BEVEZETÉS A SZTOCHASZTIKUS ANALÍZISBE KÖZGAZDÁSZOKNAK[1]

MEDVEGYEV PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem

A dolgozat célja, hogy rövid bevezetést adjon a folytonos idejű sztochasztikus analízisbe. A hazai pénzügyi oktatási gyakorlat nagyrészt a diszkrét idejű és gyakran diszkrét állapotterű modellekre épül.[2] Ennek oka a folytonos időparaméterű sztochasztikus folyamatok elméletétől való érthető idegenkedés. A folytonos időparaméterű sztochasztikus analízis a modern matematika egyik csúcsteljesítménye,[3] amely teljeskörű matematikai megértése egyrészt feltételezi, hogy az olvasó tisztában van a modern analízis szinte minden részletével; másrészt a matematikai részletek pontos megértése nem sok segítséget jelent a pénzügyi gondolatok elsajátításakor. Ugyanakkor minden technikai nehézség ellenére a sztochasztikus analízis néhány igen egyszerű ötletre épül.[4] A sztochasztikus analízis, más néven sztochasztikus kalkulus célja a klasszikus differenciálszámítás kiterjesztése sztochasztikus folyamatokra. A terület legfontosabb eredménye az Itô-formula. A formula pénzügyi

[1]Beérkezett: 2005. február 25. A dolgozat a Budapesti Corvinus Egyetemen befektetéselemző szakirányon tartott előadásaim alapján készült. Köszönettel tartozom Száz János professzornak, aki mindig bíztatott arra, hogy a sztochasztikus analízis tételeit próbáljam meg közgazdászok számára egyszerűen elmagyarázni. Ugyancsak köszönettel tartozom a Magyar Külkereskedelmi Banknak a vállalati professzori ösztöndíjért, amely nélkül az elmúlt években tudományos munkámat nem tudtam volna folytatni.

[2]V.ö: [10]

[3]V.ö: [6], [9].

[4]A figyelmes olvasó alább több helyen is joggal nehezményezheti a matematikai pontosság teljes hiányát. Integrálokat véges összegekkel helyettesítek, nem teszek különbséget a konvergenciafogalmak között, az integrálok mögé bederiválok, az integrálok sorrendjét minden megfontolás nélkül felcserélem, általában nem teszek különbséget lokális martingál és martingál között stb. Ezek súlyos matematikai hibák, és az alább bemutatott állítások jelentős része a megfogalmazás pontatlansága miatt matematikailag nem is igaz, de remélhetőleg a probléma ,,szabad szemmel azért nem látható". Azt gondolom, hogy egy bevezető pénzügyi matematikai kurzus során a precizitás magasabb foka inkább káros, mint hasznos lenne. A tételek pontos alakja, illetve a bizonyítások megtalálhatóak a Valószínűségszámítás [7] és a Sztochasztikus analízis [8] című könyveimben. Önkritikusan megjegyzem, hogy remélem a hozzáértő olvasó nem fogja a fejemre olvasni az alább leírtakat, és elfogadja azt a véleményemet, hogy egy átlagos matematikai felkészültséggel rendelkező közgazdász számára a sztochasztikus analízis tárgyalásakor a matematikailag közelítőleg is precíz stílus teljesen lehetetlen. Nem tartom kizártnak, hogy ez nem csak az átlagos közgazdász, hanem a nem specifikusan képzett matematikus számára is igen problémás. Ugyanakkor azt gondolom, hogy az itt leírtak megértése segítheti az érdeklődő olvasót a pontos matematikai elmélet megértésében és megemésztésében, ugyanis ha heurisztikusan is, de azért a helyes irányba orientálja. Másképpen fogalmazva, remélem, azért kárt nem teszek avval, hogy a matematika tényeit némiképpen lazán interpretálom és idézem. Önkritikusan azt is be kell vallanom, hogy a dolgozatot nagyrészt a sztochasztikus analízis könyvem ,propagálása" céljából írtam meg, így a dolgozatban mindig megadom a pontos hivatkozást, ahol az olvasó a tételek pontos alakját és a bizonyítást megtalálhatja.

könyvekben legtöbbször idézett alakjában meglepően bonyolult, számomra legalábbis nagyon nehezen megjegyezhető. Valójában azonban, a tárgyalás során szándékosan mellőzött nem csekély apró technikai problémától eltekintve, a formula igen egyszerűen igazolható, de ami jóval fontosabb a tartalma könnyen megérthető és megjegyezhető.

A formula megértésének kulcsa, mint általában a matematikában, a megfelelő nézőpont megválasztása. Ha hajlandók vagyunk az absztrakciós létrán egy kicsit feljebb mászni és hajlandók vagyunk a sztochasztikus analízis bizonyos általános kérdéseit megfontolni, akkor az egyébként homályos kép azonnal kitisztul. Az Itô-formula számos olvasattal rendelkezik: Az alábbiakban a Newton–Leibniz-szabály általánosításaként tárgyaljuk. Az általánosítás oka, hogy a tiszta véletlen hatására kialakuló folyamatok által befutott pályák matematikailag igen komplexek. A pénzügyi matematika kiindulópontja, hogy a kiélezett piaci verseny hatására a pénzügyi eszközök áralakulását leíró ábrák helyes matematikai absztrakcióját olyan folyamatok alkotják, amelyek a szokásos fizikai szemlélettel ellentétben nem rendelkeznek véges úthosszal, miközben a folyamat úgynevezett négyzetes megváltozása véges és pozitív.

A négyzetes megváltozás pozitivitása két következménnyel bír: egyrészt a Newton–Leibniz-formulában megjelenik az Itô-formulában szereplő nevezetes másodrendű korrekciós tag, másrészt a folyamatokban nincsen arbitrázs. Az arbitrázs hiánya, mint alapvető pénzügyi feltétel a piaci folyamatok hatékonyságát jellemző, közgazdasági, pénzügyi észrevétel. A piacon azért nincsen arbitrázs, mert a piac az információt azonnal és tökéletesen feldolgozza; ami a hatékony információfeldolgozás után megmarad az tökéletesen véletlen, amiből, a tökéletes véletlen definíciója miatt, nem lehet pénzt csinálni. Másképpen fogalmazva, ha a négyzetes megváltozás nulla, akkor van arbitrázs, és akkor befektetéselemzés mint önálló tevékenység szükségtelen és értelmetlen.

Bár alább közvetlenül nem jelenik meg, a háttérben egy nagyon jól megértett és tisztázott matematikai–pénzügyi állítás húzódik meg: az eszközárazás alaptétele. A tétel szerint valamely piacon pontosan akkor nincsen lehetőség arbitrázsra, ha egyrészt az alapul vett folyamat úgynevezett szemimartingál[5], másrészt alkalmas, az eredetivel ekvivalens valószínűség, az úgynevezett kockázatmentes valószínűség mellett, az alapfolyamat lokális martingál. Minden nem azonosan konstans lokális martingál négyzetes megváltozása pozitív. A négyzetes megváltozás nem függ az alapul vett valószínűségi mezőtől, csak a folyamat trajektóriáitól, vagyis a négyzetes megváltozás az eredeti, illetve a kockázatmentes valószínűség esetén megegyezik. Az Itô-formula talán

[5] A szemimartingál definíciójára később vissza fogunk térni. A szemimartingálnak nevezett folyamatosztály tagjai definíció szerint két folyamat összegére bonthatóak: az egyik folyamat teljes megváltozása véges, a másik lokális martingál. Sajnos a terminológia történelmileg alakult ki, így nem tökéletes. Jobb lenne, ha a teljes megváltozás helyett elsőrendű megváltozást írhatnánk, vagyis azt mondhatnánk, hogy minden szemimartingál két folyamat összegére bontható: az elsőnek az elsőrendű, a másodiknak a másodrendű megváltozása véges. Érdemes megjegyezni, hogy a szemimartingálok említett felbontása némiképpen eltakarja a szemimartingálok azon kiemelkedő tulajdonságát, hogy az Itô-integrál definiálásakor az integrátor csak szemimartingál lehet, ellenkező esetben a sztochasztikus integráltól elvárt alapvető folytonossági tulajdonságok nem fognak teljesülni. V.ö.: [8] 2.98. tétel, 198. oldal.

legjobb olvasata, hogy a szemimartingálok osztálya zárt a kétszer folytonosan deriválható függvényekkel való transzformációra nézve, és a formula azt adja meg, hogy miként módosul az eredeti szemimartingál említett két komponense a formulában szereplő függvénytranszformáció hatására.

1 Sztochasztikus folyamatok

Sztochasztikus folyamaton mindig kétváltozós függvényt értünk. Az egyik változó, amit általában t vagy s jelöl, az idő; a másik, amit általában ω jelöl, véletlen, ismeretlen paraméter, amely lehetséges értékeit egy (- , $\mathcal{A}, \mathbf{P}$) valószínűségi mezőből veszi fel. Bizonyos szempontból nagyon zavaró, de ugyanakkor igen indokolt konvenció, hogy az ω argumentumot általában elhagyjuk. Ha a képletet a szövegkörnyezetből kiragadjuk, nem világos, hogy egyszerű skalárról, vagy valószínűségi változóról van-e szó. A folyamatot úgy célszerű elképzelni, hogy a $t = 0$ időpontban kiválasztásra kerül az ω véletlen kimenetel értéke, és ami megfigyelhető, az az ω rögzítése mellett keletkező $t \mapsto \xi(t, \omega)$ úgynevezett trajektória, vagyis a folyamat realizációja az ω kimenetel megvalósulása esetén. A sztochasztikus analízis nehézségei abból származnak, hogy az érdekes esetekben a $t \mapsto \xi(t, \omega)$ trajektóriák igen szélsőséges matematikai tulajdonságokkal rendelkeznek.[6] Általában durván nem folytonosak, tele vannak szakadásokkal, kisebb nagyobb ugrásokkal. A sztochasztikus folyamatok általános elmélete igen nehéz, így az alábbiakban csak a folytonos sztochasztikus folyamatok elméletével foglalkozunk. Folytonosságon azt értjük, hogy feltételezzük, hogy a trajektóriák folytonos függvények. A folytonosság igen szigorú megkötés, a pénzügyi tapasztalat azt mutatja, hogy a legtöbb megfigyelt sztochasztikus folyamat nem folytonos, pontosabban a folytonos folyamatok számos a pénzügyi gyakorlatban megfigyelt jelenséget nem megfelelően modelleznek. Ennek ellenére a matematikai tárgyalás egyszerűsége céljából a folytonosság feltételét alább mindig meg fogjuk követelni.[7] A leghíresebb folytonos sztochasztikus folyamat a Wiener-folyamat:

1. Definíció. *A* $\{w(t, \omega)\}_{t \geq 0}$ *sztochasztikus folyamat Wiener-folyamat, ha teljesíti az alábbi öt feltételt:*

1. $w(0) \equiv 0,$
2. *a* w *növekményei függetlenek,*[8]

[6] A továbbiakban csak a folytonos időparaméterű sztochasztikus folyamatok elméletét tárgyaljuk, vagyis feltételezzük, hogy az időparaméter a számegyenes valamilyen intervallumából veszi fel az értékét. Az alkalmazásokban gyakran fel szokás tenni, hogy az időparaméter diszkrét.

[7] Ettől azonban a matematikai tárgyalás nem lesz sokkal egyszerűbb, ugyanis a folytonos sztochasztikus folyamatok általában nem deriválhatóak, és alább némi túlzással nem deriválható függvényekre akarunk differenciálszámítást csinálni.

[8] Vagyis ha $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ tetszőleges időpont sorozat, akkor a $w(t_k) - w(t_{k-1})$ növekmények függetlenek.

3. *a w stacionárius növekményű, vagyis a $w(t+h) - w(t)$ növekmény eloszlása csak a h-tól függ és nem függ a t-től,*

4. *tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre*[9]

$$w(t) - w(s) =_d N\left(0, \sqrt{t-s}\right) ,$$

vagyis a $w(t) - w(s)$ növekmény eloszlása normális, nulla várható értékkel és $\sqrt{t-s}$ szórással,

5. *a w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $t \mapsto w(t, \omega)$ trajektória folytonos.*

Más szavakkal, a $[0, \infty)$ időintervallumon értelmezett w folytonos trajektóriájú, független és stacionárius növekményű folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha minden t időpontban a $w(t)$ eloszlása $N\left(0, \sqrt{t}\right)$. A normális eloszlás tulajdonságai miatt tetszőleges t-re a folyamat nagy valószínűséggel a $\pm 3\sqrt{t}$ parabola által leírt tartományban ingadozik. Ugyanakkor, ha a kimenetelek valamely A halmazán a w trajektóriái korlátosak lennének, akkor a $w(t)/\sqrt{t}$ változók eloszlása minden t-re $N(0,1)$ eloszlású lenne. Mivel az A halmazon a folyamat korlátos, ezért tetszőleges $t_n \nearrow \infty$ idősorozatra az A halmazon a $w(t_n)/\sqrt{t_n}$ nullához tartana, ami csak úgy lehetséges, ha az A halmaz valószínűsége nulla.[10] Másképpen fogalmazva a $w(t)$ trajektóriái a végtelenben lényegében $3\sqrt{t}$ sebességgel „szétspriccelnek". A pontos állítást az úgynevezett iterált logaritmusok tétele tartalmazza, amely szerint

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1\right) = \mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1\right) = 1 .$$

A tétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a trajektóriák a végtelenben egy valószínűséggel a $-\sqrt{2t \ln \ln t} - \varepsilon$ és $\sqrt{2t \ln \ln t} + \varepsilon$ görbék által leírt tartományban tartózkodnak, amelynek a $\pm 3\sqrt{t}$ egy „durva", bár igen szemléletes és „praktikus" közelítése. Érdemes hangsúlyozni, hogy a Wiener-folyamatot definiáló feltételek szorosan összefüggnek, és nem azonos súlyúak. Például a negyedik feltétel szerint a növekmények eloszlása normális. Megmutatható, hogy ez következik a trajektóriák folytonosságából, illetve a növekmények függetlenségéből.[11] A szórásra tett feltétel, a normalizáló konstanstól eltekintve, a stacionaritás feltételével azonos. Ugyancsak hangsúlyozni kell, hogy a Wiener-folyamat elnevezés némiképpen pontatlan. Helyesebb lenne Wiener-típusú folyamatokról beszélni. Két folyamat akkor különböző, ha a

[9] A $=_d$ egyenlőségen azt értjük, hogy a két oldal eloszlása azonos. A $=_d$ jelölést akkor is használni fogjuk, ha az egyik oldalon álló valószínűségi változó eloszlása azonos a másik oldalon álló eloszlással .A továbbiakban $N(\mu, \sigma)$ a μ várható értékkel és σ szórással rendelkező normális eloszlást jelöli. A $\xi =_d N(\mu, \sigma)$ egyenlőség azt jelenti, hogy a ξ eloszlás normális μ, σ paraméterekkel.

[10] V.ö.: [8], A.8. állítás, 334. oldal.

[11] V.ö.: [7], 16.33. tétel, 780. oldal. Ez is mutatja, hogy a trajektóriák folytonosságára tett feltétel igen szigorú. A pénzügyi adatsorok esetén széles körben megfigyelt vastag farok jelenség nehezen illeszthető össze a folytonossági feltétellel.

folyamatot megadó kétváltozós függvények különbözőek. Az irodalomban általában csak Wiener-folyamatról szokás beszélni és a különböző Wiener-folyamatokat általában ugyanavval a w szimbolummal szokás jelölni. Ez nyilván nem okoz gondot, ha az olvasó számára teljességgel világos, hogy a Wiener-folyamat elnevezés nem egyetlen folyamatra, hanem, miként például a Markov-folyamat elnevezés, folyamatok osztályára utal. Természetesen két függvény már akkor különböző, ha az értelmezési tartományuk különböző. Számos olyan matematikai konstrukció létezik, amely segítségével Wiener-folyamat készíthető.[12] A különböző konstrukciókban a folyamatot hordozó (- , $\mathcal{A}, \mathbf{P}$) terek általában különbözőek, így természetszerűleg a folyamatok is különbözőek.[13]

2. Példa. *Ha w Wiener-folyamat, akkor az $u(t) \overset{\circ}{=} tw(1/t)$ folyamat is Wiener-folyamat.*

Ahhoz, hogy valami Wiener-folyamat legyen, a folyamatnak teljesíteni kell a Wiener-folyamatot mint folyamatosztályt definiáló feltételeket. A példában gondot jelent, hogy a $t = 0$ időpontban az u nincsen definiálva, így az u nem is lehet szigorú értelemben Wiener-folyamat. Ugyanakkor a példa értelemszerűen úgy értendő, hogy a $t = 0$ időpontra az u folyamatot a határértékével terjesztjük ki. Első lépésben tehát meg kell mutatni, hogy[14]

$$\lim_{t \to 0} tw\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

A határérték úgy értendő, hogy az - egy olyan részhalmazán, amely valószínűsége 1, a határérték létezik, és értéke éppen 0. Ennek oka a következő: Ha $t \overset{\circ}{=} 1/n$, akkor

$$u(t) = u\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\circ}{=} \frac{w(n)}{n}.$$

A $w(n)$ eloszlása $N(0, \sqrt{n})$, és a $w(n)$ tekinthető n darab független $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó összegének. Másképpen

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{n}\right) &\overset{\circ}{=} \frac{w(n)}{n} = \frac{w(n) - w(0)}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(w(k) - w(k-1))}{n} \overset{\circ}{=} \\ &\overset{\circ}{=} \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{n} =_d \frac{\sum_{k=1}^{n} N(0,1)}{n}, \end{aligned}$$

ahol az összegben szereplő $\xi_k =_d N(0,1)$ tagok függetlenek. A nagy számok

[12] V.ö.: [7], 7.50. tétel, 246. oldal, [8], A.2 pont, 336. oldal.

[13] Hasonlóan problémás például a Poisson-folyamat elnevezés. Ugyanakkor mind a Markov-, mind a Poisson-folyamatok esetén az osztály tagjai nyilvánvaló módon, definíció szerint valamilyen paraméter, vagy paraméterek függvényei, így azonnal világos, hogy az adott elnevezés mögött nem egy folyamat, hanem folyamatok egy családja van. Tapasztalataim szerint a Wiener-folyamat esetén "első ránézésre" még matematikailag jól képzett emberek számára sem azonnal világos a w szimbólum pontos tartalma, így azt gondolom, hogy szemben a két említett folyamatosztállyal, erre célszerű explicite utalni.

[14] V.ö.: [8], A.10. állítás, 335. oldal.

erős törvénye szerint[15] a kifejezés a közös $N(0,1)$ eloszlás várható értékéhez, vagyis nullához tart. Másképpen fogalmazva, ha $u(0) \overset{\circ}{=} 0$, akkor az u folyamat folytonos lesz, vagyis a $t=0$ időpontban megadott definíció miatt az u minden $t \geq 0$ időpontban automatikusan folytonos. Tetszőleges t-re az $u(t)$ eloszlása

$$u(t) =_d tN\left(0, \sqrt{\frac{1}{t}}\right) = N\left(0, \sqrt{t}\right) ,$$

és az egyes időszakokban a növekmények a w megfelelő tulajdonsága miatt nyilván függetlenek maradnak, így az u-ra a Wiener-folyamatot definiáló tulajdonságok teljesülnek, következésképpen az u Wiener-folyamat. ∎

3. Állítás. *A Wiener-folyamatok trajektóriái nem deriválhatóak.*[16].

A Wiener-folyamatok matematikailag legizgalmasabb tulajdonsága, hogy a folyamat trajektóriái egyetlen időpontban sem deriválhatóak. Írjuk fel a differenciahányadost egy tetszőleges t_0 időpontban:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t_0} \overset{\circ}{=} \frac{w(h+t_0) - w(t_0)}{h} .$$

A definíciók alapján evidens, hogy tetszőleges $t_0 \geq 0$ időpont esetén a $v(h) \overset{\circ}{=} w(h+t_0) - w(t_0)$ folyamat szintén Wiener-folyamat. Ezt úgy interpretálhatjuk, hogy a Wiener-folyamat tulajdonság független attól, hogy a folyamatot mikor kezdjük el megfigyelni. A különbségi hányados

$$\frac{\Delta w}{\Delta t_0} \overset{\circ}{=} \frac{v(h)}{h} \overset{\circ}{=} sv\left(\frac{1}{s}\right) \overset{\circ}{=} u(s)$$

módon írható, ahol értelemszerűen $s \overset{\circ}{=} 1/h$. Mivel a v Wiener-folyamat, ezért az $u(s)$ az előző példa szerint szintén Wiener-folyamat. Ha $h \to 0$, akkor $s \to \infty$, így a differenciahányados határértéke az egyes kimenetelekre Wiener-folyamatként „szétspriccel", vagyis a korábban említett módon a végtelenben egyre jobban ingadozik, így a határérték nem létezik. ∎

4. Példa. *A tökéletes véletlen: martingálok.*

Heurisztikusan a martingálokat a fair szerencsejátékokkal szokás azonosítani, de a két fogalom azonosítása csak azért nem megfelelő, mert nem tudjuk, hogy mit jelent a „fair szerencsejáték" kifejezés. Egy szerencsejáték pontosan akkor fair, ha a játék kumulált nyereménye martingált alkot! Egy másik definíció, hogy egy játék fair, ha a játékban való részvételért nem jár kompenzáció. De mi a kompenzáció definíciója, milyen folyamatokat tekinthetünk kompenzációnak? Egy további definíció szerint egy játék fair,

---

[15] A nagy számok erős törvénye szerint független, azonos eloszlással rendelkező változók számtani átlaga egy nulla valószínűségű eseménytől eltekintve a közös eloszlás várható értékéhez tart. A véges határértékhez való konvergencia szükséges és elegendő feltétele annak, hogy a közös eloszlásnak legyen várható értéke.

[16] V.ö.: [8] A.7. tétel, 332. oldal.

ha az eredménye tökéletesen véletlen. De mikor lesz egy sorozat eredménye teljesen, vagy tökéletesen véletlen? Mikor tekintsünk egy $(\xi_k)_k$ sorozatot teljesen véletlennek? Egyrészről nyilván olyan definíciót akarunk, amely közel áll a fogalom köznapi értelmezéséhez, másrészt olyan fogalmat szeretnénk, amellyel azért „könnyű számolni”. Ha a $(\xi_k)_k$ sorozat tagjai csak korrelálatlanok, akkor a matematikai tapasztalat azt mutatja, hogy a $(\xi_k)_k$ sorozat matematikailag túl általános. A korrelálatlanság túl enyhe megkötés. A korrelálatlan sorozatokkal nehéz dolgozni, így a korrelálatlan sorozatok praktikus okokból nem tekinthetőek a véletlen sorozat megfelelő modelljének.

Kolmogorov egyik alapvető hozzájárulása a valószínűségszámításhoz az volt, hogy megmutatta, hogy ha a $(\xi_k)_k$ sorozat tagjai függetlenek, akkor a $(\xi_k)_k$ sorozattal „könnyű” dolgozni, vagyis elegáns módon beláthatóak olyan tételek, amelyeket a „tökéletesen véletlen” sorozatoktól heurisztikusan elvárunk. A függetlenség fogalmát a bevezető valószínűségszámítási kurzusokon természeti törvényként, a priori kategóriaként szokás bevezetni. Úgy szokás tenni, mintha a függetlenség a tér és idő kategóriájával azonos szinten levő alapkategóriája lenne a szemléletünknek. A sztochasztikus folyamatok elméletét megalapító Doob érdeme, hogy a független, nulla várható értékű sorozat fogalmát felcserélte a martingál fogalmával.

A martingál definíciója a következő: Legyen adva egy $(-\,,\mathcal{A},\mathbf{P})$ valószínűségi mező. Legyen $\mathbb{T}$ a lehetséges időpontok halmaza. Az $\mathcal{A}$ halmazcsalád az összes lehetséges események halmaza. Az $\mathcal{A}$ mellett minden t-re legyenek adva az $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{T}$ eseménycsaládok, amelyek a t időpontig bekövetkezett eseményeket tartalmazzák. Az $\mathcal{F}_t$ interpretációja miatt, ha $s < t$ a $\mathbb{T}$ két lehetséges időpontja, akkor $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, vagyis ha $s < t$, akkor minden az s időpontig megfigyelhető esemény megfigyelhető a t időpontig is. Az $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ matematikai struktúrát filtrációnak mondjuk. Az $(-\,,\mathcal{A},\mathbf{P})$ mező mellett az $(\mathcal{F}_t)_t$ filtrációt is a modell alapadatának tekintjük és a tárgyalás elején rögzítjük. A $\mathbb{T}$ időhalmazon értelmezett $\xi(t)$ folyamatot az $(-\,,\mathcal{A},\mathbf{P},(\mathcal{F}_t)_t)$ alapadatok mellett martingálnak mondjuk, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. A $\xi(t)$ trajektóriái jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel.
2. Minden $t \in \mathbb{T}$ esetén létezik az $\mathbf{M}(\xi(t))$ várható érték és ha $s < t$, akkor $\mathbf{M}(\xi(t) \mid \mathcal{F}_s) = \xi(s)$.

Az első tulajdonság diszkrét időpontokból álló $\mathbb{T}$ esetén természetesen semmitmondó,[17] folytonos időhorizont esetén a martingálok rendelkezhetnek ugrásokkal,[18] de az ugrásokat még infinitezimálisan sem lehet előrelátni, ugyanakkor a folyamatnak az ugrásokon kívül más típusú szakadásai nem

[17] Illetve értelmetlen. Ugyanakkor minden diszkrét idejű sztochasztikus folyamat tekinthető olyan folytonos idejű folyamatnak, ahol a folyamat csak a megadott egész értékű időpontokban ugorhat.

[18] Definíció szerint az ugrások olyan szakadások, ahol a jobb és a bal oldali határérték létezik.

lehetnek. A második tulajdonság szerint a folyamat statisztikailag előrejelezhetetlen, vagyis a $\xi(t)$ érték becslését[19] az $\mathcal{F}_s$ alapján a $\xi(s)$ adja. A folyamat martingál, ha a múltja alapján a jövőjét nem lehet előrejelezni.

Egy folyamat tökéletesen véletlen, ha a múltja nem szolgáltat információt a jövőjére nézve. A legtöbb, amit a múltból a jövőre nézve kiolvashatunk, az a jelen állapot.

Ezen a ponton érdemes egy további filozófiai megjegyzést tenni. A Kolmogorov-féle valószínűségszámítási modellnek van egy alapvető hibája. Mikor is tekintünk egy sorozatot véletlennek? Ha adott valószínűségi változók egy meghatározott tulajdonságokkal rendelkező diszkrét vagy folytonos idejű folyamata. Diszkrét időábrázolás esetén ez azt jelenti, hogy minden ω esetén adott egy $(\xi_k(\omega))_k$ számsorozat. Valójában azonban ilyen nincsen. Egy részvény árának alakulása csak egyszer figyelhető meg. Az általunk vizsgált egy darab részvény, egyetlen realizációja mikor tekinthető véletlen sorozatnak? A kérdés többek között Kolmogorovot is izgatta. Az általa és számos más matematikus[20] által talált válasz a következő: Tegyük fel, hogy adott $(a_n)_n$ számok egy sorozata. Ha a sorozat nem véletlen, akkor van benne valami szabályszerűség. Akkor mondjuk, hogy egy sorozatban van szabály, ha megadható egy olyan eljárás, amely rövidebb, egyszerűbb, mint az eredeti és amelyet alkalmazva reprodukálni tudjuk a sorozatot. Némiképpen pontosabban fogalmazva, ha egy sorozatban van szabály, akkor írható egy olyan számítógépes[21] program, amely előrejelzi a sorozat tagjait.[22]. A program hossza tekinthető a sorozatban szereplő komplexitás mértékének. Ha a lehetséges legrövidebb program n sorból áll, akkor a sorozat komplexitása n. Ha a legrövidebb program hossza, amely a sorozat első n tagjából előrejelzi a sorozat $(n+1)$-edik tagját az n növekedésével arányosan nő, akkor a sorozat véletlen. Vegyük észre, hogy éppen erről van szó a részvények áralakulásának előrejelzése esetén is. Nincs olyan fix hosszú, előre rögzített számítógépes

[19]Természetesen még most is körbeforog a definíció, ugyanis a becslés szót a feltételes várható értékkel definiáljuk. Nem túl jelentős megjegyzés, de talán nem érdektelen hangsúlyozni, hogy ha becslésen nem csak a legkisebb négyzetek módszerét értjük, akkor a terminológia félrevezető, ugyanis léteznek olyan statisztikai becslési eljárások, amelyek nem azonosak a feltételes várható értékkel. A feltételes várható érték pontos matematikai definíciójának megértése komoly matematikai előképzettséget kíván, így a feltételes várható értéket az egyszerűség kedvéért mind általános "becslési eljárást" definiáljuk, vagy inkább interpretáljuk. A feltételes várható érték legegyszerűbb tulajdonságai emlékeztetnek a várható érték megfelelő tulajdonságaira. Vegyük észre, hogy a várható érték, az átlag is egyfajta becslés, ha semmi további információnk nincs, a jövő ,,kézenfekvő" becslése a múlt átlaga. V.ö.: [7] 9.fejezet.

[20]A kérdés nyilván visszamegy a tudományos gondolkodás kezdetéig. A komplexitás fogalmát Kolmogorovtól függetlenül definiáló Chaintin szerint a kérdéssel már Leibniz is foglalkozott. A Leibniz által adott válasz éppen a Kolmogorov–Chaitin-féle komplexitás definíciója: akkor mondjuk, hogy rendelkezésünkre áll egy természeti törvény, ha van olyan szabálygyűjteményünk, amellyel le tudunk írni egy adott jelenséget és a szabálygyűjtemény egyszerűbb, mint a leírandó jelenség.

[21]A számítógépet rögzítjük. Mondjuk az a számítógép, amin a szöveget most írom.

[22]n elemből álló sorozat esetén mindig létezik n sorból álló program, amely a sorozatot visszaadja: `print` a_1, `print` a_2, ... , `print` a_n A kérdés csak az, hogy létezik-e olyan program, amely ennél jóval rövidebb.

program, amely a már ismert adatokból az adatsor következő tagját megadja. A martingál definíciója a véletlen sorozatok éppen ezen tulajdonságát ragadja meg. Nincs olyan statisztikai módszer, amely alapján a múltból a jövő előrejelezhető lenne. Másképpen fogalmazva a sorozat komplexitása a sorozatban levő információ nagyságának mértéke, bármit is jelentsen az információ szó. Ha a sorozat véletlen, akkor a sorozat minden tagja meglepetés, vagyis a sorozat információtartalma nem tömöríthető. A martingál olyan sztochasztikus folyamat, amely megfigyeléséből származó információtartalom nem tömöríthető. ■

2 Itô-féle sztochasztikus integrál

A sztochasztikus analízis legfontosabb fogalma a sztochasztikus integrál. A sztochasztikus integrál, mint minden integrál közelítő összegek határértéke. A közelítő összegek súlyozott összegek, vagyis az integrál mindig súlyozott összegek határértéke. Ennek megfelelően minden integrál esetén meg kell különböztetni a súlyt, amit integrátornak szokás nevezni, illetve az összegzendő értékeket, amit integrandusnak szokás mondani. A különböző integrálfogalmak lényegében csak abban térnek el, hogy miként képezzük az integrál értékét közelítő összegeket, illetve hogyan képezzük a határértékeket. Az integrál heurisztikus tartalma mindig a közelítő összegekből olvasandó le. Az integrál definíció szerint a közelítő összegek által hordozott intuitív fogalmat terjeszti ki a határértékre. A sztochasztikus integrál képzésekor a súlyt valamilyen véletlen, kockázatos folyamat időben való értéknövekedése adja. A pénzügyi matematikában a súly, vagyis az integrátor növekménye valamilyen pénzügyi termék adott időszakban való ármegváltozása, az integrandus pedig a kockázatos termékből az integrálási időperiódus alatt tartott portfólió nagysága. Ennek megfelelően a pénzügyi matematikában a sztochasztikus integrálok a kockázatos termékekből álló portfóliók értékének alakulását megadó sztochasztikus folyamatként interpretálhatóak.

2.1 Négyzetes megváltozás

A sztochasztikus analízis legfontosabb észrevétele, hogy nem minden sztochasztikus folyamat trajektóriái korlátos változásúak,[23] sőt az érdekes folyamatok, mint például a Wiener-folyamat, illetve általában a folytonos martingálok trajektóriái nem korlátos változásúak.[24] Emlékeztetünk, hogy egy f függvényt egy $[a,b]$ szakaszon korlátos változásúnak mondunk, ha létezik egy $K<\infty$ korlát, hogy az $[a,b]$ tetszőleges $(t_k)_k$ felosztása esetén

$$\sum_k \|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq K .$$

[23] V.ö.: [7], 2.126. definíció, 95. oldal.
[24] V.ö.: [8] 1.118. tétel, 79. oldal.

Ha az f képe egy görbe, akkor az $\|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$ a görbe két pontjának távolsága, és a fenti összeg tekinthető valamely, az f által leírt görbét közelítő törtvonal hosszának. A

$$V_{a,b}(f) \overset{\circ}{=} \sup_{(t_k)} \sum_k \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

kifejezés, ahol a szuprémumot az összes felosztáson vesszük, tekinthető az f által leírt görbe hosszának. Ennek megfelelően egy függvényt akkor tekinthetünk korlátos változásúnak, ha az általa leírt görbe hossza véges. Miként közismert, a klasszikus analízisben bevezetett Stieltjes-integrál csak korlátos változású integrátorok esetén értelmezett,[25] így a folytonos martingálok szerinti integrálok az analízisben megszokott módon nem értelmezhetőek. Hangsúlyozni kell, hogy az integrál nem értelmezhetősége nem azt jelenti, hogy az integrálás eredménye értelmetlen, rossz vagy a szemléletnek ellentmondó érték. Ez azt jelenti, hogy a megadott definíció nem ad választ, sem jót, sem rosszat, sem értelmeset, sem értelmetlent. Másik definíciót kell keresni, lehetőleg olyat, amelyet a korábbi, jól bevált esetben alkalmazva a korábbi definíciót kapjuk vissza.

Az egész sztochasztikus analízis kulcsa a négyzetes megváltozás! Az alapgondolat a következő:

Ha az η integrátor $V_{a,b}(\eta)$ teljes megváltozása végtelen, akkor a $\Delta\eta(t_k) \overset{\circ}{=} \eta(t_k) - \eta(t_{k-1})$ növekmények „túl nagyok". Ha az η trajektóriái folytonosak, akkor a $\Delta\eta(t_k)$ jellemzően egynél kisebb, így a $(\Delta\eta(t_k))^2$ kisebb, mint a $|\Delta\eta(t_k)|$, így várhatóan, illetve remélhetőleg az[26]

$$\langle\eta\rangle \overset{\circ}{=} \lim_{\delta \searrow 0} \sum_k [\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})]^2$$

kifejezés véges lesz. Például, ha η Wiener-folyamat, $[a,b] = [0,1]$, és $(t_k)_k$ a $[0,1]$ n egyenlő részre való felbontása, akkor

$$\eta(t_k) - \eta(t_{k-1}) =_d N\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

tehát

$$\begin{aligned} \sum_k [\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})]^2 &\overset{\circ}{=} \sum_k \xi_k^2 =_d \sum_k N\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \\ &= \frac{\sum_k N(0,1)^2}{n}. \end{aligned}$$

A nagy számok törvénye alapján a határérték egy valószínűséggel létezik, és az értéke $\mathbf{M}\left(N(0,1)^2\right) = 1$. Triviálisan látható, hogy ha a $[0,1]$ helyett a $[0,T]$ szakaszt írtuk volna, akkor a határérték T lenne. Ennek megfelelően a

[25] V.ö.: [7] 1.17. következmény, 16. oldal, 17.25. példa, 825. oldal.

[26] δ jelöli a $(t_k)_k$ felosztás finomságát, vagyis $\delta \overset{\circ}{=} \max_k (t_k - t_{k-1})$

Wiener-folyamat négyzetes megváltozása[27] a $[0,T]$ szakaszon T. Ugyanakkor nem csak Wiener-folyamat, hanem tetszőleges martingál esetén létezik véges négyzetes megváltozás,[28] amely a triviális konstans esettől eltekintve mindig pozitív.[29] Hangsúlyozni kell, hogy általában egy martingálra a négyzetes megváltozás függ az időtől és az ω kimeneteltől. A Wiener-folyamat azért a legegyszerűbb nem triviális folytonos sztochasztikus folyamat, mert a négyzetes megváltozása a lehető legegyszerűbb. Vizsgáljuk meg az η Wiener-folyamat teljes megváltozását!

$$\sum_k \left|\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})\right| = \sum_k |\xi_k| =_d \frac{\sum_k |N(0,1)|}{\sqrt{n}} .$$

Ha $\infty > M > 0$ jelöli az $|N(0,1)|$ eloszlás várható értékét, akkor a centrális határeloszlás-tétel miatt minden elegendően finom felosztás esetén, vagyis ha $n \to \infty$

$$\frac{\sum_k |\xi_k| - nM}{\sqrt{n}} =_d \frac{\sum_k |N(0,1)| - nM}{\sqrt{n}} \approx N(0,1) \ ,$$

amiből

$$\sum_k \left|\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})\right| \approx N(0,1) + \frac{nM}{\sqrt{n}} \to \infty \ .$$

Más oldalról ugyanez. A négyzetes megváltozásra

$$\sum_k \left[\Delta\eta(t_k)\right]^2 \le \max_k |\Delta\eta(t_k)| \sum_k |\Delta\eta(t_k)| \ .$$

Mivel a bal oldal egy pozitív konstanshoz konvergál, a jobb oldalon az első tényező a folyamat folytonossága miatt nullához tart, a másik tényezőnek végtelenbe kell tartani, ugyanis ellenkező esetben

$$0 < \langle\eta\rangle \approx \sum_k \left[\Delta\eta(t_k)\right]^2 = 0$$

lenne. Egy folytonos folyamatra, ha a teljes megváltozás véges, akkor a négyzetes megváltozás nulla, ha viszont a négyzetes megváltozás pozitív, akkor a teljes megváltozás végtelen.

2.2 Martingálok négyzetes megváltozása, kompenzátorok

A négyzetes megváltozással kapcsolatos első kézenfekvő kérdés, hogy miként interpretálható. A négyzetes megváltozás eredendően a véletlen ingadozásokat tartalmazó folyamatokhoz rendelt fogalom, így az interpretációja is a véletlen folyamatokkal kapcsolatban fellépő problémákhoz kötődik. Legyen az η folyamat martingál. Az η a martingáltulajdonság miatt definíció szerint

[27] V.ö.: [8] A.5. pont, 346. oldal.

[28] V.ö.: [8] 3.24. állítás 234. oldal.

[29] Amikor a martingál konstans trajektóriákkal rendelkezik. V.ö.: [8] 2.41. állítás, 157. oldal.

tökéletes véletlennek tekinthető. Ez azt jelenti, hogy az η által leírt játék „nyereményfolyamatáért” nem jár kompenzáció, nulla a költsége annak, hogy megszerezzük az η által reprezentált játék kifizetésfolyamatát.

Ugyanakkor az η^2 folyamat esetén a helyzet teljesen más. Az η^2 folyamat értéke minden időpontban nem negatív, sőt általában pozitív, így az η^2 véletlen kifizetés birtoklásáért fizetni kell. Mi az η^2 folyamat fair ára? Természetesen az η^2 fair ára az a folyamat, amelyet az η^2-ből levonva tökéletesen véletlen folyamatot kapunk, vagyis az η^2 ára az a π folyamat, amelyre az $\eta^2 - \pi$ martingál. Az η^2 birtoklásáról bármikor lemondhatunk, a játékból bármikor kiléphetünk, így a π kompenzátor folyamatról kézenfekvő feltenni, hogy monoton nő.[30] Megmutatjuk, hogy az η^2 kompenzátora éppen az $\langle \eta \rangle$, vagyis az $\eta^2 - \langle \eta \rangle$ folyamat martingál.[31] Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\eta(0) = 0$, ugyanis ellenkező esetben a gondolatmenetet az $\eta(t) - \eta(0)$ martingálra alkalmaznánk.

$$\eta^2(t) - \langle \eta \rangle (t) \approx \eta^2(t) - \sum_k (\eta(t_k) - \eta(t_{k-1}))^2 .$$

A négyzetes megváltozásban szereplő zárójelet felbontva

$$\begin{aligned}(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1}))^2 &= \eta^2(t_k) + \eta(t_{k-1})^2 - 2\eta(t_k)\eta(t_{k-1}) = \\ &= \eta^2(t_k) - \eta(t_{k-1})^2 - 2\eta(t_{k-1})(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})).\end{aligned}$$

Ebből következően, ha $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ a $[0,t]$ időszakasz elegendően finom felbontása, akkor

$$\begin{aligned}\eta^2(t) - \langle \eta \rangle (t) &\approx \eta^2(t_n) - \sum_{k=1}^{n} \left(\eta^2(t_k) - \eta^2(t_{k-1})\right) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} 2\eta(t_{k-1})(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})) .\end{aligned}$$

A teleszkopikus összeget kibontva, és felhasználva, hogy a feltétel szerint $\eta(t_0) = \eta(0) = 0$,

$$\eta^2(t) - \langle \eta \rangle (t) = \sum_{k=1}^{n} 2\eta(t_{k-1})(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})) .$$

Megmutatjuk, hogy a

$$\xi(s) \triangleq \sum_{t_k \le s} \eta(t_{k-1})(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})) \triangleq \sum_k d_k$$

[30] Nem folytonos folyamatok esetén célszerű megkövetelni, hogy a π „előrejelezhető” legyen, vagyis a π kompenzátor értékét az ugrás „előtt” ki kell fizetni, vagyis a várható ugrásért a kompenzációt az ugrást megelőzően előre rögzíteni kell, ugyanis az ugrás után már könnyű okosnak lenni. A folytonos folyamatok egyik előnyös tulajdonsága, hogy a négyzetes megváltozás és az úgynevezett előrejelezhető négyzetes megváltozás megegyezik.

[31] V.ö.: [8] 2.32. állítás, 152. oldal.

összegekből álló folyamat martingál. Az $\eta(t_{k-1})$ értéke a t_{k-1} időpontban ismert, így a t_{k-1} időpontban végrehajtott $\mathbf{M}\left(\cdot \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)$ becslések esetén konstansként viselkedik, így ezekből a becslésekből kiemelhető. Felhasználva, hogy az η martingál

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(d_k \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) &\overset{\circ}{=} \mathbf{M}\left(\eta(t_{k-1})(\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) = \\ &= \eta(t_{k-1})\,\mathbf{M}\left((\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) = \\ &= \eta(t_{k-1}) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

így $\mathbf{M}\left(\eta^2(t) - \langle\eta\rangle(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \eta^2(s) - \langle\eta\rangle(s)$, tehát az $\eta^2 - \langle\eta\rangle$ folyamat valóban martingál.

2.3 Martingálok szerinti Itô-integrálás

Tegyük fel, hogy az η martingál és próbáljuk meg értelmezni a

$$\int_a^b \theta(t)\, d\eta(t)$$

integrált.[32] A sztochasztikus integrált egy η folyamat elleni „játék” eredményeként kivánjuk interpretálni. Az interpretáció szerint egy adott t időpontban $\theta(t)$ összeget tartunk az η által reprezentált kockázatos termékből. Nyilvánvaló módon a $\theta(t)$ meghatározásakor csak azokra az információkra támaszkodhatunk, amelyekkel a t időpont bekövetkezésekor már rendelkeztünk. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a $\theta(t)$ a t időpontban az $(- , \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ valószínűségi mező felett valószínűségi változó. Ennek legfontosabb következménye, hogy a $\theta(t)$ értéke az $\mathbf{M}(\cdot \mid \mathcal{F}_t)$ feltételes várható értékből kiemelhető, vagyis a t időpontban végrehajtott becslések során a $\theta(t)$ konstansként viselkedik. Másképpen fogalmazva, ha $\Delta\eta$ jelöli az η folyamat értékének megváltozását a t időpontot követő rövid időszakban, akkor $\theta(t)\Delta\eta$ jelöli a $\theta(t)$ egyedből álló portfólió értékmegváltozását a t időpontot követő időszakban. Mivel a $\theta(t)$ a t időpontban ismert, ezért a $\theta(t)\Delta\eta$ értékváltozás becslése szempontjából a $\theta(t)$ „érdektelen”, elegendő csak a $\Delta\eta$ megváltozást becsülni, így teljesül a következő kiemelési szabály:

$$\mathbf{M}(\theta(t)\Delta\eta \mid \mathcal{F}_t) = \theta(t)\,\mathbf{M}(\Delta\eta \mid \mathcal{F}_t) \ .$$

A továbbiakban ezt gyakran fel fogjuk használni.

5. Definíció. *Tegyük fel, hogy az $I_n \overset{\circ}{=} \sum_k \theta(\tau_k)\Delta\eta(t_k)$ közelítő összegekben τ_k közelítő pontnak a $[t_{k-1}, t_k]$ intervallum $\tau_k = t_{k-1}$ kezdőpontját vesszük. Ilyenkor Itô-féle közelítő összegekről beszélünk.*

A hagyományos integrálelmélet tárgyalásakor hangsúlyozni szokás, hogy a közelítő összegek képzésekor a τ_k közbülső pont tetszőlegesen választható, az integrál értéke független attól, hogy melyik τ_k időpontban számoltuk ki az

[32] Az egyszerűség kedvéért a θ és az η folytonosak.

integrandus közelítő értékét. Az Itô-féle sztochasztikus integrálok esetében ez nincsen így. A közelítő összeget mindig az intervallum kezdőpontjában kell képezni. Matematikai szempontból az Itô-integrál legfontosabb sajátja éppen ez. A közelítő összeg ezen képzési szabálya azonban igen szemléletes, és tulajdonképpen nagyon természetes. Ha az η integrátorfolyamatot kumulált nyereségként értelmezzük, akkor a $\Delta\eta(t_k) \overset{\circ}{=} [\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})]$ növekmény a $[t_{k-1}, t_k]$ időszak alatt elért egységnyi befektetésre jutó nyeremény, következésképpen az időszak alatt elért teljes nyeremény arányos az időszak során megtett $\theta(\tau_k)$ téttel. Ugyanakkor egy fogadásban a tétet mindig a fogadás tárgyát képező véletlen esemény előtt kell megtenni, vagyis a $[t_{k-1}, t_k]$ időszakra eső fogadás nagyságát a t_{k-1} időpontban kell megadni.

6. Példa. *A sztochasztikus integrál értéke függhet a közelítő pont megválasztásának módjától.*

Legyen w Wiener-folyamat és próbáljuk meg definiálni az $\int_a^b w\,dw$ integrált. A közelítő összegekre áttérve

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &\overset{\circ}{=} \sum_k w(t_{k-1})(w(t_k) - w(t_{k-1})) \ , \\ I_n^{(2)} &\overset{\circ}{=} \sum_k w(t_k)(w(t_k) - w(t_{k-1})) \ . \end{aligned}$$

A két összeg közötti egyetlen eltérés, hogy a τ_k közelítő pont az első esetben a részintervallum eleje, a második esetben a vége. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} I_n^{(2)} - I_n^{(1)} &\overset{\circ}{=} \sum_k w(t_k)\Delta w(t_k) - \sum_k w(t_{k-1})\Delta w(t_k) = \\ &= \sum_k (w(t_k) - w(t_{k-1}))\Delta w(t_k) = \\ &= \sum_k (w(t_{k-1}) - w(t_k))^2 \ , \end{aligned}$$

vagyis a két közelítő összeg különbsége éppen a Wiener-folyamat négyzetes megváltozásának közelítő értéke. Ebből következően, ha a két közelítő összegnek van határértéke, akkor a két határérték nem lehet azonos, vagyis az integrál értéke függ a közelítő pont megválasztási módjától. Ez másképpen úgy is fogalmazható, hogy tetszőleges köztes pont megengedése esetén az integrálközelítő összegek sorozata semmilyen konvergenciafogalom esetén sem lehet konvergens. ■

A négyzetes megváltozás pozitivitása erősen felforgatja az integrálelméletet. Tulajdonképpen igen meglepő, hogy ebből a „gyászos” helyzetből mégis van elegáns kiút. Számoljuk ki az

$$I_n \overset{\circ}{=} \sum_k \theta(t_{k-1})[\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})] \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} \theta(t_{k-1})\Delta\eta(t_k)$$

Itô-féle közelítő összeg várható értékét és szórását. A feltételes várható értékre vonatkozó toronyszabály felhasználásával

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(I_n) &= \mathbf{M}\left(\sum_k \theta(t_{k-1})\Delta\eta(t_k)\right) = \sum_k \mathbf{M}(\theta(t_{k-1})\Delta\eta(t_k)) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left(\mathbf{M}\left(\theta(t_{k-1})\Delta\eta(t_k) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left(\theta(t_{k-1})\mathbf{M}\left(\Delta\eta(t_k) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}(\theta(t_{k-1})\cdot 0) = 0,
\end{aligned}$$

ahol természetesen kihasználtuk, hogy az η martingál, vagyis

$$\mathbf{M}\left(\Delta\eta(t_k) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) = 0\ ,$$

és hogy a $\theta(t_{k-1})$ kiemelhető az $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ szerinti feltételes várható értékből. A szórás kiszámolására rátérve, ha $t > s$, akkor

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}(\theta(t)[\eta(t+h)-\eta(t)]\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)]) = \\
&\quad = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\theta(t)[\eta(t+h)-\eta(t)]\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)] \mid \mathcal{F}_t)) = \\
&\quad = \mathbf{M}(\theta(t)\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)]\mathbf{M}([\eta(t+h)-\eta(t)] \mid \mathcal{F}_t)) = \\
&\quad = \mathbf{M}(\theta(t)\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)]\cdot 0) = 0\ ,
\end{aligned}$$

ugyanis a $\theta(t)\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)]$ változó értéke a t időpontban már ismert, ezért kiemelhető a t időponthoz tartozó feltételes várható értékből. Ebből következően az alábbi számolás során a vegyesszorzatok várható értéke nulla:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2(I_n) &= \mathbf{M}\left(\left(\sum_k \theta(t_{k-1})[\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})]\right)^2\right) = \\
&= \mathbf{M}\left(\sum_k\sum_j \theta(t_{k-1})\theta(t_{j-1})\Delta\eta(t_k)\Delta\eta(t_j)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left((\theta(t_{k-1}))^2[\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})]^2\right) \approx \\
&\approx \mathbf{M}\left(\sum_k \theta^2(t_{k-1})[Q_2(t_k)-Q_2(t_{k-1})]\right)\ .
\end{aligned}$$

ahol $Q_2 \overset{\circ}{=} \langle\eta\rangle$ az η négyzetes megváltozása. Az $\langle\eta\rangle$ nagysága a hozzá tartozó intervallum hosszának növelésével monoton nő, tehát az utolsó várható értéken belüli $\sum_k \theta^2(t_{k-1})\Delta\langle\eta\rangle(t_k)$ közelítő összeg a klasszikus módon értelmezhető $\int_a^b \theta^2\, d\langle\eta\rangle$ Stieltjes-integrál egy közelítő összege. Összefoglalva:

Ha az integrálközelítő összegeket az Itô-féle szabály szerint a

$$\sum_k \theta(t_{k-1})[\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})]$$

módon választjuk, és az η integrátorfolyamat martingál, akkor a közelítő összeg várható értéke nulla, varianciája pedig az $\mathbf{M}\left(\int_a^b \theta^2\,d\langle\eta\rangle\right)$ közelítő összege lesz.

Ha a θ folyamat folytonos, és a felosztás finomságát minden határon túl növeljük, akkor a különböző felosztásokhoz tartozó közelítő összegek sztochasztikusan közel kerülnek egymáshoz, vagyis ha az időintervallum felosztását minden határon túl növeljük, akkor az Itô-féle közelítő összegek sorozata a sztochasztikus konvergenciában Cauchy-sorozat lesz. Némiképpen heurisztikusan okoskodva: ha a $(t_k)_k$ felbontás már elég finom, akkor az újabb osztópontok hozzávételével a $\sum_k \theta^2(t_{k-1})\,\Delta\langle\eta\rangle(t_k)$ már alig változik, ugyanis az $\langle\eta\rangle$ súlyfüggvény szerint vett $\int_a^b \theta^2\,d\langle\eta\rangle$ Stieltjes-féle trajektóriánkénti integrálok léteznek, így a felbontás további finomítása már nem változtat az $\mathbf{M}\left(\sum_k \theta^2(t_{k-1})\,\Delta\langle\eta\rangle(t_k)\right)$ szórásnégyzeten. Némiképpen pontosabban, ha I_n és I_m két olyan közelítő összeg, ahol az osztópontok távolsága már kisebb mint $\delta/2$, akkor az $I_n - I_m$ várható értéke nulla, szórása pedig felülről becsülhető az

$$\mathbf{M}\left(\sum_k \varepsilon_\delta^2(t_{k-1})\,\Delta\langle\eta\rangle(t_k)\right)$$

kifejezéssel, ahol $\varepsilon_\delta(t)$ a δ nagysághoz tartozó folytonossági modulus, vagyis

$$\varepsilon_\delta(t) \overset{\circ}{=} \sup\{|\theta(u)-\theta(v)| : u,v\le t, |u-v|\le\delta\} \; .$$

A $\theta(\omega,t)$ trajektóriák folytonossága miatt minden t-re és ω-ra $\varepsilon_\delta(t,\omega)\to 0$, így a Csebisev-egyenlőtlenség miatt elég finom felosztásra tetszőleges rögzített $\kappa > 0$ szám esetén, ha $\delta \searrow 0$, akkor

$$\mathbf{P}(|I_n - I_m| \ge \kappa) \le \frac{\mathbf{D}^2(I_n - I_m)}{\kappa^2} \le \frac{\mathbf{M}\left(\int_a^b \varepsilon_\delta^2\,d\langle\eta\rangle\right)}{\kappa^2} \to 0\;,$$

ugyanis

$$\lim_{\delta\searrow 0}\mathbf{M}\left(\int_a^b \varepsilon_\delta^2\,d\langle\eta\rangle\right) = \mathbf{M}\left(\int_a^b \lim_{\delta\searrow 0}\varepsilon_\delta^2\,d\langle\eta\rangle\right) = \mathbf{M}\left(\int_a^b 0\,d\langle\eta\rangle\right) = 0\;,$$

vagyis ha $\delta \searrow 0$, akkor az $(I_n)_n$ sorozat a sztochasztikus konvergenciában Cauchy-sorozat.

TELJESSÉGI TÉTEL: *A valószínűségi változók halmaza a sztochasztikus konvergenciában teljes, vagyis minden a sztochasztikus konvergenciában Cauchy-sorozat sztochasztikusan konvergens.*[33]

[33] V.ö.: [7] 3.12. állítás, 116. oldal.

Összefoglalva az elmondottakat:

7. Állítás. *Folytonos integrandus és martingál integrátor esetén az* $[a, b]$ *szakaszon képzett Itô-féle közelítő összegek sorozatának a sztochasztikus konvergenciában létezik határértéke, amelyet* $\int_a^b \theta\, d\eta$ *módon fogunk jelölni és a* θ η *szerinti Itô-integráljának fogunk mondani.*[34]

A korlátos változású súlyfolyamatok szerinti Stieltjes-féle sztochasztikus integrálok esetén a közelítő összegek sorozata a köztes pont megválasztási módjától függetlenül egy valószínűséggel az integrálhoz tart, a martingálok szerint vett Itô-integrálok esetén az integrálközelítő összegek nem 1 valószínűséggel, hanem csak sztochasztikusan közelítik az integrál értékét. Az Itô-féle konstrukció lényege, hogy egyrészt a közelítő összegeket speciálisan választjuk, másrészt a trajektóriánkénti konvergenciát a közelítő összegek sztochasztikus konvergenciájára cseréljük. Mivel a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért ha egy sztochasztikus integrál Stieltjes-értelemben létezik, akkor az integrál Itô-értelemben is létezik, vagyis az Itô-féle sztochasztikus integrál a Stieltjes-féle sztochasztikus integrál általánosítása.

2.4 Sztochasztikus integrálok négyzetes megváltozása

Miként láttuk, a sztochasztikus analízis kulcsa a négyzetes megváltozás. Legyen

$$M(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t \theta(u)\, d\eta(u) \ ,$$

ahol feltettük, hogy az integrál értelmes. Számoljuk ki a $t \mapsto M(t)$ integrálfolyamathoz tartozó $t \mapsto \langle M \rangle (t)$ négyzetes megváltozás folyamatot. Definíció szerint

$$\begin{aligned} \langle M \rangle (t) \quad &\approx \quad \sum_{t_k \le t} (\Delta M(t_k))^2 = \sum_{t_k \le t} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \theta(u)\, d\eta(u) \right)^2 \approx \\ &\approx \quad \sum_{t_k \le t} \theta^2(t_{k-1}) (\Delta\eta(t_k))^2 \approx \\ &\approx \quad \sum_{t_k \le t} \theta^2(t_{k-1}) \Delta \langle \eta \rangle (t_k) \approx \int_0^t \theta^2 d \langle \eta \rangle , \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a

$$\begin{aligned} (\Delta\eta(t_k))^2 \quad &\stackrel{\circ}{=} \quad (\eta(t_k) - \eta(t_{k-1}))^2 \approx \Delta \langle \eta \rangle (t_k) = \\ &= \quad \langle \eta(t_k) \rangle - \langle \eta(t_{k-1}) \rangle \end{aligned}$$

közelítő formulát, illetve, hogy elég finom felbontás esetén az $\int_{t_{k-1}}^{t_k} \theta d\eta$ integrál közelíthető a közelítő téglalap $\theta(t_{k-1}) \Delta\eta(t_k)$ területével.[35]

---

[34] V.ö.: [8] 2.12. állítás, 135. oldal.

[35] V.ö.: [8] 3.46. tétel, 249. oldal, 422. oldal.

2.5 Asszociativitási szabály

Tegyük fel, hogy $\eta(u) \overset{\circ}{=} \int_0^u \zeta(s)\, d\rho(s)$, és tekintsük az $\int_0^t \theta(u)\, d\eta(u)$ integrált. Mivel az integrál a közelítő összegek határértéke, ezért

$$\int_0^t \theta(u)\, d\eta(u) \approx \sum_{u_k \leq t} \theta(u_{k-1})\, \Delta\eta(u_k)\ .$$

Az előző alpontban látott gondolatmenettel egyező módon az $\eta(u)$ integrál függvény $\Delta\eta(u_k)$ növekményei az η alakja miatt közelíthetőek a közelítő téglalapok

$$\zeta(u_{k-1})\, \Delta\rho(u_k)$$

területeivel, így

$$\int_0^t \theta(u)\, d\eta(u) \approx \sum_{u_k \leq t} \theta(u_{k-1})\, \zeta(u_{k-1})\, \Delta\rho(u_k) \approx \int_0^t \theta(u)\, \zeta(u)\, d\rho(u)\ .$$

Másképpen fogalmazva, integrálfüggvény szerinti integrálás esetén a két integrál elvégzésének sorrendje „csoportosítható”. A szabályt szokás asszociativitási szabálynak is mondani. Az elnevezés indoka a következő: Ha az integrálokat differenciális formában írjuk fel, akkor $d\eta = \zeta d\rho$, a $\int_0^t \theta(u)\, d\eta(u)$ integrál pedig a

$$\theta d\eta = \theta(\zeta d\rho) = (\theta\zeta)\, d\rho$$

formális szabály szerint alakítható, vagyis az

$$\int_0^t \theta(u)\, d\eta(u) = \int_0^t \theta(u)\, \zeta(u)\, d\rho(u)$$

átalakítás formálisan a differenciális alakban felírt kifejezés átzárójelezése. Vegyük észre, hogy az indoklás érvényes mindenfajta integrálra, így a Stieltjes- és az Itô-féle integrálokra egyaránt használható.[36]

2.6 Lokális martingálok

Az Itô-integrál definíciója alapján a sztochasztikus integrál egy folytonos fogadási folyamat nettó, kumulált eredménye. Az Itô-integrálban szereplő integrátor martingál. A martingálok szokásos interpretációja, hogy fair játékok. Felvethető a kérdés, hogy az η fair játékkal szemben játszott θ stratégiai nettó, kumulált eredménye fair játék-e, vagyis a θ megjátszásának lehetősége az érdekelt feleknek, legalábbis átlagban egyenlő esélyt biztosít vagy sem. Másképpen fogalmazva, milyen feltételek mellett lesz a $t \mapsto \int_0^t \theta\, d\eta$ integrálfolyamat martingál? Tekintsük a folyamat $M(t) \overset{\circ}{=} \sum_{s_k \leq t} \theta(s_{k-1})\, \Delta\eta(s_k)$

[36] V.ö.: [8] 2.63. állítás, 170. oldal, D.16. tétel, 428. oldal.

közelítő összegét. A kiemelési szabály szerint a már többször látott módon okoskodva

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(M\left(t_{k+1}\right) \mid \mathcal{F}_{t_k}\right) &= \sum_{s_i \leq t_{k+1}} \mathbf{M}\left(\theta\left(s_{i-1}\right) \Delta\eta\left(s_i\right) \mid \mathcal{F}_{t_k}\right) = \\ &= M\left(t_k\right) + \theta\left(t_k\right) \mathbf{M}\left(\left[\eta\left(t_{k+1}\right) - \eta\left(t_k\right)\right] \mid \mathcal{F}_{t_k}\right) = \\ &= M\left(t_k\right),\end{aligned}$$

vagyis a diszkrét közelítő összegekből álló sorozat martingál. Fontos hangsúlyozni, hogy a sztochasztikus integrálással kapott $t \mapsto \int_0^t \theta \, d\eta$ integrálfolyamat azonban nem lesz martingál.[37] Ebből a szempontból a diszkrét, illetve a folytonos időábrázoláshoz tartozó modellek lényegesen eltérnek. A tárgyalás során a diszkrét összegek és a folytonos összegek, vagyis az integrálok között nem teszünk különbséget. Ez természetesen súlyos matematikai hiba. Általában a sztochasztikus integrálként csak úgynevezett lokális martingált[38] kapunk, és külön figyelmet kell fordítani arra, hogy mikor kapunk integrálként martingált. A lényegi problémát az jelenti, hogy míg a közelítő összegek várható értéke az η martingáltulajdonsága miatt nulla, a felosztás finomítása során kapott sorozat határértékének várható értéke már nem lesz nulla; általában ugyanis semmi sem biztosítja a határérték és a várható érték felcserélhetőségét.

A lokális martingálok és a martingálok közötti különbségre intuitíve jól rá lehet érezni: a probléma az integrandusok nagyságrendjéből ered. A martingálok ellen játszott valamely szerencsejáték annyiban fair, hogy a stratégia megválasztásakor az egyes lépések során a jövőt nem lehet előrelátni, ezért a téteket mindig a fogadás tárgyát képező esemény előtt kell megtenni. Ebből következően az egyes lépésekben a játék ténylegesen fair. A játék azonban annyiban nem fair, hogy a játszás jogát és a tétek nagyságát nem korlátozzuk. A fogadó fél addig és akkora tétekben fogad amíg akar, illetve amekkorákban akar. A θ folyamatra egyedül azt tettük fel, hogy az értéke csak a múlttól függ, de a nagyságát nem korlátoztuk. Elképzelhető, hogy bizonyos ω kimenetelek esetén a $t \mapsto \theta(t, \omega)$ trajektória nem korlátos módon nő. Ha így áll a helyzet, akkor nagy kockázatot vállalva és korlátlan ideig játszva általában lehet nyerő stratégiát találni. A Wiener-folyamat diszkrét verziójában, a fej vagy irás játékban, a közismert nyerő stratégia a duplázó stratégia, amikor vesztés esetén a nyereményt megduplázzuk. Mivel bármeddig, bármekkora tétben jogunk van fogadni, és bármikor ki lehet szállni, nem túl meglepő módon a fogadó fél mind nyer, sőt elvileg végtelen sokat nyerhet. Másképpen fogalmazva, egy martingál szerinti sztochasztikus integrál azért nem lesz martingál, mert az integrandus kockázata korlátlanul nőhet. Ezért nem lesz a sztochasztikus integrál martingál, csak lokális martingál. A hazárdjátékos célja, hogy a martingálként viselkedő véletlennel szembeni játékban kihasználja, hogy a kumulált folyamat csak lokális martingál és nem martingál. Ha természetesen a játszható θ stratégiákat korlátozzuk, nem engedünk meg

[37]V.ö.: [8] 1.84. példa, 59. oldal.
[38]V.ö.: [8] 1.77. definíció, 56. oldal.

csak „ésszerű” kockázatot tartalmazó stratégiákat, akkor a játék nyereménye martingál marad, vagyis a játék fair marad.[39]

Megmutatható, hogy a sztochasztikus integrál konstrukciója átvihető martingálokról lokális martingálokra is, de evvel nem foglalkozunk.

2.7 Szemimartingálok

Ha egy sztochasztikus folyamat egy korlátos változású folyamat és egy lokális martingál összege, akkor azt mondjuk, hogy a folyamat szemimartingál. Ha a ξ folyamat folytonos

$$X(t,\omega) = V(t,\omega) + L(t,\omega)$$

szemimartingál, akkor értelmezhető az

$$\int_a^b \xi\, dX \overset{\circ}{=} \int_a^b \xi\, dV + \int_a^b \xi\, dL$$

sztochasztikus integrál. Világos, hogy a jobb oldali összeg mind a két tagja értelmes. Az első trajektóriánként vett közönséges Stieltjes-intergál, a másik egy sztochasztikus konvergenciában vett Itô-integrál. Mivel a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, az $\int_a^b \xi dX$ tekinthető a Itô-féle közelítő összegek sztochasztikus konvergenciában vett határértékének. Ha X_1 és X_2 két szemimartingál, akkor definiálható a

$$\lim_{\delta \searrow 0} \sum_k \Delta X_1(t_k)\, \Delta X_2(t_k) \overset{\circ}{=} \langle X_1, X_2 \rangle$$

négyzetes keresztmegváltozás.[40] Ha az X_1 korlátos változású, és az X_2 folytonos, akkor ismételten

$$\left| \sum_k \Delta X_1(t_k)\, \Delta X_2(t_k) \right| \le \max_k |\Delta X_2(t_k)| \sum_k |\Delta X_1(t_k)| \to 0\ .$$

Ebből következően, ha $X_k(t,\omega) = V_k(t,\omega) + L_k(t,\omega)$, ahol a V_k korlátos változású, akkor a szokásos folytonossági feltételek teljesülése esetén

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \langle L_1, L_2 \rangle\ . \tag{1}$$

8. Példa. *Számoljuk ki a*

$$\xi(t) = \int_0^t \eta_1(t)\, d\zeta_1 + \int_0^t \eta_2(t)\, d\zeta_2$$

összeg négyzetes megváltozását.

[39] V.ö.: [8] 2.57. állítás, 165. oldal.

[40] Természetesen a filtrációt előre rögzítettük, így a két folyamat ugyanarra a filtrációra nézve szemimartingál.

Az $\int_0^t \eta_i d\zeta_i \approx \sum_{t_k \leq t} \eta_i (t_{k-1}) (\zeta_i (t_k) - \zeta_i (t_{k-1}))$ növekményei közelítőleg

$$\eta_i (t_{k-1}) (\zeta_i (t_k) - \zeta_i (t_{k-1})) \ ,$$

így a korábban elmondottakkal analóg módon

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle &\approx \sum_k (\Delta\xi (t_k))^2 \approx \sum_k (\eta_1 (t_{k-1}) \Delta\zeta_1 (t_k) + \eta_2 (t_{k-1}) \Delta\zeta_2 (t_k))^2 = \\ &= \sum_k \left[\eta_1^2 (\Delta\zeta_1)^2 + \eta_2^2 (\Delta\zeta_2)^2 + 2\eta_1\eta_2\Delta\zeta_1\Delta\zeta_2\right] \approx \\ &\approx \int_0^t \eta_1^2 \, d \langle \zeta_1 \rangle + \int_0^t \eta_2^2 \, d \langle \zeta_2 \rangle + 2 \sum_k \eta_1\eta_2\Delta\zeta_1\Delta\zeta_2 \approx \\ &\approx \int_0^t \eta_1^2 \, d \langle \zeta_1 \rangle + \int_0^t \eta_2^2 \, d \langle \zeta_2 \rangle + 2 \int_0^t \eta_1\eta_2 \, d \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle , \end{aligned}$$

ahol többször kihasználtuk a négyzetes megváltozás növekményére vonatkozó $(\Delta\zeta)^2 \approx \Delta \langle \zeta \rangle$ formulát, illetve az analóg módon érvényes

$$\Delta\zeta_1\Delta\zeta_2 \approx \Delta \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle$$

közelítő képletet. Ha a ζ_1 folyamat folytonos és korlátos változású, és a ζ_2 folytonos, akkor $\langle \xi \rangle (t) = \int_0^t \eta_2^2 \, d \langle \zeta_2 \rangle$, ugyanis az összeg többi tagjában az integrátor értéke nulla. ∎

2.8 Négyzetes megváltozás és arbitrázs

Miként a bevezetőben jeleztük, a pénzügyi matematika közgazdaságilag a tökéletes piaci verseny hipotézisére épül. Az elmélet kiindulópontja, hogy a verseny tökéletessége miatt a piacon nincsen lehetőség arbitrázsra ugyanis az árak változását nem lehet a múlt alapján előrejelezni. Más oldalról a ,,tökéletesen véletlen" folyamatok által indukált mozgások trajektóriái matematikailag igen sajátos tulajdonsággal rendelkeznek: a tökéletesen véletlen folyamat négyzetes megváltozása pozitív.

Tekintsünk egy n darab kockázatos eszközből álló pénzügyi rendszert. Az egyes eszközök árát a t időpontban jelölje

$$(S_1 (t), S_2 (t), \ldots, S_n (t)) \ .$$

Tegyük fel, hogy az n darab eszközökből álló portfólióban a t időpontban

$$(\theta_1 (t), \theta_2 (t), \ldots, \theta_n (t))$$

darab eszköz van. A portfólió értéke a t időpontban

$$V (t) \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} \theta_k (t) S_k (t) \ .$$

A portfólió értékének megváltozása teleszkópikus összegként számolható: ha $(t_l)_l$ a $[t, T]$ időtartam tetszőleges felbontása, akkor

$$\begin{aligned} V(T) - V(t) &= \sum_l \left(V(t_l) - V(t_{l-1})\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_l \left(\theta_k(t_l) S_k(t_l) - \theta_k(t_{l-1}) S_k(t_{l-1})\right) . \end{aligned}$$

Az elemi számolással ellenőrizhető

$$a_2 b_2 - a_1 b_1 = a_1 (b_2 - b_1) + b_1 (a_2 - a_1) + (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

képlet miatt a $\sum_l \left(\theta_k(t_l) S_k(t_l) - \theta_k(t_{l-1}) S_k(t_{l-1})\right)$ összeg éppen az

$$\int_t^T \theta dS + \int_t^T S d\theta + \langle \theta, S \rangle_t^T$$

közelítő összege. Általában, ha ξ és η két sztochasztikus folyamat, akkor

$$\xi(b)\eta(b) - \xi(a)\eta(a) = \int_a^b \xi d\eta + \int_a^b \eta d\xi + \langle \xi, \eta \rangle_a^b ,$$

feltéve, hogy az integrálok, illetve a négyzetes keresztmegváltozás létezik.[41] Ezt a formulát szokás parciális integrálás formulájának is mondani. Ezt felhasználva a portfólió értékváltozása

$$V(T) - V(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_t^T \theta_k dS_k + \sum_{k=1}^{n} \int_t^T S_k d\theta_k + \sum_{k=1}^{n} \langle \theta_k, S_k \rangle_t^T .$$

9. Definíció. *A $(\theta_k)_{k=1}^n$ portfóliósúlyokat az $(S_k)_{k=1}^n$ árak mellett önfinanszírozónak mondjuk, ha*

$$dV = \sum_{k=1}^{n} \theta_k dS_k ,$$

vagyis önfinanszírozó portfólió esetén a V értékfolyamat megváltozása csak az árak dS_k megváltozásából származik. A sztochasztikus differenciálokat integrálalakban kiírva az önfinanszírozás feltétele azt jelenti, hogy tetszőleges $t < T$ időpontok esetén

$$V(T) - V(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_t^T \theta_k dS_k .$$

10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $(\theta_k)_{k=1}^n$ önfinanszírozó portfóliósúlyok arbitrázst alkotnak, ha $(\theta_k)_{k=1}^n$ súlyokkal képzett V értékfolyamatra $V(0) = 0$,*

[41] A $\langle \xi, \eta \rangle_a^b$ jelölésen értelemszerűen a ξ és az η $[a, b]$ szakaszon vett keresztvariációját értjük. V.ö.: [8] 2.17. állítás, 138. oldal, 3.1. állítás, 211. oldal.

és van olyan T, hogy minden kimenetelre $V(T) \geq 0$ és egy pozitív valószínűséggel rendelkező halmazon a $V(T)$ pozitív.[42]

Tegyük fel, hogy a parciális integrálás formulájában a ξ és az η folyamatok ,,nem elég véletlenek". Ezen most azt a matematikai tulajdonságot értjük, hogy a két folyamat trajektóriái elég regulárisak ahhoz, hogy a $\langle \xi, \eta \rangle$ négyzetes keresztmegváltozás nulla legyen. Ilyenkor a parciális integrálás formulája a jóval egyszerűbb

$$\xi(b)\eta(b) - \xi(a)\eta(a) = \int_a^b \xi d\eta + \int_a^b \eta d\xi$$

alakot ölti. Speciálisan ha $\xi = \eta$, akkor

$$\xi^2(b) - \xi^2(a) = 2\int_a^b \xi d\xi \, .$$

Másképpen fogalmazva, ha a ξ ,,nem elég véletlen", akkor érvényes a

$$d\xi^2 = 2\xi d\xi$$

deriválási szabály. Tegyük fel, hogy $\langle \xi \rangle = 0$ és tekintsük a ξ segítségével megfogalmazható legegyszerűbb (B,S) kötvény-részvény modellt: $B(t) \overset{\circ}{=} 1$ és $S(t) \overset{\circ}{=} 1 + \xi(t)$. A B folyamat alatt természetesen a kötvényt, az S alatt pedig a részvényt értjük. Legyen

$$\theta_B(t) \overset{\circ}{=} -(\xi(t))^2 - 2\xi(t), \quad \theta_S(t) \overset{\circ}{=} 2\xi(t) \, .$$

a beruházási stratégia. A megfelelő értékfüggvény

$$\begin{aligned} V(t) &= \theta_B(t) \cdot B(t) + \theta_S(t) \cdot S(t) = \\ &= -(\xi(t))^2 - 2\xi(t) + 2\xi(t)(1 + \xi(t)) = (\xi(t))^2 \, . \end{aligned}$$

Ha a $\xi(t)$ nem azonosan nulla, akkor a (θ_B, θ_S) pár a (B,S) modellben arbitrázs, ugyanis

$$\begin{aligned} dV &= d(\xi)^2 = 2\xi d\xi = \theta_B \cdot 0 + \theta_S d\xi = \\ &= \theta_B dB + \theta_S dS, \end{aligned}$$

egyenlőség miatt a portfólió önfinanszírozó. Másképpen fogalmazva, egy piacon akkor van lehetőség arbitrázsra, ha a piacon a pénzügyi folyamatok ,,nem elég véletlenek".

---

[42] A definíció nem tökéletes, ugyanis nem zárja ki a duplázó stratégiát, amely a végtelen sok lehetséges t időpont miatt előfordulhat. Éppen ezért folytonos időhorizont esetén az arbitrázs definíciójában fel szokás tenni, hogy az értékfolyamat alulról korlátos, ahol az alsó korlát közgazdaságilag a kereskedést megvalósító személy vagyona, illetve teljes hitelkerete.

3 Itô-formula mint a Newton–Leibniz-szabály általánosítása

A szemimartingálok osztálya meglepően stabil abban az értelemben, hogy egy sor műveletet végrehajtva szemimartingálból szemimartingált kapunk. A szemimartingálok legfontosabb tulajdonságát az Itô-formula tartalmazza.[43]

11. Állítás. *Ha F kétszer folytonosan deriválható n-változós függvény, és $(\xi_k)_{k=1}^n$ folytonos szemimartingálok, akkor*

$$\begin{aligned} F(\xi(t)) - F(\xi(0)) &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi(s))\, d\xi_k(s) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\xi(s))\, d\langle \xi_i, \xi_j \rangle (s) \ . \end{aligned}$$

A bizonyítás nagyon messze vezetne, de azért némi indoklást célszerű adni. Világos, hogy egyfajta Newton–Leibniz-szabályról van szó. Próbáljuk meg így igazolni. Vegyük a

$$F(\xi(t)) - F(\xi(0)) = \sum_{k=1}^{N} \left[F(\xi(t_k)) - F(\xi(t_{k-1}))\right]$$

teleszkópikus felbontást. A közönséges Newton–Leibniz-szabály bizonyítása esetén az

$$\begin{aligned} \left[F(\xi(t_k)) - F(\xi(t_{k-1}))\right] &\approx F'(\xi(\tau_k))\left[\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(\tau_k))\left[\xi_i(t_k) - \xi_i(t_{k-1})\right] \end{aligned}$$

közelítéssel szokás élni. Vegyük észre, hogy az így kapott

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(\tau_k))\left[\xi_i(t_k) - \xi_i(t_{k-1})\right]$$

összeg általában nem konvergens, ugyanis a τ_k közelítő pontokat nem a $[t_{k-1}, t_k]$ szakaszok kezdőpontjának kaptuk, márpedig a sztochasztikus integrál csak akkor konvergens, ha $\tau_k = t_{k-1}$. A teleszkopikus összeget becsülhetnénk másképpen is. Ennek a klasszikus esetben nincs értelme, most azonban célszerű, ha a Taylor-formula által biztosított

$$F'(\xi(t_{k-1}))\left[\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})\right] + \frac{1}{2}F''(\xi(\tau_k))\left(\left[\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})\right]\right)$$

másodrendű közelítéssel élünk. A Taylor-formula szerint a másodrendű tagban levő τ_k továbbra is a $[t_{k-1}, t_k]$ egy köztes pontja, de a τ_k az elsőrendű tagban nem szerepel csak a másodrendűben. Emlékeztetünk rá, hogy a második

[43] V.ö.: [8] 3.2. tétel, 211. oldal.

derivált egy kvadratikus alak, amelyre

$$F''(\xi(\tau_k))[\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\xi_i(t_k)\Delta\xi_j(t_k)\ .$$

Az elsőrendű közelítés éppen az

$$\int_a^b F'(\xi)\,d\xi=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi)\,d\xi_i$$

integrálhoz tart. Mivel a keresztmegváltozás növekményének becslése alapján

$$\Delta\xi_i(t_k)\Delta\xi_j(t_k)\approx\Delta\langle\xi_i,\xi_j\rangle(t_k)\ ,$$

ezért

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\xi_i(t_k)\Delta\xi_j(t_k)\approx\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\langle\xi_i,\xi_j\rangle(t_k)\ ,$$

tehát

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\xi_i(t_k)\Delta\xi_j(t_k) &\approx \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\langle\xi_i,\xi_j\rangle(t_k)\\ &\to \int_a^b\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(t))\,d\langle\xi_i,\xi_j\rangle(t)\ .\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a másodrendű tagokból képzett integrál a négyzetes keresztmegváltozás szerint képzett integrál, vagyis közönséges Stieltjes-integrál, így az a tény, hogy a τ_k nem az intervallum kezdőpontja, nem okoz gondot.

3.1 Itô-formula időtől függő transzformációs függvény esetén

A többdimenziós Itô-formula speciális esete amikor $\eta(s)\overset{\circ}{=}f(s,\xi(s))$, ahol az f kétváltozós, kétszer folytonosan deriválható függvény. Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned}f(T,\xi(T))-f(t,\xi(t)) &= \int_t^T\frac{\partial f}{\partial s}\,ds+\int_t^T\frac{\partial f}{\partial x}\,d\xi+\\ &+\frac{1}{2}\int_t^T\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\,d\langle s\rangle+\frac{1}{2}\int_t^T\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\langle\xi\rangle+\\ &+\int_t^T\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial x}\,d\langle s,\xi\rangle\ .\end{aligned}$$

Miként már láttuk, ha a $\zeta_1(t,\omega)$ folyamat trajektóriái korlátos változásúak, a $\zeta_2(t,\omega)$ folyamat trajektóriái folytonosak, akkor $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = 0$, így a másodrendű tagban tehát két tényező elhagyható, következésképpen[44]

$$f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t)) = \int_t^T \frac{\partial f}{\partial s}\,ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} d\xi + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\langle \xi \rangle \ .$$

Ha

$$\xi(u) \overset{\circ}{=} \int_0^u X(s)\,dw(s) \ ,$$

akkor az integrálok négyzetes megváltozásának képlete szerint

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle (u) &\overset{\circ}{=} \left\langle \int_0^u X(s)\,dw(s) \right\rangle = \int_0^u X^2(s)\,d\langle w \rangle (s) = \\ &= \int_0^u X^2(s)\,ds. \end{aligned}$$

Ezt és az integrálokra vonatkozó asszociativitási szabályt kétszer felhasználva

$$\begin{aligned} f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t)) &= \int_t^T \frac{\partial f}{\partial s} ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} d\xi + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\langle \xi \rangle = \\ &= \int_t^T \frac{\partial f}{\partial s} ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} X\,dw + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} X^2\,ds = \\ &= \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} X^2 \right) ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x} X\,dw \ . \end{aligned} \tag{2}$$

A pénzügyi matematika könyvek[45] gyakran az Itô-formulát ebben az alakban szokták közölni. Ez az alak azonban csak egy nehezen megjegyezhető, némiképpen zavaros speciális formája az általunk tárgyalt, és remélhetőleg jóval világosabb, általános esetnek.

3.2 Parciális és sztochasztikus differenciálegyenletek

Tekintsük a Black–Scholes-féle parciális differenciálegyenletet (PDE):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf, \qquad f(T,S) = \max\{S-K, 0\} \ .$$

Ez speciális esete a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf, \qquad f(T,x) = \Phi(x)$$

[44] V.ö.: [8] 3.4. állítás, 214. oldal.

[45] V.ö.: [2], 78. oldal, [3] 3.10. therorem, 38. oldal, de v.ö.: 3.11. proposition, [4] 220. oldal.

Cauchy-feladatnak, ahol μ és σ a keresett f függvényhez hasonlóan a (t, x) független változók függvényei, az r pedig a t függvénye. A parciális differenciálegyenlet megoldását sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE) segítségével adjuk meg. Tekintsük először az általános PDE-hez tartozó következő úgynevezett Cauchy-problémát:[46]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad f(T, x) = \Phi(x) \ . \tag{3}$$

A parciális differenciálegyenlethez formálisan[47] rendeljük hozzá a

$$d\xi(s) = \mu(s, \xi(s))\, ds + \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) \ , \qquad \xi(t) = x$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Vegyük észre, hogy az idő jelölésére a t helyébe s kerül, a t időparaméter és az x helyparaméter a kezdeti feltételben jelenik meg. Ismételten megjegyezzük, hogy a sztochasztikus differenciálegyenletre felírt, sztochasztikus analízisben megszokott jelölés valójában a tetszőleges $t < T$ időpontokra teljesülő

$$\begin{aligned} \xi(T) - x &= \xi(T) - \xi(t) = \\ &= \int_t^T \mu(s, \xi(s))\, ds + \int_t^T \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) \end{aligned}$$

integrálegyenlőség teljesülését jelenti. Vezessük be az úgynevezett Dynkin-operátort, amely a PDE-ben szereplő x szerint vett deriváltakat tartalmazó tagokból áll:

$$Af \overset{\circ}{=} \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \ .$$

Az A segítségével a (3) PDE

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Af = 0, \quad f(T, x) = \Phi(x) \tag{4}$$

módon írható. Legyen[48] $f(t, x) \in C^2$ az egyenlet megoldása. Az időtől függő (2) Itô-formula alapján

$$\begin{aligned} df(\xi) &= \frac{\partial f}{\partial s} ds + \frac{\partial f}{\partial x} d\xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\langle \xi \rangle = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw \overset{\circ}{=} \\ &\overset{\circ}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial s} + Af \right) ds + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dw. \end{aligned}$$

[46]Vegyük észre, hogy a feladat homogén, vagyis nem tartalmazza az f függvényt, csak a deriváltjait, vagyis az rf tagot elhagytuk.

[47]Hangsúlyozni kell, hogy a hozzárendelés formális, következésképpen mechanikus.

[48]Az $f \in C^2$ jelölés azt jelenti, hogy az f kétszer folytonosan deriválható.

Az egyenlőséget integrálként részletesen kiírva és felhasználva, hogy az f megoldása a PDE-nek, vagyis teljesül a (4):

$$\begin{aligned} f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t)) &= \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial s} + Af\right) ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dw = \\ &= \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dw. \end{aligned}$$

Ha a második tag elég jó,[49] akkor mind a két oldalon várható értéket véve, felhasználva, hogy a sztochasztikus integrál várható értéke nulla

$$\mathbf{M}(f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t))) = \mathbf{M}\left(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma\, dw\right) = 0\,.$$

Mivel a $\xi(s)$ eleget tesz az SDE-nek, ezért a kezdeti feltétel miatt $\xi(t) = x$, tehát az $f(t,\xi(t)) = f(t,x)$ konstans. Az összefüggést átalakítva:

$$\mathbf{M}(f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t))) = \mathbf{M}(f(T,\xi(T))) - f(t,x) = 0\,.$$

Átrendezve

$$f(t,x) = \mathbf{M}(f(T,\xi(T))) = \mathbf{M}(\Phi(\xi(T)))\ ,$$

ahol felhasználtuk, hogy az f megoldása a PDE-nek, tehát minden y-ra $f(T,y) = \Phi(y)$, így $f(T,\xi(T)) = \Phi(\xi(T))$.

Térjünk vissza az eredeti

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf, \qquad f(T,x) = \Phi(x)$$

inhomogén PDE-re. Az inhomogén egyenlet helyett vegyük a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mu\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \qquad h(T,x) = \exp\left(-\int_0^T rds\right)\Phi(x) \overset{\circ}{=} \Psi(x)$$

homogén egyenletet. Vezessük be az

$$f(t,x) \overset{\circ}{=} \exp\left(\int_0^t rds\right) h(t,x)$$

függvényt, vagyis

$$h(t,x) = \exp\left(-\int_0^t rds\right) f(t,x)\ .$$

Mivel

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-\int_0^t r\,ds\right) f(t,x) = \\ &= -r(t)\exp\left(-\int_0^t r\,ds\right) f(t,x) + \exp\left(-\int_0^t r\,ds\right)\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\ , \end{aligned}$$

[49]Vagyis a sztochasztikus integrál nemcsak lokális martingál, hanem valódi martingál.

ezért, felhasználva, hogy az r csak a t függvénye

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial t}+\mu\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}= \\ &= \exp\left(-\int_0^t r\,ds\right)\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-r(t)\,f\right] , \end{aligned}$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=rf \; .$$

A már bemutatott módon a homogén egyenletet megoldva

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{M}\left(h\left(T,\xi(T)\right)\right)=\mathbf{M}\left(\Psi\left(\xi(T)\right)\right)\overset{\circ}{=} \\ &\overset{\circ}{=} \exp\left(-\int_0^T r\,ds\right)\mathbf{M}\left(\Phi\left(\xi(T)\right)\right) , \end{aligned}$$

az inhomogén egyenlet megoldása

$$f(t,x)=\exp\left(-\int_t^T r(s)\;ds\right)\mathbf{M}\left(\Phi\left(\xi(T)\right)\right) \; .$$

Vegyük észre, hogy az **M** várható érték a sztochasztikus differenciálegyenlethez tartozó valószínűség szerint értendő. A sztochasztikus differenciálegyenlet egy matematikai segédeszköz, amely közvetlenül a parciális differenciálegyenlethez tartozik és ezért teljesen független attól, hogy miként jutottunk a parciális differenciálegyenlethez. A derivatív árazás elméletében[50] a parciális differenciálegyenletet egy másik sztochasztikus differenciálegyenletből vezetjük le, amely egyenlet az árak mozgását írja le és amely egyenlet a statisztikailag megfigyelhető valószínűségi mező felett van értelmezve. A parciális differenciálegyenlet megoldásakor használt segédmező azonban egy másik valószínűség,[51] amelyet szokás kockázatmentes valószínűségi mezőnek nevezni és amely elvileg semmilyen kapcsolatban sincsen az eredeti problémában szereplő statisztikailag megfigyelt adatokra támaszkodó valószínűségi mezővel.

Irodalom

1. Arnold, Ludwig: *Sztochasztikus differenciálegyenletek*, Elmélet és alkalmazás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984
2. Baxter, Martin – Rennie, Andrew: *Pénzügyi kalkulus*, Typotex, Budapest, 2002
3. Björk, Tomas: *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford, 1998

[50] V.ö.: [4]

[51] Amely csak a matematikusok által kreált fantáziavilágban létezik.

4. Hull, John C.: *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, London 1997
5. Gihman, I. I., Szkorohod, A. V. *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1975
6. Jacod, Jean – Shiryaev, Albert, N.: *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, Berlin, 1987
7. Medvegyev, Péter: *Valószínűségszámítás*, Aula, Budapest, 2002
8. Medvegyev, Péter: *Sztochasztikus analízis*, Typotex, Budapest, 2004
9. Revuz, Daniel, Yor, Mark: *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin, 1999
10. Száz, János: *Tőzsdei opciók*, Tanszék Kft., Budapest, 1999

INTRODUCING STOCHASTIC ANALYSIS

In the article we present a short, intuitive introduction to stochastic analysis. Our presentation is aimed for economist and we try to discuss only the most elementary properties of the stochastic analysis. Instead of precise proofs we present some simplified intuitive arguments. The central concept of the discussion is the quadratic variation and the Itô's lemma.