A CAPM háromidőszakos kiterjesztése

Habis Helga és Perge Laura *

2019. szeptember 9.

Kivonat

Jelen tanulmányban megmutatjuk, hogy a tőkepiaci eszközök árazási modellje (CAPM) levezethető egy háromidőszakos általános egyensúlyelméleti modellből is, ami felveti a CAPM hosszútávú alkalmazhatóságát is. Bebizonyítjuk továbbá, hogy a modellünk Pareto hatékony megoldást eredményez.

Keywords: general equilibrium, CAPM, intertemporal choice, Pareto efficiency

JEL Classification: D53, G12

1. Bevezetés

A tőkepiaci eszközök árazási modellje - amelyre szinte mindig CAPM-ként hivatkozik az irodalom -, pontos becslést ad egy adott eszköz kockázata és várható hozama közti kapcsolatmegfigyelésére. A tőkepiaci eszközök árazási modellje tulajdonképpen becslések összessége a kockázatos eszközök egyensúlyi várható hozamának vonatkozásában.

A CAPM egyenlet levezthető egy kétidőszakos általános egyensúlyelméleti modellből is, ami megnyugtató elméleti megalapozottságot nyújt a modern protfóliókezelés alapvető eszközéül szolgáló hozam-béta kapcsolathoz.

Jelen tanulmányunkban a fogyasztási alapú eszközárazás modelljének három időszakos kiterjesztését vizsgáljuk. Ennek a kiterjesztésnek számos területen lehetnek rendkívül jelentős alaklmazásai. A minimum három időszak elengedhetetlen például a hosszúlejáratú pénzügyi eszközök modellben való kezeléséhez, illetve az időinkonzisztens viselkedés

*Budapesti Corvinus Egyetem. E-mail: helga.habis@uni-corvinus.hu és laura.perge@gmail.com. A szerzők köszönik az NKFI támogatását (FK 125126).

beépítéséhez is. Bemutatunk egy háromidőszakos, egy termékes, intertemporális általános egyensúlyelméleti modellt, a pénzügyekből már jól ismert CAPM árazási képlet CCAPM változatát. Bebizonyítjuk, hogy a fogyasztásalapú CAPM árazási formulája levezethető az általunk felvázolt háromidőszakos modellből is, amelyre a szakirodalomban még nincsen példa.

A modellünk alapjául szolgáló kétidőszakos, már ismert árazási formulákat jól leírja például LeRoy (2001) könyve, melyre a tanulmányban több ponton építünk. Az általámos egyensúlyelméleti megközelítés lehetőséget nyújt a piacok hatékonyságának vizsgálatára is.

Tanulmányunk második fő eredménye, hogy a jóléti közgazdaságtan első tétele a háromidőszakos modellünkben is teljesül.

2. Az intertemporális pénzügyi-gazdasági modell felépítése

A könnyebb áttekinthetőség, rendszerezettség és az egyértelműsítés okán jelen fejezetben összefoglaljuk a használt fogalmak tanulmánybeli értelmezését, ismertetjük a főbb definíciókat, feltevéseket, melyek szükségesek a modell működéséhez. Ezen struktúra létrehozásában elsősorban Habis (2011) cikkére támaszkodunk.

Tekintsünk egy háromidőszakos modellt, ahol a periódusokat $t \in \{0, 1, 2\} = T$ jelöli. Minden $t > 0$ időszakban egy esemény a véges sok közül teljesül. Minden $s \in \mathcal{S}$ állapotban megvalósuló eseményt t periódusban $s_t \in \mathcal{S}_t$-vel jelöljük, ahol az $\mathcal{S}_t$ számossága S_t és $\mathcal{S} = \bigcup_t \mathcal{S}_t$ minden $t \in T$ esetén. $t = 0$-ban definiáljuk ezt $s_0 = 0$-val. Fejezzük ki s_t^+-szal az s_t „utódait", azaz az s_t-t követő állapotokat minden $t = 0, 1$-re, és s_t^- -val az s_t „elődeit" (s_t-t megelőző állapotokat) minden $t = 1, 2$ esetén. Minden periódusban van egyetlen, nem tartós fogyasztási jószág.

A neoklasszikus közgazdaságtan feltevéseinek megfelelően racionális, azaz a haszonmaximalizáló (önérdekkövető) viselkedést feltételezünk. A racionális fogyasztók tökéletesen előrelátnak (*perfect foresight*), melynek lényege, hogy döntéshozataluk időpontjában meglevő tudásuk elégséges ahhoz, hogy optimális döntést hozzanak. A gazdaságban véges számú $h \in H$ racionális fogyasztó van jelen. Minden $h \in H$ alany rendelkezik $(e^h_{s_t})_{s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_1} \in \mathbb{R}^{(S_1+S_2+1)}$ induló készlettel, és preferenciákkal a $c^h_{s_t} \in \mathbb{R}^{(S_1+S_2+1)}$ fogyasztási kosarakra, ahol $s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_1$.

Minden szereplő preferenciáját egy Neumann-Morgenstern hasznossági függvény reprezentálja, amely az idő függvényében elkülöníthető részekre bontható. A 0. időszaki hasznossági függvény a racionális fogyasztó esetében

$$u^h(c^h) = v_0^h(c_0^h) + \delta_1 \sum_{s_1 \in \mathcal{S}_1} \rho_{s_1} v_{s_1}^h(c_{s_1}^h) + \delta_1\delta_2 \sum_{s_1 \in \mathcal{S}_1} \rho_{s_1} \sum_{s_2 \in s_1^+} \rho_{s_2} v_{s_2}^h(c_{s_2}^h) \tag{2.1}$$

ahol ρ_{s_1} jelöli az s_1 esemény bekövetkezésének objektív valószínűségét, ρ_{s_2} pedig s_2 előfordulásának feltételes valószínűsége, és feltétele, hogy s_1 bekövetkezett. δ_t egy egyidőszakos diszkontfaktor és v_t^h egy Bernoulli hasznossági függvény.
A dolgozat során végig elfogadjuk az alábbi feltevést:

2.1. Feltétel. Feltételezzük, hogy $\rho_{s_t} > 0$ minden $s_t \in \mathcal{S}_t$ esetén, és $\sum_{s_1 \in \mathcal{S}_1} \rho_{s_1} = 1$, $\sum_{s_2 \in \mathcal{S}_2} \rho_{s_2} = 1$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, a valószínűségek és a diszkontfaktorok megegyeznek a szereplők között, és a Bernoulli hasznossági függvény szigorúan növő. Továbbá $c^h \in X^h$ ahol $X^h \subset \mathbb{R}^{1+S_1+S_2}$.

Jelöljük J_{s_t}-vel a pénzügyi eszközöket minden egyes $s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1$ esetén. Adott s_t állapotban létező eszközök összessége legyen $\mathcal{J}_{s_t}$. Minden j eszköz $d_{s_{t+1},j}$ (véletlenszerű) osztalékokat fizet ki $s_{t+1} \in s_t^+$ világállapot bekövetkezésekor. Az osztalékok vektora $d_{s_t} = (d_{s_t,1}, \ldots, d_{s_t,J_{s_t^-}})$ ahol $s_t \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, és a kifizetési mátrixok $A_{s_t} = (d_1, \ldots, d_{J_{s_t}}) \in \mathbb{R}^{|s_t^+| \times J_{s_t}}$ ahol $s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1$. A j eszköz ára $s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1$ világállapot végbemenésekor $q_{s_t,j} \in \mathbb{R}$. Az eszközárak vektorát $q_{s_t} = (q_{s_t,1}, \ldots, q_{s_t,J_{s_t}})$ jelzi, és az árak összessége az állapotok során $q = (q_{s_t})_{s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1}$. Feltételezzük, hogy az eszközök piacán a nettó túlkínálat nulla. Minden $s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1$ világállapotban h szereplő $\theta_{s_t}^h = (\theta_{s_t,1}^h, \theta_{s_t,2}^h, \ldots, \theta_{s_t,J_{s_t}}^h) \in \mathbb{R}^{J_{s_t}}$ portfóliót tart.

Az $\mathcal{E} = ((u^h, e^h)_{h=1,\ldots,H}; (A_{s_t})_{s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1})$ pénzügyi gazdaság az alanyok hasznossági függvényei és készletei, valamint a kifizetési mátrixok által definiált.

2.2. Definíció. A *tökéletes versenyzői egyensúly* egy $\mathcal{E}$ gazdaság portfólió állománya $\theta^* = (\theta^{1*}, \theta^{2*}, \ldots, \theta^{H*}) \in \mathbb{R}^{H \times J \times (S_1+1)}$, fogyasztásai $c^* = (c^{1*}, c^{2*}, \ldots, c^{H*}) \in \mathbb{R}^{H \times (S_1+S_2+1)}$ és $\forall s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1$ esetre J_{s_t} eszközei, és az ezekhez tartozó eszközárak $q_{s_t} = (q_{s_t,1}, \ldots, q_{s_t,J_{s_t}})$ által meghatározott, és kielégíti az alábbi feltételeket:

1. $h = 1, 2, ..H$ fogyasztó esetén

$$(c^{h*}, \theta^{h*}) \in \arg \max_{c^h \in X^h, \theta^h \in \mathbb{R}^{J \times (S_1+1)}} u^h(c^h) \quad \text{amelyre fennáll} \tag{2.2}$$

$$c_0^h + q_0\theta_0^h = e_0^h,$$

$$c_{s_1}^h + q_{s_1}\theta_{s_1}^h = e_{s_1}^h + d_{s_1}\theta_0^h, \quad s_1 \in \mathcal{S}_1 \text{ esetén, és}$$

$$c_{s_2}^h = e_{s_2}^h + d_{s_2}\theta_{s_2^-}^h \quad s_2 \in \mathcal{S}_2 \text{ esetén },$$

2.

$$\sum_{h=1}^{H} \theta^{h*} = 0, \tag{2.3}$$

3.

$$\sum_{h=1}^{H} c^{h*} = \sum_{h=1}^{H} e^{h}. \tag{2.4}$$

Látható, hogy a harmadik feltétel mindig teljesül, ha az első és a második is.

Ha a 2.1. feltétel teljesül (azaz a szereplők szigorúan növekvő hasznossági függvényekkel rendelkeznek), az egyensúlyi árak kizárják az arbitrázs-lehetőségeket a következő definíció által meghatározott módon.

2.3. Definíció. A q eszközárak *arbitrázsmentesek* ha nincs olyan $\theta^h = (\theta^h_{s_t})_{s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1}$ amire igaz, hogy

$$q_0 \theta^h_0 \leq 0, \tag{2.5}$$

$$\forall s_t \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 : q_{s_t} \theta^h_{s_t} \leq A_{s_t^-} \theta^h_{s_t^-}, \tag{2.6}$$

ahol legalább az egyik egyenlőtlenség szigorúan teljesül.

2.4. Definíció. A piacokat *teljesnek* nevezzük, ha minden $y \in \mathbb{R}^{S_1 + S_2}$ jövedelemáramlás esetén létezik egy olyan $(\theta^h_{s_t})_{s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1}$ portfólió-terv, amely esetén

$$\forall s_1 \in \mathcal{S}_1 \ : \ d_{s_1} \theta^h_0 - q_{s_1} \theta^h_{s_1} = y_{s_1};$$

$$\forall s_2 \in \mathcal{S}_2 \ : \ d_{s_2} \theta^h_{s_2^-} = y_{s_2}.$$

Azaz, minden egyes $s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1$ világállapotra és s_t közvetlen követőiben jelentkező tetszőleges kifizetéshez létezik egy portfólió, ami generálja ezeket a kifizetéseket. Ilyen portfólió akkor és csak akkor létezik, ha A_{s_t} rangja $|s_t^+|$. [1]

2.5. Állítás. *Ha nincsen arbitrázsra lehetőség a pénzügyi piacokon, és a piacok teljesek, akkor létezik egy egyedi, szigorúan pozitív, állapotokhoz tartozó árvektor* $(\pi_{s_t})_{s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1} \in \mathbb{R}^{S_1 + 1}$ *amire igaz, hogy*

$$q_{s_t} = \pi_{s_t}^{\top} \cdot A_{s_t}. \tag{2.7}$$

Bizonyítás. Az állítás bizonyítása megtalálható (Magill, 1996) könyvében. □

Az alábbi két feltételt, valamint az őket követő jelölésmódot elfogadjuk, és alkalmazzuk a dolgozat egészében:

[1] Az A_{s_t} rangjára vonatkozó feltétel jelen modellbeli fontosságának részleteit lásd: Habis (2011).

1. Az 1-es eszköz kockázatmentes, tehát $d_{s_t,1} = 1 \; \forall s_t \in S_1 \cup S_2$, és a hozama $R_f = \frac{1}{q_{s_t,1}}$
2. és $\{c^h \in X^h | u^h(c^h) \geq u^h(e^h)\} \subset \text{ int}(X^h)$, ami biztosítja, hogy ne forduljon elő a fogyasztás szempontjából határponti megoldás egy szereplő maximalizálási problémája során.

Az $E_{s_t}(c_{s_t^+})$ a $c_{s_t^+}$ várható értéke, feltéve, hogy s_t világállapot bekövetkezett, azaz $E_{s_t}(c_{s_t^+}) = \sum_{s_{t+1} \in s_t^+} \rho_{s_t} c_{s_t}$.

2.1. Hatékonyság

A jóléti közgazdaságtan első tétele alapján a teljes piacok egyensúlya a fogyasztások Pareto-hatékony feloszlását eredményezi. Egy felosztás Pareto-optimális, ha a teljes készletet lehetetlen olyan módon újra felosztani, hogy egy vagy több szereplő jobban járjon, anélkül, hogy bármelyik másik alany rosszabbul járna. Speciálisan, a fogyasztás egy c^h allokációja Pareto-optimális, ha nem létezik olyan megvalósítható, alternatív $\bar{c}^h$ felosztása az erőforrásoknak, amely

$$\sum_{h=1}^{H} \bar{c}^h = \sum_{h=1}^{H} e^h, \tag{2.8}$$

minden alany által gyengén preferált,

$$u^h(\bar{c}^h) \geq u^h(c^h), \tag{2.9}$$

és szigorúan preferált legalább egy fogyasztó által úgy, hogy a 2.9. egyenlet szigorú egyenlőtlenségként teljesül legalább egy fogyasztóra.

2.6. Állítás. ***(A jóléti közgazdaságtan első tétele)*** *Legyen (θ^*, c^*, q^*) egy versenyző egyensúly $\mathcal{E}$-ban. Ha az eszközök piaca teljes, akkor c^* Pareto-optimális.*

Bizonyítás. A bizonyítást indirekt módon végezzük. Tegyük fel, hogy c^{*h} az egyensúlyi fogyasztási allokáció a teljes piacon, és hogy létezik egy olyan megvalósítható $\tilde{c}^h$ elosztás, amelyre $u^h(\tilde{c}^h) \geq u^h(c^{*h})$ minden h esetén úgy, hogy az egyenlőtlenség szigorú valamely h-ra.

Felhasználva 2.2 definíció keretrendszerét, a c^{*h} fogyasztási terv $u^h(c^h)$ hasznosságot maximalizálja, a költségvetési korlát betartásával

$$c_0^{*h} = e_0^h - \pi_0 d_{s_1} \theta_0^h \tag{2.10}$$

$$c_{s_1}^{*h} = e_{s_1}^h + d_{s_1} \theta_0^h - \pi_{s_1} d_{s_2} \theta_{s_1}^h \tag{2.11}$$

$$c_{s_2}^{*h} = e_{s_2}^h + d_{s_2} \theta_{s_1}^h, \tag{2.12}$$

ahol π_{s_t} az állapotokhoz tartozó árak egyedi vektora $q^*_{s_t}$ árakból. Fontos megjegyezni, hogy π_{s_t} szigorúan pozitív.

Megszorozva 2.12. egyenletet π_{s_1}-vel, és hozzáadva a 2.11. egyenlet megoldását, kapjuk

$$c^{*h}_{s_1} + \pi_{s_1} c^{*h}_{s_2} = e^h_{s_1} + \pi_{s_1} e^h_{s_2} + d_{s_1}\theta^h_0. \tag{2.13}$$

Megszorozva 2.13. egyenletet π_0-vel, és hozzáadva a 2.10. egyenlet megoldását, kapjuk

$$c^{*h}_0 + \pi_0 c^{*h}_{s_1} + \pi_0\pi_{s_1} c^{*h}_{s_2} = e^h_0 + \pi_0 e^h_{s_1} + \pi_0\pi_{s_1} e^h_{s_2}, \tag{2.14}$$

ennélfogva az eredeti hasznosság-maximalizálási problémához tartozó költségvetési korlátok a 2.2. egyenletben ekvivalensek a 2.14. egyenlettel. Következésképpen az optimális c^{*h} fogyasztási terv maximalizálja az $u^h(c^h)$-t figyelemmel a 2.14. feltételre.

Mivel $u^h(c^h)$ szigorúan növő,

$$\tilde{c}^h_0 + \pi_0 \tilde{c}^h_{s_1} + \pi_0\pi_{s_1} \tilde{c}^h_{s_2} \geq c^{*h}_0 + \pi_0 c^{*h}_{s_1} + \pi_0\pi_{s_1} c^{*h}_{s_2} \tag{2.15}$$

minden h esetén, szigorú egyenlőtlenséggel valamely h szereplőre, aki számára szigorúan jobb a $\tilde{c}^h$ mint a c^{*h}. Összegezve ezt az összes szereplőre és felhasználva a 2.14. egyenletet azt kapjuk, hogy

$$\sum_{h=1}^{H} \tilde{c}^h_0 + \sum_{h=1}^{H} \pi_0 \tilde{c}^h_{s_1} + \sum_{h=1}^{H} \pi_0\pi_{s_1} \tilde{c}^h_{s_2} > e_0 + \pi_0 e_{s_1} + \pi_0\pi_{s_1} e_{s_2}, \tag{2.16}$$

ami ellentmondásban áll azzal a feltételezéssel, hogy a fogyasztás $\tilde{c}^h$ allokációja megvalósítható. □

Ez az állítás nagyon fontos, alátámasztásával új eredményre jutottunk. Elengedhetetlen volta a 3 időszakra való kiterjesztésében keresendő, emiatt az újonnan igazolt tulajdonság miatt lesz lehetőségünk a modellt is három időszakra felírni, és ekkor is Pareto-optimális megoldást találni.

Amikor a piacok nem teljesek, a fogyasztás egyensúlyi elosztásai általában nem Pareto-optimálisak, és a jóléti közgazdaságtan első tétele nem lép érvénybe, ugyanis előfordulhat, hogy a szereplők nem képesek végrehajtani az optimális allokációhoz szükséges kereskedelmet. Azonban az egyensúlyi fogyasztási elosztások optimálisak lehetnek korlátozott értelemben. Ekkor a hatékonyság egy kevésbé ambiciózus értelmezésére térünk át: Jól működnek a piacok amellett, hogy lehetetlen a szociális jólét emelése az eszközpiaci forgalmon keresztül?

Ha a hatékonyságot úgy vesszük tudomásul, mint egy társadalmi döntéshozó [2] által kivitelezett programot, ahol a tervező bizonyos célokat követ, megkülönböztethetünk rövidlátó és előrelátó döntéshozó-típusokat.

A fenti eredmények tükrében bizakodhatunk abban, hogy ezen korlátozott esetben is beláthatóak a tárgyalt tételek, azonban ez egy későbbi kutatás kérdéskörét adja.

Ebben a fejezetben tehát megismertük a modell rendszerét, a következő fejezetben bemutatjuk a CCAPM modellt.

3. A fogyasztásalapú eszközárazás modellje

A CAPM árazási modell a modern pénzügyi közgazdaságtan egyik populáris témája és központi motívuma. Rengeteg értekezésben kérdőjelezik meg használhatóságának körét, feltételezései szükségességét, állításai igazságát. Különlegességét mutatja az 1950-es évekre visszanyúló története, és mindazok a nagy nevek, akik kutatták, újragondolták és továbbfejlesztették [3].

Az ismertetést a CAPM főbb vonásainak felvázolásával kezdjük, majd áttérünk a számunkra érdekfeszítőbb fogyasztási alapú eszközárazás *Consumption-Based Capital Asset Pricing* körüljárásához.

3.1. A tőkepiaci eszközök árazási modellje: CAPM

Jelen alfejezetben olvasható a tőkepiaci eszközök árazási modelljének rövid bemutatása Bodie (2011) könyvének vonatkozó fejezete alapján.

A tőkepiaci árfolyamok modellje - amelyre szinte mindig CAPM-ként hivatkozik az irodalom -, pontos becslést ad egy adott eszköz kockázata és várható hozama közti kapcsolat megfigyelésére. E kapcsolatnak két létfontosságú funkciója van.

A tőkepiaci eszközök árazási modellje tulajdonképpen becslések összessége, a kockázatos eszközök egyensúlyi várható hozamának vonatkozásában. A modern portfólió-kezelés alapjait Harry Markowitz fektette le 1952-ben. A konkrét CAPM-et csak 12 évvel később hozták létre, a kifejlesztéshez 3 cikk kapcsolható, melyeket Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966) írt.

[2] Angolul „social planner", jelentése egy olyan gazdasági szereplő, aki úgy hozza döntését, hogy azáltal a társadalmi jólétet maximalizálja.

[3] Lásd: W.French (2003)

A CAPM modell feltevéseit és állításait jelen tanulmányban nem részleteznénk, mindezek elolvashatóak Bodie (2011) kötetében. Amit kiemelünk a fent említett könyv leírásából, az a következő néhány elméleti pont.

A kockázati prémium a piaci portfólióra megadható a kockázatának és a reprezentatív befektető kockázatkerülési mértékének az arányában. Azaz,

$$E(r_M) - R_f = \overline{A}\sigma_M^2 \tag{3.1}$$

ahol σ_M^2 a piaci portfólió varianciája és $\overline{A}$ az alanyok általános kockázatelutasításának mértéke. Az egyedi pénzügyi eszközök kockázati prémiuma arányos a piaci portfólió kockázati prémiumával, valamint a papír béta koefficiensével. A béta egyfajta mérték, hogy a papír hozama és piaci hozam mennyire mozog együtt. Formálisan

$$\beta_j = \frac{Cov(r_j, r_M)}{\sigma_M^2}, \tag{3.2}$$

és a kockázati prémium az egyedi értékpapírok esetén

$$E(r_j) - R_f = \frac{Cov(r_j, r_M)}{\sigma_M^2}[E(r_M - R_f] = \beta_j[E(r_M) - R_f]. \tag{3.3}$$

A CAPM egyik legnépszerűbb kifejezése a várható hozam-béta kapcsolat. Amennyiben ez igaz egyedi eszközökre, ez igaz kell, hogy legyen az eszközök bármely kombinációjára is. Ezt a kapcsolatot tekinthetjük úgy, mint egy jutalom-kockázat egyenletet. Az eszközbéta jól mutatja a kockázatot, mert arányos azzal a kockázattal, amivel a papír hozzájárul az optimális kockázatos portfólióhoz. A várható hozam-béta kapcsolat grafikus ábrázolása az értékpapír-piaci egyenes (*security market line (SML)*).

3.2. CCAPM, avagy a fogyasztásalapú eszközárazás

A fogyasztási alapú eszközárazás ezen modelljét szintén Bodie (2011) kötetben található dokumentáció segítségével prezentáljuk.

A CAPM középpontjába most közvetlenül a fogyasztás kerül. Először ilyen modelleket Rubinstein (1976), Lucas (1978), és Breeden (1979) hoztak létre. Egy élethosszig tartó fogyasztási tervet veszünk, ahol a szereplőnek minden periódusban döntenie kell vagyona felosztásáról a mai fogyasztás, és a jövőbeli fogyasztást biztosító megtakarítások és befektetések között. Akkor érünk el optimumot, ha a mai napon egy pótlólagos pénzegység hasznossága megegyezik annak a várható jövőbeli fogyasztásnak a hasznosságával, amit ugyanezzel a pótlólagos pénzegységgel finanszíroztunk. A jövőbeli vagyon az általános modellekben nőhet a munkabértől és az optimális teljes portfólióba befektetett pénzegységek hozamától.

Egy pénzügyi eszköz a fogyasztás tekintetében kockázatosabb, ha pozitív a kovarianciája a fogyasztás növekedésével. Más szavakkal, a kifizetése magasabb, amikor a fogyasztás már magas, és alacsonyabb, amikor a fogyasztás relatíve korlátozott.[4] Ebből adódóan az egyensúlyi kockázati prémiumok magasabbak azoknak az eszközöknek az esetében, amelyek magasabb kovarianciát mutatnak a fogyasztás növekedésével. Ebből a meglátásból kiindulva egy értékpapír kockázati prémiumát felírhatjuk a „fogyasztás kockázatának" függvényében:

$$E(R_j) = \beta_{jC}(E(rc) - R_f), \tag{3.4}$$

ahol C portfólió interpretálható a *fogyasztáskövető portfólióként*, ami az a portfólió, amely korrelációja a legmagasabb a fogyasztás növekedésével. A β_{jC} a j eszköz R_j többlethozamaira felírt regressziós egyenes meredekségi együtthatója, amely regresszióban a fogyasztáskövető portfólió többlethozamai a magyarázó változók. Végül az $(E(rc) - R_f)$ kifejezés a fogyasztás bizonytalanságától függő kockázati prémium, amelyet szintén a fogyasztáskövető portfólió várható többlethozama által határozunk meg.

Látható, hogy mennyire hasonlít ez a hagyományos CAPM-hez. A fogyasztáskövető portfólió játssza a CAPM piaci portfóliójának a szerepét. Azonban az eredeti tőkepiacok árazási modelljével szemben a piaci portfólió megfelelőjének bétája a CCAPM-ben nem feltétlenül 1, sőt teljes mértékben életszerű és empirikusan alátámasztott, hogy ez a béta nagyobb 1-nél. Ez azt jelenti, hogy a lineáris kapcsolat a piaci index kockázati prémiuma és a fogyasztási portfólió között

$$E(R_M) = \alpha_M + \beta_{MC}E(R_C) + \epsilon_M \tag{3.5}$$

ahol α_M és ϵ_M biztosítja a lehetőséget az empirikus elhajlásokra az egzakt 3.4. egyenlettel felírt modelltől, és β_{MC} nem feltétlenül egyenlő 1-gyel.

A fogyasztásalapú pénzügyi eszközárazás modelljének vonzereje az, hogy kompakt módon magában hordozza a fogyasztás fedezetének gondolatát (*consumption hedging*), és a befektetési lehetőségek lehetséges változásait; mindezt beépítve a hozamok eloszlásának paraméterébe egy egyetlen faktoros keretrendszerben.

Rövid összefoglalásképp tehát felírjuk a CCAPM egyfajta definícióját.

[4] Erre felhívjuk a figyelmet a három időszakos modell kifejtése során is.

3.1. Definíció. A fogyasztási alapú tőkepiaci eszközök árazási modellje (CCAPM) egy egytényezős modell, amiben a piaci portfólió többlethozamát a fogyasztáskövető portfólió többlethozamával helyettesítjük. Ez a modell a befektetőknek a fogyasztás változására való érzékenységével hozza összefüggésbe a pénzügyi eszközök kockázatát.

4. CAPM egyenlet 3 időszakra

Ebben a fejezetben be fogjuk bizonyítani, hogy a β árazási formula, ami egy kockázatos eszköz hozamát hasonlítja a piaci portfólió hozamához, levezethető egy három időszakos pénzügyi általános egyensúlyelméleti modellből is. Jóllehet a CAPM különböző szituációkban (hiányzó feltételek, különböző környezet) való megtestesülése megannyi publikáció témáját képezte már, ez a megközelítés egyedinek tekinthető. A tőkepiaci eszközök árazási modelljét az eddigiek során nem terjesztették ki három időszakra, és ennek igazolása jövőbeli kutatásokra is okot szolgáltat, felveti a lehetőségét a CAPM hosszú távra való alkalmazhatóságának is.

A jelölések, és a gazdasági környezet a 2. fejezet által már adott. A döntéshozók optimalizálási folyamatának a közgazdaságtan és a matematika nyelvén való felírásához, valamint a további egyenletek levezetéséhez Riedel (2004) és LeRoy (2001) megfelelő szakaszait hívtuk segítségül.

Ahogyan az általános modellek a közgazdaságtanban, mi is a hasznossági függvény ismertetésével kezdjük felírni a modellt. Ennek megfelelően a h véges számú racionális egyén hasznossági függvénye

$$u^h(c^h) = v_0^h(c_0^h) + \delta_1 \sum_{s_1 \in S_1} \rho_{s_1} v_{s_1}^h(c_{s_1}^h) + \delta_1\delta_2 \sum_{s_1 \in S_1} \rho_{s_1} \sum_{s_2 \in S_1^+} \rho_{s_2} v_{s_2}^h(c_{s_2}^h), \tag{4.1}$$

amelyet maximalizálni szeretnénk. A maximalizálás azonban több feltételhez is kötött; egy személy nem fogyaszthat végtelen mennyiséget, mert adott nagyságú készletei, bevételei és akár költségei is vannak. A költségvetési korlátokkal már találkozhattunk is, szintén a 2. fejezetben: a 2.2. feladatban, a 2.3 és a 2.4. egyenletek írják le ezeket.

A hasznossági függvény feltételekhez kötött maximalizálásához a Lagrange-módszert használjuk, ahol $\lambda_{s_t}^h$-vel jelöljük a Lagrange-multiplikátorokat. Ez az eljárás hatékonynak bizonyul a függvények szélsőértékének megkeresésében, miközben biztosítja, hogy a megkötések is teljesüljenek, ezért lesz számunkra is alkalmas. A Lagrange függvény, ha a hasznossági függvényt maximalizáljuk, és a költségvetési korlátok a feltételek

$$\mathcal{L}^h = u^h(c^h) - \lambda_0^h(c_0^h - e_0^h + q_0\theta_0^h) - \lambda_{s_1}^h(c_{s_1}^h + q_{s_1}\theta_{s_1}^h - e_{s_1}^h - d_{s_1}\theta_0^h) - \lambda_{s_2}^h(c_{s_2}^h - e_{s_2}^h - d_{s_2}\theta_{s_2^-}^h). \tag{4.2}$$

Ennek a függvénynek kell a változók $(c_0^h, c_{s_1}^h, c_{s_2}^h, \theta_0^h, \theta_{s_1}^h)$ szerint vett parciális deriváltjait egyenlővé tenni nullával, és ezáltal jut a fogyasztó optimumra, ezek a 1. függelékben szerepelnek.

A parciális deriváltakat megoldjuk q_{s_t}-re

$$q_{s_t} = A_{s_t} \frac{\lambda_{s_t^+}^h}{\lambda_{s_t}^h}, \text{ feltéve, hogy } \lambda_{s_t}^h \neq 0 \tag{4.3}$$

majd behelyettesítjük a λ^h-k megfelelő értékét

$$q_{s_t} = A_{s_t} \frac{\delta_{t+1} \sum_{s_{t^+} \in S_t^+} \rho_{s_t^+} \partial v_{s_t^+}^h (c_{s_t^+}^h) / \partial c_{s_t^+}^h}{\partial v_{s_t}^h (c_{s_t}^h) / \partial c_{s_t}^h} \tag{4.4}$$

és ezzel, ahogy az majd látható lesz, megkapjuk a különböző időszakok fogyasztása közti helyettesítési határrátát, azaz MRS-t. A 4.4. egyenlet azt jelenti, hogy bármely h alany minden egyes $s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1$ világállapotban úgy fektet be minden j pénzügyi eszközbe, hogy egy pótlólagosan hozzáadott egység $q_{s_t,j}$ határköltsége egyenlő legyen a határhasználval, ami pedig h szereplő jövőbeli osztalékainak jelenértéke.

A várható érték 2. fejezetben leírt definíciója alapján behelyettesítünk a 4.4. egyenletbe

$$q_{s_t} = \frac{\delta_{t+1} E_{s_t} [\partial_{c_{s_t^+}} v_{s_t^+}^h (c^{h*}) A_{s_t}]}{\partial_{c_{s_t}} v_{s_t}^h (c^{h*})} = E(MRS_{s_t}^h A_{s_t}), \quad \text{minden } s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1, \tag{4.5}$$

ezáltal már meg is jelent az MRS, ami a t időpontbeli és a t^+ időponthoz tartozó összes állapotbeli fogyasztások között értelmezett. A helyettesítési határráta kapcsán kiemelendő, hogy az egyes fogyasztókhoz tartozó MRS-ek akár különbözhetnek is, a hasznossági függvény alakjából adódóan (például kockázathoz való viszonyulástól függően), azonban egyensúlyban ezek meg kell, hogy egyezzenek. Ennek az egyezőségnek az eredményeként a teljes piacok feltételezésével egyetlen árat kapunk, amely nem más, mint a 4.5. egyenletben meghatározott. A q_{s_t} eszközárakhoz definiáljuk az $r_{s_t^+, \theta_{s_t}}$ egy időszakos hozamot olyan $\theta_{s_t}^h$ portfólióra, amire $q_{s_t} \theta_{s_t}^h \neq 0$ teljesül, az alábbi módon

$$r_{s_t^+, \theta_{s_t}} = \frac{A_{s_t} \theta_{s_t}^h}{q_{s_t} \theta_{s_t}^h}. \tag{4.6}$$

Ez a képlete a hozamnak az általánosan is adódó meghatározás: a portfólió értékpapírjainak kifizetését osztjuk azok árával. Már csak egy fogalom szükséges ahhoz, hogy levezethessük a fogyasztás alapú eszközárazás egyenletét, és ez a kovariancia. Ennek semmilyen megszokottól eltérő értelmezésével nem fogunk most találkozni, ahogy már sokan mások, mi is a

$$E(yz) = cov(y, z) + E(y)E(z) \tag{4.7}$$

formulát alkalmazzuk. Ezekkel a 4.5. egyenlet már átírható

$$1 = \frac{\delta_{t+1} E_{s_t}[\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*}) r_{s_t^+,\theta_{s_t}}]}{\partial_{c_{s_t}} v^h_{s_t}(c^{h*})}, \tag{4.8}$$

amihez felhasználva a fenti definíciókat, és a $cov_{s_t}(x_{s_t^+}, y_{s_t^+})$ kifejezést a feltételes kovariancia jelölésére két változó között

$$1 = \frac{\delta_{t+1} E_{s_t}[r_{s_t^+,\theta_{s_t}}] E_{s_t}[\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*})]}{\partial_{c_{s_t}} v^h_{s_t}(c^{h*})} + \frac{\delta_{t+1} cov_{s_t}(\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*}), r_{s_t^+,\theta_{s_t}})}{\partial_{c_{s_t}} v^h_{s_t}(c^{h*})}. \tag{4.9}$$

egyenletet kapjuk, amelynek átrendezését követően jutunk a várható egyidőszakos hozam

$$E_{s_t}[r_{s_t^+,\theta_{s_t}}] = \frac{\partial_{c_{s_t}} v^h_{s_t}(c^{h*})}{\delta_{t+1} E_{s_t}[\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*})]} - \frac{cov_{s_t}(\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*}), r_{s_t^+,\theta_{s_t}})}{E_{s_t}[\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*})]} \tag{4.10}$$

leírására, ahol

$$R^f_{s_t} = \frac{\partial_{c_{s_t}} v^h_{s_t}(c^{h*})}{\delta_{t+1} E_{s_t}[\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*})]} \tag{4.11}$$

kifejezés a kockázatmentes eszköz egy periódusos hozama[5]. Ezzel és a 4.10. egyenlettel adódik a fogyasztásalapú eszközárazás egyenlete

$$E_{s_t}[r_{s_t^+,\theta_{s_t}}] = R^f_{s_t} - \delta_{t+1} R^f_{s_t} \frac{cov_{s_t}(\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*}), r_{s_t^+,\theta_{s_t}})}{\partial_{c_{s_t}} v^h_{s_t}(c^{h*})}. \tag{4.12}$$

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy a kockázati prémium (ami a várható hozam és a kockázatmentes kamatláb különbsége) minden eszköz esetében arányos a kamatlábának és az s_t és s_t^+ világállapotok közti helyettesítési határrátának a kovarianciájával (negatív arányossági állandóval). Szigorúan véve a $\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*}) / \partial_{c_{s_t}} v^h_{s_t}(c^{h*})$ az 4.12. egyenletben nem az s_t^+ és s_t kimenetek állapottól függő fogyasztása közti helyettesítési határráta, mivel hiányoznak a valószínűségek. Hasonlóképpen a továbbiakban is a fogyasztás határhasznosságaként fogunk hivatkozni a $\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*})$ kifejezésre, a valószínűségek hiánya ellenére. Nincs azonban oka annak, hogy ennél a terminológiai imprecizitásnál megtorpanjunk, ugyanis nem szakadunk el a pénzügyi-közgazdasági irodalomban szokásos módtól LeRoy (2001).

Egy szigorúan kockázatkerülő döntéshozót tekintve a $\partial_{c_{s_t^+}} v^h_{s_t^+}(c^{h*})$ csökkenő függvénye az s_t^+-beli fogyasztásnak. Ezért annak az értékpapírnak, ami magas kifizetésű, ha a fogyasztás magas, és alacsony kifizetésű, amikor a fogyasztás is alacsony, a várható hozama

[5] A kockázatmentes eszköz hozamára a LeRoy (2001)-ben található $R^f_{s_t} = \frac{1}{\sum_{s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} q_{s_t}}$ definíciót használjuk, amely egyensúlyban megegyezik a levezetésbeli $R^f_{s_t}$-fel.

meghaladja a kockázatmentes papírét. Ennek megfelelően viszont egy eszköz várható hozama, aminek akkor magas a kifizetése, amikor a fogyasztás alacsony, és akkor alacsony a kifizetése, amikor a fogyasztás magas, kisebb lesz, mint a kockázatmentes hozam. Ilyen értékpapírok felhasználhatóak, hogy csökkentsék a kockázatát a szereplő fogyasztásának. A relatíve alacsony hozam relatíve magas árat tükröz. Az az eszköz, amely hozamának az MRS-sel vett kovarianciája nulla, a kockázatmentes papírral egyenlő várható hozamú lesz.

Az 4.12-es egyenlet alapján egy értékpapír kockázati prémiuma kizárólag a hozama és az s_t és s_t^+ közti helyettesítési határráta kovarianciájától függ. Ez a kovariancia a papír kockázatának mértékeként értelmezhető, aminek két szokatlan tulajdonságát érdemes kiemelni. Egyrészt csak akkor használható, ha egyensúlyban van a gazdaság. Másrészt viszont ez a kovariancia-mérték nem csak részleges, hanem teljes rendezését adja a hozamok kockázatának.

Ha a helyettesítési határráta állandó, a fogyasztásalapú eszközárazás az 4.12. képlet szerinti értelemben fair árat (tisztességes árat) szab meg. Két szituációban lehet az MRS determinisztikus: ha a szereplő fogyasztása is determinisztikus, és ha a szereplő kockázatsemleges.

Ismerjük meg most az egyén optimalizálásának további részleteit, amelyhez a következő feltételben bemutatjuk a $v_{s_t}^h$ hasznossági függvények $t+1$. időszaki fogyasztásban kvadratikus alakját.

4.1. Feltétel. Legyen minden fogyasztó Bernoulli függvénye a következő kvadratikus hasznossági függvény: $v_{s_t}^h(c_{s_t}^h) = \xi_t c_{s_t}^h - \frac{1}{2}\alpha_t (c_{s_t}^h)^2$.

Behelyettesítve ennek deriváltjait az 4.12. eszközárazási egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$E_{s_t}[r_{s_t^+,\theta_{s_t}}] = R_{s_t}^f - \delta_{t+1} R_{s_t}^f \frac{cov_{s_t}(\xi_{t+1} - \alpha_{t+1} c_{s_{t+}}^h, r_{s_t^+,\theta_{s_t}})}{\xi_t - \alpha_t c_{s_t}^h}, \tag{4.13}$$

amiből következően egy tetszőleges j eszköz várható hozamára is felírható

$$E_{s_t}[r_{s_t^+,j}] = R_{s_t}^f + \frac{\delta_{t+1}\alpha_{t+1} R_{s_t}^f}{\xi_t - \alpha_t c_{s_t}^h} cov_{s_t}(c_{s_t^+}^h, r_{s_t^+,j}). \tag{4.14}$$

Egy értékpapír-piaci gazdaságban (*securities market economy*) az aggregált készlet az eszközök kifizetései által generált altérben (*asset span*) van, ami azt jelenti, hogy ez elérhető valamely értékpapírokból álló portfólió a kifizetéseként. Ezt a portfóliót nevezzük a piaci portfóliónak, melynek hozamát jelöljük $r_{s_t^+}^M$-mel. Az 4.14. egyenlet portfóliók hozamára is alkalmazható. Kiváltképp alkalmazható a $r^M_{s_t^+}$ piaci hozamra, és ezért

$$E_{s_t}[r^M_{s_t^+}] = R^f_{s_t} + \frac{\delta_{t+1}\alpha_{t+1}R^f_{s_t}}{\xi_t - \alpha_t c^h_{s_t}} cov_{s_t}(c^h_{s_t^+}, r^M_{s_t^+}) \tag{4.15}$$

is helytálló. Elosztjuk az 4.14. egyenletet az 4.15. egyenlettel, miután az $R^f_{s_t}$ levonásra került mindkettőből, ezáltal elhagyjuk a $\frac{\delta_{t+1}\alpha_{t+1}R^f_{s_t}}{\xi_t-\alpha_t c^h_{s_t}}$ kifejezést és a

$$\frac{E_{s_t}[r_{s_t^+,j}] - R^f_{s_t}}{E_{s_t}[r^M_{s_t^+}] - R^f_{s_t}} = \frac{cov_{s_t}(c_{s_t^+}, r_{s_t^+,j})}{cov_{s_t}(c_{s_t^+}, r^M_{s_t^+})} \tag{4.16}$$

egyenlethez jutunk, feltéve, hogy a piaci kockázati prémium nem nulla.

Ha az egyensúlyi fogyasztás a piaci és a kockázatmentes papírok kifizetései által generált altérben van, akkor $c^h_{s_t^+}$ és $r^M_{s_t^+}$ tökéletesen korrelálnak. Ennek megfelelően $c^h_{s_t^+}$ helyettesíthető $\varphi r^M_{s_t^+}$-vel. Végül, egy $\theta^h_{s_t} \in \mathbb{R}^{J_{s_t}}$ portfólióra definiáljuk $\beta_{\theta_{s_t}}$-t

$$\beta_{\theta_{s_t}} = \frac{cov_{s_t}(r^M_{s_t^+}, r_{s_t^+,\theta})}{var(r^M_{s_t^+})}. \tag{4.17}$$

Ez a $\beta_{\theta_{s_t}}$ lesz a CCAPM modell 3. fejezetben is említett fogyasztási bétája, amely egy adott pénzügyi eszköz kockázatának viszonyulását mutatja a piaci kockázathoz.

Most, hogy már minden szükséges eszközünk és egyenletünk megvan hozzá, láthatjuk, hogy az alábbi CAPM árazó formula minden $\theta^h_{s_t} \in \mathbb{R}^{J_{s_t}}$ esetén fennáll, tehát

$$E_{s_t}[r_{s_t^+,\theta}] - R^f_{s_t} = \beta_{\theta_{s_t}}(E_{s_t}[r^M_{s_t^+}] - R^f_{s_t}); \tag{4.18}$$

ami nem más, mint a CAPM értékpapír-piaci egyenesének (*security market line*) egyenlete:

$$E_{s_t}[r_{s_t^+,\theta}] = R^f_{s_t} + \beta_{\theta_{s_t}}(E_{s_t}[r^M_{s_t^+}] - R^f_{s_t}). \tag{4.19}$$

A feltevés, miszerint az egyensúlyi fogyasztás a piaci és a kockázatmentes papírok kifizetése által generált altérben van, triviális egy reprezentatív szereplős gazdaságban (*representative-agent economy*), mivel ekkor minden egyes döntéshozó egyensúlyi fogyasztása egyenlő az piaci portfólió kifizetésének egy főre eső részével. Mivel feltettük, hogy mindenkinek ugyanolyan kvadratikus hasznossági függvénye van, ezért ez az általunk felvázolt gazdaságra is igaz.

Ezáltal beláttuk, hogy a háromidőszakos haszonmaximalizálási modellből is levezethető a jól ismert CCAPM; azaz a szakirodalomban eddig ismert kétidőszakos modell eredményeit kiterjesztettük egy háromidőszakos modellre. Ez az eredmény önmagában is komoly jelentőséggel bír, de alapjául szolgálhat számos későbbi kutatásnak, melyeknek alapkövetelménye egy többidőszakos modell, ilyen például a hosszú lejáratú papírok elemzése vagy a nemteljes piacok hosszú távú hatékonyságának kérdése is.

Irodalomjegyzék

Bodie, Zvi Alex Kane és Marcus, A. J. (2011). *Investments - 9th ed.*, chapter 9., pages 280–317. Douglas Reiner, McGraw-Hill/Irwin, New York.

Breeden, D. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, 7:265–296.

Habis, Helga és Herings, J.-J. (2011). Core concepts for incomplete market economies. *Journal of Mathematical Economics*, 47(5):595–609.

LeRoy, Stephen F. és Werner, J. (2001). *Principles of Financial Economics*, chapter 14-15., pages 135–145. Cambridge University Press, Cambridge and New York.

Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47(1):13–37.

Lucas, R. (1978). Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, 46:1429–1445.

Magill, Michael és Quinzii, M. (1996). *Theory of Incomplete Markets, Volume 1*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge and London.

Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34(4):768–783.

Riedel, F. (2004). Lecture notes: General equilibrium theory and financial markets. `http://down.cenet.org.cn/upfile/60/200411825853153.pdf`. Letöltés ideje: 2016.04.20.

Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 7:407–425.

Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under the conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3):425–442.

W.French, C. (2003). The treynor capital asset pricing model. *Journal of Investment Management*, 1(2):60–72.

Függelék

1. függelék: Parciális deriváltak

A racionális fogyasztó Lagrange-függvényének parciális deriváltjai, melyeket egyenlővé teszünk nullával:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^h}{\partial c_0^h} = \frac{\partial v_0^h(c_0^h)}{\partial c_0^h} - \lambda_0^h = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^h}{\partial c_{s_1}^h} = \frac{\delta_1 \sum_{s_1 \in S_1} \rho_{s_1} \partial v_{s_1}^h(c_{s_1}^h)}{\partial c_{s_1}^h} - \lambda_{s_1}^h = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^h}{\partial c_{s_2}^h} = \frac{\delta_1 \delta_2 \sum_{s_1 \in S_1} \rho_{s_1} \sum_{s_2 \in S_1^+} \rho_{s_2} \partial v_{s_2}^h(c_{s_2}^h)}{\partial c_{s_2}^h} - \lambda_{s_2}^h = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^h}{\partial \theta_0^h} = -\lambda_0^h q_0 + d_{s_1} \lambda_{s_1}^h = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^h}{\partial \theta_{s_1}^h} = -\lambda_{s_1}^h q_{s_1} + d_{s_2} \lambda_{s_2}^h = 0.$$

A fogyasztás szerinti deriváltak ekvivalensek a

$$\Delta u^h(c^{h*}) = \lambda^{h*} \tag{1.1}$$

mátrix egyenlettel, ami azt jelenti, hogy $t = 0$-ban a Lagrange multiplikátorok a hasznossági függvény megfelelő világállapothoz tartozó fogyasztás szerinti parciális deriváltjaival egyenlők. A portfólió állomány szerinti deriváltak pedig a

$$-q_{s_t} \lambda_{s_t}^h + A_{s_t} \lambda_{s_t^+}^h = 0, \forall s_t \in \{0\} \cup \mathcal{S}_1$$

egyenlettel megfeleltethetők.