Az inverzlimesz egy játékelméleti alkalmazása*

Pintér Miklós
Budapesti Corvinus Egyetem
Matematika Tanszék
1093 Budapest, Fővám tér 13-15.
miklos.pinter@uni-corvinus.hu

2007 január

Kivonat

A nem teljes információs játékok szokásos játékelméleti modellbe foglalásának problémája a véleményrangsorok modellezése. A cél a Harsányi János által bevezetett típustér megkonstruálása. A célunk, hogy megmutassuk miként kapcsolódik a véleményrangsorok kérdése az inverzlimesz fogalmához, illetve egy a mérték inverzlimeszek létezésére kimondott, az ismert tételeknél általánosabb eredmény segítségével egy olyan típustér létezését látjuk be, amely egyetemes, teljes, és a paramétertér, amire épül, tisztán mérhető (nem topologikus).

1. Bevezető

Egy adott szituáció játékelméleti modellezése során gyakran felmerül a játékosok informáltságára vonatkozó ismeretek kérdése, tehát, hogy mit gondolnak az egyes játékosok az adott szituációról, ill. mit gondolnak arról, hogy más játékosok mit gondolnak az adott szituációról s.i.t. A modellt kezelhetetlenül bonyolulttá teheti a különböző szintű vélemények végtelen hierarchiáinak kezelése, tehát a véleményrangsorok explicit vizsgálata. Ennek a problémának a kezelésére a köztudás fogalma jelent megoldást (lásd Aumann [1]), tehát egy olyan játék felírása, ahol a játék (minden eleme) köztudott; minden játékos tudja, hogy minden játékos tudja, ... a játék elemeit.

Sok esetben adott a köztudott játék, sokszor azonban olyan szituációt kell modellezni, ahol valamely eleme a játéknak, tehát valamely paraméter nem köztudott. Ekkor a cél szintén egy köztudott játék felírása, tehát egy olyan modell, amely már nem tartalmaz véleményrangsorokat explicit módon.

Harsányi [8] a típus fogalmának bevezetésével kerülte meg a véleményrangsorok problémáját, mely fogalom a játékosok lehetséges „fajtáit” jelenti. Harsányi szerint „*úgy tekintjük a c_i vektort, mint amely az i játékos bizonyos fizikai, társadalmi és pszichológiai jellemzőit reprezentálja, amely vektorban összegyűlnek az i játékos hasznossági függvényének főbb paraméterei, továbbá főbb elképzelései a társadalmi környezetről ... a játék szabályai olyanok, hogy megengedik bármelyik játékosnak, hogy egyetlen lehetséges típusba tartozzon, annak megfelelően,*

*Ezen munka az OTKA T046194 pályázat támogatásával készült.

hogy a c_i vektor milyen értéket vesz fel ... minden játékosról feltesszük, hogy ismeri önmaga típusát, de nem ismeri a többi játékosét."

Heifetz és Samet [10] formalizálta Harsányi típus fogalmát (a mérhetőségi struktúrát itt nem adjuk meg):

1. definíció. *Az S paramétertérre épülő típustér $< (T_i, \mathcal{M}_i)_{i \in M \cup \{0\}}, m_{i \in M} >$ (röviden $< (T, \mathcal{M}), m) >$) (ahol M a játékosok halmaza, és 0 egy extra játékost jelöl) a következő:*

1. *$T_0 = S$, $(T_i, \mathcal{M}_i)$ mérhető tér $\forall i \in M \cup \{0\}$-re,*
2. *$f_i : T_i \to (\Delta(T, \mathcal{M}), \mathcal{A}_{HS})$ mérhető függvény $\forall i \in M$-re, ahol Δ a valószínűségi mértékek halmazát jelöli, $T = \times_{j \in M \cup \{0\}} T_j$ és $\mathcal{M} = \otimes_{j \in M \cup \{0\}} \mathcal{M}_j$,*
3. *$marg_{(T_i, \mathcal{M}_i)} f_i(t_i) = \delta_{t_i}$, ahol δ_{t_i} a t_i-re koncentrált Dirac-mérték $\forall t_i \in T_i$-re.*

Könnyen látható, hogy az 1. definícióban a 2. és a 3. pont „összevonható„:

2. definíció. *Az S paramétertérre épülő típustér $< (T_i, \mathcal{M}_i)_{i \in M \cup \{0\}}, m_{i \in M} >$ (röviden $< (T, \mathcal{M}), m) >$) (ahol M a játékosok halmaza, és 0 egy extra játékost jelöl) a következő:*

1. *$T_0 = S$, $(T_i, \mathcal{M}_i)$ mérhető tér $\forall i \in M \cup \{0\}$-re,*
2. *$f_i : T_i \to (\Delta(T_{-i}, \mathcal{M}_{-i}), \mathcal{A}_{HS})$ mérhető függvény $\forall i \in M$-re, ahol $T_{-i} = \times_{j \in (M \cup \{0\}) \setminus \{i\}} T_j$ és $\mathcal{M}_{-i} = \otimes_{j \in (M \cup \{0\}) \setminus \{i\}} \mathcal{M}_j$.*

A típusterek két tulajdonságát említjük itt meg. Az első a típustér egyetemes volta. Egy típustér egyetemes egy modell tekintetében (tehát ahol a paramétertér és a lehetséges vélemények rögzítettek), ha minden adott modellbeli típusténél bővebb, tehát minden véleményt tartalmaz. A második tulajdonság a típusterek teljessége. Egy típustér teljes, ha minden a paramétertérre épülő következetes véleményrangsor típus, tehát ha tetszőleges modellbeli véleményrangsor megfeleltethető egy 1. definícióbani típusnak.

Sem Harsányi, sem Heifetz és Samet nem konstruált típusteret, adottnak tekintették azt. A típusterek megkonstruálása véleményrangsorokon keresztül Böge és Eisele [3], Mertens és Zamir [14], Brandenburger és Dekel [4], Heifetz [9], Mertens et al. [15] és [17] munkák témája. Úgy tűnik, hogy a kompaktság fogalma nélkül nem lehet teljes egyetemes típusteret előállítani (lásd Heifetz és Samet [11]), így a fenti munkák mindegyike használja a kompaktság fogalmát, bár igen eltérő módokon. Ezen munka, amely [17] egy továbbfejlesztett formája, olyan modellt vezet be, ahol a paramétertéren csak mérhetőségi struktúra van (minden egyéb munkában a paramétertér topologikus), és a vélemények olyan valószínűségi mértékek, amelyek megszorításai a különböző szintű vélemények tereire kompakt regulárisak. Ebben a modellben olyan egyetemes típusteret konstruálunk, amely teljes.

A következő fejezet a matematikai apparátust ismerteti, míg az utolsó rész a matematikai eredmények játékelméleti alkalmazását öleli fel.

2. A mérték inverzlimesz létezése

A következőkben feltesszük, hogy a mértékek valószínűségi mértékek. Előrendezett halmazon olyan halmazt értünk, amelyen értelmezve van egy bináris reláció, mely tranzitív, és ha a halmaz egy eleme relációban van valamely más elemmel, akkor saját magával is relációban van. Felfelé irányított halmazon olyan előrendezett halmazt értünk, amelynek tetszőleges két eleméhez létezik halmazbani majoráns elem. Legyen μ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ gyűrűn értelmezett halmazfüggvény, és legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. μ szoros a $\mathcal{C}$ halmazrendszeren, ha tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz és tetszőleges $A \in \mathcal{A}$-hoz, $\exists C \in \mathcal{C}$, hogy $C \subseteq A$ és $\mu(A \setminus C) < \epsilon$. Továbbá $\forall Z \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$-re legyen $\mu^*(Z) \doteq \max\{\inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{A},\ Z\subseteq\cup_n A_n} \sum_n \mu(A_n), \sup_{Z\supseteq A\in\mathcal{A}} \mu(A)\}$[1].

3. definíció. *Legyen $(I, \leq)$ előrendezett halmaz, és legyen $(X_i)_{i\in I}$ nemüres halmazok egy családja. Legyen továbbá $f_{ij} : X_j \to X_i$, ha $i \leq j$.*

1. *$(i \leq j$ és $j \leq k) \Longrightarrow f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$,*
2. *$f_{ii} = id_{X_i}$ $\forall i \in I$-re.*

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ rendszert inverzrendszernek nevezzük.

Az inverzrendszer (projektív rendszer) tehát egymáshoz kapcsolt halmazok rendszere.

4. definíció. *Legyen $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ inverzrendszer, ahol $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$-k mértékterek.*

1. *f_{ij} mérhető $\forall(i \leq j)$-re,*
2. *$\mu_i = \mu_j \circ f_{ij}^{-1}, \forall(i \leq j)$-re.*

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ rendszert mérték inverzrendszernek nevezzük.

5. definíció. *Legyen $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ tetszőleges inverzrendszer. Legyenek $X = \prod_{i\in I} X_i$, $P = \{x \in X \mid pr_i(x) = f_{ij} \circ pr_j(x),\ \forall(i \leq j)\}$, ahol pr_i a koordináta leképezés X-ből X_i-be. Ekkor P-t az $(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ inverzrendszer inverzlimeszének nevezzük és $P = \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$-vel jelöljük. Legyen továbbá $p_i \doteq pr_i|_P$, ekkor $p_i = f_{ij} \circ p_j$ $\forall(i \leq j)$-re.*

Az inverzlimesz (projektív limesz) a halmazok Descartes-szorzat fogalmának általánosítása. Ha például $(I, \leq)$ az üres reláció, akkor az inverzlimesz a Descartes-szorzat.

6. definíció. *Legyen $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer, és legyen $P = \varprojlim(X_i,\ (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$.*

1. *$(P, \mathcal{A})$, ahol $\mathcal{A}$ a legdurvább (legszűkebb) σ-algebra, melyre p_i mérhető $\forall i \in I$-re,*

[1] μ^* tulajdonképpen külső mérték. Azt szeretnénk azonban, ha $\mu^* = \mu$ lenne $\mathcal{A}$-n, így a σ-additivitás hiánya miatt meg kellett egy kicsit változtatni az eredeti fogalmat.

2. *μ $(P,\mathcal{A})$-n olyan mérték, hogy $\mu\circ p_i^{-1}=\mu_i$ $\forall i\in I$-re.*

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $(P,\mathcal{A},\mu)$ mértékteret mérték inverzlimesznek nevezzük és $(P,\mathcal{A},\mu)=\underleftarrow{\lim}((X_i,\mathcal{A}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$-vel jelöljük.

A mérték inverzlimesz létezésének egyik problematikus pontja μ σ-additívitása. Ennek a problémának elkülönítése céljából vezetjük be a következő fogalmat.

7. definíció. *Legyen $((X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer, és legyen $P=\underleftarrow{\lim}(X_i,(I,\leq),f_{ij}|i\leq j)$.*

1. *$\mathcal{A}=\cup_{i\in I}p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ algebra,*
2. *μ $\mathcal{A}$-n értelmezett olyan additív halmazfüggvény, hogy $\mu\circ p_i^{-1}=\mu_i$ $\forall i\in I$-re.*

Az 1., 2. pontoknak eleget tevő $(P,\mathcal{A},\mu)$-t gyenge mérték inverzlimesznek nevezzük és $(P,\mathcal{A},\mu)=w-\underleftarrow{\lim}((X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$-vel jelöljük.

Ahhoz, hogy „értelmes” mérték inverzlimeszt kapjuk szükséges P inverzlimesz nemüressége. Ennek biztosítására vezette be Bochner [2] a sorozatmaximalitás fogalmát. Később, Millington és Sion [13] gyengítette a sorozatmaximalitás fogalmát, mely általánosítás a majdnem sorozatmaximalitás.

8. definíció. *Az $((X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i),(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális (almost s.m., almost sequentially maximal), ha tetszőleges $i_1\leq i_2\leq\ldots\in I$ lánchoz $\exists A_{i_n}\subseteq X_{i_n}$ halmazok, hogy*

- *$f_{i_n i_m}^{-1}(A_{i_n})\subseteq A_{i_m}$ $\forall(n\leq m)$-re,*
- *$\mu_{i_n}^*(A_{i_n})=0$ $\forall n$-re,*

ha $x_{i_n}\in(X_{i_n}\setminus A_{i_n})$ és $x_{i_n}=f_{i_n i_{n+1}}(x_{i_{n+1}})$ $\forall n$-re, akkor $\exists x\in P=\underleftarrow{\lim}(X_i,(I,\leq),f_{ij}|_{i\leq j})$, hogy $x_{i_n}=p_{i_n}(x)$ $\forall n$-re.

Vegyük észre, hogy a majdnem sorozatmaximalitás biztosítja az inverzlimesz nemürességét, tehát ebben az esetben a majdnem sorozatmaximalitás kiváltja a Kiválasztási Axiómát.

9. következmény. *Legyenek $(X_n,\mathcal{M}_n)$ mérhető terek $n\in\mathbb{N}$, $(Y_n,\mathcal{N}_n)\doteq(\times_{i=1}^n X_i,\otimes_{i=1}^n\mathcal{M}_i)$, és $((Y_n,\mathcal{N}_n,\mu_n),(\mathbb{N},\leq),f_{mn}|_{m\leq n})$, ahol f_{mn}-ek koordináta leképezések és μ_n-ek tetszőleges valószínűségi mértékek, melyek eleget tesznek a 4. definíció 2. pontjának. Ekkor $((Y_n\mathcal{N}_n,\mu_n),(\mathbb{N},\leq),f_{mn}|_{m\leq n})$ mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\underleftarrow{\lim}(Y_n,(\mathbb{N},\leq),f_{mn}|_{m\leq n})=\times_{i=1}^\infty Y_i=\times_{i=1}^\infty X_i$. A koordináta leképezések szürjektívitása miatt A_n-eket $\emptyset$-nak választva kapjuk a 8. definícióban szereplő fogalmat. ∎

A következő állítás, mely fő matematikai állításunk, Metivier [16] (269. old.), Mallory és Sion [12] eredményeinek általánosítása, tehát Bochner, ill. Choksi [5] eredményeinek további általánosítása.

10. tétel. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), f_{ij}, (I, \leq))|_{i \leq j}$ *mérték inverzrendszer, ahol* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ σ*-kompakt halmazrendszer* $\forall i \in I$*-re. Ha*

1. $(I, \leq)$ *felfelé irányított,*
2. $f_{ij}(\mathcal{C}_j) \subseteq \mathcal{C}_i$ $\forall (i \leq j)$*-re,*
3. $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap \mathcal{C}_j$ $\forall (i \leq j)$*-re* σ*-kompakt halmazrendszer* $\forall x_i \in X_i$*-re,*
4. *ha* $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_i$*, akkor* $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}_i$ $\forall i \in I$*-re,*
5. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *majdnem sorozatmaximális,*
6. μ_i *szoros a* $\mathcal{C}_i$ *halmazrendszeren* $\forall i \in I$*-re,*

akkor $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *létezik és egyértelmű.*

A bizonyítást darabokra bontjuk. Először a σ-additivitás kérdését járjuk köbe.

11. definíció. *Legyen* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *gyűrű,* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ *halmazrendszer és* μ $\mathcal{A}$*-n értelmezett additív halmazfüggvény. Ekkor* $\mathcal{C}$ *halmazrendszer* μ*-majdnem* σ*-kompakt, ha tetszőleges* $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ *halmazsorozathoz és tetszőleges* $\epsilon > 0$*-hoz* $\exists A \subseteq X$ $\mu^*(A) < \epsilon$*, hogy ha* $\complement A \cap (\cap_n C_n) = \emptyset$*, akkor* $\exists m \in \mathbb{N}$*, hogy* $\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) = \emptyset$*.*

A μ-majdnem σ-kompaktság ilyetén definíciójának oka a majdnem sorozatmaximalitás fogalmából (8. definíció) és a 14. állításból érthető meg.

12. segédtétel. *Legyen* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *gyűrű,* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ μ*-majdnem* σ*-kompakt halmazrendszer, ahol* μ $\mathcal{A}$*-n értelmezett additív halmazfüggvény, mely szoros* $\mathcal{C}$*-n. Ekkor* μ σ*-additív* $\mathcal{A}$*-n.*

Bizonyítás. A bizonyítás könnyen látható, az olvasóra hagyjuk. ∎

A következő állítás Rao [18] eredményének általánosítása.

13. állítás. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *olyan mérték inverzrendszer, hogy*

1. $(I, \leq)$ *felfelé irányított halmaz,*
2. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális.*

Ekkor $(P, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *gyenge mérték inverzlimesz létezik és egyértelmű.*

Bizonyítás. A bizonyítás könnyen látható, az olvasóra hagyjuk. ∎

14. állítás. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *mérték inverzrendszer,* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ σ*-kompakt halmazrendszer* $\forall i \in I$*-re, és legyen* $J \subseteq I$*. Ha*

1. $(I, \leq)$ *felfelé irányított halmaz,*
2. *a* J *halmaz minden megszámlálható részhalmazának van legkisebb eleme,*

3. $f_{ij}(\mathcal{C}_j) \subseteq \mathcal{C}_i$ $\forall (i \leq j) \in I$*-re,*

4. $f_{ij}^{-1}(\{x_i\}) \cap \mathcal{C}_j$ $\forall (i \leq j)$ *σ-kompakt halmazrendszer* $\forall x_i \in X_i$*-re,*

5. ha $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_i$*, akkor* $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$ $\forall i \in J$*-re,*

6. μ_i *szoros a* $\mathcal{C}_i$ *halmazrendszeren* $\forall i \in I$*-re,*

7. $((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *mérték inverzrendszer majdnem sorozatmaximális,*

akkor $\mathcal{C} \stackrel{\circ}{=} \cup_{i \in J} p_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$ *μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer $\mathcal{M}$-ben, ahol* $(P, \mathcal{M}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$.

Bizonyítás. Az *1.*, a *7.* feltételek és a 13. állítás miatt $(P, \mathcal{M}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ létezik és egyértelmű. Ekkor elég látni, hogy tetszőleges $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$-hez és tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz $\exists A \subseteq P$ $\mu^*(A) < \epsilon$, hogy ha $\forall m \in \mathbb{N}$-re $\complement A \cap (\cap_{n=1}^m C_n) \neq \emptyset$, akkor $\complement A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$.

Legyenek $(C_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ és $\epsilon > 0$ tetszőlegesen rögzítettek. Legyen $N_i = \{n \in \mathbb{N} \mid C_n = p_i^{-1}(C'_n),\ C'_n \in \mathcal{C}_i,\ i \in J\}$ $\forall i \in J$-re. Legyen továbbá $i(n)$ egy tetszőlegesen rögzített eleme $\{i \in J \mid n \in N_i\}$-nek.

Legyen i_1 az $\{i(1), i(2), \ldots\}$ halmaz legkisebb eleme (a *2.* feltétel miatt létezik). Hasonlóan legyen i_m a $J \setminus \{i_n\}_{n \leq m}$ halmaz legkisebb eleme $\forall m \in \mathbb{N}$-re.

Legyenek A_{i_n}-ek a 8. definícióbani halmazok (*7.* feltétel), és legyenek $\overline{A}_{i_n} \in \mathcal{M}_{i_n}$, hogy $A_{i_n} \subseteq \overline{A}_{i_n}$ és $\mu_{i_n}(\overline{A}_{i_n}) = 0$ $\forall n$-re ($\mathcal{M}_{i_n}$-ek σ-algebrák, így léteznek ilyen $\overline{A}_{i_n}$-ek). Ekkor a *6.* feltétel miatt $\exists K_{i_n} \in \mathcal{C}_{i_n}$, hogy $K_{i_n} \subseteq \complement \overline{A}_{i_n}$ és $\mu_{i_n}(K_{i_n}) > 1 - \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \frac{1}{6}$ $\forall n$-re. Legyen $A = \cup_n p_{i_n}^{-1}(\complement K_{i_n})$.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy $\mu^*(A) < \epsilon$.

Indirekt tegyük fel, hogy $\mu^*(A) \geq \epsilon$. Ekkor, mivel $A = \cup_n p_{i_n}^{-1}(\complement K_{i_n})$ és $\mu_{i_n}(\complement K_{i_n}) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \frac{1}{6}$ $\forall n$-re, így $\exists i^* \in I$, $\exists B^{i^*} \in \mathcal{M}_{i^*}$, hogy $\mu_{i^*}(B^{i^*}) \geq \frac{5\epsilon}{6}$, és $B = p_{i^*}^{-1}(B^{i^*})$ jelölés mellett $B \subseteq A$.

Legyen $j_1 \in I$ olyan, hogy $j_1 \geq i^*$ és $j_1 \geq i_1$; általában, legyen $j_n \in I$ olyan, hogy $j_n \geq j_{n-1}$ és $j_n \geq i_n$ $\forall n \geq 2$ (*1.* feltétel). Ekkor $\exists C^{j_1} \in \mathcal{C}_{j_1}$, hogy $C^{j_1} \subseteq (f_{i^* j_1}^{-1}(B^{i^*}) \setminus (f_{i_1 j_1}^{-1}(\complement K_{i_1}) \cup A_{j_1}))$ és $\mu_{j_1}(C^{j_1}) > \frac{2\epsilon}{3}$ (*6.* feltétel), ahol A_{j_1} a $j_1 \leq j_2 \leq \ldots$ láncra vonatkozik a 8. definícióból. Hasonlóan, $\exists C^{j_n} \in \mathcal{C}_{j_n}$, hogy $C^{j_n} \subseteq (f_{i^* j_n}^{-1}(B^{i^*}) \setminus (f_{i_n j_n}^{-1}(\complement K_{i_n}) \cup A_{j_n}))$ és $\mu_{j_n}(C^{j_n}) > \frac{2\epsilon}{3}$ $\forall n$-re.

C^{j_n}-ek választása (mértéke) miatt $\cap_{n=1}^m f_{j_1 j_n}(C^{j_n}) \neq \emptyset$ $\forall m$-re, így a *3.* feltétel miatt $\cap_n f_{j_1 j_n}(C^{j_n}) \neq \emptyset$. Legyen $x_{j_1} \in \cap_n f_{j_1 j_n}(C^{j_n})$ tetszőlegesen rögzített. Az x_{j_1} választása miatt $f_{j_1 j_2}^{-1}(\{x_{j_1}\}) \cap (\cap_{n=2}^m f_{j_2 j_n}(C^{j_n})) \neq \emptyset$ $\forall m$-re. Ekkor a *4.* feltétel miatt $f_{j_1 j_2}^{-1}(\{x_{j_1}\}) \cap (\cap_{n \geq 2} f_{j_2 j_n}(C^{j_n})) \neq \emptyset$. Legyen $x_{j_2} \in f_{j_1 j_2}^{-1}(\{x_{j_1}\}) \cap (\cap_{n \geq 2} f_{j_2 j_n}(C^{j_n}))$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor

i. $f_{i_1 j_1}(x_{j_1}) \notin \complement K_{i_1}$ és $f_{i_2 j_2}(x_{j_2}) \notin \complement K_{i_2}$,

ii. $x_{j_1} \in f_{i^* j_1}^{-1}(B^{i^*})$ és $x_{j_2} \in f_{i^* j_2}^{-1}(B^{i^*})$.

Definiáljunk a fenti módon egy $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot, ekkor $\forall n$-re

iii. $f_{i_n j_n}(x_{j_n}) \notin \complement K_{i_n}$,

iv. $x_{j_n} \in f_{i^* j_n}^{-1}(B^{i^*})$.

A *7.* feltétel miatt $\exists x \in P$, hogy $x_{j_n} = p_{j_n}(x)$ $\forall n$-re. Ekkor azonban, **iii.** miatt $x \notin A$, míg **iv.** miatt $x \in B$, tehát $B \nsubseteq A$, ami ellentmondás.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy ha $\forall m \in \mathbb{N}$-re $\complement A \cap (\cap_{n=1}^{m} C_n) \neq 0$, akkor $\complement A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$.

Legyen $C^m = K_{i_1} \cap (\cap_{j \in J} f_{i_1 j}(\cap_{\{n \in N_j | n \leq m\}} p_j(C_n)))$ $\forall m \in \mathbb{N}$-re. Ekkor $C^m \neq \emptyset$, és a *3.* és az *5.* feltevés miatt $C^m \in \mathcal{C}_i$ $\forall m \in \mathbb{N}$-re. Világos, hogy $C^m \supseteq C^{m+1}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, így $\mathcal{C}_i$ σ-kompaktsága miatt $\cap_m C^m \neq \emptyset$.

Legyen $x_{i_1} \in \cap_m C^m$ tetszőlegesen rözített. A *4.* feltétel miatt $f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\}) \cap \mathcal{C}_{i_2}$ σ-kompakt halmazrendszer. x_{i_1} választása miatt $K_{i_2} \cap (\cap_{n=1}^{m}(f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\}) \cap (\cap_{j \in J \setminus \{i_1\}} f_{i_2 j}(\cap_{\{n \in N_j | n \leq m\}} p_j(C_n))) \neq \emptyset$ $\forall m \in \mathbb{N}$-re, így $K_{i_2} \cap (\cap_n (f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\}) \cap (\cap_{j \in J \setminus \{i_1\}} f_{i_2 j}\ (\cap_{\{n \in N_j | n \leq m\}} p_j(C_n))) \neq \emptyset$. Legyen $x_{i_2} \in K_{i_2} \cap (\cap_m (f_{i_1 i_2}^{-1}(\{x_{i_1}\}) \cap (\cap_{j \in J \setminus \{i_1\}} f_{i_2 j}(\cap_{\{n \in N_j |\ n \leq m\}} p_j(C_n)))$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor

a: $x_{i_1} = f_{i_1 i_2}(x_{i_2})$,

b: $x_{i_2} \in K_{i_2} \cap (\cap_{n \notin N_{i_1} \cup N_{i_2}} p_{i_2}(C_n)) \cap (p_{i_2}(\cap_{n \in N_{i_1} \cup N_{i_2}} C_n))$.

Alkalmazva ezt az eljárást az $i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \ldots$ láncra, kapunk pontok egy halmazát, mely pontok a következő tulajdonságokkal bírnak $\forall k \in \mathbb{N}$-re:

c: $x_{i_k} = f_{i_k i_{k+1}}(x_{i_{k+1}})$,

d: $x_{i_k} \in K_{i_k} \cap (\cap_{n \notin \cup_{j=1}^{k} N_{i_j}} p_{i_k}(C_n)) \cap (p_{i_k}(\cap_{n \in \cup_{j=1}^{k} N_{i_j}} C_n))$.

A **c:** és **d:** pontok miatt $x_{i_k} \in (X_{i_k} \setminus \complement K_{i_k})$, $x_{i_k} = f_{i_k i_{k+1}}(x_{i_{k+1}})$ $\forall k \in \mathbb{N}$-re, így $A_{i_k} \subseteq \complement K_{i_k}$ $\forall k$-ra és a *7.* feltétel miatt $\exists x \in \varprojlim(X_i, (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$, hogy $x_{i_k} = p_{i_k}(x)$ $\forall k$-ra. Ekkor azonban $x \in \complement A \cap (\cap_n C_n)$, így $\complement A \cap (\cap_n C_n) \neq \emptyset$. ∎

15. állítás. *Legyen* $((X_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{C}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *mérték inverzrendszer, ahol* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ *σ-kompakt halmazrendszer* $\forall i \in I$*-re. Ha*

1. $(I, \leq)$ *felfelé irányított halmaz,*
2. $(X, \mathcal{A}, \mu) = w - \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *létezik,*
3. $\forall (i_1 \leq i_2 \leq \ldots)$ *láncra,* $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ *μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer,*
4. μ_i *szoros* $\mathcal{C}_i$*-n* $\forall i \in I$*-re,*

akkor $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i \leq j})$ *létezik és egyértelmű.*

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy μ σ-additív $\cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$-n.

A *4.* feltétel miatt μ szoros $\cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{C}_i)$-n.

Legyenek $A_1, A_2, \ldots \in \cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$ tetszőleges diszjunkt halmazok, hogy $\cup_n A_n \in \cup_{i \in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$. A_n-ek definíciója miatt $\forall n$-hez $\exists i(n) \in I$ és $\exists A_n^{i(n)} \in \mathcal{M}_{i(n)}$, hogy $A_n = p_{i(n)}^{-1}(A_n^{i(n)})$. Legyen $i_1 = i(1)$. Az *1.* feltétel miatt $\exists i^* \in I$, hogy $i_1 \leq i^*$ és $i(2) \leq i^*$. Legyen $i_2 = i^*$. Definiáljuk az $i_1 \leq i_2 \leq \ldots$ lánc többi elemét hasonlóan. A *3.* tulajdonság miatt $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer, így a 12. segédtétel miatt $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Az $A_1, A_2, \ldots$ halmazok tetszőlegesen választottak voltak, így μ σ-additív $\cup_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{M}_i)$-n. Ekkor a mérték kiterjeszthetősége miatt (lásd például Halmos [7]) $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ létezik és egyértelmű. ■

A 10. tétel bizonyítása. A 14. állítás miatt tetszőleges $i_1 \leq i_1 \leq \ldots$ lánc esetén $\cup_n p_{i_n}^{-1}(\mathcal{C}_{i_n})$ μ-majdnem σ-kompakt halmazrendszer. Ekkor a 13. állítás, és a 15. állítás miatt $(X, \mathcal{M}, \mu) = \varprojlim((X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i), (I, \leq), f_{ij}|_{i\leq j})$ létezik és egyértelmű. ■

3. Teljes, egyetemes típustér tisztán mérhető paramétertéren

Kiindulásképpen legyen S paramétertér, mely paramétertér tartalmazza az összes a játékosoktól független tényt, amelyeknek befolyása lehet a játékra, pl. a játék leírása. A játékosok véleményeinek modellezéshez az S generálta véleményteret kell vennünk, tehát figyelembe kell venni, hogy miként vélekednek az egyes játékosok S-ről, miként vélekednek az egyes játékosok arról, hogy miként vélekednek a játékosok S-ről, s.i.t.

16. definíció. *A paramétertér mérhető tér $(S, \mathcal{A}_S)$, ahol $\mathcal{A}_S$ az S téren definiált σ-algebra.*

A paramétertérről csak azt tesszük fel, hogy mérhető. Modellünkben a játékosok olyan fogalmakkal operálnak, mint esemény, kimenetel, valószínűség; erre egy tisztán mértékelméleti modell tűnik alkalmasnak. Tudjuk azonban, hogy tisztán mértékelméleti modell nem feltétlenül eredményez teljes, egyetemes típusteret (lásd Heifetz és Samet [11]).

17. definíció. *Jelölje $\Delta(S, \mathcal{A}_S)$ az $(S, \mathcal{A}_S)$-en értelmezett valószínűségi mértékek halmazát, ekkor $\Delta(S, \mathcal{A}_S) \subseteq [0,1]^{\mathcal{A}_S}$. Legyen $(\Delta(S, \mathcal{A}_S), \tau)$ a $[0,1]^{\mathcal{A}_S}$ szorzattopológia (pontonkénti konvergencia topológia) altereként előállt topológia. Jelöljük a Baire mérhetőségi struktúrát $B(\Delta, \tau)$-val.*

Ahol ez nem vezet félreértéshez, ott $\Delta(S, \mathcal{A}_S)$ helyett a rövidebb $\Delta(S)$ jelölést használjuk. Hasonlóan járunk el $B(\Delta(S), \tau)$ és $B(\Delta(S))$ esetében is.

18. definíció. *Definiáljunk terek egy sorozatát rekurzív módon, ahol M a játékosok halmaza:*

$$\begin{aligned}
V_0 &= (S, \mathcal{A}_S) \\
V_1 &= V_0 \otimes (\Delta(V_0)^M, B(\Delta(V_0)^M)) \\
V_2 &= V_1 \otimes (\Delta(V_1)^M, B(\Delta(V_1)^M)) \\
&= V_0 \otimes (\Delta(V_0)^M, B(\Delta(V_0)^M)) \otimes (\Delta(V_1)^M, B(\Delta(V_1)^M)) \\
&\vdots \\
V_n &= V_{n-1} \otimes (\Delta(V_{n-1})^M, B(\Delta(V_{n-1})^M)) \\
&= V_0 \otimes \otimes_{j=0}^{n-1} (\Delta(V_j)^M, B(\Delta(V_j)^M)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vegyük a $V_\infty = S \times \times_{j=0}^{\infty} \Delta(V_j)^M$ végtelen szorzatot. V_∞-t véleménytérnek, egy pontját világállapotnak nevezzük.

V_0 egy pontját paraméter értéknek nevezzük, egyszerűen egy lehetséges paramétere a játéknak. V_1 egy pontja nem más, mint egy lehetséges paraméter érték, és a hozzá tartozó elsőrendű vélemények (a játékosok véleménye a lehetséges paraméterekről), s.i.t.

Ha $v \in V_\infty$, akkor v nem más, mint $v = (s, \mu_1^1, \mu_1^2, \ldots, \mu_2^1, \mu_2^2, \ldots)$, ahol μ_j^i jelentése: az „i" játékos j-ed rendű véleménye. Tehát V_∞ minden eleme felfogható úgy, mint egy *véleményrangsor*, $(\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots)$ minden játékosra ($\forall i \in M$-re), és még egy lehetséges paraméter.

19. definíció. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Egy véleményrangsor $(\mu_1^i, \mu_2^i, \ldots)$ következetes ha $\forall n \geq 2$-re*

1. $marg_{V_{n-2}} \mu_n^i = \mu_{n-1}^i$,
2. $marg_{[\Delta(V_{n-2})]^i} \mu_n^i = \delta_{\mu_{n-1}^i}$,

ahol $\mu_n^i \in [\Delta(V_{n-1})]^i$ ($[\Delta(V_{n-1})]^i$ az i index másolata $\Delta(V_{n-1})$-nek), továbbá $marg_{V_n}$ jelöli a V_n-en lévő peremmértéket.

Az első feltétel azt rögzíti, hogy az adott játékos véleménye egy adott dologról nem változik a véleményrangsorban. A második feltétel szerint az adott játékos pontosan ismeri a saját véleményét (lásd Harsányi [8]). A fenti két feltétel felfogható úgy, mint a játékosok „logikája", feltesszük, hogy ez a „logika" *köztudott.*

20. definíció. *Vegyük azokat a pontokat $(s, \mu_1^1, \mu_1^2, \ldots, \mu_2^1, \mu_2^2, \ldots)$ V_∞-ből, melyek esetén a véleményrangsorok $(\mu_1^i, \mu_i^2, \ldots)$ következetesek $\forall i \in M$-re. Legyen az összes ilyen pont halmaza V_∞^c, és hívjuk V_∞^c-t* következetes alterének.

A ^{c} jelölést más terek esetében is használjuk, és jelentése megegyezik a 20. definícióban elmondottakkal.

Modellünkben a véleményrangsorok olyan valószínűségi mértékek sorozatai, melyek következetesek és megszorításaik a különböző rendű „csonka" véleményterekre kompakt regulárisak. Ebből következően definiáljuk újra a véleményteret (18. definíció):

21. definíció. *Legyen*

$$
\begin{aligned}
V_0' &= V_0 \\
V_1' &= V_0' \otimes (\Delta_{MC}(V_0')^M, B(\Delta_{MC}(V_0')^M)) \\
V_2' &= (V_1' \otimes (\Delta_{MC}(V_1')^M, B(\Delta_{MC}(V_1')^M)))^c \\
&\vdots \\
V_n' &= (V_{n-1}' \otimes (\Delta_{MC}(V_{n-1}')^M, B(\Delta_{MC}(V_{n-1}')^M)))^c \\
&= (V_0' \otimes \otimes_{j=0}^{n-1} (\Delta_{MC}(V_j')^M, B(\Delta_{MC}(V_j')^M)))^c \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ahol Δ_{MC} jelöli azon valószínűségi mértékek halmazát, hogy

$$
\begin{aligned}
\Delta_{MC}(V_0') &= \Delta(V_0') \\
\Delta_{MC}(V_1') &= \Delta_C(\Delta_{MC}(V_0')^M, B(\Delta_{MC}(V_0')^M)) \\
\Delta_{MC}(V_2') &= \Delta_C((\otimes_{j=0}^1(\Delta_{MC}(V_j')^M, B(\Delta_{MC}(V_j')^M)))^c) \\
&\vdots \\
\Delta_{MC}(V_n') &= \Delta_C((\otimes_{j=0}^{n-1}(\Delta_{MC}(V_j')^M, B(\Delta_{MC}(V_j')^M)))^c) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

ahol Δ_C a kompakt reguláris (az első fejezetben használt terminológia szerint: a kompakt halmazokon szoros) valószínűségi mértékek halmazát jelöli.

Látható, hogy V_n' egy tetszőleges pontja olyan véleményrangsorokat tartalmaz, amelyekben a vélemények maximum n-ed rendűek, következetesek, és a megszorításaik a többi játékos hasonló tulajdonságú véleményeinek tereire kompakt reguláris valószínűségi mértékek. Tehát V_n'-ek már csak azokat a véleményeket tartalmazza, amelyekkel a modellünkben foglalkozni kívánunk.

A következő fogalom a legfontosabb lépés fő eredményünk bizonyításához.

22. definíció. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Definiáljuk a csonka véleményterek következősorozatát (lásd a 18. definíciót):*

$$
\begin{aligned}
C_0 &= (\Delta_{MC}(V_0')^{M\setminus\{i\}}, B(\Delta_{MC}(V_0')^{M\setminus\{i\}})) \\
C_1 &= (\otimes_{j=0}^1(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}}, B(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}})))^c \\
&\vdots \\
C_n &= (\otimes_{j=0}^n(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}}, B(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}})))^c \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A csonka véleményterek segítségével leválasztottuk a szorzatterek nem topologikus részét.

A következő definícióban adjuk meg a használni kívánt mérték inverzrendszer mérhető tereit.

23. definíció. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Definiáljunk terek egy sorozatát rekurzív módon:*

$$
\begin{aligned}
T_0 &= V_0' \\
T_1 &= V_0' \otimes (\Delta_{MC}(V_0')^{M\setminus\{i\}}, B(\Delta_{MC}(V_0')^{M\setminus\{i\}})) \\
T_2 &= (V_1' \otimes (\Delta_{MC}(V_1')^{M\setminus\{i\}}, B(\Delta_{MC}(V_1')^{M\setminus\{i\}})))^c \\
&\vdots \\
T_n &= (V_{n-1}' \otimes (\Delta_{MC}(V_{n-1}')^{M\setminus\{i\}}, B(\Delta_{MC}(V_{n-1}')^{M\setminus\{i\}})))^c \\
&= (V_0' \otimes \otimes_{j=0}^{n-1}(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}}, B(\Delta_{MC}(V_j')^{M\setminus\{i\}})))^c \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

A következő fogalom egy adott játékos lehetséges típusainak halmaza.

24. definíció. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített, és vegyük a következő halmazt:*

$$T^i = (\times_{j=0}^{\infty} \Delta_{MC}(V_j')^i)^c$$

Ekkor T^i az „i” játékos típusainak halmaza, T^i egy pontja az „i” játékos egy lehetséges típusa.

Az „i” játékos típusainak halmaza tehát tartalmazza az összes lehetséges következetes véleményrangsort. Tehát, ha $t \in T^i$, akkor $t = (\nu_1^i, \nu_2^i, \nu_3^i, \ldots)$, és t következetes. Ezen tulajdonságok miatt T^i, ha T^i benne van egy típustérben, akkor ez egy *teljes típustér*. Látható, hogy modellünkben a vélemények már nem, de azok megszorításai a csonka véleményterekre már kompakt reguláris valószínűségi mértékek.

25. következmény. *T^i egy szorzattér altere, így topológiája a pontonkénti konvergencia topológia: (T^i, τ).*

26. következmény. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített,*

$$((T_n, \nu_{n+1}^i), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{mn}|_{m \leq n}) \tag{1}$$

mérték inverzrendszer, ahol pr_{mn} koordináta leképezés T_n-ből T_m-be $\forall(m \leq n)$-re, és $(\nu_1^i, \nu_2^i, \ldots) \in T^i$.

Bizonyítás. A mértél inverzrendszer definíciója megtalálható a 4. definícióban.

- $pr_{mn} = pr_{mk} \circ pr_{kn}$ $\forall(m \leq k \leq n)$-re, a koordináta leképezések definíciója miatt,
- $pr_{nn} = id_{T_n^c}$ $\forall n$-re közvetlenül adódik a koordináta leképezések definíciójából,
- pr_{mn} mérhető $\forall(m \leq n)$-re, a szorzat mérhetőségi struktúra közvetlen következménye,
- $\nu_{n+1}^i(pr_{mn}^{-1}(A)) = \nu_{m+1}^i(A)$ $\forall(m \leq n)$-re és $\forall A \in T_m$ mérhető halmazra a véleményrangsorok következetessége miatt.

■

A 26. következmény kapcsolatot teremt a véleményterek, véleményrangsorok és a mérték inverzrendszer fogalmak között.

27. megjegyzés. *A 26. következményben* (1) *a*

$$((C_n, marg_{C_n} \nu_{n+2}^i), (\mathbb{N} \cup \{0\}, \leq), pr_{mn}|_{m \leq n}) \tag{2}$$

mérték inverzrendszerre cserélhető

A következő állítás azt mutatja, hogy az igazi kérdés ν^i σ-additivitása, tehát, hogy létezik-e a mérték inverzlimesz.

28. állítás. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. Az* (1)*-ban definiált mérték inverzrendszer esetén létezik $(T, \mathcal{A}_T, \nu^i)$ gyenge mérték inverzlimesz (lásdd az 7. definíciót).*

Bizonyítás. Lásd a 13. állítást és a 20. definíciót. ∎

A 28. állítás ν^i additivitása koncentrál. Általában a mérték inverzlimesz létezése két problémába ütközhet. Az első az inverzlimesz „gazdagsága", tehát az a kérdés, hogy az inverzlimesz elég sok pontot tartalmazzon (a Heifetz és Samet [11] cikkbeni ellenpélda erre a problémára épül). A második tipikus probléma ν^i σ-additivitása (természetesen a két probléma nem független egymástól).

Az első fajta probléma elkerülésére koordináta leképezéseket használunk (majdnem sorozatmaximalitás lásd a 8. definíciót és a 9. példát), míg a második típusú probléma kezelése a valószínűségi mértékek valami fajta kompakt regularitását követeli meg.

29. definíció. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített. $\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$ olyan valószínűségi mértékek halmaza, hogy ha $\nu \in \Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$, akkor $marg_{C_{n-1}} \nu \in \Delta_C(C_{n-1})$ $\forall n$-re.*

A következő tétel a fő eredményünk.

30. tétel. *Legyen $i \in M$ tetszőlegesen rögzített, ekkor T^i egyetemes típustér, tehát létezik $f : T^i \to (\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T), \tau)$ homeomorfizmus.*

A tétel bizonyítását szétbontottuk.

A következő segédtétel a mértékterek összeillesztéséről szól.

31. segédtétel. *Legyenek $(M, \mathcal{A}_M, \mu_M), (N, \mathcal{A}_N, \mu_N)$ valószínűségi mértékterek, és legyen μ additív halmazfüggvény $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M \times N)$-en, mely a cilinder halmazok által generált algebra. Legyenek továbbá p_M és p_N koordináta leképezések. Ha $\mu \circ p_M^{-1} = \mu_M$ és $\mu \circ p_N^{-1} = \mu_N$, akkor μ σ-additív.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\mathcal{A}$ elemei felbonthatóak a következő formában: $\cup_{j=1}^m (M_j \times N_j)$, ahol $m \in \mathbb{N}$, $M_j \in \mathcal{A}_M$, $N_j \in \mathcal{A}_N$. Ismert hogy, μ σ-additív $\mathcal{A}$-n pontosan akkor, ha tetszőleges $A_n \supseteq A_{n+1}$ halmazsorozatra $(\cap_n A_n = \emptyset) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tetszőleges halmazsorozat, hogy $A_n \supseteq A_{n+1}$ és $\cap_n A_n = \emptyset$. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$-hez legyen $k_n \in \mathbb{N}$, hogy $A_n = \cup_{j=1}^{k_n} (M_j^n \times N_j^n)$. Legyen $F \doteq \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f(n) \leq k_n \quad \forall n\}$, ekkor $\cap_n A_n = \cup_{f\in F} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)$. Tudjuk, hogy

$$(\cap_n A_n = \emptyset) \Longrightarrow (\cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n) = \emptyset \quad \forall f \in F\text{-re}). \tag{3}$$

Osszuk az $\cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)$ halmazokat két csoportba. Tartalmazza az első csoport, F_1 azokat az f elemeket, ahol $\cap_n M_{f(n)}^n = \emptyset$, és a maradék elemek alkossák a második csoportot F_2-őt.

Legyen $M_n \doteq \cup_{f\in F_1} \cap_{j=1}^n M_{f(j)}^j$, ahol n tetszőlegesen rögzített. Minden n-re M_n véges sok $\mathcal{A}_M$-bani halmazból kapható meg, tehát $M_n \in \mathcal{A}_M$. Könnyen látható, hogy $M_n \supseteq M_{n+1}$ $\forall n$-re, tehát $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton halmazsorozat. Azt kell még látnunk, hogy $\cap_n M_n = \emptyset$.

$\cap_n M_n = \cup_{f\in F_1} \cap_n M_{f(n)}^n$. F_1 definíciója miatt $\cap_n M_{f(n)}^n = \emptyset$ $\forall f \in F_1$-re, tehát $\cap_n M_n = \emptyset$.

A fentiekből következik, hogy $\cap_n (M_n \times N) \supseteq \cup_{f\in F_1} \cap_n (M_{f(n)}^n \times N_{f(n)}^n)$ $\forall n$-re. μ_M σ-additivitása miatt $\mu_M(M_n) \to 0$, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\mu_M(M_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(M_n \times N) \geq \lim_{n\to\infty}\mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)})),$$

így $\mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)})) \to 0$.

Az F_2 halmazra teljesen hasonlóan látható, hogy $\mu(\cup_{f\in F_2} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)}))$ $\to 0$.

μ additivitása miatt

$$\begin{aligned}&\mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)})) + \mu(\cup_{f\in F_2} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)}))\\ &\geq \mu((\cup_{f\in F_1} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)})) \cup (\cup_{f\in F_2} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)}))).\end{aligned} \tag{4}$$

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)})) < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$-re, és $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(\cup_{f\in F_2} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)})) < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall n \geq n_2$-re. Ekkor $\mu(\cup_{f\in F_1} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)})) + \mu(\cup_{f\in F_2} \cap_n (M^n_{f(n)} \times N^n_{f(n)})) < \epsilon$ $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$-re. A (4) egyenlőtlenség és ϵ tetszőlegesen választott volta miatt $\mu(A_n) \to 0$. ∎

32. definíció. *Legyen $g : \Delta_{MC}(T, \mathcal{A}) \to T^i$ olyan, hogy $\forall \nu$ mértékhez azt a $t = (\nu^i_1, \nu^i_2, \ldots, \nu^i_n, \ldots)$ pontot rendeli T^i-ből, ahol*

$$\nu^i_n = marg_{T_{n-1}}\nu \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

33. segédtétel. *g bijekció.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy g injektív. Ha $\nu \in \Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$ adott, akkor ν egyértelműen meghatározza a peremmértékeit, tehát meghatároz egy pontot T^i-ben.

Most azt mutatjuk meg, hogy g szürjektív. A 10. tétel feltételei teljesülnek a (2) mérték inverzrendszerre, hiszen a 9. példa, a kompakt halmazok és a peremmértékek kompakt regularitása biztosítja a feltételeket. Ekkor a 28. állítás miatt alkalmazhatjuk a 31. segédtételt $(S, \mathcal{A}, \nu^i_1)$-re és a (2) mérték inverzrendszer mérték inverzlimeszére. A mérték kiterjeszthetősége még az egyértelműséget is biztosítja, így az (1) mérték inverzrendszernek egyetlen mérték inverzlimesze van. Tehát tetszőleges $t \in T^i$ elemhez létezik $\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T)$ halmazbani elem (a mérték a mérték inverzlimeszben), mely peremmértékei t komponensei. ∎

34. definíció. *Legyen $f = g^{-1}$.*

35. segédtétel. *f homeomorfizmus.*

Bizonyítás. Közvetlen következménye a τ topológia tulajdonságainak. ∎

A 30. tétel bizonyítása.

Legyen f definiálva a 34. definícióval.

A 33. segédtétel miatt f bijekció.

A 35. segédtétel miatt f homeomorfizmus. ∎

36. megjegyzés. *A 30. tétel típustere egyetemes.*

37. megjegyzés. *A homeomorfizmus létezése csak $(\Delta_{MC}(T, \mathcal{A}_T), \tau)$-ra, nem $(\Delta_{MC}(T, \sigma(\mathcal{A}_T), \tau)$-ra bizonyítottuk, mert az utóbbira nem feltétlenül létezik (lásd a 38. példát).*

A következő ellenpélda a 30. tételhez fűzött 37. megjegyzést támasztja alá.

38. példa. *Legyen* $\Omega \circeq [0,1]^{\{1,1/2,1/3,\dots,1/n,\dots\}}$, *tehát az* $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ *pontokon értelmezett* $[0,1]$*-be képező függvények halmaza.*

Legyenek $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1/n \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, $\delta_{f_n}(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f_n \in A \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ *Dirac-mértékek. Ekkor* Ω *kompakt metrikus tér, mérhetőségi struktúrája a koordináta leképezések generálják (szorzattopológia), és látható, hogy a Borel és Baire halmazok egybeesnek.*

Az is látható továbbá, hogy a koordináta leképezések segítségével megadott algebra (cilinder halmazok) generálja a Borel mérhetőségi struktúrát.

Legyen $f_0 = 0$ *konstans függvény, és legyen* δ_{f_0} *a fent definiáltaknak megfelelően Dirac-mérték. Látható, hogy* $\delta_{f_n} \to \delta_{f_0}$ *pontonként az algebra (cilinder halmazok) összes elemén, de a* $B = \{f_0\}$ *(minden pontban nulla függvény) halmazon, ami nem eleme az algebrának csak a* σ*-algebrának,* $\delta_{f_n}(B) \not\to \delta_{f_0}(B)$.

A következő példa azt demonstrálja, hogy a mi modellünk mennyiben lehet előrelépés a korábbi modellekhez képest.

39. példa. *Legyen két játékos, mindkét játékosnak legyen két-két stratégiája. Ez a játék normál formában egy pont* $\mathbb{R}^8$*-ban. Van egy valószínűségi változó, mely meghatározza a játékosok kifizetéseit, tehát a paramétertér legyen* $S = \mathbb{R}^{8^{\mathbb{R}}}$ *(a paraméterek függvények* $\mathbb{R}$*-ből* $\mathbb{R}^8$*-ba).* S *nem kompakt, nem Polish-tér, így Mertens és Zamir [14], ill. Brandenburger és Dekel [4] modelljei nem működnek ebben az esetben. Legyen* S *mérhetőségi struktúrája a Borel halmazai. A mi modellünkben a lehetséges vélemények az összes valószínűségi mértékek halmaza* S*-en, de ezek között lehetnek olyanok, melyek nem kompakt regulárisak, tehát Heifetz [9], Mertens et al. [15] modelljei kevésbé általánosak, mint a miénk.*

Két megjegyzés:

40. megjegyzés. *A Baire halmazok szerepe csupán a modellezni kívánt probléma szempontjából fontos (hasonlóan Heifetz és Samet [10]-hoz). A Baire halmazok helyett mindenhol Borel halmazokat használva a fenti eredmények érvényesek maradnak.*

41. megjegyzés. *Elfogadott az irodalomban (lásd Dekel és Gul [6]), hogy a Bayesi modellekben maga a modell is köztudott a játékosok számára. Ez a mi modellünkben is igaz, de csak a 37. megjegyzés mellett. Ha* σ*-algebrára szeretnénk látni a homeomorfizmust (ez lenne a „szép” modell), akkor a játékosok számára a modell nem lenne köztudott.*

A fent ismertetett modellnek fő „erénye” az, hogy a különböző rendű vélemények terén olyan topológiát definiál, mely független az alacsonyabb rendű vélemények tereinek topológiájától, ráadásul ezen tér a vélemények gazdagabb ábrázolását teszi lehetővé.

Hivatkozások

[1] Aumann R. J.: *Agreeing to disagree* Annals of Statistics **4**, 1236–1239. (1976)

[2] Bochner S.: *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press (1955)

[3] Böge W., T. Eisele: *On solutions of bayesian games* International Journal of Game Theory **8**, 193–215. (1979)

[4] Brandenburger A., E. Dekel: *Hierarchies of beliefs and common knowledge* Journal of Economic Theory **59**, 189–198. (1993)

[5] Choksi J. R.: *Inverse limits of measure spaces* Proc. London Math. Soc. **8(Ser 3)**, 321–342. (1958)

[6] Dekel E., F. Gul: *Rationality and knowledge in game theory* Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications (Seventh World Congress of Econometric Society Vol. 1.) 87–171, (1997)

[7] Halmos P. R.: *Mértékelmélet*, Gondolat (1984)

[8] Harsányi J.: *Games with incomplete information played by bayesian players part I., II., III.* Management Science **14**, 159–182., 320–334., 486–502. (1967-1968)

[9] Heifetz A.: *The bayesian formulation of incomplete information – the non-compact case* International Journal of Game Theory **21**, 329–338. (1993)

[10] Heifetz A., D. Samet: *Topology-free typology of beliefs* Journal of Economic Theory **82**, 324–341. (1998)

[11] Heifetz A., D. Samet: *Coherent beliefs are not always types* Journal of Mathematical Economics **32**, 475–488. (1999)

[12] Mallory D. J., M Sion.: *Limits of inverse systems of measures* Ann. Inst. Fourier **21**, 25–57. (1971)

[13] Millington H., M. Sion: *Inverse systems of group-valued measures* Pacific Journal of Mathematics **44**, 637–650. (1973)

[14] Mertens J. F., S. Zamir: *Formulations of bayesian analysis for games with incomplete information* International Journal of Game Theory **14**, 1–29. (1985)

[15] Mertens J. F., S. Sorin, S. Zamir: *Repeated games part A* CORE Discussion Paper No. 9420 (1994)

[16] Metivier M.: *Limites projectives de measures. Martingales. Applications* Annali di Matematica **63**, 225–352. (1963)

[17] Pintér M.: *Type space on a purely measurable parameter space* Economic Theory **26**, 1239–139. (2005)

[18] Rao M. M.: *Measure Theory and Integration*, John Wiley & Sons (1987)