő-paradoxonok *(paradoxes of voting power).* A szerző megmutatja, hogy az új tagok paradoxona *(paradox of new members)* maga után vonja a nulljátékos axiómát *(null player axiom).* A szavazati erő paradoxonainak áttekintéséért lásd *Brams* [2003].

Jelölések és axiómák

Modell

Legyen $\mathcal{A}$ az alternatívák egy megszámlálhatóan végtelen halmaza. Az alternatívák egy adott véges, nem üres $A \subsetneq \mathcal{A}$ halmazán értelmezett *preferenciák* az alternatívák szigorú sorba rendezései, melyek formálisan az A halmaz elemein értelmezett teljes, antiszimmetrikus és tranzitív bináris relációk. Az A halmazon értelmezhető preferenciák halmazát jelölje $\mathcal{L}(A)$. Egy adott $R \in \mathcal{L}(A)$ preferencia, valamint a és b, két A-beli diszjunkt alternatíva esetén $(a, b) \in R$ jelölje azt, hogy a jobban preferált, mint b. Ekkor például, ha $A = \{a, b, c\}$, akkor az $R_1 = abc$ és $R_2 = acb$ preferenciák megadhatók $\{(a, b), (a, c), (b, c)\} = R_1$, illetve $\{(a, b), (a, c), (c, b)\} = R_2$ alakban is. Az egyes preferenciák közötti hasonlóságot (vagy különbözőséget) az úgynevezett Kemény-távolság adja (*Kemeny* [1959]). Az R_1 és R_2 preferenciák Kemény-távolsága $\delta(R_1, R_2) = (|R_2 \setminus R_1| + |R_1 \setminus R_2|)/2$, vagyis az R_1 és R_2 szimmetrikus differenciájaként kapott halmaz elemszámának fele. Az $R_1 = abc$ és az $R_2 = acb$ preferenciák Kemény-távolsága például 1, ami úgy is megkapható, mint a minimálisan szükséges egymás melletti páronkénti cserék száma ahhoz, hogy R_1-ből megkapjuk R_2-t.

Legyen $\mathcal{N}$ az ágensek egy megszámlálhatóan végtelen halmaza, amelyre gondolhatunk úgy, mint a potenciális ágensek halmazára, amelyből a delegáció tagjait szeretnénk kiválasztani. Az ágensek egy n elemszámú $N \subsetneq \mathcal{N}$ részhalmazát nevezzük társadalomnak, amely valamely kérdésben kinyilvánítja a véleményét, vagyis a preferenciáit. Ekkor jelölje $\mathcal{L}(A)^n$ az összes preferenciaprofil halmazát, vagyis az n ágens preferenciáinak együttesét, ahol $P(i)$ jelöli az $i \in N$ ágens preferenciáját, $P(S)$ pedig az ágensek egy $S \subseteq N$ részhalmazának preferenciaprofilját. Egy adott $P \in \mathcal{L}(A)^n$ preferenciaprofil és $R \in \mathcal{L}(A)$ preferencia esetén az R-et bejelentő ágensek számát jelölje $p(R) = |\{i \in N \mid P(i) = R\}|$.

Bármely adott $A \subsetneq \mathcal{A}$ véges halmaz esetén legyen $R_1, R_2, \ldots, R_{|A|!}$ az $\mathcal{L}(A)$-beli preferenciák egy felsorolása, így például az $A = \{a, b, c\}$ halmazon értelmezhető preferenciák lexikografikus felsorolása: „$R_1 = abc$, $R_2 = acb$, $R_3 = bac$, $R_4 = bca$, $R_5 = cab$, $R_6 = cba$". Ekkor bármely ilyen felsorolást tekintve, a $P \in \mathcal{L}(A)^n$ profilt az egyes preferenciákat bejelentő ágensek számaiból képzett $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{|A|!}) \in \mathbb{N}^{|A|!}$ vektorként is értelmezhetjük, ahol legyen $p_t = |\{i \in N \mid P(i) = R_t\}|$ az $R_t \in \mathcal{L}(A)$ preferencia *tartója* (*support*, amely egyben a támogatottságot is jelenti), p pedig a P preferenciaprofil tartója. Például három alternatíva és az előző felsorolás esetén a

$$P \in \mathcal{L}(A)^6 = \{\underbrace{abc,\ abc,\ abc}_{R_1},\ \underbrace{bac,\ bac}_{R_3},\ \underbrace{cab}_{R_5}\}$$

preferenciaprofil tartóját jelölheti $p = (3, 0, 2, 0, 1, 0)$. Az egyszerűség kedvéért ugyanerre a profilra hasonlóan jelöljük a *normalizált tartót* is, vagyis $p = (0{,}5, 0, 0{,}\dot{3}, 0, 0{,}1\dot{6}, 0)$.

Tekintsük az ágensek két véges, diszjunkt N és N' részhalmazát, valamint a hozzájuk tartozó $P \in \mathcal{L}(A)^n$ és $P' \in \mathcal{L}(A)^{n'}$ preferenciaprofilokat. Ekkor jelölje $\overline{P} = (P, P') \in \mathcal{L}(A)^{n+n'}$ a két profil összevonását, vagyis $\overline{P}(i) = P(i)$, ha $i \in N$, és $\overline{P}(i) = P'(i)$, ha $i \in N'$.

Bármely véges $N \subsetneq \mathcal{N}$ és véges $A \subsetneq \mathcal{A}$ esetén a φ delegációs szabály egy társadalmi választási szabály, amely minden $P \in \mathcal{L}(A)^n$ preferenciaprofilhoz a preferenciák egy

$\varphi(P) \subseteq \mathcal{L}(A)$ részhalmazát rendeli, amelyet a delegáltak halmazának vagy delegációnak nevezünk. Vegyük észre, hogy a delegációs szabály értéke többelemű is lehet, továbbá, hogy minden delegációba került véleményt csak egy delegált képvisel, amit úgy értelmezünk, hogy már egy delegált is hangot tud adni ennek a véleménynek a delegációban.

Axiómák

Ebben a fejezetben megadjuk és illusztráljuk azokat az axiómákat, amelyeket *Can és szerzőtársai* [2017] vizsgál. Ezek az axiómák a delegációs szabályokra vonatkozó normatív elvárások, belátható, hogy egymástól függetlenek. Amennyiben nincs külön megemlítve, a definíciók valamennyi $A \subsetneq \mathcal{A}$ alternatívára és $N \subsetneq \mathcal{N}$ ágensre vonatkoznak.

Az *első axióma* azt követeli meg, hogy ha a társadalom minden tagja előrébb sorol egy alternatívát egy másikkal szemben, akkor ezt a véleményt a delegáció minden tagjának képviselnie kell.

1. DEFINÍCIÓ – PARETO-OPTIMALITÁS • A φ szabály *Pareto-optimális*, ha minden $P \in \mathcal{L}(A)^n$ és minden a, $b \in A$ esetén, amennyiben $(a,b) \in P(i)$ minden $i \in N$ ágensre, akkor minden $R \in \varphi(P)$ preferenciára $(a, b) \in R$.

A *második axióma* azt írja elő, hogy ha két olyan társadalmat olvasztunk egybe, amelyek esetén ugyanazok a preferenciák jelennek meg a delegációkban, akkor az egyesített társadalmat képviselő delegációnak ugyanannak kell maradnia.

2. DEFINÍCIÓ – KONZISZTENCIA • Egy φ szabály *konzisztens*, ha az ágensek bármely két véges, diszjunkt N, $N' \subsetneq \mathcal{N}$ halmazára (rendre n és n' számossággal) és a hozzájuk tartozó bármely $P \in \mathcal{L}(A)^n$ és $P' \in \mathcal{L}(A)^{n'}$ profilra, ha $\varphi(P) = \varphi(P')$, akkor $\varphi(P, P') = \varphi(P) = \varphi(P')$.

A *harmadik axióma* két preferenciaprofilt köt össze úgy, hogy azonos számú ágens és potenciálisan különböző számú alternatíva esetén csak a különböző preferenciákra leadott szavazatok száma határozza meg, hogy milyen preferenciák kerülnek be a delegációba.

3. DEFINÍCIÓ – SZAVAZATPROFIL-SEMLEGESSÉG • Legyen adott az ágensek egy $N \subsetneq \mathcal{N}$ halmaza, amelynek számossága $|N| = n$. Tekintsük továbbá az $A \subseteq \bar{A} \subsetneq \mathcal{A}$ halmazokat, és az ezekhez tartozó olyan $P \in \mathcal{L}(A)^n$, illetve $\bar{P} \in \mathcal{L}(\bar{A})^n$ preferenciaprofilokat, amelyekre létezik olyan $\pi: \{1, 2, \ldots, |A|!\} \to \{1, 2, \ldots, |\bar{A}|!\}$ injekció,[2] hogy minden $i \in \{1, 2, \ldots, |A|!\}$-re $p_i = \bar{p}_{\pi(i)}$, és nevezzük a $\bar{P}$ profilt a P *profil* π *általi kiterjesztésének*. Ekkor egy $\varphi(P)$ szabály *szavazatprofil-semleges*, ha $R_i \in \varphi(P)$ akkor és csak akkor, ha $\bar{R}_{\pi(i)} \in \varphi(\bar{P})$ a P profil minden π kiterjesztésére.

[2] $A = \bar{A}$ esetén π permutáció.

Ennek az axiómának a szemléltetésére tekintsük az 1. PÉLDÁT.

1. PÉLDA • Vegyük az $A \subsetneq \overline{A}$, $|A| = 3$ és $|\overline{A}| = 4$ halmazokat, és legyen az ágensek száma 7. A példában a lexikografikus felsorolást alkalmazzuk, vagyis $R_1 = abc$, $R_2 = acb$ és így tovább, valamint $\overline{R}_1 = abcd$, $\overline{R}_2 = abdc$ és így tovább. Tekintsük a következő $P \in \mathcal{L}(A)^7$ profilt:

$$\begin{array}{ccccccc} a & a & a & a & a & b & b \\ b & b & b & c & c & a & c \\ c & c & c & b & b & c & a \end{array} \quad \text{Ekkor} \quad p = (3, 2, 1, 1, 0, 0).$$

Vegyünk valamilyen φ szabályt, amelyre $\varphi(P) = \{abc\} = \{R_1\}$. A $\overline{P} \in \mathcal{L}(\overline{A})^7$ profil pedig legyen az alábbi módon adott:

$$\begin{array}{ccccccc} a & a & a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b & c & c \\ c & c & c & d & d & b & d \\ d & d & d & c & c & d & b \end{array} \quad \text{Így} \quad \overline{p} = (3, 2, 1, 1, \underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{\text{20 darab nulla}}).$$

Ekkor $\pi(t) = t$ olyan A-ból $\overline{A}$-ba képező injekció, amelyre $p_t = \overline{p}_{\pi(t)} = \overline{p}_t$ minden $t \in \{1, 2, \ldots, 6\}$-ra. Tehát ahhoz, hogy a φ szabály szavazatprofil-semleges legyen, a $\varphi(\overline{P}) = \{\overline{R}_{\pi(1)}\} = \{\overline{R}_1\} = \{abcd\}$ delegációt kell kapnunk. Továbbá, mivel a szavazatprofil-semlegesség kétirányú megkötést ír elő, azt is megköveteljük, hogy amennyiben $\varphi(\overline{P}) = \{abcd\} = \{\overline{R}_{\pi(1)}\} = \{\overline{R}_1\}$ teljesül, akkor $\varphi(P) = \{abc\} = \{R_1\}$ legyen.

Vegyük észre, hogy a minden permutációra való megkötésből az következik, hogy ha az egyik 1 szavazatot kapott permutáció delegált lesz, akkor a másik is, vagyis az anonimitás következik a szavazatprofil-semlegességből.

Jelölje $RP(P) = \{R \in \mathcal{L}(A) \mid p(R) > 0\}$ a *kinyilvánított preferenciák* halmazát, vagyis azon preferenciákat, amelyeket a P profilban legalább egy ágens támogat. *Can és szerzőtársai* [2017] belátja, hogy a Pareto-optimalitás és a szavazatprofil-semlegesség esetén a delegációt csakis a kinyilvánított preferenciák közül választhatják.

1. ÁLLÍTÁS • *Ha egy φ szabály teljesíti a Pareto-optimalitási és szavazatprofil-semlegességi axiómákat, akkor minden $P \in \mathcal{L}(A)^n$ profilra $\varphi(P) \subseteq RP(P)$.*

Ez egyrészt nyilvánvalóan azt jelenti, hogy a döntéshozók a társadalom egy-egy „valós" csoportját képviselik, nincs olyan delegált, akinek ne lenne támogatója. Másrészt tetszőleges ágens képviseletét a kinyilvánított preferenciák közül valaki el tudja látni. Ehhez kapcsolódóan megjegyezzük, hogy amennyiben egy szabály esetén a delegációt minden esetben a kinyilvánított preferenciák közül választjuk, a Pareto-optimalitás triviálisan teljesül.

Azt mondjuk, hogy az i ágens jobban preferálja az R_1 preferencia-sorrendet az R_2-nél, hogyha $P(i)$ gyengén közelebb van R_1-hez, mint R_2-höz, vagyis ugyanezt Kemény-távolság szerint kifejezve, $\delta\,[P(i), R_1] \leq \delta\,[P(i), R_2]$. Az ágensek a delegációk között is rangsorolhatnak. Azt mondjuk, hogy az i ágens jobban preferálja a D_1

delegációt a D_2-nél, hogyha $P(i)$ gyengén közelebb van a leginkább preferált D_1-beli delegálthoz, mint a D_2-beli leginkább preferált delegálthoz, vagyis

$$\min\{\delta[P(i), R_1] \mid R_1 \in D_1\} \leq \min\{\delta[P(i), R_2] \mid R_2 \in D_2\}.$$

Mivel a delegáció célja csupán a vélemények reprezentálása, ezért természetes feltevés, hogy az ágenseket csupán a delegáció hozzájuk legközelebb eső tagja érdekli.

A *negyedik axióma,* a csalásbiztosság szerint az ágenseknek nem áll érdekükben hazudniuk a saját preferenciáik kinyilvánításakor, mivel ezzel nem érnek el jobb eredményt. Pontosabban, minden ágens gyengén jobban preferálja a valós preferenciáinak kinyilvánításával kapott delegációt annál, mint amit a csalás eredményezne, mivel úgysem tudna ezzel olyan ágenst bejuttatni a delegációba, amelyik közelebb áll a saját preferenciájához.

4. DEFINÍCIÓ – CSALÁSBIZTOSSÁG • Egy φ szabály *csalásbiztos*, ha semelyik $i \in N$ és $P \in \mathcal{L}(A)^n$ esetén sem létezik $P' = [P'(i), P(N \setminus \{i\})] \in \mathcal{L}(A)^n$ profil, amelyre

$$\min_{R \in \varphi(P)} \delta\left[P(i), R\right] > \min_{R \in \varphi(P')} \delta\left[P(i), R\right].$$

1. MEGJEGYZÉS • Vegyük észre, hogy *Can és szerzőtársai* [2017] csalásbiztossági axiómája alapvetően más, mint *Bossert–Storcken* [1992] vagy *Athanasoglou* [2016] esetében, mivel a kimenetben több preferencia is megengedett. *Bossert–Sprumont* [2014] felírása pedig mindkét előzőleg említettől eltér, ugyanis a manipulálhatóság egy „köztességnek” *(betweenness)* nevezhető fogalmon alapul (lásd még *Grandmont* [1978], *Kemeny* [1959] és *Sato* [2013]). *Bossert–Sprumont* [2014] megfogalmazása szerint egy ágens csak akkor jár jobban a kimenet manipulálásával, ha az a valós preferencia révén nyert kimenet és a saját preferenciája közé kerül. Mindezt abban az értelemben, hogy egy R_3 preferencia R_1 és R_2 között van akkor és csak akkor, ha bármely $x, y \in A$-ra, ha $(x, y) \in R_1$ és $(x, y) \in R_2$, akkor $(x, y) \in R_3$ is teljesül. *Can és szerzőtársai* [2017] felírásában egy ágens minden esetben jobban jár, ha a kimenet a Kemény-távolság értelmében közelebb kerül a saját preferenciájához. Ez pedig *ceteris paribus* erősebb axiómát eredményez. Ezt mutatja be a 2. PÉLDA.

2. PÉLDA • Egy adott $P \in \mathcal{L}(A)^n$ profil esetén az R preferencia a P-nek megfelelő Kemény-sorrend *(Kemeny ranking),* ha $\sum_{i \in N} \delta\left[R, P(i)\right] \leq \sum_{i \in N} \delta\left[R', P(i)\right]$ minden R′-re. Azt a szabályt, amely minden profilhoz a megfelelő Kemény-sorrendet rendeli, Kemény-szabálynak nevezzük. Formálisan, a Kemény-szabály, amelyet φ_K-val jelölünk, egy $P \in \mathcal{L}(A)^n$ profilhoz a $\varphi_K(P) = \{R \in \mathcal{L}(A) \mid R$ a P-nek megfelelő Kemény-sorrend preferencia-sorrendet rendeli. A Kemény-szabályról *Can–Storcken* [2013] belátja, hogy Pareto-optimális.

A Kemény-szabály *Bossert–Sprumont* [2014] felírása szerint csalásbiztos, viszont az általunk vizsgált csalásbiztosságra *Can és szerzőtársai* [2017] négy alternatívára és 11 ágensre ad ellenpéldát. Legyen P az alábbi:

d	d	d	a	c	c	a	b	b	b	b
a	a	a	d	a	a	b	c	c	c	c
b	b	c	c	b	b	d	d	d	d	a
c	c	b	b	d	d	c	a	a	a	d

Látható, hogy $\varphi_K(P) = \{abcd\}$ és $\delta(abcd, bcad) = 2$. Az utolsó ágens manipulálhatja a kimenetet, ha nem a valós preferenciáját nyilvánítja ki, amely a következő, P' profilt eredményezi:

d	d	d	a	c	c	a	b	b	b	b
a	a	a	d	a	a	b	c	c	c	c
b	b	c	c	b	b	d	d	d	d	d
c	c	b	b	d	d	c	a	a	a	a

Látható, hogy $\varphi_K(P') = \{bcda\}$ és $\delta(bcda, bcad) = 1$. Tehát az utolsó ágens *Can és szerzőtársai* [2017] definíciója szerint egy számára jobb kimenetet tudott elérni, így a Kemény-szabály ebben a kontextusban nem csalásbiztos. *Bossert–Sprumont* [2014] felírásában $(a, d) \in bcad$, $(a, d) \in abcd$, viszont $(a, d) \notin bcda$, tehát $\varphi_K(P')$ nincs a $\varphi_K(P)$ és a $P(11)$ preferenciák között, így ez a változtatás náluk nem számít manipulálásnak.

Az egyszerű csalásbiztosság axiómánál erősebb megkötést ad, hogyha ugyanezt tetszőleges koalícióra követeljük meg.

5. DEFINÍCIÓ – KOALÍCIÓSAN CSALÁSBIZTOSSÁG • Egy szabály koalíciósan csalásbiztos, ha semelyik $S \subseteq N$ koalíció és $P \in \mathcal{L}(A)^n$ preferenciaprofil esetén sem létezik $P' = [P'(S), P(N \backslash S)] \in \mathcal{L}(A)^n$ profil, amelyre

$$\min_{R \in \varphi(P)} \delta\left[P(i),\ R\right] > \min_{R \in \varphi(P')} \delta\left[P(i),\ R\right] \quad \text{minden} \quad i \in S\text{-re.}$$

Can és szerzőtársai [2017] belátja, hogy szavazatprofil-semlegesség mellett a csalásbiztosság maga után vonja a koalíciósan csalásbiztosságot is, vagyis e két axióma esetén az ágensek összefogva sem tudják manipulálni a delegációt.

A küszöbszabályok karakterizációja

A *küszöbszabály*ok a delegációs szabályok egy nagy családjának tekinthetők. Bármely küszöbszabályhoz tartozik pontosan egy *küszöbfüggvény*, amelyet *Can és szerzőtársai* [2017] az alábbi módon definiál.

6. DEFINÍCIÓ – KÜSZÖBFÜGGVÉNY • Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{Z}^{++} \to \left(1/2,\ 1\right] \cap \mathbb{Q}$ függvény *küszöbfüggvény*, ha minden $t \in \mathbb{N}$-re

$$f(t) \geq \frac{f(t-1)+1}{2}.$$

A küszöbfüggvény $f(t)$ értéke a t tagú delegációkra vonatkozóan ad meg egy küszöböt a következők szerint. Legyen adva egy $P \in \mathcal{L}(A)^n$ preferenciaprofil. A p normalizált tartó megadásánál tekintsük a preferenciák egy olyan felsorolását, amelyben az ágensek támogatása szerint a legnagyobbtól a legkisebbig vesszük az elemeket, vagyis $p_i \geq p_{i+1}$. Jelölje az ehhez tartozó preferenciákat $R_1, R_2, \ldots, R_{|A|!}$, vagyis R_1 a legnagyobb támogatottsággal rendelkező preferencia, és így tovább. Végül legyen ρ a P preferenciaprofil *kumulált tartója*, ahol $\rho_i = p_1 + \ldots + p_i$ minden i-re, vagyis például $p = (0{,}5, 0{,}\dot{3}, 0{,}1\dot{6}, 0, 0, \ldots, 0)$ esetén $\rho = (0{,}5, 0{,}8\dot{3}, 1, 1, \ldots, 1)$. Ekkor a küszöbszabály azt a legkevesebb tagú delegációt választja, amelynél a delegáltak kumulált támogatottságához tartozó (normalizált) érték már eléri a küszöbfüggvénynek a delegáltak számához tartozó értékét.

7. DEFINÍCIÓ – KÜSZÖBSZABÁLY • Egy adott f küszöbfüggvény és egy adott $P \in \mathcal{L}(A)^n$ profil esetén a $\varphi^f(P) = \{R_1, R_2, \ldots, R_{t^*}\}$ leképezést az *f-nek megfelelő küszöbszabálynak* nevezzük, ahol $t^* = \arg\min_t \left\{ t \in \mathbb{Z}^+ \middle| \rho_t \geq f(t) \right\}$.

Az így definiált leképezés egyértelmű, így minden esetben található olyan delegáció, amelynél a kumulált támogatottság eléri a küszöbértéket. Továbbá, ha két ágens támogatottsága megegyezik, akkor vagy mindketten szerepelnek a delegációban, vagy egyikük sem. Mindezt magában foglalja az alábbi állítás.

2. ÁLLÍTÁS • *Minden $A \subsetneq \mathcal{A}$, $N \subsetneq \mathcal{N}$, $P \in \mathcal{L}(A)^n$ és minden f küszöbfüggvény esetén a $\varphi^f(P)$ küszöbszabály jól definiált.*

A küszöbfüggvény és a küszöbszabály működését, valamint az ezek eredményeképpen létrejövő egy-egy delegációt a 3. PÉLDÁBAN szemléltetjük.

3. PÉLDA • Az egyszerűség kedvéért a példában 6 ágensnek 3 alternatívával kapcsolatban kell kinyilvánítania a preferenciáit. Legyen az alkalmazott küszöbfüggvény $f = (0{,}51, 0{,}76, 0{,}89, 0{,}95, 1, 1)$, vagyis ha csupán egy tagból áll a delegáció, akkor az ágensek legalább 51 százalékát kell képviselnie, két delegált esetén az ágensek legalább 76 százalékának támogatottságát kell megkapniuk, és így tovább.

Ekkor, ha a szavazatok alapján a normalizált tartó $p^1 = (0{,}5, 0{,}3\dot{3}, 0{,}1\dot{6}, 0, 0, 0)$, akkor a kumulált tartó $\rho^1 = (0{,}5, 0{,}8\dot{3}, 1, 1, 1, 1)$. A ρ^1 vektornak a második koordinátájánál szerepel az első olyan érték, amely nagyobb vagy egyenlő, mint a megfelelő küszöbérték: $\rho_1^1 = 0{,}5 \ngeq 0{,}51 = f_1$, de $\rho_2^1 = 0{,}8\dot{3} \geq 0{,}76 = f_2$. Tehát a delegációnak két tagja lesz, mégpedig az a két preferencia, amelyek a legtöbb szavazatot kapták.

Ha a szavazatprofilt a $p^2 = (0{,}1\dot{6}, 0{,}1\dot{6}, 0{,}1\dot{6}, 0{,}1\dot{6}, 0{,}1\dot{6}, 0{,}1\dot{6})$ normalizált tartó adja, akkor a kumulált tartó $\rho^2 = (0{,}1\dot{6}, 0{,}3\dot{3}, 0{,}5, 0{,}6\dot{6}, 0{,}8\dot{3}, 1)$. Ebből következően a delegációban minden egyes ágensnek szerepelnie kell, így a döntéshozók csoportja a teljes populáció kell hogy legyen.

2. MEGJEGYZÉS • Vegyük észre, hogy bármely küszöbfüggvényre, bármely t tagú delegációra teljesül az $f(t) > 1 - 0{,}5^t$ alsó korlát. Ennek következtében azon ágensek

aránya a társadalomban, akiket egy t tagú delegáció képvisel, szigorúan nagyobb, mint $1 - 0{,}5^t$. Ezzel összhangban azoknak az aránya, akiknek a véleménye nem szerepel a delegáltak között, legfeljebb $0{,}5^t$, ez pedig különösen befogadó delegációs szabályt eredményez. Ugyanakkor a szabályalkotónak van némi szabadsági foka a küszöbfüggvény megválasztásában, így a konkrét küszöbszabály tükrözheti a szabályalkotó szándékait. Például extrém esetben lehet a küszöbfüggvény értéke végig 1, ami a kinyilvánított preferenciák halmazát eredményezi, vagyis ekkor minden vélemény bekerül a delegációba.

Can és szerzőtársai [2017] belátja, hogy a Pareto-hatékonyság, a konzisztencia, a szavazatprofil-semlegesség és a csalásbiztosság axiómák karakterizálják a küszöbszabályokat, vagyis az axiómáknak eleget tevő delegációs szabályok pontosan a küszöbszabályok.

1. TÉTEL • *Egy φ szabály akkor és csak akkor tesz eleget a Pareto-optimalitás, konzisztencia, szavazatprofil-semlegesség és csalásbiztosság axiómáknak, ha minden $A \subsetneq \mathcal{A}$, $N \subsetneq \mathcal{N}$ és $P \in \mathcal{L}(A)^n$ esetén $\varphi(P) = \varphi^f(P)$ valamely f küszöbfüggvényre.*

A tétel belátásához az alábbi lemmák szükségesek.
Az 1. LEMMA értelmében, ha egy preferencia a delegáció tagja, akkor bármely másik, nála nagyobb vagy vele egyenlő támogatottságot élvező preferenciának szintén reprezentálva kell lennie a delegációban, amely jogos elvárásnak tekinthető.

1. LEMMA • *Ha egy φ szabály eleget tesz a konzisztencia, szavazatprofil-semlegesség és csalásbiztosság axiómáknak, akkor minden $A \subsetneq \mathcal{A}$, $N \subsetneq \mathcal{N}$ és $P \in \mathcal{L}(A)^n$ esetén, ha $R \in \varphi(P)$ és $p(R') \geq p(R)$, akkor $R' \in \varphi(P)$ is teljesül.*

A 2. LEMMA a szavazatprofil-semlegességhez hasonló állítást fogalmaz meg. Eszerint, amennyiben a normalizált tartók megegyeznek két különböző társadalomnál, akkor a delegáltak is ugyanazok lesznek. Jelölje $p/n = \left(p_1/n,\ p_2/n,\ \ldots,\ p_{|A|!}/n\right)$ az n ágens esetén adódó normalizált tartót.

2. LEMMA • *Ha egy φ szabály konzisztens és szavazatprofil-semleges, akkor minden $A \subsetneq \mathcal{A}$, N, $N' \subsetneq \mathcal{N}$ és minden olyan $P \in \mathcal{L}(A)^n$, $P' \in \mathcal{L}(A)^{n'}$ esetén, amelyre $p/n = p'/n'$ fennáll, $\varphi(P) = \varphi(P')$ következik.*

A 3. LEMMA szerint egy delegáció esetén a kapott szavazatok átlagolása a delegációban lévő vagy a delegáción kívüli tagok között nem változtatja meg a delegációt.

3. LEMMA • *Ha egy φ szabály eleget tesz a konzisztencia és a szavazatprofil-semlegesség axiómáknak, akkor minden $A \subsetneq \mathcal{A}$, $N \subsetneq \mathcal{N}$ és $P \in \mathcal{L}(A)^n$ esetén, a $|\varphi(P)| = t$ jelölést bevezetve és $\mathcal{L}(A)$-n egy olyan felsorolást választva, amelyre $p_i \geq p_j$ minden $i < j$-re, az alábbiak teljesülnek:*

1. Bármely olyan $P' \in \mathcal{L}(A)^n$ esetén, amelyre $p'_j/n = \sum_{i=1}^{t} p_i/(nt)$ minden $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$-re és $p'_j/n = p_j/n$ minden $j \in \{t+1, t+2, \ldots, |A|!\}$-re, $\varphi(P) = \varphi(P')$ következik.

2. *Bármely olyan $P'' \in \mathcal{L}(A)^n$ esetén, amelyre $p''_j/n = p_j/n$ minden $j \in \{1, 2, \dots, t\}$-re és $p''_j/n = \sum_{i=t+1}^{|A|!} p_j \Big/ \big(n(|A|! - t)\big)$ minden $j \in \{t+1, t+2, \dots, |A|!\}$-ra, $\varphi(P) = \varphi(P'')$ következik.*

4. PÉLDA • Példaként a 3. LEMMÁRA, tekintsünk egy A alternatívahalmazt, amelynek számossága $|A| = 3$. Tekintsünk továbbá egy $P \in \mathcal{L}(A)^n$ preferenciaprofilt, amelynek tartója $p = (\mathbf{8}, \mathbf{7}, \mathbf{6}, 3, 0, 0)$, ahol a félkövérrel jelölt számok mutatják a delegáció tagjait. Ekkor a 3. LEMMA 1. alpontjának értelmében egy $P' \in \mathcal{L}(A)^n$ profil, amelynek tartója $p' = (7, 7, 7, 3, 0, 0)$, valamint a lemma 2. alpontjának következtében egy $P'' \in \mathcal{L}(A)^n$ profil, melynek tartója $p'' = (8, 7, 6, 1, 1, 1)$, ugyanazt a delegációt eredményezi.

Természetesen az átlagolás elvégezhető a delegáltak vagy a nem delegáltak csoportjának egy részhalmazán is. Érdemes ugyanakkor megjegyezni, hogy a fordított irány nem feltétlenül teljesül, tehát nem alakíthatunk ki tetszőlegesen olyan preferenciaprofilt a delegáltak szavazatainak újraelosztásával, ahol a kapott profil ugyanazt a delegációt eredményezné. Például a $p' = (7, 7, 7, 3, 0, 0)$ normalizált tartóból képzett $p''' = (9, 8, 4, 3, 0, 0)$ esetén nincs garancia arra, hogy a delegáció végül nem csupán két tagból állna. Ez azt is jelenti, hogy a delegáció tagjainak nem éri meg csalni a preferenciáik kinyilvánításakor. Ezzel szemben a delegációban nem szereplő ágensek tetszőlegesen újraoszthatják egymás között a szavazatokat, azzal úgysem lesznek hatással a delegáció összetételére. Így viszont az is látható, hogy csalással ők sem érhetik el, hogy jobb helyzetbe kerüljenek.

A 4. LEMMA egy fontos tulajdonságot fogalmaz meg azzal kapcsolatban, hogy a delegációk milyenek lehetnek. Eszerint bármely delegált támogatottságának nagyobbnak kell lennie, mint a delegációban nem szereplő preferenciák támogatottságának összege.

4. LEMMA • *Ha egy φ szabály szavazatprofil-semleges és csalásbiztos, akkor minden $A \subsetneq \mathcal{A}$, $N \subsetneq \mathcal{N}$ és $P \in \mathcal{L}(A)^n$ esetén, ha $R \in \varphi(P)$, akkor*

$$p(R) > \sum_{R' \notin \varphi(P)} p(R').$$

Ez alapján, ha egy tartó esetén nincs olyan érték, amely nagyobb lenne, mint a preferenciaprofilban szereplő többi támogatottság valamely részhalmazának összege, akkor szükségképpen valamennyi preferencia a delegáció tagja kell hogy legyen, ahogyan ez a 3. PÉLDÁBAN a p^2 tartó esetén is megjelent.

Az axiómák következményei és kritikái

Az alábbiakban tovább elemezzük az axiómákat, különösen a szavazatprofil-semlegességet és a csalásbiztosságot.

A szavazatprofil-semlegesség sarkalatos pontja a fenti eredményeknek. Pozitívuma, hogy megkövetelése egyszerre szavatolja az anonimitás és a neutralitás axiómák teljesülését is. Előbbi a szavazók személyének, míg utóbbi az alternatívák tárgyának sorrendjére való semlegességet jelent. Formálisan a következők szerint írhatjuk le ezeket.

8. DEFINÍCIÓ – ANONIMITÁS • Egy φ szabály teljesíti az anonimitási axiómát, ha bármely P preferenciaprofil, $N \subsetneq \mathcal{N}$ halmaz és $\sigma: N \to N$ permutáció esetén $\varphi[\sigma(P)] = \varphi(P)$, ahol $[\sigma(P)](i) = P[\sigma(i)]$ minden $i \in N$-re.

Jelölje az alternatívák egy $A \subsetneq \mathcal{A}$ halmaza, egy $R \in \mathcal{L}(A)$ preferencia-sorrend és egy $\pi: A \to A$ permutáció esetén az R alternatíváinak π szerinti permutációjával kapott preferenciát $R \circ \pi = \{[\pi(x), \pi(y)]\}_{(x,y) \in R}$. Hasonlóan, jelölje egy P preferenciaprofil alternatíváinak π szerinti permutációját $P \circ \pi = \{R \circ \pi\}_{R \in P}$. Például az $A = (a, b, c)$ alternatívahalmaz, az $R_1 = abc = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ preferencia és a $\pi = (cab)$ permutáció esetén $R_1 \circ \pi = \{(c, a), (c, b), (a, b)\} = cab$, valamint a $P = \{abc, abc, abc, bac, bac, cab\}$ preferenciaprofilra $P \circ \pi = \{cab, cab, cab, acb, acb, bca\}$.

9. DEFINÍCIÓ – NEUTRALITÁS • Egy φ szabály teljesíti a neutralitás axiómát, ha bármely P preferenciaprofil, $A \subsetneq \mathcal{A}$ halmaz és $\pi: A \to A$ permutáció esetén $\varphi(P \circ \pi) = \varphi(P) \circ \pi$.

A szavazatprofil-semlegesség a preferenciaprofilokat és az azok alapján meghatározott delegációkat a preferenciákra adott szavazatok alapján köti össze. Emiatt meg kell említenünk a Condorcet-kritériummal való kapcsolatot. Ebben a modellben a Condorcet-kritérium úgy értelmezhető, hogy ha van Condorcet-győztes preferencia (amely bármely másik preferenciát legyőz az alternatívapárokként tekintett szavazásokban), akkor annak a delegációban kell lennie.

Az 5. PÉLDÁBAN szereplő esetekben belátjuk, hogy a szavazatprofil-semlegesség kizárja azokat a szabályokat, amelyek csak a Condorcet-győztes preferenciát választják, továbbá az is előfordulhat, hogy a Condorcet-győztes preferencia nem tagja a delegációnak.

5. PÉLDA • Legyen $A \subsetneq \mathcal{A}$ alternatívahalmaz, valamint az alábbi $P^1, P^2 \in \mathcal{L}(A)^7$ preferenciaprofilok.

$$
\begin{array}{cccc}
 & R_1^1 & R_2^1 & R_3^1 \\
 & a & b & a \\
P^1: & b & a & c \\
 & c & c & b \\
\hline
 & 2 & 3 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & R_1^2 & R_5^2 & R_6^2 \\
 & a & c & c \\
P^2: & b & a & b \\
 & c & b & a \\
\hline
 & 2 & 3 & 2
\end{array}
$$

A preferenciaprofilokat ennél a felírásnál is oszloponként értelmezzük, és R_j^i jelöli a P^i profilban a lexikografikus sorba rendezésnek megfelelő j-edik preferenciát, a vonal alatti számok az oszlopban szereplő preferenciára szavazók számát mutatja, és 0-nak tekintjük minden, az oszlopokban nem szereplő preferencia támogatóinak számát. Ekkor a P^1 profil esetén a Condorcet-győztes preferencia

2 szavazattal az R_1^1 (mert páronként tekintve a több szavazatot kap, mint b vagy c, b pedig több szavazatot kap, mint c), míg a P^2 profil esetén három szavazattal az R_5^2. Vagyis a Condorcet-győztesek különböző szavazatokat kaptak, ami ellentmond a szavazatprofil-semlegességnek.

Hasonló szituációra könnyedén találunk példát az alternatívák bővülő halmazai esetén is. Legyenek $A \subsetneq \bar{A} \subsetneq \mathcal{A}$ alternatívahalmazok, továbbá az alábbi $P^3 \in \mathcal{L}(A)^7$ és $P^4 \in \mathcal{L}(\bar{A})^7$ preferenciaprofilok.

$$P^3: \begin{array}{cccc} R_1^3 & R_2^3 & R_3^3 & R_6^3 \\ a & a & b & c \\ b & c & a & b \\ c & b & c & a \\ \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad P^4: \begin{array}{cccc} R_1^4 & R_{19}^4 & R_{22}^4 & R_{23}^4 \\ a & d & d & d \\ b & a & b & c \\ c & b & c & a \\ d & c & a & b \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Ekkor a P^3 profilnál két szavazattal az R_1^3, míg a P^4 profilnál egy szavazattal az R_{19}^4 preferencia a Condorcet-győztes.

A szavazatprofil-semlegesség értelmében, ha az egyik preferenciaprofilnál egy adott számú szavazatot kapott preferencia bekerül a delegációba, akkor a másik profilnál is delegáltnak kell lennie az ugyanannyi szavazatot kapott preferenciának. Ha csupán egytagú delegációkra szorítkoznánk, akkor ez kizárná az összes olyan szabályt a keresett delegációs szabályok közül, amely eleget tesz a Condorcet-kritériumnak, vagyis amely a Condorcet-győztest választja, amennyiben az létezik. Azonban a tanulmányban vizsgált delegációs szabályok többtagú delegációt is megadhatnak, így előfordulhat, hogy a megfelelő Condorcet-győztesek szerepelnek a delegációkban, mint ahogy az előző két esetben ez a 4. LEMMA értelmében a csalásbiztosság axióma mellett következik is.

Az alábbi, utolsó esetben a Condorcet-győztes az R_1 preferencia, viszont előfordulhat, hogy a delegációban csupán az R_2 és R_7 preferenciák szerepelnek.

$$\begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_7 \\ a & a & b \\ b & b & a \\ c & d & c \\ d & c & d \\ \hline 2 & 4 & 5 \end{array}$$

Ugyanakkor vegyük észre, hogy az R_1-ben szereplő összes alternatívapár viszonya megjelenik vagy az R_2-ben, vagy az R_7-ben, ami a 4. LEMMA következtében általánosan is igaz.

A vizsgált kerethez kapcsolódóan monotonitási axiómát is megfogalmazhatunk, amely az eredmények alapján nem teljesül. A monotonitási axiómák azt a tulajdonságot írják le, hogy ha tekintünk egy G hozzárendelést, valamint egy U és egy V preferenciaprofil-párt, akkor ha a $G(U)$ kimenet egy elemére teljesül, hogy a V preferenciaprofilban minden ágens legalább annyira preferálja ezt (valamilyen értelemben), mint amennyire U-ban, akkor ennek a kimenetnek a $G(V)$-ben is benne kell lennie. (Monotonitási axiómák precíz leírásáért lásd például *Myerson* [2013]). A jelen elemzési keretben delegációk kiválasztására ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg.

10. DEFINÍCIÓ – PROFILMONOTONITÁS • Legyen $A \subsetneq \mathcal{A}$, $N \subsetneq \mathbb{N}$, és legyenek $P, P' \in \mathcal{L}(A)^n$ preferenciaprofilok. Azt mondjuk, hogy egy φ szabály profilmonoton, amennyiben minden $R \in \mathcal{L}(A)$ preferenciára, ha $R \in \varphi(P)$, és minden $i \in N$-re teljesül, hogy

$$\{R' \mid \delta[R', P'(i)] < \delta[R, P'(i)]\} \subseteq \{R' \mid \delta[R', P'(i)] < \delta[R, P(i)]\},$$

akkor $R \in \varphi(P')$.

A megfogalmazott axiómában $\{R' \mid \delta[R', P'(i)] < \delta[R, P'(i)]\}$ jelöli azon preferenciák halmazát, amelyeket az i ágens a P preferenciaprofilnak megfelelően jobban preferál R-nél. Ha ez a halmaz szűkül vagy ugyanaz marad minden i ágensre a P' profilra áttérve, akkor R-nek továbbra is delegáltnak kell lennie.

Ez viszont nem teljesül a küszöbszabályokra, hiszen ha egyes ágensek preferenciája megváltozik az axiómának megfelelően, akkor előfordulhat, hogy valamelyik delegált tartója olyan mértékben megnő, hogy a legkevésbé támogatott delegált kiesik a delegációból. Ezt a 6. PÉLDÁVAL mutatjuk be.

6. PÉLDA • Tekintsük az alábbi P preferenciaprofilt és egy φ küszöbszabályt, amely esetén $R_1 \in \varphi(P)$.

$$P: \quad \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_6 \\ a & a & c \\ b & c & b \\ c & b & a \\ \hline 5 & 5 & 3 \end{array}$$

Ekkor az R_1 preferencia szemszögéből

$$\{R' \mid \delta(R', R_6) < \delta(R_1, R_6)\} = \{R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}.$$

Vegyünk egy i ágenst, amelynek P-ben R_6 a preferenciája. Ha ennek egy másik, P' profilban R_2 lenne a preferenciája, akkor azon preferenciák halmaza P'-nek megfelelően, amelyeket i jobban preferál, mint R_1-et,

$$\{R' \mid \delta(R', R_2) < \delta(R_1, R_2)\} = \{R_2\},$$

vagyis minden ilyen i ágensre a profilmonotonitási axióma teljesülne. Ugyanakkor megadható az alábbi P' preferenciaprofil, valamint a P és P' preferenciaprofilhoz egy megfelelő küszöbfüggvény, amelynek alapján $R_1 \in \varphi(P)$, viszont $R_1 \notin \varphi(P')$. Ennek értelmében pedig a küszöbszabályok nem teljesítik a profilmonotonitási axiómát.

$$P': \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_6 \\ a & a & c \\ b & c & b \\ c & b & a \\ \hline 5 & 7 & 1 \end{array}$$

Can–Storcken [2013] megfogalmazza a javító monotonitás *(update monotonicity)* axiómát, amelynek lényege, hogy az i ágens úgy változtathat a preferenciáján, hogy az a korábbi $P(i)$, valamint az $R \in \varphi(P)$ preferenciák között legyen. Belátható, hogy a profilmonotonitás axiómája ekvivalens ezzel, így *Can–Storcken* [2013] eredménye alapján a Kemény-szabály ezt is teljesíti. A szerzők bizonyítják továbbá a Maskin-monotonitással való ekvivalenciát, amely gyakorlatilag a profilmonotonitási axióma átfogalmazása a kevésbé kedvelt preferenciák bővülő halmazára.

Mindezek mellett megfogalmazható egy gyengébb monotonitási tulajdonság, amely azt mondja ki, hogy ha egy R preferencia több szavazatot kap akár új szavazó, akár átszavazás révén, akkor az nagyobb eséllyel szerepel a delegációban. Ez triviálisan teljesül, hiszen ekkor a preferencia tartója növekszik, és a delegáltak meghatározásánál csak a kumulált tartó értékei számítanak.

A profilmonotonitási axióma nemteljesülése nyilvánvalóan kapcsolatban van a Kemény-távolság tulajdonságaival. Ennek egy másik kritikáját is megfogalmazhatjuk, miszerint a Kemény-távolság nem veszi figyelembe, hogy egy preferencia alján vagy tetején történik-e változás. Például az *abcd* preferenciától ugyanolyan távol van a *bacd* és az *abdc* preferencia is, viszont a gyakorlatban egy egyén számára az utóbbi sokkal kedvezőbb.

Felmerülhet továbbá a csalásbiztossági axióma kritikája is, mivel az kizárja a Kemény-szabályt a lehetséges delegációs szabályok közül. A delegációtól számított távolság meghatározására kevéssé tűnhet racionálisnak, ha a delegációban szereplő legközelebbi preferencia alapján járunk el, mivel lehet, hogy több olyan tagja is van a delegációnak, akik az egyéntől nagyon eltérő véleményeket képviselnek. Így adódik a kérdés, hogy mi a helyzet akkor, hogyha a legközelebbi helyett a legtávolabbi delegáltat vesszük figyelembe. Ebben az esetben a csalásbiztosság – a 2. PÉLDÁT újra alkalmazva – nem teljesül a Kemény-szabályra, mivel az egyelemű delegációt is megadhat, és így manipulálható a kimenet.

Záró megjegyzések

Ebben a tanulmányban bemutattuk és tüzetesen megvizsgáltuk *Can és szerzőtársai* [2017] eredményét, amely szerint négy könnyen elfogadható axióma, a Pareto-optimalitás, a konzisztencia, a szavazatprofil-semlegesség és a csalásbiztosság karakterizálja a delegációs szabályok egy új osztályát, a küszöbszabályokat. Küszöbszabályok esetén a delegációk méretét a társadalom heterogenitása és a küszöbszabályt megadó küszöbfüggvény határozza meg. Bármely küszöbfüggvényre teljesül egy alsó korlát, amelynek megfelelően egy t tagú delegáció esetén azok aránya a társadalomban, akiknek a véleménye nem szerepel a delegációban, legfeljebb $0{,}5^t$.

További kutatások tárgyát képezheti a szavazatprofil-semlegesség mint axióma vizsgálata. Láthattuk, hogy nem egyértelműen kritizálható, és az anonimitás és neutralitás tulajdonságok is következnek belőle. Érdekes kérdés, hogy meghatározható-e egy, az előző kettőtől független komponens, amellyel együtt a három tulajdonság karakterizálja az axiómát.

Végül érdemes lenne a küszöbszabályokat más delegációkiválasztó szabályokkal is összevetni és megvizsgálni, hogy azok mely axiómáknak tesznek eleget. Így teljesebb képet kaphatnánk a delegációs szabályokról és gyakorlati alkalmazhatóságukról.

Hivatkozások

Arrow, K. J. [1951]: Social Choice and Individual Values. John Wiley & Sons, New York.

Athanasoglou, S. [2016]: Strategyproof and efficient preference aggregation with Kemeny-based criteria. Games and Economic Behavior, Vol. 95. 156–167. o. http://dx.doi.org/10.1016/j.geb.2015.12.002.

Barbie, M.–Puppe, C.–Tasnádi Attila [2006]: Non-manipulable domains for the borda count. Economic Theory, Vol. 27. No. 2. 411–430. o. https://doi.org/10.1007/s00199-004-0603-4.

Bíró Péter–Sziklai Balázs–Kóczy Á. László [2012]: Választókörzetek igazságosan? Közgazdasági Szemle, 59. évf. 10. sz. 1165–1186. o. http://www.kszemle.hu/tartalom/cikk.php? id=1343.

Bíró Péter–Kóczy Á. László–Sziklai Balázs [2015]: Fair apportionment in the view of the Venice Commission's recommendation. Mathematical Social Sciences, Vol. 77. 32–41. o. https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2015.06.001.

Bossert, W.–Sprumont, Y. [2014]: Strategy-proof preference aggregation: Possibilities and characterizations. Games and Economic Behavior, Vol. 85. No. 1. 109–126. o. http://dx.doi.org/10.1016/j.geb.2014.01.015.

Bossert, W.–Storcken, T. [1992]: Strategy-proofness of social welfare functions: The use of the Kemeny distance between preference orderings. Social Choice and Welfare, Vol. 9. No. 4. 345–360. o. https://doi.org/10.1007/BF00182575.

Brams, S. J. [2003]: Game theory and politics. 2nd ed. ISBN 0-486-43497-4. Dover Publications Inc., Mineola, N.Y.

Can, B.–Storcken, T. [2013]: Update monotone preference rules. Mathematical Social Sciences, Vol. 65. No. 2. 136–149. o. https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2012.10.004.

Can, B.–Csóka Péter–Ergin, E. [2017]: How to choose a non-manipulable delegation? MT-D, 2017/13. MTA KRTK, http://econ.core.hu/file/download/mtdp/MTDP1713.pdf.

Csáji Balázs Csanád–Rédei Miklós [2011]: A racionális demokratikus véleményösszegzés korlátairól. Magyar Filozófiai Szemle, 55. évf. 2. sz. 97–121. o.

Csató László [2018*a*]: A csalásbiztosságot sértő szabályok a sportban. Megjelent: *Temesi József* (szerk): XV. Gazdaságmodellezési Szakértői Konferencia, Előadások. Gazdaságmodellezési Társaság, Budapest, 5–15. o.

Csató László [2018*b*]: Incentive compatible designs for FIFA and UEFA tournament qualifiers. https://arxiv.org/abs/1804.04422.

Csató László–Petróczy Dóra Gréta [2018]: Néhány gondolat a labdarúgás rangsorolási szabályairól a 2018. évi labdarúgó-világbajnokság európai selejtezője kapcsán. Közgazdasági Szemle, 65. évf. 6. sz. 632–649. o. https://doi.org/10.18414/KSZ.2018.6.632.

Csekő Imre [2016]: Közösségi döntések, gazdasági mechanizmus, általános egyensúly. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest.

Csekő Imre [2017]: Kenneth J. Arrow (1921–2017). Közgazdasági Szemle, 64. évf. 4. sz. 341–348. o. https://doi.org/10.18414/KSZ.2017.4.341.

Gaertner, W. [2001]: Domain conditions in social choice theory. Cambridge University Press. http://assets.cambridge.org/052179/1022/frontmatter/0521791022_frontmatter.pdf.

Gibbard, A. [1973]: Manipulation of voting schemes: a general result. Econometrica, Vol. 41. No. 4. 587–601. o. https://doi.org/10.2307/1914083.

Grandmont, J.-M. [1978]: Intermediate preferences and the majority rule. Econometrica, Vol. 46. No. 2. 317–330. o. https://doi.org/10.2307/1913903.

Kemeny, J. G. [1959]: Mathematics without numbers. Daedalus, Vol. 88. No. 4. 577–591. o. www.jstor.org/stable/20026529.

Kóczy Á. László [2009]: Measuring voting power: The paradox of new members vs. the null player axiom. Megjelent: *Rudas Imre–Fodor János–Kacprzyk, J.* (szerk.): Towards Intelligent Engineering and Information Technology. Springer, Berlin, Heidelberg. Vol. 243. 266–290. o. https://doi.org/10.1007/978-3-642-03737-5_5.

Kóczy Á. László–Strobel, M. [2009]: The invariant method can be manipulated. Scientometrics, Vol. 81. No. 1. 291–293. o. https://doi.org/10.1007/s11192-008-2134-4.

Kóczy Á. László–Sziklai Balázs [2018]: Bounds on malapportionment. Operations Research Letters, Vol. 46. No. 3. 324–328. o. https://doi.org/10.1016/j.orl.2018.03.002.

Kóczy Á. László–Bíró Péter–Sziklai Balázs [2017]: US vs. European apportionment practices: The conflict between monotonicity and proportionality. Megjelent: *Endriss, U.* (szerk.): Trends in Computational Social Choice. AI Access, 309–325. o. http://research.illc.uva.nl/COST-IC1205/BookDocs/TrendsCOMSOC.pdf.

List, C.–Pettit, P. [2004]: Aggregating sets of judgments: Two impossibility results compared. Synthese, Vol. 140. No. 1–2. 207–235. o. https://doi.org/10.1023/B:SYNT.0000029950.50517.59.

Medvegyev Péter [2017]: Gondolatok Kenneth Arrow munkásságáról. Hitelintézeti Szemle, 16. évf. 2. sz. 146–153. o. http://doi.org/10.25201/HSZ.16.2.146153.

Myerson, R. B. [2013]: Fundamentals of social choice theory. Quarterly Journal of Political Science, Vol. 8. No. 3. 305–337. o. http://dx.doi.org/10.1561/100.00013006.

Sato, S. [2013]: A sufficient condition for the equivalence of strategy-proofness and non-manipulability by preferences adjacent to the sincere one. Journal of Economic Theory, Vol. 148. No. 1. 259–278. o. http://dx.doi.org/10.1016/j.jet.2012.12.001.

Satterthwaite, M. A. [1975]: Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. Journal of Economic Theory, Vol. 10. No. 2. 187–217. o. https://doi.org/10.1016/00220531(75)90050-2.

Smith, J. H. [1973]: Aggregation of preferences with variable electorate. Econometrica, Vol. 41. No. 6. 1027–1041. o. https://doi.org/10.2307/1914033.

Sziklai Balázs [2018]: How to identify experts in a community? International Journal of Game Theory, Vol. 47. No. 1. 155–173. o. https://doi.org/10.1007/s00182-017-0582-x.

Tasnádi Attila [2008]: The extent of the population paradox in the hungarian electoral system. Public Choice, Vol. 134. No. 3–4. 293–305. o. https://doi.org/10.1007/s11127-007-9228-z.

Tasnádi Attila [2011]: The political districting problem: A survey. Society and Economy, Vol. 33. No. 3. 543–554. o. https://doi.org/10.1556/SocEc.2011.0001.

Tasnádi Attila [2014]: Igazságos elosztások. Typotex, Budapest.

Young, H. P. [1974]: An axiomatization of Borda's rule. Journal of Economic Theory, Vol. 9. No. 1. 43–52. o. https://doi.org/10.1016/0022-0531(74)90073-8.

Young, H. P. [1975]: Social choice scoring functions. SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 28. No. 4. 824–838. o. http://dx.doi.org/10.1137/0128067.