LUKÁCS Péter

PORTFÓLIÓ OPTIMALIZÁLÁSA VÁRHATÓ HOZAM-VARIANCIA - ÉS VÁRHATÓ HOZAM - CVAR-MODELLEL

Az extrém veszteségek előfordulási esélyeinek minimalizálására épülő portfólió optimalizáló modell

A tanulmány áttekintést ad a pénzügyi kockázatok rendszeréről. Definiálja a piaci kockázat fogalmát különböző szempontok szerint. Bemutatja az optimális portfólió kialakítását a „klasszikus" Markowitz-modell szerint, valamint az extrém veszteségek minimalizálása mellett. A két módszer eltérését példán keresztül illusztrálja a dolgozat.

A pénzügyi kockázatok rendszerét leginkább banki szempontból lehet értelmezni, áttekinteni. Ez nyilván nem azt jelenti, hogy más gazdálkodó szervezeteknél ezek a kockázatok ne jelentkeznének, a pénzügyi intézmények esetében azonban az alaptevékenységhez, illetve az ahhoz kötődő üzleti kockázat kerül előtérbe. A másik figyelembe veendő tényező, pedig a banki adatállományok kielégítően nagy adatmennyisége, ami lehetővé teszi matematikai-pénzügyi modellek konstruálását és alkalmazását a különböző kockázatok kezelésére. Természetesen a banki kockázatok rendszere szélesebb, mint a pénzügyi kockázatoké. A banki kockázatok rendszerét Crouchy és társai munkája alapján (Crouchy - Galai - Mark, 2001) tekintjük át.

Az *1. ábrából* látható, hogy a likviditási kockázatok és a működési kockázatok a pénzügyi kockázatok mellett szintén részét képezik a teljes banki kockázatnak. A pénzügyi kockázatokon belül a piaci kockázatok, azon belül is a tőkepiaci kockázatok mérése, értelmezése történt meg időben elsőként. Az itt kialakított modellek általánosíthatók a banki kockázatok egyéb területein.

Tőkepiaci kockázat mérése

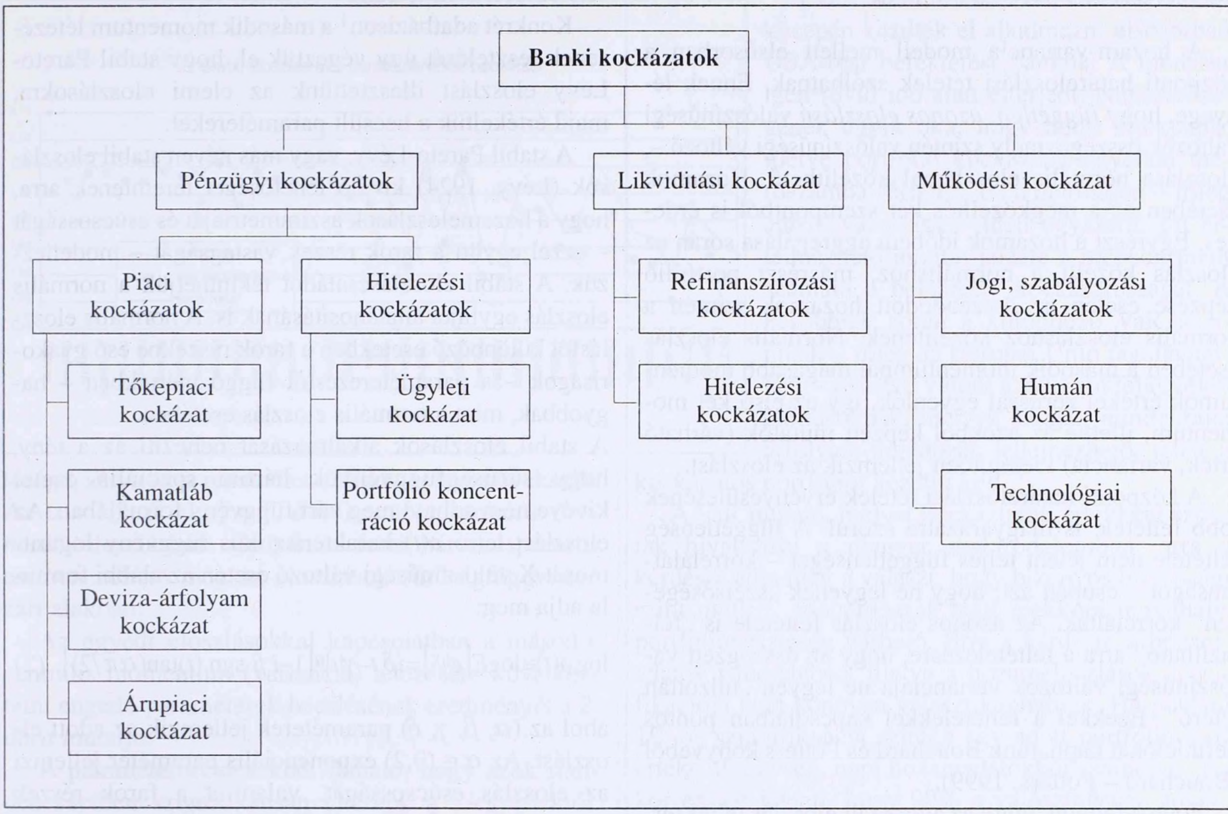
A kockázat mérésének kezdeteit Peter Bernstein (Bernstein, 1998) könyvében, egészen a XV. század végére teszi. Ekkor fogalmazta meg Luca Paccioli olasz szerzetes azon dilemmáját, mellyel később számos matematikus foglalkozott, s az eset korrekt megoldására is csak több száz év múlva került sor. A kérdés lényege az, hogy abban az esetben, ha két személy fordulónként egyenlő esélyű szerencsejátékot játszik – mely akkor ér véget, ha valaki tíz fordulót nyer – s egy adott időpontban, 5:3-as nyerési aránynál a felek megszakítják a játékot, milyen arányban kell a tételeket igazságosan elosztani. Ez a probléma elindította a gondolkodókat azon az úton, mely során a jövőbeni kimeneteleket, azok bekövetkezési valószínűségeit szisztematikusan figyelembe kell venni.

A különböző áru- és értéktőzsdék szintén több száz éves múlttal rendelkeznek. A XX. század közepéig, Markowitz portfólióválasztással kapcsolatos munkájának megjelenéséig (Markowitz, 1952) senki nem gondolt arra, hogy a tőzsdei árfolyamokban megjelenő kockázatot számszerűsítse. „A kockázat a rámenősségben volt, nem pedig a számokban…" ahogy Peter Bernstein fogalmaz.

Markowitz munkájának megjelenése forradalmi jelentőségű volt a kockázat számszerű megragadásának terén. Markowitz a kockázatot egyetlen eszköz esetében, a várható értéktől való átlagos eltéréssel, azaz a varianciával; több eszközből álló portfóliónál, pedig az eszközök megtérülése közötti kovarianciája segítségével számított portfólió varianciával méri. Fontos újítás tehát, hogy egy portfólióvarianciája nem a benne szereplő eszközök varianciáinak az összege, hanem jellemzően annál kisebb.

1. ábra

A banki kockázatok rendszere



Az elmélet publikálása óta eltelt mintegy ötven évben egyrészt specifikálták azokat az eseteket, amelyekben a Markowitz-modell alkalmazható, másrészt megkísérelték olyan esetek modellezését, amikor az elmélet által előírt feltételek nem teljesülnek.

Egyetlen eszköz esetében, azaz egyváltozós eloszláskor az eszközök hozamainak normális eloszlása során a kockázat varianciaként való felfogása helytálló. Amennyiben a hozamadatok szignifikáns aszimmetriát mutatnak, a varianciával mért kockázat nem korrekt. Szintén problematikusak azok az esetek, amikor a hozameloszlások széleinél magasabb hozamgyakoriságokat találunk, mint azt a normális eloszlás implikálná. Ezeket a problémákat, „fat tail", illetve „heavy tail" problémaként említi a szakirodalom. A vastag farokrészek modellezése felveti az egynél (várható érték) magasabb rendű momentumok létezésének problémáját (Részletesebben ld. Lux, T. – Varga, J. 1996; Varga, J. 1998). Több esetben a hozameloszlások csak olyan eloszlással modellezhetők, melyeknek nem létezik elsőnél magasabb rendű momentuma. Tehát csak a várható érték létezik, a variancia és más magasabb rendű momentumok nem. Ez a körülmény szintén nehezíti a várhatóérték-variancia modellek helytállóságának elfogadását.

Több eszközből álló portfólió, azaz többváltozós eloszlással történő modellezés esetén komplexebb megközelítés szükséges. Egy portfólió többváltozós hozameloszlása a hozamok határeloszlásai és a hozamok közötti függőségi struktúra ismeretében tekinthető adottnak. Abban az esetben, ha a portfólióban szereplő eszközök hozamai normális eloszlást követnek, ill. amennyiben a hozamok függőségi struktúrája is normális eloszlású, akkor a Markowitz által definiált kockázatmérték pontos. A legutóbbi kutatások definiálták azt az eloszlásosztályt, mely esetén alkalmazhatóak a lineáris függőségi mértékek, így a kovariancia is. Ez az osztály az elliptikus eloszlások osztálya, ahol is az egyenlő sűrűségű felületek ellipszoidok. Ez a feltételezés nemcsak a normális eloszlásra teljesül – hanem például a véges szórású *t*-eloszlásokra is –, így a Markowitz-modell érvényessége némiképp szélesedik. A korrekt kockázati mértékekkel szemben megfogalmazott kritériumokról, valamint a Markowitz-féle „hagyományos" kockázati mértékek kritikájáról a magyar szakirodalomban Varga József (Varga, 2002) készített részletes tanulmányt.

A hozam-variancia modellek alkalmazhatósága – a központi határeloszlási tételek jelentősége

A hozam-variancia modell mellett elsősorban a központi határeloszlási tételek szólhatnak. Ennek lényege, hogy *független, azonos eloszlású* valószínűségi változók összege, mely szintén valószínűségi változó –, eloszlása normális eloszlással közelíthető. Hozamok esetében ez a megközelítés két szempontból is érdekes. Egyrészt a hozamok időbeni aggregálása során az eloszlás közelít a normálishoz, másrészt portfólió képzése esetén az összeadódott hozamok szintén a normális eloszláshoz közelítenek. Normális eloszlás esetében a második momentumnál magasabb momentumok értékei zérussal egyenlők, így az első két momentum, illetve az azokból képzett mutatók (várható érték, variancia) kielégítően jellemzik az eloszlást.

A központi határeloszlási tételek érvényesülésének több feltétele is magyarázatra szorul. A függetlenség feltétele nem jelent teljes függetlenséget – korrelálatlanságot – csupán azt, hogy ne legyenek „szélsőségesen" korreláltak. Az azonos eloszlás feltétele is „fellazítható" arra a feltételezésre, hogy az összegzett valószínűségi változók varianciája ne legyen „túlzottan eltérő". Ezekkel a feltételekkel kapcsolatban pontos definíciókat kaphatunk Bouchard és Potters könyvéből (Bouchard – Potters, 1999).

Fontos feltétel, hogy az aggregált eloszlás teljes terjedelmében akkor közelít a normális eloszláshoz, ha elegendően nagy számú valószínűségi változót összegzünk. Ez a gyakorlatban – például esetünkben, portfólió kialakításánál – távolról sincs így. Ebben az esetben csupán az eloszlás centrális része közelíti a normális eloszlást, a farokrészekre ez az állítás nem igaz.

Alapvető feltétel még az egyes hozamok varianciájának létezése. Ez felveti az eloszlás második momentumának létezése kérdését. Az X valószínűségi változó n-edik zérus körüli momentumát az alábbi összefüggés adja:

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x) \qquad (1)$$

ahol $F(x)$ az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, az integrál pedig Stieltjes integrál.

Ahhoz tehát, hogy az n-edik momentum létezzék, az szükséges, hogy az X valószínűségi változó

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

sűrűségfüggvénye – a farok részek felé haladva – „gyorsabban" csökkenjen, mint ahogy x^n növekszik, ellenkező esetben a fenti impropius integrál nem konvergens, az adott momentum matematikai-statisztikai értelemben nem létezik.

Konkrét adatbázison[1] a második momentum létezésének tesztelését úgy végeztük el, hogy stabil Pareto-Lévy eloszlást illesztettünk az elemi eloszlásokra, majd értékeltük a becsült paramétereket.

A stabil Pareto-Lévy, vagy más néven stabil eloszlások (Lévy, 1924) kiváló lehetőséget teremtenek arra, hogy a hozameloszlások aszimmetriáját és csúcsosságát – ezzel együtt a farok részek vastagságát – modellezzük. A stabil eloszláscsaládot tekinthetjük a normális eloszlás egyfajta általánosításának is. A normális eloszlástól különböző esetekben a farok részekbe eső gyakoriságok – a paraméterezéstől függő mértékben – nagyobbak, mint a normális eloszlás esetében.

A stabil eloszlások alkalmazását nehezíti az a tény, hogy sűrűségfüggvényük három speciális esetet kivéve nem adható meg zárt függvény formájában. Az eloszlást leíró $\phi(t)$ karakterisztikus függvény logaritmusát X valószínűségi változó esetén az alábbi formula adja meg:

$$\log \phi(t) \equiv \log E\left[e^{itX}\right] = i\delta t - \gamma|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)\tan(\alpha\pi/2)\right], \qquad (2)$$

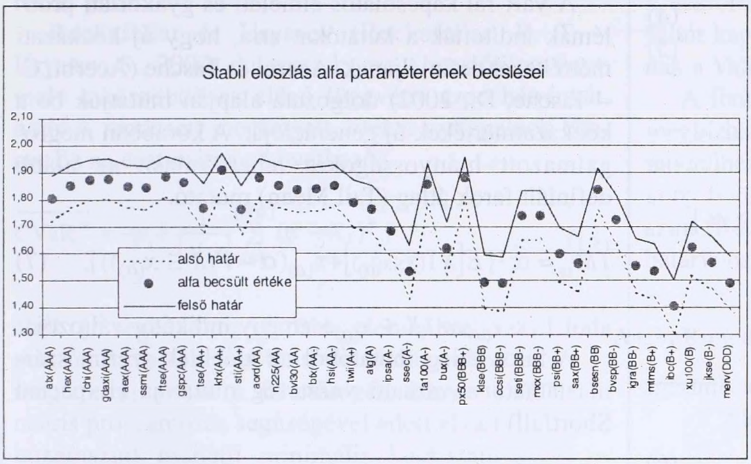
ahol az (α, β, γ, δ) paraméterek jellemzik az adott eloszlást. Az $\alpha \in (0,2)$ exponenciális paraméter jellemzi az eloszlás csúcsosságát, valamint a farok részek vastagságát, a $\beta \in (-\infty, +\infty)$ ferdeségi paraméter az eloszlás aszimmetriájának mértékét mutatja, a $\gamma \in (0, +\infty)$) skálaparaméter írja le az eloszlás szétterjedését, a valószínűségi változó szóródását, a $\delta \in (-\infty, +\infty)$ helyzeti, vagy lokációs paraméter pedig az eloszlás helyzetét határozza meg.

$\beta = 0$ esetben szimmetrikus eloszlásokhoz jutunk. Akkor is szimmetrikus lesz az eloszlás, ha $\alpha = 2$, β értékétől függetlenül. Amennyiben $\alpha = 2$ és $\beta = 0$, *normális eloszláshoz* jutunk. Az α paraméter csökkenésével a farok részek vastagodnak, az eloszlás egyre csúcsosabbá válik. $\alpha = 1$ és $\beta = 0$ esetén kapjuk a *Cauchy* eloszlást. Az α paraméter további csökkenése esetén már az első rendű momentum, tehát a várható érték sem létezik. A β, ferdeségi paraméter jelen-

[1] A vizsgálat során 37 különböző nemzetközi tőzsdeindex hozamának alakulását vizsgáltuk meg. A tőzsdeindex adatokat 1998. április 30-tól 2002. február 20-ig vettük figyelembe. Ez indexenként 990, összesen 36 631 árfolyamadatot jelent. Tekintettel arra, hogy az ünnepnapok – így a tőzsdei szünnapok – országonként jelentős eltérést mutatnak, több helyen kellett átlagolásos adatpótlást végezni. Az adatpótlások aránya így is alig haladja meg a 6,5 %-ot. Adott tőzsdeindex hozamainak számításakor az USA dollár árfolyamra átszámított logaritmikus hozamokat vettünk figyelembe. A tőzsdeindexeket nemzetközi jelükkel jelöltük és mellettük zárójelben megadtuk a megfelelő szuverén minősítést is.

2. ábra

Stabil eloszlás alfa paraméterének becsült értékei



tősége, súlya az α paraméter csökkenésével növekszik. Az $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$ esetben jutunk a *Bernoulli* eloszláshoz. Csupán a fenti három speciális esetben adható meg az eloszlások sűrűségfüggvénye zárt alakban.

Az egyedi eloszlásokkal kapcsolatban a második centrális momentum (variancia) létezésére következtetni engedő paraméterek becslésének eredményét a *2. ábra* mutatja.

A paraméterbecslésekből látható, hogy azok minden esetben szignifikánsan eltérnek a 2-es értéktől. Mindez alátámasztja azt a feltételezésünket, hogy – napi hozamok esetében – a varianciák matematikai-statisztikai értelemben nem léteznek. Amennyiben az egyedi eloszlások varianciája nem létezik, akkor igazolható, hogy a határeloszlás nem normális eloszlás, hanem annak általánosított formája, a fent ismertetett stabil eloszlás.

Összegezve elmondható, hogy a várható hozam-variancia alapján történő portfólióoptimalizálás igen erős elméleti aggályokat vet fel vastag farok részekkel rendelkező eloszlások esetében.

A portfólióvariancia – amennyiben egyáltalán létezik – kockázati mértékként értelmezhetetlen aszimmetrikus eloszlások esetében. Bár esetünkben, mint a legtöbb tőkepiaci eszköz esetében, az eloszlások szimmetrikusnak tekinthetők, mégis előfordulhatnak olyan hozameloszlások, melyeket erős aszimmetria jellemez. Ilyenek például a különböző hitelportfóliók. Ezek kockázatának megragadására nem alkalmas a variancia, még annak statisztikai értelemben vett létezése esetén sem. Fogalmilag mindenképpen zavaró, hogy a hozamok pozitív tartományban történő ingadozása kockázatként kerül értékelésre.

VaR-modellek

A VaR számítást az 1990-es évek elején-közepén kezdték el alkalmazni elsősorban USA-beli befektetési bankok. A módszer igen rövid idő alatt elterjedt. Népszerűségének egyik oka, hogy adott értékpapír, illetve portfólió kockázatát egyetlen mérőszámba sűrítette. Ez a mérőszám – főleg annak változása – igen egyszerű, jól értelmezhető módon jelezte a menedzsment számára a befektetés kockázatosságát. A későbbiek során a különböző VaR technikák – főleg az Európai Unió tagállamaiban – részévé váltak azon bankfelügyeleti előírásoknak, melyek alapján mindenfajta árfolyam-ingadozás jellemezhető, tehát a kockázatos portfóliót kezelni kell.

A VaR mutató, melyet kockáztatott értékként szoktak hivatkozni a magyar szakirodalomban, arra a kérdésre adja meg a választ, hogy bizonyos biztonsági szint mellett, adott időszak alatt mekkora maximális portfólióveszteség várható. Erre a kérdésre a hozamadatok ismeretében, illetve a hozameloszlások specifikációja után könnyen választ kaphatunk. Ha például 1%-os szignifikancia szinten egy adott portfólió VaR értéke 10 egység, napi hozamadatokból számolva, akkor ez azt jelenti, hogy 99% a valószínűsége annak, hogy egy nap alatt a portfólió értékének csökkenése nem haladja meg a 10 egységet.

Egzakt módon k valószínűség mellett, egységnyi időszakra a VaR az alábbi összefüggés alapján számítható:

$$VaR_k = -F_X^{-1}(k), \qquad (3)$$

ahol a jobb oldalon álló kifejezés az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye inverzének a k helyen vett értéke. Ez hozamok esetén negatív értéket eredményez, így ahhoz, hogy a pozitív kockáztatott értéket megkapjuk, szükség van a -1-el való szorzásra.

A fentiekben a VaR analitikus megközelítését mutattuk be. Meglévő – adott időszakot jellemző – hozamadatok esetében nem szükséges az analitikus eloszlás megadása. A hozamokat növekvő sorrendbe rendezve kaphatjuk meg a keresett megbízhatósági szint melletti VaR értékét. Attól függően, hogy az adott megbízhatósági szinten, illetve annak közvetlen környezetében lévő hozamértéket hova soroljuk, megadható a historikus (diszkrét hozamértékeken alapuló) VaR formulája. Szokás az egyes kvantilisekhez tartozó kockáztatott értékek meghatározása.

Az X valószínűségi változó felső, illetve alsó kvantiliseit az alábbi formulákkal adhatjuk meg:

$$x^{(\alpha)} = q^{\alpha}(X) = \inf \{x \in R : P(X \leq x) > \alpha \}, \quad (4)$$

$$x_{(\alpha)} = q_{\alpha}(X) = \inf \{x \in R : P(X \leq x) \geq \alpha \}. \quad (5)$$

Megjegyezzük, hogy

$$x^{(\alpha)} = \sup \{x \in R : P(X \leq x) \leq \alpha \},$$

továbbá az

$$\{x \in R : P(X \leq x) > \alpha \} \subset \{x \in R : P(X \leq x) \geq \alpha \}$$

összefüggésből nyilvánvalóan következik az

$$x_{(\alpha)} \leq x^{(\alpha)}$$

reláció.

A kvantilisekből származtathatók a valószínűségi változó adott kvantilishez tartozó VaR értékei.

$$\mathrm{VaR}^{\alpha} = \mathrm{VaR}^{\alpha}(X) = q_{1-\alpha}(-X). \quad (6)$$

A VaR annyiban különbözik a varianciától, hogy valóban a veszteséges hozamokra összpontosít. Egyszerűsége mellett előnye, hogy – főként historikus adatokon alapuló – alkalmazása során nem kell semmifajta feltételezéssel élni a portfóliót alkotó eszközök hozamainak eloszlásáról és függőségi struktúrájáról.

A VaR-nak azonban számos hátránya is van. Elméleti hiányossága, hogy nem minden esetben szubadditív. A portfólióvariancia például szubadditív, ami azt jelenti, hogy két különböző portfólió egyesítéséből adódó portfólió varianciája nem nagyobb a porfólió varianciák összegénél. A kockáztatott értékre ez nem minden esetben igaz. Általában bimodális eloszlásoknál sérül a szubadditivitás elve. Ez a probléma tőzsdei hozamok elemzésénél – így esetünkben is – kevésbé releváns, mint például hitelportfóliók esetében.

A szubadditivitás hiányának következménye, hogy a portfólió kockáztatott értékének több helyi szélsőértéke is lehet, így a VaR minimalizálása mellett meglehetősen nehézkes optimális portfóliót kialakítani.

A VaR megközelítés egyik fontos problémája még, hogy küszöbértékként nem veszi figyelembe a küszöbérték feletti veszteségek eloszlását, statisztikai jellemzőit. Ennek következtében érzéketlen a megbízhatósági szint csekély megváltozására. A megbízhatósági szint minimális megváltoztatása általában nem módosítja a VaR értéket. Bizonyos szint feletti változtatás viszont ugrásszerű VaR módosulást okoz.

(A VaR-ral kapcsolatos problémák bővebb kifejtése megtalálható Acerbi és társai tanulmányában, Acerbi, C – Nordino, C – Sistori, C., 2001).

A CVaR-modell

A VaR-ral kapcsolatos elméleti és gyakorlati problémák indították a kutatókat arra, hogy új kockázati mértékeket definiáljanak. Acerbi és Tasche (Acerbi, C. – Tasche, D., 2002) dolgozata alapján mutatjuk be a kockázatmértékek új generációját. A korábban megfogalmazott hiányosságokra lehet válasz az alább definiált farok átlag (Tail Mean) mutató.

$$TM_{\alpha} = \alpha^{-1}\{E[X1_{(X \leq x_{(\alpha)})}] + x_{(\alpha)}(\alpha - P(X \leq x_{(\alpha)}))\}, \quad (7)$$

ahol $1_{(X \leq x_{(\alpha)})}$ az $(X \leq x_{(\alpha)}$ esemény indikátor változója.

A farok átlag mutatóból az alábbiak szerint származtatható a várható veszteség mutatója (Expected Shortfall) :

$$ES_{\alpha} = -TM_{\alpha}. \quad (8)$$

A várható veszteség mérőszáma rendelkezik a VaR előnyeivel, tehát tényleges veszteséget mér, egyszerűen számolható, ugyanakkor kiküszöböli annak hátrányait. Igazolható, hogy a mutató szubadditív, figyelembe veszi a szignifikancia szint feletti összes veszteséget és érzékeny a megbízhatósági szint kis változására is. Mindezen előnyök elméletileg alkalmassá teszik arra, hogy segítségével optimális portfóliókat alakítsanak ki. A gyakorlatban azonban ezen feladat elvégzéséhez szerencsésebb a feltételes kockáztatott érték (Conditional Value at Risk) mutatóját választani, mely az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$\mathrm{CVaR}^{\alpha} = \mathrm{CVaR}^{\alpha}(X) = \inf \left\{ \frac{\mathrm{E}(X-s)^{-}}{\alpha} - s : s \in \mathrm{R} \right\}, \quad (9)$$

ahol s egy meghatározott veszteségszintet jelöl.

Acerbi és társai a fent jelzett tanulmányban igazolták, hogy amennyiben X integrálható valószínűségi változó, akkor

$$\mathrm{ES}_{\alpha} = \mathrm{CVaR}^{\alpha}. \quad (10)$$

CVaR-optimalizáló modell

A CVaR^{α} becslése empirikus adatokból vagy kialakított szcenáriókból az alábbi becslőfüggvény segítségével végezhető el:

$$\overline{CVaR^{\alpha}} = \frac{1}{[N\alpha]} \sum_{i=1}^{[N\alpha]} X_{i:N} \quad (11)$$

melyben X rendezett megfigyelt értékei szerepelnek, N a szcenáriók száma, $[a]$ pedig az a valós szám egész részét jelöli.

Rockafellar és Uryasev (Rockafellar, R. T. – Uryasev, S., 2000) dolgozta ki azt a becslőfüggvényt, mely kiküszöböli az előző függvény azon hátrányát, hogy X rendezett megfigyelt értékei szerepelnek benne. Ez az esztimátor a következő:

$$\overline{\mathrm{CVaR}^{\alpha}} = -\psi + \frac{1}{[N\alpha]} \sum_{i=1}^{[N\alpha]} (\psi - X_i)^+ , \qquad (12)$$

ahol ψ segédváltozó. Több elemből álló portfóliók esetében a fenti becslőfüggvény megteremti annak a lehetőségét, hogy lineáris programozás segítségével adott elvárt hozamszint melletti minimális kockázatú portfóliókat alakítsunk ki.

Igazolható, hogy amennyiben a fenti becslőfüggvényt ψ -re minimalizáljuk, a kapott ψ^* értékekre igaz a következő összefüggés:

$$\psi^* \in \left[X_{\alpha}, X^{\alpha}\right]. \qquad (13)$$

Esetünkben – a korábbi jelöléseket megtartva – a lineáris programozási probléma az alábbiak szerint írható fel:

$$\min_{\mathbf{x},\psi} \left[-\psi + \frac{1}{[N\alpha]} \mathbf{e}^{T}\mathbf{z} \right], \qquad (14)$$

ahol

$\mathbf{z}$ = $\mathbf{y} - \mathbf{e}\psi$, a ψ-t meghaladó veszteségek mértéke,
$\mathbf{y}$ = n elemű veszteségvektor (esetünkben a hozamvektor ellentettje: $\mathbf{x} = -\mathbf{r}$),
$\mathbf{x}$ = n elemű súlyvektor,
ψ = skalár, mesterséges változó,
$\mathbf{e}^T$ = n elemű egységvektor.

A minimalizálást – meglévő adatainkra – az alábbi feltételek mellett végeztük el:

$$\mathbf{z} > \mathbf{y}, \qquad (15)$$
$$\mathbf{z} > 0, \qquad (16)$$
$$\mathbf{e}^T\mathbf{x} = 1, \qquad (17)$$
$$\mathbf{r}^T\mathbf{x} = R, \qquad (18)$$
$$\mathbf{x} \geq 0, \qquad (19)$$

ahol

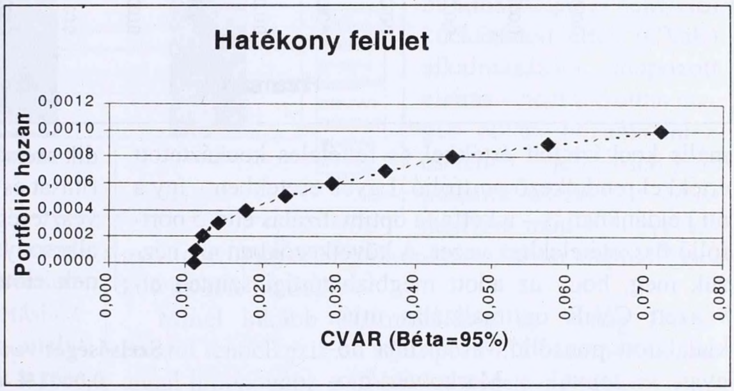
$\mathbf{r}^T$ = n elemű várható hozam vektor,
R = a portfólió elvárt hozama (skalár),
$\mathbf{0}$ = n elemű null vektor.

Igazolható, hogy adott α szignifikancia szinten elvégezve a célfüggvény minimalizálását, a kapott $\mathbf{x}^*$vektorral a minimális CVaR^{α}-val rendelkező portfóliót kapjuk meg, a ψ^*érték pedig ennek a portfóliónak a VaR^{α} mutatója.

A fentiek szerinti optimalizációt négy különböző megbízhatósági szintre végeztük el. A Markowitz-modellhez hasonlóan a CVaR-modellel is lehet hatékony felületet szerkeszteni. A 95%-os megbízhatósági szint (Béta) esetére szerkesztett hatékony felületet (itt határvonalat) mutatja a *3. ábra*.

3. ábra

A CVaR-modell alapján számított hatékony felület



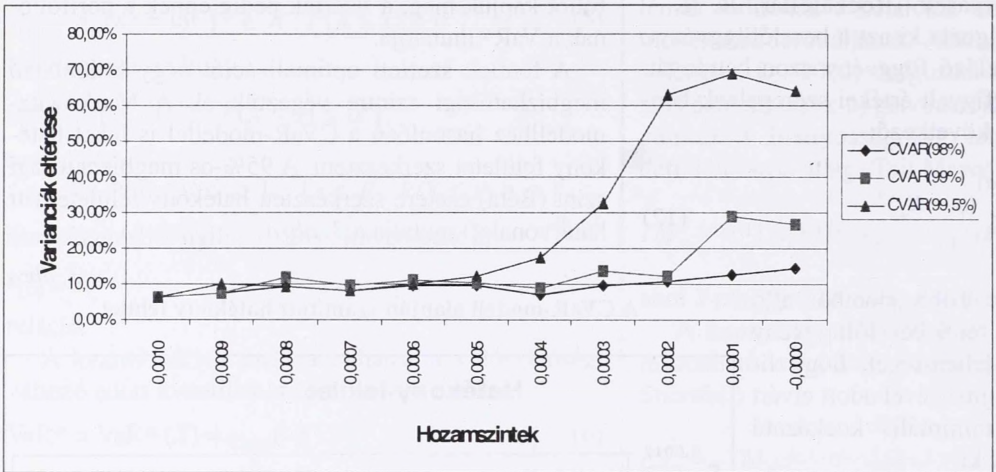
A kétfajta portfólióoptimalizálás eredményeinek összehasonlítása

A portfólióvarianciára mint kockázati mértékre épülő Markowitz-modell adott hozamszint mellett egyetlen eszközkombinációt eredményez, melynek minimális a varianciája. A CVAR minimalizálására épülő eljárás különböző megbízhatósági szinteken eltérő portfólió-összetételt ad. A modellel kapcsolatban fontos döntés annak meghatározása, hogy mit tekintünk olyan extrém veszteségnek, melynek előfordulási esélyét csökkenteni kívánjuk. Például egy ezer megfigyelésből vagy szcenárióból álló portfólió esetében a 99,5%-os béta szint csupán öt veszteségadatot jelent, tehát a modell erre az öt legnagyobb veszteségre összpontosítva végzi el a minimalizálást. 95%-os béta esetén már az 50 legnagyobb portfólió veszteséget fogja a modell minimalizálni. Ennek megfelelően más és más lesz az optimális portfóliók összetétele. A Markowitz-modell a teljes – varianciával mért – hozamingadozás minimalizálása mellett alakítja ki az optimális portfóliót.

Igazolható, hogy a hozamok normális határeloszlása és normális függőségi struktúrája esetén a minimális varianciával rendelkező portfólió egyben a mini-

4. ábra

A Markowitz- modellel és a CVaR-modellekkel optimalizált portfóliók varianciáinak relatív eltérései



mális kockáztatott értékkel és feltételes kockáztatott értékkel rendelkező portfólió. Egyéb esetekben – így a mi példánkban is – a kétfajta optimalizálás eltérő portfólió-összetételekhez vezet. A következőkben azt nézzük meg, hogy az adott megbízhatósági szinten elvégzett CVaR optimalizálás útján kialakított portfólió varianciája hogyan viszonyul a Markowitz-modell által kialakított modell minimális varianciájához. *(4. ábra)*

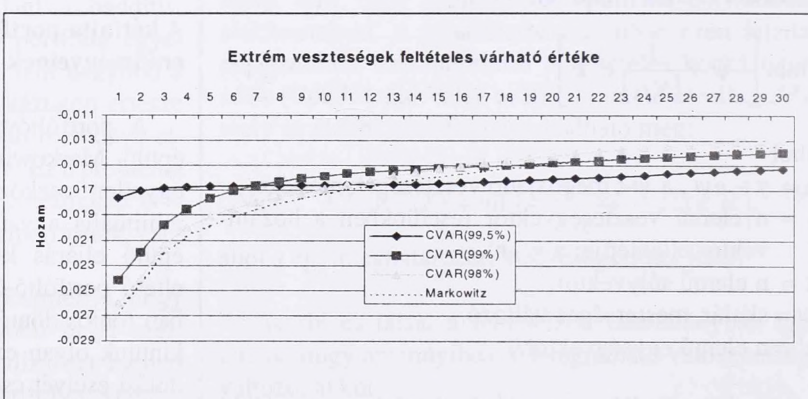
Amennyiben az optimalizálás feltételéül olyan hozamszintet választunk, mely meghaladja a legmagasabb várható értékkel rendelkező eszköz hozamát, az optimalizálásnak nem lesz eredménye. Amennyiben pontosan ezt a hozamszintet adjuk meg, egyetlen elemből fog állni az optimális portfólió. Az elvárt hozamszint csökkentésével a modellek „optimalizálni" kezdenek, azaz megkeresik az adott hozam szerint minimális kockázattal (varianciával, vagy CVaR-ral) rendelkező portfóliókat. Esetünkben 0,0005%-os hozamszintig 10% körüli, illetve ez alatti a CVaR-modellek varianciáinak relatív eltérése. Igazi különbségek az ez alatti elvárt hozamoknál jelentkeznek. Tanulságos a három CVaR-modell egymáshoz viszonyított elhelyezkedése is. A leginkább szélsőséges portfólióveszteségeket minimalizáló 99,5%-os CVaR-modell varianciája tér el a legnagyobb mértékben a Markowitz-modell optimális portfóliójának varianciájától. A jóval több veszteségadatra optimalizáló, 95%-os megbízhatósági szintű CVaR-modellek varianciája kevésbé tér el a Markowitz-modelltől.

A különböző optimalizáló modellek portfólióinak szélsőséges veszteségeit mutatja az *5. ábra*.

A CVaR 99,5%-os modell optimális portfóliója valóban „jól viselkedik" a hozameloszlás szélén, a modellek közül ebben az esetben a legkisebb az extrém hozamok várható értéke. Ez a modell a hatodik-hetedik szélsőséges veszteségérték környékén elveszíti prioritását és átadja a helyét a CVaR 99%-os modellnek. A veszteségek még nagyobb skáláját figyelembe véve az alacsonyabb megbízhatóságú CVaR-modellek kerülnek előtérbe, megközelítve, illetve elérve a Marko-

5. ábra

Szélsőséges veszteségek feltételes várható értékei 0,0001%-os elvárt hozamszint mellett

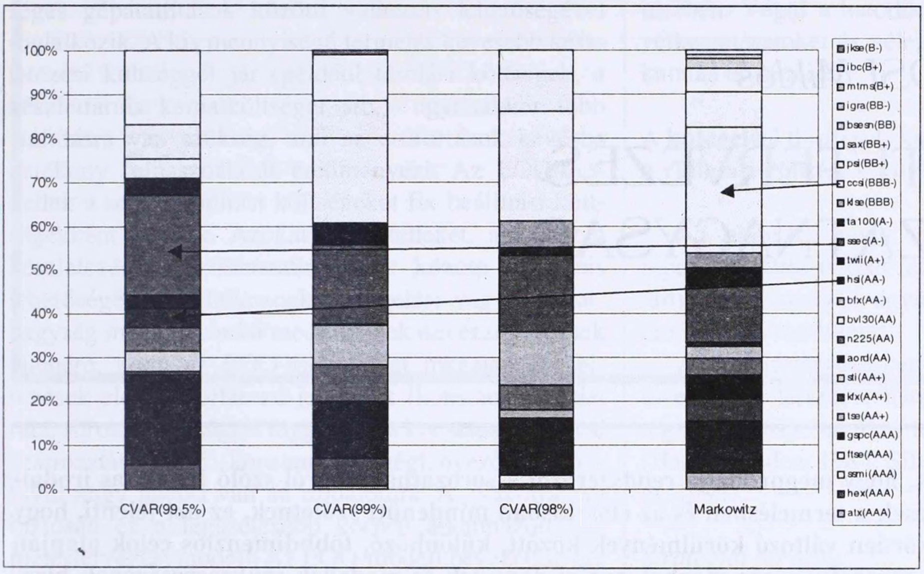


witz-modell szélsőséges hozamokra gyakorolt hatását. Az *5. ábrából* látható, hogy már 98%-os megbízhatósági szinten is hasonlóak az értékek a Markowitz-modelléhez. A 0,0001%-os elvárt hozam melletti eltérő portfólió-összetételeket mutatja a *6. ábra*.

Az ábrából leolvasható, hogy modellenként igencsak eltérő az optimális portfólió-összetétel. Vannak olyan indexek, melyek súlya a CVaR-modellekben kisebb, mint a Markowitz-modellben, sőt a szignifikancia szint növekedésével a súlyuk fokozatosan csökken. Ilyen például az ábrán nyíllal megjelölt *ccsi* index. Mindez azt jelenti, hogy az extrém hozamok

6. ábra

A különböző eljárásokkal, 0,0001%-os elvárt hozamszint mellett optimalizált portfóliók összetétele



szempontjából az adott index kedvezőtlenül viselkedik, ugyanakkor a hozamok varianciával, kovarianciával mért ingadozása kedvező a portfólióalkotáshoz. Ennek ellenkezőjét mutatja például a *ssec* index, melynek a portfólió extrém veszteségeire gyakorolt hatása kedvező, míg a portfólió varianciájához kedvezőtlenebb a hozzájárulása. Van olyan index is – például *ksi,* mely egyik optimális portfólióban szerepel, a másikban viszont nem.

Összegzés

A fentiekben megmutattuk, hogy – a normális eloszláshoz képest – magasabb farok részekkel rendelkező eloszlások esetében létezik olyan megbízható eljárás, mely ezeket a veszteségeket hatékonyan minimalizálja. A feltételes kockáztatott érték (CVaR) alkalmazására alapozott eljárás – nem túlzottan magas elvárt hozamszintek esetében – jelentősen más portfólió-összetételt eredményez, mint a hagyományos portfólióvariancia minimalizáláson alapuló Markowitz-féle modell.

Minél inkább aszimmetrikus és vastag farokrésszel rendelkezik az adott portfólió hozameloszlása, annál indokoltabb a CVaR kockázati mértékként való figyelembe vétele, és az erre alapuló optimalizálási eljárás alkalmazása a kockázatkezelés során.

Felhasznált irodalom

Acerbi, C. – Nordino, C. – Sirtori, C. (2001): Expected Shortfall as a Tool for Financial Management, Working Paper, February 19, 2001 http://www.gloriamundi.org/var/wps.html

Acerbi, C. – Tasche, D. (2002): On the coherence of Expected Shortfall, Working Paper, April 19, 2002 http://www.gloriamundi.org/var/wps.html

Bernstein, P. (1998): Szembeszállni az istenekkel – a kockázatvállalás különös története, Panem Kiadó, Budapest, p. 51-108, p. 207-278.

Bouchaud, J. P. – Potters, M. (1999): Theory Of Financial Risk – From Statistical Phisics To Risk Management, Cambridge University Press, 1999, p. 4-46., p. 91-129.

Crouchy, M. – Galai. D. – Mark, R. (2001): Risk Management, McGraw-Hill Companies, 2001, Inc., p.1-44.

Lévy, P. (1924): Théorie des Erreurs, La Loi de Gauss et Les Loi Exceptionellles, Bull. Soc. Math., 52, p. 49-85.

Lux, T. – Varga, J. (1996): A Pareto hipotézis vizsgálata- értékpapírpiaci hozamok és az extremális hozamok eloszlása, SZIGMA, 1996-4. p. 1-23. o.

Markowitz, H. M. (1952): Portfolio Selection, Journal in: Journal of Finance, Vol. VII, No.1 (March), p. 77-91.

Rockafellar, R. T. – Uryasev, S. (2000):, Optimalization of Conditional Value-at-Risk, Journal of Risk 2 (3). http: //www.gloriamundi. org/var/pub. html

Varga, J. (1998): On distribution for stock returns, in: Managing in Uncertainty: Theory and Practice (eds. P. Pardalos and C. Zopounidis), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 139-151.

Varga, J. (2002): Finanszírozási kockázatmértékek, PTE KTK, kézirat, 2002