

A CSÖDELŐREJELZÉS SOKVÁLTOZÓS STATISZTIKAI MÓDSZEREI ÉS EMPIRIKUS VIZSGÁLATA*

KRISTÓF TAMÁS¹

A tanulmány célja tetszőleges vállalatról nyilvánosan hozzáférhető éves beszámoló adatok és sokváltozós matematikai-statisztikai eljárások segítségével a tudomány jelen állása szerint legmagasabb besorolási pontossággal rendelkező csödelőrejelzési modellek felépítése, több módszer ugyanazon adatbázison való alkalmazásával. A tanulmány bemutatja a csödelőrejelzés szükségességét, történeti háttérét, a négy leggyakrabban alkalmazott módszert, valamint egy empirikus vizsgálat keretében összehasonlítja a négy módszer megbízhatóságát. A modellek eltérő előrejelző erejének magyarázatát módszertani oldalról is bemutatjuk.

TÁRGYSZÓ: Csödelőrejelzés. Diszkriminanciaanalízis. Logisztikus regresszió. Rekurzív particionáló algoritmus. Neurális hálók.

A csödelőrejelzés a XX. és a XXI. század egyik legizgalmasabb pénzügyi-statisztikai kihívásai közé tartozik. Magyarországon – ahogyan a világ többi országában is – napról napra találkozhatunk csödeljárás vagy felszámolási eljárás alá került vállalatokkal. Az immár tömegjelenséggé vált fizetésképtelenné válás miatt egyre erősebb az igény a korszerű, megbízható csödelőrejelzési modellek kidolgozására.

Valamely vállalat gazdálkodási helyzetének jelenbeli és jövőbeni megítéléséhez hagyományosan az éves beszámoló elemzésén át vezet az út. A nyilvánosan hozzáférhető éves beszámoló adatainak elemzésével betekintést nyerhetünk egy tetszőleges vállalat vagyoni, pénzügyi és jövedelmi helyzetébe. Az éves beszámoló adathalmazát a *pénzügyi mutatók* tömörítik az elemzések számára hasznosítható információkká. Az éves beszámoló adatainak felhasználhatóságát a következő tényezők befolyásolják (*Jacobs–Ostreicher* [2000]):

- az adatok múltorientáltsága,
- a különböző számviteli standardok alkalmazása,
- a választott mérlegösszeállítási és értékelési elvek.

A pénzügyi mutatókat – előrejelzési szempontból – tekinthetjük a vállalat jövőjét befolyásoló tényezőknek is. A csödelőrejelzéshez ezért kiemelt figyelmet kell fordítani a

* A tanulmány a Magyar Tudományos Akadémia és a Budapesti Corvinus Egyetem keretein belül működő MTA-BCE Komplex Jövő kutatás Kutatócsoport (kutatócsoport vezető: *Nováky Erzsébet*, DSc) kutatási programjának részeként készült.

E-mail: tamas.kristof@uni-corvinus.hu

vállalat fizetőképességét kifejező fontosabb pénzügyi mutatókra. A pénzügyi mutatók önmagukban azonban nem biztosítanak jövőbeni adatokat, hiszen azokat az elmúlt év(ek) adatai alapján számíthatjuk ki. Mindenesetre, ha más információforrás nem áll rendelkezésünkre, a pénzügyi mutatók segítségével, megbízható előrejelzési-modellezési technikák alkalmazásával tájékozódhatunk a vállalat jövőjéről. Tisztában kell lennünk viszont az ilyen módon előállított információk korlátjaival. A vállalati fizetőképességről leginkább az eladósodottsági, a jövedelmezőségi, a likviditási, a forgási sebesség és a piaci értékelési mutatók szolgáltatnak információkat (*Dorsey–Edmister–Johnson* [1995]). A mutatószámokat két kritérium alapján választják be az előrejelzési modellekbe:

- a mutatók számításához szükséges adatok hozzáférhetők-e,
- a csődelőjelzés korábbi tapasztalatai alapján azok szignifikánsnak bizonyultak-e.

A pénzügyi mutatószámok általános alkalmazása több ellentmondást tartalmaz. Majdnem az összes számviteli tankönyv kiemeli, hogy a különböző iparágak mutatószámai közvetlenül nem hasonlíthatók össze. A pénzügyi mutatókat ezért a vállalat jellegéről és piacáról szóló kiegészítő információkkal (például megtérülési ráta, piaci verseny, forgási sebesség, gazdasági ciklusok) együtt kell értelmezni.

Egy gazdasági esemény a mutatószámok többféle értékét okozhatja, és ugyanazt a mutatót is előidézhetheti többféle gazdasági esemény (*Bernhardsen* [2001]). A gazdasági elemzők ezért a mutatószámok egész gyűjteményét használják a vállalatok megítéléséhez. Ideális esetben az elemzés kiegészül külső információforrásokkal, ami megbízhatóbbá teszi a vállalatról alkotott összképet.

A többtucatnyi nagyságrendben számítható pénzügyi mutatók által szolgáltatott adatok hatalmas információhalmazt képviselnek. A vállalatok jövőbeni megítéléséhez azonban nem pusztán számadatakra van szükségünk, hanem olyan összefüggésekre és belőlük levonható következtetésekre, amelyek alapján ítéletet alkothatunk a vállalat jövőbeni gazdálkodási helyzetéről. Konzisztens ítéletünket az egymással bonyolult kölcsönhatásokban lévő tényezők alapján kell levonnunk. A csődelőjelzés során ezért kulcsfontosságú kérdés, hogy a számviteli adatok milyen összefüggésrendszere alapján lehetséges megkülönböztetni a fizetőképes és a fizetéseképtelen vállalatokat.

A pénzügyi mutatókon alapuló csődelőjelzés szakirodalmában két alapvető irány különíthető el a releváns mutatók meghatározása területén: az első a mutatószámok empirikus (szubjektív) kiválasztása, a második a statisztikai módszereken alapuló (objektív) mutatószám-választás (*Bernhardsen* [2001]). A nemzetközi felmérésekben gyakrabban alkalmazzák az empirikus kiválasztást, viszont a statisztikai módszer nagyobb előrejelzési pontossággal kecsegtet (*Back et al.* [1996]).

Az 1980-as évekig született legtöbb csődelőjelzési tanulmány empirikus megközelítést alkalmazott. Az előrejelzések pontosságának legfőbb kritériuma a mutatószámok megfelelő kiválasztása volt. A pénzügyi mutatószámokat ezért mindig annak alapján választották ki, hogy azok mennyire növelik az előrejelzések pontosságát. Történtek próbálkozások a mutatószámok csődelőjelzési összefüggésben történő elméleti kiválasztására, azonban egyik sem vált a tudományban általánosan elfogadottá, ezért domináns szerepe maradt az empirikus kiválasztásnak, miközben egyre inkább elterjedtek a kiválasztás statisztikai módszerei is.

A statisztikai alapú csődelőrejelzési modellek teljes összhangban elfogadják, hogy van értelme a pénzügyi mutatók összehasonlításának. A korlátozottan alkalmas modellek megítélésekor nem szabad ezt figyelmen kívül hagynunk! A statisztikai módszerek objektivitása kétségkívül előnyt jelent. A szubjektív megítéléseken alapuló mutatószám-csoportosítás nagymértékben függ attól, hogy ki készíti az elemzést-előrejelzést. Ez a fajta bizonytalanság még akkor sem elfogadható, ha a szubjektív előrejelzések sokszor hatékonyabbnak bizonyulnak.

Már az 1990-es évek előtt több csődmodellezőt foglalkoztatott (lásd például *Platt-Platt* [1990]) az a kérdés, hogy miként befolyásolják a vállalatok pénzügyi mutatószámai és az eltérő iparágak teljesítményei a csődbe jutás valószínűségét. A leghatékonyabb csődelőrejelzési modellek ettől kezdve iparág (tevékenység kör) szerinti elkülönítést alkalmaztak a mintába soroláskor a modellváltozók és azok értékeinek iparági sajátosságai miatt.

A CSŐDELŐREJELZÉS TÖRTÉNETE

A csődelőrejelzés hőskorának számító XX. század első kétharmadában nem álltak rendelkezésre fejlett statisztikai módszerek és számítógépek a csődelőrejelzést végzők számára. A fennmaradt és a csődbe jutott vállalatok pénzügyi mutatószámait hasonlították össze, és megállapították, hogy a leggyakrabban alkalmazott eladósodottsági, likviditási, jövedelmezőségi és forgási sebesség mutatószámok a csődbe jutott vállalatok esetében alacsonyabbak, illetve kedvezőtlenebbek voltak (*Fitzpatrick* [1932]).

Az 1960-as évek végéig egyváltozós statisztikai módszerek segítségével ítélték meg a vállalatok fizetőképességét. *Beaver* [1966] harminc, a szakirodalomban gyakran említett pénzügyi mutatót talált relevánsnak a vállalati fizetőképesség jövője szempontjából. Egyváltozós diszkriminanciaanalízis segítségével vizsgálta a mutatókat 79 pár fizetőképes/fizetéképtelen vállalatra. A legjobb eredményt a cash flow és az összes eszköz aránya mutatóval érte el, amely 90 százalékos megbízhatósággal mutatta meg a fizetéképtelenséget egy évvel a csőd bekövetkezése előtt.

Az 1960-as évek végétől a többváltozós diszkriminanciaanalízist alkalmazták csődelőrejelzésre. *Altman* [1968] 33 pár fizetőképes/fizetéképtelen vállalat mintájára alapozva, öt pénzügyi mutatóra, többváltozós diszkriminanciaanalízis segítségével építette fel világhírű csődmodelljét, amely 95 százalékban bizonyult eredményesnek a csődbe jutás előtt egy évvel. A többváltozós diszkriminanciaanalízis bázisán *Altman*, *Haldeman* és *Narayanan* [1977] kifejlesztette a hétváltozós ZETA modellt 58 fizetőképes és 53 fizetéképtelen vállalat mintájára.

Az 1980-as években a diszkriminanciaanalízist egyre inkább kiegészítette és felváltotta a logisztikus regresszió elemzés, amely egészen az 1990-es évek közepéig a leggyakrabban alkalmazott csődmodellezési, -előrejelzési eljárás lett. A vállalati fizetőképesség reprezentatív mintán keresztül történő előrejelzésére először *Ohlson* [1980] alkalmazta a logisztikus regresszió elemzést 105 fizetéképtelen és 2058 fizetőképes vállalat mintájára, ezzel is kifejezve, hogy a fizetéképtelen vállalatok a valóságban kisebb arányt képviselnek, mint a fizetőképesek. A csődbe jutás valószínűségének előrejelzése területén mérföldkönek bizonyult az először *Zmijewski* [1984] által alkalmazott probit-analízis. Szintén az 1980-as évek terméke a rekurzív particionáló algoritmus (*Frydman-Altman-Kao*

[1985]), amely döntési fa formájában ábrázolja a különböző változók és küszöbértékek kombinációit, kiválasztva közülük az előrejelzési értékkel bírót.

Hazánkban csak 1991-ben jöttek létre a csődeljárás és a felszámolási eljárás törvényi feltételei² – ezért a magyar csődelőrejelzésnek nincsenek több évtizedes hagyományai. A legkorábbi csődmodellt *Virág Miklós* és *Hajdu Ottó* dolgozta ki 1990-es és 1991-es éves beszámoló adatok alapján, diszkriminanciaanalízis és logisztikus regresszió segítségével (*Virág–Hajdu* [1996]; *Hajdu–Virág* [2001]). A csődmodell alapjául szolgáló adatbázist a Pénzügyminisztérium biztosította. A vizsgálatba bevont feldolgozóipari vállalatok közül 1992 augusztusában egyik fele fizetőképese, másik fele fizetésképtelen volt. A mintában szereplő vállalatok legalább 300 főt foglalkoztattak. A modellépítés során 17 pénzügyi mutatószámot vettek figyelembe.

A fenti szerzőpáros 1996-ban elkészített egy korai csődveszélyt jelző modellcsaládot különböző nemzetgazdasági ágakra és ágazatokra vonatkozóan, diszkriminanciaanalízis segítségével, közel 10 000 gazdálkodóegység³ pénzügyi adatai alapján (*Virág* [1996]). Ennek eredményeként Magyarországon rendelkezésre állnak a nemzetgazdasági ágak és ágazatok azon pénzügyi mutatószámai és a hozzájuk tartozó súlyok, amelyek tekintetében leginkább megkülönböztethető egymástól egy adott nemzetgazdasági ágban vagy ágazatban a csődbe jutott és a túlélő vállalat. Az 1996-os nemzetgazdasági ágakat és ágazatokat átfogó csődmodell-család pontossága – éppen a tevékenységi kör szerinti részletezés miatt – felülmúlta a korábbi modellekét.

1. tábla

Modellszámítások az első hazai csődelőrejelzési modell adatbázisán (n=156)
(százalék)

Megnevezés	Alkalmazott csődelőrejelzési módszer		
	Diszkriminanciaanalízis	Logisztikus regresszió	Neurális háló
Rontott fizetőképese	26,0	15,6	11,5
Rontott fizetésképtelen	18,2	20,8	15,4
Összes rontott	22,1	18,2	13,5
Besorolási pontosság	77,9	81,8	86,5

Az 1990-es évektől a mesterséges intelligencia módszercsaládba tartozó neurális hálók új lendületet adtak a csődelőrejelzés megbízhatóságának javításához (*Kristóf* [2004]). Egy 2004 közepén az első hazai csődmodell mintáján *Virág Miklóssal* közösen elvégzett empirikus vizsgálat kiinduló feltevése a nemzetközi tapasztalatokat figyelembe véve az volt, hogy a diszkriminanciaanalízis és a logisztikus regresszió elemzés alapján készített modellekhez viszonyítva magasabb besorolási pontossággal rendelkező csődmodelleket kaphatunk, amennyiben a nemlineáris összefüggések leképezésére, valamint a mintafelismerésre alkalmas neurális hálókat használjuk a vállalatok fizetőképese és fizetésképtelen osztályokba való sorolására (*Virág–Kristóf* [2005]). A végrehajtott empirikus vizsgálat igazolta hipotézisünket, hiszen az első hazai csődmodell megfigyelési egységein és pénz-

² Lásd az 1991. évi XLIX. törvényt a csődeljárásról, a felszámolási eljárásról és a végelszámolásról.

³ Korábban ekkora nagyságrendű minta alapján nem végeztek csődmodell számításokat.

ügyi mutatóin a neurális háló a diszkriminanciaanalízis besorolási pontosságát 8,6 százalékponttal, a logisztikus regresszióét 4,7 százalékponttal haladta meg. (Lásd 1. táblát.) A táblában szereplő hibák és besorolási pontosságok az eredeti megfigyeléseknek a csődmodellekbe történő visszahelyettesítése alapján kerültek meghatározásra.

A CSŐDELŐREJELZÉS MÓDSZEREI

A történeti háttér áttekintése során láthattuk, hogy csődelőrejelzés számos sokváltozós matematikai-statisztikai eljárás segítségével végezhető. A következő alfejezetek a csődelőrejelzés nemzetközi szakirodalmában leginkább kiemelkedő négy módszer tömör ismertetését tartalmazzák, az egyes módszerek első alkalmazásának időrendi sorrendjében. Az empirikus vizsgálat mind a négy eljárással végrehajtásra került.

Diszkriminanciaanalízis

A többváltozós diszkriminanciaanalízis olyan eljárás, amely előre definiált osztályokba sorolja a több változó szerint jellemzett megfigyelési egységeket (*Altman* [1968]). Főként kvalitatív függő változók esetén használják, ami csődelőrejelzés esetén a fizetőképes és a fizetéképtelen osztályokat jelenti. A többváltozós diszkriminanciaanalízis egyidejűleg elemzi több független kvantitatív változó eloszlását, és olyan osztályozási szabályt állít fel, amely lineáris kombináció formájában tartalmaz több súlyozott független változót, és a lehető legjobban elválasztja az osztályokat. Az eljárás alkalmazásának követelményei (*Ooghe et al.* [1999]):

- a mutatószámok értékei többdimenziós normális eloszlást mutassanak mindkét osztályban,
- a kovariancia mátrixok azonosak legyenek mindkét osztályban,
- a mutatószámokat statisztikai függetlenség jellemezze.

A diszkriminanciafüggvény általános alakja a következő:

$$Z = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \dots + w_n X_n + c ,$$

ahol

- Z – a diszkriminanciaérték,
- w_i – a diszkriminanciasúlyok,
- X_i – a független változók (pénzügyi mutatók),
- c – a konstans,
- $i = 1, \dots, n$, ahol n a pénzügyi mutatók száma.

A vállalatok osztályozásához az egyes vállalatok adataiból kiszámított mutatószám-értékeket kell behelyettesíteni a lineáris kombinációt képező diszkriminanciafüggvénybe. A diszkriminanciaanalízis során k osztályhoz k számú diszkriminanciafüggvényt kell elkészíteni. A megfigyelések pénzügyi mutató értékeit mind a k függvénybe be kell helyettesíteni. A besorolás abba az osztályba történik, amelyik függvény esetében magasabb diszkriminanciaértéket kapunk. A csődelőrejelzés esetén tehát két diszkriminanciafüggvény készül.

Kétosztályos esetben lehetőségünk van a fizetőképes és a fizetéképtelen diszkriminanciafüggvények különbsége alapján egyetlen függvényt létrehozni. Ekkor Z azt az értéket jelenti, ami elválasztja egymástól a fizetőképes és a fizetéképtelen vállalatokat.

A diszkriminanciaanalízis alkalmazásának előnye, hogy dimenziócsökkentést hajt végre az állapotterben (Füstös *et al.* [2004]). Ez azt jelenti, hogy adott k számú osztály mentén $(k-1)$ dimenzióban kell modellezni, vagyis a csodelőrejelzés két osztályában a probléma leegyszerűsödik egydimenziós problémára.

A csodelőrejelzés szempontjából releváns pénzügyi mutatók esetében az empirikus vizsgálatok szinte mindegyikében azzal a problémával szembesülünk, hogy a pénzügyi mutatók között multikollinearitás áll fenn, ami sérti a diszkriminanciaanalízis harmadik alkalmazási feltételét. A probléma megoldása a változók számának ésszerű csökkentése a kollinearitás és a szignifikancia egyidejű figyelembevételével.

A szakirodalomban nincsen egységes álláspont a változók csökkentésének módszeréről. Számos modellkísérlet és iteráció végrehajtása szükséges a következő vezérfonalak mentén (Altman [1993]):

- több alternatív diszkriminanciafüggvény szignifikancia vizsgálata, figyelembe véve a független változók relatív hozzájárulását,
- a magyarázó változók közötti interkorreláció elemzése-értékelése,
- különböző mutatószám-kombinációt tartalmazó diszkriminanciafüggvények előrejelző erejének összehasonlító elemzése,
- szakértői megítélés.

A diszkriminanciaanalízis alapú csődmódel diszkrimináló képességét F -próbával tesztelhetjük.

Logisztikus regresszió elemzés

A logisztikus regresszió elemzés (logit) kiválóan alkalmazható a magyarázó változók és a bináris válaszadás valószínűsége között. A magyarázó változók folytonos változók vagy kategóriaképző ismérvek egyaránt lehetnek. Az eredményváltozó *dummy* változó (fizetőképes vagy fizetéképtelen). Az eljárás logisztikus regressziófüggvényt illeszt a bináris (ordinális) adatokra a *maximum likelihood* módszerrel. A maximum likelihood módszer kedvező tulajdonságai azonban aszimptotikusan, nagymintás esetben érvényesülnek, kismintás esetben számos becslési és hipotézisvizsgálati probléma merülhet fel (Hajdu [2004]). Az eljárás az összesúlyozott független változókhoz egy, a mintában szereplő vállalatok csődbe jutásának valószínűségével kifejezett Z értéket rendel. A logisztikus regressziós formula az alábbi:

$$Pr(\text{fizetőképes}) = \frac{e^Z}{1 + e^Z} = \frac{e^{\beta_0 + \sum(\beta_j X_j)}}{1 + e^{\beta_0 + \sum(\beta_j X_j)}},$$

ahol

- β_j – regressziós paraméterek,
- X_j – független változók (pénzügyi mutatók),
- $j = 1, \dots, m$, ahol m a pénzügyi mutatók száma.

A logisztikus regresszió modell felépítésének kulcskérdése a rendelkezésre álló változók számának megfelelő mértékű csökkentése. A logisztikus regresszió elemzés – szemben a diszkriminanciaanalízissel – nem igényli a változók normális eloszlását és az egyező kovariancia mátrixokat a két osztályban, azonban problémát okozhat a több változó együttes alkalmazásakor fennálló multikollinearitás, valamint a nem szignifikáns változók jelenléte.

A változók számának csökkentése leggyakrabban a *backward elimination* módszerrel kerül végrehajtásra. Az eljárás egyesével kizökköböli ki a modell nem vagy kevésbé szignifikáns változóit, folyamatosan újraszámítva a regressziós együtthatókat és a p -értékeket. Számítógépes végrehajtás esetén szabad szemmel követhetők az összes változót tartalmazó modelltől egészen az egyváltozós modellig a szóba jöhető kombinációk. A kollinearitás, a szignifikancia és a besorolási pontosság megfelelő mutatóit együttesen értékelve adódik az optimális előrejelzési modell.

Rekurzív particionáló algoritmus

A rekurzív particionáló algoritmus olyan eljárás, amely egyváltozós elválasztással igyekszik csökkenteni a téves besorolásokat (*Frydman–Altman–Kao* [1985]). A rekurzív particionáló algoritmus döntési fákat vagy más néven klasszifikációs fákat állít elő egyszerű szabályok felállításával. A döntési fa előállítás iteratív folyamat, amely lépésről lépésre kétfelé osztja az adatokat faágakat képezve. Az algoritmus olyan mintából indul ki, amelynek előre ismert a fizetőképes és fizetéképtelen osztályokba való sorolása. Ezután a változókat egyesével megvizsgálva szisztematikusan felépíti a fát, a leginkább elválasztó értékkel rendelkező változók mentén. A cél a lehető leginkább homogén osztályok előállítás. Az algoritmus fő célja, hogy a megfigyeléseket a függő változó szempontjából úgy csoportosítsuk, hogy a csoportokon belüli variancia minél kisebb, míg a csoportok közötti variancia minél nagyobb legyen (*Hámori* [2001]). A rekurzív particionáló algoritmus a logisztikus regresszió elemzéshez hasonlóan nem támasztja követelményként a változók normális eloszlását és az egyező kovariancia mátrixokat a két osztály egyikében sem (*Altman* [1993]). Az algoritmus addig állítja elő az újabb faágakat, ameddig particionálásra alkalmas változókat talál. Az eljárás kulcsfontosságú eleme az első elágazás megtalálása.

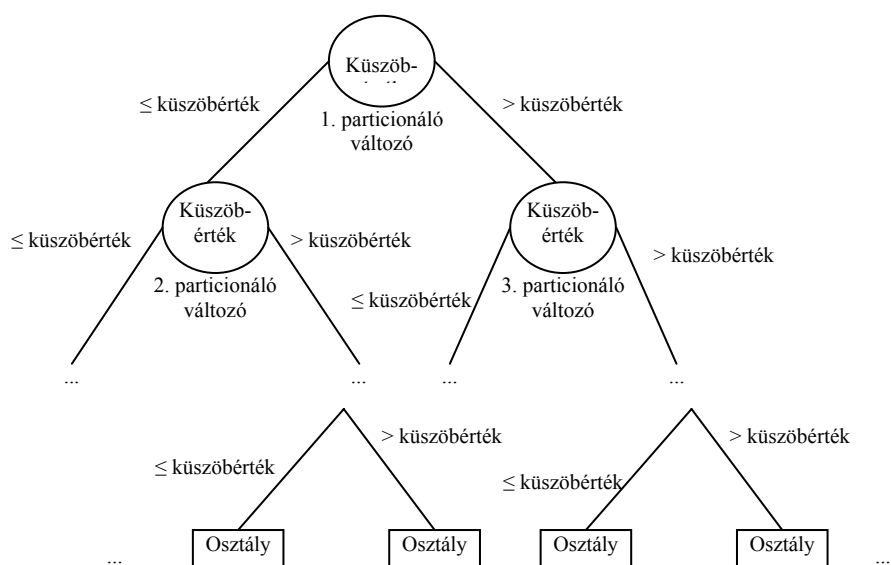
A rekurzív particionáló algoritmus alkalmazása akkor a legegyszerűbb, amikor bináris elválasztások mentén képezünk két osztályt. A csődelőrejelzésben szerencsére éppen ezzel a problémával állunk szemben. A legjobban elválasztó változó meghatározásához az algoritmus sorban kipróbálja az input változókat. Miután az összes lehetséges kétfelé osztás megtörtént, az a változó kerül kijelölésre, amelyik a legkisebb hibát követi el az osztályok elválasztásakor, vagyis amelyik legjobban növeli a homogenitást. A második, harmadik stb. változók is ugyanezzel az eljárással kerülnek kiválasztásra, ameddig a teljes fa fel nem épül. A fa tetején található az első particionáló változó, legalul pedig a fizetőképes és fizetéképtelen osztályok a különböző elágazások után.

A fenti eljárással felépített teljes döntési fa azonban előrejelzési célra nem alkalmas, mivel az az esetek döntő többségében a tanulási adatbázisra specializálódik, az algoritmus által nem ismert adatokon csupán jelentősen romló eredménnyel alkalmazható. A problémát a mesterséges intelligencia modellek túltanulás ellen kitalált módszerével lehet

orvosolni, mégpedig a rendelkezésre álló adatok tanulási és tesztelési részmintákra való felosztásával. A tanulási mintára felépített döntési fát a tesztelő mintán való alkalmazás iterációi során fokozatosan „meg kell nyesni”, ameddig a tanulási és a tesztelő mintákon az osztályba sorolási hibák megfelelően közel nem esnek egymáshoz. A megnyesett döntési fa képezi az előrejelzési modellt, amelyet ezután tetszőleges adatokon ismert megbízhatósággal lehet alkalmazni.

A döntési fák leginkább megszokott ábrázolástechnikája, hogy körökkel jelölik a változókat és négyzetekkel az osztályokat. A körökben lévő számok az elágazási pontnak megfelelő értékeket jelentik. Ha valamely megfigyelés adott változónak megfelelő értéke kisebb vagy egyenlő, mint az elágazás, akkor a bal oldali ágra kerül, különben a jobb oldalra. Az ágakon szereplő számok darabszámok, amelyek a feltételnek eleget tevő megfigyelések számának felelnek meg. A fa alján található négyzetekben az osztályok megnevezése szerepel. Esetünkben 1 jelöli a fizetőképes osztályt és 0 a fizetéképtelen osztályt. A négyzetekből több elágazás nem indul.

1. ábra. Döntési fa



A rekurzív particionáló algoritmus iterációs eljárás, szimulációs kísérletezésen alapszik. Az eljárás segítségével felépített csődmodellen statisztikai próbát, szignifikanciavizsgálatot végrehajtani nem lehetséges. A módszer alkalmazhatóságának fő kritériuma a besorolási pontosság és a gyakorlati hasznosíthatóság.

Neurális hálók

A neurális hálók a biológiai neurális rendszerek elvére felépített, hardver vagy szoftver megvalósítású, párhuzamos, osztott működésre képes információ-feldolgozó eszkö-

zők (Kőrösi–Lovrics–Mátyás [1995]; Kristóf [2002]). A hálók több, egymáshoz kapcsolódó és párhuzamosan dolgozó neuronból állnak, és ily módon próbálják utánozni a biológiai idegrendszer információ-felvételének és feldolgozásának módját. A neurális hálók a hagyományos algoritmikus eljárások helyett más módon, tanulással nyerik el azt a képességüket, hogy bizonyos feladatokat meg tudjanak oldani. A neurális hálók alapeleme az elemi neuron. Az elemi neuron egy több-bemenetű, egy-kimenetű eszköz, ahol a kimenet a bemenetek lineáris kombinációjaként előálló közbenső érték nemlineáris függvénye (Álmos *et al.* [2002]).

A neurális háló neuronok olyan rendszere, amely n bemenettel és m kimenettel rendelkezik ($n, m > 0$), és amely az n -dimenziós bemeneti vektorokat m -dimenziós kimeneti vektorokká alakítja át az információfeldolgozás során. A neuronok összekapcsolásának módja minden háló esetében más és más. A neuronok rétegekbe szerveződnek. A neurális háló három fő rétegből tevődik össze: a bemeneti rétegből, a köztes réteg(ek)ből és a kimeneti rétegből.

A bemeneti réteg olyan neuronokat tartalmaz, amelyek ismert információkból vagy a hálóba betáplált változókból állnak. Minden egyes input neuron kapcsolatban áll a köztes réteggel. A kapcsolatokat a bemeneti neuronok fontossága szerint súlyozzák. A köztes réteg súlyai állandóan változnak a tanulási fázis alatt. A kimeneti rétegben az eredményneuronok találhatóak, amelyek szintén súlyozottan kapcsolódnak a köztes rétegben szereplő neuronokhoz. A csődelőrejelzésnél csupán egy neuronból áll a kimeneti réteg. Az ugyanazon rétegen belüli, valamint a különböző rétegek közötti neuronokat tetszőlegesen sok kapcsolat fűzheti egymáshoz.

A mesterséges neurális hálók példákön keresztül tanulnak, akárcsak biológiai megfelelőik (Gurney [1996]). A tanulási algoritmus az input minták alapján megváltoztatja a kapcsolatok súlyait. A tanulás tehát az a folyamat, amelynek során kialakul a háló súlyozása.

Ha egy neurális hálót első ízben látunk el mintával, a háló véletlenszerű találgatással keresi a lehetséges megoldást. Ezután a háló látni fogja, hogy mennyiben tért el válasza a tényleges megoldástól, és ennek megfelelően módosítja a súlyokat. Ez esetben a tanulás olyan iteratív eljárás, amelynek során a háló által megvalósított leképezést valamely kívánt leképezéshez közelítjük.

Ha egy neurális hálót megfelelő szinten megedzettek, a háló használható elemző-előrejelző eszközként más adatokon is. Ezután azonban a felhasználónak már nem szabad több tanulási fázist lefuttatnia, hanem hagyni kell a hálót csupán „odafelé” irányban dolgozni. Az új inputok beszűrődnek a bemeneti rétegbe, a köztes réteg feldolgozza őket, mintha tanulási fázis lenne, ekkor azonban csak az outputok őrződnek meg, és nem következik be a súlyokat kiigazító hibajavítás. Az odafelé történő futtatás outputja lesz az adatok előrejelzési modellje, amit ezután további elemzéseknek és vizsgálatoknak kell alávetni.

Egy viszonylag egyszerű neurális háló is nagy számú súlyt tartalmaz. Kis minták esetén ez korlátozott szabadságfokot tesz lehetővé, ami gyakran vezet túltanuláshoz (Gonzalez [2000]). A túltanulás az a jelenség, amikor a tanulási folyamat során nem az általános problémát tanulja meg a hálózat, hanem a megadott adatbázis sajátosságait. Ennek kiküszöbölésére fel kell osztani az adatbázist tanulási és tesztelő mintákra. A tanuló-adatbázison végezzük el a tanítást, majd megvizsgáljuk, milyen eredményt ér el a

háló az általa eddig ismeretlen tesztelő mintán. Ha a találati pontosság a tanulási mintához hasonlóan kedvező, akkor a tanulás eredményesnek minősíthető. Ha viszont a tesztelő mintán a háló hibázása jelentős, akkor a hálózat túltanulta magát. A túltanulás leghatékonyabb elkerülési módja az, hogy folyamatosan nyomon követjük a ciklusok során egymással párhuzamosan a tanulási és a tesztelő minta hibáját, és addig engedjük tanulni a hálót, amíg a két hiba közel van egymáshoz, és nem kezd romlani a tesztelő minta hibája. Így adódik az optimális előrejelzési modell.

EMPIRIKUS VIZSGÁLAT

Az alkalmazott módszerek során kizárólag pénzügyi mutatók alapján osztályozzuk a vállalatokat (pontosabban a vállalatok fizetőképességét). A pénzügyi mutatók azonban nyilvánvalóan nem vehetik figyelembe az összes lehetséges fizetéseképtelenségi okot. A menedzsment hozzáértéséről, a versenyhelyzetről, vagy az ágazat fejlődéséről stb. szóló kvalitatív információk szükségképpen kimaradnak a vizsgálatból.

A csődmodellek elkészítésekor azt feltételezzük, hogy az éves beszámolókból megfelelő előrejelzési módszerek alkalmazásával kiolvasható a csődveszély. Ha az adatok kedvezőtlenek, akkor a vállalatot fizetéseképtelennek gondoljuk. A pénzügyi nehézségeknek a csőd valójában azonban csak az egyik lehetséges következménye.

Bármilyen magas megbízhatóságú modelleket dolgozunk ki, el kell ismerni, hogy tökéletes csődelőrejelzési modell nem létezik. Gondoljunk arra, hogy egy pénzügyileg látszólag tökéletesen működő vállalatot egyetlen hibás vezetői döntése csődbe vihet, mások pedig meglehetősen sanyarú körülmények és gazdálkodás mellett is fennmaradhatnak.

Az empirikus vizsgálat az első hazai csődmodell adatbázisán került végrehajtásra, amely 156 vállalat 1991. évi mérleg és eredménykimutatás adatain alapult. A mintában szereplő vállalatok közül 2 bányai, 10 vas- és fémipari, 54 gépipari, 12 építőipari, 8 vegyipari, 38 könnyűipari és 32 élelmiszeripari ágazatba tartozott. A 156 vállalatból az adatgyűjtés idején 78 fizetőképes és 78 fizetéseképtelen volt.

Hangsúlyozni kell, hogy az 1991-es éves beszámoló adatokra felépített csődmodellek a mai viszonyok között már nem állják meg a helyüket, ráadásul a 156 vállalat meglehetősen kis mintának számít. Az előrejelzési módszerek kipróbálására, különböző modellkísérletek végrehajtására és az előrejelzések megbízhatóságának értékelésére azonban az adatbázis kiválóan alkalmazható.

Az első hazai csődmodell adatbázisának alapadataiból 16 pénzügyi mutató reprodukálására került sor. A pénzügyi mutatók mindegyike arányskálán kvantifikálható folytonos változó. A fizetőképesség ténye kategóriaképző ismérv, 1 és 0 értékeket felvehető dummy változó. A pénzügyi mutatókat a rendelkezésre álló mérleg és eredménykimutatás-adatokból a 2. táblában szereplő képletekkel határozhatjuk meg.

A képletek alapján kiszámított pénzügyi mutatókat azonban a csődelőrejelzési módszerek alkalmazása előtt korrigáltuk a vállalatok iparági hovatartozásának megfelelően az iparági átlagos mutatószámokkal.

2. tábla

Az alkalmazott pénzügyi mutatók számításmódja

A mutató megnevezése	A mutató számításmódja
Likviditási gyorsráta	(Forgóeszközök – Készletek) / Rövid lejáratú kötelezettségek
Likviditási mutató	Forgóeszközök / Rövid lejáratú kötelezettségek
Pénzeszközök aránya (százalék)	(Pénzeszközök / Forgóeszközök) × 100
Cash flow és összes tartozás aránya	Cash flow / Összes tartozás
Forgóeszközök aránya (százalék)	(Forgóeszközök / Mérlegfőösszeg) × 100
Tőkeellátottsági mutató (százalék)	((Befektetett eszközök + Készletek) / Saját vagyon) × 100
Eszközök forgási sebessége	Nettó árbevétel / Mérlegfőösszeg
Készletek forgási sebessége	Nettó árbevétel / Készletek
Vevők forgási sebessége (nap)	(Vevők × 360) / Nettó árbevétel
Eladósodottság mértéke (százalék)	(Kötelezettségek / Mérlegfőösszeg) × 100
Saját vagyon aránya (százalék)	(Saját tőke / Mérlegfőösszeg) × 100
Bonitás	Kötelezettségek / Saját tőke
Befektetett eszközök hosszú lejáratú hitelekkel fedezett aránya (százalék)	(Hosszú lejáratú hitelek / Befektetett eszközök) × 100
Forgóeszközök rövid lejáratú hitelekkel fedezett aránya (százalék)	(Rövid lejáratú hitelek / Forgóeszközök) × 100
Árbevételarányos nyereség (százalék)	(Adózott eredmény / Nettó árbevétel) × 100
Vagyonarányos nyereség (százalék)	(Adózott eredmény / Saját tőke) × 100

Elfogadva a szakirodalomban igazolt tényt (*Platt–Platt* [1990]; *Virág* [1996]), amely szerint az iparági ráták javítják a csődmodellek besorolási pontosságát, a megfigyelt vállalatok pénzügyi mutatóit átszámítottuk iparági függő viszonyszámokra, ami egy vállalat adott mutatószámának és az iparági középértéknek a hányadosa.

$$(\text{Iparági relatív ráta})_{k,j,t} = \frac{(\text{Vállalati mutatószám})_{k,j,t}}{(\text{Iparági átlagos ráta})_{k,j,t} \times 100}$$

ahol

- k – a vállalat,
- j – az iparág,
- t – a mutatószám fajtája.

A nevező 100-zal történő szorzásának az a célja, hogy a százalékos viszonyszámokat hozzáigazítsuk az egynél nagyobb skaláris értékekhez. Ennek hatására egy adott iparágban az iparágtól függő viszonyszám középértéke bármely időszakban 0,01-es értéket vesz fel. A pénzügyi viszonyszámok az idővel számos okból megváltozhatnak. Az iparágtól függő viszonyszám azonban visszatükrözi az egyes vállalatok és az iparág reagálását adott eseményre. A formula nagy előnye, hogy – az idő múlásával bekövetkező változások figyelembevétele ellenére – biztosítja, hogy az iparági megoszlás középértéke a 0,01-es értéken maradjon, feltételezve, hogy a szórásnégyzet állandó. Ez a megoldás – megengedve az iparágon belüli változásokat – csökkenti az adatok instabilitását, ugyanakkor javíthatja a kialakítandó csődmodellek előrejelzési pontosságát. Az iparági átlagokkal korrigált pénzügyi mutatók alapstatisztikáit a 3. tábla foglalja össze.

3. tábla

A fizetésképtelen és a fizetőképes osztályok mutatószámaira jellemző átlagok és szórások

Pénzügyi mutató	Átlag			Szórás		
	Fizetésképtelen	Fizetőképes	Összes	Fizetésképtelen	Fizetőképes	Összes
Likviditási gyorsráta	0,006659	0,013348	0,010004	0,003477	0,009317	0,007771
Likviditási mutató	0,007537	0,012837	0,010187	0,003474	0,008871	0,007222
Pénzeszközök aránya (százalék)	0,02133	0,002259	0,011795	0,030401	0,043271	0,038481
Cash flow és összes tartozás aránya	0,019365	-0,00066	0,009353	0,023412	0,029405	0,028332
Forgóeszközök aránya (százalék)	0,009498	0,010395	0,009946	0,002516	0,002443	0,002513
Tőkeellátottsági mutató (százalék)	0,014053	0,01033	0,012191	0,020207	0,003879	0,014622
Eszközök forgási sebessége	0,007295	0,01178	0,009538	0,0065	0,009567	0,008457
Készletek forgási sebessége	0,008683	0,010622	0,009653	0,007122	0,008516	0,007885
Vevők forgási sebessége (nap)	0,01128	0,009812	0,010546	0,008803	0,006135	0,007598
Eladósodottság mértéke (százalék)	0,011092	0,007921	0,009506	0,016131	0,014556	0,015397
Saját vagyón aránya (százalék)	0,011502	0,010043	0,010773	0,006262	0,003645	0,005159
Bonitás	0,010691	0,008236	0,009464	0,01703	0,021206	0,019209
Befektetett eszközök hosszú lejáratú hitelekkel fedezett aránya (százalék)	0,009746	0,009066	0,009406	0,014042	0,024435	0,019867
Forgóeszközök rövid lejáratú hitelekkel fedezett aránya (százalék)	0,012562	0,007998	0,01028	0,010476	0,006635	0,009035
Árbevételarányos nyereség (százalék)	0,016228	0,002547	0,009387	0,015245	0,012206	0,01538
Vagyonarányos nyereség (százalék)	0,017754	0,000381	0,009068	0,023214	0,026109	0,02612

Az iparági transzformációk további előnye, hogy végrehajtásuk kiküszöböli a mutatószámok értékei között fennálló nagyságrendi eltéréseket (például a százalékban és a napban kifejezett mutatók esetén).

Az iparági ráták alkalmazásán túlmenően jelen tanulmány abban is előrelépést jelent, hogy a mesterséges intelligencia modellek alkalmazásakor elengedhetetlen mintafelosztást kiterjeszti a hagyományos módszerekre is. Erre azért került sor, mert a csődmodelleknek nem a klasszifikációs, hanem sokkal inkább az előrejelzési erejére vagyunk kíváncsiak. Az előrejelzési erő megállapításához a felépített modelleket olyan adatokon kell tesztelni, amelyeket nem vettünk figyelembe a modellépítés során. Ennek érdekében a mintát egyszerű véletlen kiválasztással felosztottuk 75–25 százalékos arányban tanulási és tesztelő részmintákra. A csődmodellek minden módszer alkalmazása esetén tehát 117 vállalat adataira épülnek fel, amelyek megbízhatóságát a fennmaradó 39 vállalat adatain teszteltük. Ezzel az eljárással sokkal reálisabb képet kaphatunk a csődmodellek előrejelzési alkalmazhatóságáról, mintha a teljes mintára felépített modellek hibáit és/vagy beso-

rolási pontosságait határoznánk meg. A következő alfejezetekben bemutatásra kerül a fentiekben részletezett módszerek alapján elkészített négy csődmodell.

Diszkriminanciaanalízis alapú csődmodell

A diszkriminanciaanalízis alapú csődmodell kialakítása során, a korábban említett problémák következtében kritikus pont a megfelelő változók megválasztása, erre azonban nincsen a szakirodalomban elfogadott konvenció. Jelen vizsgálatban Magyarországon eddig ritkán alkalmazott módszerrel: kanonikus változók képzésével és elemzésével történt a változósám-csökkentés.

A diszkriminanciaanalízis és a kanonikus korrelációelemzés között olyan összefüggés mutatható ki, miszerint a csoportba tartozás bináris változója és a diszkriminanciafüggvény közötti maximális korreláció kanonikus korreláció (Füstös *et al.* [2004]). A szakirodalom részletes útmutatást ad arra vonatkozóan, hogy a diszkriminanciaanalízis alapegyenlete miért egyezik meg a kanonikus faktorelemzés egyenletével.

A kanonikus változók az eredeti változók szerint mért adatok ortogonális reprezentációján alapulnak. Olyan reprezentáció kerül kiválasztásra, amelyik a lehető legnagyobb mértékű eltérést fejezi ki a két osztály között. A dimenziócsökkenés a kanonikus változókra is igaz (k osztályú problémára $k-1$ kanonikus változó készül), vagyis a csődelőrejelzés során csupán egyetlen kanonikus változóértéket kell kiszámítani mind a 16 pénzügyi mutatóra. A nagyobb abszolút értékkel rendelkező kanonikus változó értékek képviselik a nagyobb diszkrimináló erőt.

Modellkísérletek igazolták, hogy a hat legnagyobb érték figyelembevétele elegendő, a tanulási minta besorolási pontossága ugyanis megegyezik a tizenhat és a hat változó esetén. Ez azt jelenti, hogy a tizenhat pénzügyi mutatóból hat bír jelentős diszkrimináló erővel. További modellkísérletek azt is alátámasztották, hogy a hat változóból már nem érdemes elhagyni egyet sem, mivel bármelyik változó elhagyása rontja mind a tanulási, mind a tesztelő minta besorolási pontosságát. A hatváltozós diszkriminanciafüggvények a 4. táblában szereplő súlyok mentén bizonyultak optimálisnak a két osztályban.

4. tábla

A két diszkriminanciafüggvény együtthatói és változói

Változó	Diszkriminanciafüggvény-együttható (súly)	
	Fizetőképes	Fizetésképtelen
Konstans	-19,7510605	-20,8135853
Likviditási gyorsráta	22,98830223	-118,021774
Forgóeszközök aránya	2606,724121	2640,473145
Eszközök forgási sebessége	-217,294312	-283,654358
Készletek forgási sebessége	569,4311523	647,6002197
Saját vagyron aránya	767,0587158	913,1765137
Vagyonarányos nyereség	27,35117531	79,90907288

Amennyiben a megfigyelések megfelelő pénzügyi mutatószám értékeit behelyettesítjük a két egyenletbe, abba az osztályba történik a besorolás, amelyik esetén nagyobb

számot kapunk. A könnyebb kezelhetőség érdekében azonban a korábban említett módszerrel összevonhatjuk a két függvényt. A fizetésektelen egyenletből kivonva a fizetőképes egyenletet kapjuk meg a végleges diszkriminanciafüggvényt, amely az alábbi formulát ölti:

$$Z = -141,01X_1 + 33,74902X_2 - 66,36X_3 + 78,16907X_4 + 146,1178X_5 + 52,5579X_6,$$

ahol

- Z – diszkriminanciaérték,
- X_1 – iparági átlaggal korrigált likviditási gyorsráta,
- X_2 – iparági átlaggal korrigált forgóeszközök aránya,
- X_3 – iparági átlaggal korrigált eszközök forgási sebessége,
- X_4 – iparági átlaggal korrigált készletek forgási sebessége,
- X_5 – iparági átlaggal korrigált saját vagyon aránya,
- X_6 – iparági átlaggal korrigált vagyon arányos nyereség.

A tanulási mintában szereplő vállalatok adatai alapján Z értéke 1,06252. Ha tehát a fenti egyenletbe behelyettesítjük az iparági átlagokkal korrigált pénzügyi mutatókat, és a kapott Z érték nagyobb, mint 1,06252, akkor a megfigyelés besorolása fizetésektelen, máskülönben fizetőképes. A diszkriminanciafüggvény hibáit és besorolási pontosságát az alábbi táblák tartalmazzák. A tanulási és a tesztelő minta besorolási pontossága közel van egymáshoz, ebből arra következtethetünk, hogy a diszkriminanciaanalízissel elkészített csődmódellem megfelelően alkalmazható előrejelzési célra.

5. tábla

A tanulási minta hibái és besorolási pontossága (diszkriminanciaanalízis)

Osztály	A tanulási minta összetétele	Téves besorolás (darab)	Téves besorolás (százalék)	Besorolási pontosság (százalék)
Fizetőképes	59	14	23,73	76,37
Fizetésektelen	58	6	10,34	89,66
<i>Összesen</i>	<i>117</i>	<i>20</i>	<i>17,09</i>	<i>82,91</i>

6. tábla

A tesztelő minta hibái és besorolási pontossága (diszkriminanciaanalízis)

Osztály	A tesztelő minta összetétele	Téves besorolás (darab)	Téves besorolás (százalék)	Besorolási pontosság (százalék)
Fizetőképes	19	3	15,79	84,21
Fizetésektelen	20	5	25,00	75,00
<i>Összesen</i>	<i>39</i>	<i>8</i>	<i>20,51</i>	<i>79,49</i>

A csődmódellem diszkrimináló képességét F -próba segítségével tesztelhetjük. Az F -próba a diszkriminanciaértékek fizetőképes és a fizetésektelen osztályokban számított

átlagának különbözőségét ($MSTr$) viszonyítja az osztályokon belüli eltérésekhez (MSE) a 117 elemű tanulási mintában:

$$F = \frac{MSTr}{MSE} = \frac{163,0526}{2,361113} = 69,0575$$

Az F -eloszlás táblázataiban 5 százalékos szignifikanciaszinthez 3,92; 2,5 százalékos szignifikanciaszinthez 5,15 érték tartozik (a számláló szabadságfoka 1, a nevező szabadságfoka 115). Az empirikus F -érték messze meghaladja az elméleti F -értéket, ezáltal a csődmodell diszkrimináló képessége szignifikánsnak tekinthető.

Logisztikus regresszió alapú csődmodell

A logisztikus regresszió modell felépítésének a diszkriminanciaanalízishez hasonlóan lényeges kulcskérdése a rendelkezésre álló változók számának megfelelő mértékű csökkentése. A logisztikus regresszió elemzés – szemben a diszkriminanciaanalízissel – nem igényli a változók normális eloszlását, valamint az egyező kovariancia mátrixokat a két osztályban, azonban problémát okozhat a tizenhat változó együttes alkalmazásakor fennálló multikollinearitás, illetve a nem szignifikáns változók jelenléte.

A változók számának csökkentése a korábban említett backward elimination módszerrel került végrehajtásra. Empirikus vizsgálatok alapján egy négyváltozós, egy ötváltozós és egy hatváltozós modell is szóba jöhetett, azonban az újbóli tesztelések során a p -értékek nem kellő alacsony volta miatt végül egyértelműnek tűnt a négyváltozós modellt elfogadni. A regressziós modell együtthatóit, standard hibáit és p -értékeit a 7. tábla foglalja össze. A rendkívül alacsony p -értékek következtében a paraméterek mindegyike 1 százalék alatt szignifikáns, magyarázó erejük ezért vitathatatlan.

7. tábla

A logisztikus regressziós modell legfontosabb jellemzői

Magyarázó változó	Regressziós együttható	Standard hiba	p -érték
Konstans	0,0423305		
Likviditási gyorsráta	621,9243164	130,0299377	0,00000173
Készletek forgási sebessége	-170,801285	57,00505447	0,00273324
Vevők forgási sebessége	-99,4351425	37,21940613	0,0075492
Saját vagyron aránya	-245,794083	74,56059265	0,00097874

$$Pr(\text{fizetőképes}) = \frac{e^{0,04233+621,92432X_1-170,80129X_2-99,43514X_3-245,79408X_4}}{1 + e^{0,04233+621,92432X_1-170,80129X_2-99,43514X_3-245,79408X_4}},$$

ahol

- X_1 – iparági átlagokkal korrigált likviditási gyorsráta,
- X_2 – iparági átlagokkal korrigált készletek forgási sebessége,
- X_3 – iparági átlagokkal korrigált vevők forgási sebessége,
- X_4 – iparági átlagokkal korrigált saját vagyron aránya.

A regressziós paraméterek kiszámítása után azonban még nem ismerjük a függvény függő változójának ún. *cut off* értékét, amely mellett osztályozva a vállalatokat, besorolási pontosságuk maximális lesz. A pénzügyi mutató értékek behelyettesítését követően minden vállalatnak lesz egy pontos 0 és 1 közé eső output értéke. Iterációs modellkísérletek igazolták, hogy a *cut off* értéke nem kereken 50 százalékon optimális, és ezt a számot tovább növelni sem érdemes. Jelen modell *cut off* értéke 0,48, vagyis az ezt meghaladó értékeket felvevő vállalatokat a modell fizetőképnek minősíti. A tanulási és a tesztelő minta hibáit és besorolási pontosságait a 8. és a 9. tábla szemlélteti. A tanulási és a tesztelő minta besorolási pontossága között több mint tíz százalékpont eltérés tapasztalható, ami arra enged következtetni, hogy a logisztikus regresszió alapú csődmodellel óvatosan kell bánni új adatokon.

8. tábla

A tanulási minta hibái és besorolási pontossága (logisztikus regresszió)

Osztály	A tanulási minta összetétele	Téves besorolás (darab)	Téves besorolás (százalék)	Besorolási pontosság (százalék)
Fizetőkép	59	10	16,95	85,05
Fizetésképtelen	58	7	12,07	87,93
<i>Összesen</i>	<i>117</i>	<i>17</i>	<i>14,53</i>	<i>85,47</i>

9. tábla

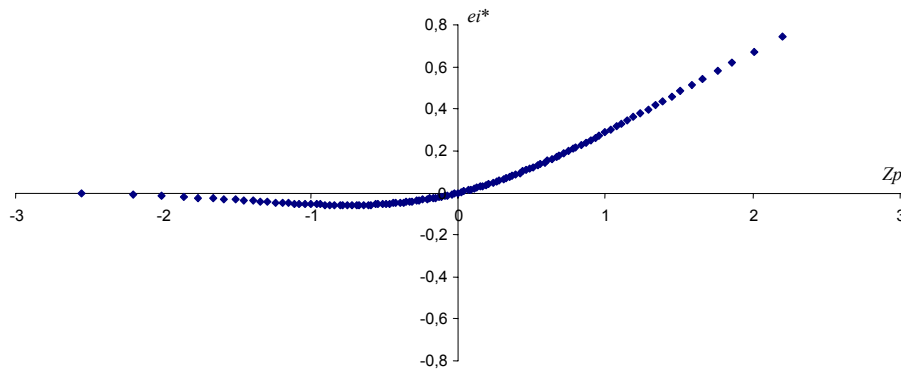
A tesztelő minta hibái és besorolási pontossága (logisztikus regresszió)

Osztály	A tesztelő minta összetétele	Téves besorolás (darab)	Téves besorolás (százalék)	Besorolási pontosság (százalék)
Fizetőkép	19	3	15,79	84,21
Fizetésképtelen	20	7	35,00	65,00
<i>Összesen</i>	<i>39</i>	<i>10</i>	<i>25,64</i>	<i>74,36</i>

A csődmodellből számított értékeken a diszkriminanciaanalízishez hasonlóan végrehajthatjuk az F -próbát, szintén a tanulási mintára építve. Az F -próba végrehajtását azonban meg kell, hogy előzze a regressziós modellezésnél elengedhetetlen hibatag normalitásvizsgálat a szakirodalomban javasolt normál valószínűségi ábra (*Hunyadi–Mundruczó–Vita* [1996]) segítségével. (Lásd a 2. ábrát.)

Fizetőkép vállalatok esetében (pozitív Z_p értékek) a normalitás vitathatatlan, fizetésképtelenek esetében (negatív Z_p értékek) azonban sérül a feltétel, hiszen egyenesnek nem lehet nevezni a függőleges tengelytől balra található pontsorozatot. Az a megfigyelés, hogy a fizetésképtelen vállalatok megsértik a normalitás feltételét, nem egyedülállóan magyar jelenség, hiszen a nemzetközi szakirodalomban található empirikus vizsgálatok (lásd például *Back et al.* [1996]; *Bernhardsen* [2001]) elég gyakran panaszkodnak erre. A 114,9796 empirikus F -érték tehát hiába haladja meg a táblázatban szereplő elméleti F -értéket, a feltételek nem teljesülése következtében az F -próba nem értékelhető.

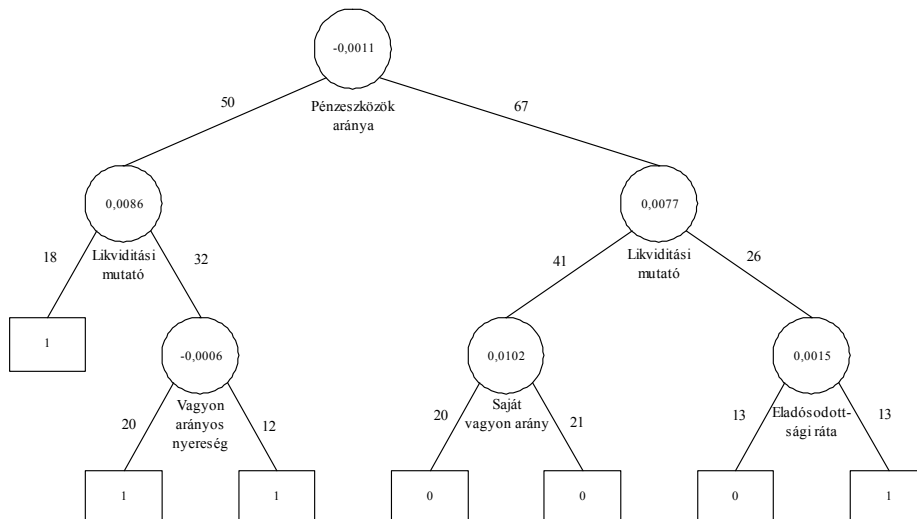
2. ábra. A hibatar eloszlásának tesztelése
Számított reziduumok (ei^*) a normális eloszlások percentilis értékeinek (Zp) függvényében



Rekurzív particionáló algoritmus alapú csődmódel

A négy eljárás közül a rekurzív particionáló algoritmus számítógepesíthető leginkább. A modellezőnek csupán a tanulási adatbázisra való specializálódást kell nyomon követnie, és szükség esetén beavatkoznia. Erre azért van szükség, mert ha túl sok elágazást találunk relevánsnak túl kevés mintaelemű adatbázison, akkor a sokadik elágazás alá már nagyon kevés besorolás tartozik. Ekkor szembesülünk a tudományos kutatás alapvető tézisével, ami szerint minimális számú megfigyelésből nem szabad általánosítani. Ebben az esetben kerül sor az alsóbb szinteken található faágak megnyesésére, ami a modellváltozók csökkentését jelenti. A 3. ábrán látható a tanulási minta alapján készített, háromváltozóra redukált optimálisnak talált döntési fa.

3. ábra. Döntési fa a tanulási minta alapján



Az ábrát a következőképpen értelmezhetjük. Szimulációs kísérletek azt mutatták, hogy leginkább particionáló változó az iparági átlaggal korrigált pénzeszközök aránymutató. Az elágazási érték $-0,0011$. A 117 vállalatból álló tanulási mintán belül 50 vállalat pénzeszközök aránymutatója kisebb vagy egyenlő, mint $-0,0011$, 67 vállalaté pedig nagyobb. Az 50 vállalat besorolása fizetőképes. A jobb oldali ágon haladva második particionáló változó a likviditási mutató. 41 vállalat likviditási mutatója kisebb vagy egyenlő, mint $0,0077$, ezek besorolása fizetésképtelen. 26 vállalat likviditási mutatója nagyobb, mint $0,0077$, ezek tovább oszthatók kétfelé az eladósodottsági ráta alapján, ahol $0,0015$ küszöbérték alattiak fizetésképtelennek, az értéket meghaladók pedig fizetőképesnek minősülnek.

A kész döntési fa alapján elkészíthetők a tanulási és a tesztelő minta hibáit és besorolási pontosságait tartalmazó táblák. Láthatjuk, hogy a tanulási és a tesztelő minta besorolási pontossága csekély mértékben tér csak el, ezáltal a döntési fa túltanulásmentes, előrejelzésre alkalmas.

10. tábla

A tanulási minta hibái és besorolási pontossága (rekurzív particionáló algoritmus)

Osztály	A tanulási minta összetétele	Téves besorolás (darab)	Téves besorolás (százalék)	Besorolási pontosság (százalék)
Fizetőképes	59	8	13,56	86,44
Fizetésképtelen	58	12	20,69	79,31
<i>Összesen</i>	<i>117</i>	<i>20</i>	<i>17,09</i>	<i>82,91</i>

11. tábla

A tesztelő minta hibái és besorolási pontossága (rekurzív particionáló algoritmus)

Osztály	A tesztelő minta összetétele	Téves besorolás (darab)	Téves besorolás (százalék)	Besorolási pontosság (százalék)
Fizetőképes	19	7	36,84	63,16
Fizetésképtelen	20	1	5,00	95,00
<i>Összesen</i>	<i>39</i>	<i>8</i>	<i>20,51</i>	<i>79,49</i>

Neurális háló alapú csődmódel

A neurális háló alapú csődmódel elkészítéséhez különböző modellkísérletek végrehajtása eredményeképpen állást kell foglalnunk a neurális háló struktúráját illetően. A 2004-ben felépített iparági rátákat nem tartalmazó neurális háló csődmódel során megállapítást nyert, hogy a négyrétegű hálók eredményesebben alkalmazhatók, mint a háromrétegű hálók (Virág–Kristóf [2005]). A bemeneti réteg neuronjai a 16 pénzügyi mutatóból állnak, mint folytonos változókból, a kimeneti réteg egyetlen neuront, a fizetőképesség tényét tartalmazza, 0-val jelölve a fizetésképtelen, 1-gyel a fizetőképes vállalatokat.

A két köztes réteg neuronszámát illetően elfogadjuk a 2004-es csődmódel során kikísérletezett, legmagasabb besorolási pontossággal bíró 6 illetve 4 neuront tartalmazó köztes rétegeket. A neurális háló struktúrája tehát 16-6-4-1.

A neuronok számán túlmenően kritikus elem a neurális hálók tanítása során a tanuló ciklusok számának megállapítása. Ez számos szimulációs kísérletezést és folyamatos nyomon követést igényel a felhasználó részéről, hiszen sem az elégtelenül megedzett, sem a túltanult neurális háló nem alkalmas előrejelzésre.

Az iparági rátákat tartalmazó mintán 400 tanulási ciklust futtattunk le. A tanulási ciklusokban a megfigyelési egységeket véletlenszerű sorrendben vettük figyelembe. Számítógépes futtatással egyidejűleg nyomon követhető a 75 százalék arányban képezett tanulási mintán és a 25 százalék arányban képzett tesztelő mintán minden tanulási ciklusban a négyzetes hiba mutatója. Szabad szemmel is látható, hogy a tanulási minta hibamutatója fluktuációkkal, de határozottan csökken, miközben a tesztelő mintáé bizonyos idő múlva stagnál és romlik. Ekkor kerül sor a tanulás leállítására és a súlyok véglegesítésére (elmentésére).

A csődmodell súlyai a neurális hálók leginkább széles körben alkalmazott tanulási algoritmusá, a *backpropagation*⁴ eljárás segítségével alakultak ki, amelyet első ízben *Werbos* [1974] alkalmazott, magyar nyelven részletesen lásd *Kristóf* [2002].

Az alábbi táblák összefoglalják a neurális háló modell tanulási és tesztelő minta hibáit és besorolási pontosságát. Jelen empirikus vizsgálat szintén azt igazolta, hogy a ma ismert eljárások közül a neurális hálók képviselik a legmegbízhatóbb csődelő-rejelzési módszert. Az a furcsa helyzet állt elő, hogy 400 tanulási ciklus lefuttatása után a tesztelő minta besorolási pontossága meghaladta a tanulási mintáét. A neurális háló alapú csődmodell előrejelzési ereje jelen empirikus vizsgálat alapján igazoltnak tekinthető.

12. tábla

A tanulási minta hibái és besorolási pontossága (neurális háló)

Osztály	A tanulási minta összetétele	Téves besorolás (darab)	Téves besorolás (százalék)	Besorolási pontosság (százalék)
Fizetőképes	60	14	23,33	76,66
Fizetésképtelen	57	5	8,77	91,33
<i>Összesen</i>	<i>117</i>	<i>19</i>	<i>16,24</i>	<i>85,76</i>

13. tábla

A tesztelő minta hibái és besorolási pontossága (neurális háló)

Osztály	A tesztelő minta összetétele	Téves besorolás (darab)	Téves besorolás (százalék)	Besorolási pontosság (százalék)
Fizetőképes	18	2	11,11	88,89
Fizetésképtelen	21	3	14,29	85,71
<i>Összesen</i>	<i>39</i>	<i>5</i>	<i>12,82</i>	<i>87,28</i>

⁴ *Backpropagation* = backwards propagation of error; magyarra visszacsatolós hibajavításnak vagy hibavisszaterjesztésnek lehet fordítani.

KÖVETKEZTETÉSEK

A kidolgozott csődmodellek eredményessége azt igazolta, hogy a pénzügyi-számviteli adatok sajátos összefüggésrendszere alapján, megbízható előrejelzési módszerek alkalmazásával, jó eséllyel alkothatunk ítéletet valamely vállalat jövőbeni fennmaradásáról. Az empirikus vizsgálatok során bebizonyosodott, hogy az eredményes csődmodellezés érdekében minél több pénzügyi mutató vizsgálatára van szükség, hiszen az egyes módszerek más-más változót tartanak relevánsnak a csődelőrejelzés szempontjából. Előfordulhat, hogy ma aktuális éves beszámoló adatok alapján másik pénzügyi mutatók lennének modellváltozók, mint tíz évvel ezelőtt. Erre későbbi empirikus vizsgálatok fognak fényt deríteni.

A csődmodell-számítások arra mutattak rá, hogy a szimulációs kísérletezésen alapuló eljárások gyakorlati alkalmazhatóság területén hatékonyabbnak bizonyulnak, mint az évtizedes, „jól bevált”, lineáris vagy linearizálható modellek. Annak ellenére, hogy mind a diszkriminanciaanalízis, mind a logisztikus regresszió alapú csődmodellek szignifikánsak, mégsem hoznak jobb eredményt, mint azok az eljárások, amelyekben még statisztikai próbát sem lehetséges elvégezni.

Ha a besorolási pontosságot az előrejelzési modell kialakításakor alkalmazott adatbázison határozzuk meg, a négy módszer lényegében hasonló eredményt ad. Az előrejelző erő a modellek számára nem ismert adatokon való tesztelés során derül ki. Hozzá kell tenni azonban, hogy nagyobb minta lenne szükséges a megalapozott ítéletalkotáshoz.

Amennyiben klasszikus módon a tanulási mintából határoznánk meg a csődmodellek besorolási pontosságát, az iparági ráták alkalmazásával felépített diszkriminancia-analízis és logisztikus regresszió modellek besorolási pontossága meghaladja Virág Miklós 1993-ban iparági ráták nélkül számított csődmodelljeit, és más változókat találtak relevánsnak ugyanarra az adatbázisra. Az eltérések magyarázhatók az iparági átlagok figyelembevételével, valamint az azonos módszer-családon belül alkalmazott eltérő eljárásokkal. Itt különösen a változósám-csökkentéshez alkalmazott eljárásokra kell gondolni, hiszen Virág Miklós első csődmodelljében mindkét módszer esetén a *stepwise* eljárást alkalmazta, jelen tanulmányban pedig a diszkriminanciaanalízis esetén kanonikus változók elemzésével, a logisztikus regresszió esetén a backward elimination módszerével történt meg a változósám-csökkentés.

A neurális háló modell iparági ráták nélkül 86,5 százalékos besorolási pontosságú volt a teljes mintán. Iparági rátákkal is hasonló eredményt kaptunk, hiszen a tanulási minta besorolási pontossága 85,8 százalék, a tesztelő mintáé 87,3 százalék.

A diszkriminanciaanalízis és a rekurzív particionáló algoritmus besorolási pontossága a jelen empirikus vizsgálat mintáján megegyezik. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a kidolgozott csődmodellek ugyanazokon a vállalatokon követnék el ugyanazokat a hibákat, hiszen más változók alapján épül fel a két modell, a hibák osztályok közötti megoszlása más, ebből következően a rontott vállalatok nem ugyanazok (vö. az 5–6. illetve a 10–11. táblákat). A kapott eredmény csupán véletlen egybeesés.

A logisztikus regresszió elemzés nagyon jól működik a modell által ismert megfigyeléseken, új adatokon ugyanakkor a leggyengébben teljesít. Ez meglepő eredmény, hiszen a szakirodalom a diszkriminanciaanalízisről állítja ugyanezt (lásd például *Jacobs–Ostreicher* [2000]). Jelen empirikus vizsgálat éppen a diszkriminanciaanalízis stabil használhatóságát igazolta.

A neurális háló alapú csődmódel az alkalmazott mintán kiemelkedik a négy közül, az eredményeket azonban nehéz interpretálni. A gyakorlati felhasználók számára ez nem jelent problémát, a magas besorolási pontosság és az előrejelző képesség kompenzálja a „homályos” számítási részeredményeket. A 14. tábla összefoglalja a négy csődmódel besorolási pontosságát.

14. tábla

A négy csődmódel besorolási pontossága a tanulási és a tesztelő mintán

Előrejelzési módszer	Tanulási minta	Tesztelő minta
Diszkriminanciaanalízis	82,91	79,49
Logisztikus regresszió	85,47	74,36
Rekurzív particionáló algoritmus	82,91	79,49
Neurális háló	85,76	87,28

A besorolási pontosságok terén tapasztalható különbségekből téveszme lenne azt a következtetést levonni, hogy kizárólag a legkisebb hibát elkövető csődmódel kellene alkalmazni csődelőrejelzésre. A fizetőképesség előrejelzésére is igaz a sokváltozós statisztikának az a gyakorlati követelménye, hogy minél több eljárással célszerű ugyanazt a problémát megvizsgálni, és hasonló, többszörösen megerősített eredmény esetén elfogadni az eredményt (*Füstös et al. [2004]*).

Az empirikus vizsgálatok mellett előrejelzési módszertani oldalról is kimutatható, hogy a kevésbé szigorú alkalmazási feltételekkel rendelkező módszerek gyakorlati beválása sikeresebb, annak ellenére, hogy művelőit gyakran pozitívista kritikákkal sújtják.

A diszkriminanciaanalízis viszonylag alacsonyabb előrejelző képességéhez hozzájárul a normalitás gyakori megsértése, valamint a két osztály kovarianciamátrixainak eltérő volta. Empirikus vizsgálatok ugyan igazolták, hogy a diszkriminanciaanalízis klasszifikációs képességére nincs komoly hatással a normalitás hiánya, azonban az előrejelző képességére kimutathatóan van (*Back et al. [1996]*). A multikollinearitás a változók számának csökkentésével kezelhető. A diszkriminanciaanalízis legfőbb problémája azonban a linearitásból ered. Mivel a diszkriminanciafüggvény lineárisan választja el egymástól a fizetőképes és a fizetésképtelen vállalatok csoportját, ezért a függvénybe bevont mutatószámok mindig ugyanolyan mértékben befolyásolják a besorolás eredményét, ami a valóságban nem igaz.

A logisztikus regresszió elemzés mindvégig azt feltételezi, hogy a vizsgált változók és a fizetőképesség valószínűsége közötti kapcsolatot leíró függvény típusa előre ismert és az logisztikus görbével írható le. A sokváltozós statisztikából azonban ismeretes, hogy a rosszul megválasztott függvény a regressziós együtthatók pontatlan becsléséhez, és ezáltal rossz előrejelzéshez vezethet. Az eloszlási feltételezések és az egyező kovarianciamátrixok megléte nem követelmény, ami a diszkriminanciaanalízishez képest elvileg előnyt jelent. A tanulmányban végrehajtott empirikus vizsgálat előrejelző képesség tekintetében a legrosszabbnak minősítette a logisztikus regresszió elemzést.

A rekurzív particionáló algoritmus sem igényli a normális eloszlást és az egyező kovarianciamátrixokat, az elágazási pontok érzéketlenek az *outlier* megfigyelésekre. A pénzügyi mutatók relatív hozzájárulását ugyan nem lehetséges megállapítani, azonban a

döntési fák egyértelműen interpretálhatók a gyakorlatlan felhasználók számára is. Hátrány a túltanulás kialakulásának lehetősége, az előrejelzési modellezésben jártas szakemberek azonban az ágak és a nem releváns pontok megnyirbálásával könnyen képesek túltanulásmentessé tenni a fát.

A neurális hálók felépítése során nem kell foglalkoznunk sem különböző eloszlási feltevésekkel, sem a magyarázó változók függetlenségével, sem a vizsgált jelenséget leíró függvény típusával. A neurális hálók a matematikai úton bizonyított *univerzális approximátor*⁵ tulajdonságuk révén bármilyen típusú függvény utánzására képesek. Nincs szükség előzetes ismeretekre a pontos előrejelzéshez. A neurális hálók magukból az adatokból tanulják meg a kapcsolatok jellegét, minimalizálva ezáltal az előzetes mintán kívüli információk iránti igényt. A neurális hálók alkalmazását éppen ez az általános függvényközelítő képessége – vagyis az inputok és az outputok közötti kapcsolatok intelligens módon való megtalálásának képessége – igazolja. Ez nagy előny a csödelőrejelzésben. Hátrány viszont a mesterséges intelligencia *black box* problémája. A neurális háló modellből nem lehetséges statisztikai próbákat végrehajtani, nem tudjuk, hogy a végleges modell súlyai miként alakultak ki. Ez persze semmit sem von le a magasabb megbízhatóság előnyeiből.

IRODALOM

1991. ÉVI XLIX. TÖRVÉNY... [1991]: 1991. évi XLIX. törvény a csődeljárásról, a felszámolási eljárásról és a végelszámolásról.
- ÁLMOSS A. – GYÖRI S. – HORVÁTH G. – VÁRKONYINÉ KÓCZY A. [2002]: *Genetikus algoritmusok*. Typotex Kiadó. Budapest.
- ALTMAN, E. I. [1968]: Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *The Journal of Finance*. 23. évf. 4. sz. 589–609. old.
- ALTMAN, E. I. [1993]: *Corporate financial distress and bankruptcy*. A complete guide to predicting and avoiding distress and profiting from bankruptcy. John Wiley & Sons. New York.
- ALTMAN, E. I. – HALDEMAN, R. – NARAYANAN, P. [1977]: ZETA Analysis, a new model for bankruptcy classification. *Journal of Banking and Finance*. 1. évf. 1. sz. 29–54. old.
- BACK, B. – LAITINEN, T. – SERE, K. – VAN WEZEL, M. [1996]: Choosing bankruptcy predictors using discriminant analysis, logit analysis, and genetic algorithms. *Technical Report*. 40. sz. Turku Centre for Computer Science. Turku.
- BEAVER, W. [1966]: Financial ratios as predictors of failure, empirical research in accounting: selected studies. *Journal of Accounting Research*. 5. évf. különszám. 71–111. old.
- BERNHARDSEN, E. [2001]: *A model of bankruptcy prediction*. Financial Analysis and Structure Department. Research Department. Norges Bank. Oslo. (Munkanyag.)
- CYBENKO, G. [1989]: Approximation by superpositions of a sigmoid function. *Mathematics of controls. Signals and Systems*. 2. évf. 4. sz. 303–314. old.
- DORSEY, R. E. – EDMISTER, R. O. – JOHNSON, J. D. [1995]: *Bankruptcy prediction using artificial neural systems*. The University of Mississippi, School of Business.
- FITZPATRICK, P. [1932]: *A Comparison of the ratios of successful industrial enterprises with those of failed companies*. The Accountants' Publishing Company. Washington.
- FRYDMAN, H. – ALTMAN, E. I. – KAO, D. L. [1985]: Introducing recursive partitioning for financial classification: the case of financial distress. *The Journal of Finance*. 40. évf. 1. sz. 303–320. old.
- FÜSTÖS L. – KOVÁCS E. – MESZÉNA GY. – SIMONNÉ MOSOLYGÓ N. [2004]: *Alakfelismerés. Sokváltozós statisztikai módszerek*. Új Mandátum Kiadó. Budapest.
- GONZALEZ, S. [2000]: *Neural networks for macroeconomic forecasting: a complementary approach to linear regression models*. Department of Finance. Canada. (Munkanyag.)
- GURNEY, K. [1996]: *Neural nets*. Department of Human Sciences. Brunel University. Uxbridge.
- HAJDU O. [2004]: A csödesemény logit-regressziójának kismintás problémái. *Statisztikai Szemle*. 82. évf. 4. sz. 392–422. old.
- HAJDU, O. – VIRÁG, M. [2001]: A Hungarian model for predicting financial bankruptcy. *Society and Economy in Central and Eastern Europe*. 23. évf. 1–2. sz. 28–46. old.
- HÁMORI G. [2001]: A CHAID alapú döntési fák jellemzői. *Statisztikai Szemle*. 79. évf. 8. sz. 703–710. old.
- HUNYADI L. – MUNDRUCZÓ GY. – VITA L. [1996]: *Statisztika*. AULA Kiadó. Budapest.
- JACOBS, O. H. – OSTREICHER, J. [2000]: *Az éves beszámoló elemzése mint a tervezés és a döntés-előkészítés eszköze*. Kossuth Kiadó. Budapest.

⁵ Cybenko [1989] bebizonyította, hogy ha egy neurális háló legalább egy köztes réteget tartalmaz, akkor tetszőleges folytonos függvény reprezentálására képes. Ha pedig egy háló legalább két köztes réteggel rendelkezik, akkor tetszőleges függvény reprezentációjára képes.

- KÖRÖSI, G. – LOVRICS, L. – MÁTYÁS, L. [1995]: Aggregation and the long run properties of economic time series. *Mathematics and Computers in Simulation*. 39. évf. 279–286. old.
- KRISTÓF T. [2002]: *A mesterséges neurális hálók a jövő kutatás szolgálatában*. Jövőelméletek 9. BKÁE Jövő kutatási Kutatóközpont. Budapest.
- KRISTÓF T. [2004]: *Mesterséges intelligencia a csődelőrejelzésben*. Jövőtanulmányok 21. BKÁE Jövő kutatási Kutatóközpont. Budapest.
- OHLSON, J. [1980]: Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy. *Journal of Accounting Research*. 18. évf. 1. sz. 109–131. old.
- OOGHE, H. – CLAUS, H. – SIERENS, N. – CAMERLYNCK, J. [1999]: *International comparison of failure prediction models from different countries: an empirical analysis*. Department of Corporate Finance, University of Ghent. Ghent.
- PLATT, H. D. – PLATT, M. B. [1990]: Development of a class of stable predictive variables: the case of bankruptcy prediction. *Journal of Business Finance and Accounting*. 17. évf. 1. sz. 31–44. old.
- VIRÁG M. [1996]: *Pénzügyi elemzés, csődelőrejelzés*. Kossuth Kiadó. Budapest.
- VIRÁG M. – HAJDU O. [1996]: Pénzügyi mutatószámokon alapuló csődmodell-számítások. *Bankszemle*. 15. évf. 5. sz. 42–53. old.
- VIRÁG M. – KRISTÓF T. [2005]: Az első hazai csődmodell újraszámítása neurális hálók segítségével. *Közgazdasági Szemle*. 52. évf. 2. sz. 144–162. old.
- WERBOS, P. [1974]: *Beyond regression: new tools for prediction and analysis in the behavioural sciences*. Harvard University. Cambridge. (PhD. disszertáció)
- ZMIJEWSKI, M. E. [1984]: Methodological issues related to the estimation of financial distress prediction models. *Journal of Accounting Research*. 22. évf. különszám. 59–82. old.

SUMMARY

The aim of this paper is to construct bankruptcy prediction models with high classification accuracy on the basis of companies' annual report data applying multivariate mathematical-statistical methods. The study presents the necessity, the history and the four most frequently used methods of bankruptcy prediction. In the framework of a comparative empirical research it evaluates the reliability of the four models. Different predictive powers are explained from forecast methodology point of view as well.