Közgazdasági Szemle, LVIII. évf., 2011. július–augusztus (619–632. o.)

BALOG DÓRA–BÁTYI TAMÁS LÁSZLÓ–
CSÓKA PÉTER–PINTÉR MIKLÓS

# Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban

**A pénzügyekben mind elméletileg, mind az alkalmazások szempontjából fontos kérdés a tőkeallokáció. Hogyan osszuk szét egy adott portfólió kockázatát annak alportfóliói között? Miként tartalékoljunk tőkét a fennálló kockázatok fedezetére, és a tartalékokat hogyan rendeljük az üzleti egységekhez? A tőkeallokáció vizsgálatára axiomatikus megközelítést alkalmazunk, tehát alapvető tulajdonságok megkövetelésével dolgozunk. Cikkünk kiindulópontja *Csóka–Pintér* [2010] azon eredménye, hogy a koherens kockázati mértékek axiómái, valamint a tőkeallokációra vonatkozó méltányossági, ösztönzési és stabilitási követelmények nincsenek összhangban egymással. Ebben a cikkben analitikus és szimulációs eszközökkel vizsgáljuk ezeket a követelményeket. A gyakorlati alkalmazások során használt, illetve az elméleti szempontból érdekes tőkeallokációs módszereket is elemezzük. A cikk fő következtetése, hogy a *Csóka–Pintér* [2010] által felvetett probléma gyakorlati szempontból is releváns, tehát az nemcsak az elméleti vizsgálatok során merül fel, hanem igen sokszor előforduló és gyakorlati probléma. A cikk további eredménye, hogy a vizsgált tőkeallokációs módszerek jellemzésével segítséget nyújt az alkalmazóknak a különböző módszerek közötti választáshoz.***
**Journal of Economic Literature (JEL) kódok: C71, G10.**

## Bevezetés

A kockázat megfelelő mérése és elosztása elengedhetetlen a bankok, biztosítók, portfóliókezelők és más pénzügyi kockázatnak kitett egységek számára. A kockázatmérés lehetséges módszereiről a *Krokhmala és szerzőtársai* [2011] cikkben olvashatunk. Mi a koherens kockázati mértékekre (*Artzner és szerzőtársai* [1999]) szorítkozunk, amelyek négy természetes axiómával definiáltak: monotonitás, transzlációinvariancia, pozitív homogenitás és szubadditivitás. A koherens kockázati mértékek a pénzügyi irodalomban széleskörűen elfogadottak, a fogalom elméleti megalapozására lásd például *Csóka és szerzőtársai* [2007] és *Acerbi–Scandolo* [2008].

Egy több alegységből (alportfólióból) álló pénzügyi egység (portfólió) esetén az alegységek kockázatának összege nagyobb, mint az egység kockázata, azaz diverzifikációs hatás

* Balog Dóra köszöni a TÁMOP/4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0005 projekt és a Magyar Tudományos Akadémia Lendület-programjának (LD-004/2010) támogatását. Csóka Péter köszöni a TÁMOP/4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0005 projekt és a Magyar Tudományos Akadémia Lendület-programjának (LD-004/2010) támogatását. Pintér Miklós kutatásait az OTKA kutatási pályázat és az MTA Bolyai János kutatási ösztöndíjának támogatásával végezte.

*Balog Dóra,* Budapesti Corvinus Egyetem, befektetések és vállalati pénzügy tanszék.
*Bátyi Tamás László,* Budapesti Corvinus Egyetem, befektetések és vállalati pénzügy tanszék.
*Csóka Péter,* Budapesti Corvinus Egyetem, befektetések és vállalati pénzügy tanszék.
*Pintér Miklós,* Budapesti Corvinus Egyetem, matematika tanszék.

keletkezik, aminek következményeként a kisebb kockázathoz kisebb tőkét kell tartalékolni. A kisebb tőketartalékolási következmény megtakarítást jelent az alegységek számára, amely megtakarítást fel kell osztani közöttük. Mivel a csőd elkerülése érdekében tartalékolandó tőkét egy kockázati mérték határozza meg, ezért ezt a folyamatot nevezhetjük kockázatelosztásnak is és tőkeallokációnak is. Ebben a cikkben az utóbbi, a tőkeallokáció kifejezéssel fogunk a fenti vázolt folyamatra hivatkozni.

*Balog és szerzőtársai* [2010] a tőkeallokáció gyakorlati alkalmazásaira a következő példákat fejti ki:

1. a pénzintézetek üzletágakra osztják fel a tartalékolandó tőkét,
2. új üzletággal kapcsolatos stratégiai döntéshozatal, termékárazás,
4. (egyéni) teljesítményértékelés,
5. kockázati limitek kialakítása,
6. biztosítótársaságok kockázatfelosztása (*Valdez–Chernih* [2003], *Buch–Dorfleitner* [2008], *Kim–Hardy* [2009]).

*Csóka–Pintér* [2010] (átruházható hasznosságú) kooperatív játékelméleti eszközöket használva mutatta meg, hogy általános, azaz nem specifikus, csak az axiómák által meghatározott, koherens kockázati mértéket használva, nincs olyan tőkeallokációs módszer, ami kielégíti a SZIMMETRIKUS, az ÖSZTÖNZŐ és a STABIL tulajdonságokat (más axiómákat vizsgál *Denault* [2001] és *Kalkbrener* [2005]). Ugyanakkor *Csóka és szerzőtársai* [2007] belátta, hogy mindig van a STABIL tulajdonságnak eleget tevő módszer.

Az egyes tulajdonságok a következőképpen írhatók le: a SZIMMETRIKUS tulajdonság azt követeli meg, hogy a kockázati szempontból szimmetrikus alegységeket egyenlően kezeljük, azonos tőkét allokáljunk hozzájuk. A szimmetrikusság tehát valamiféle méltányosságot, egyenlő elbánást ír elő, tehát elvi jelentőségű, megkockáztatjuk, hogy bizonyos körülmények között a nem szimmetrikus tőkeallokációs módszer alkalmazása még jogi következményekkel is járhat.

Az ÖSZTÖNZŐ tulajdonság azt írja elő, hogy ha egy alegység tetszőleges más alegységcsoport kockázatához való határhozzájárulása nem csökken, akkor a ráeső tőke se csökkenjen.

A STABIL tulajdonság azt követeli meg, hogy pontosan osszuk szét a pénzügyi egység által tartalékolandó tőkét annak alegységei között, és közben egyik alegységcsoportra se osszunk több tőkét, mint amennyit az adott alegységcsoport kockázata önállóan indokolna. Ellenkező esetben az adott alegyeségcsoport erősen tiltakozna az elosztás ellen.

Mivel, amint már említettük, nincs olyan tőkeallokációs módszer, amely általános koherens kockázati mértéket használva teljesíti mindhárom fenti feltételt, ezért hét ismert tőkeallokációs módszert vizsgálunk abból a szempontból, hogy azok miként viszonyulnak a fenti három követelményhez. A hét vizsgált tőkeallokációs módszer a következő: EGYÉNI KOCKÁZATTAL ARÁNYOS MÓDSZER (*activity based method; Hamlen és szerzőtársai* [1977]), BÉTA-MÓDSZER (például *Homburg–Scherpereel* [2008]), NÖVEKMÉNYI MÓDSZER (például *Jorion* [2007]), KÖLTSÉGRÉSMÓDSZER (*cost gap method,* pédául *Homburg–Scherpereel* [2008]), EULER-MÓDSZER (például *Buch–Dorfleitner* [2008]), SHAPLEY-MÓDSZER (*Shapley* [1953]) és NUKLEOLUSZ-MÓDSZER (*Schmeidler* [1969]).

Vizsgálatainkban két utat követünk. Először analitikus úton meghatározzuk, hogy a fenti tőkeallokációs módszerek mely tulajdonságokkal rendelkeznek, és melyekkel nem. Ezek után külön górcső alá vesszük a STABIL tulajdonságot, ahol szimulációs módszerekkel azt határozzuk meg, hogy az egyes tőkeallokációs módszerek az empirikusan megfigyelhető hozameloszlásokra milyen gyakran teljesítik a STABIL tulajdonságot. Eredményeinket a *3–7. táblázatok* tartalmazzák.

A cikk eredményei a következők: a vizsgált hét tőkeallokációs módszer közül a két játékelméleti módszer, a SHAPLEY- és a NUKLEOLUSZ-MÓDSZER teljesít a legjobban, mindkét módszer két tulajdonságot teljesít a három közül. Míg a SHAPLEY-MÓDSZER esetén a STABIL tulajdonságról, a NUKLEOLUSZ-MÓDSZER esetén az ÖSZTÖNZÉSRŐL kell lemondanunk.

A következtetéseink a következők: a *Csóka–Pintér* [2010] által felvetett elméleti probléma, tehát az ideális tőkeallokációs módszer lehetetlensége nemcsak elméleti, de gyakorlati szempontból is releváns. A szimulációs eredmények azt mutatják, hogy a SHAPLEY-MÓDSZER minden vizsgált szimulációs környezetben jelentős arányban sérti a STABIL tulajdonságot, tehát nem néhány kivételes eset az, ami miatt az ideális tőkeallokációs módszer lehetetlensége fennáll. Mivel *Csóka–Pintér* [2010] belátta, hogy a SHAPLEY-MÓDSZER az egyetlen olyan módszer, amely pontosan osztja szét a pénzügyi egység által tartalékolandó tőkét annak alegységei között (hatékony), valamint rendelkezik a SZIMMETRIKUS és az ÖSZTÖNZŐ tulajdonságokkal, ezért azzal a másodlagos, de nem elhanyagolható kérdéssel, hogy a NUKLEOLUSZ-MÓDSZER milyen arányban nem teljesíti az ŐSZTÖNZÉST, egy későbbi tanulmányban szeretnénk foglalkozni.

Második fő következtetésünk az, hogy minden vizsgált tőkeallokációs módszernek megvan a maga előnye és hátránya. Emiatt az elemzőnek alkalmazásról alkalmazásra kell válogatnia a különböző módszerek közül, mérlegelve azt, hogy az adott alkalmazáshoz melyik tőkeallokációs módszer illik a leginkább. Ebben a választásban nyújthatnak segítséget elméleti, illetve szimulációs eredményeink.

A cikk felépítése a következő: a következő fejezetben röviden bevezetjük a vizsgálataink során használt fogalmakat, a keretrendszert, majd ismertetjük a hét vizsgált tőkeallokációs módszert, végül az utolsó fejezetben az eredményeink kerülnek bemutatásra.

## Alapfogalmak

Ebben a cikkben az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a vizsgált alegységek működése olyan valószínűségi változókkal reprezentált, amelyek egy $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ véges valószínűségi mezőn vannak értelmezve. A valószínűségi változókat nagy latin betűkkel jelöljük, például $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Mivel véges világállapottéren dolgozunk, így a valószínűségi változókra mint vektorokra (a komponensei $\Omega$ elemei) is gondolhatunk. A rögzített $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ véges valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók halmazát jelölje $\mathcal{X}$.

Cikkünkben a következő pénzügyi helyzetet elemezzük. Egy pénzügyi egység, például vállalat, portfólió stb. véges sok alegységből áll. Az alegységek halmaza $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Minden alegység pénzügyi helyzete leírható egy valószínűségi változóval; az $i$ alegység esetén az $X_i$ ez a valószínűségi változó. Magyarán szólva, az $X_i$ vektor megadja az $i$ alegység lehetséges nyereségeit egy adott jövőbeli időpontra vonatkozóan (a negatív értékek veszteséget jelentenek). Az alegységek részhalmazait is vizsgáljuk, egy $S \subseteq N$ alegység-koalíció pénzügyi helyzete $X_S = \sum_{i \in S} X_i$, ahol az üres szumma értéke a 0 függvény (vektor).

A $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvényt kockázati mértéknek nevezzük. A kockázati mérték minden valószínűségi változóhoz hozzárendel egy számot, minden portfólióhoz megadja annak kockázatát. Ebben az értelemben a kockázat azt a minimális tőkét jelenti, amit tartalékolva, elfogadható helyzetbe jutunk. Ebben a cikkben többnyire koherens kockázati mértékekkel dolgozunk (*Artzner és szerzőtársai* [1999]). Szimulációink során a $k$ várható veszteség *(expected shortfall, ES)* kockázati mértéket (*Acerbi–Tasche* [2002]) használjuk, ami a legnagyobb $k$ százaléknyi veszteség súlyozatlan átlaga.

Végül, *tőkeallokációs helyzeten* az alegységek pénzügyi helyzetét leíró vektorok és a kockázati mérték összességét értjük, azaz $X_N^\rho = \left\{N, \left\{X_i\right\}_{i \in N}, \rho\right\}$ egy tőkeallokációs helyzet. Az $N$ alegységcsoporttal rendelkező tőkeallokációs helyzetek osztályát $TA_N$-nel jelöljük.

1. PÉLDA. *Vegyük az* $X_N^\rho$ *tőkeallokációs helyzetet, ahol az* $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ *valószínűségi mezőben* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{M}$ *az* $\Omega$ *összes részhalmaza,* $P(\{\omega_1\}), P(\{\omega_2\}), P(\{\omega_3\}), P(\{\omega_4\}) = 1/4$, *három alegységünk van,* $N = \{1, 2, 3\}$, *és az alkalmazott kockázati mérték* $\rho$ *a* 25 *százalékos várható veszteség* (*ES*) *kockázati mérték, ami jelen esetben* (0 *és* 25 *százalék között*) *egybeesik a maximális veszteséggel. Az* $X_i$ *vektorok az* 1. táblázatban *láthatók.*

*1. táblázat*

Az $X_N^\rho$ tőkeallokációs helyzet

| $\Omega$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_{\{1,2\}}$ | $X_{\{1,3\}}$ | $X_{\{2,3\}}$ | $X_{\{1,2,3\}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | –10 | –10 | 0 | –20 | –10 | –10 | –20 |
| $\omega_2$ | –3 | –4 | –100 | –7 | –103 | –104 | –107 |
| $\omega_3$ | –6 | 0 | –99 | –6 | –105 | –99 | –105 |
| $\omega_4$ | –0 | –6 | –99 | –6 | –99 | –105 | –105 |
| $p(X_S)$ | 10 | 10 | 100 | 20 | 105 | 105 | 107 |

A legalsó sorban látható az egyes alegységcsoportok által tartalékolandó tőke. Vegyük észre, hogy a három alegység összefogásával jelentős diverzifikációs hatás érhető el ahhoz képest, mint ha az alegységek külön-külön mérnék kockázatukat:

$$\rho(X_N) = 107 < 120 = \sum_{i \in N} \rho(X_i).$$

Ahogy az 1. példában, úgy általában a tőkeallokációs helyzetek vizsgálata során felmerül a kérdés, hogy miként osszuk el a diverzifikációs hatás eredményeként felmerülő megtakarítást (tartalékolandó tőkében) az egyes alegységek között, és milyen tulajdonságokat követeljünk meg az alkalmazott tőkeallokációs módszerektől.

A $\varphi : TA_N \to \mathbb{R}^N$ függvényt *tőkeallokációs módszernek* nevezzük. A $\varphi$ tőkeallokációs módszer azt határozza meg, hogy az egyes tőkeallokációs helyzetekben az egyes alegységeknek mekkora tőkét kell tartalékolniuk. A következőkben a tőkeallokációs módszerek három lehetséges tulajdonságát vezetjük be.

1. DEFINÍCIÓ. *A* $\varphi$ *tőkeallokációs módszer*

SZIMMETRIKUS, *ha minden* $X_N^\rho \in TA_N$ *tőkeallokációs helyzetre, és tetszőleges olyan* $i, j \in N$ *alegységek esetén, hogy minden* $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$ *alegységcsoportra* $\rho\left(X_{S \cup \{i\}}\right) - \rho\ X$ $- \rho(X_S) = \rho\left(X_{S \cup \{j\}}\right) - \rho(X_S) : \varphi_i\left(X_N^\rho\right) = \varphi_j\left(X_N^\rho\right)$;

ÖSZTÖNZŐ, *ha minden* $X_N^{\rho_1}, Y_N^{\rho_2} \in TA_N$ *tőkeallokációs helyzetre és tetszőleges olyan* $i \in N$ *alegység esetén, hogy* $\rho_1\left(X_{S \cup \{i\}}\right) - \rho_1(X_S) \le \rho_2\left(Y_{S \cup \{i\}}\right) - \rho_2(Y_S), S \subseteq N : \varphi_i\left(X_N^{\rho_1}\right) \le \varphi_i\left(Y_N^{\rho_2}\right)$;

STABIL, *ha minden* $X_N^\rho \in TA_N$ *tőkeallokációs helyzetre* $\rho(X_N) = \sum_{i \in N} \varphi_i\left(X_N^\rho\right)$ *és minden* $S \subset N$ *alegységcsoportra* $\rho(X_S) \ge \sum_{i \in S} \varphi_i\left(X_N^\rho\right)$.

E követelmények egy lehetséges magyarázata a következő.

A SZIMMETRIKUS tulajdonság *(equal treatment property)* azt követeli meg, hogy ha két alegység kockázati szempontból megkülönböztethetetlen (tetszőleges, őket nem tartalmazó alegységcsoport kockázatához ugyanolyan mértékben járulnak hozzá), akkor legyenek azonosan értékelve, azaz a tőkeallokációs módszer mindkét alegységnek ugyanakkora tartalékolandó tőkét írjon elő. A kooperatív játékelméletben ezt a tulajdonságot egyenlően kezelőnek nevezzük (*Pintér* [2009]).

Az ÖSZTÖNZŐ tulajdonság *(strong monotonicity)* azt írja elő, hogy ha ugyanazon alegységet két hipotetikus vagy akár valós helyzetben vizsgálunk, és az első helyzetben az kockázatosabb, mint a másodikban (akár eltérő kockázati mértéket használva is), akkor a tőkeallokációs módszer ne írjon elő kisebb tartalékolandó tőkét az adott alegységnek az első helyzetben, mint a másodikban. Az ÖSZTÖNZŐ elnevezésre a következő magyarázatot adhatjuk: ha egy tőkeallokációs módszer nem rendelkezik a fent leírt ÖSZTÖNZŐ tulajdonsággal, akkor elképzelhető, hogy egy bizonyos helyzetben, egy bizonyos alegységnek érdemes „kockázatosabbnak mutatkoznia/lennie", mint ami, mert így egy olyan helyzetbe kerülhetne, ahol őrá kisebb tartalékolandó tőke hárulna, mint abban az esetben, amiben van. Magyarul, az ÖSZTÖNZŐ tulajdonságú tőkeallokációs módszer nem csábítja az alegységeket „nem valós" kockázatok vállalására.

A STABIL tulajdonság *(core compatibility)* azt követeli meg, hogy pontosan osszuk szét a pénzügyi egység által tartalékolandó tőkét annak alegységei között, és a tőkeallokációs módszer által az alegységeknek előírt tartalékolandó tőke semelyik alegységcsoportra tekintve se legyen túlzó. Vagyis ne legyen olyan alegységcsoport, amelyik a saját kockázatához tartalékolandó tőkét (ezt a rögzített kockázati mérték meghatározza) úgy tudná szétosztani a tagjai között, hogy az minden tagja számára kisebb lenne, mint az eredetileg előírt tartalékolandó tőke. Ez a tulajdonság egyfajta stabilitást testesít meg, hiszen nincs olyan alegység vagy alegységcsoport, aminek lehetősége és érdeke lenne, hogy eltérjen az eredeti tőkeallokációtól. Ez a tulajdonság a kooperatív játékelméletben használt magfogalom (*Gillies* [1959]) erre a környezetre szabott formája.

Az ismertetett fogalmak bevezetése után már ki tudunk mondani egy, az ideális tőkeallokációs módszer lehetetlenségéről szóló tételt.

1. TÉTEL (*Csóka–Pinter* [2010]). *Általános koherens kockázati mérték használata esetén nincs olyan tőkeallokációs módszer, amely egyszerre* SZIMMETRIKUS, ÖSZTÖNZŐ *és* STABIL.

Átfogalmazva a fenti tételt, ha tetszőleges koherens kockázati mérték használata megengedett, akkor általános esetben nem férnek össze a SZIMMETRIKUS, az ÖSZTÖNZŐ és a STABIL tulajdonságok, ezt a három természetes követelményt egyszerre egy tőkeallokációs módszertől sem követelhetjük meg. Kérdés, hogy a gyakorlatban tapasztalt hozameloszlásokra mennyire releváns ez a probléma. Erre a kérdésre A különböző tőkeallokációs módszerek tulajdonságai című fejezetben adunk választ.

## Tőkeallokációs módszerek

Ebben a fejezetben hét, a későbbiekben vizsgált tőkeallokációs módszert mutatunk be. A tőkeallokációs módszereket teljesen általánosan, a kockázati mérték specifikálása nélkül definiáljuk. A módszerek közül az első négyet *Homburg–Scherpereel* [2008] cikke alapján mutatjuk be, az ötödik – a *Tasche* [2008] által is vizsgált – EULER-MÓDSZER, míg a hatodik és a hetedik két, a játékelméletből jól ismert módszer: a SHAPLEY-MÓDSZER (*Shapley* [1953]) és a NUKLEOLUSZ-MÓDSZER (*Schmeidler* [1969]).

### *Egyéni kockázattal arányos módszer*

Az egyéni kockázattal arányos módszert *(activity based method) Hamlen és szerzőtársai* [1977] vezette be, a lényege, hogy a közös kockázatot az alegységek egyedi, a többi elemtől független kockázatának arányában osztja szét. Tetszőleges $X_N^\rho \in TA_N$ tőkeallokációs helyzet és $i \in N$ alegység esetén:

$$\varphi_i^{AB}\left(X_N^\rho\right) = \frac{\rho\left(X_i\right)}{\sum_{j \in N} \rho\left(X_j\right)} \rho\left(X_N\right).$$

A módszer meglehetősen komoly hátránya, hogy nem veszi figyelembe az egyes eszközök közötti függőségi struktúrát, így nem „jutalmazza” kisebb kockázati hozzájárulásokkal azokat az alegységeket, amelyek negatívan korrelálnak a többiekkel.

### *Béta-módszer*

Legyen $X_N^\rho \in TA_N$ egy tőkeallokációs helyzet, és jelölje $\mathrm{Cov}(X_i, X_N)$ az $i \in N$ alegység és a pénzügyi egység pénzügyi helyzetét leíró valószínűségi változók kovarianciáját. Mint ismert, az $i$ alegység bétája, $\beta_i$ a következő:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}\left(X_i, X_N\right)}{\mathrm{Cov}\left(X_N, X_N\right)}.$$

Tetszőleges $X_N^\rho \in TA_N$ tőkeallokációs helyzet és $i \in N$ alegység esetén:

$$\varphi_i^B\left(X_N^\rho\right) = \frac{\beta_i}{\sum_{j \in N} \beta_j} \rho\left(X_N\right).$$

Fontos még megemlíteni, hogy a béta-módszer nem minden esetben számolható, például ha nincs aggregált kockázat, akkor minden béta nulla, tehát nem alkalmazható a fenti formula.

### *Növekményi módszer*

A NÖVEKMÉNYI MÓDSZER (például *Jorion* [2007]) az egyéni „kockázatnövekmények” arányában adja meg az egyes alegységek tartalékolandó tőkéjét. Tetszőleges $X_N^\rho \in TA_N$ tőkeallokációs helyzet és $i \in N$ alegység esetén:

$$\varphi_i^N\left(X_N^\rho\right) = \frac{\rho\left(X_N\right) - \rho\left(X_{N \setminus \{i\}}\right)}{\sum_{j \in N} \left[\rho\left(X_N\right) - \rho\left(X_{N \setminus \{j\}}\right)\right]} \rho\left(X_N\right).$$

Ennél a módszernél is meg kell említenünk, hogy nem minden esetben számolható, például az egységmátrix mínusz egyszerese által meghatározott tőkeallokációs helyzetre minden $i$ alegységre $\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{i\}}) = 0$, tehát nem alkalmazható a fenti formula.

### *Költségrésmódszer*

A NÖVEKMÉNYI MÓDSZER kis módosításával kapjuk a KÖLTSÉGRÉSMÓDSZERT (*cost gap;* bővebben lásd *Homburg–Scherpereel* [2008]). Először is minden $i \in N$ alegységre definiáljuk annak legkisebb költségrését ($\gamma_i$) a következőképpen:

$$\gamma_i = \min_{S \subseteq N,\ i \in S} \left| \rho\left(X_S\right) - \sum_{j \in S} \left[\rho\left(X_N\right) - \rho\left(X_{N \setminus \{j\}}\right)\right] \right|.$$

A minimum utáni kifejezés az $S$ koalíció költségrése, ami azt mutatja meg, hogy a koalíció tagjainak egyéni növekménye mennyire tér el a koalíció kockázatától, vagyis mennyi a koalíció fel nem osztott kockázata (költsége). Ha a NÖVEKMÉNYI MÓDSZERT úgy módosítjuk, hogy a fel nem osztott kockázatot minden játékos költségrésének arányában osztjuk fel, akkor mindenki ahhoz a koalícióhoz fog húzni, amiben a legkisebb a fel nem osztott kockázata. Tetszőleges $X_N^\rho \in TA_N$ tőkeallokációs helyzet és $i \in N$ alegység esetén formálisan a KÖLTSÉGRÉSZMÓDSZER definíciója a következő:

Ha $\sum_{j\in N}\gamma_j = 0$, akkor

$$\varphi_i^{CG}\left(X_N^\rho\right)=\rho\left(X_N\right)-\rho\left(X_{N\setminus\{i\}}\right),$$

egyébként

$$\varphi_i^{CG}\left(X_N^\rho\right)=\rho\left(X_N\right)-\rho\left(X_{N\setminus\{i\}}\right)+$$

$$+\frac{\gamma_i}{\sum_{j\in N}\gamma_j}\left\{\rho\left(X_N\right)-\sum_{j\in N}\left[\rho\left(X_N\right)-\rho\left(X_{N\setminus\{j\}}\right)\right]\right\}.$$

Tehát amennyiben a kockázatnövekmények összege kiadja a teljes kockázatot, $\sum_{j\in N}\left[\rho\left(X_N\right)-\rho\left(X_{N\setminus\{j\}}\right)\right]=\rho\left(X_N\right)$, akkor a KÖLTSÉGRÉS- és a NÖVEKMÉNYI MÓDSZER megegyezik. Egyébként pedig a legkisebb költségrés arányában osztjuk fel a fel nem osztott kockázatot.

## *Euler-módszer*

AZ EULER-MÓDSZERREL (gradiens módszer)[1] a következőképpen kaphatjuk meg az egyes alegységek tartalékolandó tőkéjét: tetszőleges $X_N^\rho \in TA_N$ tőkeallokációs helyzet és $i \in N$ alegység esetén:

$$\varphi_i^{E}\left(X_N^\rho\right)=\rho'\left(X_N,X_i\right),$$

ahol $\rho'\left(X_N,X_i\right)$ a $\rho(X_N)$ kockázat $X_i$ szerinti iránymenti deriváltja.

Leegyszerűsítve, az EULER-MÓDSZER azt mutatja meg, hogyan változik a pénzügyi egység kockázata, ha még egy $X_i$ alegységet hozzáadunk. Az EULER-MÓDSZER arra utal, hogy ugyanazt kapjuk, ha minden világállapotra összegezzük azt, hogy egységnyivel növeljük $X_N$ értékét, kiszámítjuk a kockázat változását, és beszorozzuk $X_i$ megfelelő értékével.

## *Shapley-módszer*

A SHAPLEY-MÓDSZER (*Shapley* [1953]) a következőképpen adja meg az egyes alegységek tartalékolandó tőkéjét: tetszőleges $X_N^\rho \in TA_N$ tőkeallokációs helyzet és $i \in N$ alegység esetén:

$$\varphi_i^{Sh}\left(X_N^\rho\right)=\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{|S|!\left(|N|-|S|-1\right)!}{|N|!}\left[\rho\left(X_{S\cup\{i\}}\right)-\rho\left(X_S\right)\right],$$

ahol $|S|$ az $S$ elemeinek számát jelöli. A SHAPLEY-MÓDSZER tulajdonságairól magyarul lásd például *Pintér* [2007], [2009].

[1] Az Euler-módszer esetén (például *Buch–Dorfleitner* [2008]) a pénzügyi egység az alegységek súlyozott (például nagyság) összege. Ebben a cikkben a pénzügyi egység az alegységek összege, és a használt kockázati mértékek első fokon pozitív homogének, így az Euler-módszert is ennek megfelelően definiáljuk.

*Nukleolusz-módszer*

A NUKLEOLUSZ-MÓDSZER (*Schmeidler* [1969]) a következőképpen adja meg az egyes alegységek tartalékolandó tőkéjét: tetszőleges $X_N^\rho \in TA_N$ tőkeallokációs helyzet és $i \in N$ alegység esetén:

$$\varphi_i^{Nc}\left(X_N^\rho\right)=\left\{x \in I\left(X_N^\rho\right): E(x) \geq_{\text{lex}} E(y) \text{ minden } y \in I\left(X_N^\rho\right)\right\},$$

ahol $I\left(X_N^\rho\right)=\left\{x \in \mathbb{R}^N: \sum_{j \in N} x_j=\rho\left(X_N\right) \text{ és minden } j \in N: x_j \leq \rho\left(X_j\right)\right\}$, $E(x)=\left[\cdots \geq \rho\left(X_S\right)-\sum_{i \in S} x_i \geq \cdots\right]_{S \subset N}$, *és* $\geq_{\text{lex}}$ a lexikografikus rendezést jelöli. A NUKLEOLUSZ-MÓDSZER tulajdonságairól lásd például *Forgó és szerzőtársai* [2006].

Ezt a fejezetet a 1. PÉLDA folytatásával zárjuk.

2. PÉLDA (az 1. PÉLDA folytatása). A *2. táblázatban* láthatók a tárgyalt hét tőkeallokációs módszerrel kapott megoldások az 1. PÉLDÁBAN bemutatott tőkeallokációs helyzetre.

*2. táblázat*

Az 1. PÉLDA megoldása a különböző módszerek szerint

| Módszer | 1. alegység | 2. alegység | 3. alegység |
|---|---|---|---|
| EGYÉNI KOCKÁZATTAL ARÁNYOS | 8,9167 | 8,9167 | 89,1667 |
| BÉTA | –8,7390 | –8,2969 | 124,0359 |
| NÖVEKMÉNYI | 2,3516 | 2,3516 | 102,2967 |
| KÖLTSÉGRÉS | 6,4138 | 6,4138 | 94,1724 |
| EULER | 3 | 4 | 100 |
| SHAPLEY | 6,5 | 6,5 | 94 |
| NUKLEOLUSZ | 6 | 6 | 95 |

A példában a BÉTA-MÓDSZER esetében a béták rendre –0,0817, –0,0775 és 1,1592, míg a KÖLTSÉGRÉSMÓDSZERNÉL a gammák 8, 8 és 13 értéket vettek fel. Az EULER-MÓDSZER esetén könnyen látható, hogy teszőleges $i \in N$-re az $X_i$ iránymenti derivált megegyezik $X_i$ azon világállapotbeli értékének ellentettjével, ahol $X_N$-nek maximális a vesztesége.

## A különböző tőkeallokációs módszerek tulajdonságai

Ebben a fejezetben ismertetjük az analitikus és a szimulációs eredményeinket. Fontos, hogy általános koherens kockázati mértékekkel dolgozunk, tehát bármely koherens kockázati mértékre nézzük a tulajdonságok teljesülését, illetve nem teljesülését.

*Analitikus eredmények*

A *3. táblázatban* összefoglaltuk analitikus eredményeinket. A táblázat értelmezése a következő: a $\surd$ jel azt jelöli, hogy az adott sorbeli módszer rendelkezik az adott oszlopbeli tulajdonsággal. Mielőtt részletesen górcső alá vesszük a *3. táblázatot,* egy általános észrevételt teszünk. *Csóka–Pintér* [2010] eredményéből (lásd 1. TÉTEL) következik, hogy egyik módszer sem rendelkezik minden tulajdonsággal.

*3. táblázat*
A vizsgált módszerek tulajdonságai

| Módszer | SZIMMETRIKUS | ÖSZTÖNZŐ | STABIL |
|---|---|---|---|
| | axióma | | |
| EGYÉNI KOCKÁZATTAL ARÁNYOS | √ | ∅ | ∅ |
| BÉTA | √ | ∅ | ∅ |
| NÖVEKMÉNYI | √ | ∅ | ∅ |
| KÖLTSÉGRÉS | √ | ∅ | ∅ |
| EULER | ∅ | ∅ | ∅ |
| SHAPLEY | √ | √ | ∅ |
| NUKLEOLUSZ | √ | ∅ | √ |

Lássuk a részletes eredményeket! Az EGYÉNI KOCKÁZATTAL ARÁNYOS MÓDSZER definíciójából következően SZIMMETRIKUS, és megelőlegezve szimulációs eredményeinket, nem STABIL. Az ÖSZTÖNZŐ tulajdonságra tekintsük a következő példát!

3. PÉLDA. *Vegyük az $X_N^\rho$ és $Y_N^\rho$ tőkeallokációs helyzeteket, ahol mindkét esetben az $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ valószínűségi mezőben $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{M}$ az $\Omega$ összes részhalmaza és $P$ olyan, hogy $P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = 1/2$, két alegységünk van, $N = \{1, 2\}$, és és az alkalmazott kockázati mérték $\rho$ az* 50 *százalékos várható veszteség* (*ES*) *kockázati mérték (újra a maximális veszteség). Az $X_i$* és *$Y_i$ vektorok, valamint összegeik a* 4. táblázatban *láthatók.*

*4. táblázat*
Az $X_N^\rho$ és $Y_N^\rho$ tőkeallokációs helyzetek

| $\Omega/X_S$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_{\{1,2\}}$ | $\Omega/Y_S$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_{\{1,2\}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | 0 | –11 | –11 | $\omega_1$ | 0 | –20 | –20 |
| $\omega_2$ | –11 | 0 | –10 | $\omega_2$ | –9 | 0 | –9 |
| $p(X_S)$ | 10 | 11 | 11 | $p(Y_S)$ | 9 | 20 | 20 |

Ekkor $\rho(X_1) = 10 \geq 9 = \rho(Y_1)$ és $\rho(X_N) - \rho(X_2) = 0 \geq 0 = \rho(Y_N) - \rho(Y_2)$, de $\varphi_1^{AB}\left(X_N^\rho\right) = \frac{10}{21}11 < \frac{9}{29}20 = \varphi_1^{AB}\left(Y_N^\rho\right)$, tehát az egyéni kockázattal arányos módszer nem rendelkezik az ösztönző tulajdonsággal.

A BÉTA-MÓDSZER esetében is könnyen látható, hogy a SZIMMETRIKUS tulajdonságot teljesíti, és a szimulációs eredményekből is látható, hogy nem STABIL. Az ÖSZTÖNZŐ tulajdonság vizsgálatára tekintsük a következő példát!

4. PÉLDA. *Tekintsük a* 3. PÉLDÁBAN *vett tőkeallokációs helyzeteket! Ekkor $\rho(X_1) = 10 \geq 9 = \rho(Y_1)$ és $\rho(X_N) - \rho(X_2) = 0 \geq 0 = \rho(Y_N) - \rho(Y_2)$, de $\varphi_1^{B}\left(X_N^\rho\right) = -110 < -9 = \varphi_1^{B}\left(Y_N^\rho\right)$, tehát a* BÉTA-MÓDSZER *nem rendelkezik az* ÖSZTÖNZŐ *tulajdonsággal.*

A NÖVEKMÉNYI MÓDSZER esetében szintén a formulából közvetlenül látható a SZIMMETRIKUS tulajdonság, illetve szimulációs eredmények is mutatják, hogy nem rendelkezik a STABIL tulajdonsággal. Az ÖSZTÖNZŐ tulajdonságot a következő példán keresztül vizsgáljuk.

5. PÉLDA. *Vegyük az* $X_N^\rho$ *és* $Y_N^\rho$ *tőkeallokációs helyzeteket, ahol mindkét esetben az* $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ *valószínűségi mezőben* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{M}$ *az* $\Omega$ *összes részhalmaza, és P olyan, hogy* $P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = 1/2$, *két alegységünk van,* $N = \{1, 2\}$, *és az alkalmazott kockázati mérték* $\rho$ *az* 50 *százalékos várható veszteség* (*ES*) *kockázati mérték (újra a maximális veszteség). Az* $X_i$ és $Y_i$ *vektorok, valamint összegeik az* 5. táblázatban *láthatók.*

*5. táblázat*

Az $X_N^\rho$ és $Y_N^\rho$ tőkeallokációs helyzetek

| $\Omega/X_S$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_{\{1,2\}}$ | $\Omega/Y_S$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_{\{1,2\}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | –2 | –9 | –11 | $\omega_1$ | –2 | –7 | –9 |
| $\omega_2$ | –9 | 0 | –9 | $\omega_2$ | –9 | 0 | –9 |
| $p(X_S)$ | 9 | 9 | 11 | $p(Y_S)$ | 9 | 7 | 9 |

Ekkor $\rho(X_1) = 9 = \rho(Y_1)$ és $\rho(X_N) - \rho(X_2) = 2 = \rho(Y_N) - \rho(Y_2)$, de $\varphi_1^N\left(X_N^\rho\right) = \frac{11}{2} < 9 \quad \varphi_1 \quad Y^\rho$ $= \varphi_1^N\left(Y_N^\rho\right)$, tehát az NÖVEKMÉNYI MÓDSZER nem rendelkezik az ÖSZTÖNZŐ tulajdonsággal.

A KÖLTSÉGRÉSMÓDSZER nagyon hasonlít a NÖVEKMÉNYI MÓDSZERHEZ, és ebben az esetben szintén a formulából közvetlenül látható a SZIMMETRIKUS tulajdonság, illetve szimulációs eredmények is mutatják, hogy nem rendelkezik a STABIL tulajdonsággal. Az ÖSZTÖNZŐ tulajdonságot a következő példán keresztül vizsgáljuk.

6. PÉLDA. *Tekintsük az* 5. PÉLDÁBAN *vett tőkeallokációs helyzeteket! Ekkor* $\rho(X_1) = 9 = \rho(Y_1)$ *és* $\rho(X_N) - \rho(X_2) = 2 = \rho(Y_N) - \rho(Y_2)$, *de* $\varphi_1^{CG}\left(X_N^\rho\right) = \frac{11}{2} > 2 + \frac{7}{12} = \varphi_1^{CG}\left(Y_N^\rho\right)$, *tehát a* KÖLTSÉGRÉSMÓDSZER *nem rendelkezik az* ÖSZTÖNZŐ *tulajdonsággal.*

Az EULER-MÓDSZER tekintetében *Buch–Dorfleitner* [2008] megmutatta, hogy folytonosan parciálisan differenciálható koherens kockázati mérték alkalmazása esetén az EULER-MÓDSZER STABIL, de nem SZIMMETRIKUS (szintén lásd az 1. PÉLDÁT a szimmetria sérülésére). Általában azonban az EULER-MÓDSZER egyik tulajdonságot sem elégíti ki, ahogy azt a következő példa mutatja.

7. PÉLDA. *Tekintsük az* 5. példában *vett tőkeallokációs helyzeteket! Ekkor* $\rho(X_1) = 9 = \rho(Y_1)$ *és* $\rho(X_N) - \rho(X_2) = 2 = \rho(Y_N) - \rho(Y_2)$, *de* $\varphi_1^E\left(X_N^\rho\right) = 2 < 9 = \varphi_1^E\left(Y_N^\rho\right)$, *sőt* $\varphi_2^E\left(Y_N^\rho\right) = 7$, *azaz* $\varphi_1^E\left(Y_N^\rho\right) + \varphi_2^E\left(Y_N^\rho\right) = 16 > 9 = \rho\left(Y_N\right)$ *tehát az* EULER-MÓDSZER *nem rendelkezik sem a* SZIMMETRIKUS, *sem az* ÖSZTÖNZŐ, *sem a* STABIL *tulajdonsággal. Ez utóbbinak az az oka, hogy példánkban a vizsgált pontban nem áll fenn a folytonosan parciális differenciálhatóság (azért, mert* $Y_{\{1,2\}}$ *értéke mindkét világállapotra* 9, *nincs aggregált kockázat).*

A SHAPLEY-MÓDSZER tulajdonságaira lásd *Csóka–Pintér* [2010]-t. A NUKLEOLUSZ-MÓDSZERRE lásd *Forgó és szerzőtársai* [2006]-t, valamint *Young* [1985] 69. oldalán található egy ellenpélda, amelyben a NUKLEOLUSZ-MÓDSZER nem teljesíti az ÖSZTÖNZŐ tulajdonságot.

Összességében elmondhatjuk, hogy a két játékelméleti módszer, a SHAPLEY- és a NUKLEOLUSZ-MÓDSZER teljesít a legjobban, mindkét módszer két tulajdonságot teljesít a három közül.

*Szimulációs eredmények*

A korábban tárgyalt axiómák közül van, amelyiknek elvi jelentősége van, és van, amelyik azonban inkább gyakorlati szempontból lényeges. A SZIMMETRIKUS tulajdonság elvi jelentőségű, ha egy módszer nem szimmetrikus, akkor mondhatjuk, hogy az nem méltányos. A másik két tulajdonság azonban „csak" gyakorlati jelentőségű, ezeknél érdemes vizsgálni, hogy milyen gyakran sértik a különböző módszerek az adott tulajdonságokat. Ebben a cikkben a STABIL tulajdonság kérdésére összpontosítunk, az ÖSZTÖNZŐ tulajdonság vizsgálatára egy későbbi cikkünkben kívánunk visszatérni. A STABIL tulajdonság sérülésének fontosságára szimulációs módszerrel kísérelünk meg választ adni.

A szimuláció során előbb egy három, majd egy négy alegységből (például üzletágból) álló pénzügyi egység (például bank) hozamait modelleztük. A hozamsorokat véletlen korrelációs mátrixok segítségével állítottuk elő. Első megközelítésként normális, majd *t*-eloszlást használtunk. A *t*-eloszlásra azért volt szükség, mert a legtöbb pénzügyi eszköz hozamának eloszlása nem normális: a kiugróan magas és alacsony hozamok ugyanis gyakrabban fordulnak elő, mint ami a normális eloszlásból következik – vagyis a valós hozamok eloszlásának szélei vastagabbak, mint a normális eloszlásé (*Cont* [2001]). Ezt nevezik a vastag szélek stilizált tényének, amelyet már *Mandelbrot* [1963] is megfigyelt a gyapotárakat vizsgálva.

A *t*-eloszlás paramétere, a szabadságfok (jele a továbbiakban: $\nu$) tekinthető a vastagszélűség „fokszámának" is: az eloszlás a széleken ugyanis $\nu$ kitevővel esik. A szimuláció során különböző szabadságfokú *t*-eloszlásokat is vizsgáltunk (az alegységek lineárisan függetlenek). Mivel a normálistól jelentősen eltérő eloszlásokra az eredmények nem mutattak túlzott eltérést, így a szimulációs eredmények közlésénél csak a $\nu = 5$ szabadságfokú eloszlást használjuk, amely már igencsak vastag széleket jelent (a szabadságfok növelésével a *t*-eloszlás a normális eloszláshoz tart, vagyis minél kisebb a szabadságfok, annál vastagabb az eloszlás széle).

A hozamsorok generálásához előbb korrelációs mátrixokat (pontosabban előbb Cholesky-mátrixokat), valamint az egyes eszközök szórásait állítottuk elő. A korrelációs mátrixokhoz egy (–1, 1) intervallumon egyenletes eloszlású elemeket tartalmazó alsó háromszög mátrixot generáltunk, amelynek vettük az önmaga transzponáltjával vett szorzatát, és normáltuk, így állítva elő egy korrelációs mátrixot. A szórásokat a (0, 1) intervallumon egyenletes eloszlásból generáltuk. Ezután három, illetve négy egyváltozós normális, illetve *t*-eloszlású független, 1000 elemből álló hozamsort generáltunk, majd az így kapott ($1000 \times 3$, illetve $1000 \times 4$ méretű) mátrixot megszorozva a Cholesky-mátrixszal és a szórásokkal, végül többváltozós normális, illetve *t*-eloszlású idősorokat kaptunk. Vizsgálatunk során 10 000 darab Cholesky-mátrixot, és ezek mindegyikéhez egy-egy 1000 elemű véletlen hozamsort generáltunk, majd azt vizsgáltuk, hogy az általunk tárgyalt módszerek közül melyik hány százalékban képes úgy felosztani a kockázatot, hogy az eredmény teljesítse a STABIL tulajdonságot.

Az ismétlésszámot úgy választottuk meg, hogy az elég nagy legyen ahhoz, hogy stabil eredményt adjon – ugyanakkor a számításokhoz szükséges időt is figyelembe kellett vennünk. Az 1000 elemű hozamsor generálását pedig azért tartottuk megfelelőnek, mert ez négy év hozamadatának felel meg (egy évben 250 kereskedési nappal számolva), ami már elegendő a kockázat viszonylag pontos becsléséhez.

A célunk – hasonlóan *Homburg–Scherpereel* [2008] vizsgálatához – annak meghatározása volt, hogy a vizsgált módszerek az esetek hány százalékában eredményeztek STABIL tőkeallokációt. *Homburg–Scherpereel* [2008]-rel ellentétben azonban kockázati mértéknek nem a kockáztatott értéket *(Value at Risk),* hanem a koherens kockázati mértékek csoportjába tartozó várható veszteség *(expected shortfall, ES)* kockázati mértéket használtuk, nem csak normális eloszlású hozamokkal dolgoztunk és több módszert vizsgáltunk meg. A *6. táblázat* három játékos mellett tartalmazza az eredményeinket. Világos, hogy egy módszer annál jobban teljesít, minél közelebb van 100 százalékhoz a STABIL tőkeallokációt eredményező kimenetelek aránya. A szimulációt 95 és 99 százalékos szignifikanciaszintek mellett is lefuttattuk, de mivel nem volt számottevő eltérés az eredményekben, a *6. táblázatban* csak 99 százalékra közöljük az eredményeket.

*6. táblázat*
A vizsgált módszerek stabilitása három alegység esetén (százalék)

| Módszer | Normális | Student-*t* |
|---|---|---|
| EGYÉNI KOCKÁZATTAL ARÁNYOS | 40,26 | 39,86 |
| BÉTA | 70,44 | 58,89 |
| NÖVEKMÉNYI | 23,19 | 22,07 |
| KÖLTSÉGRÉS | 99,77 | 99,27 |
| EULER | 100,00 | 100,00 |
| SHAPLEY | 67,01 | 64,65 |
| NUKLEOLUSZ | 100,00 | 100,00 |

Ahogyan a *6. táblázat* is mutatja, a KÖLTSÉGRÉS-, az EULER- és a NUKLEOLUSZ-MÓDSZER a másik négynél sokkal jobb teljesítményt mutatott a várható veszteség (*ES*) kockázatmérték mellett. A NÖVEKMÉNYI és az EGYÉNI kockázattal arányos módszerek kifejezetten gyengén teljesítettek, de a BÉTA- és a SHAPLEY-MÓDSZER teljesítménye is csak 60 százalék körül mozgott normális és *t*-eloszlású hozamok mellett. Azt gondoljuk, hogy a gyakorlati alkalmazásokban ez is igen szerény eredmény lenne.

A szimuláció eredményét négy játékos mellett a *7. táblázat* tartalmazza.

*7. táblázat*
A vizsgált módszerek stabilitása négy alegység esetén (százalék)

| Módszer | Normális | Student-*t* |
|---|---|---|
| EGYÉNI KOCKÁZATTAL ARÁNYOS | 18,12 | 18,77 |
| BÉTA | 59,86 | 46,72 |
| NÖVEKMÉNYI | 8,95 | 7,95 |
| KÖLTSÉGRÉS | 97,79 | 96,50 |
| EULER | 100,00 | 100,00 |
| SHAPLEY | 47,38 | 45,30 |
| NUKLEOLUSZ | 100,00 | 100,00 |

Összehasonlítva a három és négy játékos mellett kapott eredményeinket, megállapíthatjuk, hogy a STABIL tőkeallokációk aránya csökkent a játékosok számának növelésével. Kivétel természetesen az EULER- és a NUKLEOLUSZ-MÓDSZER, amelyek továbbra is minden esetben STABIL tőkeallokációt eredményeztek. Szintén jól szerepelt a KÖLTSÉGRÉSMÓDSZER, amelynek teljesítménye csak igen kis mértékben (nagyjából 3 százalékponttal) romlott a három játékosnál tapasztalthoz képest, miközben a többi módszer teljesítménye legalább 14 százalékponttal gyengült. A négy játékosra futtatott szimuláció megerősítette tehát, hogy ha gyakorlati alkalmazásra alkalmas módszert keresünk a STABIL tulajdonságot előtérbe helyezve, akkor mindössze három lehetséges módszer marad: a KÖLTSÉGRÉS, a NUKLEOLUSZ- és (megfelelő feltételek esetén) az EULER-MÓDSZER.

Amennyiben azonban nem elsősorban a stabilitásra koncentrálva szeretnénk választani, akkor is igen kevés a releváns lehetőség. Az elméleti eredményeknél a *3. táblázatban* látható, hogy csak két olyan módszer létezik, amely több mint egyet teljesít a három megkövetelhető tulajdonságból, mégpegig a Shapley- és a Nukleolusz-módszer. Mivel a Shapley-módszer az egyetlen olyan módszer, amely pontosan osztja szét a pénzügyi egység által tartalékolandó tőkét annak alegységei között (hatékony), valamint rendelkezik a szimmetrikus és az ösztönző tulajdonságokkal, ezért a Shapley-módszer stabilitásának alacsony aránya azt mutatja, hogy a gyakorlatban tapasztalható hozameloszlásokra valamelyik tulajdonságról szükségszerűen le kell mondanunk.

## *Hivatkozások*

Acerbi, C.–Scandolo, G. [2008]: Liquidity Risk Theory and Coherent Measures of Risk. Quantitative Finance, 8. 681–692. o.

Acerbi, C.–Tasche, D. [2002]: On the Coherence of Expected Shortfall. Journal of Banking and Finance, 26. 1487–1504. o.

Artzner, P. F.–Delbaen, F.–Eber, J. M.–Heath, D. [1999]: Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance, 9. 203–228. o.

Balog Dóra–Csóka Péter–Pintér Miklós [2010]: Tőkeallokáció nem likvid portfóliók esetén. Hitelintézeti Szemle, 9. sz. 604–616. o.

Buch, A.–Dorfleitner, G. [2008]: Coherent risk measures, coherent capital allocation and the gradient allocation principle. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 42. No. 1. 235–242. o.

Cont, R. [2001]: Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues. Quantitative Finance, 1. 223–236. o.

Csóka Péter–Herings, P. J. J.–Kóczy Á. László [2007]: Coherent measures of risk from a general equilibrium perspective. Journal of Banking and Finance, Vol. 31. No. 8. 2517–2534. o.

Csóka Péter–Herings, P. J. J.–Kóczy Á. László [2009]: Stable allocations of risk. Games and Economic Behavior, Vol. 67. No. 1. 266–276. o.

Csóka Péter–Pintér Miklós [2010]: On the impossibility of fair risk allocation. Munich RePEc Personal Archive, ID: 26515.

Denault, M. [2001]: Coherent Allocation of Risk Capital. Journal of Risk, Vol. 4. No. 1. 1–34. o.

Forgó Ferenc–Pintér Miklós–Simonovits András–Solymosi Tamás [2006]: Kooperatív játékelmélet. Elektronikus jegyzet, http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/buraip/solymosi_jatekelmelet.pdf.

Gillies, D. B. [1959]: Solutions to General Non-Zero-Sum Games. Contributions to the Theory of Games IV. Princeton University Press.

Hamlen, S. S.–Hamlen, W. A.–Tschirthart, J. T. [1977]: The Use of Core Theory in Evaluating Joint Cost Allocation Games. The Accounting Review, 52. 616–627.o.

Homburg, C.–Scherpereel, P. [2008]: How Should the Joint Capital be Allocated for Performance Measurement? European Journal of Operational Research, Vol. 187. No. 1. 208–217. o.

Jorion, P. [2007]: Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. McGraw-Hill, New York.

Kalkbrener, M. [2005]: An axiomatic Approach to Capital Allocation. Mathematical Finance, Vol. 15. No. 3. 425–437. o.

Kim, J. H. T.–Hardy, M. R. [2009] A Capital Allocation Based on a Solvency Exchange Option. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 44. No. 3. 357–366. o.

Krokhmala, P.–Zabarankin, M.–Uryasev, S. [2011]: Modeling and optimization of risk. Surveys in Operations Research and Management Science, Vol. 16. No. 2. 49–66. o.

Mandelbrot, B. [1963]: The Variation of Certain Speculative Prices. The Journal of Business, 36. 394–419. o.

Pintér Miklós [2007]: Regressziós játékok. Szigma, 38. 31–147. o.

Pintér Miklós [2009]: A Shapley-érték axiomatizálásai. Alkalmazott Matematikai Lapok, 26. 289–315. o.

Schmeidler, D. [1969]: The Nucleolus of a Characteristic Function Game. SIAM. Journal on Applied Mathematics, 17. 1163–1170.

Shapley, L. S. [1953]: A Value for *n*-person Games. Megjelent*: Kuhn, H. W.–Tucker, A. W.* (szerk.): Contributions to the theory of games II. Annals of Mathematics Studies, 28. Princeton University Press, Princeton, 307–317. o.

Tasche, D. [2008]: Capital Allocation To Business Units and Sub-Portfolios: The Euler Principle. http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0708/0708.2542v3.pdf.

Valdez, E. A.–Chernih, A. [2003]: Wang's Capital Allocation Formula for Elliptically Contoured Distributions. Insurance: Mathematics and Economics, 33. 517–532. o.

Young, H. P. [1985]: Monotonic Solutions of Cooperative Games. International Journal of Game Theory, Vol. 14. No. 2. 65–72. o.