Dobos Imre

Készletgazdálkodás és visszutas logisztika

Budapesti Corvinus Egyetem

Lektorálta: Dr. Temesi József

ISBN 978-963-503-512-0 (online)
Kiadó: Budapesti Corvinus Egyetem

Budapesti Corvinus Egyetem

Gazdálkodástudományi Kar

Készletgazdálkodás és visszutas logisztika

Dobos Imre

Budapest 2012

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

Előszó

A modern gazdaság egyre inkább szembesül a természetes erőforrások beszűkülésével. A meg nem újuló erőforrások készleteinek csökkenése a gazdaság szereplőit arra kényszeríti, hogy korlátozottan rendelkezésre álló ásványi anyagokat megkímélje. Ez a koncepció vezet a fenntartható fejlődés vállalati gazdálkodásba történő átültetésének szükségességéhez. A dolgozat célja a környezettudatos anyag- és készletgazdálkodás matematikai modelljeinek vizsgálata.

A környezettudatos anyag- és készletgazdálkodást a magyar szakirodalomban az utóbbi időben nevezik visszutas logisztikának, inverz logisztikának, de néha hulladékkezelési logisztikának is. A magyar szóhasználat tehát nem egységes a terület megnevezésére. Angol elnevezése azonban meglehetősen egységes: „reverse logistics". E kifejezésnek legtalálóbb magyar megfelelője talán a visszutas, esetleg reverz logisztika. A jelenleg is használt inverz logisztika kifejezést azért nem javasolt használni, mert annak angolul az „inverse logistics" felel meg, amit csak nagyon szűk körben – főleg Japánban - használnak a nemzetközi irodalomban, ezért fordítási zavart okozhat. Európában és az Egyesült Államokban a „reverse logistics" terjedt el. Így a terület magyar elnevezését a dolgozatban visszutas logisztikának választom.

A dolgozat három nagyobb fejezetre taglalható. Az *első* részben definiálom a visszutas logisztikát, vázolom annak feladatait.

A *második* szakaszban hat különböző, a visszutas logisztikához kapcsolódó készletmodellt mutatok be. E készletmodellek viszonylag rövid múltra tekinthetnek vissza. A tételnagyság modellek visszutas logisztikai kiterjesztésének igénye főként az 1990-es évek közepén vált hangsúlyossá. A determinisztikus visszutas logisztikai készletmodellek közül az egyik az 1960-as években, a másik az 1970-es években keletkezett. A kutatási irány közelmúltbeli elhanyagoltságát mutatja, hogy az 1980-as években egyetlen dolgozat sem jelent meg ezen a területen. Az Európai Unió környezetvédelmi szabályozásának kapcsán a visszutas logisztika újra kiemelten fontossá vált. A nagy kutatóműhelyekben a modellek alkotása napjainkban is folyik, jelenleg a tételnagyság modellek területén a hiánykezeléses modellek kidolgozására fókuszálnak. A jelen dolgozatban kizárólag hiány nélküli modelleket mutatok be, nevezetesen az összes elérhetőt.

A *harmadik* szakaszban nagyon röviden érintem a visszutas logisztika hatását a termeléstervezésre, ezen belül is a szükséglettervezési rendszerekre. A kutatásoknak olyan új területe ez, ahol a visszutas logisztikai készletmodellek alkalmazásra kerülhetnek. A kutatás újdonságát mutatja, hogy ebben a témában az első dolgozat 2000-ben jelent meg. Az első publikációk a legelső visszutas logisztikai készletmodell dinamikus változatát vizsgálták: a Wagner-Whitin-modell kiterjesztése az időben változó kereslet irányába. A determinisztikus statikus készletmodellek heurisztikák alapjául szolgálnak e modellek szuboptimális megoldásának előállítására. A heurisztikák előállítása a jövő feladata lehet.

Legvégül összegzem a dolgozat eredményeit: a bemutatott meta-modell segítségével a visszutas logisztikai készletmodellek egységes szemléletben tárgyalhatóak és a tételszámok egészértékű megoldásai ennek segítségével meghatározhatóak.

A dolgozat eredményei 1998 és 2005 között különböző egyetemeken folytatott kutatásaim során keletkeztek. A téma fontosságára és időszerűségére figyelmemet Prof. Dr. Knut Richter hívta fel, aki mellett tudományos munkatársként dolgoztam 1994 és 1999 között az Europa-Universität Viadrina Frankfurt (Oder) egyetemen, s munkakapcsolatunk azóta is tart. Prof. Dr. Klaus-Peter Kistner mellett az Universität Bielefeld egyetemen 1999-2000-ben három félévet töltöttem el, ahol főleg a visszutas logisztikai folyamatok optimális irányítással történő modellezhetőségét vizsgáltam. 2001 és 2005 között a dolgozat lényegi részének megírását a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetemen, illetve a Budapesti Corvinus Egyetemen fejeztem be. Dr. Czakó Erzsébet egyetemi docens asszony volt, a Vállalatgazdaságtan Intézet vezetőjeként biztosította számomra kutatásaim befejezéséhez a szükséges szakmai hátterének feltételeket.

A monográfia és az első számú függelék lényegében megegyezik a Budapesti Corvinus Egyetemen a doktori disszertációként elfogadott munkámmal. A második függelék azonban a legujabb kutatásaim eredményeit összegzi. Ez a dolgozat a visszutas logisztika problémáit az ellátási lánc menedzsmentjének szemszögéből vizsgálja. A visszutas logisztika csak egy vállalat szempontjából vizsgálja az újrafelhasználási folyamatokat. Az itt ismertetett modellben egy beszállító-termelő diadikus ellátási láncot tekintek, ahol a beszállító visszavásárolhatja a termelő által elhasznált és összegyűjtött termékeket, és azokat újramegmunlálással (újragyártással) használható állapotúvá alakítja. Az ilyen kapcsolatok vertikális integrációnak felelnek meg, amelyet a játékelmélet segítségével nagyon jól lehet elemezni. Az itt bemutatott kutatás kezdetei Dr. Gelei Andreával folytatott vizsgálatainkhoz kapcsolódik, amelyek az ellátási lánc koordinációja területén végeztünk. A probléma visszutas logisztikával történő kiterjesztésében nagy szerepet játszott az a Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) által nyújtott ösztöndíj 2010 őszén, amelynek keretében Prof. Dr. Knut Richterrel és munkatársaival folytattunk kutatásokat Frankfurt (Oder)-ban. Ennek a kapcsolatnak keretében egy sor további dolgozatot is sikerült publikálnunk, amelyeket a hely rövidsége miatt nem áll módomban ismertetni.

1. A visszutas logisztika: egy fogalmi keret

1.1. Bevezetés

Papírgyűjtés, üvegvisszaváltás, akkumulátorok és használt elemek leadása, az egykori MÉH-telepek tevékenysége: mind régről ismert fogalmak. A használt gépjárművek, az elektronikai és elektromos berendezések újrahasznosítása, újrafeldolgozása, a veszélyes hulladék kezelése pedig napjaink divatos témája. A felsorolt tevékenységek szerteágazó területet ölelnek fel, ezért kezelésük különböző menedzsmentkérdéseket vet fel. Az említett problémák megoldásának kezelésére összefoglaló elméleti hátteret nyújt a visszutas logisztika, mely a fejezet témája.

A gyakorlatban ez nyilván nem tekinthető újszerű jelenségnek, azonban a külföldi szakirodalom is csak a 1980-as évek elejétől foglalkozik a visszutas logisztika elméleti hátterével. A hazai szakirodalom forrásai pedig még ennél is szűkösebbek. Ezt támasztja alá, hogy jelenleg az angol elnevezés – reverse logistics - talán a legismertebb hazánkban, míg több magyar megfelelő is használatos, mint például a visszirányú, reverse (Mike (2002)), illetve inverz logisztika (Rixer (1995)), de ide sorolhatjuk a recycling logisztikát is (Cselényi et al. (1997)). Ez utóbbin belül többek között beszélhetünk hulladékkezelési és újrafeldolgozási logisztikáról. A visszutas logisztikában felmerülő készletezési problémák kezelésére adható megoldások közül néhány magyar nyelven is elérhető (Richter és Dobos (2003)), Dobos (2004)). Az elkövetkezendő években azonban a hazai szakirodalomban is remélhetőleg a visszutas logisztika elnevezés fog teret nyerni, hiszen ez nemcsak a fogyasztási és termelési folyamatból kivont használt termékek kezelését tartalmazza, hanem azoknak a fogyasztási és termelési folyamatba történő utólagos bevonására is alternatívát nyújt.

Célom, hogy a külföldi (elsősorban angolszász) szakirodalom feldolgozásával átfogó képet nyújtsak a kutatási irányról magyar nyelven, rendszerezve a gyakorlatban alkalmazott elméletet. A témával való foglalkozás létjogosultságát a szigorodó hazai és nemzetközi szabályozások támasztja alá.

A termék életciklusa során keletkező hulladék kezelésével kapcsolatban az Európai Unió és hazánk is számos új törvényt hozott a közelmúltban (az elhasználódott járművekről szóló 2000/53/EK irányelv, a hazai szabályrendszerben a hulladékgazdálkodásról szóló 2000. évi XLIII. törvény, Hulladékká vált gépjárművekről szóló előterjesztés KvVM/TJF/126/2/2004).

A törvényi szabályozás hátterében az Európai Unió azon követelményrendszere áll, mely nagy figyelmet szentel a környezettel kapcsolatos problémák mielőbbi megoldására. Ez alatt a kimerülő természeti erőforrásokat, a túlzott energia-felhasználást, a pazarló életmóddal járó mértéktelen hulladék keletkezését értjük.

Hazánkban a 2000-ben meghozott XLIII. törvény jelenti az alapot a hulladékgazdálkodással kapcsolatban jogi szabályozásra. . A törvény célja, hogy az állam védelmezze az emberi egészséget és a környezetet, az erőforrások pazarló felhasználását, valamint csökkentse a környezeti terhelést, és tegye mindezt a fenntartható fejlődés tükrében. A törvény hatálya általában a hulladékra és az azokkal kapcsolatos tevékenységekre terjed ki, de bizonyos területeken (állati hulladék, szennyvíz, ásványi nyersanyagok) csak annyiban, amennyiben jogszabály másként nem rendelkezik. Ugyanakkor nem terjed ki a törvény hatálya a levegőbe kibocsátott anyagokra, illetve a radioaktív hulladékra. Számos alapelvet említ a törvény, melyek elősegítik a sikeres megvalósítást: ilyenek például - a teljesség igénye nélkül - a megelőzés, a gyártói felelősség, a megosztott felelősség, a legjobb elérhető technika (BAT), a „szennyező fizet" elv, a regionalitás vagy a költséghatékonyság. Az előbb már felsorolt alapelvek tekintetében a törvény külön rendelkezik a gyártó, a forgalmazó, a fogyasztó, illetve a hulladék birtokosának kötelezettségeiről. A hulladékkezelés és -hasznosítás egyes lépéseit és fogalmi magyarázatát is ismerteti a törvény, ezek alapján meghatározza a hulladékgyűjtést, illetve begyűjtést, a hulladékszállítást, a hulladék be- és kivitelét, a hulladékhasznosítást és ártalmatlanítást. A törvényben külön fejezet taglalja a települési és a veszélyes anyagokkal kapcsolatos kötelezettségeket, majd ezt követően a hulladékgazdálkodás szervezését, ezen belül is az Országos Hulladékgazdálkodási Tervet. Rendkívül fontosnak tartom a a törvényben is hangsúlyozott társadalmi nyilvánosság és az adatközlési kötelezettség jelentőségének kiemelését.

A vállalati szféra számára a törvényi szabályozás betartása mellett fontos szempont lehet, hogy a visszutas logisztika alkalmazása hosszú távon való alkalmazása jelentős költségmegtakarítást eredményezhet. Ugyanakkor tény, hogy a jogszabályi kötelezettség önmagában az üzleti szféra számára nem feltétlenül jelent kényszerítő erőt, hiszen - megfelelő rövid távú gazdasági haszon hiányában - sok esetben inkább a könnyebben megfizethető bírságot választják.

Dolgozatomban először röviden a visszutas logisztika kialakulását ismertetem, majd az egyes szerzők fogalmi meghatározásainak fejlődését mutatom be az elmúlt évtizedek során. Ezt követően a tartalmi elemeket rendszerezem oly módon, hogy a „miért? – hogyan? – mit? –kik?" kérdésekre külön–külön keresem a megfelelő választ. Végül az utolsó fejezetben a visszutas logisztikában érintett és érdekelt szereplőket ismertetem, figyelembe véve a vállalatokat érintő fontosabb menedzsment kérdéseket.

1.2. A visszutas logisztika fogalmának kialakulásáról

Ahogyan a logisztika kialakulásának is megvoltak a gazdasági, történelmi okai – például háborúk -, úgy a visszutas logisztika fejlődését is racionális gazdasági érvek magyarázzák. Az 1980-as évek végére az Egyesült Államokban a kereskedők felismerték bizonyos termékek visszavételében rejlő lehetőségeket és azokat a piaci térnyerés eszközeként kezdték használni. A visszavétel kontrollálása azonban kicsúszott kezükből, mivel nem létezett egységes és komoly szabályozás arra vonatkozóan, hogy mit és milyen formában lehet visszaszállítani. Ez oda vezetett, hogy a fogyasztók bármikor és bármit visszavittek a kereskedőknek, s a visszavétel költsége végül olyan méreteket öltött, hogy mind a gyártók, mind a kereskedők kénytelenek voltak ráébredni: ez veszélyezteti jövedelmezőségüket és versenyképességüket. Felismerték, hogy egy jól kidolgozott, hatékony visszutas logisztikai program jövőbeli üzletpolitikájuknak fontos stratégiai részét képezheti.

A visszutas logisztika létjogosultságát tehát nem lehet megkérdőjelezni, alkalmazását azonban nehezíti, hogy szerzőnként más és más definícióval találkozhatunk, illetve ahány cég, annyiféle megoldás és alkalmazás létezik. A szerteágazó alkalmazhatóság miatt célszerű először meghatározni: mit is értünk visszutas logisztika alatt, illetve pontosan milyen területek tartoznak ennek keretébe.

1.2.1. Fogalmi elhatárolások

A visszutas logisztika első meghatározásai az 1980-as években keletkeztek. A téma újszerűsége érezteti hatását, hiszen viszonylag kevesen foglalkoztak az elméleti meghatározással, valamint a meglévő elméleti alapok is kiforratlanok. Az első elméleti munkák közül Lambert és Stock (1981) megközelítését lehet említeni: a szerzőpáros szerint a hagyományos ellátási lánccal ellentétes irányú folyamatról van szó, amit egy „rossz” irányú folyamatnak tekintenek, azaz mintha egyirányú utcában a forgalommal szemben haladnánk. Ez azt jelenti, hogy míg a hagyományos ellátási láncban az anyagáramlás kizárólag a beszállító-termelő-nagykereskedő-kiskereskedő-fogyasztó láncban zajlik, addig a visszutas logisztika a használt termékek visszafelé áramlását ragadja meg azzal a céllal, hogy azokat az ellátási lánc mentén a fogyasztótól a beszállítóig kövesse.

Lambert – Stock negatív hangvételű definíciója után Murphy – Poist (1989) más szempontból közelít. Szerintük a visszutas logisztika nem más, mint az ellátási láncban a javak fogyasztótól termelőig való áramlása. Ugyanezt a meghatározást adja Pohlen – Farris (1992), akik a marketing elvekből indulnak ki. A két szerzőpáros munkájának jelentőségét abban látom, hogy konkrétan megnevezik az ellátási láncban fontos szerepet betöltő végső felhasználót, és egyértelművé teszik a folyamat inverzitását. A definíciók hátránya, hogy nem térnek ki az egyes tevékenységekre, mely megnehezíti a visszutas logisztika fogalmi kereteinek pontos behatárolását.

Az 1990-es években szélesebb körű definíciót ad Stock (1992), melynek alapját a hulladékgazdálkodás adja. A logisztika azon szerepét hangsúlyozza, amely magában foglalja a recyclingot, a hulladék elhelyezést, a veszélyes anyagok helyettesítését és ártalmatlanítását, az erőforrás csökkentést, illetve az újrahasznosítást. Látható, hogy Stock korábbi munkájához képest ez pontosabb, mégis általános definíció, melyből hiányzik az egyes tevékenységek kapcsolata az ellátási lánccal, illetve a folyamat ellentétes irányú jellegének kiemelése.

Ez utóbbi megközelítéseket foglalja össze Kopicky et al. (1993). Meghatározásában kitér a korábban már említett tevékenységekre, ezek visszirányú mozgására az elosztási láncban - szemben a hagyományos logisztikai folyamatokkal. A Kopicky et al. által adott definíció újszerűsége az információáramlás fontos szerepének hangsúlyozásában rejlik, mely kétséget kizáróan a hatékony gyakorlati működést szolgáló összekötő elemet jelenti.

Carter és Ellram (1998) a visszutas logisztikára több meghatározást is összegyűjtött, ezek közül a legjelentősebbet idézem. Legátfogóbb meghatározásuk szerint „a visszutas logisztika olyan tevékenység, mellyel a vállalatok környezethatékonyabb politikát folytathatnak azáltal, hogy a szükséges anyagokat újrafelhasználják, újrafeldolgozzák, illetve csökkentik a szükséges anyag mennyiségét”, értve ezt akár a termelésben közvetlenül résztvevő személyek közötti viszonyra, akár a teljes ellátási, fogyasztási folyamatra. Carter és Ellram új szempontból közelít, hiszen kiindulási alapként a környezetvédelem szerepel. A környezettudatosság felvállalása a vállalati életben három motiváló tényezőre vezethető vissza: lehet a kormányzati vagy társadalmi nyomás hatása, illetve önkéntesen vállalt elkötelezettség. Ez a következő fejezetekben még részletesebben kifejtésre kerül.

A következő definíció jobb érthetősége kedvéért érdemes egymás mellett definiálni a logisztikát és annak visszutas megközelítését. A Council of Logistics Management (Stock (1998)) a következőképpen határozza meg a logisztikát: a logisztika az alapanyagok, a folyamatban lévő készletek, a késztermékek és a kapcsolódó információk áramlásának eredményes, költséghatékony tervezése, megvalósítása és ellenőrzése, a kiinduló ponttól a fogyasztásig, a fogyasztói igényeknek való megfelelés teljesítésével.

Ezzel szemben a visszutas logisztika Rogers és Tibben–Lembke (1999) megfogalmazása szerint: az alapanyagok, a folyamatban lévő készletek, a késztermékek és a kapcsolódó információk áramlásának eredményes, költséghatékony tervezése, megvalósítása és ellenőrzése a fogyasztástól a kiinduló pontig, érték visszaszerzése, illetve a hulladékról való gondoskodás érdekében.

A Reverse Logistics Executive Council (RLEC) következő megfogalmazása (Rogers és Tibben-Lembke (1999)) talán a legátfogóbb, ez összegzi az eddig elmondottakat. Eszerint az inverz logisztika nem más, mint a termékek mozgása tipikus végső felhasználási céljuktól kiindulva valamely más irányba, értékszerzés vagy hulladékgazdálkodás céljából. A visszutas tevékenységbe beletartozik a sérült termékek, a szezonális készletek, illetve a hulladékok visszavétele; a készletek megújítása illetve bővítése miatti visszáru kezelés; a csomagolóanyagok újrafeldolgozása, a konténerek újrahasznosítása; a termékek rendbetétele és felújítása; az elavult berendezések megfelelő elhelyezése és az eszközök felújítása.

Az utóbbiakkal megegyező definíciót ad 2004-ben (Dekker et al. (2004)) a European Working Group on Reverse Logistics (REVLOG), azzal az eltéréssel, hogy a visszagyűjtés kiindulásaként nem a fogyasztást nevezi meg, hanem az lehet a gyártás, az elosztás, illetve a felhasználás bármely pontja.

Az előbbiekben ismertettem a visszutas logisztika elméleti fejlődését az 1980-1990-es években melyből láthatóan a fogalmi meghatározás nagy változáson ment keresztül. Míg a legelső megközelítés csupán helytelen iránynak tekinti, addig az évek folyamán sorra jelentek meg az egyre kiforrottabb elméletek, melyek mind a marketing, mind a pénzügyi, környezetvédelmi szempontokat is magukban foglalják. Így azt mondhatjuk, hogy az 1990-es évek végére a visszutas logisztika definíciója teljessé vált. Ez a komplex meghatározás támasztja alá azt a törekvést, hogy hazánkban a számos elnevezés közül a visszutas logisztika elnevezés használata legyen domináló, hiszen ez a fogalom nem egy-egy szűkebben vett területre koncentrál, hanem az ellátási láncban megtalálható minden egyes tevékenységre.

1.3. A visszutas logisztikára ható tényezők: Miért ?– Hogyan? – Mit? – Kik?

A definíciók után rátérek a visszutas logisztika hátterében álló motiváló tényezők bemutatására. Az ezzel kapcsolatban felmerülő legfontosabb kérdések négy csoportba sorolhatók: miért, hogyan, mit és kik mozgatják a visszutas logisztika láncolatát. Erre a négy kérdésre a legátfogóbb választ de Brito és Dekker (2002) tanulmányában találjuk.

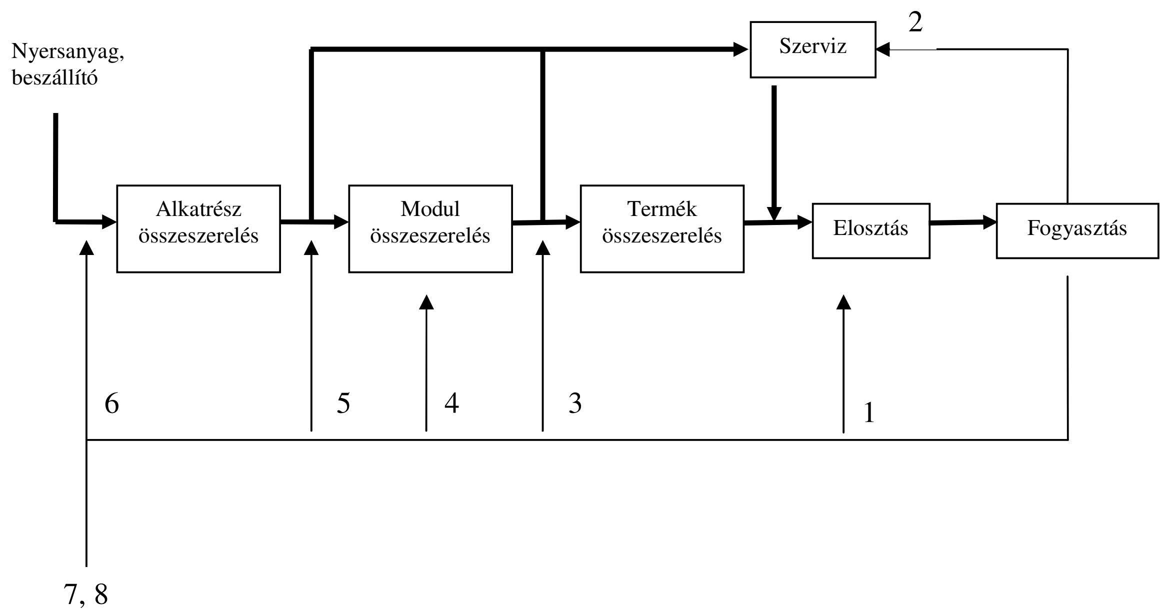
1.3.1. Miért?

A miért kérdéscsoporton belül két területet különböztethetünk meg:

- egyrészt fontos kérdést vet fel, hogy egyes szereplők *miért küldik vissza*, illetve
- mások *miért fogadják* el a használt termékeket?

Dolgozatom 1.2. fejezetében már említettem a visszutas logisztikát kiváltó okokat, azaz a gazdasági, törvényi és társadalmi tényezőket. Ezek azok, amelyek a „miért?" kérdés *„fogadó"* csoportjába tartoznak. A gazdasági előnyökön belül a de Brito–Dekker (2002) szerzőpáros megkülönbözteti a közvetlen és közvetett hasznokat. A *közvetlen előnyöknél* legfontosabb a profitnövelés lehetősége, amit a kisebb mértékű nyersanyag-felhasználás, a hulladék-elhelyezési költség csökkenése, illetve az újrafeldolgozás által nyerhető hozzáadott érték jelenti. A *közvetett előnyök* közé sorolható a zöld image kialakítása, amivel napjainkban egyre szélesebb rétegeket nyerhet meg egy vállalat. Tapasztalatok igazolják, hogy a környezettudatos vállalati működés hosszú távon is stabil fogyasztói kapcsolatokat eredményez. Ezek által versenyelőnyre tehet szert a vállalat, mely további profitszerzésre ad lehetőséget. Újabb érv a visszutas folyamatok gyakorlati alkalmazására a törvényi szabályozás szigorodása, mely nagymértékben a környezet védelmét szolgálja. A környezetvédelmi törvények megalkotásában az Egyesült Államok és az Európai Unió járnak az élen, s kötelezik a területükön működő vállalatokat a jogszabályi feltételek betartására. A harmadikként említett társadalmi tényező alatt - a környezettel összefüggésben – a vállalatok önkéntes felelősségvállalását értjük, ami a szervezeteken belül alakul ki, és onnan fejti ki hatását.

A „miért?" kérdés másik területét a *„küldők"* alkotják, azaz azok a szereplők, akik különböző okok miatt döntenek egy-egy termék visszaküldéséről. Ugyanúgy, ahogyan a „fogadóknál", itt is három csoportot találunk: gyártói, elosztói és fogyasztói visszaküldéseket.



Hulladékkezelés	Termék visszanyerés		Közvetlen újrafelhasználás
7: égetés 8: deponálás	5: felfalás 6: recycling	2: javítás 3: feljavítás 4: feldolgozás	1. közvetlen újrafelhasználás

1.1. ábra: Integrált ellátási lánc
Forrás: Thierry et. al. (1995)

A gyártási jellegű visszaküldések alatt a gyártás során fennmaradó nyersanyag-többletet, a minőség-ellenőrzéskor fennakadó hibás termékeket és a melléktermékeket értem.

Az elosztási visszaküldések csoportjába alapvetően az értékesítetlen, eladhatatlan termékek tartoznak: a készletfelesleg, hibás szállítások és termékek, romlott áru, illetve a csomagolási hulladék.

A fogyasztói visszaküldések közé tartozik egyrészt a garancia, a jótállás, illetve a szervízszolgáltatás, másrészt az elhasználódott (end-of-life), további használatra alkalmatlan, azaz a gazdasági és fizikai élettartam végén lévő termék. További elem az úgynevezett „end-of-use" termék, ami alatt olyan terméket értek, mely adott fogyasztónak a továbbiakban nem képvisel értéket, de más fogyasztó számára akár változatlan formában is tovább értékesíthető és hasznosítható. Az utóbbi két fogalom megkülönböztetése viszonylag nehéz feladat, ezért a könnyebb érthetőség érdekében célszerű példákkal alátámasztani a két meghatározást: előbbi csoportra példa a roncsautó, melynek általában csak részei hasznosíthatók újra, illetve dolgozhatók fel, utóbbira pedig az autóbérlés lehet példa, amikor a bérleti szerződés lejárta után majdnem változatlan állapotban kerül egy újabb fogyasztóhoz.

1.3.2. Hogyan?

A „miért?" kérdés tárgyalása után áttérek arra, hogy hogyan valósítható meg a visszutas logisztika. Ehhez Thierry et al. (1995) tanulmányát használtam fel. Ennek alapján a folyamat nyolc lépésből áll, ezek sorban a következők: közvetlen újrafelhasználás (direct reuse), javítás (repair), feljavítás (refurbishing), feldolgozás (remanufacturing), felfalás (cannibalization), recycling, égetés (incineration) és hulladék-elhelyezés (landfilling). Az 1.1. ábra ezen elemek egymáshoz való viszonyát mutatja be.

Közvetlen újrafelhasználás: a termék fizikai és minőségi tulajdonságai változatlanok maradnak.

Javítás: a terméken bizonyos átalakításokat végeznek, így a javítás után a terméket mint újszerűt adhatják el, vagy használhatják fel. A javítás történhet a fogyasztónál, vagy javítóközpontban. Átalakításon például alkatrészcserét lehet érteni, hiszen csak a sérült részt cserélik, vagy javítják, más eleme érintetlen marad.

Feljavítás: feljavításnál kevésbé szigorú minőség várható el a terméktől, hiszen a modulokra való szétszerelés során csupán a kritikus részeket vizsgálják, javítják, így annak élettartama növelhető.

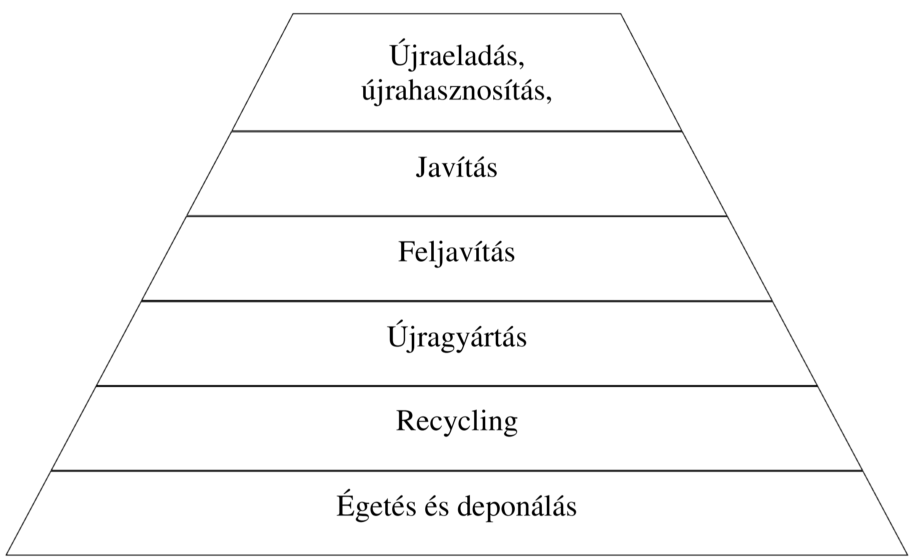
Feldolgozás: ennek során a megmunkált termékkel szemben támasztott minőségelvárás olyan, mint egy új terméktől. A feldolgozás annyival jelent többet a feljavításnál, hogy a feldolgozás általában munkaigényesebb, mivel nem csak modulokra, hanem részegységekre is bontják a terméket. Majd a vizsgálat során egyes elemeket újjal cserélnek ki, míg másokat csak javítanak.

Felfalás: szemben az előző fogalmakkal, ekkor a terméknek csak kis részét használják újra. A visszatérő terméket szigorú minőségvizsgálatnak vetik alá az újrabeépíthetőség szempontjából. A visszanyert elemeket ezután a javításnál, feljavításnál és a feldolgozásnál hasznosítják.

Recycling: a termék ebben az esetben elveszti eredeti funkcióját, szemben azzal, hogy az előzőekben megmarad. A cél a még felhasználható anyagok visszanyerése. Ha a visszanyert anyag megfelelő minőségű, akkor az eredeti rész gyártásához is felhasználható.

Égetés és hulladék-elhelyezés: a hulladékgazdálkodás témakörébe tartozó fogalmak. Mindkét esetben szigorú követelményeknek kell megfelelni. Az égetésből gazdasági haszon származhat, az ennek során visszanyerhető és visszaforgatható energiából.

Az előbb említett területeket a jobb érthetőség kedvéért, mintegy összefoglalásként, érdemes a piramis alakú 1.2. ábrában feltüntetni. Ehhez a már említett de Brito-Dekker tanulmányt (2002) használtam fel.



1.2. ábra: A visszutas logisztika területeinek hierarchikus kapcsolata

Forrás: de Brito – Dekker (2002)

A piramis jelentősége abban rejlik, hogy kapcsolatot teremt a visszutas logisztika egyes területei és a környezetvédelem aktuális szintje között, annak függvényében, hogy a különböző logisztikai tevékenységek milyen mértékben támogatják a környezet megóvását. Természetes, hogy bizonyos anyagok, hulladékok – a visszutas logisztika termékei - csak a piramis alján elhelyezkedő tevékenységekkel kezelhetőek, a cél mégis a piramis minél magasabb szintjének elérése. Felmerül a kérdés, hogy ha az elérendő cél az újrafelhasználás (forráscsökkentés), miért nem ez a legszélesebb sáv? Ez azzal magyarázható, hogy a kép a jelenlegi valós helyzetet mutatja, az ideálisnak tekinthető állapot fordított piramisban lenne ábrázolható.

1.3.3. Mit?

A következő kérdés a visszutas logisztikában azzal foglalkozik, hogy mi az, amit visszaküldenek, illetve ezek milyen tulajdonságokkal, jellemzőkkel rendelkeznek. Ebben a csoportban a termékösszetétellel kell foglalkozni: melyek azok a károsító tényezők, melyek rontják a feldolgozás lehetőségét, illetve a fogyasztók milyen módon használják a később újrafeldolgozásra kerülő termékeket.

A termékösszetétel során fontos kérdéseket vet fel, milyen anyagokból áll a termék (heterogén vagy homogén), illetve milyen méretekkel rendelkezik (szállítás, kezelés miatt). A termék élettartamát befolyásoló tényezők, mint például romlandóság, az egyes alkotóelemek eltérő vagy azonos kora és az értékcsökkenés, ami megnehezíti az újrahasznosítás lehetőségét. Tipikus példa a műszaki cikkek köre, ahol a kifogástalanul működő termékeket kiszorítják az újabb és újabb fejlesztések (beépített elévülés).

A termék felhasználási módja, mint a használat helye, intenzitása, időtartama és ennek következményeként kialakuló minőség jelentősen befolyásolják a későbbi feldolgozást. A visszagyűjtendő termékeket érdemes aszerint megkülönböztetni, hogy lakossági vagy ipari fogyasztásról van-e szó (szállítási, kezelési, mennyiségi okok miatt). Ide sorolhatók többek között a pótalkatrészek, a csomagolási eszközök, közjavak is.

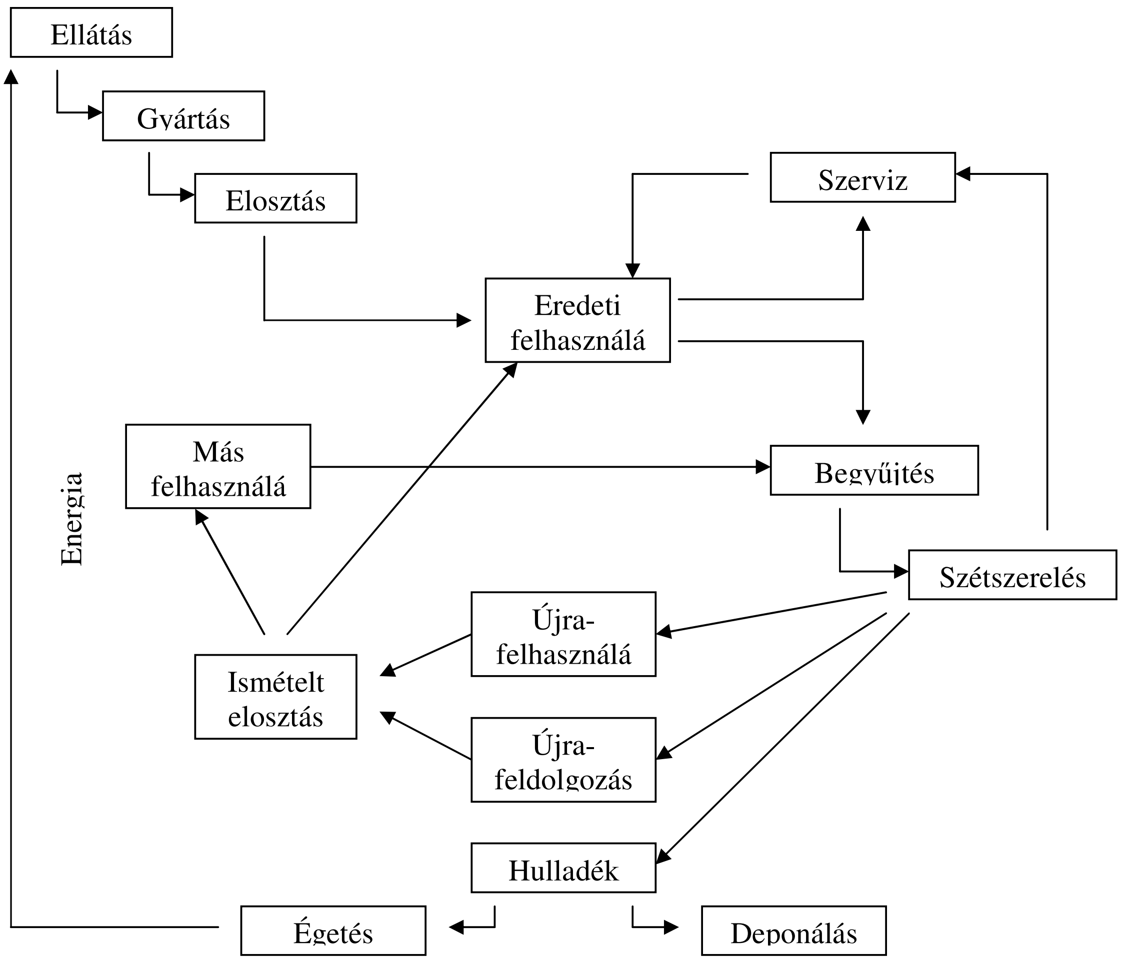
1.3.4. Kik?

A negyedik fontos terület a résztvevők azonosítása a visszutas logisztikában. Ezzel kapcsolatban a betöltött szerepük szerint megkülönböztetem a hagyományos értéklánc, illetve a visszutas folyamatok szereplőit, valamint más lehetséges résztvevőket (például ide tartoznak a karitatív szervezetek). Míg egyes érdekeltek a visszutas folyamat megszervezését végzik, mások annak gyakorlati megvalósításával foglalkoznak. A két ellátási lánc között nagyon fontos az összhang megléte, amihez elengedhetetlen a folyamatos és megbízható információáramlás. A sikeres működéshez szükséges információkat a már említett Thierry et al. (1995) cikk foglalja össze. Ennek alapján négy csoportot lehet megkülönböztetni:

- Információ a termékösszetételről, azaz az eltérő anyagokról, kombinálásukról, a minőségről, értékről, veszélyességről és a feldolgozhatósági lehetőségekről (elemzések);
- Információ a visszatérő folyamatok nagyságáról és bizonytalanságáról:
  - Garanciavállalás – a visszagyűjtésre kerülő termékek mennyisége és minősége bizonytalan, a javításhoz szükséges munkálatok is nehezen tervezhetőek.
  - Lejárt lízing- és bérleti szerződések – viszonylag jól becsülhető mind mennyiségben, mind időben, ugyanakkor a minőség nehezen határozható meg előre.
  - Önkéntes visszavásárlások – a gyártó anyagi és technikai lehetőségeitől függ , így ezzel viszonylag kevesen élnek. Ugyanakkor előnye, hogy olcsó forrást biztosít a javításokhoz, gyártáshoz; a fogyasztóknál jelentkező hulladékelhelyezési költség csökken; illetve lehetőséget nyújt a gyártóknak, hogy új terméket értékesítsenek.
- Információ az újrafeldolgozott termékek, alkatrészek, anyagok piacáról: nehéz piacot találni, döntő tényezőként az új és a használt termékek közötti minőségbeli és költségbeli különbségeket kell figyelembe venni. A feldolgozást végző szereplő lehet maga a gyártó vállalat, az ellátási láncon belüli és külső szereplő.
- Információ a termék visszagyűjtéséről és a hulladékkezelésről: számos területet kell megvizsgálni: a résztvevő szervezeteket, a felmerülő akadályokat, a környezeti hatásokat, a visszagyűjtésre kerülő mennyiséget, és szükséges a költség-haszon elemzéselvégzése is.

1.4. A visszutas logisztika érintettjei

A visszutas logisztika szereplői másfajta szempontból is megközelíthethetők, ehhez az alapot a Carter-Ellram (1998) cikk adja, mely szerint a visszutas logisztikára ható külső és belső tényezők különíthetők el.



1.3. ábra: A visszutas logisztikai folyamatok kapcsolódása

Forrás: Kohut – Nagy (2004)

Általában megkülönböztetik a szervezeten belüli és a szervezetek között ható, külső tényezőket. A belső tényezők közé sorolják magukat a vállalaton belül érdekelt személyeket, a környezet megóvásáért tett lépéseket, a sikeresen alkalmazott etikai sztenderdeket és főként azon egyéneket, akik felelősséget vállalnak a környezetbarát vállalati filozófia kiépítéséért. Szintén közvetlen hatást gyakorló külső tényezők a fogyasztók, a beszerzők, a versenytársak és a kormányzati erők. E négy elemre azonban még hatással van a makrokörnyezet is, a maga szociális, politikai, gazdasági trendjeivel, ezáltal közvetve érinti a visszutas logisztikát.

A felsorolt szektorok hatása eltérő, értelmezésük is többféle lehet. A külső tényezők közül, első megközelítés szerint a legmeghatározóbb a kormányzati szektor befolyása. Ez környezetvédelmi szempontból teljes mértékben elfogadható, figyelembe véve, hogy az Európai Unióban is az egyik legtöbb kérdést felvető téma a környezettel, környezetvédelemmel kapcsolatos. Itt érdemes ismét megjegyeznünk, hogy a törvény kényszerítő ereje hat a vállalkozásokra, míg a tényleges versenyképességhez ugyanilyen súllyal kell figyelembe venni a többi szereplőt is. Ebből kiindulva helyezhetünk nagyobb hangsúlyt a fogyasztói oldalra, hiszen a fogyasztói igényeknek való megfelelés nélkül, csupán a kormányzati előírások betartásával nem válhat versenyképessé egyetlen vállalat sem. A kétféle felfogás különböző vállalati magatartást tesz indokolttá.

A szállítói, input oldal fontosságára utal az a tény, hogy ha biztosított az újrafeldolgozásra kerülő anyagok állandóan jó minősége, akkor a beszerzők is készek annak minél nagyobb mennyiségű megvásárlására. A már használt termékek visszagyűjtése, szelektálása, szétválogatása általában a szállító kötelezettsége, a kívánt minőség biztosítása érdekében pedig szükség van a beszerző és a beszállító közti magas fokú együttműködésére, logisztikai tevékenységük összehangolására, a már említett kölcsönös információnyújtásra. Mivel a visszakerülő termékek minősége alapvetően magának a szállítónak is kockázati tényezőt jelent, így tovább kell erősíteni a beszerzők és beszállítók közti integrációt.

A belső tényezők közül elsőrendű szempont az érintett személyek szerepe. A cég működéséből profitálók (pl. részvényesek) hozzáállása hosszú távon befolyásolja a visszutas logisztika működőképességét. Ők ugyan nem közvetlenül határozzák meg ezen tevékenységeket, de hosszú távon lehetetlenné tehetik a cég működését. Egyértelmű támogatásuk feltételként szolgálhat a sikeres visszutas folyamatokhoz.

Hasonló a menedzsment megítélése is, hiszen a felső vezetés támogatása, jóváhagyása nélkül ki sem lehet alakítani a szükséges rendszert, a hatékony működtetés azonban már a középvezetők körébe sorolható. Esetükben nélkülözhetetlen a jó diplomáciai és kommunikációs készség, valamint az irányítási képesség. Az ő feladatuk minden érintett meggyőzése a hatékony visszutas folyamatok szükségességéről.

A harmadik csoportban mindenképpen figyelembe kell venni magukat az alkalmazottakat, akiknek a hozzáállása nagyban segítheti, de hátráltathatja is az eredményes végrehajtást. Az ösztönző, jutalmazó rendszerek kiépítése növeli a hatékonyságot. Az előbbiekben részletezett külső és belső tényezőknél fontos megérteni azok egymásra hatását, egyik a másik nélkül nem működhet. El kell fogadni mind a szabályokból eredő, mind a fogyasztói részről észlelt nyomást. Figyelembe kell venni a külső és belső érdekeket is, különben nem valósítható meg sikeres visszutas logisztika.

Az 1.3. ábra mintegy összefoglalása, megerősítése az előbbiekben leírtaknak, mely a visszutas logisztikai folyamatok összekapcsolódását ábrázolja, kihangsúlyozva a folyamat zártságát. Kohut és Nagy (2004) TDK-dolgozatukban ennek az ábrának segítségével igyekeztek felvázolni a papírgyártás folyamatát. Természetesen a papír tulajdonságai miatt egyes lépések kimaradnak, így például a szétszerelés, szervíz, újrafelhasználás. Ugyanakkor a teljes kép kialakítása érdekében egészítettük ki az előbb felsorolt tevékenységekkel.

1.5. Összefoglalás

Ebben a bevezetésben felvázolt különböző visszutas logisztikai tevékenységek együttesen természetesen egyetlen vállalatnál sem találhatóak meg. Ez számos okra vezethető vissza: a rendelkezésre álló technikai feltételek, a termékjellemzők sokszínűsége – összetétel, feldolgozhatóság, fellelhetőség, újraértékesíthetőség stb. -, a vállalatok eltérő gazdasági helyzete mind-mind befolyásolják a vállalati döntéseket az alkalmazott visszutas logisztikai terület tekintetében.

A dolgozat átfogó, elméleti jellege miatt nem tértem ki konkrétan arra, hogy az egyes termékeknél pontosan mit is jelenthet a visszutas logisztika, melyek azok a területek, ahol az gazdaságosan megvalósítható. A különböző termékek előállítási folyamatának sokszínűsége további külön-külön elemzéseket igényelne arra vonatkozóan, hogy milyen késztermékből mi készíthető ismét, annak konkrétan mely elemeit, alkatrészeit lehet hatékonyan visszaforgatni a termelésbe. Például egy autó esetében minden egyes alkatrészt, építőelemet végigkövetni a gyártótól a fogyasztóig, majd a használat után a roncsautó egyes elemeit a begyűjtő hálózaton keresztül az újrafeldolgozó üzemig nyomon kísérni nem egyszerű feladat, és jelenleg nincs is meg az ehhez szükséges, a terméket végigkísérő pontos információszolgáltatás. Bizonyos esetekben viszonylag könnyen végig lehet gondolni, mire is lehet felhasználni egy roncsautót, vagy egy csupán gazdaságilag leamortizált gépjárművet. Az üvegek, tükrök, gumikerekek újrafelhasználása akár az autóiparban, akár más ágazatban ma már egyre egyszerűbben megoldható. Ugyanakkor sok más alkatrészt nem egyszerű újra feldolgozni, illetve nehéz megtalálni azt az iparágat, ahol gazdaságosan visszaforgatható a termelésbe. Tipikus példa erre a számítógép, melyből viszonylag kevés alkatrész nyerhető vissza, és azt is csak koncentráltan, nagy mennyiségben érdemes feldolgozni. A nehézségek általában kiküszöbölhetőek, feltéve, hogy a különböző iparágak minél inkább összehangolják működésüket, és létrejön közöttük a megbízható információáramlás.

A fejezet kiinduló pontja a környezetvédelem volt, melynek két mozgatójaként a törvényi szabályozást, illetve a vállalati elkötelezettséget neveztem meg. Általános érvényű, hogy a vállalatok a jogi kényszernek igyekeznek minél inkább megfelelni, ugyanakkor a környezetvédelemmel kapcsolatban az önkéntes felelősségvállalást jelentősen befolyásolják a rendelkezésre álló pénzügyi források. Hosszú távon elsődleges szempont a költségek és az elérhető haszon egymáshoz való viszonya, optimalizálása is. A környezettudatosság önmagában nem feltétlenül jelent vonzerőt, elengedhetetlen az ebből származó egzakt gazdasági haszon kimutathatósága is.

Áttekintésem alapvető célja, hogy a visszutas logisztika területén bővítse a szűkös hazai szakirodalmat, valamint a fogalmi keretek tisztázásával, az egyes tevékenységek meghatározásával, a főbb menedzsment kérdések megválaszolásával hozzájáruljon a sikeres alkalmazáshoz. Tekintettel a téma jelenlegi és egyre fajsúlyosabb jelentőségére, ez a dolgozat kiindulópontként szolgálhat a visszutas logisztika további fejlesztéséhez, és nyilvánvalóan számtalan további problémát vet fel. Az itt felvázolt elméleti alapok hozzásegítenek a könnyebb megértéshez, a gyakorlati alkalmazás azonban további kutatásokat igényel. Az egyik oldalról fizikai megvalósíthatósági nehézségekkel kell szembenézniük a vállalatoknak, míg másik oldalról ugyanilyen súllyal jelentkeznek a költség-haszon szempontok. Nem szabad azonban szem elől téveszteni, hogy a sikeres visszutas logisztika a teljes ellátási lánc mentén hozzájárul a környezeti terhelés csökkentéséhez.

2. Tételnagyság modellek a visszutas logisztikában

Visszutas logisztikán tehát - amint azt a bevezetésben is vizsgáltam - a logisztika azon ágát értem, amely a termelési/fogyasztási folyamatból kivont, de újrahasználható anyagok kezelését és újrafeldolgozását öleli fel. Ilyen újrafelhasználás lehet pl. a recycling, vagy alkatrészek javítása. Az újrafelhasználással környezettudatos anyaggazdálkodás és/vagy logisztika érhető el. Nemzetgazdasági szempontból ez olyan előnyökkel jár, mint a környezeti terhelés csökkentése a termelési folyamatba történő visszavezetéssel, de ezzel az újrafelhasználással a természeti erőforrások kitermelése is csökkenthető, ami a következő nemzedékek rendelkezésére álló erőforrásokat kímélheti a túlzott fogyasztástól.

Ez a fejezet három, a visszutas logisztikához kapcsolódó optimális tételnagyság modellt mutat be. Ennek során nem az eredeti, publikált dolgozatokban bemutatott modelleket ismertetem, hanem általánosítom azokat, ezzel is megmutatva, hogy mindegyik modell matematikai struktúráját tekintve visszavezethető a meta-modellre (Dobos-Richter (2000)). (A meta-modell matematikai tulajdonságait az érdeklődő olvasó a függelékben találhatja meg).

Visszutas logisztikai (javítási/újrafeldolgozási/recycling) modellt gazdasági sorozatnagyság modell (EOQ) feltételek mellett először Schrady (1967) vizsgált. Cikkében az amerikai haditengerészet nagyértékű alkatrészeinek javítását és a javítással elérhető költségcsökkenést analizálta a beszerzéssel szemben. Kiindulópontja az volt, hogy csak egy beszerzési tétel van. Ebben az esetben az a kérdés, hogy hány darab beszerzési tétel legyen, és mekkora legyen az ezekhez tartozó javítási és beszerzési tételnagyság.

Nahmias és Rivera (1979) modellje 12 évvel követte Schrady modelljét. Ez a modell csak annyiban különbözik az előzőtől, hogy a kijavított alkatrészek folyamatosan áramlanak a beépíthető alkatrészek raktárába. Ebben az esetben expliciten figyelembe vesszük azt, hogy a javítási folyamat időben állandó rátával folyik. A probléma a javítási folyamat időigényének és kapacitásának számbavételén túl számol a felmerülő hulladékkezeléssel is. A javítási tételek száma egy, de több beszerzési tételt is megenged a modell. A probléma fontosságára az is felhívja a figyelmet, hogy ezt a kutatást az Egyesült Államok Légierő Vezérkari Főnöksége is támogatta.

A harmadik és utolsó bemutatandó modell a Koh, Hwang, Sohn és Ko (2002) szerzőnégyesé. A szerzők egy egyszerű modellt vizsgálnak, amely sok tekintetben hasonló a Schrady (1967) által vizsgálttal. Amíg az előző két modellben az új és javított termékek csak akkor érkezhetnek be a raktárba, amikor a készletállomány már nullává vált, addig ez a modell azt az esetet tekinti, amikor mindez a használt termékekre igaz. Ez a készletezési politika a Schrady (1967) által javasolt és modellezett, de folyóiratban nem publikált folyamatos pótlás készletezési politikát (continuous supplement) alkalmazza az előbbi két modell helyettesítési készletezési politikája (substitution) helyett. A szerzők nem fejezik ki expliciten a tételnagyságokat - amit a dolgozatban megteszek - hanem két, egymástól független esetet vizsgálnak: amikor a beszerzési tétel száma egy, és azt, amikor a javítási tétel száma egy. Egy új modellformát is bemutatok a folyamatos pótlás stratégiára, amiből a két eset következik. Azt az esetet is vizsgálja Koh et al. (2002), amikor az általuk újrafeldolgozási kapacitásnak nevezett termelési, újrafelhasználási ráta nem haladja meg a keresletet (a dolgozatban ettől az esettől eltekintek).

A három ismertetendő modellen kívül többtermékes általánosítás is létezik a szakirodalomban, a ezek vizsgálata azonban nem képezi a dolgozat célját. Mabini, Pintelon és Gelders (1998) szerzőhármastól származik az általánosítás, akik Schrady modelljét több termék esetére vizsgálták, tőkekorlát mellett. Ezen modellek a sorozatnagyságokra adtak zárt formulát, de a hulladékkezelést nem építették be a modellbe, és az egészértékűséget, valamint a visszaérkezési rátától való függést is negligálták.

A három modell áttekintés után röviden összefoglalom a modellek azonos feltételezéseit.

- A készletezési politikák a modellben ismertek. Ez azt jelenti, hogy a készletezési ciklusban a készletállományok nagysága időben ismert.
- A kereslet az új és javított termékek iránt időben állandó és ismert, vagyis a kereslet determinisztikus.
- A visszaérkezési hányad időben állandó és ismert. Ez a feltevés analóg az előzővel.

- A javítási és rendelési tétel fixköltsége ismert.
- Az újrafelhasználható és új termékek, valamint a javításra váró használt termékek készlettartási költségei ismertek.
- Az utánpótlási idő ismert, tehát a konkrét nagyságától eltekinthetünk.
- A készletezési ciklusban sem az új termékek, sem a visszaérkező termékek raktárában hiányt nem engedünk meg.

Az első feltételezéssel a készletezési politikát határoztuk meg, amelynek változóit akarjuk meghatározni. Ezek a változók mind a három modellre az új és javítandó termékek tételnagyságai, valamint az új és javítandó termékek tételszámai, vagyis arra ad választ, hogy egymás után hány tételben kell új termékeket beszerezni és javítani. A további négy feltételezés megfelel az optimális tételnagyság modelljének feltételezésével a keresletről és a költségparaméterekről. A hiányra tett feltételezés megszokott az optimális tételnagyság irodalmában, s nem okozhat különösebb matematikai problémát; a dolgozat célja azonban a visszutas logisztika alapmodelljeinek vizsgálata, így a hiány vizsgálatától eltekintek.

Ezek után bemutatom a modelleket.

2.1. Egy visszutas logisztikai készletmodell beszerzéssel és javítással

2.1.1. Bevezetés

A determinisztikus optimális tételnagyság modell javítható termékekkel történő kiterjesztését először Schrady végezte el 1967-ben (Schrady (1967)). Ezt a modellt nevezhetjük mai szóhasználattal a visszutas logisztika előfutárának. A vizsgált feladat gyökere gyakorlati indíttatású. Az Amerikai Egyesült Államok Tengerészete Ellátási Parancsnoksága készletezési problémáját elemezte a szerző. A tengerészetnél használt alkatrészek nagy értékűek voltak, de jó részük javítható. Mivel az alkatrészek újbóli beszerzése nagyon költséges volt, ezért költségmegtakarítást érhettek el a megjavítható alkatrészek összegyűjtésével. Ez azt jelenti, hogy a felhasználási helyen történt döntés arról, hogy mely alkatrészek javíthatóak. A összegyűjtött és javítható alkatrészeket ezután a karbantartási és javítási részleghez szállították vissza. A javítható alkatrészeket így a további feldolgozásig raktározták. Az összegyűjtött, de nem javítható alkatrészeket, mint hulladékot a felhasználás helyén kezelték. A kijavított alkatrészeket a felhasználható alkatrészek raktárában tárolták.

A feladat így készletgazdálkodási szempontból egy kétraktáras problémaként áll elő. A keresletet, ami az alkatrészek iránt nyilvánul meg, két forrásból lehet kielégíteni, amelyek teljesen alternatívaknak tekinthetőek: vagy beszerzésből elégítjük ki a keresletet, vagy a használt alkatrészek kijavításával. A használt, de kijavítható alkatrész fizikai tulajdonságát tekintve teljesen olyan minőségű, mint az újonnan beszerzett alkatrész. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a kijavított és beszerzett alkatrészek között semmilyen különbséget nem tudunk tenni, ha az a felhasználandó alkatrészek raktárába került.

Schrady a feladatot modellezve két készletezési politikát javasolt a releváns költségek, vagyis a rendelési és készlettartási költségek összegének minimalizálására. Az egyik stratégiát (politikát) a „folyamatos pótlás" (continuous supplement) stratégiájának, míg a másikat a „helyettesítés" (substitution) politikának nevezte el. Ez utóbbi politika esetén határozta meg a paraméterek ismeretében az optimális rendelési és javítási tételnagyságokat. A készletezési stratégiára feltételezte, hogy a beszerzendő alkatrészeket csak egyetlen rendelési tételből elégítik ki a rendelési-javítási ciklusban (ebben a szóhasználatban ciklus alatt rendelési és javítási tételek olyan egymásutániságát értjük, amelyek időben ismétlődnek).

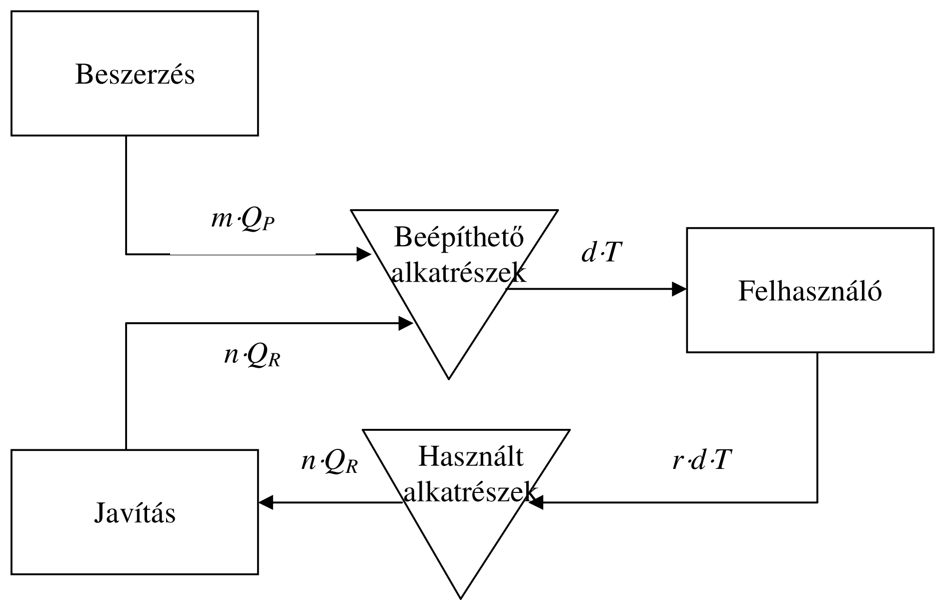
A célom az, hogy bemutassam az előbbiekben röviden vázolt helyettesítési politikát, valamint feloldjam a Schrady által tett azon feltételezést, hogy csak egyetlen rendelési tétel lehetséges. Az általános megoldás arra is rámutat, hogy a visszaérkezési ráta függvényében a bemutatott általánosított modell alacsonyabb költséget eredményez. Ezen kívül módszert mutatok arra, hogy hogyan lehet az egészértékű megoldásokat előállítani, a tételnagyságok számát tekintve. Schrady cikkében elsősorban a tételnagyságokat állította elő, és eltekintett attól, hogy hogyan érhető el a tételszámok egészértékűsége. Ez nem pusztán matematikai, hanem költséggazdálkodási szempontból is fontos lehet. Ehhez a függelékben bemutatott meta-modellt használom fel. A másik stratégiától itt eltekintek, de megjegyzem, hogy azt később más cikkekben felhasználták (Koh et al. (2002)).

A modellt a következő lépésekben ismertetem. A bevezetést követő fejezetben a modell paramétereit, valamint a készletezési politikát mutatom be. Itt jegyezem meg, hogy visszutas logisztikai modelleket csak két ábrával tudunk pontosan megadni. Az egyik ábra a készletállományokat mutatja az idő függvényében egy ciklus alatt, míg a másik az anyagáramlás összesített mennyiségét jelöli. A harmadik részben a készletezés költségfüggvényét állítom elő, majd a változókat szekvenciálisan kiküszöbölve a minimális költségek meghatározásához a függvényt a tételszámoktól teszem függővé. Ez a forma nem más, mint a bevezetőben említett meta-modell. Az ötödik fejezetben bemutatom, hogy hogyan lehet Schrady eredeti modelljét a javasolt modellből meghatározni. Erre a modellformára is meghatározom az egészértékű megoldást. Végül meghatározom a modell teljes megoldását.

2.1.2. Paraméterek és a modell működése

A készletezési rendszer két készletezési pontot tartalmaz. A felhasználó keresletét a beépíthető alkatrészek raktárából elégítik ki. A kereslet időben állandó a felhasználási ciklus alatt. A beépíthető alkatrészek raktárát beszerzésből és javításból töltik fel. Ebben a raktárban hiányt nem engedünk meg, tehát mindig van rendelkezésre álló, beszerelhető alkatrész. Azonos beszerzési és azonos javítási tételnagyságokkal végezzük a modellezést. Az alkatrész felhasználója időben állandó, konstans rátával juttatja vissza a használt, de felújítható alkatrészeket a használt alkatrészek raktárába, ahol azok a javításra várnak. Javítás után az alkatrészeket, mint újakat a beépíthető alkatrészek raktárába küldik. A modell anyagáramlását a 2.1.1. ábra mutatja. Definiáljuk most a modell változóit és paramétereit. Az alkalmazott döntési változók és paraméterek jelölése megegyezik a Schrady által használtakkal. Ez nagyban elősegíti az eredeti dolgozat, és az itt tárgyaltak összehasonlítását.

2.1.1. ábra. Anyagáramlás a modellben



A modell döntési változói:

- Q_P beszerzési tételnagyság, nemnegatív,
- m a beszerzési tételek száma, $m \geq 1$, egészértékű,
- Q_R javítási tételnagyság, nemnegatív,
- n a javítási tételek száma, $n \geq 1$, egészértékű,
- T a beszerzési-javítási ciklus hossza, nemnegatív.

A modell paraméterei:

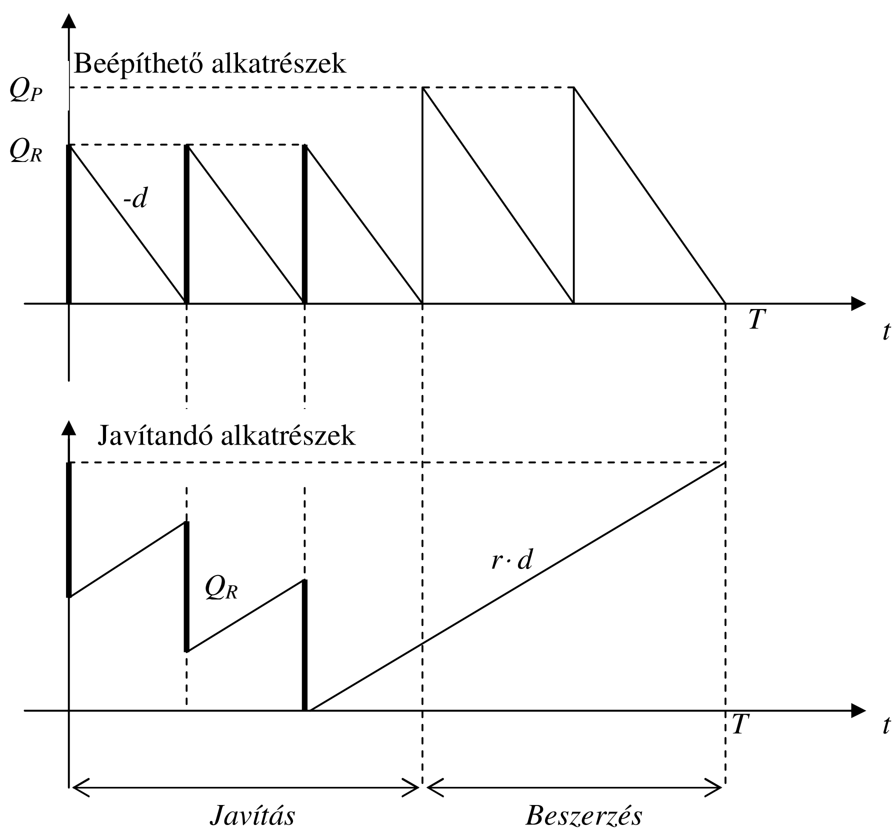
- d időegységre eső keresleti ráta,

- r újrafelhasználási ráta, a d keresleti ráta százalékában, a hulladékráta $1-r$,
- A_P egy rendelésre eső fix rendelési költség, PE/rendelés,
- A_R egy javítási tételre eső fix indítási költség, PE/tételindítás,
- h_1 a beépíthető alkatrészek készlettartási költsége, PE/darab/idő,
- h_2 a javítandó alkatrészek készlettartási költsége, PE/darab/idő.

Az alábbi egyenletek a készletezési pontokba történő ki- és beáramlást mutatják a beszerzési-javítási ciklus alatt. Ezekre az egyenletekre majd akkor lesz szükség, ha a modell változóinak számát akarjuk csökkenteni.

$$\begin{aligned} m \cdot Q_P + n \cdot Q_R &= d \cdot T \\ n \cdot Q_R &= r \cdot d \cdot T \end{aligned} \qquad (2.1.1)$$

2.1.2. ábra. A beépíthető és javítható alkatrészek készletszintjei (*n* = *3*, *m* = *2*)



A javasolt „helyettesítési” politikának a következő tulajdonságai vannak. A beszerzési és javítási tételek utánpótlási idejét figyelmen kívül hagyjuk, mert determinisztikus modellekben ennek a hatását egy időbeli eltolással kiküszöbölhetjük. Tételezzük fel, hogy a beszerzési-javítási ciklus egy javítási ciklussal kezdődik. Természetesen beszerzési ciklussal is kezdhetnénk, de az előbbi feltételezés megkönnyíti a készlettartás költségeinek meghatározását a területek kiszámításakor, ugyanis a maximális készletszinttől kezdődik a ciklus a javítandó alkatrészek esetén. A javítandó alkatrészek készletének szintje a ciklus megkezdődésekor azonnal egy javítási tételnagysággal csökken. Ez azért van, mert ezt a tételt azonnal javításba vonják be. A javítandó készletállomány mindaddig csökken az állandó javítási tételnagyságok javításba történő bevonásával, amíg a készletszint nullára nem apad. A készletszintek időbeli lefolyását a 2.1.2. ábra szemlélteti.

A következő részben megszerkesztjük a modell készlettartási és az áltagköltségek függvényeit.

2.1.3. A készletezés költségfüggvénye

A modell készlettartási költségeit a 2.1.2. ábra készletszintjeinek segítségével számítjuk ki. A meghatározást a 2.1.1. lemma foglalja össze.

2.1.1. Lemma.

Legyen a beépíthető termékek készlettartási költségfüggvénye H_{RFI} és a javítandó alkatrészek költségfüggvénye H_{NRFI}. Ekkor a két költségfüggvény a következő alakot ölti:

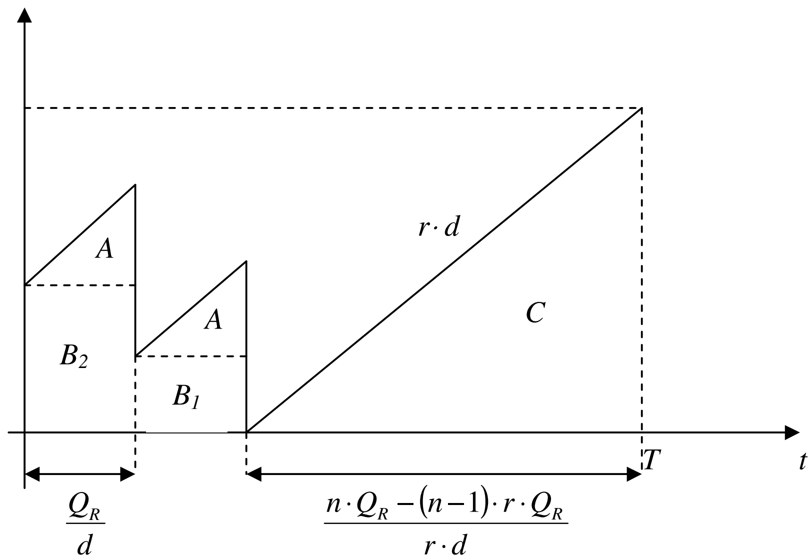
$$H_{RFI} = \frac{h_1}{2 \cdot d} \cdot m \cdot Q_P^2 + \frac{h_1}{2 \cdot d} \cdot n \cdot Q_R^2$$

$$H_{NRFI} = \frac{h_2}{2 \cdot d} \cdot \left(n^2 \cdot \frac{1-r}{r} + n \right) \cdot Q_R^2$$

Bizonyítás. Csak a második egyenlőséget bizonyítjuk a javítandó alkatrészekre, mert az elsőt hasonló módon végezhetjük el. Osszuk fel a 2.1.3. ábrán látható területet *n-1* darab *A* háromszögre, egy *C* háromszögre és *n-1* darab B_1, B_2, ..., B_{n-1} négyszögre. Ezt azért tesszük, mert a készlettartási költséget úgy értelmezzük, mint a görbe alatti terület nagyságát. A javítási ciklus hossza $\frac{Q_R}{d}$. Az *A* háromszögek területe így $\frac{1}{2} \cdot r \cdot Q_R \cdot \frac{Q_R}{d}$. A

B_i négyszögek területe egyenlő $i \cdot (1-r) \cdot Q_R \cdot \frac{Q_R}{d}$-vel. A javítandó alkatrészek maximális készletállománya $n \cdot Q_R - (n-1) \cdot r \cdot Q_R$. A C háromszög területe $\frac{1}{2} \cdot [n \cdot Q_R - (n-1) \cdot r \cdot Q_R] \cdot \frac{n \cdot Q_R - (n-1) \cdot r \cdot Q_R}{r \cdot d}$.

2.1.3. ábra. A javítandó alkatrészek készletezési költségeinek kiszámítása (*m = 3*)



Összegezzük most a meghatározott területeket:

$$H_{NFI} = (n-1) \cdot \frac{h_2}{2 \cdot d} \cdot r \cdot Q_R^2 + \frac{h_2}{d} \cdot (1-r) \cdot Q_R^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i + \frac{h_2}{2 \cdot r \cdot d} \cdot Q_R^2 \cdot [n - (n-1) \cdot r]^2 .$$

Elemi matematikai átalakítások után nyerjük a második, bizonyítani kívánt egyenlőséget.

2.1.1. példa. Legyen $d = 1.000$, $r = 0,9$, $h_1 = 750$ \$, $h_2 = 100$ \$. Ekkor ezekre az adatokra a készlettartási költség függvénye:

$$H_{RFI} + H_{NRFI} = \frac{1}{10} \cdot m \cdot Q_P^2 + \frac{11}{100} \cdot n \cdot Q_R^2 + \frac{1}{900} \cdot n^2 \cdot Q_R^2 .$$

A modell fix rendelési és javításindítási költségeinek összege legyen

$$F = m \cdot A_P + n \cdot A_R.$$

A fix és készlettartási költségek ismeretében meghatározható egy beszerzési-javítási ciklus átlagköltsége:

$$C(T, Q_P, Q_R, n, m) = \frac{F + H_{RFI} + H_{NFRI}}{T} =$$

$$= \frac{m \cdot A_P + n \cdot A_R + \frac{h_1}{2 \cdot d} \cdot m \cdot Q_P^2 + \frac{h_1}{2 \cdot d} \cdot n \cdot Q_R^2 + \frac{h_2}{2 \cdot d} \cdot \left(n^2 \cdot \frac{1-r}{r} + n \right) \cdot Q_R^2}{T}.$$

A modellt ezek alapján a következő nemlineáris optimalizálási feladatra vezettük vissza:

$$\left.\begin{array}{l} C(T, Q_P, Q_R, n, m) \to \min \\ \\ m \cdot Q_P + n \cdot Q_R = d \cdot T, \\ n \cdot Q_R = r \cdot d \cdot T, \\ T > 0,\ Q_P > 0,\ Q_R > 0,\ n, m \text{ pozitív egészértékű.} \end{array}\right\}$$

(P1)

Használjuk most a probléma leegyszerűsítéséhez a (2.1.1) egyenlőségeket**,** ahonnan két folytonos változót kifejezve, azt a célfüggvénybe helyettesíthetjük. Az egyszerűség kedvéért a két tételnagyság mellett dönthetünk. Természetesen kifejezhetnénk a tételszámokat is, de akkor az egészértékűség vizsgálata lenne nehezebb.

$$Q_P = \frac{(1-r) \cdot d \cdot T}{m}$$

$$Q_R = \frac{r \cdot d \cdot T}{n}$$

A tételnagyságok behelyettesítése után az alábbi egyszerűbb költségfüggvényt kapjuk, amit $C_1(.)$-gyel jelölünk:

$$C_1(T, n, m) = \frac{m \cdot A_P + n \cdot A_R}{T} + T \cdot \frac{d}{2} \cdot \left[h_1 \cdot (1-r)^2 \cdot \frac{1}{m} + (h_1 + h_2) \cdot r^2 \cdot \frac{1}{n} + h_2 \cdot r \cdot (1-r) \right], \quad (2.1.2)$$

ahol $T > 0$, m, n pozitív egészértékűek.

2.1.4. A modell változóinak meghatározása

A (2.1.2) modell változóinak meghatározását szekvenciálisan végezzük el. Először a ciklusidőt határozzuk meg, majd a függelékben szereplő meta-modell segítségével az optimális tételszámokat számítjuk ki. A tételszámok meghatározását két fázisra bontjuk. Az első fázisban a folytonos tételszámokat számítjuk ki, majd a következő fázisban a folytonos megoldás alapján a diszkrét értékeket.

2.1.4.1. Az optimális beszerzési-javítási ciklus idejének hossza

A (2.1.2) függvény konvex a T ciklusidőben, ezért az optimalitás szükséges feltétele egyben elégséges is. Tehát az optimális beszerzési-javítási ciklusidő:

$$T^o = \sqrt{\frac{2}{d}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot A_P + n \cdot A_R}{h_1 \cdot (1-r)^2 \cdot \frac{1}{m} + (h_1 + h_2) \cdot r^2 \cdot \frac{1}{n} + h_2 \cdot r \cdot (1-r)}}\,.$$

Ezt a kifejezést visszahelyettesítve a $C_1(.)$ költségfüggvénybe az alábbi $C_2(.)$ költségfüggvényt kapjuk:

$$C_2(n,m) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{(m \cdot A_P + n \cdot A_R) \cdot \left[h_1 \cdot (1-r)^2 \cdot \frac{1}{m} + (h_1 + h_2) \cdot r^2 \cdot \frac{1}{n} + h_2 \cdot r \cdot (1-r) \right]}$$

vagy

$$C_2(n,m) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{A \cdot \frac{m}{n} + B \cdot \frac{n}{m} + C \cdot m + D \cdot n + E}\,, \qquad (2.1.3)$$

ahol

$$A = A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2, \quad B = A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2, \quad C = A_P \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r),$$
$$D = A_R \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r), \quad E = A_P \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_R \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2.$$

A (P1) problémát így sikerült egy pozitív egészértékű $C_2(n,m)$ függvény minimalizálására visszavezetni. A (2.1.3) modell egyben nem más, mint a függelékben szereplő meta-modell, tehát ezt a modellt annak segítségével lehet elemezni.

2.1.2. példa. Legyen most $d = 1.000$, $r = 0{,}9$, $h_1 = 200$ *\$*, $h_2 = 20$ *\$*, $A_P = 750$ *\$*, $A_R = 100$ *\$*. Ekkor $A = 133.650$, $B = 200$, $C = 1350$, $D = 180$, $E = 19.320$.

2.1.4.2. A folytonos tételszámok meghatározása

Ezek után folytassuk a (2.1.3) modell további vizsgálatát. A minimális költségek meghatározásához a modell relaxált változatát tekintjük az alábbi formában:

$$C_2(m,n) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{A \cdot \frac{m}{n} + B \cdot \frac{n}{m} + C \cdot m + D \cdot n + E} \rightarrow \min$$

$$m \geq 1, \quad n \geq 1.$$

Ezt a folytonos modellt mára eléggé kiterjedten vizsgálta az irodalom (Dobos-Richter (2000), Richter (1996a), Richter (1996b), Richter (1997), Richter-Dobos (1999)). A relaxáció abban áll, hogy a folytonos megoldás környezetében vizsgálható az egészértékű megoldás. A következő tétel e relaxált modell folytonos megoldását adja az r újrafelhasználási ráta függvényében.

2.1.1. Tétel.

Az $(n(r), m(r))$ optimális folytonos tételszámokra és a $C_3(r)$ költségfüggvényre az alábbi három intervallum áll elő az r újrafelhasználási ráta függvényében

(i) $A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r) < 0$,

$$\left(n(r), m(r)\right) = \left(1, \sqrt{\frac{A_R}{A_P} \cdot \frac{1-r}{r} \cdot \sqrt{\frac{h_1}{h_1 + \frac{h_2}{r}}}}\right),$$

$$C_3(r) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left\{(1-r) \cdot \sqrt{A_P \cdot h_1} + \sqrt{A_R \cdot r \cdot [h_1 \cdot r + h_2]}\right\},$$

(ii) $0 \leq A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r) \leq (A_R + A_P) \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r)$,

$$\left(n(r), m(r)\right) = (1, 1),$$

$$C_3(r) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{(A_P + A_R) \cdot \left[(h_1 + h_2) \cdot r^2 + h_1 \cdot (1-r)^2 + h_2 \cdot r \cdot (1-r)\right]},$$

(iii) $A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r) > (A_R + A_P) \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r)$,

$$\left(n(r), m(r)\right) = \left(\sqrt{\frac{A_P}{A_R} \cdot \frac{r}{1-r} \cdot \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{h_1 + h_2 \cdot \frac{r}{1-r}}}}, 1\right),$$

$$C_3(r) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left\{r \cdot \sqrt{A_R \cdot (h_1 + h_2)} + \sqrt{A_P \cdot (1-r) \cdot [h_1 \cdot (1-r) + h_2 \cdot r]}\right\}.$$

A tétel bizonyításával e dolgozat keretein belül nem foglalkozom, az a felsorolt irodalmakban megtalálható. Ezt a folytonos megoldást a Karush-Kuhn-Tucker-féle tétellel is meghatározhatjuk, jóllehet a célfüggvényben szereplő meta-modell csak kvázi-konvex függvény, amint azt a függelékben is beláttam. A függelékben szereplő eljárást inkább geometriai megoldásnak nevezhetjük. Az újrafelhasználási ráta három intervallumának végpontjai meghatározhatóak. Így az r_1 és r_2 értékek ($r_1 < r_2$), amelyekre vagy a beszerzési, vagy a javítási tételszám egyenlő eggyel, de a másik szigorúan nagyobb, mint egy. A két érték között a tételszámok azonosak eggyel, ezért ezen az intervallumon a megoldás egészértékű.

2.1.3. példa. Alkalmazzuk a 2. példa paramétereit: $d = 1{,}000$, $r = 0{,}9$, $h_1 = 200$ \$, $h_2 = 20$ \$, $A_P = 750$ \$, $A_R = 100$ \$. Ezen adatokra $r_1 = 0{,}2341$ és $r_2 = 0{,}2616$, és az optimális döntési változók $n^o = 18{,}754$, $m^o = 1$, $T^o = 0{,}628$ év, $Q_P^o = 62{,}828$, $Q_R^o = 30{,}151$, $C_2(1, 18{,}754) = 8.357{,}4$ \$. Ezzel meghatároztuk a modell optimális folytonos megoldását.

2.1.4.3. Az egészértékű optimális beszerzési és javítási tételszámok meghatározása

A (2.1.3) modell egészértékű megoldását 2.1.2. tételben meghatározott folytonos megoldástól történő eltérésként értelmezzük, feltételezve, hogy az optimális egészértékű megoldás a folytonos megoldás közelében van. Használjuk most a függelékben szereplő állítást az egészértékű megoldás előállítására.

2.1.2. Tétel.
Az optimális ciklusidő és az optimális beszerzési és javítási tételnagyságok az újrafelhasználási ráta függvényében a következők:

(i) $A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r) < 0$,

$$(n(r), m(r)) = \left(1, \left\lfloor \sqrt{\frac{A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2}{A_P \cdot (h_1 \cdot r^2 + h_2 \cdot r)} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right),$$

(ii) $0 \le A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r) \le (A_R + A_P) \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r)$,

$$(n(r), m(r)) = (1, 1),$$

(iii) $A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r) > (A_R + A_P) \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r)$,

$$(n(r), m(r)) = \left(\left\lfloor \sqrt{\frac{A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2}{A_R \cdot (h_1 \cdot (1-r)^2 + h_2 \cdot r \cdot (1-r))} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, 1 \right).$$

Itt a $\lfloor \cdot \rfloor$ függvény az argumentumhoz legközelebb eső egészszámot jelöli. A bizonyítás egyszerű behelyettesítéssel meghatározható. Ezzel a modell vizsgálatát befejeztük.

2.1.5. Schrady alapmodellje

Schrady csak azt az esetet vizsgálta, amikor csak egy beszerzési tétel van egy beszerzési-javítási ciklusban, vagyis *m* = *1*. Az alábbiakban bevezetésre kerülő $C^S(n)$ költségfüggvény legyen ekkor

$$C^S(n) = C_2(1,n) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{A \cdot \frac{1}{n} + (B+D) \cdot n + (C+E)}.$$

Az optimális folytonos megoldás így a következő.

2.1.2. Lemma.

Schrady modelljének optimális megoldása

a) ha $A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2 - A_R \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r) - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 > 0$,

akkor $n^o = \frac{r}{1-r} \cdot \sqrt{\frac{A_P}{A_R}} \cdot \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{h_1 + h_2 \cdot \frac{r}{1-r}}}$ és

$$C^S(n^o) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left[(1-r) \cdot \sqrt{A_P \cdot \left(h_1 + h_2 \cdot \frac{r}{1-r} \right)} + r \cdot \sqrt{A_R \cdot (h_1 + h_2)} \right],$$

b) ha $A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2 - A_R \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r) - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 \le 0$,

akkor $n^o = 1$ és

$$C^S(n^o) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{(A_P + A_R) \cdot \left[(h_1 + h_2) \cdot r^2 + h_1 \cdot (1-r)^2 + h_2 \cdot r \cdot (1-r) \right]}.$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk a $C^S(n)$ költségfüggvényt. Ez a függvény konvex n-ben. A tételszám optimuma így

$$n^o = \sqrt{\frac{A}{B+D}} = \frac{r}{1-r} \cdot \sqrt{\frac{A_P}{A_R}} \cdot \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{h_1 + h_2 \cdot \frac{r}{1-r}}}.$$

Ezt az optimumot a célfüggvénybe helyettesítve kapjuk a lemma a) állítását. Ha az n^o kisebb, mint egy, akkor a költségfüggvény monoton növekvő minden $n \ge 1$ esetén. Ez a tény pedig alátámasztja a b) feltételt.

1. megjegyzés. Az $F(r) = A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2 - A_R \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r) - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2$ négyzetes kifejezés r-ben monoton növekvő nulla és egy között. Az $F(0) = -A_R \cdot h_1$ érték negatív, míg az $F(1)=A_P\cdot(h_1+h_2)$ kifejezés pozitív, ezért létezik olyan r_2 újrafelhasználási ráta, amelyre $F(r_2)=0$. Így az optimális tételszám eggyel egyenlő, ha $r\in[0,r_2]$, és határozottan nagyobb, mint egy, ha $r\in(r_2,1]$.

2. megjegyzés. A megoldás nem feltétlenül egészértékű az $r\in(r_2,1]$ intervallumon. Ha n^o egész érték, akkor a feladatot megoldottuk. Ha az n^o érték nem lenne egész, akkor az optimális n^i egész megoldást az alábbi kifejezésből olvashatjuk ki:

$$n^i=\arg\min\{C^S(\lfloor n\rfloor),C^S(\lfloor n\rfloor+1)\}.$$

Ez azt jelenti, hogy az optimális egészértékű tételszám a folytonos megoldáshoz legközelebb eső két egész szám közül az lesz, amelyik a kisebb célfüggvény értéket adja.

A következő tételben összefoglaljuk az alapmodell teljes folytonos megoldását, eltekintve az egészértékűségtől.

2.1.3. Tétel.
Schrady alapmodelljében az optimális beszerzési-javítási ciklusidő és tételnagyságok az r újrafelhasználási ráta függvényében

$$T^o(r)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{d}}\cdot\sqrt{\dfrac{A_P+A_R}{h_1\cdot(1-r)^2+(h_1+h_2)\cdot r^2+h_2\cdot r\cdot(1-r)}} & r\in[0,r_2]\\ \sqrt{\dfrac{2}{d}}\cdot\sqrt{\dfrac{A_P}{h_1\cdot(1-r)^2+h_2\cdot r\cdot(1-r)}} & r\in(r_2,1]\end{cases},$$

$$Q_P^o(r)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\cdot d\cdot(A_P+A_R)\cdot(1-r)^2}{h_1\cdot(1-r)^2+(h_1+h_2)\cdot r^2+h_2\cdot r\cdot(1-r)}} & r\in[0,r_2]\\ \sqrt{\dfrac{2\cdot d\cdot A_P\cdot(1-r)}{h_1\cdot(1-r)+h_2\cdot r}} & r\in(r_2,1]\end{cases},$$

és

$$Q_R^o(r)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\cdot d\cdot\left(A_P+A_R\right)\cdot r^2}{h_1\cdot(1-r)^2+\left(h_1+h_2\right)\cdot r^2+h_2\cdot r\cdot(1-r)}} & r\in\left[0,r_2\right]\\ \sqrt{\dfrac{2\cdot d\cdot A_R}{h_1+h_2}} & r\in\left(r_2,1\right]\end{cases}.$$

Bizonyítás. Ha $r\in\left[0,r_2\right]$, azaz az optimális javítási tételszám nagyobb, mint egy, akkor a behelyettesítés után kiszámítható az optimális ciklusidő és a tételnagyságok. A másik eset kiszámításához használjuk a következő összefüggést

$$T^o(n^o)=\sqrt{\frac{2}{d}}\cdot\frac{n^o}{r}\cdot\sqrt{\frac{A_R}{h_1+h_2}}.$$

Behelyettesítve ezt a kifejezést az optimális tételszámok és ciklusidő egyenleteibe, megkapjuk a tételben állított, bizonyítani kívánt kifejezést.

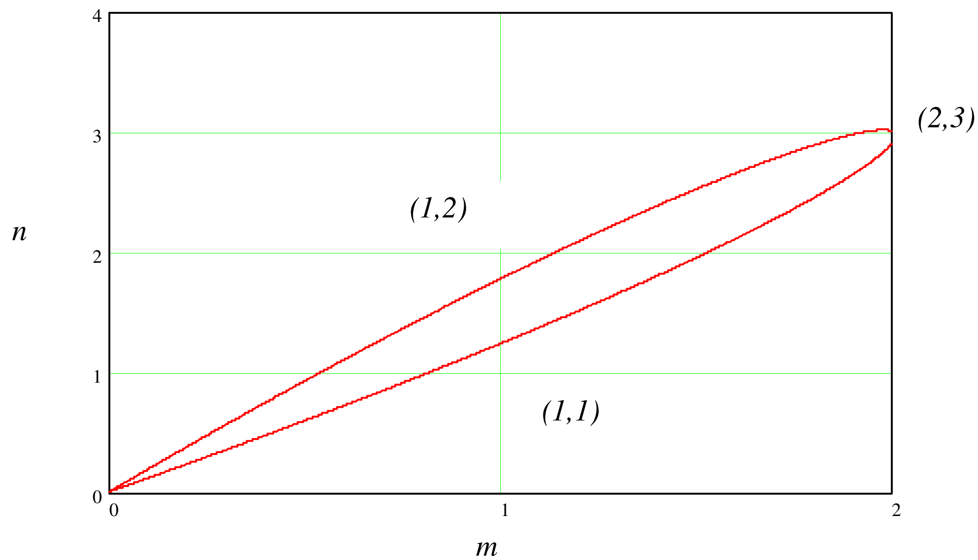
Schrady dolgozatában nem vizsgálta azokat az eseteket, amikor mind a javítási, mind a beszerzési tételszámok éppen megegyeznek eggyel, vagyis a feladat megoldása egészértékű. A tárgyalt összefüggésekkel megmutatható, hogy a Schrady által javasolt megoldás csak olyan újrafelhasználási rátákra teljesül, melyekre $r\in\left(r_2,1\right]$. Az ebben a dolgozatban javasolt módszer ugyanazon folytonos tételnagyságokat szolgáltatja, mint amit Schrady kapott. Az optimális ciklusidő és javítási és beszerzési tételnagyságok egyszerű helyettesítéssel és elemi számításokkal határozhatók meg.

2.1.3. példa. Alkalmazzuk a 2.1.2. példa paramétereit: d = *1.000*, r = *0,9*, h_1 = *200 \$*, h_2 = *20 \$*, A_P = *750 \$*, A_R = *100 \$*. Ezekre az adatokra az optimális átváltási pont r_2 = *0,2316*, és az optimális döntési változók n^o = 18,754, m^o = 1, T^o = 0,628 év, $Q_P^o=62{,}828$, $Q_R^o=30{,}151$, C^S =8.357,4 \$.

2.1.6. Numerikus példák

Ebben a fejezetben néhány példát mutatunk be. Először az egészértékű megoldást mutatjuk be. Legyen most d = *1.000*, r = *0,35*, h_1 = *200 \$*, h_2 = *20 \$*, A_P = *750 \$*, A_R = *100 \$*. Ekkor a szintvonalakat a 2.1.4. ábra szemlélteti.

2.1.4. ábra. Példa olyan esetre, amikor az optimális megoldás a halmaz belsejében van



Ekkor az optimális megoldást az (m^o,n^o) = *(2,3)* adja. A két vonalon lévő megoldás, vagyis az *(m,n)* = *(1,1)* és *(m,n)* = *(2,1)* kisebb célfüggvényértéket ad, ami $C_2(3,2)$ = 13.543,7, valamint $C_2(1,2)$ = 13.598,6 < $C_2(1,1)$ = 13.656,1 *$*. A példán látható, hogy ebben az esetben a beszerzési tételek száma nagyobb, mint egy, vagyis alacsonyabb visszatérési rátánál kötséghatékonyabb többször beszerezni. A többi döntési változót visszahelyettesítéssel meghatározhatjuk.

2.1.7. Összefoglalás

Ebben a részben a Schrady-féle javítási modell általánosítását adtam meg. Ez a modell tekinthető a visszutas logisztikai készletmodellek kiindulópontjának. Megadtam az általánosított modell egészértékű megoldásait, és példát mutattam olyan esetre, amikor az egészértékű megoldás beszerzési és javítási tételszámai egynél nagyobbak. Amint a függelékben is bemutattam, a tételszámok halmazának belsejébe eső megoldások csak maximum 2 százalékkal térnek el a határmegoldásoktól.

Az alapmodell kiterjesztése arra is rávilágít, hogy alacsony visszatérési rátájú termékek esetén érdemes több beszerzési tételt indítani, és csak egyetlen javítási tételt.

2.2. Modell beszerzéssel és véges javítási hányaddal: helyettesítés stratégia

2.2.1. Bevezetés

Nahmias és Rivera (1979) modellje egy természetes általánosítása Schrady (1967) modelljének. Ez a modell figyelembe veszi azt, hogy a javítási folyamat időben lefolyó tevékenység, amely a rendelkezésre álló kapacitástól függ.

A modellt és megoldását a következő lépésekben ismeretetjük. Először a javítási-beszerzési rendszer működését mutatjuk be. Ezek után a probléma költségfüggvényét szerkesztjük meg, majd a modell változóit szekvenciálisan kizárva meghatározzuk az optimális megoldást nyújtó döntési változókat.

Az általam bemutatott modell a Nahmias és Rivera alkotta modell egyfajta általánosítása. Az 1979-ben publikált modellben a szerzők csak egyetlen beszerzési tétellel számoltak. A most tárgyalandó modell megengedi azt a lehetőséget is, hogy több ilyen tételnagyság követhesse egymást. Amint látni fogjuk, ez attól függ, hogy mekkora a visszaáramlási hányad.

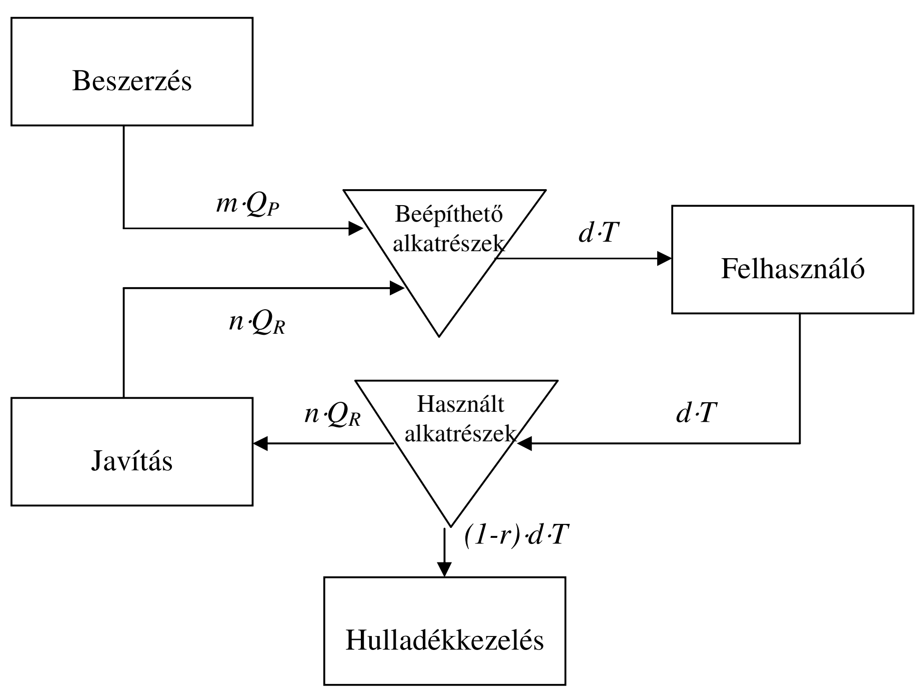
2.2.2. Paraméterek és a modell működése

Ez a készletezési rendszer is két készletezési pontot tartalmaz. A keresletet a késztermékek raktárából elégítik ki. A kereslet időben állandó a ciklus alatt. Az alkatrészek raktárát beszerzésből és javításból töltik fel. A visszatérési ráta konstans. A javító-karbantartó egység kapacitása - ellentétben Schrady modelljével - nem végtelen, hanem korlátos. Feltételezzük, hogy a javítási ráta nagyobb, mint a keresleti ráta. Javítás után az alkatrészeket, mint újakat a beépíthető alkatrészek raktárába küldik. A modellben eltekintünk az utánpótlási időktől mind a beszerzés, mind a javítás esetén, ugyanis azok hossza a döntési változókat nem befolyásolja. A modell anyagáramlását a 2.2.1. ábra mutatja. Definiáljuk most a modell változóit és paramétereit. Az alkalmazott döntési változók és paraméterek jelölése megegyezik a Schrady által használtakkal. Ez nagyban elősegíti az eredeti dolgozat és az itt tárgyaltak összehasonlítását.

A modell döntési változói:

- Q_P beszerzési tételnagyság, nemnegatív,
- m a beszerzési tételek száma, $m \geq 1$, egészértékű,
- Q_R javítási tételnagyság, nemnegatív,
- n a javítási tételek száma, $n \geq 1$, egészértékű,
- T a beszerzési-javítási ciklus hossza, nemnegatív.

2.2.1. ábra. Anyagáramlás a modellben



A modell paraméterei:

- d időegységre eső keresleti ráta,
- r újrafelhasználási ráta, a d keresleti ráta százalékában, a hulladékráta $1-r$,
- λ időegységre eső javítási ráta, $\lambda > d$,
- A_P egy rendelésre eső fix rendelési költség, PE/rendelés,

- A_R egy javítási tételre eső fix indítási költség, PE/tételindítás,
- h_1 a beépíthető alkatrészek készlettartási költsége, PE/darab/idő,
- h_2 a beépíthető alkatrészek készlettartási költsége, PE/darab/idő.

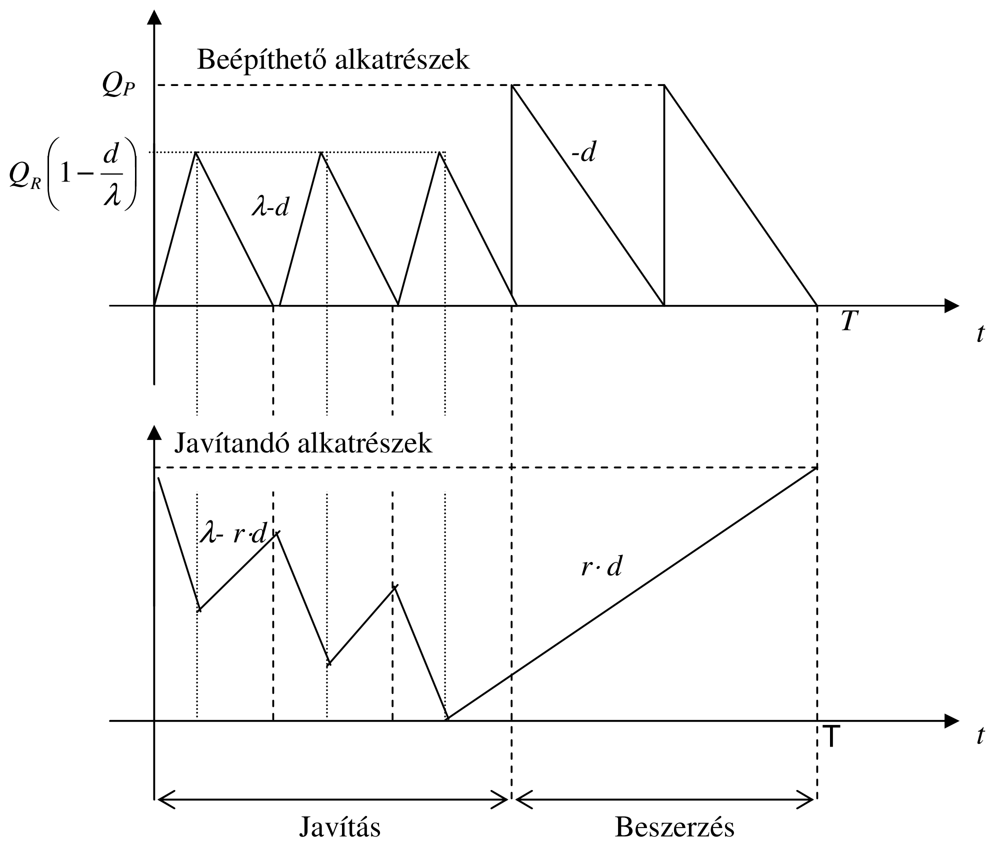
Az alábbi egyenletek a készletezési pontokba történő ki- és beáramlást mutatják a beszerzési-javítási ciklus alatt. Ezekre az egyenletekre majd akkor lesz szükségünk, ha a modell változóinak számát akarjuk csökkenteni.

$$\begin{aligned} m \cdot Q_P + n \cdot Q_R &= d \cdot T \\ n \cdot Q_R &= r \cdot d \cdot T \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Ez a feladat már tartalmazza a hulladékkezelést, de az itt nem döntési változó. Az anyagáramlási folyamatot és a készletállomány időbeli lefutását a 2.2.1. és 2.2.2. ábra szemlélteti.

A készletszinteknél meg kell jegyeznünk, hogy az itt bemutatott készletezési stratégia nem más, mint a Schrady által bemutatott helyettesítési stratégia. Amint a 2.2.2. ábrán is láthatjuk, a beszerzési-javítási ciklust a javítással kezdjük, majd a javítási tételnagyságok végrehajtása után következnek a beszerzési tételnagyságok. A javítások során elért maximális készletszintet, vagyis $Q_R\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)$-t könnyen meghatározhatjuk, de a matematikai készletgazdálkodásból jól ismert monográfiákból is hasonló eredményeket kaphatunk. A javítandó alkatrészek készletszintjénél a kivétel esetén időegységenként λ egységet használunk fel, de $r{\cdot}d$ egységnyi javítandó termék kerül a raktárba, így alakulnak ki a készletszintek.

2.2.2. ábra. Készletszintek Nahmias és Rivera modelljében (*n = 3*, *m = 2*)



2.2.3. A készletezés költségfüggvénye

A modell készlettartási költségeit a 2.2.2. ábra készletszintjeinek segítségével számítjuk ki. A meghatározást a 2.2.1. lemma foglalja össze.

2.2.1. Lemma.

Legyen a beépíthető termékek készlettartási költségfüggvénye A_1 és a javítandó alkatrészek költségfüggvénye A_2. Ekkor a két költségfüggvény a következő alakot ölti:

$$A_1 = \frac{h_1}{2 \cdot d} \cdot m \cdot Q_P^2 + \frac{h_1}{2 \cdot d} \cdot n \cdot Q_R^2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)$$

$$A_2 = \frac{h_2}{2 \cdot d} \cdot Q_R^2 \cdot \left\{ n^2 \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) + n \right\}$$

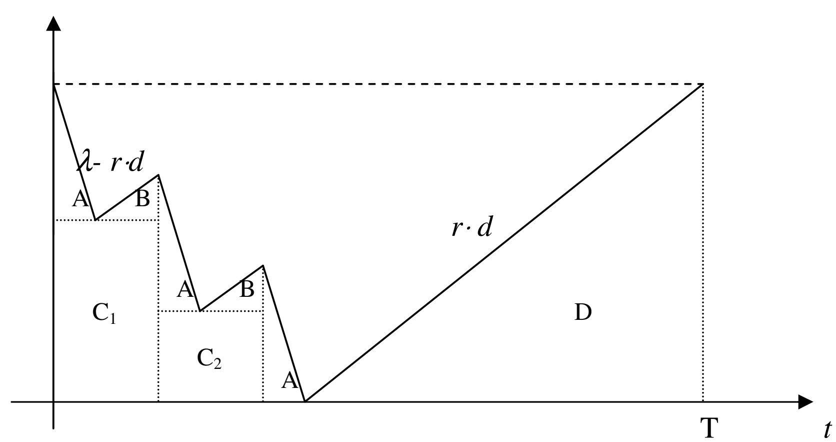
Bizonyítás. Csak a második egyenlőséget bizonyítjuk a javítandó alkatrészekre, mert az elsőt hasonló módon végezhetjük el. Osszuk fel a 2.2.3. ábrán látható területet *n* darab *A* háromszögre, *n-1* darab *B* háromszögre, egy *D* háromszögre és *n-1* darab C_1, C_2, ..., C_{n-1} négyszögre. Ezt azért tesszük, mert a készlettartási költséget úgy értelmezzük, mint a görbe alatti terület nagyságát. A javítási ciklusban a javítás időtartama $\frac{Q_R}{\lambda}$. Az *A* háromszögek magassága $Q_R \cdot \left(1 - \frac{r \cdot d}{\lambda}\right)$, így a területe $\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_R^2}{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{r \cdot d}{\lambda}\right)$. A *B* háromszögek alapja $\frac{Q_R}{d} \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)$, míg magassága $r \cdot Q_R \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)$, így területe egyenlő $\frac{Q_R^2}{2 \cdot d} \cdot r \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)^2$-vel. A *D* háromszög területe $\frac{r}{2 \cdot d} \cdot (Q_R + m \cdot Q_P)^2$. A C_i négyszögek területe egyenlő $i \cdot (1 - r) \cdot \frac{Q_R^2}{d}$-vel.

Összegezzük most a meghatározott területeket:

$$A_2 = n \cdot \frac{h_2}{2} \cdot \frac{Q_R^2}{\lambda} \cdot \left(1 - \frac{r \cdot d}{\lambda}\right) + (n-1) \cdot \frac{h_2}{2} \cdot \frac{Q_R^2}{d} \cdot r \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)^2 + \frac{h_2}{2} \cdot \frac{r}{d} \cdot (Q_R + m \cdot Q_P)^2 + \\ + h_2 \cdot (1 - r) \cdot \frac{Q_R^2}{d} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i .$$

Elemi matematikai átalakítások után nyerjük a második, bizonyítani egyenlőséget.

2.2.3. ábra. A javítandó alkatrészek készletezési költségeinek kiszámítása (*m = 3*)



2.2.4. Az optimális beszerzési-javítási ciklus idejének hossza

A modell fix rendelési és javításindítási költségeinek összege legyen

$$F = m \cdot A_P + n \cdot A_R .$$

A fix és készlettartási költségek ismeretében meghatározható egy beszerzési-javítási ciklus átlagköltsége:

$$C(T, Q_P, Q_R, n, m) = \frac{F + A_1 + A_2}{T} =$$

$$= \frac{m \cdot A_P + n \cdot A_R + \frac{h_1}{2 \cdot d} \cdot m \cdot Q_P^2 + \frac{h_1}{2 \cdot d} \cdot n \cdot Q_R^2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) + \frac{h_2}{2 \cdot d} \cdot Q_R^2 \cdot \left\{ n^2 \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) + n \right\}}{T} .$$

A modellt ezek alapján újra a következő nemlineáris optimalizálási feladatra vezethetjük vissza:

$$\left.\begin{array}{l} C(T, Q_P, Q_R, n, m) \to \min \\ \\ m \cdot Q_P + n \cdot Q_R = d \cdot T, \\ n \cdot Q_R = r \cdot d \cdot T, \\ T > 0,\ Q_P > 0,\ Q_R > 0,\ n, m \text{ pozitív egészértékű.} \end{array}\right\} \qquad \text{(P2)}$$

Használjuk most a probléma leegyszerűsítéséhez az (2.2.1) egyenlőségeket, ahonnan két folytonos változót kifejezve, azt a célfüggvénybe helyettesíthetjük. Az egyszerűség kedvéért a két tételnagyság mellett dönthetünk.

$$Q_P = \frac{(1 - r) \cdot d \cdot T}{m}$$

$$Q_R = \frac{r \cdot d \cdot T}{n}$$

A tételnagyságok behelyettesítése után az alábbi egyszerűbb költségfüggvényt kapjuk, amit $C_1(.)$-gyel jelölünk:

$$C_1(T,n,m)=\frac{m\cdot A_P+n\cdot A_R}{T}+\frac{d}{2}\cdot T\cdot\left[h_1\cdot\frac{(1-r)^2}{m}+(h_1+h_2)\cdot\frac{r^2}{n}\cdot\left(1-\frac{d}{\lambda}\right)+h_2\cdot r\cdot(1-r)\right]$$

Most szekvenciálisan kiküszöböljük a ciklusidőt. Ez a függvény konvex a ciklusidőben, ezért az optimalitás szükséges feltétele egyben elégséges is. Tehát az optimális beszerzési-javítási ciklusidő:

$$T^o=\sqrt{\frac{2}{d}}\cdot\sqrt{\frac{m\cdot A_P+n\cdot A_R}{h_1\cdot(1-r)^2\cdot\frac{1}{m}+(h_1+h_2)\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{d}{\lambda}\right)\cdot\frac{1}{n}+h_2\cdot r\cdot(1-r)}}\ .$$

Ezt a kifejezést visszahelyettesítve a $C_1(.)$ költségfüggvénybe az alábbi $C_2(.)$ költségfüggvényt kapjuk:

$$C_2(n,m)=\sqrt{2\cdot d}\cdot\sqrt{(m\cdot A_P+n\cdot A_R)\cdot\left[h_1\cdot\frac{(1-r)^2}{m}+(h_1+h_2)\cdot\frac{r^2}{n}\cdot\left(1-\frac{d}{\lambda}\right)+h_2\cdot r\cdot(1-r)\right]}$$

vagy

$$C_2(n,m)=\sqrt{2\cdot d}\cdot\sqrt{A(r)\cdot\frac{m}{n}+B(r)\cdot\frac{n}{m}+C(r)\cdot m+D(r)\cdot n+E(r)},\qquad (2.2.2)$$

ahol

$$A(r)=A_P\cdot(h_1+h_2)\cdot\left(1-\frac{d}{\lambda}\right)\cdot r^2,\quad B(r)=A_R\cdot h_1\cdot(1-r)^2,\quad C(r)=A_P\cdot h_2\cdot(1-r)\cdot r,$$
$$D(r)=A_R\cdot h_2\cdot(1-r)\cdot r\quad E(r)=A_P\cdot h_1\cdot(1-r)^2+A_R\cdot(h_1+h_2)\cdot\left(1-\frac{d}{\lambda}\right)\cdot r^2\ .$$

A (P2) problémát így sikerült egy pozitív egészeken értelmezett $C_2(n,m)$ függvény minimalizálására visszavezetni. A (2.2.2) modell egyben nem más, mint a függelékben szereplő meta-modell, tehát ezt a modellt annak segítségével lehet elemezni.

2.2.5. Nahmias és Rivera alapmodellje

A szerzők csak azt az esetet vizsgálták, amikor csak egy beszerzési tétel van egy beszerzési-javítási ciklusban, vagyis $m = 1$. Az alábbiakban bevezetésre kerülő $C^{NR}(n)$ költségfüggvény legyen ekkor

$$C^{NR}(n) = C_2(1,n) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{A(r) \cdot \frac{1}{n} + (B(r) + D(r)) \cdot n + (C(r) + E(r))}\,.$$

Az optimális folytonos megoldás így a következő.

2.2.2. Lemma.

Nahmias és Rivera modelljének optimális folytonos megoldása

a) ha $A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 - A_R \cdot h_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot (1-r) \cdot r > 0$,

akkor $n^o = \frac{r}{1-r} \cdot \sqrt{\frac{A_P}{A_R}} \cdot \sqrt{\frac{(h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)}{h_1 + h_2 \cdot \frac{r}{1-r} \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)}}$ és

$$C^{NR}(n^o) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left[(1-r) \cdot \sqrt{A_P \cdot \left(h_1 + h_2 \cdot \frac{r}{1-r} \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)\right)} + r \cdot \sqrt{A_R \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)}\right],$$

b) ha $A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 - A_R \cdot h_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot (1-r) \cdot r \le 0$,

akkor $n^o = 1$ és

$$C^{NR}(n^o) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{(A_P + A_R) \cdot \left[(h_1 + h_2) \cdot r^2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) + h_1 \cdot (1-r)^2 + h_2 \cdot r \cdot (1-r) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right)\right]}$$

.

Bizonyítás. Vizsgáljuk a $C^S(n)$ költségfüggvényt. Ez a függvény konvex n-ben. A tételszám optimuma így

$$n^o = \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)+D(r)}} = \frac{r}{1-r} \cdot \sqrt{\frac{A_P}{A_R}} \cdot \sqrt{\frac{(h_1+h_2)\cdot\left(1-\frac{d}{\lambda}\right)}{h_1 + h_2 \cdot \frac{r}{1-r} \cdot \left(1-\frac{d}{\lambda}\right)}}\,.$$

Ezt az optimumot a célfüggvénybe helyettesítve kapjuk a lemma a) állítását. Ha az n^o kisebb, mint egy, akkor a költségfüggvény monoton növekvő minden $n \geq 1$ esetén. Ez a tény pedig alátámasztja a b) feltételt.

1. megjegyzés.

Az $$F(r) = A_P \cdot (h_1 + h_2)\cdot\left(1-\frac{d}{\lambda}\right)\cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 - A_R \cdot h_2 \cdot \left(1-\frac{d}{\lambda}\right)\cdot(1-r)\cdot r$$

négyzetes kifejezés r-ben monoton növekvő nulla és egy között. Az $F(0) = -A_R \cdot h_1$ érték negatív, míg az $F(1) = A_P \cdot (h_1 + h_2)\cdot\left(1-\frac{d}{\lambda}\right)$ kifejezés pozitív, ezért létezik olyan r_2 újrafelhasználási ráta, amelyre $F(r_2) = 0$. Így az optimális tételszám eggyel egyenlő, ha $r \in [0, r_2]$, és határozottan nagyobb, mint egy, ha $r \in (r_2, 1]$.

2. megjegyzés. A megoldás nem feltétlenül egész az $r \in (r_2, 1]$ intervallumon. Ha n^o egész érték, akkor a feladatot megoldottuk. Tegyük fel, hogy n^o nem egész, és jelölje $\underline{n} = \lfloor n^o \rfloor$ azt a maximális egészet, amely nem nagyobb, mint n^o, és $\overline{n} = \lfloor n^o \rfloor + 1$ azt a minimális egészet, amely nem kisebb, mint n^o. Ekkor az optimális egész megoldást az alábbi kifejezésből olvashatjuk ki:

$$n^i = \arg\min\left\{C^{NR}(\underline{n}),\, C^{NR}(\overline{n})\right\}.$$

A következő tételben összefoglaljuk az alapmodell teljes folytonos megoldását, eltekintve az egészértékűségtől.

2.2.1. Tétel.

Nahmias és Rivera alapmodelljében az optimális beszerzési-javítási ciklusidő és tételnagyságok az r újrafelhasználási ráta függvényében

$$T^o(r)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{d}}\cdot\sqrt{\dfrac{A_P+A_R}{h_1\cdot(1-r)^2+(h_1+h_2)\cdot r^2\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)+h_2\cdot r\cdot(1-r)\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)}} & r\in[0,r_2]\\ \sqrt{\dfrac{2}{d}}\cdot\sqrt{\dfrac{A_P}{h_1\cdot(1-r)^2+h_2\cdot r\cdot(1-r)\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)}} & r\in(r_2,1]\end{cases},$$

$$Q_P^o(r)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\cdot d\cdot(A_P+A_R)\cdot(1-r)^2}{h_1\cdot(1-r)^2+(h_1+h_2)\cdot r^2\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)+h_2\cdot r\cdot(1-r)\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)}} & r\in[0,r_2]\\ \sqrt{\dfrac{2\cdot d\cdot A_P\cdot(1-r)}{h_1\cdot(1-r)+h_2\cdot r\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)}} & r\in(r_2,1]\end{cases},$$

és

$$Q_R^o(r)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\cdot d\cdot(A_P+A_R)\cdot r^2}{h_1\cdot(1-r)^2+(h_1+h_2)\cdot r^2\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)+h_2\cdot r\cdot(1-r)\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)}} & r\in[0,r_2]\\ \sqrt{\dfrac{2\cdot d\cdot A_R}{h_1+h_2\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)}} & r\in(r_2,1]\end{cases}.$$

Bizonyítás. Ha $r\in[0,r_2]$ esetén az optimális javítási tételszám éppen egy, akkor a behelyettesítés után kiszámítható az optimális ciklusidő és a tételnagyságok. A másik eset kiszámításához használjuk a következő összefüggést

$$T^o(n^o)=\sqrt{\frac{2}{d}}\cdot\frac{n^o}{r}\cdot\sqrt{\frac{A_R}{h_1+h_2\cdot\left(1-\dfrac{d}{\lambda}\right)}}.$$

Behelyettesítve ezt a kifejezést az optimális tételszámok és ciklusidő egyenleteibe, megkapjuk a tételben állított, bizonyítani kívánt kifejezést.

Nahmias és Rivera dolgozatában nem vizsgálta azokat az eseteket, amikor mind a javítási, mind a beszerzési tételszámok éppen megegyeznek eggyel, vagyis a feladat megoldása egészértékű. A tárgyalt összefüggésekkel megmutatható, hogy a Nahmias és Rivera által javasolt megoldás csak olyan újrafelhasználási rátákra teljesül, melyekre $r \in (r_2, 1]$. Az ebben a dolgozatban javasolt módszer ugyanazon folytonos tételnagyságokat szolgáltatja, mint amit Nahmias és Rivera kapott. Az optimális ciklusidő és javítási és beszerzési tételnagyságok egyszerű helyettesítéssel és elemi számításokkal határozhatók meg.

2.2.6. A folytonos optimális beszerzési és javítási tételszámok meghatározása

Nahmias és Rivera modelljének vizsgálata után térjünk vissza a (2.2.2) modell további vizsgálatához. A minimális költségek meghatározásához a modell relaxált változatát tekintjük az alábbi formában:

$$C_2(m,n) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{A \cdot \frac{m}{n} + B \cdot \frac{n}{m} + C \cdot m + D \cdot n + E} \to \min$$

$$m \geq 1, \quad n \geq 1.$$

A fenti modell – amint a Schrady-modell esetén is – megegyezik a meta-modellel.

2.2.2. Tétel.

Az $(n(r), m(r))$ optimális folytonos tételszámokra és a $C_3(r)$ költségfüggvényre az alábbi három intervallum áll elő az *r* újrafelhasználási ráta függvényében

(i) $\quad A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r \cdot (1-r) < 0,$

$$\left(n(r), m(r)\right) = \left(1, \sqrt{\frac{A_R}{A_P\left(1-\frac{d}{\lambda}\right)}} \cdot \frac{1-r}{r} \cdot \sqrt{\frac{h_1}{h_1 + \frac{h_2}{r}}}\right),$$

$$C_3(r) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left\{(1-r) \cdot \sqrt{A_P \cdot h_1} + \sqrt{A_R \cdot r \cdot [h_1 \cdot r + h_2]}\right\},$$

(ii)

$$0 \le A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r \cdot (1-r) \le (A_R + A_P) \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r)$$

,

$$\left(n(r), m(r)\right) = (1, 1),$$

$$C_3(r) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \sqrt{(A_P + A_R) \cdot \left[(h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r^2 + h_1 \cdot (1-r)^2 + h_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r \cdot (1-r)\right]},$$

(iii)

$$A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r \cdot (1-r) > (A_R + A_P) \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r)$$

$$\left(n(r), m(r)\right) = \left(\sqrt{\frac{A_P}{A_R}} \cdot \frac{r}{1-r} \cdot \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{h_1 + h_2 \cdot \frac{r}{1-r}}}, 1\right),$$

$$C_3(r) = \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left\{r \cdot \sqrt{A_R \cdot (h_1 + h_2)} + \sqrt{A_P \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot (1-r) \cdot [h_1 \cdot (1-r) + h_2 \cdot r]}\right\}.$$

A tétel bizonyításával nem foglalkozunk, az a felsorolt irodalmakban megtalálható. Az újrafelhasználási ráta három intervallumának végpontjai meghatározhatóak. Így az r_1 és r_2 értékek ($r_1 < r_2$), amelyekre vagy a beszerzési, vagy a javítási tételszám egyenlő eggyel, de a másik szigorúan nagyobb, mint egy. A két érték között a tételszámok azonosak eggyel, ezért ezen az intervallumon a megoldás egészértékű.

A modell fennmaradó döntési változóira az optimális megoldást a következő tétel foglalja össze.

2.2.3. Tétel.

Az optimális ciklusidő és az optimális beszerzési és javítási tételnagyságok az újrafelhasználási ráta függvényében a következők:

(i) $r \in [0, r_1)$

$$T(r) = \sqrt{\frac{2}{d}} \cdot \sqrt{\frac{A_R}{r \cdot (h_1 \cdot r + h_2)}} \,,$$

$$Q_P(r) = \sqrt{2 \cdot d} \sqrt{\frac{A_P}{h_1}} \,,$$

$$Q_P(r) = \sqrt{2 \cdot d} \sqrt{\frac{A_R \cdot r}{h_1 \cdot r + h_2}} \,.$$

(ii) $r \in [r_1, r_2]$

$$T(r) = \sqrt{\frac{2}{d}} \cdot \sqrt{\frac{A_P + A_R}{h_1 \cdot \left[(1-r)^2 + r^2\right] + h_2 \cdot r}} \,,$$

$$Q_P(r) = \sqrt{2 \cdot d} \sqrt{\frac{(A_P + A_R) \cdot (1-r)^2}{h_1 \cdot \left[(1-r)^2 + r^2\right] + h_2 \cdot r}} \,,$$

$$Q_P(r) = \sqrt{2 \cdot d} \sqrt{\frac{(A_P + A_R) \cdot r^2}{h_1 \cdot \left[(1-r)^2 + r^2\right] + h_2 \cdot r}} \,.$$

(iii) $r \in (r_2, 1]$

$$T(r) = \sqrt{\frac{2}{d}} \cdot \sqrt{\frac{A_P}{h_1 \cdot (1-r)^2 + h_2 \cdot r \cdot (1-r)}} \,,$$

$$Q_P(r) = \sqrt{2 \cdot d}\sqrt{\frac{A_P \cdot (1-r)}{h_1 \cdot (1-r) + h_2 \cdot r}}\,,$$

$$Q_P(r) = \sqrt{2 \cdot d}\sqrt{\frac{A_R}{h_1 + h_2}}\,.$$

A bizonyítás egyszerű behelyettesítéssel meghatározható. Ezzel megadtuk a modell folytonos megoldását.

2.2.7. Az egészértékű megoldás

Az egészértékű megoldásnál támaszkodunk a Schrady modellnél leírtakra, mert amint láttuk, csak egy szorzóban van különbség a modellek között. Használjuk most újra a függelékben szereplő állítást az egészértékű megoldás előállítására.

2.2.4. Tétel. Az optimális ciklusidő és az optimális beszerzési és javítási tételnagyságok az újrafelhasználási ráta függvényében a következők:

(i) $A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r \cdot (1-r) < 0$,

$$(n(r), m(r)) = \left(1, \left\lfloor \sqrt{\frac{A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2}{A_P \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot \left(h_1 \cdot r^2 + h_2 \cdot r\right)} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right),$$

(ii)

$$0 \le A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r \cdot (1-r) \le (A_R + A_P) \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r)$$

,

$$(n(r), m(r)) = (1, 1),$$

(iii)

$$A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r^2 - A_R \cdot h_1 \cdot (1-r)^2 + A_P \cdot h_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{\lambda}\right) \cdot r \cdot (1-r) > (A_R + A_P) \cdot h_2 \cdot r \cdot (1-r)$$

$$(n(r), m(r)) = \left(\left\lfloor \sqrt{\frac{A_P \cdot (h_1 + h_2) \cdot r^2}{A_R \cdot \left(h_1 \cdot (1-r)^2 + h_2 \cdot r \cdot (1-r)\right)} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right\rfloor, 1 \right).$$

Itt a $\lfloor \cdot \rfloor$ függvény az argumentumhoz legközelebb eső egészszámot jelöli. A bizonyítás egyszerű behelyettesítéssel meghatározható. Ezzel a modell vizsgálatát befejeztük.

2.2.8. Összefoglalás

Nahmias és Rivera modellje teljesen analóg módon kezelhető, mint a Schrady-féle modell, ezért ugyanazok az összegző kijelentések hangozhatnak el ebben az esetben is. Ennél a modellnél eltekinettünk számpéldák prezentálásától, mert azok hasonlóak az előbbihez.

Nahmias és Rivera (1979) dolgozatukban néhány érdekes általánosítási lehetőségre hívják fel az olvasó figyelmét. Ilyen a raktárkorlátok figyelembe vétele, amit a mai napig nem modelleztek még. A következő bemutatandó modelleknél a visszatérési ráta döntési változóként való kezelése és lineáris költségek bevezetésének felvetése is tőlük származik.

2.3. Modell beszerzéssel és véges újrafeldolgozási rátával: folyamatos kiegészítés stratégia

2.3.1. Bevezetés

A szerzők (Koh, Hwang, Sohn és Ko (2002)) egy egyszerű modellt vizsgálnak. A modell hasonló a Nahmias és Rivera által vizsgálthoz, de ebben az esetben egy másik készletezési politikával állunk szemben. Ez a készletezési politika a Schrady által javasolt és modellezett helyettesítés (substitution) politika helyett a folyamatos pótlás (continuous supplement) politikát alkalmazza. A szerzők nem fejezik ki expliciten a tételnagyságokat, amit itt mi megteszünk. A dolgozat egy új modellformát is tartalmaz a folyamatos pótlás stratégiára: azt az esetet is vizsgálják, amikor az általuk újrafeldolgozási kapacitásnak nevezett termelési, újrafelhasználási ráta nem haladja meg a keresletet. E részfejezetben ettől az esettől eltekintek.

2.3.2. Paraméterek és a modell működése

A modell abban különbözik a Nahmias és Rivera (1979) által javasolt helyettesítési mechanizmushoz képest, hogy a folytonos helyettesítés készletezési politikát alkalmazza. A modell anyagáramlását a 2.3.1. ábra mutatja. Definiáljuk most a modell változóit és paramétereit.

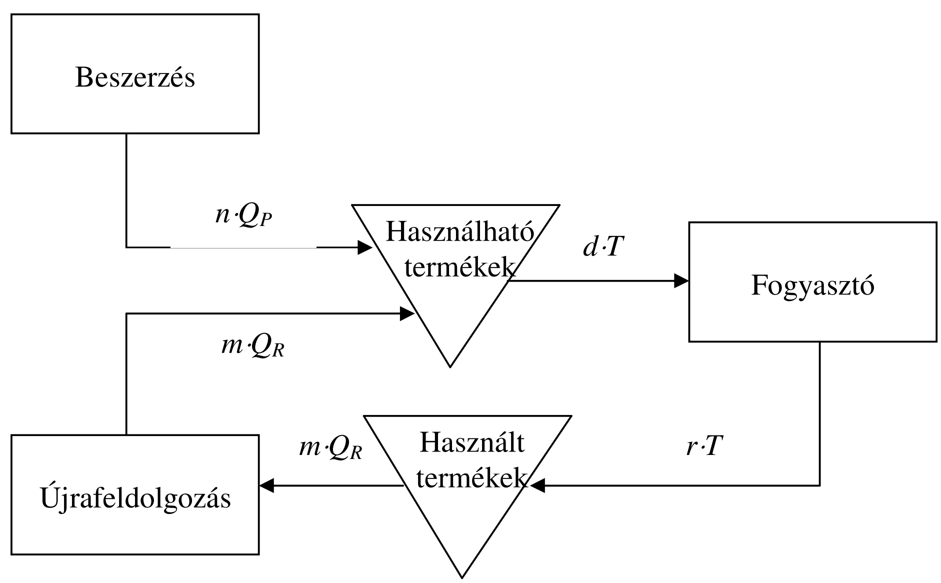
A modell döntési változói:

- Q_P beszerzési tételnagyság, nemnegatív,
- m a beszerzési tételek száma, $m \geq 1$, egészértékű,
- Q_R újrafelhasználási tételnagyság, nemnegatív,
- n az újrafelhasználási tételek száma, $n \geq 1$, egészértékű,
- T a beszerzési-javítási ciklus hossza, nemnegatív.

A modell paraméterei:

- d időegységre eső keresleti ráta,
- r időegységre eső újrafelhasználási ráta, $d > r$,
- p időegységre eső termelési ráta, $p > d$,
- C_o a beszerzési fixköltség,
- C_s az újrafeldolgozás fixköltsége,
- C_{h2} az újrafeldolgozott és beszerzett termék készlettartási költsége,
- C_{h1} a visszatért termékek tartási költsége.

Az anyagáramlási folyamatot és a készletszinteket a 2.3.1. és 2.3.2. ábra szemlélteti.



2.3.1. ábra. Koh, Hwang, Sohn és Ko modelljének anyagáramlása

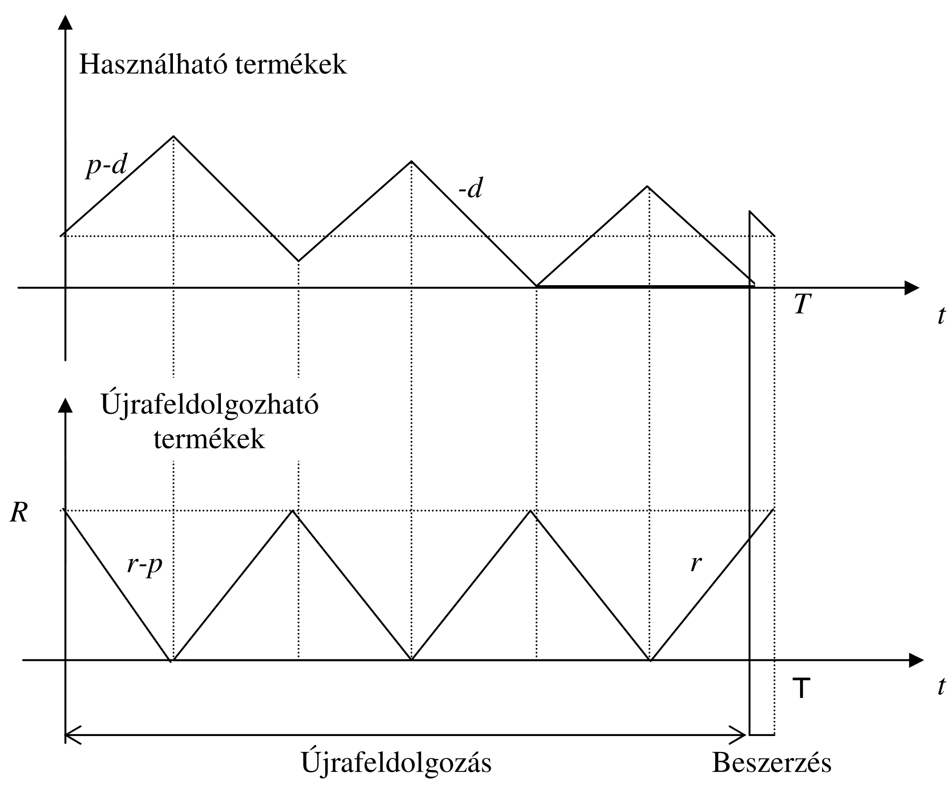
Az alábbi egyenletek a készletezési pontokba történő ki- és beáramlást mutatják a beszerzési-javítási ciklus alatt.

$$m \cdot Q_R + n \cdot Q_P = d \cdot T$$
$$m \cdot Q_R = r \cdot T \qquad (2.3.1)$$

A készletszintek különbözőek a két modellben. Nahmias és River modelljében a szerzők abból indulnak ki, hogy az újrafeldolgozott és felhasználható termékek készlettartása drágább, ezért érdemesebb csak akkor feltölteni a készletet, ha a készletállomány nullává válik. Koh et al. ezzel szemben azzal a feltételezéssel élnek, hogy a visszatért, és újrafeldolgozható termékek készletszintje legyen egyenlő zérussal egy újrafeldolgázási ciklusban. Felmerül a kérdés a két modellt tekintve, hogy milyen esetekben alkalmazható a Nahmias és Rivera által javasolt modell, és mikor a Koh, Hwang, Sohn és Ko által ajánlott. Erre a kérdésre a későbbiekben kitérünk.

A két modell lényegi különbsége az is, hogy Nahmias és Rivera modellje csak egy beszerzési tétellel számol. Az előbbi fejezetben ezt általánosítottuk, így ez lehetővé teszi a két modell összehasonlítását. Meg kell jegyeznünk, hogy Koh et al. modelljüket két részmodellre bontották annak függvényében, hogy a beszerzési, vagy az újratermelési tételek száma egy vagy több. A következő elemzések egy egységes szemléletű modellből indulnak ki, és ennek a modellnek speciális eseteként értelmezik a két, Koh et al. által vizsgált esetet. Az általunk bemutatott modellformának az is az előnye, hogy segítségével megállapítható, hogy a költségparaméterek és a visszaáramlási ráta mely értékeire lehet a parciális modelleket alkalmazni. Természetesen ehhez nagyban hozzájárul a meta-modell tulajdonságainak pontos ismerete.

2.3.2. ábra. Készletszintek Koh, Hwang, Sohn és Ko modelljében



2.3.3. A készletezés költségfüggvénye

A következő részben megszerkesztjük a modell készlettartási költségfüggvényét a döntési változók függvényében. Itt újra egy nemlineáris programozási feladat megoldására vezetjük vissza a problémát.

A modell készlettartási költségeit a 2.3.2. ábra készletszintjeinek segítségével számítjuk ki. A készletezési politika természetesen ebben az esetben is predeterminált, amint az az előző két ismertetett modellben is volt. A szerzők az ábrán bemutatott készletszintekkel számolnak, eltekintve attól, hogy ez a stratégia optimális-e. A költségek meghatározását az 2.3.1. lemma foglalja össze.

2.3.1. Lemma.
Legyen az újrafelhasználható termékek készlettartási költségfüggvénye S_1 és a javítandó alkatrészek költségfüggvénye S_2. Ekkor a két költségfüggvény a következő alakot ölti:

$$S_1 = n \cdot C_{h2} \cdot \frac{Q_P^2}{2 \cdot d} + C_{h2} \cdot \frac{Q_R^2}{2} \cdot \left\{ m^2 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + m \cdot \left(\frac{2}{d} - \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \right\}$$

$$S_2 = m \cdot \frac{C_{h1}}{2} \cdot Q_R^2 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)$$

Bizonyítás. Csak az első egyenlőséget bizonyítjuk a használható termékekre, mert a másodikat hasonló módon végezhetjük el. Osszuk fel a 2.3.3. ábrán látható területet az első *m-1* darab újrafelhasználási ciklusra, az utolsó újrafelhasználási ciklusra és az *n* darab beszerzési ciklusra. Ezt azért tesszük, mert a készlettartási költséget úgy értelmezzük, mint a görbe alatti terület nagyságát. A 2.3.3. ábrán jelölt I_0 kezdőkészlet nagysága $(m-1) \cdot \left(\frac{d}{r} - 1 \right) \cdot Q_R$. Ennek segítségével kiszámítható az *m-1* újrafelhasználási ciklus költsége, ami $\frac{Q_R^2}{2 \cdot r} \cdot \left[(m-1)^2 \cdot \left(\frac{d}{r} - 1 \right) + (m-1) \cdot \left(1 - \frac{r}{p} \right) \right]$. Az utolsó újratermelési ciklus területe $\frac{Q_R^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{r}\right)$. Az n darab beszerzés görbe alatti területét a következő képlettel számíthatjuk ki: $n\cdot\frac{Q_P^2}{2\cdot d}-\frac{Q_R^2}{2\cdot d}\cdot(m-1)^2\left(\frac{d}{r}-1\right)^2$.

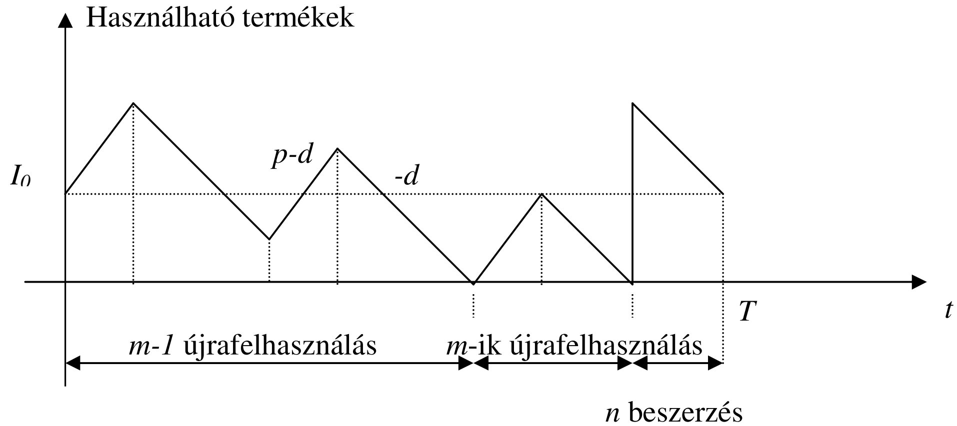
Összegezzük most a meghatározott területeket:

$$S_1=\frac{Q_R^2}{2\cdot r}\cdot\left[(m-1)^2\cdot\left(\frac{d}{r}-1\right)+(m-1)\cdot\left(1-\frac{r}{p}\right)\right]+\frac{Q_R^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{r}\right)+\left[n\cdot\frac{Q_P^2}{2\cdot d}-\frac{Q_R^2}{2\cdot d}\cdot(m-1)^2\left(\frac{d}{r}-1\right)^2\right]$$

.

Elemi matematikai átalakítások után nyerjük az első, bizonyítani kívánt egyenlőséget.

2.3.3. ábra. A használható alkatrészek készletezési költségeinek kiszámítása (*m = 3*)



2.3.4. Az optimális beszerzési-javítási ciklus idejének hossza

A modell fix rendelési és javításindítási költségeinek összege legyen

$$F=m\cdot C_s+n\cdot C_o.$$

A fix és készlettartási költségek ismeretében meghatározható egy beszerzési-javítási ciklus átlagköltsége:

$$C(T,Q_P,Q_R,n,m)=\frac{F+S_1+S_2}{T}=$$

$$\frac{C_{h2}\cdot\frac{Q_R^2}{2}\cdot\left\{m^2\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{d}\right)+m\cdot\left(\frac{2}{d}-\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\right\}}{T}+\frac{n\cdot C_o+n\cdot C_{h2}\cdot\frac{Q_P^2}{2\cdot d}}{T}+\frac{m\cdot C_s+m\cdot C_{h1}\cdot\frac{Q_R^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\cdot}{T}$$

A modellt ezek alapján újra a következő nemlineáris optimalizálási feladatra vezethetjük vissza:

$$\left.\begin{array}{l} C(T,Q_P,Q_R,n,m)\rightarrow \min \\ \\ m\cdot Q_R+n\cdot Q_P=d\cdot T, \\ m\cdot Q_R=r\cdot T, \\ T>0,\ Q_P>0,\ Q_R>0,\ n,m \text{ pozitív egészértékű.} \end{array}\right\} \qquad \text{(P3)}$$

Használjuk most a probléma leegyszerűsítéséhez az (2.3.1) egyenlőségeket, ahonnan két folytonos változót kifejezve, azt a célfüggvénybe helyettesíthetjük. Az egyszerűség kedvéért a két tételnagyság mellett dönthetünk. Természetesen kifejezhetnénk a tételszámokat is, de akkor az egészértékűség vizsgálata lenne nehezebb.

$$Q_P=\frac{(d-r)\cdot T}{n}$$

$$Q_R=\frac{r\cdot T}{m}$$

A tételnagyságok behelyettesítése után az alábbi egyszerűbb költségfüggvényt kapjuk, amit $C_1(.)$-gyel jelölünk:

$$C_1(T,n,m)=\frac{m\cdot C_s+n\cdot C_o}{T}+$$

$$+\frac{T}{2}\cdot\left[\left\{C_{h2}\cdot r^2\cdot\left(\frac{2}{d}-\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)+C_{h1}\cdot r^2\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\right\}\cdot\frac{1}{m}+\frac{C_{h2}\cdot(d-r)^2}{d}\cdot\frac{1}{n}+C_{h2}\cdot r^2\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{d}\right)\right]$$

Most szekvenciálisan kiküszöböljük a ciklusidőt. Ez a függvény konvex a ciklusidőben, ezért az optimalitás szükséges feltétele egyben elégséges is. Tehát az optimális beszerzési-újratermelési ciklusidő:

$$T^o = \sqrt{\frac{2\cdot(m\cdot C_s + n\cdot C_o)}{\left\{C_{h2}\cdot r^2\cdot\left(\frac{2}{d}-\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)+C_{h1}\cdot r^2\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\right\}\cdot\frac{1}{m}+\frac{C_{h2}\cdot(d-r)^2}{d}\cdot\frac{1}{n}+C_{h2}\cdot r^2\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{d}\right)}}$$

.

Ezt a kifejezést visszahelyettesítve a $C_1(.)$ költségfüggvénybe az alábbi $C_2(.)$ költségfüggvényt kapjuk:

$$C_2(n,m)=\sqrt{2\cdot(m\cdot C_s+n\cdot C_o)\cdot\left[\left\{C_{h2}\cdot r^2\cdot\left(\frac{2}{d}-\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)+C_{h1}\cdot r^2\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\right\}\cdot\frac{1}{m}+\frac{C_{h2}\cdot(d-r)^2}{d}\cdot\frac{1}{n}+C_{h2}\cdot r^2\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{d}\right)\right]}$$

vagy

$$C_2(n,m)=\sqrt{2\cdot d}\cdot\sqrt{A(r)\cdot\frac{m}{n}+B(r)\cdot\frac{n}{m}+C(r)\cdot m+D(r)\cdot n+E(r)}, \qquad (2.3.2)$$

ahol

$$A(r)=C_s\cdot C_{h2}\cdot\frac{(d-r)^2}{d},\quad B(r)=C_o\cdot\left[C_{h1}\cdot\left(r-\frac{r^2}{p}\right)+C_{h2}\cdot\left(\frac{2r^2}{d}-\frac{r^2}{p}-r\right)\right],$$
$$C(r)=C_s\cdot C_{h2}\cdot\left(r-\frac{r^2}{d}\right),\quad D(r)=C_o\cdot C_{h2}\cdot\left(r-\frac{r^2}{d}\right), \qquad .$$
$$E(r)=C_s\cdot\left[C_{h1}\cdot\left(r-\frac{r^2}{p}\right)+C_{h2}\cdot\left(\frac{2r^2}{d}-\frac{r^2}{p}-r\right)\right]+C_o\cdot C_{h2}\cdot\frac{(d-r)^2}{d}$$

A (P3) problémát így sikerült egy pozitív egészértékű $C_2(n,m)$ függvény minimalizálására visszavezetni. A (2.3.2) modell egyben nem más, mint a függelékben szereplő meta-modell, tehát ezt a modellt annak segítségével lehet elemezni.

2.3.5. Az optimális egészértékű megoldás előállítása a tételszámokra

Az előző két fejezetben még előállítottuk a folytonos megoldásokat, most attól eltekintünk. Azonnal alkalmazzuk a Függelékben szereplő képleteket a diszkrét megoldásra.

2.3.1. Tétel: A modell egészértékű megoldása a következő módon állítható elő:

(i) $C_o \cdot \left[C_{h1} \cdot \left(r - \frac{r^2}{p} \right) + C_{h2} \cdot \left(\frac{2r^2}{d} - \frac{r^2}{p} - r \right) \right] - C_s \cdot C_{h2} \cdot \frac{(d-r)^2}{d} - C_s \cdot C_{h2} \cdot \left(r - \frac{r^2}{d} \right) > 0$,

$$m^o = \sqrt{\frac{C_o \cdot \left[C_{h1} \cdot \left(r - \frac{r^2}{p} \right) + C_{h2} \cdot \left(\frac{2r^2}{d} - \frac{r^2}{p} - r \right) \right]}{C_s \cdot C_{h2} \cdot \frac{(d-r)^2}{d} + C_s \cdot C_{h2} \cdot \left(r - \frac{r^2}{d} \right)} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}, \quad n^o = 1,$$

(ii)

$$C_o \cdot \left[C_{h1} \cdot \left(r - \frac{r^2}{p} \right) + C_{h2} \cdot \left(\frac{2r^2}{d} - \frac{r^2}{p} - r \right) \right] - C_s \cdot C_{h2} \cdot \frac{(d-r)^2}{d} - C_s \cdot C_{h2} \cdot \left(r - \frac{r^2}{d} \right) \le 0,$$

$$C_s \cdot C_{h2} \cdot \frac{(d-r)^2}{d} - C_o \cdot \left[C_{h1} \cdot \left(r - \frac{r^2}{p} \right) + C_{h2} \cdot \left(\frac{2r^2}{d} - \frac{r^2}{p} - r \right) \right] - C_o \cdot C_{h2} \cdot \left(r - \frac{r^2}{d} \right) \le 0,$$

$$m^o = 1, \; n^o = 1,$$

(iii) $C_s \cdot C_{h2} \cdot \frac{(d-r)^2}{d} - C_o \cdot \left[C_{h1} \cdot \left(r - \frac{r^2}{p} \right) + C_{h2} \cdot \left(\frac{2r^2}{d} - \frac{r^2}{p} - r \right) \right] - C_o \cdot C_{h2} \cdot \left(r - \frac{r^2}{d} \right) > 0$

$$m^o = 1, \; n^o = \sqrt{\frac{C_s \cdot C_{h2} \cdot \frac{(d-r)^2}{d}}{C_o \cdot \left[C_{h1} \cdot \left(r - \frac{r^2}{p} \right) + C_{h2} \cdot \left(\frac{2r^2}{d} - \frac{r^2}{p} - r \right) \right] + C_o \cdot C_{h2} \cdot \left(r - \frac{r^2}{d} \right)} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Ezzel a problémát megoldottuk.

2.3.6. Összefoglalás

Erről a modellről könnyen bebizonyítható, hogy magasabb költséggel működik, mint a Nahmias és Rivera (1979) modellje. Ennek az az oka, hogy az értékesebbnek tekinthető végtermékek esetén akkor adnak itt fel megrendelést, amikor még van a készleten. Ezt egyébként belátta Teunter (2004) is. Azonban a Koh et al. (2002) által javasolt stratégia költséghatékonyabb, ha a használható termékek készlettartási költsége alacsonyabb, mint a javítandó alkatrészeké. Ezt bizonyítottam (2003a) dolgozatomban. A paraméterek átnevezésével könnyen megkaphatjuk Nahmias és Rivera (1979) modelljét.

3. Készletmodellek hulladékkezeléssel

Az előző fejezetben ismertetett három modell mindegyikének célja az optimális beszerzési és javítási tételnagyságok, valamint a hozzájuk tartozó tételszámok meghatározása volt. Menedzsment szempontból ezek lehetnek az elsődleges célok. Ugyanakkor az a kérdés is felmerül, hogy ha ismert és a vállalati menedzsment által befolyásolható az újrafelhasználásra visszaáramló használt termékek aránya, akkor a visszaáramló termékekből mekkora arányt használjon fel a vállalat. Az itt feltett kérdésre három modell alapján keressük a választ.

A három ismertetendő modell két részből áll: először az optimális tételnagyságokat határozzuk meg újrafeldolgozásra/javításra és beszerzésre/termelésre a tételszámokkal együtt, másodszor ismert fajlagos termelési/beszerzési, újrafeldolgozási/javítási és hulladékkezelési költségek esetén az optimális újrafeldolgozási hányadot határozzuk meg. Ezzel kétfokozatú készletoptimalizálási feladatokat állítunk elő.

Az első bemutatandó modellt a következőképpen foglalhatjuk össze (Richter (1996a)). A terméket (jelen esetben konténert) a vállalat egyik műhelye állítja elő vagy a használtakat javítja, hogy abban pl. alkatrészeket szállítsanak egy termelési fázis (másik műhely) számára. Az üres konténereket a felhasználás helyén tárolják, majd a termelési periódus végén az összegyűjtött konténereket visszaszállítják a gyártó-javító üzembe. A termelő üzemben születik döntés arról, hogy a konténerek mekkora részét gyűjtik javításra és mekkora hányadát kezelik a vállalaton kívül hulladékként. (Ez a hulladékkezelés jelenthet újrafelhasználást egy másik vállalat számára. Pl. ha a konténer vasból készült, akkor egy kohóban azt beolvaszthatják.) A kérdések a következők lehetnek: a konténerek hány százalékát javítsák meg, valamint milyen tételnagyságokkal folyjon a konténerek előállítása és javítása, ha a döntéshozó célja a releváns költségek minimalizálása.

A következő modell (Teunter (2001)) egy újrafeldolgozási modellt ismertet. A modellben követi egymást az újrafeldolgozás és a termelés. Ugyanakkor a fogyasztóktól csak egy adott mennyiségű használt termék áramlik vissza a termelőhöz. A hulladékkezelés csak akkor kezdődik meg, ha az újrafelhasználás befejeződik, majd a hulladékkezelés után újra elkezdődik a termelés. A kérdés úgy merül fel, hogy minden visszaérkező terméket újra feldolgozzanak-e, vagy abból valamennyit hulladékként kezeljenek-e. A modell ez esetben is két részből áll, mint az előzőnél. Először a minimális készletezési költségeket határozzuk meg ismert visszaérkezési és újrafelhasználási hányad mellett, majd az ismert fajlagos újrafelhasználási, hulladékkezelési és termelési költségek mellett a költségoptimális újrafelhasználási hányadot.

Végül a harmadik problémát mutatjuk be (Dobos-Richter (2004)). Tételezzük fel, hogy egy vállalat saját termelése mellett recyclingból elégíti ki a terméke iránti keresletet. Azt is felteszem, hogy a termelés és a recycling folyamatok időben folynak le, tehát a termelési és recycling hányad véges. A vállalat a recyclinghoz a használt termékeket a piacról szerzi be, és abban a helyzetben van, hogy minden általa előállított és használt terméket vissza tud vásárolni a piacról. A kérdés tehát az, hogy mennyi terméket vásároljon vissza a vállalat a piacról ahhoz, hogy a releváns költségeit, vagyis a tételnagysághoz kapcsolódóakat és a fajlagos hulladékkezelési, termelési, recycling és visszavásárlási költségeit minimalizálja.

A három modell közös feltételezései a készletezési alrendszert tekintve megegyeznek a 2. fejezet elején összefoglaltakkal, ezeket itt azzal kell kibővítenünk, hogy a tételnagysághoz nem kapcsolódó költségek lineárisak.

A modellek megoldását is összefoglalhatjuk röviden. Mivel mind a három modellben az optimális újrafelhasználási hányad meghatározása a cél, ezért az eredmények is hasonlóak. Az optimális hányad azt mutatja, hogy vagy minden visszaérkező használt terméket újra fel kell használni, vagy semmit sem kell visszavenni, hanem csak termelésből kell a szükségletet kielégíteni. Ezeket az állításokat matematikailag is bizonyítom.

Ezek után rátérünk a modellek bemutatására.

3.1. Egy háromraktáras modell javítással és hulladékkezeléssel

3.1.1. Bevezetés

A hulladékkezelési problémát először Richter (1996a) vizsgálta. Modelljét két szinten oldotta meg. Az első szinten a minimális készletezési átlagköltségek melletti termelési és javítási sorozatnagyságok és a tételszámok megállapítása volt a cél. A második szinten lineáris termelési, javítási és hulladékkezelési költségek bevezetése esetén a készletezési és a lineáris „kezelési“ költségek összegének minimalizálásával az optimális hulladékkezelési ráta meghatározását célozta meg. Az alapmodell megoldása során több, matematikai szempontból érdekes probléma állt elő, amelyet a szerző(k) vizsgáltak. Ilyen probléma a készletezési költségfüggvény tulajdonságainak leírása (Richter (1996b)), vagy a második szinten megjelenő feladat megoldása (Richter (1997)) és az egészértékű tételszám meghatározása volt (Richter-Dobos (1999a, b, c), Dobos-Richter (2000)). A Dobos-Richter (2000) cikkben a szerzők egy meta-modellt vizsgáltak, amely hasonló visszutas logisztikai problémák megoldásához nyújthat alapot.

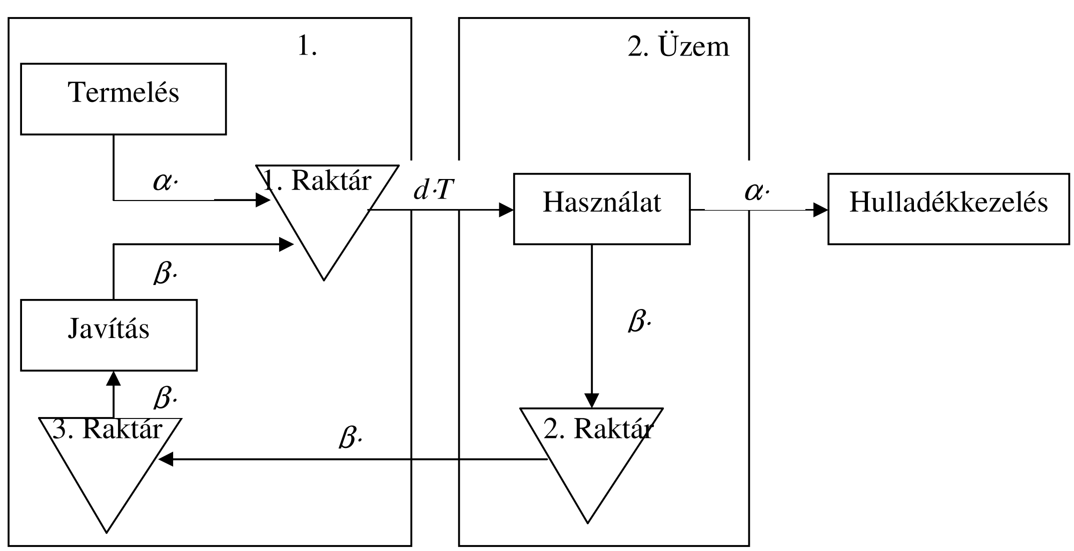
E rész célja a Richter (1996a) modell további vizsgálata. A Dobos-Richter (2000) dolgozatban a szerzők említést tesznek arról, hogy a termelési és javítási sorozatnagyságok száma nagyobb lehet egynél, de konkrét feladatot nem mutatnak be, amelyre ez a tulajdonság teljesül.

A modell bemutatása az alábbiak szerint következik. A bevezetés után a második részben a modell működését mutatjuk be a használt paraméterekkel és változókkal. Utána a készletezési és teljes költségfüggvényeket konstruáljuk meg. A negyedik részben folytonos és egészértékű tételszámok esetére adjuk meg a modell optimális paramétereit. A következő fejezet az egészértékű feladat optimális megoldását mutatja be. A hatodik, utolsó rész az eredményeket foglalja össze.

3.1.2. Paraméterek és a rendszer működése

Legyen adott egy termelő vállalat, amely az alkatrészek üzemek közötti továbbításához szükséges konténereket maga állítja elő és a régebben előállított használtakat ugyanott javítja. Az előállítás és javítás ugyanabban a műhelyben történik. A konténerek iránti kereslet, amelyet egy másik műhely jelenít meg, feltételezések szerint időben konstans. A konténerekben alkatrészeket szállítanak a második üzembe további feldolgozásra. A második üzemnek tehát alkatrészre van kereslete, de azt a konténerekben, egységesített darabszámban szállítják oda. Így a műhelynek nem csak alkatrészekre, hanem konténerekre is szüksége van áttételesen. Egy ehhez hasonló problémát Kelle és Silver (1989) is vizsgált sztochasztikus dinamikus sorozatnagyság modellben, de csak az előállító műhely szintjén. A második üzem az üres konténereket gyűjti, raktározza, majd onnan az első üzem termelési-javítási ciklusának kezdetére azokat az első üzembe szállítják. Nem minden konténert tudnak a második üzemből az elsőbe visszaszállítani, mert azok egy része a második üzemet hulladékként hagyja el. A hulladék arányáról a második üzem dönt, de arra az első üzem is befolyással lehet. A modell anyagáramlási folyamatát a 3.1.1. ábra mutatja. A termelt és javított konténerek közös raktárba kerülnek az első üzemben, ahonnan majd - egyenletes felhasználást feltételezve – alkatrészekkel megtelten kerülnek a második üzembe. A használt, de hulladékkezelésre át nem adott konténereket a második üzemben a második raktárban tárolják, ahonnan az egész állományt az első üzemben lévő harmadik raktárába szállítják a ciklus végén.

3.1.1. ábra. Anyagáramlás a modellben



A modell paraméterei és változói következők lesznek.

A modell paraméterei:

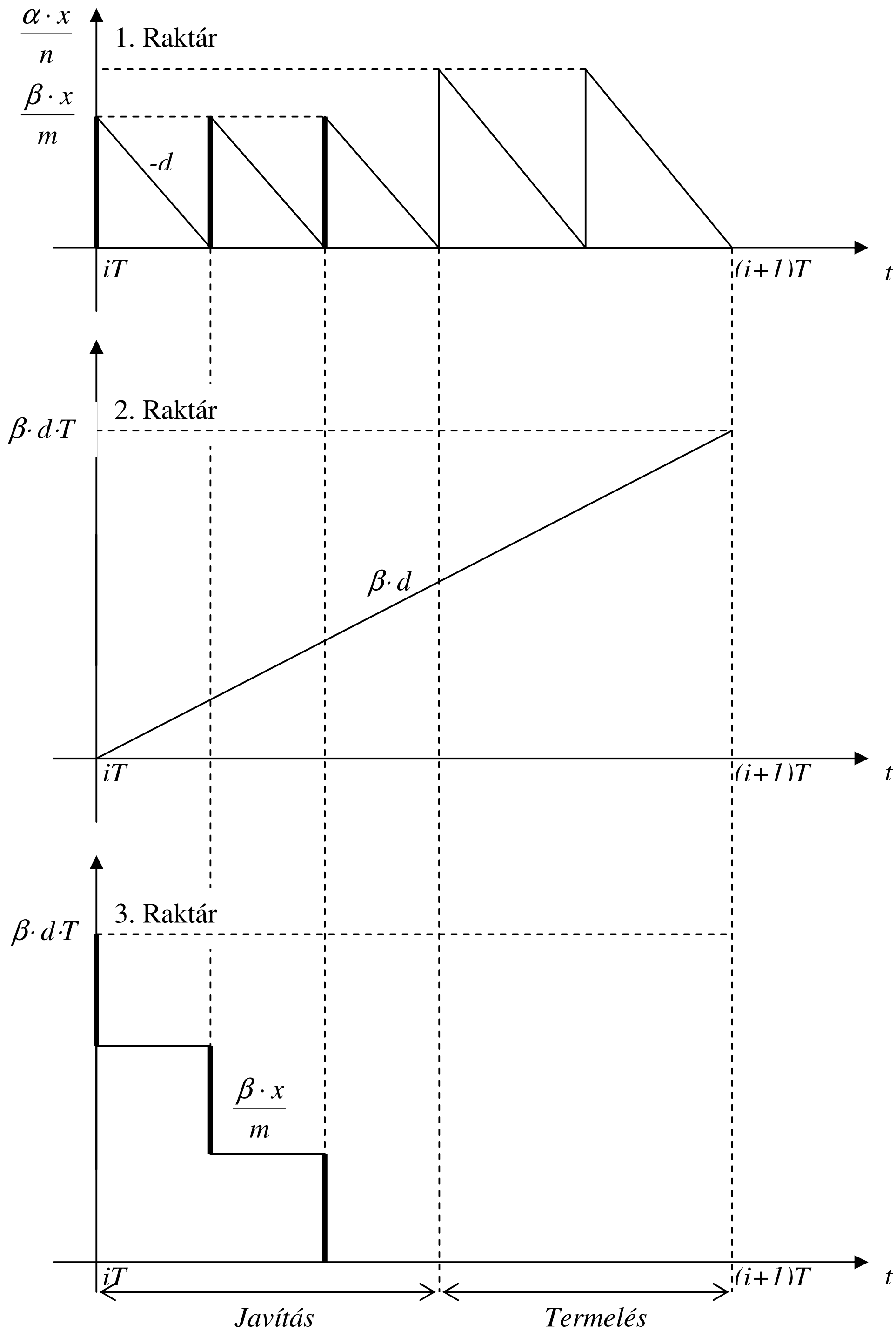
- d keresleti ráta, időegységre eső darabszám,
- r fix javítási sorozatkezdési költség,
- s fix termelési sorozatkezdési költség,
- h a végtermék készlettartási költsége (1. raktár), időegységre per darab,
- u a javítandó termék készlettartási költsége (2. és 3. raktár), időegységre per darab,
- e egységnyi hulladék kezelési költsége,
- b egységnyi végtermék termelési költsége,
- k egységnyi javítandó termék javítási költsége.

A modell döntési változói:

- T hulladékgyűjtési időtartam, a termelési-javítási ciklus hossza,
- x a teljes sorozatnagyság a termelési-javítási ciklusban, $x = d \cdot T$,
- m a javítási tételek száma, $m \geq 1$, egész,
- n a termelési tételek száma, $n \geq 1$, egész,
- α hulladékkezelési ráta, a d keresleti ráta százalékában, $\beta = 1 - \alpha$ a javítási ráta.

A modell további feltételezése az, hogy mind a termelési, mind a javítási sorozatnagyságok azonosak. Az x összes sorozatnagyság, vagyis a második üzem ciklusbeli kereslete alapján kiszámíthatóak a termelési és javítási sorozatnagyságok, amelyek a termelési sorozatnál $\frac{\alpha \cdot x}{n}$, míg a javítási sorozatnál $\frac{\beta \cdot x}{m}$. A három raktár készletszintjeit a 3.1.2. ábra mutatja egy ciklusra vonatkozóan.

3.1.2. ábra. Készletszintek a raktárakban az *i*-ik ciklusban (*m = 3*, *n = 2, i ≥ 1*)



A modell megalkotásánál eltekintünk attól, hogy a termelés/javítás időt vesz igénybe. Az első raktárba pillanatnyi gyors beáramlás történik, míg a kereslet időegységre konstans, így itt a klasszikus fűrészfog modell áll elő azzal a különbséggel, hogy a termelési és javítási sorozatnagyság különbözik. Ebből a raktárból akkor van kivételezés, ha a készletállomány nullára csökken. A második raktárban csak egyenletes növekedés történik, míg a harmadik raktárból csak javításra vesznek ki egy-egy javítási sorozatnyi mennyiséget, de úgy, hogy az első sorozatot a raktárba való beérkezés pillanatában azonnal javítani kezdik, tehát az nem kerül készletezésre. Mindezt a kivételezést addig folytatják, míg a harmadik raktár állománya nullára nem csökken. A folyamat ciklusonként ismétlődik.

Könnyen látható, hogy az x keresletet az m darab azonos javítási és n darab azonos termelési tétellel elégítik ki. A modellt tehát az x teljes sorozatnagysággal, az m és n tételszámmal, mint irányítható változókkal írhatjuk le.

3.1.3. A költségfüggvények megszerkesztése

A készletezési alrendszer összköltségét a görbe alatti terület fajlagos költségekkel súlyozott összegeként határozzuk meg, amiből – a ciklusidővel osztva – a szokásos átlagos költségfüggvényt számíthatjuk ki. A következő lemma a raktárak cikluson belüli készlettartási összköltséget adja.

3.1.1. Lemma. Legyen a raktárak összes készlettartási költsége H_1, H_2 és H_3 az első, második és harmadik raktárra sorrendben. Ekkor

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{h}{2\cdot d}\cdot\frac{\alpha^2\cdot x^2}{n}+\frac{h}{2\cdot d}\cdot\frac{\beta^2\cdot x^2}{m} \\ H_2 &= \frac{u}{2\cdot d}\cdot\beta\cdot x^2 \\ H_3 &= \frac{u}{2\cdot d}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\beta^2\cdot x^2 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Bizonyítás. Csak a harmadik raktárra mutatjuk meg az összefüggést, mert a 3.1.1. ábra alapján a másik két egyenlőség hasonlóan belátható. A görbe alatti területet a harmadik esetben a következőképpen számolhatjuk ki:

$$H_3 = u\cdot\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{d}\cdot\frac{\beta\cdot x}{m}\right)\cdot\left(i\cdot\frac{\beta\cdot x}{m}\right)=\frac{u}{d}\cdot\frac{\beta^2\cdot x^2}{m^2}\cdot\sum_{i=1}^{m-1} i\,,$$

ahol $\frac{1}{d}\cdot\frac{\beta\cdot x}{m}$ az időtartam két javítási tétel között, míg $i\cdot\frac{\beta\cdot x}{m}$ a készletállomány az *(m – i)*-ik tétel után. A természetes számok összegzését felhasználva kapjuk az eredményt.

A sorozatkezdési költségek összege: $m{\cdot}r{+}n{\cdot}s$. Az készletezési összköltség K_z így a sorozatkezdési és készlettartási költségek összegeként írható fel a következő formában:

$$K_z = (m\cdot r + n\cdot s) + \frac{x^2}{2\cdot d}\left[h\cdot\frac{\alpha^2}{n} + (h-u)\cdot\frac{\beta^2}{m} + u\cdot\left(\beta+\beta^2\right)\right].$$

A készletezési átlagköltséget ennek ismeretében könnyen meghatározhatjuk alkalmazva azt az összefüggést, hogy a teljes sorozatnagyság egyenlő a ciklusbeli kereslettel ($x = d{\cdot}T$):

$$K(x,m,n,\alpha) = \frac{K_z}{T} = (m\cdot r + n\cdot s)\cdot\frac{d}{x} + \frac{x}{2}\left[h\cdot\frac{\alpha^2}{n} + (h-u)\cdot\frac{\beta^2}{m} + u\cdot\left(\beta+\beta^2\right)\right]. \qquad (3.1.2)$$

Az első feladattípus a készletezési átlagköltség minimalizálása lehet. Ekkor arra a kérdésre keressük a választ, hogy mely teljes sorozatnagyságra (x), javítási és termelési tételszámra (m, n) és hulladékkezelési rátára (α) lesz a készletezési költség minimális és milyen ajánlás fogalmazható meg ezek ismeretében a környezettudatos vállalati termelési-készletezési stratégiára.

Vonjuk most be a vizsgálatba a sorozatnagysághoz kapcsolódó költségeken kívül a lineáris termelési, újrafeldolgozási és hulladékkezelési költségeket. Jelöljük ezen költségeket az $R(\alpha)$ függvénnyel. E költségekre csak az átlagköltségeket írjuk fel, mert az az x teljes tételnagyságtól nem függ, csak a hulladékkezelési rátától.

$$R(\alpha) = b\cdot d\cdot\alpha + k\cdot d\cdot\beta + e\cdot d\cdot\alpha = d\cdot[\alpha\cdot(b + e - k) + k]$$

A teljes (készletezési és lineáris) átlagköltségek így

$$G(x,m,n,\alpha) = K(x,m,n,\alpha) + R(\alpha).$$

Két problémát fogunk vizsgálni:

1. Modell: A készletezési átlagköltségek minimalizálása

$$\begin{aligned} &K(x,m,n,\alpha) \to \min \\ &x > 0, \quad m,n \in \{1,2,\ldots\} \end{aligned}.$$

2. Modell: Az összes átlagköltség minimalizálása

$$\begin{aligned} &G(x,m,n,\alpha) \to \min \\ &x > 0, \quad m,n \in \{1,2,\ldots\}, \quad \alpha \in [0,1] \end{aligned}.$$

A következő részben az 1. modell megoldását adjuk meg.

3.1.4. Az 1. modell megoldása

Ebben a modellben feltételezzük, hogy az α hulladékkezelési ráta állandó. A modell paramétereit, vagyis a teljes tételnagyságot és a tételszámokat szekvenciálisan határozzuk meg. Célunk az α-tól függő költségfüggvény meghatározása. A megoldásban először feltesszük, hogy a tételszámok folytonos változók, majd azután vizsgáljuk a szigorúbb egészértékűséget.

3.1.4.1. Az optimális teljes tételnagyság és a minimális költségek adott tételszámok mellett

A (3.1.2) költségfüggvény konvex és differenciálható x-ben. Ekkor a megoldás

$$x(m,n,\alpha) = \sqrt{\frac{2 \cdot d \cdot (m \cdot r + n \cdot s)}{h \cdot \dfrac{\alpha^2}{n} + (h-u) \cdot \dfrac{\beta^2}{m} + u \cdot \left(\beta + \beta^2\right)}}. \tag{3.1.3}$$

3.1.1. példa. Legyen $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $\alpha = 0{,}8$ ($\beta = 0{,}2$), $d = 1000$, $m = 2$ és végül $n = 3$. Ezen adatokra az optimális teljes sorozatnagyság a (3) összefüggést alkalmazva *x(2, 3, 0,8) = 249*. A termelési sorozatnagyság *0,8 · x(2, 3, 0,8) / 3 = 66,5* míg a javítási sorozatnagyság értéke *0,2 · x(2, 3, 0,8) / 2 = 25* lesz. A készletezési költségek értéke *K(249, 2, 3, 0,8) = 38.095,7* pénzegység.

A (3.1.3)-at (3.1.2)-be helyettesítve az egyszerűsített költségfüggvény

$$K(m,n,\alpha)=\sqrt{2\cdot d\cdot(m\cdot r+n\cdot s)\cdot\left[h\cdot\frac{\alpha^2}{n}+(h-u)\cdot\frac{\beta^2}{m}+u\cdot\left(\beta+\beta^2\right)\right]}.$$

A fenti függvényben végezzük el a műveleteket, amivel az alábbi probléma adódik:

$$K(m,n,\alpha)=\sqrt{2\cdot d\cdot\left[A(\alpha)\cdot\frac{m}{n}+B(\alpha)\cdot\frac{n}{m}+C(\alpha)\cdot m+D(\alpha)\cdot n+E(\alpha)\right]},$$

ahol

$$A(\alpha)=r\cdot h\cdot\alpha^2,\quad B(\alpha)=s\cdot(h-u)\cdot\beta^2,\quad C(\alpha)=r\cdot u\cdot\left(\beta+\beta^2\right),$$
$$D(\alpha)=s\cdot u\cdot\left(\beta+\beta^2\right),\quad E(\alpha)=s\cdot h\cdot\alpha^2+r\cdot(h-u)\cdot\beta^2$$

Legyen továbbá $S(m,n,\alpha)=A(\alpha)\cdot\frac{m}{n}+B(\alpha)\cdot\frac{n}{m}+C(\alpha)\cdot m+D(\alpha)\cdot n+E(\alpha)$. (3.1.4)

Mivel a gyökvonás egy monoton transzformáció, ezért elegendő az *S(m,n,α)* függvényt minimalizálni az *m* és *n* tételszámokban, amelyek pozitív egész számok.

3.1.2. példa. Legyen továbbra is *s = 1450, r = 200, h = 650, u = 5, α = 0,8 (β = 0,2), d = 1000*. Ekkor az együtthatók értéke: *A(0,8) = 83.200, B(0,8) = 37.410, C(0,8) = 240, D(0,8) = 17.400* és *E(0,8) = 608.360*. A (3.1.4) függvény ezen értékekre a következő alakot veszi fel: $S(m,n,0{,}8)=83.200\cdot\frac{m}{n}+37.410\cdot\frac{n}{m}+240\cdot m+17.400\cdot n+608.360$.

3.1.4.2. Az optimális folytonos tételszámok meghatározása

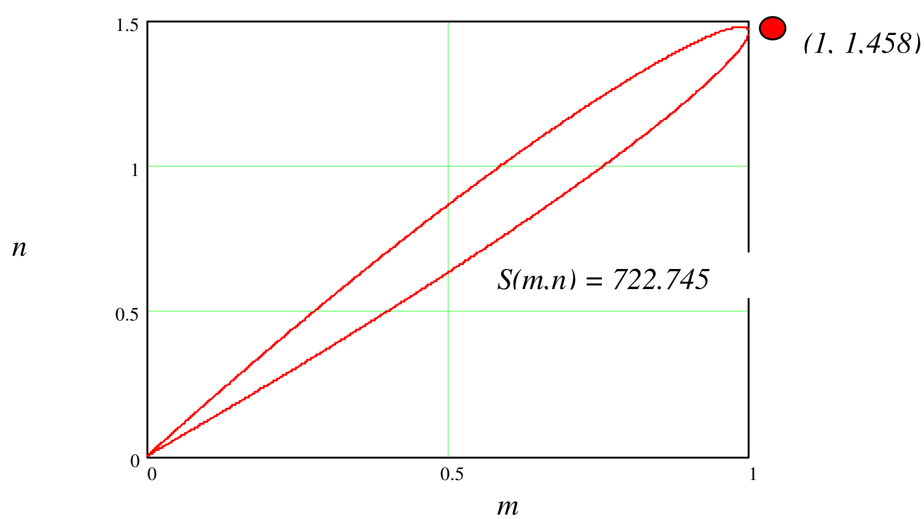
A tételszámok meghatározásához a meta-modellt vezetjük be:

$$S(m,n) = A \cdot \frac{m}{n} + B \cdot \frac{n}{m} + C \cdot m + D \cdot n + E \to \min \qquad (3.1.5)$$
$$m,n \geq 1$$

Itt feltehető, hogy az *A, C, D* és *E* paraméterek pozitívak, és a *B+D* összeg is, amelyek teljesülnek a (3.1.4) függvény együtthatóira. Ez a segédfeladat az eredeti probléma egy relaxált feladata arra az esetre, amikor a tételszámok egynél nagyobb folytonos változók.

3.1.3. példa. Legyen most *A = 83.200, B = 37.410, C = 240, D = 17.400* és *E = 608.360*. Ekkor *A > B +D = 39.150*, ami azt jelenti, hogy $m^o = 1$ és $n^o = 1{,}458$. Az célfüggvény értéke ebben a pontban *S(1, 1,458) = 722.745* lesz. A feladat egyenlőköltség-görbéjét a 3.1.3.ábra szemlélteti.

3.1.3. ábra. A feladat *S(m,n)* egyenlőköltség-görbéje



Az 3.1.1. tétel segítségével a (3.1.4) feladat megoldása folytonos tételszámok mellett:

3.1.1. Tétel. A (3.1.2) feladat és ezzel az 1. modell optimális folytonos megoldása a teljes tételnagyságra $x^o(\alpha)$ és a tételszámokra $(m^o(\alpha), n^o(\alpha))$, valamint a hozzájuk tartozó $K(\alpha)$ költségfüggvény:

(i) $\{h > u\} \wedge \{\alpha = 0\}$

$$m^o(0)=1,\quad n^o(0)=0,\quad x^o(0)=\sqrt{\frac{2\cdot d\cdot r}{h+u}},$$

$$K(0)=\sqrt{2\cdot d\cdot(h+u)}$$

(ii) $\left\{s\cdot(h-u)\cdot\beta^2 > r\cdot h\cdot\alpha^2 + r\cdot u\cdot\left(\beta+\beta^2\right)\right\}\wedge\{h>u\}\Rightarrow \alpha\in(0,\alpha_1)$

$$m^o(\alpha)=\beta\cdot\sqrt{\frac{s\cdot(h-u)}{r\cdot\left[h\cdot\alpha^2+u\cdot\left(\beta+\beta^2\right)\right]}},\quad n^o(\alpha)=1,\quad x^o(\alpha)=\sqrt{\frac{2\cdot d\cdot s}{h\cdot\alpha^2+u\cdot\left(\beta+\beta^2\right)}},$$

$$K(\alpha)=\sqrt{2\cdot d}\cdot\left\{\beta\cdot\sqrt{r\cdot(h-u)}+\sqrt{s\cdot\left[h\cdot\alpha^2+u\cdot\left(\beta+\beta^2\right)\right]}\right\}$$

(iii) $\left\{s\cdot(h-u)\cdot\beta^2 \le r\cdot h\cdot\alpha^2 + r\cdot u\cdot\left(\beta+\beta^2\right)\right\}\wedge\left\{r\cdot h\cdot\alpha^2\le s\cdot\left(h\cdot\beta^2+u\cdot\beta\right)\right\}\Rightarrow$
$\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$

$$m^o(\alpha)=1,\quad n^o(\alpha)=1,\quad x^o(\alpha)=\sqrt{\frac{2\cdot d\cdot(r+s)}{h\cdot\alpha^2+h\cdot\beta^2+u\cdot\beta}},$$

$$K(\alpha)=\sqrt{2\cdot d\cdot(r+s)\cdot\left(h\cdot\alpha^2+h\cdot\beta^2+u\cdot\beta\right)}$$

(iv) $r\cdot h\cdot\alpha^2 > s\cdot\left(h\cdot\beta^2+u\cdot\beta\right)\Rightarrow \alpha\in(\alpha_2,1)$

$$m^o(\alpha)=1,\quad n^o(\alpha)=\alpha\cdot\sqrt{\frac{r\cdot h}{s\cdot\left(h\cdot\beta^2+u\cdot\beta\right)}},$$

$$x^o(\alpha)=\sqrt{\frac{2\cdot d\cdot r}{h\cdot\beta^2+u\cdot\beta}}$$

$$K(\alpha)=\sqrt{2\cdot d}\cdot\left[\alpha\cdot\sqrt{s\cdot h}+\sqrt{r\cdot\left(h\cdot\beta^2+u\cdot\beta\right)}\right]$$

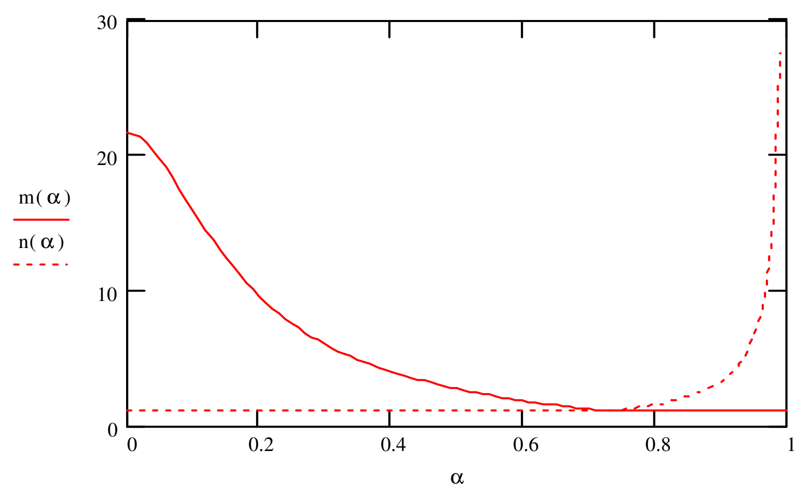
(v) $\alpha = 1$

$$m^o(1)=0,\quad n^o(1)=1,\quad x^o(1)=\sqrt{\frac{2\cdot d\cdot s}{h}}.$$

$$K(1)=\sqrt{2\cdot d\cdot s\cdot h}$$

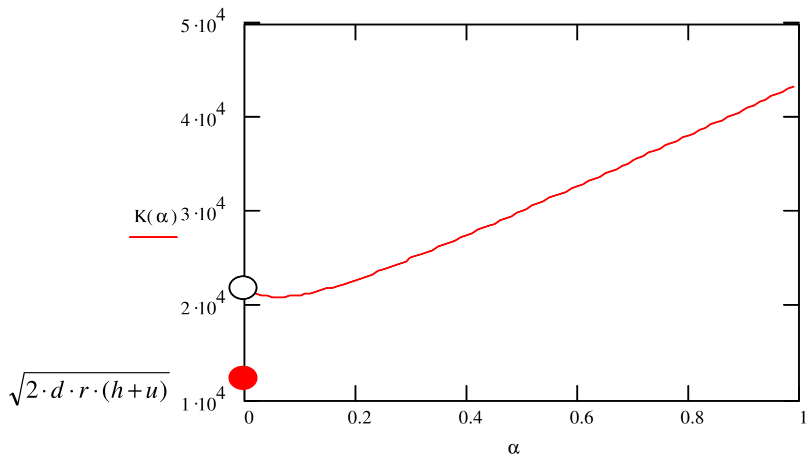
Ezt a tételt sem bizonyítjuk, mert egyszerű behelyettesítéssel az eredmények adódnak Ha $h < u$ teljesülne, akkor az (i) és (ii) feltételek melletti megoldás nem létezik, így ebben az esetben $m(\alpha)$ értéke minden egyes α-ra egy. A továbbiakban tekintsünk el ettől az esettől. Az α_1 és α_2 létezésének bizonyításától is ($0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$) eltekintünk, a Richter (1996a) dolgozatban megtalálhatóak a részletek. Arra hívjuk még fel az olvasó figyelmét, hogy a szélső értékekben, vagyis amikor a hulladékkezelési ráta nulla, vagy egy, az eredmények értelmezhetőek, amit a tétel magában foglal. Ha a hulladékkezelési ráta nulla, akkor az összes konténer visszatér javításra, így termelésre nincs szükség. Ebben a pontban a kiszámított költségfüggvény nem folytonos jobbról, tehát ott szakadása van. Amennyiben a hulladékkezelési ráta egy, akkor minden második műhelybe beérkező konténert hulladékként kezelnek, ezért nem kerül sor javításra. Egyszerű behelyettesítéssel belátható hogy ebben a pontban a költségfüggvény folytonos balról, tehát elvileg az $\alpha = 1$ helyettesítéssel a költségfüggvényből kiszámolható a minimális költség. E két esetben a minimális költség melletti feladat a tételszámokra az optimális egészértékű megoldást nyújtja. Ezen kívül bizonyos α értékekre is egészértékű lesz a folytonos megoldás a triviális $[\alpha_1, \alpha_2]$ szakaszon kívül, amikor a javítási és termelési tételszám is egyenlő eggyel.

3.1.4. ábra. A tételszámok a hulladékkezelési ráta függvényében, $\alpha \in (0,1)$



3.1.4. példa. Tekintsük újra a 3.1.2. példa adatait: $s = 1450, r = 200, h = 650, u = 5, d = 1000$. Ebben az esetben $h > u$, így a 3.1.2. tételben megadott öt eset mindegyike előfordul. Ekkor $\alpha_1 = 0,728$ és $\alpha_2 = 0,732$, tehát e két hulladékkezelési ráta között a tételszámok egyenlők eggyel, vagyis $m(\alpha) = n(\alpha) = 1$. A tételszámokat a hulladékkezelési ráta függvényében a 3.1.3. ábra mutatja. A $K(\alpha)$ költségfüggvényt a 3.1.4. ábrán mutatjuk be. Az $\alpha = 0$ pontban ez a függvény nem folytonos, a $K(0)$ értéke 161.864.

3.1.5. ábra. A $K(\alpha)$ költségfüggvény a $[0,1]$ intervallumon



Jellemezzük most a $K(\alpha)$ költségfüggvényt. Ezt a következő lemma mondja ki.

3.1.2. Lemma. A $K(\alpha)$ költségfüggvény (i) konvex a $(0,\alpha_1)$ intervallumon ($h > u$), (ii) pontosan akkor konvex a $[\alpha_1,\alpha_2]$ intervallumon, ha $4 \cdot h \cdot (h + u) \geq u^2$, (iii) konkáv a $(\alpha_2,1)$ intervallumon és folytonosan differenciálható a $(0,1)$ minden pontjában.

A lemma bizonyítását némi számolással egyszerűen megkaphatjuk. A lemmából is látható, hogy ha a $h > u$ összefüggés tartható, vagyis a termelt konténerek készlettartási költsége nagyobb, mint a javított konténereké, akkor a költségfüggvény két részből áll a $(0,1)$ intervallumon: a $(0,\alpha_2]$ intervallumban konvex, míg a $(\alpha_2,1)$ szakaszon konkáv.

A költségfüggvényre is adhatunk alsóhatárt.

3.1.3. Lemma. A következő összefüggés minden $\alpha \in [0,1]$ hulladékkezelési rátára teljesül:

$$K(\alpha) \geq \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right].$$

Bizonyítás. Induljunk ki abból, hogy

$$K(\alpha) = K\left(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha\right) =$$

$$\sqrt{2d\left\{\left[\sqrt{A(\alpha)\frac{m^o(\alpha)}{n^o(\alpha)}} - \sqrt{n^o(\alpha)\left(\frac{B(\alpha)}{m^o(\alpha)} + D(\alpha)\right)}\right]^2 + 2\sqrt{A(\alpha)\left[B(\alpha) + D(\alpha)\cdot m^o(\alpha)\right]} + C(\alpha)m^o(\alpha) + E(\alpha)\right\}} \geq$$

$$\sqrt{2d\left\{2\sqrt{A(\alpha)\cdot\left[B(\alpha) + D(\alpha)\right]} + C(\alpha) + E(\alpha)\right\}}$$

Az egyenlőtlenséget azért írhatjuk, mert a négyzetes kifejezés nemnegatív, így a gyökjel alatti kifejezést azzal csökkenthetjük. A fennmaradó rész monoton növekvő függvénye az *m(* α*)* változónak, így az egy értéket véve egy alsóbecslést kapunk a költségfüggvényre. A kapott becslés független az α megválasztásától. Az átalakításokat elvégezve, a lemma állítását nyerhetjük. Ez teljesül az intervallumunk szélső értékeire is, vagyis a nulla és egy pontokra is, amit egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetünk.

A lemma következménye az, hogy a költségfüggvényt alulról közelíthetjük egy konkáv függvénnyel, amit viszont egy lineáris függvénnyel közelíthetünk alulról:

$$K(\alpha) \geq \sqrt{2\cdot d}\cdot\left[\alpha\cdot\sqrt{s\cdot h} + \sqrt{r\cdot\left(h\cdot\beta^2 + u\cdot\beta\right)}\right] \geq \sqrt{2\cdot d}\cdot\left[\alpha\cdot\sqrt{s\cdot h} + \beta\cdot\sqrt{r\cdot(h+u)}\right].$$

Mindez azt mutatja, hogy a készletezési költségfüggvényre teljesül az alábbi összefüggés:

$$K(\alpha) \geq \min\left\{\sqrt{2\cdot d\cdot s\cdot h};\ \sqrt{2\cdot d\cdot r\cdot(h+u)}\right\},$$

amiből az következik, hogy a költségfüggvény alsó korlátja a tiszta stratégiák közül az egyik, vagyis a kereslet kielégítése csak termelésből javítás nélkül, vagy a keresletkielégítés hulladékkezelés és termelés nélkül csak javítással. Nem tűztük ki célul a készletezési költségek minimalizálását, így ezt a becslést nem tekintjük egy optimalizálási feladat megoldásának. Erre a becslésre a teljes költségek minimalizálásakor lesz szükségünk.

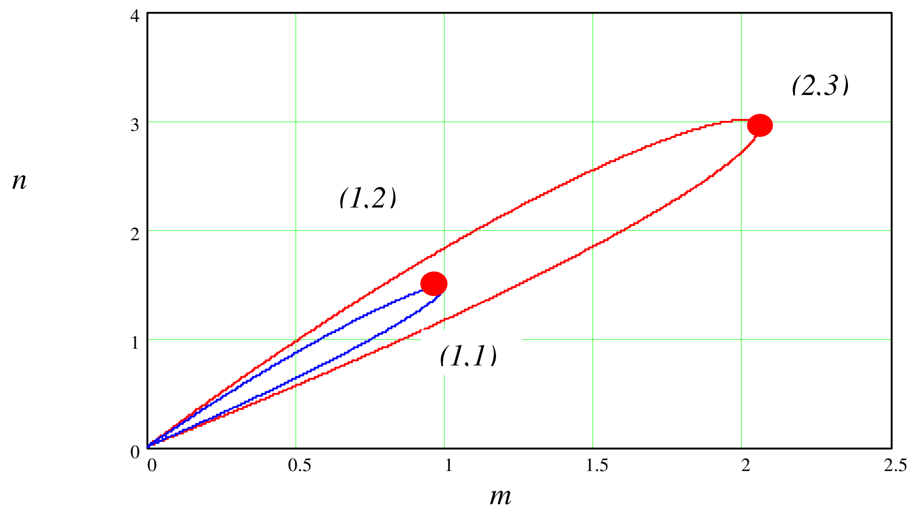
3.1.5. példa. A 3.1.4. példa esetén $K(\alpha) \geq \min\{161.864; 434.166\} = 161.864 = K(0)$, vagyis a készletezési költségek minimális értékénél minden használt konténer javításra visszakerül javításra.

3.1.4.3. Az optimális egészértékű tételszámok meghatározása

Tekintsük most mindazon α hulladékkezelési rátákat, amelyekre a folytonos megoldás nem szolgáltat egészértékű tételszámokat. A kérdés most úgy hangzik, hogy az optimális egészértékű megoldás a határvonalon fekszik-e ($n^I(\alpha) = 1$ vagy $m^I(\alpha) = 1$), vagy a megengedett tartomány belsejében ($n^I(\alpha) > 1$ és $m^I(\alpha) > 1$). A következő példa rámutat arra, hogy az optimális egészértékű megoldás a megengedett tartomány belsejébe eshet.

3.1.6. példa. Legyen ismét $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $\alpha = 0,8$ ($\beta = 0,2$), $d = 1000$. Erre az esetre a folytonos megoldást a 3. példában állítottuk elő. A folytonos tételszámok $m(0,8) = 1$ és $n(0,8) = 1,458$, amire $K(m(0,8),n(0,8),0,8) = 38.019,6$. A határvonalon fekvő megoldások $m^I{}_1(0,8) = 1$, $n^I{}_1(0,8) = 1$ és $m^I{}_2(0,8) = 1$, $n^I{}_2(0,8) = 2$. A költségfüggvény értékei: $K(m^I{}_1(0,8),n^I{}_1(0,8),0,8) = 38.234,8$ és $K(m^I{}_2(0,8),n^I{}_2(0,8),0,8) = 38.170,7$. Ugyanakkor, ha $m^o = 2$ és $n^o = 3$, akkor $K(2,3,0,8) = 38.095,7$. Mivel $K(2,3,0,8) < K(m^I{}_2(0,8),n^I{}_2(0,8),0,8) < K(m^I{}_1(0,8),n^I{}_1(0,8),0,8)$, ezért az optimális egészértékű megoldás a megengedett tartomány belsejébe esik. A tartomány belsejébe eső megoldás költsége 0,197 százalékkal alacsonyabb, mint a határvonalon fekvő megoldások közül az alacsonyabb, vagyis $m^I{}_2(0,8) = 1$, $n^I{}_2(0,8) = 2$. Az egyenlőköltség-görbékkel előállított megoldást a 3.1.6. ábra szemlélteti.

3.1.6. ábra. Egészértékű megoldás a tartomány belsejében



Nevezzük *határmegoldás*nak az optimális egészértékű megoldásnak azt a becslését, amelyre a tételszámok a folytonos megoldáshoz legközelebb eső egészértékek. Jelöljük ezeket a becsléseket $(m^b(\alpha), n^b(\alpha))$-val. A határmegoldásokat formálisan a következőképpen határozhatjuk meg:

3.1.2. Tétel. A javítási és hulladékkezelési modell határmegoldásai

(i) $(0,\alpha_1) \Rightarrow m^b(\alpha) = \left\lfloor \sqrt{\dfrac{A(\alpha)}{B(\alpha)+D(\alpha)} + \dfrac{1}{4}} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor, \quad n^b(\alpha) = 1,$

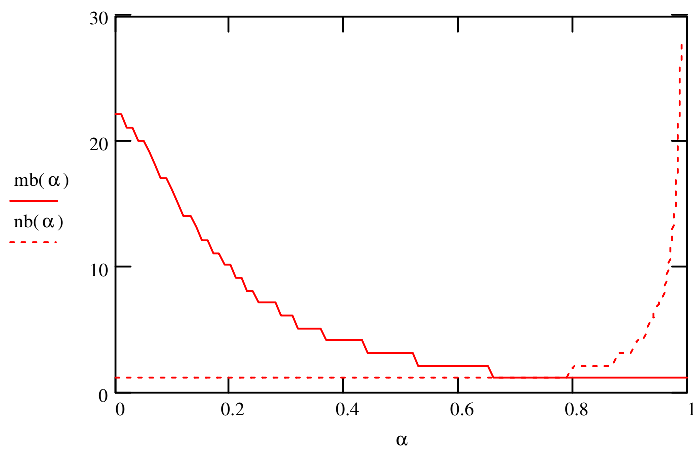
(iii) $(\alpha_2, 1) \Rightarrow m^b(\alpha) = 1, \quad n^b(\alpha) = \left\lfloor \sqrt{\dfrac{B(\alpha)}{A(\alpha)+C(\alpha)} + \dfrac{1}{4}} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor,$

ahol $\lfloor x \rfloor$ a legnagyobb x-nél kisebb egészszámot jelöli.

Ez a tétel azt mondja ki, hogy ha a folytonos megoldásban az egyik tételszám egy, akkor azt hagyjuk, mert egy egész számhoz "az van a legközelebb", de ha nem egész a másik, akkor azt „kerekítsük" lefelé, vagy felfelé, annak a függvényében, hogy melyik egészszámhoz esik közelebb. Könnyen bebizonyítható (lásd Dobos-Richter (2000)), hogy pl., ha egy $S(1, 4,4,\alpha)$ esetén az n-re a négy kisebb függvényértéket ad, mint az öt, így a

$K(1,\ 4{,}4,\alpha)$ költségértékre is. A 3.1.7. ábrán szemléltetjük a határmegoldásokat a 3.1.6. példa paramétereivel.

3.1.7. ábra. A határmegoldások a hulladékkezelési ráta függvényében



A következő lemma szükséges feltételt mond ki arra vonatkozólag, hogy az egészértékű optimum mikor lesz automatikusan határmegoldás.

3.1.4. Lemma. Tegyük fel, hogy a folytonos $(m^o(\alpha),n^o(\alpha))$ megoldás nem egészértékű. Ekkor az $(m^b(\alpha),n^b(\alpha))$ határmegoldás egyben optimális is $((m^b(\alpha),n^b(\alpha))=(m^I(\alpha),n^I(\alpha)))$, ha (i) $\alpha\in(0,\alpha_1)$ esetén $49\cdot A(\alpha)\leq 527\cdot C(\alpha)$ vagy ha (iii) $\alpha\in(\alpha_2,1)$ esetén $49\cdot B(\alpha)\leq 527\cdot D(\alpha)$.

A bizonyítást itt is elhagyjuk, csak a bizonyításban adott felső határt adjuk meg az (i) esetre, vagyis amikor a termelési tételszám nagyobb, mint egy. (Hasonló szimmetrikus becslést adhatunk a másik oldalra is.) Ekkor

$$S\left(1,n^b(\alpha),\alpha\right)\leq\frac{13}{6}\cdot\sqrt{A(\alpha)\cdot\left[B(\alpha)+D(\alpha)\right]}+C(\alpha)+E(\alpha). \qquad (3.1.6)$$

Jelölje most $S(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha)$ az optimális egészértékű megoldást, amely a megengedett tartomány belsejében feküdhet, és $S(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha)$ a határmegoldást. A kérdésünk úgy hangzik, hogy mennyi a relatív hibája a két megoldásnak.

3.1.3. Tétel. A határmegoldás relatív hibája a következő:

$$dS_I = \frac{S\left(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha\right) - S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)}{S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)} \leq \frac{1}{24}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\alpha \in (\alpha_2, 1)$, vagyis $n^b(\alpha) > 1$. Ekkor

$$S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha) \leq S(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha) - S(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha),$$

és így

$$\frac{S\left(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha\right) - S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)}{S\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)} \leq \frac{S\left(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha\right) - \left\{2 \cdot \sqrt{A(\alpha) \cdot [B(\alpha) + D(\alpha)]} + C(\alpha) + E(\alpha)\right\}}{2 \cdot \sqrt{A(\alpha) \cdot [B(\alpha) + D(\alpha)]} + C(\alpha) + E(\alpha)}$$

ahol

$$S\left(m^o(\alpha), n^o(\alpha), \alpha\right) = 2 \cdot \sqrt{A(\alpha) \cdot [B(\alpha) + D(\alpha)]} + C(\alpha) + E(\alpha) = \left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right]^2$$

A (3.1.6) becslés ismeretében: $dS_I \leq \dfrac{1}{12} \dfrac{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} \cdot \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}}{\left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right]^2}$.

Azonban egyszerű közelítéssel $\dfrac{2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} \cdot \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}}{\left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot \left(h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta\right)}\right]^2} \leq \dfrac{1}{2}$, amivel a tételt bizonyítottuk. Szimmetrikus érveléssel bizonyítható az állítás az $\alpha \in (0, \alpha_1)$, vagyis $m^b(\alpha) > 1$ esetre is.

A Dobos-Richter (2000) dolgozatban azt láttuk be, hogy a relatív hiba kisebb *1/24*-nél. A következő tételben a költségfüggvényre adunk egy becslést.

3.1.3. Tétel. A határmegoldás készletezési költségének relatív hibája a következő:

$$dK_I = \frac{K\left(m^b(\alpha), n^b(\alpha), \alpha\right) - K\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)}{K\left(m^I(\alpha), n^I(\alpha), \alpha\right)} \leq \frac{1}{48}.$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk a dK_I különbséget. Mivel

$K(m(\alpha),n(\alpha),\alpha)=\sqrt{2\cdot d\cdot S(m(\alpha),n(\alpha),\alpha)}$, ezért

$$dK_I=\frac{\sqrt{2\cdot d\cdot S\left(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha\right)}-\sqrt{2\cdot d\cdot S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}}{\sqrt{2\cdot d\cdot S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}}=$$

$$=\frac{S\left(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha\right)-S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}{\sqrt{S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}\cdot\left[\sqrt{S\left(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha\right)}+\sqrt{S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}\right]}\leq$$

$$\leq\frac{S\left(m^b(\alpha),n^b(\alpha),\alpha\right)-S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}{2\cdot S\left(m^I(\alpha),n^I(\alpha),\alpha\right)}\leq\frac{1}{48}$$

ami bizonyítja az állítást.

Amint a bizonyítás menetéből kiderült, nem csak azt láttuk be, hogy a határ- és az optimális egészértékű megoldás relatív hibája *1/48*, hanem azt is, hogy a határmegoldás és a folytonos megoldás különbsége is ennyi. A tétel azt mondja ki, hogy a határmegoldásnak és az optimális egészértékű megoldásnak a költségkülönbözete nem haladja meg a 2,1 százalékot. Ezzel kapcsolatban felmerülhet a kérdés, hogy ne álljon-e meg az optimum keresése a határmegoldásnál, amelynél az egyik tételszám egyenlő eggyel. Ezzel az eredménnyel áttérhetünk a 2. modell vizsgálatára.

Ha az optimális tételszámokat meghatároztuk, akkor a hulladékkezelési ráta ismeretében a *K(*α*)* függvényt meghatározhatjuk:

$$K^I(\alpha)=\sqrt{2\cdot d\cdot\left[A(\alpha)\cdot\frac{m^I(\alpha)}{n^I(\alpha)}+B(\alpha)\cdot\frac{n^I(\alpha)}{m^I(\alpha)}+C(\alpha)\cdot m^I(\alpha)+D(\alpha)\cdot n^I(\alpha)+E(\alpha)\right]}.$$

3.1.5. A 2. modell megoldása

A 2. modellnél feltételezzük, hogy az α hulladékkezelési ráták ismeretében adottak a tételnagysághoz tapadó változók értékei, így az egészértékű tételszámok is. A problémát ekkor a

$$G(\alpha) = K^{I}(\alpha) + R(\alpha) \rightarrow \min$$
$$\alpha \in [0,1]$$

formában írhatjuk fel. Mivel az egészértékű megoldás magasabb költséget eredményez, mint a folytonos megoldás, ezért a $G(\alpha)$ függvényre a következő becslést tehetjük:

$$G(\alpha) = K^{I}(\alpha) + R(\alpha) \geq K(\alpha) + R(\alpha).$$

A 3.1.3. lemma alapján a $K(\alpha)$ költségfüggvényre becslést végezhetünk, és az $R(\alpha)$ tételnagyságtól nem függő lineáris költségfüggvényt ismerjük. Így

$$K(\alpha) + R(\alpha) \geq \sqrt{2 \cdot d} \cdot \left[\alpha \cdot \sqrt{s \cdot h} + \sqrt{r \cdot (h \cdot \beta^2 + u \cdot \beta)}\right] + b \cdot d \cdot \alpha + k \cdot d \cdot \beta + e \cdot d \cdot \alpha ,$$

ami konkáv függvény az értelmezési tartományában. További becsléssel

$$\begin{aligned} G(\alpha) &\geq \alpha \cdot d \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot h}{d}} + b + e \right) + \beta \cdot d \cdot \left[\sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot (h+u)}{d}} + k \right] \geq \\ &\geq \min\left\{ d \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot h}{d}} + b + e \right); \quad d \cdot \left[\sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot (h+u)}{d}} + k \right] \right\} \end{aligned},$$

amivel bebizonyítottuk az

3.1.5. Tételt. Az optimumban a döntéshozó két stratégia közül választhat: $\alpha^o = 0$, vagy $\alpha^o = 1$. Ez azt jelenti, hogy a tiszta stratégiák egyike mellett (az összes termék javítása, hulladékkezelés nélkül; vagy az összes konténer letermelése javítás nélkül) lesznek a releváns költségek a legalacsonyabbak.

A hulladékkezelés e költségtényezője változtatásával lehet a vállalatok tevékenységét a környezettudatos anyaggazdálkodás irányába terelni.

3.1.7. példa. Legyen újra $s = 1450$, $r = 200$, $h = 650$, $u = 5$, $e = 100$, $b = 250$, $k = 150$, $d = 1000$. Ekkor $G(0) = d \cdot \left[\sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot (h+u)}{d}} + k \right] = 166.186$ és

$G(1) = d \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot h}{d}} + b + e \right) = 393.417$, vagyis optimális minden használt konténert újrafeldolgozni, $\alpha^o = 0$. A gazdasági sorozatnagyság értéke *25* darab.

3.1.6. Összefoglalás

A dolgozatban egy javítási és hulladékkezelési modellt mutattam be. Először a probléma optimális készletezési paramétereit határoztam meg adott hulladékkezelési ráta mellett, majd a hulladékkezelési rátát is döntési változónak tekintve egy lineáris költségekkel kiterjesztett modellben beláttam, hogy költségszempontból a tiszta stratégiák dominánsak. Ennek az lehet a praktikus következménye, hogy a költségek változásával lehet a tisztán gazdasági racionalitás alapján álló vállalatokat környezettudatosabb gazdálkodásra (újrafelhasználásra) bírni.

3.2. Kétraktáras modell újrafeldolgozással és hulladékkezeléssel

3.2.1. Bevezetés

A termékhelyreállítással kibővített készletmodellek az optimális tételnagyság klasszikus modellje természetes általánosításának tekinthetőek. A klasszikus tételnagyság modellek csak egy terméket vizsgálnak. A termékhelyreállítási modellek nehézsége abban rejlik, hogy két raktárat és két különböző terméket elemeznek. Ennek a résznek az a célja, hogy a javasolt visszutas készletmodellek közül egyet elemezzen, nevezetesen Teunter (2001) modelljét.

Az említett munkában a szerző azt állítja, hogy az újrafeldolgozási és termelési tételszámok közül az egyiknek meg kell egyeznie eggyel egy termelési-újrafeldolgozási ciklusban. Ciklus alatt kizárólag egymást követő tevékenységeket értünk, ahol a ciklusokban a tételnagyságok azonosak.

Először a javasolt modell költségfüggvényét szerkesztjük meg, mert a szerző negligálta az általánosított függvény megalkotását. A probléma megoldása után bemutatunk egy olyan példát, amikor a termelési és újrafeldolgozási tételszámok szigorúan nagyobbak, mint egy. Ezzel az ellenpéldával megmutatjuk, hogy a szerző által bemutatott grafikus „bizonyítás“ nem tökéletes. Valójában Teunter (2001) csak azt bizonyította be, hogy nem lehet optimális egy olyan megoldás, ahol termelési és újrafeldolgozási tételszámok egymáshoz nem relatív prímek. Egy másik feltételezése az volt, hogy a termelt jószág készletezési költsége nagyobb, mint az újrafeldolgozotté, ugyanis a termelés fajlagos költség valószínűleg magasabb, mint az újrafeldolgozásé. A modell hiányosságait Dobos-Richter (1999a) dolgozatukban korrigálták.

Először a modell paramétereit és működését mutatjuk be, majd szekvenciálisan kizárva a döntési változókat az optimális megoldást állítjuk elő.

3.2.2. Paraméterek és a rendszer működése

A modellben a következő tevékenységeket vezetjük be:

- újrafeldolgozás,
- hulladékkezelés és
- termelés.

Egy ciklusban a fenti tevékenységek követik egymást fix újrafeldolgozási és termelési tételnagyságokkal. A tervezés időhorizontja csak egy ciklus.

A döntéshozó célja a költségek minimalizálása, amikor a termelési és újrafeldolgozási tételnagyságok és tételszámok, valamint az újrafelhasználási ráta meghatározása cél. A költségfüggvény a költségek két nagyobb csoportjából áll: a klasszikus tételnagyság modell átállítási fixköltségei és a készlettartási költségek, valamint a tételnagyságtól független lineáris költségek, mint az újrafeldolgozási, termelési és hulladékkezelési költségek.

A modell jelölései a következőek.
A rendszer paraméterei:

- r visszatérési ráta ($0 \leq r \leq 1$),
- λ keresleti ráta.

Költségparaméterek:

- K_m a termelés átállítási költsége,
- K_r az újrafeldolgozás átállítási költsége,
- h_m egységnyi új termék előállítási költsége,
- h_r egységnyi újrafeldolgozott termék előállítási költsége,
- h_n egységnyi visszatért használt termék tartási költsége,
- c_m termelési egységköltség,
- c_r újratermelési egységköltség,
- c_d egységnyi használt termék hulladékkezelési költsége.

Döntési változók:

- Q_m termelési tételnagyság,
- M a termelési tételek száma, pozitív egész,
- Q_r újratermelési tételnagyság,
- R az újrafeldolgozási tételek száma, pozitív egész,
- T a termelési-újratermelési ciklus hossza,
- u újrafelhasználási ráta ($0 \le u \le r$).

Feltételezzük, hogy az összes paraméter és döntési változó nemnegatív szám. A hulladékkezelési költség lehetne negatív (c_d), ami azt jelentené, hogy a visszavett használt terméket a vállalat továbbértékesíti. Ez azt is jelenthetné, hogy az újrafeldolgozást a vállalat beszünteti, amivel itt nem kívánunk foglalkozni. A készlettartási költségeket (h_m, h_r és h_n) a szokásos módon értelmezzük, azaz a beszerzési költség és a hitelkamatláb szorzataként. A termelési és újratermelési egységköltség tartalmazza az egy darab termékre eső közvetlen anyag- és bérköltséget. Tételezzük még fel, hogy

$$c_m + c_d > c_r,$$

vagyis egy új termék egységének termelése és annak a hulladékként történő kezelése legyen drágább, mint az újratermelés. Ez azt jelenti, hogy az újratermelés gazdasági értelemben hatékonyabb, mint a termelés és utána ezen termékek hulladékkezelése. A modell matematikai formáját állítjuk most elő.

Először az állomány-folyam mérlegeket írjuk fel a végtermékek és a használt termékek készleteire egy ciklusban. Az (1) egyenlet azt mutatja, hogy az $M \cdot Q_m$ megtermelt és $R \cdot Q_r$ újrafeldolgozott termékek összegének fedni kell a termék iránti ciklusbeli $\lambda \cdot T$ keresletet. A (2) mérlegegyenlet szerint a visszatért termékekből $R \cdot Q_r$-t újrafeldolgoznak, amiből aztán végtermék lesz, vagy $(r-u) \cdot \lambda \cdot T$ mennyiséget hulladékként kezelnek. A modell ciklusbeli anyagáramlási folyamatát a 3.2.1. ábrán szemléltetjük.

$$M \cdot Q_m + R \cdot Q_r = \lambda \cdot T \qquad (3.2.1)$$

$$R{\cdot}Q_r + (r\text{-}u)\cdot \lambda{\cdot}T = r{\cdot}T \tag{3.2.2}$$

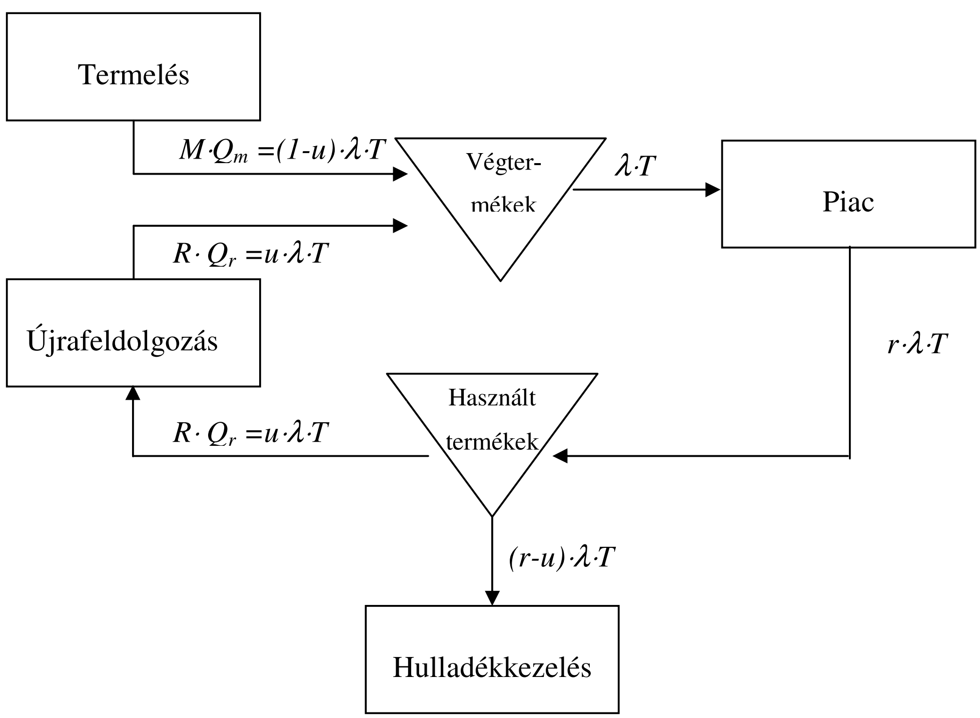
Az (1) és (2) lineáris rendszerből két egymástól független egyenletet kapunk a termelési és újrafeldolgozási tételnagyságokra:

$$M{\cdot}Q_m = (1 - u){\cdot}\lambda{\cdot}T \tag{3.2.3}$$

és

$$R{\cdot}Q_r = u{\cdot}\lambda{\cdot}T. \tag{3.2.4}$$

3.2.1. ábra. Anyagáramlás a modellben



Ha az újrafelhasználási ráta egyenlő nullával, azaz u=0, akkor az újratermelési tételnagyság egyenlő nullával, vagyis $Q_r=0$ a (3.2.4) egyenletben. Ez azt jelenti, hogy minden visszatért használt terméket hulladékként kezelnek, és nincs a rendszerben újrafeldolgozás, ami azt jelenti, hogy a klasszikus tételnagyság modellel van dolgunk.

Egy másik érdekes eset az, ha az összes viszatérő használt terméket újrafeldolgozzák, azaz ha a visszatérési ráta egyenlő az újrafelhasználási rátával, $u=r$. Ez az eset arra példa, amikor nincs hulladékkezelés, amint az Schrady (1967) modelljében is történik, és a modell készletezési része ekkor megegyezik Schrady (1967) modelljével. A (3.2.3) és (3.2.4) azonosságokra szükségünk lesz a költségfüggvény megszerkesztésénél.

3.2.3. A költségfüggvények megszerkesztése

Állítsuk most elő a teljes költségfüggvényt. Ezt két lépésben tesszük meg. Az első lépésben a $H(Q_m,Q_r,T,M,R,u)$ készlettartási költséget szerkesztjük meg a vég- és használt termékekre. A második lépésben a lineáris termelési, újrafeldolgozási és hulladékkezelési $L(Q_m,Q_r,T,M,R,u)$ költségeket konstruáljuk meg.

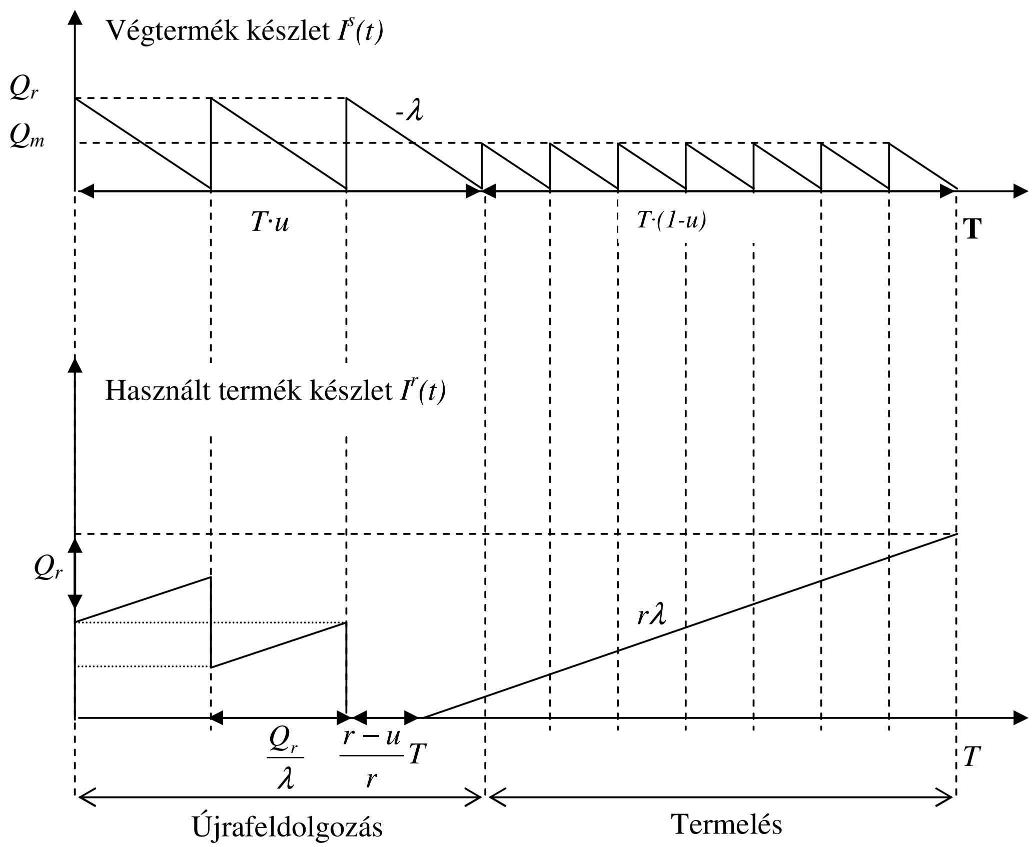
3.2.1. Lemma: A ciklusbeli készlettartási költségek összege

$$H(Q_m,Q_r,T,M,R,u)=R\cdot h_r\cdot\frac{Q_r^2}{2\lambda}+M\cdot h_m\cdot\frac{Q_m^2}{2\lambda}+h_n\cdot\frac{Q_r^2}{2\lambda}\cdot\left\{R^2\cdot\frac{1-r}{r}+R\right\}.$$

Bizonyítás. A modell készletezési stratégiáját a 3.2.2. ábrán mutatjuk be. Ezen ábra alapján számítjuk ki a költség függvényt. Tegyük fel, hogy a ciklusbeli készletek készletszintjének nagysága $I^s(t)$ a végtermékeknél és $I^r(t)$ a használt termékekre, $0\le t\le T$. A készletezési költségeket a görbe alatti területtel azonosítjuk a matematikai készlegazdálkodásban, vagyis

$$H(Q_m,Q_r,M,R,u)=h_r\cdot\int_0^{T\cdot u}I^s(t)dt+h_m\cdot\int_{T\cdot u}^{T}I^s(t)dt+h_n\cdot\int_0^{T}I^r(t)dt\,.$$

3.2.2. ábra Készletszintek a modellben (*R*=3, *M*=7)



Most használjuk ki a készletezési politika azon tulajdonságát, hogy a végtermékek és használt termékek összege monoton csökkenő, lineaáris és folytonos függvénye az időnek az újrafeldolgozási ciklus alatt. Ez abból következik, hogy a használt termékek feldolgozásakor korábban gyártott termékeket tesznek újraeladhatóvá, de csak a kereslet *r* hányada tér vissza, így a rendszerben lévő és végtermékként kezelhető cikkek száma csökken. Ezen meggondolás alapján a termelési-újrafeldolgozási ciklust két alciklusra bonthatjuk, lásd a 3.2.2. ábrán bemutatott öszefüggéseket:

(1) A keresletet kizárólag újrafeldolgozásból elégítik ki, és az újrafelhasználható termékek készlete pozitív. Ezen intervallum hossza egyenlő $T \cdot u - \frac{Q_r}{\lambda}$ -val.

(2) A keresletet az utolsó újratermelési tételnagyságból és a termelésből elégítik ki, és a használt termékek készlete monoton nemcsökkenő. Az újrafeldolgozási tételt $\frac{Q_r}{\lambda}$ hosszúságú intervallumon használják. Ezen alciklus hossza $T\cdot(1-u)+\frac{Q_r}{\lambda}$.

Az alciklusok segítségével a következő módon számíthatók ki a készlettartási költségek:

$$H(Q_m, Q_r, M, R, u) =$$
$$(h_r - h_n)\int_0^{T\cdot u-\frac{q_r}{\lambda}} I^s(t)dt + h_r\int_{T\cdot u-\frac{q_r}{\lambda}}^{T\cdot u} I^s(t)dt + h_m\int_{T\cdot u}^{T} I^s(t)dt + h_n\int_0^{T\cdot u-\frac{q_r}{\lambda}}\left[I^s(t)+I^r(t)\right]dt + h_n\int_{T\cdot u-\frac{q_r}{\lambda}}^{T} I^r(t)dt.$$

Öt integrált kell kiszámítanunk, de ezek mindegyike egyszerű lineáris függvények görbe alatti területe. Az első integrál R-1 darab újrafeldolgozási tételből áll. Ezek a költségek a következők: $(h_r-h_n)\cdot\int_0^{T\cdot u-\frac{q_r}{\lambda}} I^s(t)dt = (R-1)\cdot(h_r-h_n)\cdot\frac{Q_r^2}{2\lambda}$. A második integrál csak egy újrafeldolgozási tételből áll, ami $h_r\cdot\int_{T\cdot u-\frac{q_r}{\lambda}}^{T\cdot u} I^s(t)dt = h_r\cdot\frac{Q_r^2}{2\lambda}$. A harmadik érték a termelési tételek készlettartási költsége, ami M darab tételből áll: $h_m\cdot\int_{T\cdot u}^{T} I^s(t)dt = M\cdot h_m\cdot\frac{Q_m^2}{2\lambda}$. A negyedik integrál kiszámítása egy kissé bonyolult. Az előbbiekben már sejtettük, hogy az újrafeldolgozási ciklusban a készletszintek $I^s(t)+I^r(t)$ összege mnoton csökkenő lineáris függvény. Ezen lineáris függvény iránytangense $(1-r)\cdot\lambda$. Az $T\cdot u-\frac{Q_r}{\lambda}$ időpontban a ezen függvény értéke Q_r. Ezzel a feltételezéssel az integrál értéke a következő lesz: $h_n\cdot\int_0^{T\cdot u-\frac{q_r}{\lambda}}\left[I^s(t)+I^r(t)\right]dt = h_n\cdot\left[Q_r+(1-r)\cdot\frac{\lambda}{2}\cdot\left(T\cdot u-\frac{Q_r}{\lambda}\right)\right]\cdot\left(T\cdot u-\frac{Q_r}{\lambda}\right)$. Végül az utolsó integrál $h_n\cdot\int_{T\cdot u-\frac{q_r}{\lambda}}^{T} I^r(t)dt = h_n\cdot r\cdot\frac{\lambda}{2}\cdot\left(\frac{1-r}{r}\cdot T\cdot u+\frac{Q_r}{\lambda}\right)^2$.

Összegezve a kapott öt integrált elemi átalakításokkal megkapjuk a lemma állítását. Az átalakításoknál felhasználtuk a (4) egyenletet a $T \cdot u = \dfrac{R \cdot Q_r}{\lambda}$ formában.

A termelési, újrafeldolgozási és hulladékkezelési lineáris költség egyszerűen meghatározható:

$$L(Q_m,Q_r,T,M,R,u) = c_m \cdot M \cdot Q_m + c_r \cdot R \cdot Q_r + c_d \cdot \lambda \cdot T \cdot (r-u) =$$
$$T \cdot \lambda \cdot \left[u \cdot \left(c_r - c_m - c_d\right) + \left(c_m + c_d \cdot r\right)\right].$$

Most a $C_a(Q_m,Q_r,T,M,R,u)$ átlagköltségfüggvényt határozzuk meg, a teljes készlettartási és átállítási költségek és a lineáris költségek összegét osztva a ciklus hosszával :

$$C_a\left(Q_m,Q_r,T,M,R,u\right) =$$
$$= \frac{R \cdot K_r + R \cdot h_r \cdot \dfrac{Q_r^2}{2\lambda} + M \cdot K_m + M \cdot h_m \cdot \dfrac{Q_m^2}{2\lambda} + h_n \cdot \dfrac{Q_r^2}{2\lambda} \cdot \left\{R^2 \cdot \dfrac{1-r}{r} + R\right\}}{T} +$$
$$+ u \cdot \lambda \cdot \left(c_r - c_m - c_d\right) + \lambda \cdot \left(c_m + c_d \cdot r\right)$$

Ez a probléma az alábbi vegyes folytonos-egészértékű nemlineáris programozási feladathoz vezet:

$$\left.\begin{array}{l} C_a\left(Q_m,Q_r T,M,R,u\right) \to \min \\ \\ M \cdot Q_m = (1-u) \cdot \lambda \cdot T, \\ R \cdot Q_r = u \cdot \lambda \cdot T, \\ 0 \le u \le r, \\ Q_m \ge 0,\ Q_r \ge 0,\ T > 0,\ M, R \text{ pozitív egészek.} \end{array}\right\} \qquad \text{(P4)}$$

Mielőtt megoldanánk a problémát, felhívjuk a figyelmet arra, hogy a (3.2.3) és (3.2.4) egyenletekből két változót kifejezve csökkenthetjük a változók számát. Azonban az R és M egészértékűsége miatt azokat nem érdemes kifejezni.

3.2.4. A modell megoldása

Ebben a részben megoldjuk a (P4) problémát. A (3.2.3) és (3.2.4) egyenletekből fejezzük ki a termelési és újrafeldolgozási tételeket $Q_m = \frac{(1-u)\cdot\lambda\cdot T}{M}$, és $Q_r = \frac{u\cdot\lambda\cdot T}{R}$.

A behelyettesítés után az alábbi (P4^R) optimalizálási feladat áll elő:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{R\cdot K_r + M\cdot K_m}{T} + T\cdot\left[\frac{h_r+h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{R} + \frac{h_m}{2}\cdot(1-u)^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{M} + \frac{h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)\right] \\ +u\cdot\lambda\cdot(c_r - c_m - c_d) + \lambda\cdot(c_m + c_d\cdot r) \rightarrow \min \\ \\ 0 \le u \le r, \\ T > 0, \\ M, R \text{ pozitív egészek.} \end{array}\right\} \quad (\mathrm{P4}^{\mathrm{R}})$$

3.2.4.1. Az optimális ciklusidő meghatározása

A megmaradt költségfüggvény konvex a ciklusidőben, ezért az ciklusidő optimális hosszát könnyen meghatározhatjuk a megmaradt változók függvényében:

$$T^o(M,R,u) = \sqrt{\frac{R\cdot K_r + M\cdot K_m}{\frac{h_r+h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{R} + \frac{h_m}{2}\cdot(1-u)^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{M} + \frac{h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)}}.$$

Ezt a kifejezést a költségfüggvénybe visszahelyettesítve a következő $C_I(R,M,u)$ összköltségfüggvényt kapjuk:

$$\begin{aligned} &C_I(M,R,u) = \\ &\sqrt{(R\cdot K_r + M\cdot K_m)\left[\frac{h_r+h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{R} + \frac{h_m}{2}\cdot(1-u)^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{M} + \frac{h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)\right]} + \\ &+u\cdot\lambda\cdot(c_r - c_m - c_d) + \lambda\cdot(c_m + c_d\cdot r) \end{aligned}$$

A $C_I(R,M,u)$ költségfüggvényt az alábbi formában írhatjuk

$$C_I(M,R,u)=$$
$$\sqrt{2\lambda\left(A(u)\frac{R}{M}+B(u)\frac{M}{R}+C(u)R+D(u)M+E(u)\right)}+\lambda u\left(c_r-c_m-c_d\right)+\lambda\left(c_m+c_d r\right) \qquad (3.2.5)$$

ahol

$$A(u)=K_r\cdot h_m\cdot(1-u)^2,\ B(u)=K_m\cdot(h_r+h_n)\cdot u^2,\ C(u)=K_r\cdot h_n\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)\cdot u^2,$$
$$D(u)=K_m\cdot h_n\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)\cdot u^2,\ E(u)=K_r\cdot(h_r+h_n)\cdot u^2+K_m\cdot h_m\cdot(1-u)^2 \quad ,$$

és az R and M tételszámok pozitív egészek, és $0 \le u \le r$.

A termelési és újrafeldolgozási tételnagyságok a megmaradt változók függvényében

$$Q_m(M,R,u)=\frac{(1-u)\cdot\lambda}{M}\cdot\sqrt{\frac{R\cdot K_r+M\cdot K_m}{\frac{h_r+h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{R}+\frac{h_m}{2}\cdot(1-u)^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{M}+\frac{h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)}}$$

és

$$Q_r(M,R,u)=\frac{u\cdot\lambda}{R}\cdot\sqrt{\frac{R\cdot K_r+M\cdot K_m}{\frac{h_r+h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{R}+\frac{h_m}{2}\cdot(1-u)^2\cdot\lambda\cdot\frac{1}{M}+\frac{h_n}{2}\cdot u^2\cdot\lambda\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)}}\,.$$

A $C_I(R,M,u)$ fügvény kvázi-konvex az R és M változókban és konvex u-ban. Ez a tulajdonság garantálja az optimális megoldás létezését, amint azt a függelékben is bebizonyítottuk. Vezessük most be az $S(R,M,u)$ függvényt:

$$S(R,M,u)=A(u)\cdot\frac{R}{M}+B(u)\cdot\frac{M}{R}+C(u)\cdot R+D(u)\cdot M+E(u)\,.$$

A folytonos optimális *R* és *M* tételszámokat keressük. Ez a függvény négyzetgyök alatt szerepel az (5) költségfüggvényben. Alkalmazva a függelék eredményeit, tudjuk, hogy a *A(u), B(u), C(u), D(u)* és *E(u)* függvények pozitívak, ami megkönnyíti az ott szerepeltek felhasználását.

3.2.4.2. A folytonos tételszámok meghatározása

Mivel $A(u), B(u), C(u), D(u), E(u) > 0$ teljesül, így igaz a következő tétel.

3.2.1. Tétel: Az (3.2.5) feladat optimális folytonos megoldása *R(u)*-ra és *M(u)*-ra, valamint a hozzájuk tartozó *C(u)* költségfüggvény

(i) $u \le \max\left\{\dfrac{\sqrt{K_r \cdot h_m}}{\sqrt{K_r \cdot h_m} + \sqrt{K_m \cdot \left(h_r + h_n \cdot \dfrac{1}{r}\right)}},\quad r\right\}$,

$$R(u) = 1,\ M(u) = \frac{1-u}{u} \cdot \sqrt{\frac{K_r \cdot h_m}{K_m \cdot \left(h_r + h_n \cdot \dfrac{1}{r}\right)}},$$

$$C(u) = \sqrt{2 \cdot \lambda} \cdot \left[(1-u) \cdot \sqrt{K_m \cdot h_m} + u \cdot \sqrt{K_r \cdot \left[h_r + h_n \cdot \frac{1}{r}\right]}\right] +$$
$$+ u \cdot \lambda \cdot (c_r - c_m - c_d) + \lambda \cdot (c_m + c_d \cdot r)$$

(ii) $\dfrac{\sqrt{K_r \cdot h_m}}{\sqrt{K_r \cdot h_m} + \sqrt{K_m \cdot \left(h_r + h_n \cdot \dfrac{1}{r}\right)}} \le u \le \dfrac{\sqrt{K_r \cdot h_m}}{\sqrt{K_r \cdot h_m} + \sqrt{K_m \cdot (h_r + h_n) - K_r \cdot h_n \cdot \left(\dfrac{1}{r} - 1\right)}}$,

$R(u) = 1$, $M(u) = 1$,

$$C(u) = \sqrt{2 \cdot \lambda \cdot (K_r + K_m) \cdot \left[h_m \cdot (1-u)^2 + (h_r + h_n) \cdot u^2 + h_n \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) \cdot u^2\right]} +$$
$$+ u \cdot \lambda \cdot (c_r - c_m - c_d) + \lambda \cdot (c_m + c_d \cdot r)$$

(iii) $$\frac{\sqrt{K_r \cdot h_m}}{\sqrt{K_r \cdot h_m} + \sqrt{K_m \cdot (h_r + h_n) - K_r \cdot h_n \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right)}} \le u \le r \,,$$

$$R(u) = u \cdot \sqrt{\frac{K_m \cdot (h_r + h_n)}{K_r \cdot h_m \cdot (1-u)^2 + K_r \cdot h_n \cdot \frac{1-r}{r} \cdot u^2}} \,, M(u) = 1,$$

$$C(u) = \sqrt{2 \cdot \lambda} \cdot \left[u \cdot \sqrt{K_r \cdot (h_r + h_n)} + \sqrt{K_m \cdot \left[h_m \cdot (1-u)^2 + h_n \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) \cdot u^2 \right]} \right] + \\ + u \cdot \lambda \cdot (c_r - c_m - c_d) + \lambda \cdot (c_m + c_d \cdot r)$$

A $C(u)$ költségfüggvényt írható egységesebb formában is:

$$C(u) = \begin{cases} \sqrt{2 \cdot \lambda} \cdot \left[(1-u) \cdot \sqrt{K_m \cdot h_m} + u \cdot \sqrt{K_r \cdot \left(h_r + h_n \cdot \frac{1}{r} \right)} \right] + \\ + u \cdot \lambda \cdot (c_r - c_m - c_d) + \lambda \cdot (c_m + c_d \cdot r) & u \le f_1(r) \\ \sqrt{2 \cdot \lambda \cdot (K_r + K_m) \cdot \left[h_m \cdot (1-u)^2 + (h_r + h_n) \cdot u^2 + h_n \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) \cdot u^2 \right]} + \\ + u \cdot \lambda \cdot (c_r - c_m - c_d) + \lambda \cdot (c_m + c_d \cdot r) & f_1(r) \le u \le f_2(r) \\ \sqrt{2 \cdot \lambda} \cdot \left[u \cdot \sqrt{K_r \cdot (h_r + h_n)} + \sqrt{K_m \cdot \left[h_m \cdot (1-u)^2 + h_n \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) \cdot u^2 \right]} \right] + \\ + u \cdot \lambda \cdot (c_r - c_m - c_d) + \lambda \cdot (c_m + c_d \cdot r) & f_2(r) \le u \le r \end{cases}$$

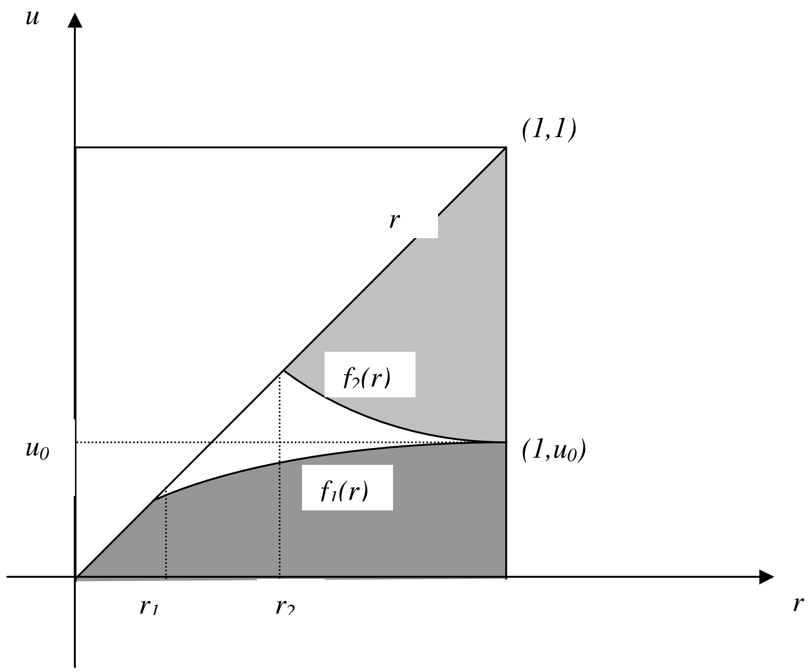
ahol

$$f_1(r) = \max \left\{ \frac{\sqrt{K_r \cdot h_m}}{\sqrt{K_r \cdot h_m} + \sqrt{K_m \cdot \left(h_r + h_n \cdot \frac{1}{r} \right)}}, \quad r \right\},$$

és

$$f_2(r)=\frac{\sqrt{K_r\cdot h_m}}{\sqrt{K_r\cdot h_m}+\sqrt{K_m\cdot(h_r+h_n)-K_r\cdot h_n\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)}}.$$

3.2.3. ábra. A lehetséges *u*-k és *r*-ek halmazai



Ábrázoljuk most az $f_1(r)$ és $f_2(r)$ függvényeket a koordináta-rendszerben. Ezzel megkapjuk, hogy milyen *r* visszatérési ráták esetén értelmezhetőek a folytonos megoldások. A függvények azon pontokat tartalmazzák, amikor a tételszámok egyenlőek eggyel (lásd 3.2.3. ábra). Azonnal megjegyezhezhetjük, hogy ha a visszatérési ráta kisebb r_1-nél, akkor csak az (i) pontban leírt költségfüggvény fordul elő, és az újrafeldolgozás tételszáma egy A költségfüggvény ilyen esetben lineáris függvénye a visszatérési rátának. Az r_1 és r_2 között az (i) és (ii) esetek fordulhatnak elő, végül ha a visszatérési ráta nagyobb r_2-nél, akkor minden eset előfordul. E két pontot numerikusan is kiszámíthatjuk az $f_1(r) = r$, illetve az $f_2(r) = r$ egyenletek *r*-re történő megoldásával. Meg kell jegyeznünk, hogy a *C(u)* költségfüggvény minden *r* visszatérési rátára könvex függvény, amit a következő lemmában mondunk ki.

3.2.2. Lemma: A *C(u)* költségfüggvény *u*-ban kétszer folytonosan differenciálható, és az *u* felhasználási ráta konvex függvénye.

A lemmát nem bizonyítjuk, mert egyszerű differenciálással belátható. A következőkben az optimális felhasználási rátát határozzuk meg.

3.2.4.3. A költségoptimális felhasználási ráta kiszámítása

Utolsó lépésben az u felhasználási ráta szerinti költségminimumot számítjuk ki, és vizsgáljuk a paraméterektől való függést. Ehhez először tegyünk egy feltételezést:

$$h_m \cdot (1-r_2) > h_r \cdot r_2 + h_n.$$

Ez a feltevés azt mutatja, hogy a termelésből származó új termék egységnyi készlettartási költsége magasabb, mint a használt termék készletezése, majd új termékként történő készlettartása. Ezt az r_2 visszatérési rátára értelmezzük. Ez az a legnagyobb visszatérési ráta, amelyre a termelési és újratermelési tételek száma megegyezik eggyel. Az összefüggés azt fejezi ki, hogy az újrafelhasználás a készlettartás szintjén is gazdaságosabb.

A feladat, amelyet meg kell oldanunk a következő:

$$\min_{0 \le u \le r} C(u).$$

A probléma megoldását három esetre bontjuk aszerint, hogy az r visszatérési ráta melyik intervallumba esik.

(i) $0 \le r \le r_1$

Ekkor a $C(u)$ költségfüggvény a következő alakban előálló lineáris függvény

$$\begin{aligned} C(u) = u \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot K_r \cdot \left(h_r + h_n \cdot \frac{1}{r} \right)} - \sqrt{2 \cdot K_m \cdot h_m} + \sqrt{\lambda} \cdot (c_r - c_m - c_d) \right] + \\ + \sqrt{2 \cdot \lambda \cdot K_m \cdot h_m} + \lambda \cdot (c_m + c_d \cdot r) \end{aligned}.$$

Könnyen kiszámítható az optimális felhasználási hányad:

$$u^o = \begin{cases} 0 & r < \dfrac{2 \cdot K_r \cdot h_n}{\left[\sqrt{\lambda} \cdot (c_m + c_d - c_r) + \sqrt{2 \cdot K_m \cdot h_m}\right]^2 - 2 \cdot K_r \cdot h_r} \\ r & \dfrac{2 \cdot K_r \cdot h_n}{\left[\sqrt{\lambda} \cdot (c_m + c_d - c_r) + \sqrt{2 \cdot K_m \cdot h_m}\right]^2 - 2 \cdot K_r \cdot h_r} \le r \le r_1 \end{cases}.$$

Az optimális hányad azt mutatja, hogy viszonylag alacsony visszatérési hányad esetén nem érdemes az újrafelhasználással foglalkozni, gazdaságosabb a hulladékkezelés.

(ii) $r_1 < r \le r_2$

Ekkor a $C(u)$ költségfüggvény két részből áll.

$$C(u) = \begin{cases} \sqrt{2 \cdot \lambda} \cdot \left[(1-u) \cdot \sqrt{K_m \cdot h_m} + u \cdot \sqrt{K_r \cdot \left(h_r + h_n \cdot \dfrac{1}{r}\right)}\right] + \\ + u \cdot \lambda \cdot (c_r - c_m - c_d) + \lambda \cdot (c_m + c_d \cdot r) & 0 \le u \le f_1(r) \\ \sqrt{2 \cdot \lambda \cdot (K_r + K_m) \cdot \left[h_m \cdot (1-u)^2 + (h_r + h_n) \cdot u^2 + h_n \cdot \left(\dfrac{1}{r} - 1\right) \cdot u^2\right]} + \\ + u \cdot \lambda \cdot (c_r - c_m - c_d) + \lambda \cdot (c_m + c_d \cdot r) & f_1(r) \le u \le r \end{cases}.$$

Mivel a $C(u)$ költségfüggvény konvex, ezért elegendő azt megvizsgálni, hogy az r pontban a függvény növekvő, vagy csökkenő-e. A feltevést kissé átrendezve azt kapjuk, hogy

$$r \le r_2 < \frac{h_m - h_n}{h_m + h_r},$$

ami azt jelenti, hogy a költségfüggvény monoton csökkenő, így $u^o = r$, vagyis minden visszérkező terméket gazdaságos ilyen visszaérkezési hényad mellett újratermelni.

(iii) $r_2 < r \le 1$

Ebben az esetben a teljes költségfüggvényt vizsgáljuk:

$$
C(u)=\begin{cases}
\sqrt{2\cdot\lambda}\cdot\left[(1-u)\cdot\sqrt{K_m\cdot h_m}+u\cdot\sqrt{K_r\cdot\left(h_r+h_n\cdot\frac{1}{r}\right)}\right]+ \\ +u\cdot\lambda\cdot(c_r-c_m-c_d)+\lambda\cdot(c_m+c_d\cdot r) & u\le f_1(r) \\
\sqrt{2\cdot\lambda\cdot(K_r+K_m)\cdot\left[h_m\cdot(1-u)^2+(h_r+h_n)\cdot u^2+h_n\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)\cdot u^2\right]}+ \\ +u\cdot\lambda\cdot(c_r-c_m-c_d)+\lambda\cdot(c_m+c_d\cdot r) & f_1(r)\le u\le f_2(r) \\
\sqrt{2\cdot\lambda}\cdot\left[u\cdot\sqrt{K_r\cdot(h_r+h_n)}+\sqrt{K_m\cdot\left[h_m\cdot(1-u)^2+h_n\cdot\left(\frac{1}{r}-1\right)\cdot u^2\right]}\right]+ \\ +u\cdot\lambda\cdot(c_r-c_m-c_d)+\lambda\cdot(c_m+c_d\cdot r) & f_2(r)\le u\le r
\end{cases}
$$

Újra azzal a gondolatmenettel járunk el, mint az előbbi pontban, tehát az r pontban tekintjük a költségfüggvény monotonitását, de csak a készlettartási költségekre, mert a lineáris költségek monoton csökkenését már feltételeztük. Differenciáljuk a készlettartási költségeket az újrafelhasználási hányad függvényében:

$$
C'(r)=\sqrt{2\cdot\lambda\cdot K_r\cdot(h_r+h_n)}-\sqrt{2\cdot\lambda\cdot K_m}\cdot\frac{\sqrt{1-r}\cdot(h_m-h_n)}{\sqrt{[h_m\cdot(1-r)+h_n\cdot r]}}.
$$

Ez a derivált függvény r-ben monoton csökkenő, amiről könnyen meggyőződhetünk. Mivel $C'(r_2) > C'(r)$, ezért teljesül az is, hogy $C'(r) < 0$, vagyis a függvény valóban monoton csökkenő u-ban. Tehát ezen az intervallumon is az optimális felhasználási hányad: $u^o = r$.

3.2.5. Összefoglalás

A dolgozat egy készletmodellt vizsgált. A kérdés az volt, hogy milyen optimális tételnagyságok és felhasználási hányad mellett lesznek a költségek a legkisebbek. Az optimum azt mutatja, hogy az adott feltételek mellett - azaz az egységnyi termelési és hulladékkezelési költségek összege nagyobb, mint az újratermelési költségek, valamint a gyártott termékek készlettartási költsége nagyobb, mint a használt és újratermelt termékek tartási költsége - annak függvényében, hogy mekkora a visszérkezési hányad, két esetet különböztetünk meg. Ha a visszaérkezési hányad nagyon alacsony, akkor nem érdemes újrafelhasználni, hanem gazdaságosabb minden visszérkező terméket hulladékként kezelni. Egy magasabb visszaérkezési hányad esetén azonban már minden visszérkező terméket gazdaságos újratermelni, amivel csökkenthető az újonnan termelt termékek aránya. Ezen u ismeretében már meghatározhatóak a termelési és újratermelési tételnagyságok.

3.3. Egy termelési-recycling modell visszavásárolható használt termékkel

3.3.1. Bevezetés

E fejezetben egy olyan optimális tételnagyság modellt mutatok be és vizsgálok, amelyben a termelőnek egy termék stacionárius keresletét kell kielégítenie $D > 0$ rátával. Ezt a keresletet termelt vagy beszerzett új termékkel, valamint a termelőhöz konstans $d = \alpha D$, $0 \leq \alpha \leq 1$ rátával visszatérő termékek egy $0 \leq \delta \leq 1$ rátájú újrafelhasználásával lehet elérni. Feltételezhető, hogy ebben a helyzetben a termelő visszavásárolhatja a használt cikkeket, hogy azt újrafelhasználja, vagy hulladékként kezelje. A δ és α paramétereket határfelhasználási rátának és határvisszavásárlási rátának nevezzük. A $(1-\delta)d$ mennyiségű fel nem használható terméket hulladékkezelésre adják át. Az $(1-\delta)$-t határhulladékkezelési rátának hívjuk.

Először az adott helyzetet elemzem. A termelési-recycling ciklusban a felhasználható termékek és a fel nem használható cikkek készletét határozzuk meg. Ezen eredmények alapján rögzítjük a termelési-recycling ciklus tételnagyságait és ciklusidejeit, minimalizálva az időegységre eső fix és készlettartási költségeket. Így expliciten határozzuk meg a $C_I(\alpha,\delta)$ költségfüggvényt, amely a minimális költségeket tartalmazza a határfelhasználási és –visszavásárlási ráta ismeretében.

Másodsorban, ha a lineáris hulladékkezelés, termelési, recycling és visszavásárlási költségek adottak, akkor azt a feladatot kell megoldanunk, hogy mely δ és α értékekre lesz a teljes fix, készlettartási és lineáris $C_I(\alpha,\delta)+C_N(\alpha,\delta)$ költség minimális. Ebben a modellformában a termelő dönt arról, hogy használt terméket vásárol-e meg, hogy azt újrafelhasználja.

Ebben a részben egy termelési-recycling modellt vizsgálunk, amely a Dobos-Richter (2003) dolgozat egy kiterjesztése arra az esetre, amikor megengedünk több, mint egy termelési és recycling tételt. Ekkor sem tesz a fogyasztó különbséget a termelt és újrafelhasznált termék között. A következő részben a paramétereket és a döntési változókat vázoljuk. A fejezet harmadik részében a költségfüggvényt állítjuk elő. Az ezt követő két részben a ciklusidőt és a termelési és recycling tételnagyságokat határozzuk meg a visszavásárlási és újrafelhasználási ráta ismeretében. A hatodik és hetedik rész az optimális stratégiákat mutatja be a két felállított modellre, míg a végén összegezzük az eredményeket.

3.3.2. Paraméterek és a rendszer működése

A termelési-recycling modellhez a következő paramétereket és döntési változókat használjuk. A modell anyagáramlását a 3.3.1. ábra szemlélteti paraméterekkel és döntési változókkal együttesen.

A tételnagysághoz kapcsolódó paraméterek:

- D keresleti ráta,
- $P=\frac{1}{\beta}D$ termelési ráta ($\beta < 1$),
- $d=\alpha D$ visszavásárlási ráta ($0 \le \alpha \le 1$),
- $R=\frac{1}{\gamma}D$ recycling ráta ($\gamma < 1$),
- S_R recyclingra eső fixköltség,
- S_P termelési átállítási költség,
- h_s a felhasználható cikkek tartási költsége,
- h_n a fel nem használható cikkek tartási költsége.

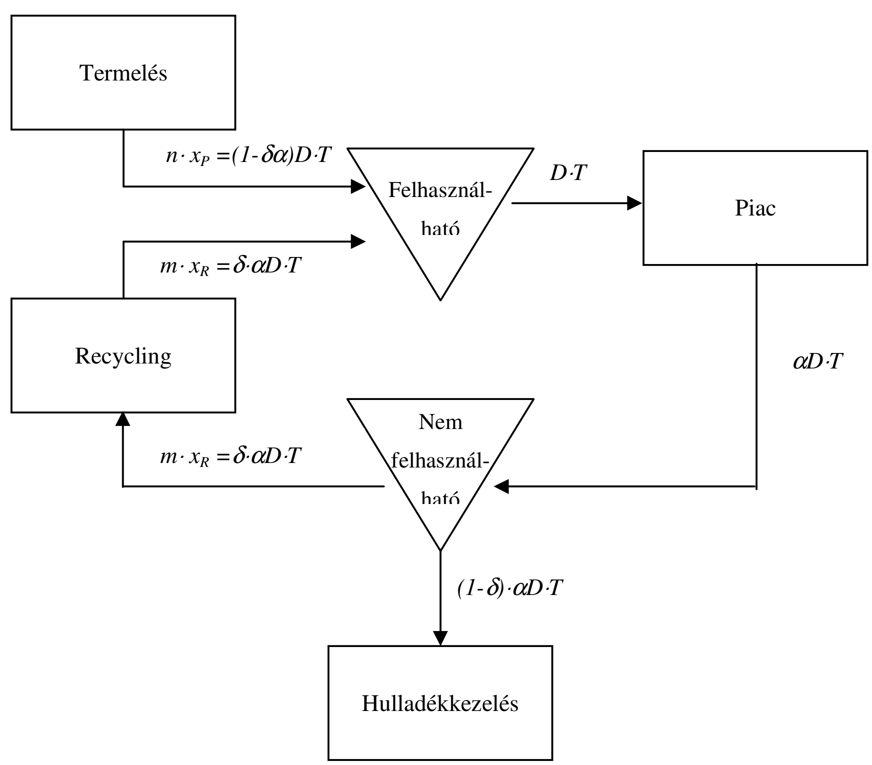
A tételnagyságtól független költségparaméterek:

- C_w $(1-\delta)\cdot\alpha D\cdot T$ egység hulladékkezelési költsége,
- C_P $(1-\delta\alpha)D\cdot T$ egység termelési költsége,
- C_R $\delta\cdot\alpha D\cdot T$ egység recycling költsége,
- C_B $\alpha\cdot D\cdot T$ egység visszavásárlási költsége.

A modell döntési változói:

- δ határfelhasználási ráta,
- α határvisszavásárlási ráta,
- m recycling tételek száma, pozitív egész,
- T_R egy recycling ciklus ideje,
- x_R recycling tételnagyság, $x_R = D \cdot T_R$
- n termelési tételek száma, pozitív egész,
- T_P egy termelési ciklus ideje,
- x_P recycling tételnagyság, $x_P = D \cdot T_P$
- T a termelési-recycling ciklus hossza.

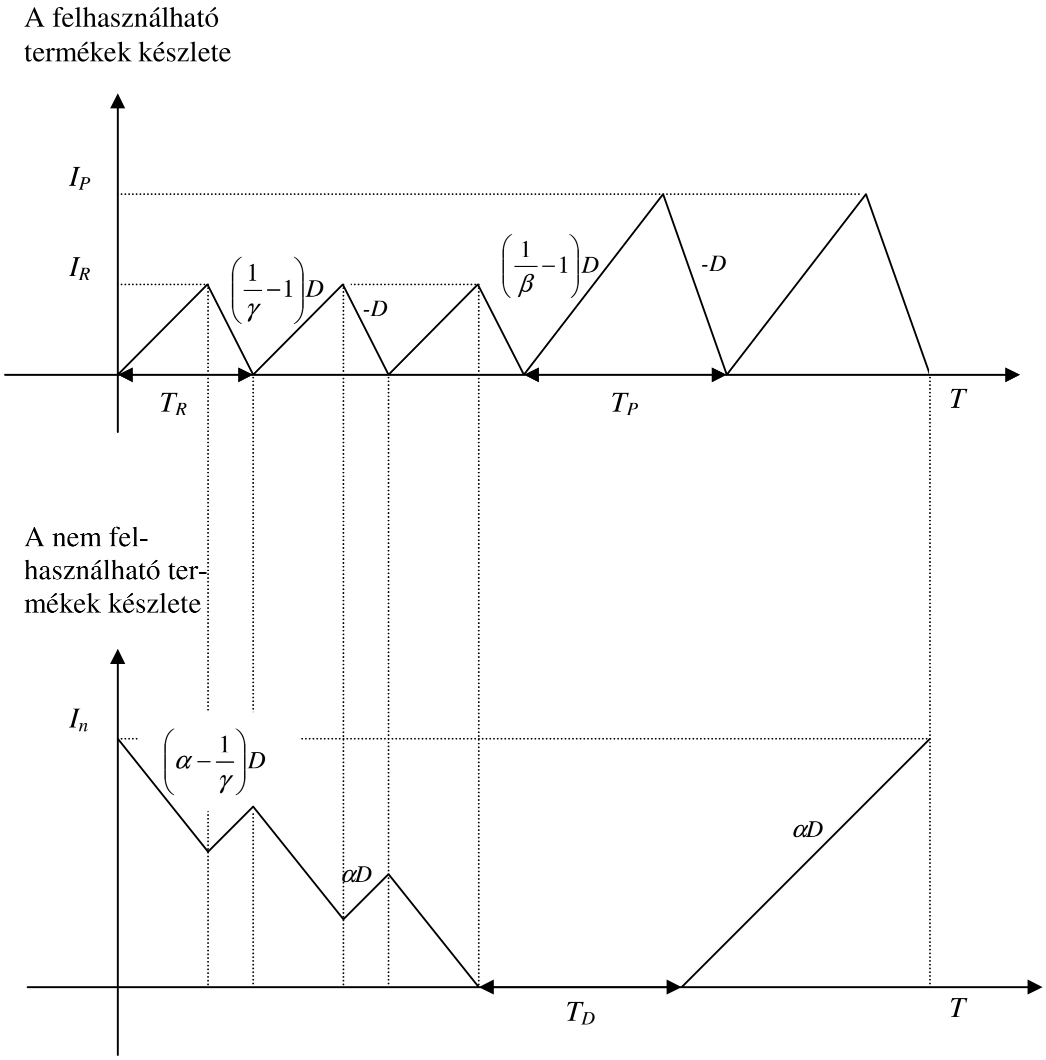
3.3.1. ábra. Anyagáramlás a termelési és recycling ciklusban



A keresletet a T_R időperiódusban a használt termékek visszaforgatásából elégítik ki, és tárolják a felhasználásba éppen be nem vont termékeket a ciklus végéig. A használt cikkek $d = \alpha D < D$ rátával érkeznek a fel nem használható cikkek készletezési pontjához.

(Lásd 3.3.2. ábra.) Az adott $R > D = \gamma R$ recycling ráta miatt a recycling folyamata $\gamma \cdot T_R$ ideig tart. Amikor a recycling befejeződik, a keresletet a felhalmozott újrafelhasznált termékekből elégítik ki. A T_R paraméter jelöli a recycling ciklus hosszát.

3.3.2. ábra. Készletszintek a modellben (m = 3, n = 2)



A recycling után a termelő a $D > 0$ konstans rátájú keresletet elégíti ki. A termelőnek meg kell állapítania, hogy mennyi új terméket állítson elő P termelési rátával, $D = \beta P < P$. Ezen információ birtokában eldöntheti, hogy mennyi ideig kell a többlettermelést raktároznia. Ezt az időintervallumot - amíg az új termékek termelése és készletezése folyik - termelési ciklusnak hívjuk és T_P-vel jelöljük. A $T = m \cdot T_R + n \cdot T_P$ intervallum adja a termelés-recycling ciklus hosszát.

A nem felhasználható termékek tárolási és hulladékkezelési folyamata a következő módon ragadható meg: $(1-\delta)dT$ egység kerül hulladékkezelésre történő átadásra T ciklus alatt, ahol $T_D = (1-\delta)T$ a hulladékkezelési intervallum. Amikor a fel nem használható cikkek készlete képződik, azt a $T_{RC} = T - T_D = \delta T$ intervallumot gyűjtési intervallumnak hívjuk.

A termelési ciklus végén a fel nem használt termékek készlete $I_n = [(1-\alpha)m+\alpha(1-\gamma)] \cdot DT_R$-nál éri el a maximumát, amely egyben a termelési-recycling ciklus kezdőkészlete. A recycling ciklus végén a felhasználható termékek készlete $I_R = (1-\gamma) \cdot DT_R$-nál éri el a csúcsát, míg az újratermelt cikkeké $I_P = (1-\beta) \cdot DT_P$-nél.

3.3.3. A készletezési költségek meghatározása

Jelölje h_s a felhasználható cikkek készlettartási költségét és h_n a fel nem használható cikkek készlettartási költségét. Adott T termelési-recycling ciklushossz mellett legyen a készlettartási költség H_P, H_R, H_n a termelt, újrafelhasználható és újra fel nem használható termékek esetén, amint azt az 3.3.1. lemma mutatja. Tegyük fel, hogy az α visszatérési ráta és a δ használati ráta pozitív, azaz van recycling és a visszavásárlási és felhasználási ráták nem egyenlők eggyel, vagyis van termelés is a ciklusban.

3.3.1. Lemma: A modell készletezési összköltsége:

$$H_R = \frac{1}{2} m \cdot I_R T_R \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot DT^2 \cdot h_s (1-\gamma)\alpha^2\delta^2 \cdot \frac{1}{m} \tag{3.3.1}$$

$$H_P = \frac{1}{2} n \cdot I_P T_P \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot DT^2 \cdot h_s (1-\beta)(1-\alpha\delta)^2 \cdot \frac{1}{n} \tag{3.3.2}$$

$$H_n = \frac{1}{2} \cdot DT^2 \cdot h_n (1-\gamma)\alpha^2\delta^2 \cdot \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \cdot DT^2 \cdot h_n \alpha(1-\alpha)\delta^2 \tag{3.3.3}$$

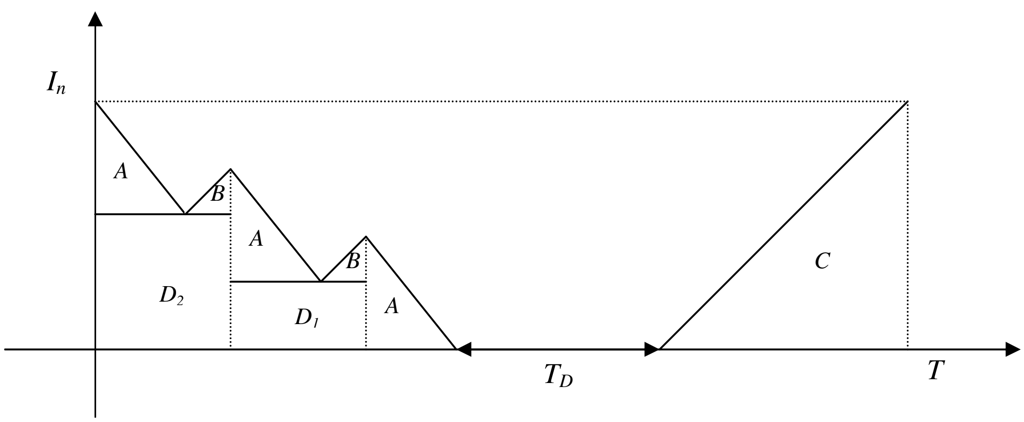
Bizonyítás. A (3.3.3) egyenlőséget bizonyítjuk, a másik kettő bizonyítása hasonlóképpen történhet. A fel nem használható cikkek készlettartási költségét a görbe alatti terület felosztásával bizonyíthatjuk. Osszuk fel a területet m darab A háromszögre, egy-egy B és C háromszögre és D_1, D_2, …, D_{m-1} négyszögekre (lásd 3.3.3. ábra). Az A háromszög területe

$$T_A = \frac{1}{2} \cdot \gamma T_R \cdot \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) D \cdot \gamma T_R = \frac{1}{2} \cdot \gamma (1 - \alpha\gamma) \cdot DT_R^2 .$$

A B háromszög területe egyenlő

$$T_B = \frac{1}{2} \cdot (1-\gamma) T_R \cdot \alpha D \cdot (1-\gamma) T_R = \frac{1}{2} \cdot \alpha (1-\gamma)^2 \cdot DT_R^2 .$$

3.3.3. ábra. A fel nem használható termékek készletszintje



A C háromszög területe

$$T_C = \frac{1}{2} \cdot [(1-\alpha)m + \alpha(1-\gamma)] DT_R \cdot \frac{(1-\alpha)m + \alpha(1-\gamma)}{\alpha D} \cdot DT_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} [(1-\alpha)m + \alpha(1-\gamma)]^2 \cdot T_R^2$$
.

Végül a D_i négyszög területe

$$T_{D_i} = i \cdot (1-\alpha) DT_R^2 .$$

A teljes költség most

$$H_n = m \cdot T_A + (m-1) \cdot T_B + T_C + \sum_{i=1}^{m-1} T_{D_i} \ .$$

Egyszerű matematikai átalakításokkal kapjuk (3.3.3) egyenlőséget.

3.3.2. Lemma: Az időegységre eső készletezési átlagköltség

$$H_T = \frac{H_P + H_R + H_n}{T} = \frac{1}{2} T \cdot D \cdot V(m,n,\alpha,\delta) \tag{3.3.4}$$

ahol

$$V(m,n,\alpha,\delta) = (h_s + h_n)(1-\gamma)\alpha^2\delta^2 \cdot \frac{1}{m} + h_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2 \cdot \frac{1}{n} + h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2 \tag{3.3.5}$$

Bizonyítás. A (3.3.4) és (3.3.5) képleteket megkaphatjuk, ha az (3.3.1) – (3.3.3) kifejezés költség- és időparamétereit a baloldalon (3.3.4)-be helyettesítjük.

3.3.1. Példa: legyen $D = 1.000$, $h_s = 850$, $h_n = 80$, $\beta = 2/3$, $\gamma = 2/3$, $m = 1$, $n = 2$, $\alpha = 1/2$ és $\delta = 2/3$. Ekkor $V(2,1,1/2,2/3) = 0{,}167h_s + 0{,}130h_n = 106{,}296$ és $H_T = \frac{1}{2} \cdot T \cdot 1.000 \cdot 106{,}296 = 53.148{,}1T$ teljesül.

A $V(m,n,\alpha,\delta)$ függvény fejezi ki az egységnyi időre és termékre eső készletezési költséget.

3.3.4. A ciklusidő szerinti optimum meghatározása

Legyen S a termelés és recycling ciklusok összes átállítási költsége, ami az S_P és S_R átállítási költségek összegeként adható meg. Ekkor az időegységre eső átállítási költség

$$S_T(m,n) = S_R \cdot m + S_P \cdot n\,.$$

A modell $C_A(T,m,n,\alpha,\delta)$ átlagos készletezési költségét a következő formában írhatjuk le:

$$C_A(T,m,n,\alpha,\delta) = \frac{S_T(m,n)}{T} + \frac{1}{2} T \cdot D \cdot V(m,n,\alpha,\delta) \rightarrow \min$$

(3.3.6)

A költségfüggvény T szerinti konvexitása miatt az optimális termelési-recycling ciklusidő

$$T^o(m,n,\alpha,\delta) = \sqrt{\frac{2S_T(m,n)}{D \cdot V(m,n,\alpha,\delta)}}$$

(3.3.7)

és a minimális időegységre eső költségek

$$\widetilde{C}_A(m,n,\alpha,\delta) = \sqrt{2D \cdot S_T(m,n) \cdot V(m,n,\alpha,\delta)}\,. \qquad (3.3.8)$$

Az optimális termelési és recycling ciklusidő

$$T_R^o(m,n,\alpha,\delta) = \frac{\alpha\delta}{m} \sqrt{\frac{2S_T(m,n)}{D \cdot V(m,n,\alpha,\delta)}}\,, \qquad (3.3.9)$$

$$T_P^o(m,n,\alpha,\delta) = \frac{1-\alpha\delta}{n} \sqrt{\frac{2S_T(m,n)}{D \cdot V(m,n,\alpha,\delta)}}\,. \qquad (3.3.10)$$

Az optimális tételnagyság

$$x_R^o(m,n,\alpha,\delta) = \frac{\alpha\delta}{m} \sqrt{\frac{2DS_T(m,n)}{V(m,n,\alpha,\delta)}}\,, \qquad (3.3.11)$$

$$x_P^o(m,n,\alpha,\delta)=\frac{1-\alpha\delta}{n}\sqrt{\frac{2DS_T(m,n)}{V(m,n,\alpha,\delta)}}\,. \tag{3.3.12}$$

3.3.2. Példa: Amint a 3.3.1. példában $D = 1.000$, $h_s = 850$, $h_n = 80$, $\beta = 2/3$, $\gamma = 2/3$, $m = 1$, $n = 2$, $\alpha = 1/2$ és $\delta = 2/3$. A3.3.1. példából ismert, hogy $V(m,n,\alpha,\delta) = 106.296$ és $H_T = 53.148,1T$ teljesül. Legyen $S_P = 1,960$ és $S_R = 440$. A (6) képlet szerint $C_A\left(T,1,2,\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)=\frac{4.360}{T}+53.148{,}1T$. Az optimális termelési-recycling ciklus hossza $T\left(1,2,\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)=0{,}286$ év vagy 104 nap. A minimális időegységre eső költség $\tilde{C}_A\left(1,2,\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)=2\sqrt{4.360\cdot 53.148{,}1}=30.445{,}1$.

3.3.5. Az optimális termelési és recycling tételszámok

Most a $\tilde{C}_A(m,n,\alpha,\delta)$ költségfüggvényt minimalizáljuk azért, hogy a tételszámokat meghatározzuk. Elemi átalakítások után a költségfüggvény a következő formában írható fel

$$\tilde{C}_A(m,n,\alpha,\delta)=\sqrt{2D\cdot\left[A(\alpha,\delta)\cdot\frac{m}{n}+B(\alpha,\delta)\cdot\frac{n}{m}+C(\alpha,\delta)\cdot m+D(\alpha,\delta)\cdot n+E(\alpha,\delta)\right]} \tag{3.3.13}$$

ahol

$$A(\alpha,\delta)=S_Rh_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2,\quad B(\alpha,\delta)=S_P(h_s+h_n)(1-\gamma)\alpha^2\delta^2,$$
$$C(\alpha,\delta)=S_Rh_n\alpha(1-\alpha)\delta^2,\quad D(\alpha,\delta)=S_Ph_n\alpha(1-\alpha)\delta^2,$$
$$E(\alpha,\delta)=S_R(h_s+h_n)(1-\gamma)\alpha^2\delta^2+S_Ph_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2$$

E probléma megoldásához használhatjuk a függelékben megadott meta-modellt:

$$S(m,n)=A\frac{m}{n}+B\frac{n}{m}+Cm+Dn+E\to\min,\qquad m\geq 1,\ n\geq 1.$$

A függelék eredményeit alkalmazva a folytonos megoldás *(m,n)*-re az alábbi.

3.3.3. Lemma: Három esetet különböztethetünk meg az $(m(\alpha,\delta),n(\alpha,\delta))$ folytonos megoldására és a $C_I(\alpha,\delta)$ költségfüggvény kifejezésére

(i) $A(\alpha,\delta) \geq B(\alpha,\delta)+D(\alpha,\delta)$, $B(\alpha,\delta) \leq A(\alpha,\delta)+C(\alpha,\delta)$

$$\left(m^o(\alpha,\delta), n^o(\alpha,\delta)\right) = \left(1, \frac{1-\alpha\delta}{\delta}\sqrt{\frac{S_R}{S_P}}\sqrt{\frac{h_s(1-\beta)}{(h_s+h_n)(1-\gamma)\alpha^2+h_n\alpha(1-\alpha)}}\right)$$

$$C_I(\alpha,\delta) = \sqrt{2D}\left\{(1-\alpha\delta)\cdot\sqrt{S_P h_s(1-\beta)} + \delta\cdot\sqrt{S_R\left[(h_s+h_n)(1-\gamma)\alpha^2+h_n\alpha(1-\alpha)\right]}\right\}$$

(ii) $A(\alpha,\delta) \leq B(\alpha,\delta)+D(\alpha,\delta)$, $B(\alpha,\delta) \leq A(\alpha,\delta)+C(\alpha,\delta)$

$$\left(m^o(\alpha,\delta), n^o(\alpha,\delta)\right) = (1, 1)$$

$$C_I(\alpha,\delta) = \sqrt{2D(S_R+S_P)\left[h_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2+(h_s+h_n)(1-\gamma)\alpha^2\delta^2+h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2\right]}$$

(iii) $A(\alpha,\delta) \leq B(\alpha,\delta)+D(\alpha,\delta)$, $B(\alpha,\delta) \geq A(\alpha,\delta)+C(\alpha,\delta)$

$$\left(m^o(\alpha,\delta), n^o(\alpha,\delta)\right) = \left(\alpha\delta\cdot\sqrt{\frac{S_P}{S_R}}\cdot\sqrt{\frac{(h_s+h_n)(1-\gamma)}{h_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2+h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2}}, 1\right)$$

$$C_I(\alpha,\delta) = \sqrt{2D}\left\{\alpha\delta\cdot\sqrt{S_R(h_s+h_n)(1-\gamma)} + \sqrt{S_P\left[h_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2+h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2\right]}\right\}$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a kifejezések a tételszámokra nem feltétlenül egészértékűek. Mindezek ellenére látni fogjuk, hogy ez a gyakorlati szempontból nem tartható megoldás, mégis elegendő annak bizonyításához, hogy a kevert stratégiákat dominálják a tiszta stratégiát.

Vezessük most be a következő függvényeket

$$\delta_1(\alpha) = \frac{\sqrt{S_R\cdot h_s(1-\beta)}}{\alpha\sqrt{S_R\cdot h_s(1-\beta)}+\sqrt{S_P\left[(h_s+h_n)(1-\gamma)\alpha^2+h_n\alpha(1-\alpha)\right]}}$$

és

$$\delta_2(\alpha) = \frac{\sqrt{S_R \cdot h_s(1-\beta)}}{\alpha\sqrt{S_R \cdot h_s(1-\beta)} + \sqrt{S_P \cdot (h_s + h_n)(1-\gamma)\alpha^2 - S_R \cdot h_n \alpha(1-\alpha)}}.$$

A $\delta_1(\alpha)$ és $\delta_2(\alpha)$ függvények az olyan átváltási pontokat tartalmazzák, amelyekre (m,n) egyenlők eggyel. Ezt a 3.3.4. ábra szemlélteti. A $\delta_1(\alpha)$ függvény az (i) és (ii) eseteket választja szét, míg $\delta_2(\alpha)$ az (ii) és (iii) eseteket. Ezen függvények kiszámításához használjuk az egyenlőségeket. Egyszerűen belátható, hogy $\delta_1(\alpha) \le \delta_2(\alpha)$.

Definiáljuk most a lehetséges (α,δ) pontok halmazát a $\delta_1(\alpha)$ és $\delta_2(\alpha)$ függvények segítségével:

$$I = \{(\alpha,\delta) \mid \delta \le \delta_1(\alpha), 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \delta \le 1\},$$

$$J = \{(\alpha,\delta) \mid \delta_1(\alpha) \le \delta \le \delta_2(\alpha), 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \delta \le 1\},$$

$$K = \{(\alpha,\delta) \mid \delta \ge \delta_2(\alpha), 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \delta \le 1\}.$$

Az I halmaz határát a lehetséges (α,δ) értékek és a $\delta_1(\alpha)$ függvény, valamint a $(\alpha_1,1)$ és $(1,\delta_0)$ pontok határolják, ahol az α_1 és δ_0 értékek az alábbi egyenlőségekből határozhatóak meg:

$$1 = \frac{\sqrt{S_R \cdot h_s(1-\beta)}}{\alpha\sqrt{S_R \cdot h_s(1-\beta)} + \sqrt{S_P\left[(h_s + h_n)(1-\gamma)\alpha^2 + h_n \alpha(1-\alpha)\right]}} = \delta_1(\alpha)$$

és

$$\delta_0 = \frac{\sqrt{S_R \cdot h_s(1-\beta)}}{\sqrt{S_R \cdot h_s(1-\beta)} + \sqrt{S_P \cdot (h_s + h_n)(1-\gamma)}}.$$

Az K halmaz határát a lehetséges (α,δ) értékek és a $\delta_2(\alpha)$ függvény, valamint a $(\alpha_2,1)$ és $(1,\delta_0)$ pontok határolják, ahol az α_2 érték az alábbi egyenlőségből határozható meg:

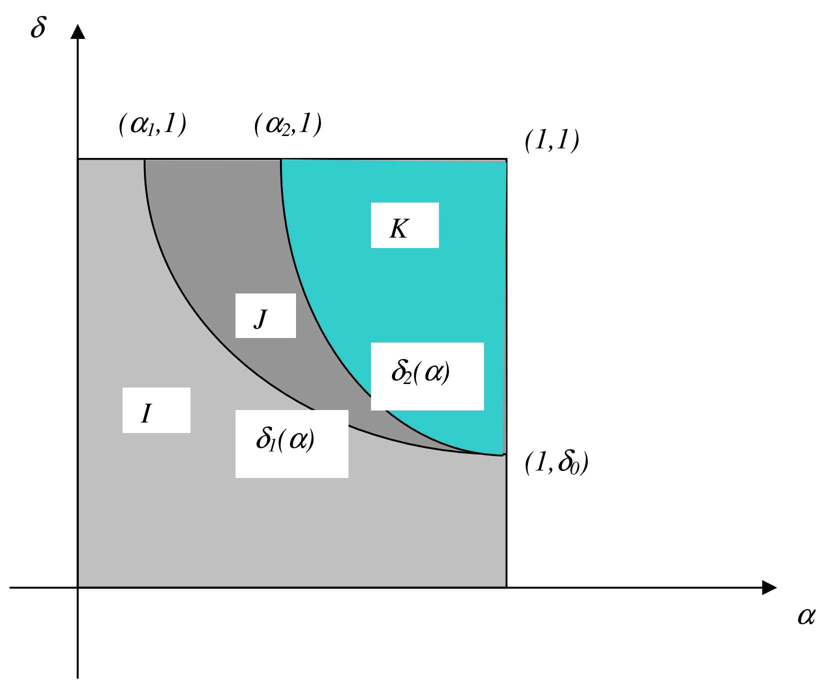
$$1=\frac{\sqrt{S_R\cdot h_s(1-\beta)}}{\alpha\sqrt{S_R\cdot h_s(1-\beta)}+\sqrt{S_P\cdot(h_s+h_n)(1-\gamma)\alpha^2-S_R\cdot h_n\alpha(1-\alpha)}}=\delta_2(\alpha).$$

A $C_I(\alpha,\delta)$ készlettartási költséget úgy írhatjuk fel, mint

$$C_I(\alpha,\delta)=\begin{cases}\sqrt{2D}\left\{(1-\alpha\delta)\cdot\sqrt{S_Ph_s(1-\beta)}+\delta\cdot\sqrt{S_R\left[(h_s+h_n)(1-\gamma)\alpha^2+h_n\alpha(1-\alpha)\right]}\right\} & (\alpha,\delta)\in I\\ \sqrt{2D(S_R+S_P)\left[h_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2+(h_s+h_n)(1-\gamma)\alpha^2\delta^2+h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2\right]} & (\alpha,\delta)\in J\\ \sqrt{2D}\left\{\alpha\delta\cdot\sqrt{S_R(h_s+h_n)(1-\gamma)}+\sqrt{S_P\left[h_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2+h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2\right]}\right\} & (\alpha,\delta)\in K\end{cases}$$

3.3.3. Példa: Amint a 3.3.2. példában $D = 1.000$, $h_s = 850$, $h_n = 80$, $\beta = 2/3$, $\gamma = 2/3$, $S_P = 1{,}960$, $S_R = 440$, $\alpha = 1/2$ and $\delta = 2/3$. Ekkor $A(1/2,2/3) = 55.407{,}4$, $B(1/2,2/3) = 67.511{,}1$, $C(1/2,2/3) = 3.911{,}1$, $D(1/2,2/3) = 17.422{,}2$, $E(1/2,2/3) = 261.970$. Az optimális tételszámok $m(1/2,2/3) = 1{,}067$ és $n(1/2,2/3) = 1$. A minimális költség $C_I(1/2,2/3) = 28.494{,}.1$.

3.3.4. ábra Az *I, J* és *K* bemutatása



3.3.6. A készletezési költségek minimalizálása a visszavásárlási és felhasználási rátákra

Mielőtt a minimumot meghatározzuk, egy egyszerű lemmát bizonyítunk.

3.3.3. Lemma: Legyenek az *a, b, c* és *d* értékek pozitívak. Ekkor az alábbi teljesül:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd} \ .$$

Bizonyítás. Emeljük az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre. Ekkor

$$(a+b)(c+d) \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

és egyszerűsítés után

$$ad + bc \geq 2\sqrt{abcd} \ ,$$

és ez az egyenlőtlenség teljesül minden *a, b, c* és *d* értékre, mert $\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$.

Használjuk a lemma eredményét arra az esetre, amikor csak egy-egy tétel van:

$$C_I(\alpha,\delta) = \sqrt{2D(S_P + S_R)\cdot\left[h_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2 + h_s(1-\gamma)\alpha^2\delta^2 + h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2\right]}, \quad (\alpha,\delta)\in J$$

.

Legyen most

$$\begin{aligned} a &= 2DS_P \\ b &= 2DS_R \\ c &= h_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2 \\ d &= h_s(1-\gamma)\alpha^2\delta^2 + h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2 \end{aligned}$$

A 3.3.3. lemmát alkalmazva a következőt kapjuk:

$$C_I(\alpha,\delta) \geq \sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)(1-\alpha\delta)^2} + \sqrt{2DS_R \cdot \left[h_s(1-\gamma)\alpha^2\delta^2 + h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2\right]} \geq$$
$$\geq (1-\alpha\delta)\sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)} + \alpha\delta\sqrt{2DS_R \cdot (h_s+h_n)(1-\gamma)}$$

A legutolsó egyenlőtlenség teljesül, mert csökkentettük a költségkifejezést $h_n\alpha(1-\alpha)\delta^2$ értékkel. Ezzel a módszerrel megmutatható, hogy az *I* és *K* halmaz felett

$$C_I(\alpha,\delta) \geq (1-\alpha\delta)\sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)} + \alpha\delta\sqrt{2DS_R \cdot (h_s+h_n)(1-\gamma)}.$$

Ez utóbbi kifejezés nem más, mint a tiszta stratégiák - azaz recycling és termelés - konvex lineáris kombinációja. A súlyok a határfelhasználási és –visszavásárlási ráták szorzata $\alpha\delta$, amely nemnegatív és kisebb egynél. A költségek mindig kisebbek, mint a tiszta stratégiák közül a kisebb:

$$(1-\alpha\delta)\sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)} + \alpha\delta\sqrt{2DS_R \cdot (h_s+h_n)(1-\gamma)} \geq$$
$$\geq \min\left\{\sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)};\ \sqrt{2DS_R \cdot (h_s+h_n)(1-\gamma)}\right\}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenséggel bizonyítjuk az

3.3.1. Tételt: Ebben a termelési-recycling modellben az optimális készletezési stratégia a tiszta stratégia: vagy termelésből elégítsük ki a keresletet ($\alpha^o = \delta^o = 0$), vagy vásároljuk vissza az összes használt terméket és használjuk fel mindet ($\alpha^o = \delta^o = 1$).

3.3.5. Példa. Legyen $D=1.000$, $\beta = \gamma = 2/3$, $S_P = 1960$, $S_R = 440$, $h_s = 850$ és $h_n = 80$. Ekkor a recycling készlettartási költsége *16.516,7*, míg a termelésé *33.326,7*. E példában gazdaságosabb visszavásárlással újrafelhasználni.

3.3.6 Példa. Legyen $D=1.000$, $\beta = 2/5$ $\gamma = 2/3$, $S_P = 360$, $S_R = 440$, $h_s = 85$ és $h_n = 80$. Ekkor a termelés készlettartási költsége *6.059,7* míg a recyclingé *6.957,01*. Itt a termelés hatékonyabb.

3.3.7. A tételnagyság és tételnagysághoz kapcsolódó költségek minimalizálása

Ebben a részben az EOQ és EOQ-tól független költségek összegét minimalizáljuk. Ennek az esetnek a költségfüggvénye

$$C_T(\alpha,\delta) = C_I(\alpha,\delta) + C_N(\alpha,\delta)$$

ahol $C_N(\alpha,\delta) = C_W \cdot (1-\delta)\alpha D + C_R \cdot \delta\alpha D + C_P \cdot (1-\delta\alpha)D + C_B \cdot \alpha D$ függvény a lineáris hulladékkezelési, recycling, termelési és visszavásárlási költségek összege.

A megoldandó probléma a következő alakú

$$C_T(\delta,\alpha) \to \min$$

ahol

$$\delta \in [0,1], \quad \alpha \in [0,1].$$

A legutóbbi részben beláttuk, hogy

$$C_I(\alpha,\delta) \geq (1-\alpha\delta)\sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)} + \alpha\delta\sqrt{2DS_R \cdot (h_s + h_n)(1-\gamma)},$$

vagyis a készlettartási költségek nem nagyobbak, mint a tiszta stratégiához tartozó költségek konvex lineáris kombinációja. Az EOQ-hoz nem kapcsolódó költségeket a következő módon becsülhetjük:

$$C_N(\alpha,\delta) \geq (1-\delta\alpha)D \cdot C_P + \delta\alpha D \cdot (C_B + C_R).$$

Hogy ezt az egyenlőtlenséget megkaphassuk, csökkentettük a tételnagyságtól független költségeket a hulladékkezelés költségével, vagyis $C_W \cdot (1-\delta)\alpha D$-val, valamint a visszavásárolt, de fel nem használt költséggel, azaz $C_B \cdot (1-\delta)\alpha D$-val.

Ez utóbbi két becslést alkalmazva egy alsó határt kapunk a költségfüggvényre

$$C_T(\alpha,\delta) \geq (1-\alpha\delta)\left\{\sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)} + D \cdot C_P\right\} + \alpha\delta\left\{\sqrt{2DS_R \cdot (h_s + h_n)(1-\gamma)} + D \cdot (C_B + C_R)\right\}.$$

A jobboldali kifejezés újra a tiszta stratégiák egy konvex lineáris kombinációja, így

$$\begin{aligned}&(1-\alpha\delta)\left\{\sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)} + D \cdot C_P\right\} + \alpha\delta\left\{\sqrt{2DS_R \cdot (h_s + h_n)(1-\gamma)} + D \cdot (C_B + C_R)\right\} \geq \\ &\min\left\{\sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)} + D \cdot C_P,\ \sqrt{2DS_R \cdot (h_s + h_n)(1-\gamma)} + D \cdot (C_B + C_R)\right\}\end{aligned}.$$

Ezzel az eredménnyel beláttuk a következő tételt.

3.3.2. Tétel: E modell optimális termelés-recycling stratégiája az, hogy vagy visszavásároljuk az összes eladott használt terméket ($\alpha^o = \delta^o = 1$), vagy visszavásárlás és recycling nélkül kizárólag termelünk ($\alpha^o = \delta^o = 0$).

Ezt az eredményt bizonyította Richter (1997) egy hulladékkezelési modellben és Dobos-Richter (2003) egy termelés-recycling modellben. Lineáris költségek mellett és a visszavásárlási és recycling ráták 0 és 1 közötti szabad megválasztása mellett a tiszta stratégiák egyike az optimális. Az optimális stratégiát a $\sqrt{2DS_P \cdot h_s(1-\beta)} + D \cdot C_P$ és a $\sqrt{2DS_R \cdot (h_s + h_n)(1-\gamma)} + D \cdot (C_B + C_R)$ értékek összehasonlításával határozhatjuk meg.

3.3.8. Összefoglalás és további kutatások

Ebben a dolgozatban egy termelési-recycling modellt elemeztem. A készletezési költségeket vizsgálva megállapítható, hogy a tiszta stratégiák egyike nyújt optimális megoldást, azaz termelni, vagy újrafelhasználni. Hasonló állítás fogalmazható meg arra az esetre is, ha az összes költséget minimalizáljuk. Hasonló eredményt kapott Richter (1997) egy újratermeléses hulladékkezelési modellben, és Dobos-Richter (2003) egy termelési-recycling modellben.

Valószínűleg a tiszta stratégiák technológiailag nem kivitelezhetőek és néhány használt termék nem tér vissza, vagy éppenséggel több használt termék tér vissza, sőt néhány cikk nem lesz újrafelhasználható. A modell ezen típusú kiterjesztései egy felső határt definiálhatnak a visszavásárlási rátára, amely kisebb, mint egy. Ilyen esetekben egy kevert stratégia lehet optimális, amint arra példát mutatott Dobos és Richter (2006) a most bemutatott modell minőséggel történő kibővítésében. A dolgozat eredménye az, hogy előnyösebb a minőségellenőrzést a beszállítóval elvégeztetni.

4. Termeléstervezés a visszutas logisztikában

4.1. Bevezetés

A visszafelé irányuló anyagáramlás levezénylése közben számtalan menedzsment probléma merül fel. Ezek közül a legfontosabbak)

- a használt anyagok, termékek visszagyűjtése, és annak megszervezése;
- a termékek szállítása, tárolása és készletezése, valamint
- a szétszerelés megszervezése és irányítása után az újrafelhasználható alkatrészek és részegységek termeléstervezésbe történő bevonása.

Az egyik fontos kutatási és alkalmazási területnek az újrafelhasználás termeléstervezésbe történő integrálása tűnik (dolgozatomnak nem célja a visszatérés megszervezésével – return management – való foglalkozás). A nemzetközi kutatás ezen a területen még gyermekcipőben jár. A legtöbb alkalmazást a német irodalomban találhatjuk meg (Inderfurth (1998), Spengler et al. (1997), Rautenstrauch (1997)). Angol nyelvű irodalom is csak elvétve található (Ferrer-Whybark (2000), Guide (2000)). Ismereteim szerint magyar nyelvű vizsgálódások ezen a területen még nem születtek.
Dolgozatom termeléstervezési fejezete három részből áll: a 4.2. fejezet a termeléstervezés és a recycling-tervezés közötti kapcsolatokba enged rövid betekintést. A szétszerelés-tervezésre adok egy modellt, ami a gyakorlatban „negatív” anyagjegyzéknek tekinthető. A 4.3. fejezet részben az újrafelhasználás MRP termeléstervezési és irányítási rendszerbe történő integrálását mutatja be. Ez a tervezés a konkrét MRP-tábla vizsgálatán túl a felhasználásig szükséges lépéseket felsorolja. A 4.4. fejezetben összegzem a recycling termeléstervezésben betöltött szerepét.

4.2. Az újrafelhasználással bővített termeléstervezés

A recycling jelentőségének növekedése - ami a használt termékek egyre nagyobb mértékű visszagyűjtéséből és felhasználásából következik - új feladatok elé állítja a termeléstervezést, amely feladatok megoldása szükségessé teszi az anyag szükséglettervezése (MRP) és a recycling-tervezés összekapcsolását. A recyclinggal új ellátási lehetőségek nyílnak az anyagáramlási folyamatban.

Maga a terméléstervezés és irányítás folyamatának kidolgozása a hagyományos termelési eljárásokra fókuszál, amelyet nem ciklikus anyagáramlási folyamat jellemez. A recycling-tevékenységek jelentősége a primer nyersanyagok csökkenésével és megdrágulásával, valamint a hulladékanyagok korlátozott és költségesebb elhelyezési lehetőségével megnövekedett, amelynek egyaránt vannak gazdasági és ökológiai okai. Az egyre erősödő társadalmi nyomás és a növekvő állami szabályozás még inkább aktuálissá teszi a használt termékek újrafelhasználását.

Recyclingon a vállalaton belül képződő és kívülről származó használt termékek termelési folyamatba történő visszavezetését értem. Belső recycling-termék lehet például a szükségtelen termék vagy a termelési folyamat során keletkező melléktermék, valamint selejttermék. A külső recycling-termék általában az, amikor az életciklusa végén lévő terméket vezetnek vissza a termelésbe. A cél az, hogy az eredeti terméket vagy annak jelentős részét előállítsák, s az úgynevezett termékrecycling vagy részrecycling révén használható termék keletkezzen, amit vagy késztermékként, vagy alkatrészként értékesíthetnek vagy felhasználhatnak. A vállalaton belül nem felhasználható részeket és anyagokat egy külső vállalathoz továbbítják, amely esetleg felhasználja, vagy hulladéklerakóban elhelyezi azokat.

Az anyagáramlás a recycling-folyamatokkal kibővítve magában foglalja a nyersanyagok, félkésztermékek, késztermékek és recycling-javak tárolását. A hulladék, illetve visszaküldött termék időbeli, mennyiségbeli és minőségbeli bizonytalansága - akárcsak magának az újrafeldolgozási folyamat időtartamának és tartalmának bizonytalansága - egyben a tervezés bizonytalanságát is okozza. Ezáltal a tervezés bonyolult problémaként jelenik meg, s a hozzá kapcsolódó sokrétű bizonytalanság érthetően megnöveli a döntési lehetőségek számát. Elsősorban olyan új döntési helyzet adódik, ami lehetővé teszi a választást szétszerelési, feldolgozási, illetve felhasználási folyamatok között, s további döntési helyzetet jelentenek a termelési és beszerzési tevékenységek mellett a recycling tevékenységek, amelyek alternatív forrást jelentenek a nyersanyag-ellátási folyamat számára. Mindezek egyértelművé teszik a termelési és recycling-tervezés integrációjának a szükségességét.

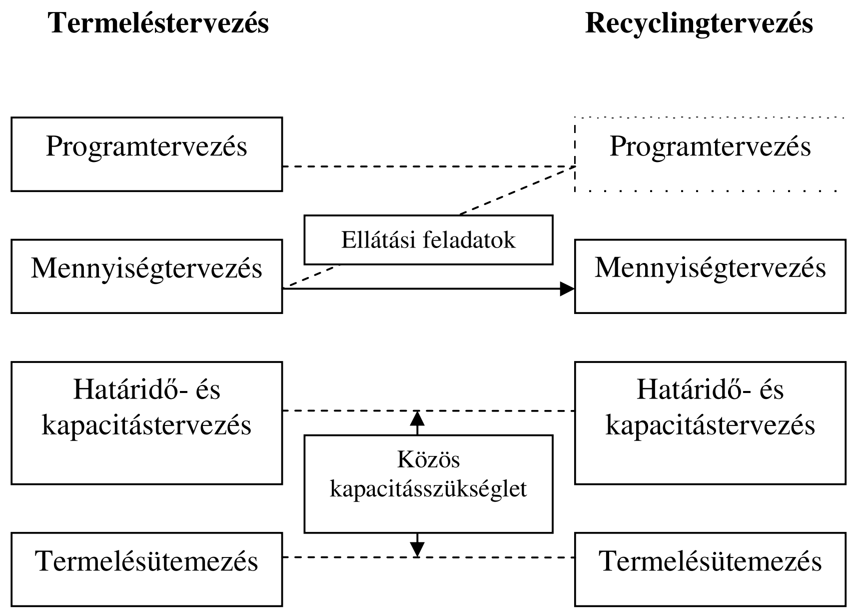
Maga a recycling-tervezés - akárcsak a termeléstervezés - elsősorban stratégiai-taktikai szempontokat jelent, másodsorban pedig operatív tartalommal is bír. Az operatív rész az eredeti termeléstervezés és irányítás feladatait osztja fel programtervezésre, mennyiségtervre, idő- és kapacitástervre, valamint gyártási/irányítási tervre, természetesen a recycling tevékenységekre is kiterjesztve.

A programtervezés a recycling esetében a recycling-termékek típus, mennyiség és időtartam alapján való kereslet előrejelzését jelenti. Ezen előrejelzés alapján lehetséges a recycling-tevékenységeket előrelátóan kialakítani, s a jövőben elvárható termék-visszaküldések alapján aktív tervezésről beszélni. Ha ezeket az előrejelzéseket nem veszik figyelembe, akkor ezt passzív recycling-tervezésnek nevezzük, hiszen csak reagálás történik az akkor éppen ismert recycling-javak állományára.

4.2.1. A termelés- és recycling-tervezés közötti tervezésbeli összefüggés

Az integrációra a termelés- és a recycling-tervezés részfeladatai között mindenekelőtt azért van szükség, mert a termelés program- és mennyiségi terve a recycling termékek programtervének előrejelzési alapját képezi, másrészt a recycling mennyiségi terve befolyásolja a gyártás időbeni és mennyiségbeni nyersanyagszükségletét. Az MRP rendszer kibővítésére három fő koncepció létezik:

- amely a recycling és az MRP integrációjával foglalkozik,
- amely a szétszerelésre és a felhasználás-tervezésre koncentrál,
- az integrált anyagdiszpozíció tervezést állítja a középpontba.



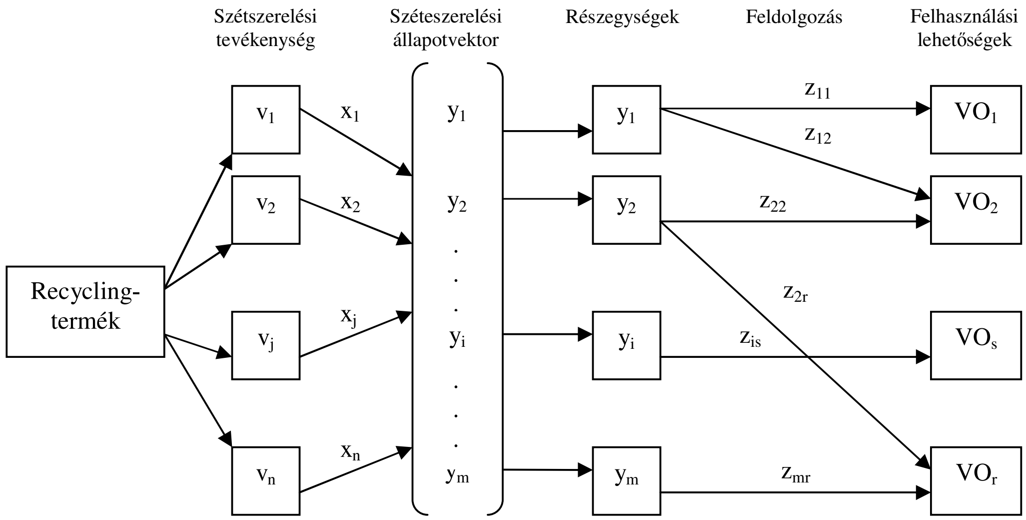
4.1. táblázat. A termelés- és recycling-tervezés közötti összefüggés (Corsten-Reiss (1991))

Az MRP rendszerek továbbfejlesztési módozatainak első megközelítése az nem tartalmaz recycling döntéstámogatási rendszereket, mint a második és a harmadik koncepció. Determinisztikus bővítési rendszer, mert csak a passzív recycling-tervezésre épít és az MRP rendszer közvetlen bővítése csak a meglévő, adott szétszerelési, recycling és anyagellátási stratégiákat tartalmazza. Először a második és a harmadik koncepció lényegét foglalom össze, s külön fejezetben tárgyalom az első változatot, azaz az MRP rendszer és a recycling integrációját. A két rendszer kapcsolatát a 4.1. táblázat tartalmazza.

4.2.2. Szétszerelés- és felhasználás-tervezés

A szétszerelés- és a felhasználás-tervezés a szétszerelési és a felhasználási intézkedések meghozatalának alapvető kérdéseit jelenti, mint például a recycling-javak középtávú taktikai tervének meghatározása, valamint a terméktervezés. A szétszerelés-tervezés magáról a szétszerelés mélységéről való döntéseket, alternatív szétszerelési folyamatok közötti választást, a szétszerelési folyamat lebonyolításának lépéseit, gyakoriságát foglalja magában. A felhasználás tervezése során arról kell dönteni, hogy az eredeti termék újrafeldolgozására törekszik-e a vállalat, vagy csak termékegységeket, nyersanyagokat szándékozik-e visszanyerni. Az egyes anyagok és alkotóelemek recyclingja esetén arra irányul a döntés, hogy a meglévő vagy alternatív belső, illetve külső felhasználási lehetőséget alkalmaz-e a cég. Minden recycling-módszer esetén a hagyományos eljárások mellett léteznek alternatív lehetőségek is. A különböző recycling lehetőségek közötti választást nagyban determinálják az adottságként megjelenő technikai és politikai keretfeltételek, amelyek meghatározzák a termékvisszavételt, a szétszerelést, feldolgozást és felhasználást. A tervezéshez feltétlenül szükségesek a következő adatok: az újrafelhasználandó terméknek vagy bizonyos elemeinek minőségi állapota, a szétszerelési, vizsgálati, feldolgozási, tárolási költségek, valamint az értékesítési árbevétel.

Spengler et al. (1997) szimultán szétszerelési és felhasználási tervvel határozták meg a pontos felhasználási kapacitásokat. Az egész tervezési problémát egy tevékenység-analitikus modellel írták le, amely jelen esetben egy vegyes egészértékű lineáris programozási feladatot jelent. Létrehoztak egy szétszerelési gráfot, amelyen egy komplett termék alternatív szétszerelési lépéseit tüntetik fel (v_j , ahol j=1,…..n). Magát a terméket m különböző komponensre lehet bontani, amelyeket vagy további alkotóelemekre lehet szétszedni, vagy különböző felhasználási módjai vannak, amelyek közé tartozik a hulladéklerakóban való elhelyezés is. A különböző szétszerelési tevékenységek végrehajtási gyakorisága ($x_{j,}$, ahol j=1,….n), amely a feldolgozandó termékek számából adódik, meghatározza az egyes komponensek számát (y_{ji}, ahol j=1,… m), ami így a felhasználáshoz szükséges további szétszerelésekhez rendelkezésre áll. A felhasználandó mennyiségek meghatározzák a feldolgozási és felkészítési lépések számát (z_{is}, ahol s=1,….r), amelyek végül a felhasználás során bevételt vagy költségeket jelentenek.



4.1. ábra. A szétszerelési és újrafelhasználási tevékenységek tervezésének szimultán kezelése (Inderfurth (1998))

A cél az x_j és a z_{is} változók révén a szétszerelési és felhasználási tevékenységek eredményének maximalizálása. E tervezési rendszer áttekintését az 4.1. ábrán szemléltetem.

4.2.3. Integrált anyagdiszpozíció

Lényege, hogy az újrafelhasználandó termék, vagy a termék alkotóelemének visszaáramlását a feldolgozási folyamat megfelelő szintjével összekapcsolja. Ez komoly koordinációs problémát jelent, amit az okoz, hogy a termelés és a feldolgozás termékszükségletét vissztermékekkel is ki lehet elégíteni, miközben a két folyamat időigénye eltérő. A diszpozíciós feladat a hagyományos termelés és recycling tevékenységek, valamint a hulladék-elhelyezési tevékenységek összehangolása, továbbá az adott tervezési időszakban a várható költségek (termelési, recycling, elhelyezési, tárolási és szállítási) minimalizálása. A tárolás diszpozíciós problémájának két különböző megoldási lehetősége van:

- a döntési folyamat folyamatos ellenőrzése, és
- a döntési folyamat periódikus ellenőrzése.

A bizonytalansági problematika kivédhető azáltal, hogy számításokat végeznek a termékek iránti szükségletre, valamint a recycling-termékek visszaküldésére vonatkozóan. Általában abból indulnak ki, hogy minden termék tárolása megoldható, és hogy a recycling-javakra a feldolgozás mellett mindig fennáll a hulladéklerakóba való elhelyezés lehetősége is.

A megrendelés-korlátos stratégiát három paraméter jellemzi a tárolási diszpozícióval kapcsolatban:

- raktározási korlát a hagyományos termelésben,
- recycling adta lehetőségek korlátja
- a hulladéklerakóba való elhelyezés lehetőségének a korlátja.

Abban az esetben, ha a recycling-javak köztes tárolása nem lehetséges, akkor a recycling és a hulladék-elhelyezési korlátok ezzel összhangban vannak (Inderfurth (1998)).

4.3. Az MRP rendszerbe integrált újrafelhasználás tervezés

4.3.1. Hulladékok keletkezése és csoportosítása

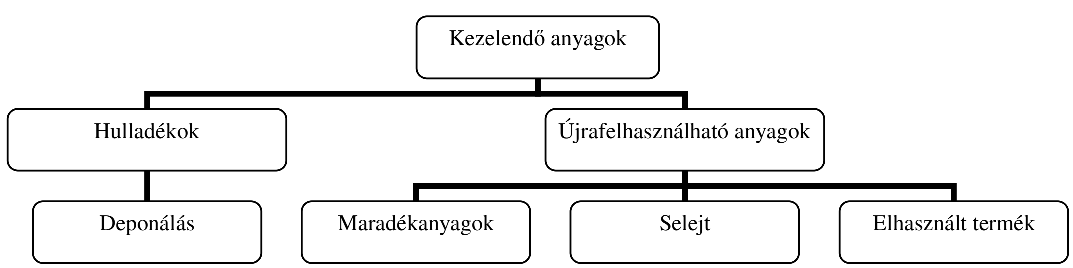
A termelési folyamat során inputjavakból más javakat állítanak elő, de az output előállítása során különböző melléktermékek keletkeznek, amelyek az ipari termelésből nem zárhatók ki. A termelési folyamat során tehát keletkeznek olyan javak, amelyek a termelési tervben nem jelennek meg. A melléktermékeket csak akkor tudjuk teljes mértékben kizárni, ha lemondunk az előállítandó javakról, de a melléktermékek mennyiségét mindenekelőtt azzal csökkenthetjük, ha gondoskodunk a megfelelő terméktervezésről, illetve megfelelő intézkedéseket hozunk a beszerzés, termelés és a minőség területén egyaránt.

A hulladékokat két fő kategóriába lehet csoportosítani: szubjektív hulladékokra és objektív hulladékokra. Szubjektív hulladéknak tekinthető minden olyan anyag, amitől annak tulajdonosa szabadulni akar, de arra vonatkozóan semmi megkötést nem tartalmaz, hogy ezek az anyagok felhasználhatók-e vagy sem. Az objektív hulladékok azok a hulladékok, amelyeknek újrahasznosítására nincs lehetőség, tehát azokat hulladéklerakóban kell elhelyezni.

Corsten és Reiss (1991) azon hulladékokat, amelyek felhasználhatók, recycling-javaknak nevezték el, s e körben a következő csoportosítást végezték el:

- *Melléktermékneк* tekinthető minden olyan anyag és energia, amely az előállított végtermékben nem jelenik meg. A melléktermékek tovább csoportosíthatók anyagmaradék és hulladék kategóriákra. A maradékanyagok a melléktermékek azon csoportját képezik, amelyek újrafelhasználhatók, ezáltal az újrafelhasználás lehetséges terméke lehet, míg a hulladék esetén nincs lehetőség az újrafelhasználásra, vagy gazdasági okokból nem megvalósítható.
- A termelés során a termékek és a melléktermékek mellett *selejtek* is keletkeznek: ezen három objektumkategória hasznosítási formája a recycling. Abban az esetben, ha ezen anyagokat azonnal nem használják fel, akkor azok készletekké válnak, s ezáltal maga a recycling készletproblémává válik, amely döntési helyzetekhez vezet.
- *Használt termékek* :az életciklusuk végén lévő vagy technikailag elöregedett termékek.

A fenti besorolás hibája, hogy a melléktermékeket recyclingjavaknak tekinti, habár azok objektív hulladékok, s nem lehetnek a recycling tárgyai. A recyclingjavak fogalmába az objektív hulladékok nem számítanak bele. A hulladékok csoportosítását a 4.2. ábra szemlélteti.



4.2. ábra. Az újrafeldolgozásra kerülő anyagok csoportosítása (Becher-Roseman (1993))

4.3.2. A visszagyűjtés/-vezetés folyamata

Az újrafelhasználást megelőzi a hulladékok visszagyűjtése a vállalathoz. A használt termékek visszagyűjtése a források és célállomások fizikai és információs összekapcsolásával valósulhat meg.

4.3.2.1. Összegyűjtés

A visszagyűjtés folyamatának első eleme az összegyűjtés. Az összegyűjtés alatt azt a folyamatot kell érteni, hogy a használt termékeket a gyűjtési helyre szállítják. Az összegyűjtés a rendelkezésre álló tervezési információkon alapul (gyűjtésből származó). Az adatgyűjtés az összegyűjtés része - egy információs folyamat -, amely során meghatározzák az összegyűjtési szükségletet, mégpedig a vásárlók lakóhelye, az összegyűjtendő készülékek száma és az elszállítás határideje alapján. További adatok szükségesek a használt termékek típusáról, koráról és minőségi állapotáról. Ezen információk képezik az alapját a begyűjtés túratervezésének, valamint a szétszerelési és felhasználási folyamatnak, azaz ennek alapján tervezik meg az összegyűjtést.

A használt termékek összegyűjtésének három típusa van:

- Az összegyűjtő tevékenységet végzők elmennek a használt termékekért és a közös gyűjtőhelyre szállítják azokat, ami lehet egy szétszerelő gyár, vagy pedig egy átrakodóhely.
- A használt termék tulajdonosa szállítja a használt terméket a gyűjtőhelyre.
- Az előző két rendszer kombinációja.

Az összegyűjtést általában a város által megbízott szemétszállító vállalkozások végzik, bár az is egyre jellemzőbb lesz, hogy a különböző műszaki cikkeket forgalmazó cégek visszaveszik a használt gépeket, amennyiben a tulajdonos új gépeket vesz náluk

Az adatok és a használt termékek összegyűjtését különböző nehézségek hátráltathatják, például:

- Az adatgyűjtésre különböző párhuzamos rendszerek állnak rendelkezésre a vásárlók számára, s a szolgáltatók specifikus kínálata nem megfelelően konkretizált.

- Telefonon történő rendelésfelvétel vagy adatgyűjtés nem minden esetben lehetséges, ha igen, akkor is csak hosszú várakozási idő után, illetve többszöri próbálkozásra.
- A bejelentés és az összegyűjtés között a város és a gyűjtőrendszer elérhetősége miatt egytől akár több hét is eltelhet.
- A megadott elszállítási időt sok esetben nem tudják betartani.
- Maga az összegyűjtés csak az utcára kihelyezett használt termékek elvitelét jelenti, a házban, lakásban, illetve pincében elhelyezett gépekre nem terjed ki.
- Olyan járműveket használnak az összegyűjtésre, amelyek maximális tárolókapacitása nincs kihasználva.
- Az egyre növekvő számú gyűjtőrendszer versenyhez vezet a használt termékekért, mégpedig azért, hogy a gyűjtőrendszer , valamint a felhasználóüzemek kapacitáskihasználtsága is maximális legyen. Ezáltal a gyűjtési útvonalak egyre hosszabbak lesznek, ami egyben nagyobb szállítási távolságot, környezetterhelést, valamint költséget jelent.

4.3.2.2. Átrakodás/rakodás

Rakodás mindazon szállítási és tárolási folyamat, amely a termék szállítási eszközre való felrakása, szállítóeszközről való levétele, illetve szállítóeszköz váltása esetén merül fel. Sok esetben azért van szükség az átrakodásra, hogy csökkentsék a termékáramlás koncentrációját. Az átrakodás nem opcionális tevékenység, hiszen mind a közvetlen visszavezetés, mind pedig a lépcsőzetes visszavezetés folyamatában szerepel. Az átrakodás nagyrészt kézzel történik, ami egyfelől magas rakodási költségeket okozhat, másrészt kárt okozhat a feldolgozandó termékekben a nem szakszerű kezelés.

4.3.2.3. Szállítás

Szállítás alatt jelen esetben a termelési és fogyasztási folyamatból kivont, de még újrafelhasználható termékek elszállítását értjük a gyűjtőhelyekre vagy valamilyen központi gyűjtőhelyre. A szállítás egylépcsős visszavezetés esetén a szétszerelő gyárba történő szállítást jelenti, míg egy többlépcsős visszavezetés esetén pedig a következő gyűjtőhelyre. A szállítási költségek csökkentése érdekében a szállításhoz más járműveket használnak, mint az összegyűjtéshez. A szállítás nem kényszerű tevékenység a visszavezetés folyamatában, hiszen ha csekély a távolság a forrás és a célállomás között, akkor a gyűjtőtúra a célállomáson végződik. A szállítást általában teherautókkal végzik.

A szállítással kapcsolatban felmerülő problémák:

- Az automatizálható, s ezáltal hatékonyabb átrakodási folyamat korlátozott.
- A használt termékek a fel- és lepakolásnál - akárcsak a szállítás során - megsérülhetnek.
- A csapadék korrózióhoz vezet s ez által csökkenti a szétszerelhetőséget.
- A szállításnál használt segédanyagok nem raktározhatók, ezért nincs lehetőség azok helytakarékos tárolására.

4.3.2.4. Tárolás-raktározás

A tárolás a megmunkálandó anyagok tervezett elhelyezése. A raktározás célja

- a beszerzés, szállítás és termelés ingadozásainak kivédése,
- a kínálat és a kereslet közötti különbségek kiegyensúlyozása,
- az ismeretlen keresleti és kínálati divergenciák bizonytalanságának csökkentése,
- választék kialakítása.

Létezik outputorientált és inputorientált tárolás. Ahogy a neve is mutatja, az outputorientált a használt termékek forrására, tehát a használt termékek tulajdonosaira koncentrál, akik le akarják adni használt termékeiket. Az inputorientált tárolás a visszagyűjtés célállomására vonatkozik, ami lehet egy szétszerelő gyár, amely a szétszereléssel inputot állít elő a termelés számára.

4.3.2.5. Szétválogatás/szortírozás

A szétválogatás vagy szortírozás a begyűjtött használt termékek speciális szétszerelő vagy újrafelhasználó műveletek szerinti szétválogatását jelenti. Magán a konkrét szétszerelésen kívül itt végzik el a rendelkezésre álló, illetve szállítható használt termékek dokumentációját, s ez által a szétszereléshez szükséges információknak nagy jelentősége van. Ezen dokumentációk és információk lehetővé teszik a specializált szétszerelő gyárak, illetve üzemek számára, hogy tervezni tudják kapacitásaikat, akárcsak a szétszerelés eredményeként létrejövő értékesíthető alkatrészeket. Ebből következően már a szortírozás keretében elvégezhető egy előzetes szétszerelés, s ez által növelhető az ezt követő szállítási folyamat hatékonysága, s a szétszerelendő mennyiség csökkentésével jobb szállításkihasználtság érhető el. Ezen kiegészítő tevékenységek révén megnő a kereslet a speciális szolgáltatásokat nyújtó szortírozó üzemek iránt. Maga a szortírozás már nem a géptípusok és variánsok szerinti szétválogatást jelenti, hanem a későbbi szétszerelés céljából végzendő tevékenységet.

4.3.2.6. Csomagolás

A csomagolásnak védelmi, tárolási, szállítási, azonosítási és információs funkciója van, amelyek az értékesítést és használatot lehetővé teszik. A csomagolás során a legfontosabb, hogy az a lehető legkevésbé szennyezze a környezetet, amely elérhető azáltal, hogy a vállalatok olyan szállítóeszközöket használnak, amelyek kevesebb vagy semennyi csomagolóanyagot nem igényelnek (pl. konténerek).

A visszagyűjtés folyamatát befolyásolják továbbá a teljesítményprogramok, a szolgáltatások színvonala és minősége. Fontos ismerni a vásárlók elvárásait a visszagyűjtési rendszerrel szemben, mint például a szolgáltatások minőségét illetően, hiszen ezek befolyásolják azt, hogy mennyire fogják a kiépített rendszert, hálózatot használni, azaz ezen szolgáltatások iránti keresletet, ami a szolgáltatások költsége nagyban meghatároz (Waltemath, 2001).

4.3.3. A recycling fogalma és típusai

Magán az újrafelhasználáson a szilárd, folyékony és gáz halmazállapotú maradékanyagok, selejtek és használt termékek termelési folyamatokba való visszahozatalát/visszavezetését értjük.

Minden vállalat olyan rendszernek tekinthető, amely termékeket és hulladékokat ad le outputként a környezetének, s anyagokat (nyers- és egyéb anyagokat), valamint energiát vesz fel inputként. Jahnke (1986) megkülönböztet belső, vállalatok közötti, illetve külső recyclinget.

- A *belső vállalati recycling* azt jelenti, hogy a recyclingra ítélt termék a gyártó vállalathoz kerül vissza recyclingra. Létezik közvetett és közvetlen recycling is a belső vállalati recyclig esetén: közvetlen esetén a recycling-javakat ugyanabba a termelési folyamatba helyezik vissza, ahonnan kikerültek, közvetettnél pedig a termelési folyamatba való visszahelyezést megelőzi valamilyen köztes kezelés.
- *Vállalatok közötti recyclingról* akkor beszélhetünk, ha külső vállalat termékének recyclingjáról van szó.
- *Külső vállalati recyclingról* beszélünk, ha a termék recyclingját más vállalatok végzik el.
- Létezik azonban *kooperatív recycling* is, ami a vállalatok közötti és a külső vállalati recycling speciális esetének tekinthető, hisz ebben az esetben nemcsak recycling-javak áramlanak az egyik vállalattól a másikhoz, hanem a recyclinghoz szükséges tervezési, valamint munkatervi információk is.
- *Gyártórecycling* esetén a belső és a vállalatok közötti recycling speciális esetéről van szó, amikor a recycling-javak recyclingja a gyártó vállalatnál valósul meg.
- Azon termékek esetén, amelyek az adott termelési folyamatban keletkeznek *primer,* más esetekben pedig *szekunder recyclingról* beszélhetünk.

A direkt, illetve indirekt és a primer-szekunder recycling kapcsolatát jól szemlélteti a 4.2. táblázat. (Rautenstrauch (1997)).

	Direkt	**Indirekt**
Primer	Újrafelhasználás	Továbbfelhasználás
Szekunder	Újraértékesítés	Továbbértékesítés

4.2. táblázat. A recycling egy lehetséges csoportosítása (Rautenstrauch (1997))

4.3.3.1. A recycling másfajta csoportosítása

1. A maradékanyagot vagy selejtterméket minden további kezelés nélkül ugyanabba a termelési folyamatba inputként visszavezetik;
2. A maradékanyagokat, illetve selejttermékeket minden további kezelés nélkül másfajta termelési folyamatba vezetik vissza inputként;
3. A maradékanyagot és a selejtterméket kezelésnek vetik alá - ami lehet szétszerelés illetve átalakítás -, ami után:
4. ugyanazon termelési folyamatba inputként visszavezetik,
5. más termelési folyamatba vezetik vissza, a recycling-javakat használat után tárolás céljából deponálóba viszik, miután a vállalaton belüli kezelés (nyersanyag-visszanyerés, vagy feldolgozás) során feljavított inputként felhasználták
6. A recycling-javakat vállalaton kívüli kezelésre küldik, s utána inputként használják fel.
7. Lehetőség van a deponálóban elhelyezett objektumok kezelésére.
8. A recycling-javakat együttműködési szerződés alapján két vagy több vállalat közösen is újrafelhasználhatja, mint a 2. és az 5. esetben, vagy pedig egy külső vállalattal végeztetik el.

E csoportosítás alapján az 1.-6 vállalaton belüli recyclinget, a 7. és 8. vállalatok közötti recyclingot jelent.

Az újrafelhasználás során további problémát jelenthet a maradék anyagok igen magas szintű heterogenitása (ide tartozik a használtság mértéke, a korrózió és a szennyezettség foka), és a maradék anyagok alacsony koncentráltsága. Mindkét tényező jelentősen megnehezíti az anyagok összegyűjtését, tárolását, szállítását, szortírozását és felkészítését. (Corsten H., Reiss M., (1991))

4.3.3.2. A recycling csoportosítása folyamatok alapján

- *Termelési hulladék recycling*: vállalaton belüli recyclingot jelent, mégpedig a termelés során keletkező maradékanyagok és selejtek recyclingját.
- A *termékhasználat alatti recycling*: használt termékek feldolgozása azzal a céllal, hogy legalább részben újrahasználhatóvá tegyék az adott terméket.
- *Használt anyag recycling*: annyiban különbözik a termékhasználat alatti recyclingtól, hogy a recyclingra szoruló termék már nem használható újra. Ebben az esetben a recycling során kinyert anyagokat nyers- vagy egyéb anyagként visszavezetik a termelésbe.

4.3.4. A recycling céljai, feltételei, eszközei és korlátai

4.3.4.1. Célok

A recycling alapvető céljai többek között a nyersanyagok és energiaszükségletek, a környezetterhelés csökkentése, a jelenlegi raktárkapacitások megkímélése a hulladék és selejtanyagok csökkentése vagy megszüntetése révén.

Az egyéni vállalkozások szintjén a következő célkitűzésekről beszélhetünk:

- mennyiségi célokról, ami különösen a nyersanyagok csökkentését jelenti, valamint
- időbeli célokról, ami az egyes recycling-javak élettartamának a meghosszabbítása, ezáltal ezen javak keletkezési ütemének a lassítását, illetve a bizonytalanság csökkentését jelenti.

Magának a termelési folyamatnak kialakítása során a költséges tőkelekötés minimalizálása az élettartam csökkenését okozza, az értékbeli célok (ideértve a recycling-, a recycling-logisztikai-, feldolgozási-, valamint a tervezési- és tranzakciós költségek) minimalizálása révén

4.3.4.2. Feltételek

Az újrafelhasználás esetén számos, a vállalat által nem befolyásolható adottságot kell figyelembe venni, amelyek korlátozóan hatnak a vállalat számára, ilyen például:

- a nyersanyagok teljes visszanyerése a recycling-javakból gyakran nem lehetséges,
- a recycling-javak általában nem tetszés szerinti gyakorisággal használhatók fel újra,
- nem minden recyclingtermék használható fel újra gazdasági szempontok szerint,
- a recycling-folyamat során környezetkárosító termék jön létre,
- bizonyos javak esetén az újrafelhasználás törvényben előírt és innentől kezdve nem tekinthető döntési problémának.

A recycling tekinthető úgy is, mint a primer nyersanyagok felhasználásának/fogyasztásának ideiglenes tehermentesítése, mégpedig azért, mert a recycling által meghosszabbodik egy-egy termék élettartama.

4.3.4. Eszközök

Eszközök esetén különbséget teszünk a recycling-javak alkalmazása, illetve kezelése terén hozott intézkedések között:

1. Az alkalmazás során szortírozás, szállítás, tárolás segítségével a keletkező recycling-javak feldolgozás nélkül felhasználhatók,
2. A kezelési folyamat során valamilyen feldolgozási eljárást végrehajtanak a recycling-javakon, ami lehet szétválasztás vagy átalakítás (biológiai-technikai vagy kémiai-technikai) folyamat.

A recycling döntési modellt, mint bármely más döntési vagy tervezési modellt csak akkor alkalmazhatjuk, ha a recycling-javakról a döntéshez szükséges releváns információk rendelkezésre állnak (úgy mint típus, hely és idő szerinti rendelkezésre állás, valamint mennyiség, minőség és ár). A döntés komplexitását növelő faktorok közül az első az alapvető célfunkció, amely jelenthet egyváltozós vagy többváltozós célfunkciót. A többváltozós célok esetén a célok között konfliktusok állnak fenn, s nem csak az ökológiai és gazdasági célok között van konfliktus.

A különböző faktor-csoportok a következő komplexitás-fokokat határozzák meg.

1.) Termelési folyamat:

a) a recycling-javak felhasználható mennyiségének alsó és felső korlátai adottak,
b) a termelési folyamat illeszkedési követelménye a recycling-folyamatra,
c) a recycling-javak visszavezetése ugyanabba, illetve más termelési folyamatba.

2.) Recycling-javak:

a) csak maradékanyagokról, selejtekről, illetve használt termékekről, vagy pedig mindhárom formájú recycling-javakról van szó,
b) a recycling-javak keletkezése időben lehet folyamatos, illetve nem folyamatos,
c) tárolhatóság lehetősége: adott vagy nem adott, a recycling-javak heterogenitásbeli sokszínűsége (tisztaság, forma, színjellemzők, anyagjellemzők hőálló-nem hőálló),
d) az anyag illesztése (rejtett vagy nyílt, a részek elválaszthatósága), anyagrokonság.

3.) Újrafelhasználási folyamat

a) az újrafelhasználási folyamat mélysége (szétszerelés, illetve feldolgozás foka),
b) az újrafelhasználási folyamat mellékterméke: használható, illetve nem felhasználható mennyiségbeli károk (veszteségek az újrafelhasználás során),
c) minőségbeli veszteségek (károk az újrafelhasználás során).

A termeléstervezési és -irányítási rendszerek feladata: a termelési folyamat lebontása mennyiségi és időbeli szempontok alapján, a kapacitáskorlátok figyelembevétele mellett, valamint tervezés, végrehajtás, ellenőrzés, az eltérések megfelelő intézkedésekkel való kezelése, annak érdekében, hogy az alapvető célokat elérjük.

4.3.4.4. Korlátok

- *Technikai korlátok*: a recycling-javak tetszés szerinti gyakorisággal nem használhatók fel újra, mert minden egyes recyclinggal romlik a minőség. Továbbá a recycling-javak gyakran nem használhatók fel teljes egészében újra, mert korlátozottan szerelhetők szét, mivel egyes anyagok szétválasztása technikailag nem lehetséges.
- *Gazdasági korlátok*: a recycling által okozott költségek meghaladják a recycling eredményét, illetve a primer anyagokban történő megtakarítást.
- *Ökológiai korlátok*: a recyclinghoz szükség van energiára, a recycling-javak szállítására és gyakran primer anyagokra, hogy feljavítsák a minőséget. A recycling gyakran ökológiai szempontból nem hasznos, mert a recycling által okozott környezetszennyezés meghaladja az általa elért ökológiai hasznosságot.
- *Pszichológiai korlátok*: a használt anyagokból készült termékek gyakran alacsonyabb minőségűnek néznek ki, ezért a piac tudatos tartózkodással reagál az ilyen termékekre (Rautenstrauch (1998)).

4.3.5. Az MRP rendszer

Az MRP rendszer alapvető célja a befolyásolható költségek (termelési, szállítási, tárolási, eszközköltség) minimalizálása. E rendszer időbeli és mennyiségbeli céljai a következők:

- minimális átfutási idő,
- nagy pontosság,
- alacsony készletszint,
- maximális kapacitáskihasználtság.

A 4.3. táblázatban az MRP rendszer befolyásolható elemei megfelelően foglalhatók össze:

Objektum Cél	Kapacitás	Megbízás
Időnagyság	Kapacitáskihasználtság	Átfutási idő (Átf.idő csökkentése)
Mennyiségbeli nagyság	Személyzeti és eszközállomány	Szállíthatóság
Értékbeli nagyság	Kapacitásköltség	Hiány- és tárolási költség

4.3. táblázat. Az MRP célrendszere (Corsten-Reiss (1991))

Annak érdekében, hogy az újrafelhasználási folyamatot integrálni tudjuk az MRP rendszerbe, a tervezéshez szükségünk van a recycling-javakról és recycling-folyamatokról releváns információkra. Ahhoz, hogy ezen információk a megfelelő formában rendelkezésre álljanak, egy megfelelően kiépített vállalati környezeti információs rendszerre van szükség. Ezen információs rendszernek figyelemmel kell kísérnie a jogszabályi környezet folyamatos változását, emisszió- csökkentési intézkedéseket kell bevezetnie, környezetvédelmi statisztikákat, információkat kell tartalmaznia a hulladékkezelésről, beszerzési módokról, minőségről, anyag- és energiafolyamatokról (anyag- és energiamérleg) a különböző inputok és outputok tekintetében. Azt is vizsgálják, hogy mely vállalati/termelési folyamatok kapcsán lép fel környezetszennyezés és azok milyen mértékű környezetszennyezést okoznak, mert ez alapján kell a szennyezési adót fizetni. Az MRP rendszernek az újrafeldolgozási rendszerrel történő horizontális kibővítése három területen jelent kiszélesítési igényt:

1. recycling programtervezés,
2. recycling kapacitástervezés,
3. recycling folyamattervezés.

1.) *A recycling-program szélessége és mélysége is specifikált*

Az MRP rendszerben a következő bővítési szükségletek adódnak:

- A szállítási és tárolási kapacitásokat figyelembe kell venni és prioritási szabályok meghatározására van szükség, hogy a nem vagy csak a korlátozottan tárolható javakat használják fel először.
- A szállítás felülvizsgálatára mindenképpen szükség van, mégpedig a szállítandó recycling-javak mennyiségére és határidejére vonatkozóan. Tekintettel kell lenni továbbá a feldolgozási folyamat során a gyártási lépésekre, valamint a recycling termékek mennyiségére és határidejére. Figyelni kell az emissziós határértékekre a nem felhasználható melléktermékek kezelésekor. A további feldolgozáshoz mennyiségi és minőségi kritériumok betartására van szükség.

2.) *Mennyiségi tervezés*

A mennyiségi tervezés során is szükség van az MRP rendszer kibővítésére és átalakítására. A maradékanyagok és hulladékok elsősorban az alkatrészek és nyersanyagok nettó szükségletét csökkentik, s ezen újrafelhasznált inputjavakat a termelési folyamatban inputként lehet felhasználni, a recycling-javak keletkezése azonban nagyfokú bizonytalanságot hordoz magában. A bruttó szükségletet az anyagszükségleti tervből határozzák meg. Bővítésre van szükség az adatok kezelése és feldolgozása tekintetében. Ide tartozik:

- a megbízhatósággal kapcsolatos (termelési idő, mennyiség és minőség),
- gépekkel kapcsolatos (állási idő),
- munkaerővel kapcsolatos (hiányzások és jelenléti idők) és
- anyagokkal kapcsolatos (anyaghiány és rendelkezésre állás az egyes anyagokból az egyes termelési helyeken)adatok begyűjtése, tárolása, frissítése, feldolgozása.

Természetesen ezen anyagoknak nemcsak a termelési, hanem az újrafelhasználási folyamat számára is rendkelezésre kell állnia. Szükség van továbbá munkatervre is, amely a recycling-javak mennyiségbeli és típus szerinti csoportosítását végzi.

3.) *Recycling-folyamattervezés*

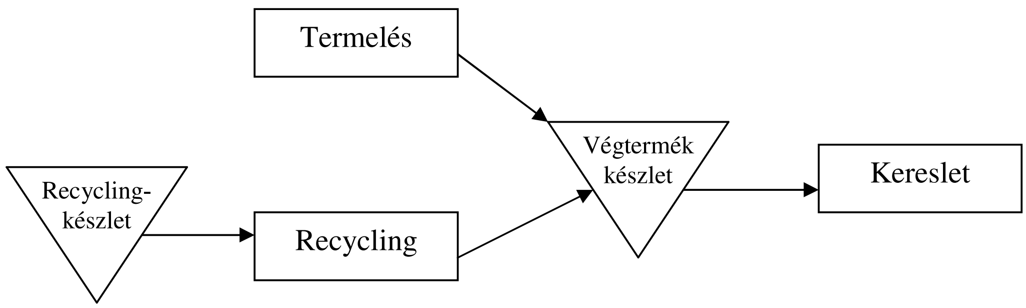
Az MRP rendszerben az egyes tervezési szintek egyoldalúan függenek egymástól, egymásra épülnek, míg maga a recycling folyamat cirkuláris természetű, azaz a folyamatai függetlenek egymástól. A termeléstervezés különböző lépcsőfokai lineárisan vannak kiépítve, ezáltal az egyes tervezési szintek közötti függetlenséget törvényszerűen figyelmen kívül hagyják. Az egyes lépcsőfokok teljesíthetősége az előzményektől függ, azaz az egyes döntési szintek a következő döntési szint számára feltételként jelentkeznek. A termelési programnak és a kapacitásoknak illeszkedniük kell egymáshoz. Ha a tevékenységeket a kapacitásoktól független átfutási idővel végzik, az inkonzisztenciákhoz vezet a tervezésben, mivel a mennyiségi tervben meghatározott naturáliák, valamint a határidő és kapacitástervben meghatározott határidő nem tartható be, hiszen a szerződésben megadott határidő nem egyezik meg a szükséges határidővel. Mivel az újrafelhasználáshoz szükséges maradékanyagok és hulladékanyagok nem állandó, hanem rendszertelen mennyiségben érkeznek, ezért a recycling folyamatban megbízható átfutási idő meghatározása a hagyományos MRP rendszert bonyolítja. A tervezés linearitása és a tervezési objektum ciklikussága a tervezés időbeliségét nehezíti.

A nettó szükséglet fedezésére az újrafelhasznált termék feldolgozás után felhasználható. A bruttó szükséglet esetén pedig a gyári, a rendelt, a tartalék és a biztonsági készletek mellett a beépíthető recyclingjavak felhasználhatók.

A tervezés kapcsán fontos megjegyezni a döntések centralizáltságának mértékét. Abban az esetben, ha a recycling folyamatban a maradékanyagok, a hulladékanyagok, illetve selejtek, valamint használt termékek is megjelennek, annál inkább mondhatjuk, hogy a recycling folyamat többlépcsős, s ezáltal maga az MRP rendszer sokkal centralizáltabb lesz. Tehát a komplexitás és a centralizáltság között pozitív korreláció van. Továbbá minél bizonytalanabb a recycling folyamat, annál kevésbé centralizált a kibővített MRP rendszer (Corsten-Reiss (1991)).

4.3.6. Recyclinggal bővített MRP tábla

A recyclinggal bővített MRP tábla első fele nem igazán tér el a hagyományos MRP táblától, bár az ebben kiegészítésként szereplő sor - a recycling készlet - azt jelenti, hogy a hagyományos készletek kibővülnek, mégpedig alternatív készlettel, hiszen a visszaküldött termékekből kinyert alkatrészek és anyagok bekerülnek a készletek közé, s innentől kezdve nem tesznek különbséget a használt, illetve új készletek között. A tervezési horizont 6 periódusos, 15 egységes biztonsági szint és 2 hetes átfutási idő jellemzi a 4.4. táblázatot. Az anyagáramlási folyamatot, amit az MRP-tábla mutat, a 4.3. ábrán szemléltetjük.



4.3. ábra. Az MRP-tábla anyagáramlása

A jelen időszak raktárkészlete sort a következő művelet eredménye adja: a termelt, a recycling, valamint az előző időszaki raktárkészlet összege, csökkentve a bruttó szükséglettel. A raktárkészlet mennyiségénél figyelni kell arra, hogy a biztonsági készletszint 15 egység. A visszaérkezések várható szintje adott, azaz 4 egység. A recycling folyamat raktármennyisége is adott. A recyclingszükséglet 4, ez a várható visszaküldésekből következik. A recycling rendelés a recycling szükségletből adódik, 2 hét átfutási idővel eltolva. A kezelési szükséglet a recyclingfolyamat raktármennyisége, csökkentve a recyclingrendeléssel. A termelési szükséglet a nettó szükséglet, csökkentve a recycling szükséglettel, a termelésfeladás pedig ennek eltolása két hét átfutási idővel.

	0	1	2	3	4	5	6
Bruttó szükséglet		10	10	10	10	10	10
Termelt készlet		8	14				
Recycling készlet		5	4				
Raktárkészlet	9	12	20	15	15	15	15
Nettó szükséglet		3	0	5	10	10	10
Várható visszaérkezés		4	4	4	4	4	4
Recycling folyamat raktár mennyisége	7	4	4	4	4	4	4
Recycling szükséglet		-	-	5	4	4	4
Recycling rendelés		5	4	4	4	-	-
Kezelési szükséglet		2	0	0	0	-	-
Termelési szükséglet		-	-	0	6	6	6
Termelésfeladás		0	6	6	6	-	-

4.4. táblázat. A recyclinggal bővített MRP-tábla (Inderfurth-Jensen (1998))

Ezzel sikerült az anyagszükséglet tervezési rendszerbe kiegészítésként beépíteni a visszaáramlott használt recycling-javak újrafeldolgozását.

4.4. Összegzés

Összegzésként megállapítható, hogy napjainkban egyre fontosabbá válik a környezetvédelem, s ez a folyamat komoly előrelépésnek tekinthető a néhány évtizeddel ezelőtti gondolkodáshoz képest. Mindaddig azonban, amíg a vállalatok nem látnak a tudatos környezetvédelemben igazi üzletet, azaz nem ébrednek rá arra, hogy versenyelőnnyé válhat visszutas logisztikai tevékenységük - ha azt stratégiai szinten kezelik -, addig környezetünk megóvása érdekében nem léphetünk nagyot. Versenyelőnnyé válhat, ha a társadalom szemében egy vállalat környezettudatos tevékenységet folytat, s ezt különböző auditokkal és környezetvédelmi elismerésekkel alátámasztja, hiszen a társadalom tagjai növekvő környezettudatosságuk miatt egyre inkább a környezetbarát termékek felé fordulnak.

A dolgozatban bemutattam több eljárást is, melyek révén a vállalatok csökkenthetik a primer nyersanyagok, illetve energia felhasználását, valamint a környezetszennyezést, s az alkalmazható módszerek közül kiválaszthatják a tevékenységüknek leginkább megfelelőt. A lehetőség tehát adott, „csak" el kell kötelezniük magukat a szemléletváltás és a hosszú távú környezetvédelem mellett. Ugyanakkor szükség van arra is, hogy az emberek fogyasztói szemlélete megváltozzon, aktívan vállaljanak szerepet a környezet védelme érdekében. Természetesen az államnak is jelentős befolyásolása van és lehet annak alakítására, hogy az adott társadalom menyire környezettudatos, illetve mennyire sikerül megértetni, hogy nemcsak a mi életünkről, jövőnkről van szó, hanem a jövő generációk sorsáról is, s nem tehetjük meg, hogy lehetetlen életkörülményeket hagyjunk magunk után.

5. Összefoglalás és további kutatások

A dolgozatban a visszutas logisztikát és annak a termeléstervezésbe történő beépíthetőségét mutattam be. A visszutas logisztika az MRP-be (anyagszükséglettervezési rendszerek) teljes mértékig integrálható, ugyanakkor megnehezítheti a modellépítést, hogy ebben az esetben az adattáblában kezelni kell a beérkező és újrafeldolgozható termékeket is a szokásos új termékeken kívül. Az adattábla utolsó sora mutatja a megelőző fázisok és/vagy beszerzés szükségletét. Itt jelenik meg a készletgazdálkodási probléma: összevonjon-e a döntéshozó termelési és/vagy beszerzési tételeket. A klasszikus MRP-ben a szükségletek kielégítésére heurisztikákat alkalmaznak, mint a Groff-algoritmus, Silver-Meal-heurisztika stb. Az ilyen heurisztikák szinte minden esetben az optimális tételnagyság modell (EOQ) optimalitási kritériumát használják fel. Ez az a tulajdonság, hogy az optimumban a rendelési/átállítási költségek megegyeznek a készlettartási költségekkel. A kérdés most úgy hangzik, hogy a létező EOQ-típusú visszutas logisztikai modellek hogyan alkalmazhatóak az MRP-ben?

A kérdés megválaszolásához hat, az irodalomban elérhető EOQ-típusú visszutas logisztikai modellt ismertettem. A modellek azon közös feltevésen alapulnak, hogy a hiányt kizárják. A költségstruktúra teljesen analóg a klasszikus tételnagyság modellekkel, vagyis az új termékek beszerzési/termelési ciklusfix és készlettartási költségei ismertek, valamint a használt termékek újrafeldolgozási ciklusfix és készlettartási költségei is.

Ezen feltételezések mellett egységes szerkezetben vizsgáltam a modelleket; megmutatva, hogy azok a függelékben található meta-modellhez vezetnek. Erre azért van szükség, mert a készletezési célfüggvény felírása után két helyettesítéssel egyszerűsíthető a függvény: vagy a tételnagyságokat helyettesítjük a költségfüggvénybe, vagy a tételszámokat. Ha a tételszámokkal kezdjük az egyszerűsítést, akkor a költségfüggvényben nem tudjuk a tételszámok egészértékűségét a továbbiakban vizsgálni. Ezért a matematikai kezelhetőség kedvéért célszerűbb a tételnagyságokat behelyettesíteni, ami pedig a meta-modellhez vezet. Ezzel a módszerrel sikerült a modelleket általánosítani azokra az esetekre is, amikor mind a beszerzési/termelési tételszámok, mind az újrafeldolgozási tételszámok nagyobbak, mint egy. Olyan példát is mutattam, amikor mind a két tételszám határozottan nagyobb, mint egy.

Vizsgáltam azokat az eseteket is, amikor az EOQ-típusú költségeken kívül lineáris beszezési/termelési, újrafeldolgozási és hulladékkezelési költségekkel bővül a költségfüggvény. Ekkor azt mutattam meg, hogy az optimális megoldásban a hulladékkezelés negligálható, azaz minden visszatérő és újrafeldolgozható terméket gazdaságos használni. Ennek szükséges feltétele az, hogy a két tiszta stratégia közül, vagyis a beszerzés/termelés és a teljes újrafeldolgozás közül az újrafeldolgozás legyen gazdaságosabb.

A bemutatott készletmodellek lehetnek az alapjai olyan heurisztikák megalkotásához, amelyeket az MRP-ben is lehet alkalmazni. Ismereteim szerint ezen a területen még nincs előrelépés az irodalomban. A Wagner-Whitin (1958) dinamikus tételnagyság modell újrafeldolgozással történő kibővítését Richter-Sombrutzki (2000), Richter-Weber (2001) és Richter-Gobsch (2005) végezték el.

Most a Richter-Sombrutzki (2000) modellt ismertetem, ami lényegében Schrady (1967) modelljének kiterjesztése arra az esetre, amikor a kereslet és a visszaérkezés időben változik. Ebben a modellben nem értelmezzük a hulladékkezelést. A modell paramétereinek és változóinak használatánál eltérek a hivatkozott cikkben alkalmazottól, helyette a Schrady-féle jelölést veszem át.

A modell mérlegegyenletei a következő formában írható fel:

$$\begin{aligned} I_t &= I_{t-1} + Q_t^P + Q_t^R - D_t \\ i_t &= i_{t-1} - Q_t^R + R_t \end{aligned}, \qquad (t = 1,2,\ldots,T)$$

$$\begin{aligned} &I_t \geq 0, \quad i_t \geq 0, \\ &Q_t^P \geq 0, \quad Q_t^R \geq 0. \end{aligned}, \qquad (t = 1,2,\ldots,T)$$

ahol $I_0 = i_0 = 0$. Az első egyenlőség azt mondja ki, hogy az új termékek induló készlete egy t-ik időszakban növekszik a beszerzéssel és javítással, amit csökkent a kereslet. A második egyenletben a használt termékek készletét növeli a beáramlás, de csökkenti a javításba vont használt termékek mennyisége. A következő egyenlőtlenségek a modell változóinak nemnegativitását mondják ki.

A célfüggvény

$$\sum_{t=1}^{T}\left(A_P \cdot sign\,Q_t^P + h_1 \cdot I_t + A_R \cdot sign\,Q_t^R + h_2 \cdot i_t\right) \rightarrow \min .$$

A célfüggvény a rendelési, átállítási költségek és a készlettartási költségek összege. A *sign* függvény értéke nulla, ha az argumentum értéke nulla, különben egy.

Foglaljuk most össze a paramétereket és változókat.

A modell paramáterei:

- D_t a t-ik periódus kereslete az új termék iránt, nemnegatív,
- R_t a t-ik időszak visszaérkező használt termék mennyisége, nemnegatív,
- I_0 az új termékek kezdőkészlete a tervezési horizont kezdetén,
- i_0 a használt termékek kezdőkészlete a tervezési periódus elején,
- A_P egy rendelésre eső fix rendelési költség, PE/rendelés,
- A_R egy javítási tételre eső fix indítási költség, PE/tételindítás,
- h_1 a beépíthető alkatrészek készlettartási költsége, PE/darab/idő,
- h_2 a javítandó alkatrészek készlettartási költsége, PE/darab/idő,
- T a tervezési időhorizont hossza.

A modell változói:

- I_t az új termékek kezdőkészlete a t-ik ciklus kezdetén, nemnegatív,
- i_t a használt termékek kezdőkészlete t-ik periódus elején, nemnegatív,
- Q_t^P beszerzési tételnagyság a t-ik periódusban, nemnegatív,
- Q_t^R javítási tételnagyság a t-ik időszakban, nemnegatív.

Richter és Sombrutzki (2000) bebizonyították a modell néhány tulajdonságát.

Lemma (Richter-Sombrutzki (2000)):

Az optimális megoldásban teljesülnek a következő egyenlőségek:

(i) $Q_t^P \cdot Q_t^R = 0, \qquad (t = 1,2,\ldots,T)$

(ii) $I_{t-1} \cdot (Q_t^P + Q_t^R) = 0, \quad (t = 1,2,\ldots,T).$

Ezeket a tulajdonságokat nem bizonyítjuk, mivel az említett cikkben megtalálhatóak. Az (i) pont szerint egy periódusban vagy beszerzés, vagy javítás lehet az optimális megoldásban, de egyszerre a kettő nem. A második egyenlőség szerint ha a készletállomány pozitív egy periódus elején, akkor a periódusban beszerzés vagy javítás nem történik. Ha azonban a készletállomány zérus, akkor az időszakban beszerzésre, vagy javításra sor kell, hogy kerüljön. Ez a második egyenlőség teljesen analóg a Wagner-Whitin (1958) modellben foglaltakkal, vagyis termelni ott csak akkor kell, ha a készletállomány nulla. Amint látjuk, a Schrady-féle modell készletezési stratégiája felhasználta e két tulajdonságot. A bemutatott modell megoldható a dinamikus programozás módszerével, de a megoldás számítástechnikailag rendkívül időigényes, ami szükségessé teszi szuboptimális megoldást előállító heurisztikák előállítását.

Az első, további kutatást kívánó kérdés az, hogy mennyire használható az EOQ-típusú visszutas logisztikai készletmodell a fentebb ismertetett kibővített Wagner-Whitin-féle dinamikus tételnagyság megoldására. Egy másik vizsgálandó kérdés, hogy hogyan állítható elő egy szuboptimális megoldást nyújtó algoritmus.

A következő kérdés a létrehozandó heurisztikák működésére irányul: ha vannak ismert algoritmusok, amelyek az EOQ-ra alapozódnak, akkor azok milyen költség- és rendszerparaméterekre adnak az optimálishoz legközelebb eső megoldást? Az ilyen típusú vizsgálatok szimulációk végrehajtásához vezetnek. Numerikus elemzések nélkül a kérdést nem lehet megválaszolni. Ezeket a jövőben létrehozandó heurisztikákat lehetne majd felhasználni a termeléstervezésben a rendelési/gyártási tételek összevonására.

Felhasznált irodalom

1. Arrow, K.J., Enthoven, A.C. (1961): Quasi-concave programming, Econometrica, Vol. 29, No. 4, 779-800
2. Arrow, K.J., Karlin, S. (1958): Production over Time with Increasing Marginal Costs, In: K.J. Arrow, S. Karlin, H.Scarf (Eds.): Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford Univ. Press, Stanford, 61-69
3. Becher J., Rosemann M. (1993): Logistik und CIM, Springer-Verlag, Berlin et al.
4. Carter, C. R.- Ellram, L. M. (1998): Reverse logistics: A review of the literature and framework for future investigation, Journal of Business Logistics,. No.1., 85-101.
5. Corsten H., Reiss M. (1991): Recycling in PPS-Systemen, Die Betriebswirtschaft, 615-627
6. Cselényi J.- Mang B.- Bányainé Tóth Á.- Bányai T. (1997): A recycling logisztika, mint a logisztikai kutatások dinamikusan fejlődő egyik új iránya, Logisztika, 1. sz., 8-13.
7. de Brito, M. P. – Dekker, R. (2004): A framework for reverse logistics, In: Dekker, R.- Fleischmann, M. – Inderfurth, K. – van Wassenhove, L. (2004, Eds.): Reverse Logistics: Quantitative Models for Closed-Loop Supply Chains, Springer- Berlin et al., 3-27
8. Dekker, R., Fleischmann, M., Inderfurth, K., Van Wassenhove, L.N. (2004): Reverse Logistics – Quantitative Model for Closed-Loop Supply Chains, Springer, Berling et al.
9. Dobos I. (2004): Készletmodellek a visszutas logisztikában, In: Czakó E., Dobos I., Kőhegyi A. (Szerk.): Vállalatai versenyképesség, logisztika, készletek: Tanulmányok Chikán Attila tiszteletére, BKÁE Vállalatgazdaságtan tanszék, (2004), Budapest, 290-303
10. Dobos, I. (1999): Production-Inventory Strategies for a Linear Reverse Logistics System, Discussion Paper 431, Faculty of Economics and Business Administration, University Bielefeld.
11. Dobos, I. (2001): Optimal inventory strategies for EOQ-type reverse logistics systems, Working Paper Nr. 1, Department of Business Economics, Budapest University of Economics and Public Administration
12. Dobos, I. (2002): The generalization of SCHRADY´s model: a model with repair,

Working Paper Nr. 7, Department of Business Economics, Budapest University of Economics and Public Administration

13. Dobos, I. (2002): The optimality of Richter´s model of repair and waste disposal, Working Paper Nr. 10, Department of Business Economics, Budapest University of Economics and Public Administration
14. Dobos, I. (2003a): Comparison of disposal strategies in linear reverse logistics models, Working Paper Nr. 41, Department of Business Economics, Budapest University of Economics and Public Administration
15. Dobos, I. (2003b): Optimal production-inventory strategies for a HMMS-type reverse logistics system, International Journal of Production Economics 81-82, 351-360
16. Dobos, I., Kistner, K.-P. (2000): Production-Inventory Control in a Reverse Logistics System, Proceedings of the 11th Int. Working Sem. on Prod. Econ., Igls/Innsbruck, 2000, Austria, Pre-Prints Vol. 2., 67-86
17. Dobos, I., Richter, K. (1999a): Comparison of Deterministic One-Product Reverse Logistics Models, in: Hill, R., Smith, D. (Eds.): Inventory Modelling: A Selection of Research Papers Presented at the Fourth ISIR Summer School (1999), Exeter 1999, 69-78
18. Dobos, I., Richter, K. (1999b): A Remanufacturing Model Reconsidered: A Technical Note, Discussion paper Nr. 128 (1999), Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Europa-Universität Viadrina Frankfurt (Oder)
19. Dobos, I., Richter, K. (1999c): The number of batch sizes in a remanufacturing model, Discusion paper 132, Viadrina European University of Frankfurt (Oder), Faculty of Economics and Business Administration.
20. Dobos, I., Richter, K. (2000): The integer EOQ repair and waste disposal model – further analysis. Central European Journal of Operations Research 8, 173-194
21. Dobos, I., Richter, K. (2003): A production/recycling model with stationary demand and return rates, Central European Journal of Operations Research 11, 35-46
22. Dobos, I., Richter, K., (2004): An extended production/recycling model with stationary demand and return rates, International Journal of Production Economics 90, 311-323
23. Dobos, I., Richter, K., (2006): A production/recycling model with quality considerations, Int. J. of Production Economics, to appear

24. Feichtinger, G., Hartl, R.F. (1986): Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse: Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften, de Gruyter, Berlin
25. Ferrer, G., Whybark, D. C. (2000): Material Planning for a Remanufacturing Facility, Production and Operations Management Vol. 10, 112-124
26. Fleischmann, M., Bloemhof-Ruwaard, J.M., Dekker, R., van der Laan, E. van Nunen, J.A.E.E., van der Wassenhove, L.N. (1997): Quantitative models for reverse logistics: a review. European Journal of Operational Research 103, 1-17
27. Grím, T., Dobos, I. (2006): Termeléstervezés a visszutas logisztikában, Vezetéstudomány, megjelenés alatt
28. Guide, V.D.R. (2000): Production planning and control for remanufacturing: industry practice and research needs, Journal of Operations Management 18, 467-483
29. Gupta, M. C.(1995), Environmental management and its impact on the operations function, Int. Journal of Operations & Decision Management 15(8): 34-51
30. Hill, R.M. (1996): Optimizing a production system with fixed delivery schedule, Journal of the Oper. Research Society 47, 954-960
31. Holt, C.C., Modigliani, F., Muth, J.F., Simon, H.A. (1960): Planning Production, Inventories, and Work Forces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
32. Inderfurth K. (1998): Neue Aufgaben und Lösungsansatze der Produktionsplanung bei Produktrecycling, Preprint Nr. 26, Fakultät für Wirtschaftwissenschaften, Otto-von-Guericke Universität, Magdeburg
33. Inderfurth, K., Jensen, T. (1998): Analysis of MRP policies with recovery options, 10th Int. Working Sem. on Production Economics, Innsbruck/Igls, Austria, Pre-Prints Vol. 2., 265-300
34. Jahnke, B. (1986): Betriebliches Recycling: Produktionswirtschaftliche Probleme und betriebwirtschaftliche Konsequenzen, Gabler-Verlag, Wiesbaden
35. Kelle, P., Silver, E.A. (1989): Purchasing policy of new containers considering the random returns of previously issued containers, IIE Transactions 21(4): 349-354
36. Kistner, K.-P., Dobos, I. (2000): Optimal Production-Inventory Strategies for a Reverse Logistics System, In: Dockner, E. J. , Hartl, R. F., Luptacik, M., Sorger, G. (Eds.): Optimization, Dynamics, and Economic Analysis: Essays in Honor of Gustav Feichtinger, Physica-Verlag, Heidelberg, New York, 246-258

37. Kleber, R., Minner, S., Kiesmüller, G. (2002): A continuous time inventory model for a product recovery system with multiple options, International Journal of Production Economics 79, 121-141
38. Koh, S.-G., Hwang, H., Sohn, K.-I., Ko, C.-S. (2002): An optimal ordering and recovery policy for reusable items, Computers & Industrial Engineering 43, 59-73
39. Kohut, Zs., Nagy, A. (2004): A logisztika környezetvédelmi vonatkozása: A visszutas logisztika, Összhangban az elmélet és a gyakorlat?, TDK - dolgozat, BKÁE, Vállalatgazdaságtan Tanszék, Budapest
40. Kohut, Zs., Nagy, A., Dobos, I. (2005): Visszutas logisztika: Egy fogalmi keret, Vezetéstudomány , 36, 47-54
41. Kopicky, R. J. – Berg, M. J. – Legg, L. – Dasappa, V. – Maggioni, C. (1993): Reuse and recycling: Reverse logistics opportunities, Council of Logistics Management, Oak Brook, IL
42. Krumwiede, Dennis W.-Sheu, Chwen: A model for reverse logistics entry by third-party providers, Omega 30, 2002, 325-333
43. Lambert, D.M., Stock, J.R. (1981): Strategic Physical Distribution Management, Irwin, Homewood, IL
44. Mabini, M.C., Pintelon, L.M., Gelders, L.F. (1998): EOQ type formulation for controlling repairable inventories. International Journal of Production Economics 54, 173-192
45. Mike, G. (2002): A logisztika környezetvédelmi kérdései és a Reverse Logistics, 19. sz. műhelytanulmány BKÁE, Vállalatgazdaságtan Tanszék, Budapest
46. Minner, S., Kleber, R. (2001): Optimal Control of Production and Remanufacturing in a Simple Recovery Model with Linear Cost Functions, OR Spektrum 23, 3-24
47. Murphy, P.R., Poist, R.P. (1989): Managing of logistics retromovements: An empirical analysis of literature suggestions, Transportation Research Forum, Vol. 29, No. 1, 177-184
48. Nahmias, N., Rivera, H.: (1979): A deterministic model for repairable item inventory system with a finite repair rate. International Journal of Production Research 17(3), 215-221
49. Pohlen, T. L.- Farris, M. (1992): Reverse logistics in plastic recycling, International Journal of Physical Distribution and Logistics Management, Vol. 22, No. 7., pp. 35-47.

50. Rautenstrauch C. (1997): Fachkonzept für ein integriertes Produktions-, Recyclingplanungs- und Steuerungsystem (PrPS), Walter de Gruyter, Berlin
51. Richter, K. (1994): An EOQ repair and waste disposal model, Proceedings of the Eight International Working Seminar on Production Economics, Vol. 3, 83-91, Igls/Innsbruck
52. Richter, K. (1996a): The EOQ repair and waste disposal model with variable set-up numbers, European Journal of Operational Research 96, 313-324
53. Richter, K. (1996b): The extended EOQ repair and waste disposal model, International Journal of Production Economics 45, 443-447
54. Richter, K. (1996c): Modellierung von kombinierten Wiederverwendungs- und Entsorgungsprozessen, in: H. Wildemann (Ed.): Produktions- und Zuliefernetzwerke, TCW Transfer-Centrum-Verlag München, 279-291
55. Richter, K. (1997): Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem, OR Spektrum 19, 123-129
56. Richter, K., Dobos I. (1996): Solving the integer EOQ repair and waste disposal problem, In: Flapper, S. D., de Ron, A. J. (Eds.): Proceedings: First International Working Seminar on Reuse (1996), Eindhoven, 247-255
57. Richter, K., Dobos I. (2003a): Az újrahasznosítás hatása a gazdasági sorozatnagyságra, Szigma XXXIV. (2003), 45-63
58. Richter, K., Dobos, I. (1999): Analysis of the EOQ repair and waste disposal model with integer setup numbers, International Journal of Production Economics 59, 463-467
59. Richter, K., Dobos, I. (2003b): A Reverse Logistics Model with Integer Setup Numbers, In: Leopold-Wilbdurger, U., Rendl, F., Wäscher, G. (Eds.): Operations Research Proceedings 2002: Selected Papers of the International Conference on Operations Research (SOR 2002), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 95-101
60. Richter, K., Dobos, I. (2004): Production-inventory control in an EOQ-type reverse logistics system, In: Dyckhoff, H., Lackes, R., Reese, J. (Eds.): Supply Chain Management and Reverse Logistics, Springer Verlag, Berlin et al., 139-160
61. Richter, K., Gobsch, B. (2005): Kreislauf-Logistik mit Losgrössenrestriktionen, Zeitschrift für Betriebswirtschaft-Special Issue 4/2005, 57-78
62. Richter, K., Sombrutzki, M. (2000): Remanufacturing planning by reverse Wagner/Whitin models, European Journal of Operational Research 121, 304-315

63. Richter, K., Weber, J. (2001): The reverse Wagner/Whitin modell with variable manufacturing and remanufacturing cost, Int. J. of Production Economics 71, 447-456
64. Rixer, A. (1995): Az inverz logisztika és a logisztika, mint körfolyamat, Közlekedéstudományi Szemle XLV., 166-175
65. Rogers, D. S. -Tibben-Lembke, R. S. (1999): Going Backwards: Reverse Logistics Trends and Practices, Reverse Logistics Executive Council, Pittsburgh
66. Schrady, D.A. (1967): A deterministic inventory model for repairable items, Naval Research Logistic Quarterly 14, 391-398
67. Seierstad, A., Sydsaeter, K. (1987): Optimal Control Theory with Economic Applications, Noth-Holland, Amsterdam
68. Spengler T., Püchert H., Penkuhn T., Rentz O. (1997): Environmental Integrated Production and Recycling Management, European Journal of Operational Rearch 97, 308-326
69. Stock, J. R (1998): Development and Implementation of Reverse Logistics Program, Council of Logistics Management, Oak Brook, IL
70. Stock, J. R. (1992): Reverse Logistics, Council of Logistics Management, Oak Brook, IL
71. Takayama, A. (1985): Mathematical Economics, Cambridge University Press, Cambridge et al.
72. Teunter, R. (2004): Lot-sizing for inventory systems with product recovery, Computers & Industrial Engineering 46, 431-441
73. Teunter, R., van der Laan, E. (2002): On the non-optimality of the average cost approach for inventory models with remanufacturing, International Journal of Production Economics 79, 67-73
74. Teunter, R.H. (2001): Economic Ordering Quantities for Recoverable Item Inventory Systems, Naval Research Logistics, Vol. 48, 484-495
75. Thierry, M. - Salomon, M. J. - van Nunen, J. - van Wassenhove, L. (1995): Strategic Issues in Product Recovery Management, California Management Review, Vol. 37., No. 2., pp. 114-135.
76. Thompson, G.L., Sethi, S.P. (1980): Turnpike Horizons for Production Planning, Management Science 26, 229-241

77. Vörösmarty, Gy., Dobos, I. (2003): Purchasing Strategies in Reverse Logistics Systems, In: Chikán, A. (Eds.): Proceedings of the 12th International IPSERA Conference, Budapest, (2003), 1082-1088
78. Wagner, H.M., Whitin, T.M. (1958): Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, Management Science 5, 89-96
79. Waltemath, A. M. (2001): Altproduktrückführung als logistische Dienstleistung, Dissertation, Technische Universität, Berlin

1. Függelék

A meta-modell

A meta-modellnek elnevezett alábbi egészértékű optimalizációs feladatot vizsgáljuk tetszőleges valós paraméterekre,

$$S(m,n) \to min$$
$$(m,n) \in R_G = \{(m,n): m,n \in \{1,2,...\}\},$$

azaz az optimális *(m,n)* értékek felkutatását mutatjuk be, ahol az *S(m,n)* függvény definíciója $S(m,n) = A \cdot \frac{m}{n} + B \cdot \frac{n}{m} + C \cdot m + D \cdot n + E$. E Richter és Dobos (1999) által felvetett problémát röviden egészértékű problémának hívjuk.

Az egészértékű feladat relaxált programja a következő

$$S(m,n) \to min$$
$$(m,n) \in R = \{(m,n): (m,n) \geq 1\},$$

amelyet Richter (1994, 1996a, 1996b, 1996c, 1997) és Richter és Dobos (1999) elemeztek. Ez utóbbi problémát folytonos feladatnak nevezzük. Először a Richter (1994, 1996a, 1996b, 1996c, 1997) dolgozatokban szereplő tulajdonságokat foglaljuk össze.

1. A folytonos és egészértékű probléma optimális megoldásának létezése

Mindkét feladatnak egyidejűleg létezik optimális megoldása.

1. Lemma (Richter (1997)): Az *S(m,n)* függvény akkor és csak akkor korlátos az *R* és R_G halmazokon, ha

$$C \geq 0 \wedge D \geq 0 \wedge A+C \geq 0 \wedge B+D \geq 0. \qquad \text{(F.1)}$$

Teljesüljön az (F.1) feltétel. Ekkor igaz a következő lemma:

2. Lemma (Richter (1997)): Az (F.1) feltétel teljesülésen esetén az egészértékű és relaxált problémának pontosan akkor létezik megoldása, ha

$$\{A \le 0 \wedge B \le 0\} \vee \{A+C > 0 \wedge B+D > 0\}. \tag{F.2}$$

A lemmák bizonyításától itt eltekintünk, az az említett irodalomban megtalálható.

2. A folytonos probléma optimális megoldásának struktúrája

Tételezzük fel, hogy az *A* és *B* paraméterek pozitívak.

3. Lemma (Richter (1997)): A következő két görbe: $M(n) = n\sqrt{\frac{B}{A+Cn}}$ és $N(m) = m\sqrt{\frac{A}{B+Dm}}$ *m*-re vagy *n*-re a lokális minimumokat tartalmazza *n* illetve *m* esetén, az $S(M(n),n) = 2\sqrt{(A+Cn)B} + Dn + E$ és $S(m,N(m)) = 2\sqrt{(B+Dm)A} + Cm + E$ értékekkel $S(m,n)$ függvény vonatkozásában. Az $S(m,n)$ függvény monoton növekvő ezen görbék mentén.

A függvény nívóhalmazát definiáljuk, mint $lev_F S = \{(m,n) > 0 : S(m,n) \le F\}$ tetszőleges *F* esetén. Az $S(m,n)$ függvényt kvázi-konvexnek hívjuk, ha a $lev_F S$ nívóhalmaz minden tetszőleges *F* esetén konvex. A kvázi-konvexitás egy ekvivalens meghatározása egy *f* függvényre

$$f(\lambda \cdot x + (1-\lambda)\cdot x') \le \max\{f(x), f(x')\}$$
$$\forall \lambda \in (0,1), \forall x, x' \in X$$

(lásd Arrow és Enthoven (1961), Takayama (1985)). Az *f* függvény szigorúan kvázi-konvex, ha

$$f(\lambda \cdot x + (1-\lambda)\cdot x') < \max\{f(x), f(x')\}$$
$$\forall \lambda \in (0,1), \forall x, x' \in X.$$

Az alábbiakban e koncepció alkalmazást mutatjuk be a kvázi-konvex függvény nívóhalmazára.

1. Tétel: Ha a $A > 0,\ B > 0,\ C+D \geq 0$ tulajdonságok teljesülnek, akkor $S(m,n)$ függvény szigorúan kvázi-konvex.

Bizonyítás. A tétel bizonyításához a szigorú kvázi-konvexitás feltételét kell ellenőriznünk. A kvázi-konvexitás definícióból következik, hogy az $F(\lambda) = f(x' + \lambda(x - x'))$ függvénynek nincs maximuma a *0* és *1* között. Vizsgáljuk a problémánkat a következő formában:

$$G(\lambda) = A \cdot \frac{m + \lambda \cdot \Delta m}{n + \lambda \cdot \Delta n} + B \cdot \frac{n + \lambda \cdot \Delta n}{m + \lambda \cdot \Delta m} + C \cdot (m + \lambda \cdot \Delta m) + D \cdot (n + \lambda \cdot \Delta n) + E\,,$$

ahol $(m,n)>(0,0)$ egy tetszőleges pont, és $(\Delta m,\Delta n)$ egy lehetséges irány. Azt kell bizonyítanunk, hogy a $G(\lambda)$ függvénynek nincs maximuma semmilyen (m,n) és $(\Delta m,\Delta n)$ vektor esetén.

(i) $\Delta m<0,\ \Delta n>0.$

Ebben az esetben

$$\frac{m + \lambda \cdot \Delta m}{n + \lambda \cdot \Delta n} = \frac{m - \dfrac{\Delta m}{\Delta n} \cdot n}{n + \lambda \cdot \Delta n} + \frac{\Delta m}{\Delta n}$$

egy konvex függvénye λ-nak, mert a nevező pozitív, és az alábbi függvény

$$\frac{n + \lambda \cdot \Delta n}{m + \lambda \cdot \Delta m} = \frac{n - \dfrac{\Delta n}{\Delta m} m}{m + \lambda \cdot \Delta m} + \frac{\Delta n}{\Delta m}$$

is konvex, mert a Δm érték negatív. A függvény többi része lineáris és konvex, így a $G(\lambda)$ függvény konvex és így semmilyen $\lambda>0$ esetén nincs maximuma. A $\Delta m>0$, $\Delta n<0$ esetet hasonlóan láthatjuk be.

(ii) $\Delta m>0$, $\Delta n>0$, $n\cdot\Delta m-n\cdot\Delta m>0$.

Vizsgáljuk most a $G(\lambda)$ függvény deriváltját. Azt fogjuk megmutatni, hogy a függvénynek létezik minimuma.

$$G'(\lambda) = A\cdot\frac{n\cdot\Delta m - m\cdot\Delta n}{(n+\lambda\cdot\Delta n)^2} + B\cdot\frac{m\cdot\Delta n - n\cdot\Delta m}{(m+\lambda\cdot\Delta m)^2} + C\cdot\Delta m + D\cdot\Delta n$$

Azt az esetet tekintjük, amikor a $G(\lambda)$ függvény monoton nemcsökkenő. Ekkor

$$A\cdot(n\cdot\Delta m - m\cdot\Delta n)\cdot\frac{(m+\lambda\cdot\Delta m)^2}{(n+\lambda\cdot\Delta n)^2} \geq -(C\cdot\Delta m + D\cdot\Delta n)\cdot(m+\lambda\cdot\Delta m)^2 + B\cdot(n\cdot\Delta m - m\cdot\Delta n)$$

.

A baloldali függvény monoton növekvő, míg a négyzetes függvény monoton csökkenő a C és D paraméterek nemnegativitása miatt. (Ezt egyszerű deriválással beláthatjuk.) Ekkor egy és csak egy λ^0 érték létezik, amely kielégíti az egyenlőséget, ha

$$A\cdot(n\cdot\Delta m - m\cdot\Delta n)\cdot\frac{m^2}{n^2} \geq -(C\cdot\Delta m + D\cdot\Delta n)\cdot n^2 + B\cdot(n\cdot\Delta m - m\cdot\Delta n).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\lambda > \lambda^0$ intervallumon a függvény monoton növekvő és a másik esetben monoton csökkenő. Ha λ^0 érték nem létezik, akkor a $G(\lambda)$ függvény monoton növekvő minden nemnegatív λ esetén. Ezzel beláttuk a tételt.

Kvázi-konvex programozás esetére a következő tétel szolgáltatja az optimalitás szükséges és elégséges feltételét. Egy változót relevánsnak hívunk, ha pozitív értéket vesz fel a korlátozó feltételek megsértése nélkül.

2. Tétel. (Arrow és Enthoven (1961), Takayama (1985)): Legyen *f(x)* *n*-változós differenciálható kvázi-konvex függvény, és legyen *g(x)* egy *m*-változós differenciálható kvázi-konvex függvény, és $x \geq 0$. Az x^0 and λ^0 elégítse ki a Kuhn-Tucker-Lagrange feltételeket, és teljesüljön egy az alábbi feltételekből:

(a) $f_{x_{i_0}} > 0$ legalább egy x_{i_0} változóra;

(b) $f_{x_{i_1}} < 0$ néhány x_{i_1} változóra;

(c) $f_x \neq 0$ és *f(x)* kétszer folytonosan differenciálható az x^0 egy környezetében;

(d) *f(x)* konvex.

Ekkor az x^0 minimalizálja az *f(x)* függvényt, ha $g(x) \leq 0$, $x \geq 0$.

A bizonyítást elhagyjuk, az az Arrow és Enthoven (1961) dolgozatban fellelhető.

Ellenőrizzük az F.2. tétel (c) pontját a problémánkra.

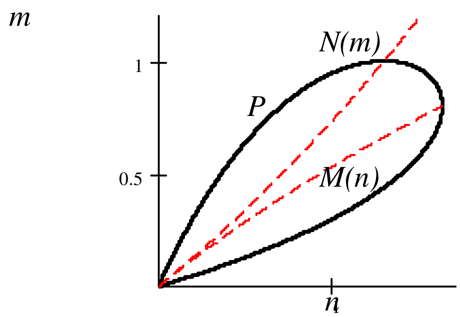
4. Lemma: Legyen $(m_0, n_0) \geq (1, 1)$. Ekkor

(a) $$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial m} \\ \dfrac{\partial S}{\partial n} \end{pmatrix}_{(m_0 \quad n_0)} = \begin{pmatrix} A \cdot \dfrac{1}{n_0} - B \cdot \dfrac{n_0}{m_0^2} + C \\ -A \cdot \dfrac{m_0}{n_0^2} + B \cdot \dfrac{1}{m_0} + D \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(b) $$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial m^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial m \partial n} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial n \partial m} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot B \cdot \dfrac{n_0}{m_0^3} & -A \cdot \dfrac{1}{n_0^2} - B \cdot \dfrac{1}{m_0^2} \\ -A \cdot \dfrac{1}{n_0^2} - B \cdot \dfrac{1}{m_0^2} & 2 \cdot A \cdot \dfrac{m_0}{n_0^3} \end{pmatrix}.$$

A lemma bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

Amint megmutattuk, a meta-modell egy kvázi-konvex szélsőértékszámítási feladat, és az *S(m,n)* függvény kielégíti az F.2. tétel (c) pontját. Ez a feltétel garantálja az optimális megoldás létezését. Egy példát az *S(m,n)* függvényre az F.1. ábrán láthatunk.



1. ábra: A lokális minimumok görbéje és az *S(m,n)* függvény nivóhalmaza a következő paraméterekkel: *A = 25, B = 10, C = 10, D = 5, E = 0* és *F = 48,73*

Az *S(m,n)* függvény lehetséges esetei közül néhányat mutat az F.1. táblázat. (Richter (1997))

Eset	*A*	*B*	*C+D*	*A+C*	*B+D*	Az *S(m,n)* tulajdonsága
a)	> 0	> 0	≥ 0			konvex *m*- és *n*-ben, szigorúan kvázi-konvex *(m,n)*-ben
b)	≤ 0 > 0	> 0 ≤ 0		> 0 > 0	> 0 > 0	növekvő *m*-ben, konvex *n*-ben növekvő *n*-ben, konvex *m*-ben
c)	≤ 0	≤ 0		≥ 0	≥ 0	növekvő *m*-ben és *n*-ben

1. táblázat: *S(m,n)* függvény lehetséges esetei

A folytonos probléma explicit megoldását adja az alábbi tétel.

3. Tétel (Richter (1996a)): Ha az (F.1) - (F.2) feltételek teljesülnek akkor az *R* probléma optimális megoldása (m^*,n^*) értékek és az S^* minimális költség esetén:

(i) $B \geq A+C \quad \Rightarrow \quad (m^*,n^*) = \left(\sqrt{\dfrac{B}{A+C}},1\right), \qquad S^* = 2\sqrt{B(A+C)}+D+E,$

(ii) $A\text{-}D \leq B \leq A+C \Rightarrow \quad (m^*,n^*) = (1,1), \qquad S^* = A+B+C+D+E$

(iii) $A \geq B+D \quad \Rightarrow \quad (m^*,n^*) = \left(1,\sqrt{\dfrac{A}{B+D}}\right), \qquad S^* = 2\sqrt{A(B+D)}+C+E.$

3. Az egészértékű probléma optimális megoldása

3.1. Az F.1. táblázat a) esete

5. Lemma: Teljesüljön az F.1. tétel feltétele és az előbbi tétel (i) feltételéhez $49 \cdot A \leq 527 \cdot C$ vagy a (iii) feltételéhez $49 \cdot B \leq 527 \cdot D$. Ekkor az optimális egészértékű megoldás $n = 1$ vagy $m=1$.

Bizonyítás. Vizsgáljuk az (iii) feltételt. Tegyük fel, hogy $S(1,n) \geq S(1,n+1)$ és az optimális folytonos megoldás $(1,n^*)$. Legyen $n+1 = n^*+\delta$. Elemi átalakításokkal megmutatható, hogy

$$S(1,n+1) = 2 \cdot \sqrt{A \cdot (B+D)} + C + E + \sqrt{A \cdot (B+D)}\,\frac{\delta^2}{n^* \cdot (n^*+\delta)}\ ,$$

ahol $0 < \delta < 0.5$. Analizáljuk a következő problémát: $\sup\limits_{n^* \geq 1.5,\ 0<\delta<0.5} \left\{ \frac{\delta^2}{n^* \cdot (n^*+\delta)} \right\}$.

Ez a függvény monoton növekvő δ-ban monoton csökkenő n^*-ban. Ekkor $\frac{\delta^2}{n^* \cdot (n^*+\delta)} \leq \frac{1}{12}$,

és

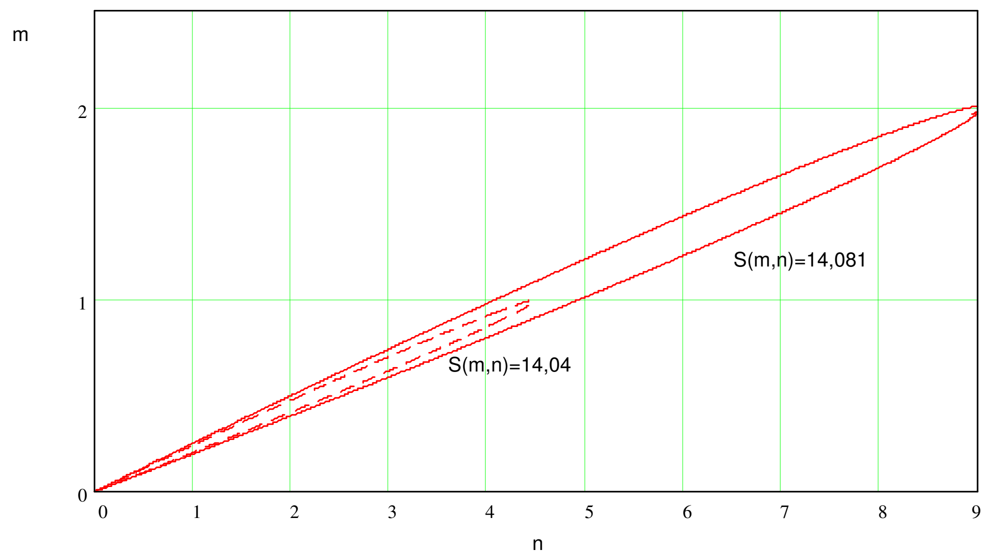
$$S(1,n+1) \leq \frac{25}{12} \cdot \sqrt{A \cdot (B+D)} + C + E\,. \tag{F3}$$

Bármely más $m \geq 2$ megoldás nem nagyobb értéket ad, mint $S(2,n_2)$, ahol $n_2 = M(2)$ és $S\left(2, 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{B + 2 \cdot D}}\right) = 2 \cdot \sqrt{A \cdot (B + 2 \cdot D)} + 2 \cdot C + E$, amint azt a F.3. lemmában láttuk. Az

$$S(1,n+1) \leq \frac{25}{12} \cdot \sqrt{A \cdot (B+D)} + C + E \leq 2 \cdot \sqrt{A \cdot (B + 2 \cdot D)} + 2 \cdot C + E = S(2,n_2)$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{25}{12} \cdot \sqrt{A \cdot (B+D)} - 2 \cdot \sqrt{A \cdot (B + 2 \cdot D)} \leq C$ is teljesül. A lemma feltétele biztosítja az állítást. Ha $S(1,n) \leq S(1,n+1)$ akkor $n=n^*-\delta$ és hasonló becslést nyerünk.

1. megjegyzés. Legyen $A=20{,}25$, $B=1$, $C=0{,}04$, $D=0{,}0001$, $E=5$. Ekkor az optimális folytonos megoldás $(1,n^*) = (1;4{,}5)$ és $S(1,n^*) = 14{,}04$, amíg $S(1,4) = 14{,}103 > S(1,5) = 14{,}091 > S(2,9) = 14{,}081$, azaz az optimális egészértékű megoldás nincs az $m=1$ vonalon. Az is világos, hogy az F.1. táblázat b) pontjában is hasonlóesetek fordulhatnak elő. (Lásd F.2. ábra).



2. ábra. Az $S(m,n)$ függvény folytonos és egészértékű megoldása a nivóhalmazokkal, ha a paraméterek $A = 20{,}25$, $B = 1$, $C = 0{,}04$, $D = 0{,}0001$, $E = 5$

3.2. Az F.1. táblázat b) esete

F.6. Lemma: Ha a folytonos optimális megoldás nem egész, akkor az optimális egész megoldás

(i) $B \geq A+C \Rightarrow (m^g,1)$, ahol m^g az $\sqrt{\dfrac{B}{A+C}}$ -hez legközelebb eső egész,

(iii) $A \geq B+D \Rightarrow (1,n^g)$, ahol n^g $\sqrt{\dfrac{A}{B+D}}$ -hez legközelebb eső egész.

Bizonyítás. (i) Legyen $A \leq 0 < B$. Mivel az $S(m,n)$ függvény egyidejűleg konvex n-ben és konkáv és növekvő m-ben, az említett megoldások közül az egyik optimális.

3.3. Az F.1. táblázat c) esete

Ez az eset csak akkor fordul elő, ha az F.1. tételben $A\text{-}D \leq B \leq A+C$ és a folytonos megoldás ekkor automatikusan egészértékű.

Az előző lemma optimális egészértékű megoldását, azaz vagy $n = 1$ vagy $m = 1$, határmegoldásnak hívjuk. A következőkben arra a kérdésre keresünk választ, hogy a határmegoldás mikor lesz egyben optimális egészértékű megoldás.

4. Tétel (Richter és Dobos (1999)) Teljesüljenek az F.4. és F.5. lemma feltételei. Ekkor a következő határmegoldások találhatóak a diszkrét problémára:

$$(i)\ B \geq A+C \Rightarrow m^g = \left\lfloor \sqrt{\frac{B}{A+C}+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2} \right\rfloor,\ n^g = 1$$

$$(ii)\ A-D \leq B \leq A+C \Rightarrow m^g = n^g = 1,$$

$$(iii)\ A \geq B+D \Rightarrow m^g = 1,\ n^g = \left\lfloor \sqrt{\frac{A}{B+D}+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2} \right\rfloor$$

Bizonyítás. (iii) A lemmából következik, hogy a két lehetséges $(1,n)$ és $(1,n+1)$ egészből egyik a megoldás, ha a folytonos optimális megoldás $n < n^* < n+1$. Ekkor $S(1,n) \leq S(1,n+1)$ pontosan akkor teljesül, ha $A\dfrac{1}{n(n+1)} \leq B+D$, vagy $n^2+n-\dfrac{A}{B+D} \geq 0$, vagyis, ha $n \geq \left\lceil \sqrt{\dfrac{A}{B+D}+\dfrac{1}{4}}-\dfrac{1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \sqrt{\dfrac{A}{B+D}+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2} \right\rfloor$.

A jobb oldalon az az egész szerepel, amelyik nem kisebb $\lfloor n^* \rfloor$, míg $\lceil n^* \rceil$ nem nagyobb n^*-nál. Ha n-re nem teljesül az egyenlőtlenség, akkor $(n+1)$-re igen és az optimális. Az első esetet hasonlóan kezelhetjük.

5. Tétel: Jelölje S_G az egészértékű probléma optimális megoldását. Ekkor a határmegoldás relatív hibája $dS_G = \dfrac{S(m^g, n^g) - S_G}{S_G} \leq \dfrac{1}{24}$.

Bizonyítás. Vizsgáljuk újra az (iii) esetet és legyen n^g nem optimális megoldás.

a) $n^g = \lceil n^* \rceil$. Ekkor $S(1,n^g)\text{-}S_G \leq S(1,n^g)\text{-}S(1,n^*)$ és

$$\frac{S(1,n^g)-S_G}{S_G} \leq \frac{S(1,n^g)-\left(2\cdot\sqrt{A\cdot(B+D)}+C+E\right)}{2\cdot\sqrt{A\cdot(B+D)}+C+E}.$$

Ekkor a (F.3) egyenlőtlenséget használva:

$$dS_G \leq \frac{\frac{1}{12}\cdot\sqrt{A\cdot(B+D)}}{2\cdot\sqrt{A\cdot(B+D)}+C+E} = \frac{1}{24}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{A\cdot(B+D)}}{2\cdot\sqrt{A\cdot(B+D)}+C+E}.$$

b) Ha $n^g = \lfloor n^* \rfloor$ akkor hasonló becslést végezhetünk. Az (i) esetet hasonlóan kezelhetjük.

Ha a határtulajdonság nem garantálható, akkor a következő lemma alkalmazható.

7. Lemma: Az egészértékű feladat optimális megoldására teljesül (i) $n^g = 1$, $m^g = \lfloor m^* \rfloor$ vagy $m^g \geq \lceil m^* \rceil$ és (iii) $m^g = 1$, $n^g = \lfloor n^* \rfloor$ vagy $n^g \geq \lceil n^* \rceil$.

Bizonyítás. (i) Ha $m^g < \lceil m^* \rceil$ és $F_g = S(m^g,1)$, akkor $(m^g,1) \in lev_{F_g} S$, de $(m^g+1,1) \notin lev_{F_g} S$ és bármely más megoldás nem optimális az S függvény kvázi-konvexitása miatt. Az (iii) hasonlóképpen vizsgálható.

2. megjegyzés. A lemmából következik, hogy az optimális egészértékű megoldás követi az optimális folytonos megoldás változásait. Ha m^* (n^*) növekszik, akkor az optimális egész megoldás megfelelő alsó határa nem csökken!

2. Függelék

A beszállító és a termelő optimális tételnagysága, újramegmunkálással és hulladék visszavásárlással

Absztrakt. A gazdaságos tételnagyság problémájának egy olyan változatát vizsgáljuk, ahol egy bebeszállító lát el egy termelőt egy homogén termékkel és a bebeszállító az elhasznált termékek egy meghatározott hányadát visszaveszi újramegmunkálás (újragyártás) céljából, cserébe a termelőnek átadott visszavásárolt termékért.

Adott a kereslet, a kapacitás, a fix rendelési és termelésátállítási költség, visszavásárlandó mennyiség, hulladékkezelési, termelési és újramegmunkálási egységköltség, a termelő és a bebeszállító egységnyi készlettartási költsége meghatározza a termelő és a beszállító számára a költséget minimalizáló rendelési/készlet nagyságot és az újramegmunkálási szintet, továbbá meghatároz egy olyan rendszert, ami feltételezi a partnerek együttműködését és egy tárgyalási módot, amiben a beszállító tesz ajánlatot a visszavásárlás nagyságára és az újramegmunkálás szintjére, a termelő válaszképpen pedig a rendelési tételnagyságot szabályozza.

Kulcsszavak: együttes gazdaságos tételnagyság, visszutas logisztika, zártkörű ellátási lánc (closed loop supply chain), visszagyűjtési ráta, újramegmunkálás (újragyártás), EOQ

1. Bevezetés

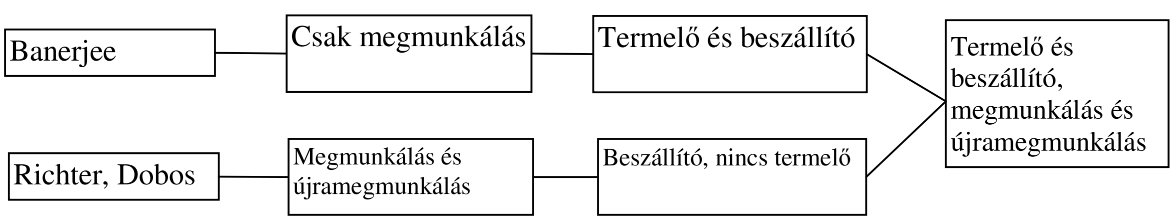
A gazdaságos tételnagyság problémájának egy olyan változatát vizsgáljuk, ahol egy beszállító lát el egy termelőt egy homogén termékkel és a beszállító az elhasznált termékek egy meghatározott hányadát visszaveszi újramegmunkálás céljából, cserébe a termelőnek átadott visszavásárolt termékekért. Adott a kereslet, a kapacitás, rendelési és termelésátállítási költség, a visszavásárolt mennyiség, hulladékkezelési, termelési és újramegmunkálási egységköltség, a termelő és a beszállító egységnyi készlettartási költsége meghatározza a termelő és a beszállító számára a költséget minimalizáló rendelési/készlet nagyságot és újramegmunkálási szintet, továbbá meghatároz egy olyan rendszert, ami feltételezi a partnerek együttműködését és egy olyan tárgyalási módot, amiben a beszállító tesz ajánlatot a visszavásárlás nagyságára és az újramegmunkálás szintjére, a termelő válaszképpen pedig a rendelési tételnagyságot határozza meg.

Monaha (1984) olyan ellátási láncok problémáját vizsgálta, ahol egyetlen, készleteket nem tartó beszállító elégíti ki egyetlen vásárló állandó keresletét, és a koordinációs eszköz a mennyiségi árengedmény. Ezután Banerjee (1986a, b) javasolt egy általánosabb modellt, ami számításba vette a beszállító készlettartási költségeit is, és bevezette *az együttes gazdaságos tételnagyság* fogalmát. Kettejük munkája széleskörű kutatói érdeklődést váltott ki és ráirányította a figyelmet az ehhez hasonló ellátási láncok irányítási problémák vizsgálatára. Új kutatási irányt nyitott meg, annak a feltevésnek az elhagyása, hogy nincsenek készletek, ami különböző termelés és szállítás szabályozási rendszerek vizsgálatát tette lehetővé (lásd többek között, Leel és Rosenblatt, 1986; Goyal, 1988; Hill, 1997, 1999; Eben-Chaime, 2004; Hill és Omar, 2006; Zhou és Wang, 2007; Hoque, 2009; lásd még Goyal, 1976, egy korábbi modellért); külön felhívjuk az olvasó figyelmét Sucky (2005) és Leng és Parlar (2005) ebben a témáéban közölt kiváló tanulmányaira.

Affisco et al. (2002) és Liu és Çetinkaya (2007) munkája számításba veszi a termék minőséget és számol, azzal, hogy beszállító a minőség javítását és a termelésátállítási költség csökkentését segítő beruházásokat valósíthat meg. Kohli és Park (1989) játékelméleti szempontból vizsgálta a haszon megosztásának kérdését az ellátási lánc tagjai között. Sucky (2006) tovább elemezte a Banerjee-modellt, teljesen informált termelőt feltételezve; ehhez hasonlóan, Voigt és Inderfurth (2011) munkájukban információs aszimmetriával és a termelésátállítási költségcsökkentést segítő beruházás megvalósításának lehetőségével számoltak. Pibernik et al. (2011) gy olyan megközelítést vizsgált, ami anélkül valósítja meg az ellátási láncban résztermelők együttes optimumát, hogy a tagoknak érzékeny, fontos adatokat kéne kiadniuk.

Ezzel egy időben a zártkörű ellátási lánc (closed loop supply chain) problémák egyre nagyobb figyelmet kapnak az irodalomban. Richter (1994, 1997) és Richter és Dobos (1999) a korai munkásságukban a megmunkálás, újramegmunkálás és a hulladék mennyiségét figyelembe véve tanulmányoztak egy EOQ-szerű rendszert és meghatározták az optimális stratégiát és a költség függvényt. Az elmúlt években Chung et al. (2008), Gou et al. (2008), Mitra (2009) és Yuan és Gao (2010) vizsgálta a készletezési költség minimalizálását zártkörű ellátási láncban és kidolgoztak egy optimális megmunkálási/újramegmunkálási stratégiát a teljes tervezési időhorizontra. Bonney és Jaber (2011) kiterjesztették a klasszikus visszutas logisztika készletezési modelljét a környezeti termelési tényezőkre, ezzel újabb – a működtetési költségektől különböző – mérőszámot vontak be a készletezési költség függvényébe. Grimes-Casey et al. (2007), Lee et al. (2010) és Subramoniam et al. (2010) foglalkoznak a visszutas logisztikai modellek gyakorlati alkalmazásával. Grimes-Casey et al. (2007) és Lee et al. (2010) modelljei - a visszutas logisztika keretein belül - az életciklus szempontjából elemzik az újrahasznosítási rendszert. Ahn (2009) és Grimes-Casey et al. (2007) játékelméleti megközelítést javasolnak a legjobb zártkörű ellátási lánc stratégia meghatározásához.

Jelen tanulmányunkban egy olyan problémacsoportot vizsgálunk, ami egy részről, Banerjee (1986a, b) alapmodelljének a kiterjesztése – az általa nem vizsgált - visszutas logisztikai folyamatokra. Más részről pedig, Richter (1994, 1997) és Richter és Dobos (1999) megmunkálási és újramegmunkálási modelljeinek - a termelő elemzésével bővített – általánosítása (lásd 1. ábra).



1. ábra: Banerjee és Richter, Dobos modelljeinek a kiterjesztése

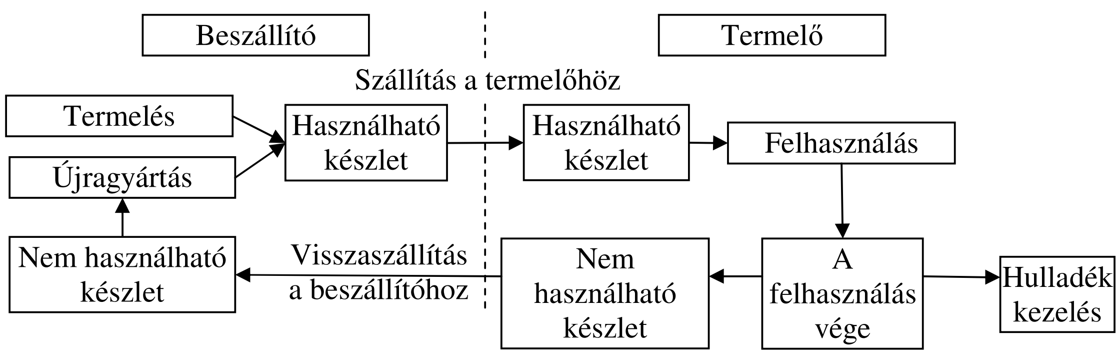
Továbbá, azt is megvizsgáljuk, hogy az újrahasznosítási folyamat segíti-e a beszállító-termelő ellátási lánc koordinációját.

Először röviden ismertetjük a tanulmány szerkezetét. A második részben bemutatjuk a modelleket, osztályozzuk őket és megszerkesztjük a költségfüggvényeket. A harmadik részben meghatározzuk az optimális készlet nagyságot és a termelő és a beszállító minimális költségfüggvényét, valamint az egész rendszer minimális költségfüggvényét arra az esetre, ha a termelési ciklus megmunkálással kezdődik. A következő részben bevezetünk egy segédfüggvényt. Ennek a függvénynek a minimum pontjának egyértelmű meghatározása segít megtalálni az ellátási láncban résztermelők optimális újramegmunkálási szintjét. Az 5. részben ugyanezt a problémát fogjuk megoldani, arra az esetre, amikor a termelési folyamat újramegmunkálással kezdődik. A hatodik részben egy olyan tárgyalásos modellel foglalkozunk, amiben a beszállító tesz ajánlatot a visszavásárlandó mennyiségére és az újrahasznosítási szintre, a termelő pedig erre válaszolva határozza meg a rendelési tétel nagyságát. Végül összefoglaljuk az eredményeinket.

2. A modell

2.1. Általános leírás

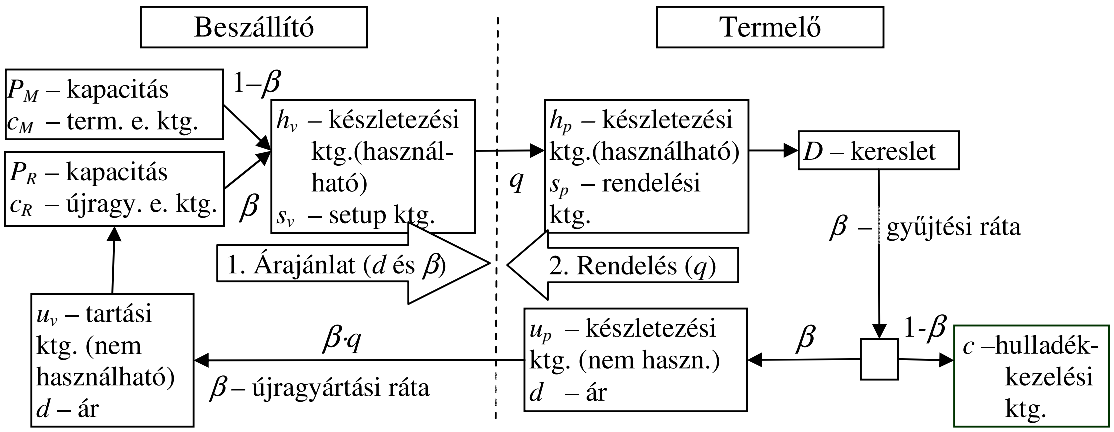
A modellünkben egy beszállító szállít egy homogén terméket egy termelőnek, a termelő adott, állandó *D egység/időegység* keresletének megfelelően. A két félnek q szállítási tételnagyságban kell megegyeznie, ami egyben megfelel a beszállító termelési tételnagyságának is. A tételnagyságot megállapíthatja a beszállító, a termelő vagy együtt, közösen. A bezállító új termékeket gyárthat *(megmunkálás)*, de képes a használt darabokból újramegmunkálásssal az újakkal egyenértékűek előállítására. Mindkét fajta termék – ezeket együtt *használhatónak* fogjuk nevezni - kielégíti a termelő igényét. Az elhasznált darabokat *(nem használhatóak)* a termelő begyűjtheti és visszajuttathatja a beszállítónak újramegmunkálásra. Feltételezzük, hogy ugyanaz a jármű, ami kiszállította a használható árut a termelőnek, visszfuvarral elszállítja az összegyűjtött nem használható darabokat a beszállítóhoz (lásd 2. ábra). A modellben használt paramétereket és döntési változókat a 3. ábra mutatja.



2. ábra: Előállítás, szállítások és készletek a zártkörű ellátási láncban

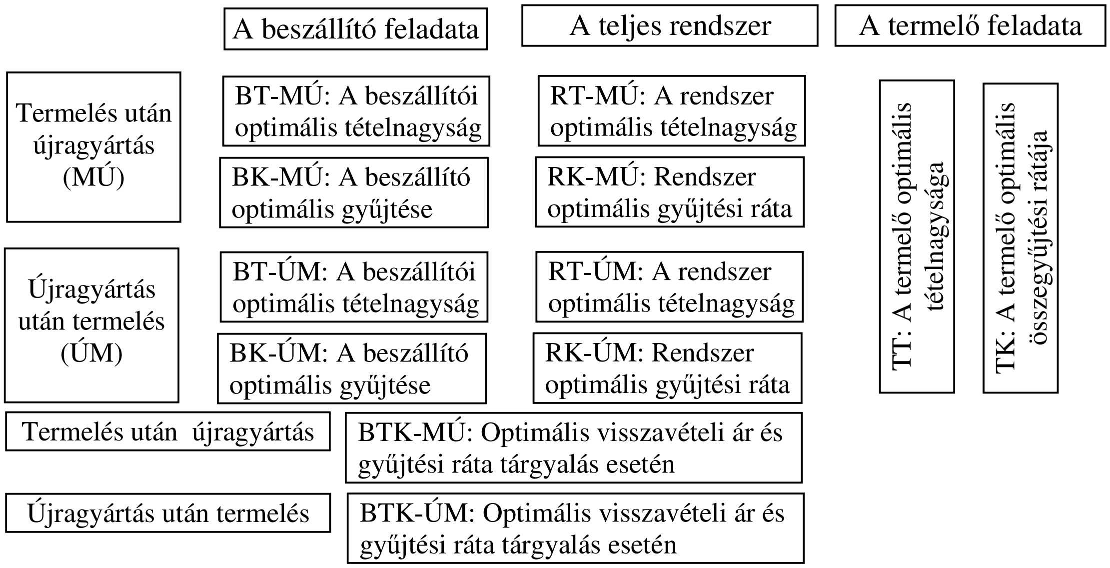
Mindkét fél a használható és nem használható készleteit a q egységnyi termék kiszállítási ritmusának és a visszforgalomnak megfelelő szinten tartja. A beszállító megmunkálási és az újramegmunkálási, P_M, P_R *egység/időegység* termelékenységéről feltételezzük, hogy meghaladja a termelő D keresletét, azaz min $(P_M, P_R) > D$. A beszállítónál és a termelőnél s_v and s_p fix költség merül fel rendelésenként, és a készlettartási költség $h_v > u_v$ és $h_p > u_p$ a használható és nem használható áruk egysége/időegységenként. A megmunkálási és újramegmunkálási egységköltséget c_M és c_R jelöli.

A termelőről feltételezzük, $\beta \cdot q$ egység újramegmunkálást igényli a beszállítótól, míg a másik, $(1-\beta)\cdot q$ rész megsemmisítésre kerül c per egység költségen. A termelő d dollárt kap a beszállítótól a visszavett termék minden egysége után. Egy ciklus hossza, azaz a két szállítás között eltelt idő, $T = q/D$. A β a termelő szempontjából a gyűjtési ráta, míg a beszállítóéból az újramegmunkálási ráta.



3. ábra: paraméterek és döntési változók a modellben

A következőkben bemutatjuk a vizsgált problémákat (4. ábra). A termelő problémája, hogy meghatározza az optimális rendelési tételnagyságot és az ennek megfelelő, adott gyűjtési rátához tartozó minimum költség függvényt (TT probléma), ugyanakkor az optimális gyűjtési ráta meghatározására is törekszik, hogy minimalizálja a minimum költség függvényt (TK probléma). A beszállító oldalán a problémákat két stratégiának megfelelően kell elkülönítenünk. Eltérő nagyságú költségek merülnek föl, hogy, ha az új termékek megmunkálása megelőzi a használtak újramegmunkálást (MÚ), mint fordított szekvencia esetén, azaz, ha a vállalat előbb végzi el a használt termékek újramegmunkálását és aztán az újak megmunkálását (ÚM). Ahogy a termelőnél, itt is adott az optimális tételnagyság és az optimális gyűjtési ráta, most még függetlenül az első (BT-MÚ és BK-MÚ probléma) és a második lehetőségtől (BT-ÚM és BK-ÚM probléma). A modellünkben szereplő logisztikai rendszer egészét tekintve, a beszállító és a termelő teljes kezdeti, használható és nem használható készlettartási költségét és a termelő hulladékkezelési költségét minimalizáljuk. Feltételezésünk szerint a megmunkálás és az újramegmunkálás sorrendje befolyásolja a költségeket, ezért külön vizsgáljuk megfelelő RT-MÚ, RK-MÚ, RT-ÚM és RK-ÚM problémákat. Végül a termelő optimális rendelési tételnagyságának megfelelő visszevásárlási ár és gyűjtési (újramegmunkálási) ráta meghatározásának BTK-MÚ és BTK-ÚM problémáját elemezzük.



4. ábra: A dolgozatban vizsgált problémák

2.2. A termelő költségfüggvénye

Az analitikus modell megformálása előtt néhány további feltevéssel kell élnünk. A termelő az időhorizonton folytonosan, konstans szintnek megfelelő mennyiségű terméket válogat ki újramegmunkálásra. Ezért, átlagosan a használható készleteinek nagysága rendelési ciklusonként $I_p^s(q) = q/2$, míg a nem használható termékeinek átlagos készletszintje $I_p^n(q,\beta) = \beta \cdot q/2$. Így a termelő teljes költsége időegységenként

$$TC_p(q,\beta) = C_p(q,\beta) + R_p(\beta), \tag{1}$$

ahol

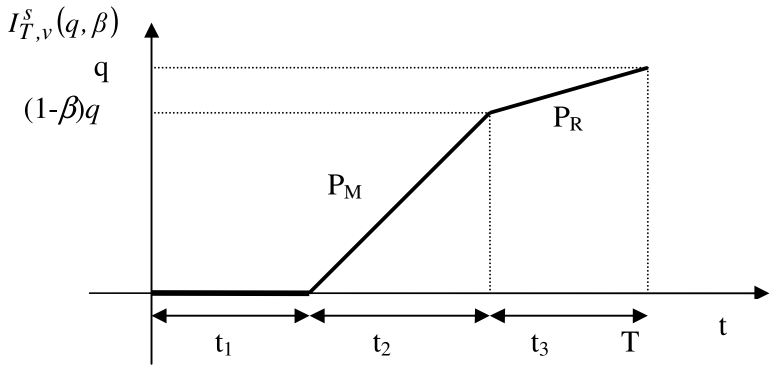
$$C_p(q,\beta) = s_p \cdot \frac{D}{q} + \frac{q}{2} \cdot \left(h_p + u_p \cdot \beta\right) \qquad \text{és} \qquad R_p(\beta) = \left(c - (c+d)\beta\right)D \tag{2}$$

írják le a költségösszetevőket, amik megfelelően függenek vagy nem függenek a rendelési tételnagyságtól.

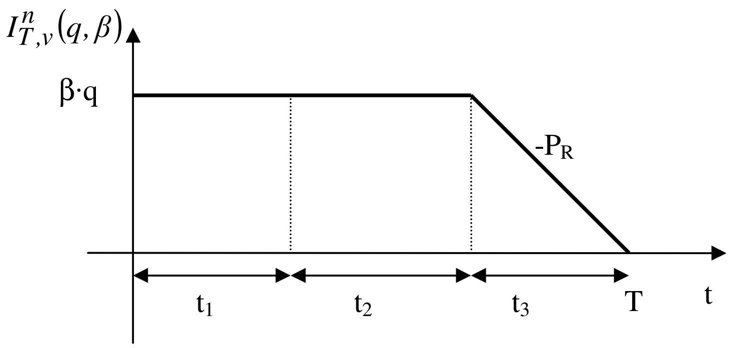
2.3. A beszállító MÚ költségfüggvénye

A beszállító használható és nem használható készleteinek nagysága nyilvánvalóan a megmunkálás és újramegmunkálás sorrendjétől függ. Először vizsgáljuk meg a MÚ esetét, ami azt feltételezi, hogy minden ciklusban előbb (1-β)q terméket megmunkálnak, majd βq termék kerül újramegmunkálásra. Az ÚM esetet az 5. fejezetben elemezzük.

Az 5. és 6. ábra mutatja a beszállító használható és nem használható készletszintjének változását egy rendelési cikluson belül. Ahol t_2 és t_3 jelenti a megmunkálási és újramegmunkálási időt, és, $t_1 = T - t_2 - t_3$ pedig a termelési szünet hossza. Itt hívjuk fel a figyelmet, arra, hogy $t_2 + t_3 < T$, mivel a 2.1 fejezetben azt feltételeztük, hogy $P_M, P_R > D$.



5. ábra: A beszállító használható készleteinek szintje egy rendelési ciklus alatt



6. ábra: A beszállító nem használható készleteinek szintje egy rendelési ciklus alatt

Legyen $H_j(q,\beta)$, $j = s, n$, a beszállító egységnyi használható és nem használható készlettartási költsége egységnyi időre. Innen rögtön azt kapjuk, hogy

$$H_s(q,\beta) = \frac{q}{2} h_v \cdot \left[(\beta - 2) \cdot \beta \cdot \left(\frac{D}{P_M} - \frac{D}{P_R} \right) + \frac{D}{P_M} \right],$$

$$H_n(q,\beta) = u_v \cdot \frac{q}{2} \cdot \left(2 \cdot \beta - \beta^2 \frac{D}{P_R} \right)$$

ami együtt a beszállító időegységre jutó teljes készlettartási költségét adja:

$$H_v(q,\beta) = \frac{q}{2} \cdot \left\{ h_v \cdot \left[(\beta - 2) \cdot \beta \cdot \left(\frac{D}{P_M} - \frac{D}{P_R} \right) + \frac{D}{P_M} \right] + u_v \cdot \left(2 \cdot \beta - \beta^2 \frac{D}{P_R} \right) \right\}$$

A kapcsos zárójelen belüli kifejezést átrendezve, a következő három tagot különíthetjük el: egy független β gyűjtési rátától, egy lineáris, egy pedig négyzetes kapcsolatban van vele, megszorozva a tényezőkkel, amiket úgy definiálunk, mint

$$V=\frac{h_v\cdot D}{P_M},\qquad \Omega_M=h_v\left(\frac{D}{P_M}-\frac{D}{P_R}\right)-u_v\quad \text{és}\quad \Delta_M=h_v\left(\frac{D}{P_M}-\frac{D}{P_R}\right)-u_v\frac{D}{P_R}\tag{3}$$

azt kapjuk, hogy

$$H_v(q,\beta)=\frac{q}{2}\cdot\left(\Delta_M\beta^2-2\Omega_M\beta+V\right).\tag{4}$$

Vegyük észre, hogy $\Omega_M=-u_v$ és $\Delta_M=-u_v\frac{D}{P_R}$, ha $P_M=P_R$. Továbbá, a 2.1 fejezetben elfogadott $D<P_R$ feltételezésből nyilvánvaló, hogy $\Omega_M<\Delta_M<V$. Az is vegyük észre, hogy a (4) kifejezés nem negatív minden $q\geq 0$ esetén és $0\leq\beta\leq 1$ mivel, $H_s(q,\beta)$ és $H_n(q,\beta)$ sem lehetnek negatívok.

Következésképpen a beszállító időegységre jutó rendelési és készletezési költsége úgy fejezhető ki, mint

$$C_v(q,\beta)=s_v\frac{D}{q}+\frac{q}{2}\left(\Delta_M\beta^2-2\Omega_M\beta+V\right).\tag{5}$$

Ezenkívül a beszállítónál felmerülnek a rendelési tételnagyságtól nem függő költségek is, ezek egy időegységre

$$R_v(\beta)=\left[c_M+\left(d+c_R-c_M\right)\beta\right]D.$$

Következésképpen, a beszállító teljes költsége időegységenként

$$TC_v(q,\beta)=C_v(q,\beta)+R_v(\beta).\tag{6}$$

2.3. A teljes rendszer költsége

Most vizsgáljuk meg a beszállító és a termelő költségeit együtt. A két fél egységnyi időre jutó rendelési és készlettartási költsége együtt, úgy fejezhető ki, mint

$$C_T(q,\beta)=\left(s_v+s_p\right)\frac{D}{q}+\frac{q}{2}\left[\Delta_M\beta^2+\left(u_p-2\Omega_M\right)\beta+\left(V+h_p\right)\right].\tag{7}$$

Legyen

$$W=V+h_p\qquad \text{és}\qquad U=u_p-2\Omega_M.\tag{8}$$

Ebből adódóan a (7) kifejezés úgy írható föl, hogy

$$C_T(q,\beta)=\left(s_v+s_p\right)\frac{D}{q}+\frac{q}{2}\cdot\left\{\beta^2\cdot\Delta_M+\beta U+W\right\}$$

és az egész rendszerre jellemző, időegységre jutó teljes költség, úgy írható le, mint

$$TC_T(q,\beta) = C_T(q,\beta) + R_T(\beta)\,, \tag{9}$$

ahol $R_T(\beta) = [(c + c_M) + (c_R - c - c_M)\beta]D$ az a költségelem, ami nem függ az tételnagyságtól.

Vegyük észre, hogy

$$R_T(\beta) = R_v(\beta)\big|_{d=0} + R_p(\beta)\big|_{d=0}\,. \tag{10}$$

3. Az optimális rendelési tételnagyság és a költségfüggvény

Először a termelő, a beszállító és az egész rendszer költségfüggvényét fogjuk vizsgálni, hogy meghatározzuk az optimális rendelési tételnagyságot. A termelő TT problémája egyszerűen a klasszikus EOQ - modell módosítása. Az optimális rendelési nagyság adott β visszagyűjtési ráta mellett, úgy fejezhető ki, hogy

$$q_p^*(\beta) = \sqrt{\frac{2\cdot s_p \cdot D}{h_p + \beta\cdot u_p}} \tag{11}$$

a megfelelő minimum költséggel

$$TC_p^*(\beta) = \sqrt{2\cdot D\cdot s_p(h_p + \beta\cdot u_p)} + R_p(\beta)\,. \tag{12}$$

Ugyanígy, a beszállító optimális tételnagysága MÚ stratégia esetén (azaz, a BT-MÚ probléma optimális megoldása) minimalizálja a (6) kifejezést és úgy írható föl,

$$q_v^*(\beta) = \sqrt{\frac{2\cdot D\cdot s_v}{\beta^2\cdot \Delta_M - 2\cdot\beta\cdot\Omega_M + V}}\,. \tag{13}$$

Így a beszállító minimum teljes költségfüggvénye

$$TC_v^*(\beta) = \sqrt{2\cdot D\cdot s_v\cdot(\beta^2\cdot\Delta_M - 2\cdot\beta\cdot\Omega_M + V)} + R_v(\beta). \tag{14}$$

Jól látható, hogy a függvény második deriváltjának az előjele nem függ β-tól, következésképpen a (14) vagy konvex vagy konkáv β-ban. Így az első derivált és a határokon lévő függvényértékek vizsgálatával könnyen meghatározhatjuk, hogy a függvény $\beta = 0$, $\beta = 1$ vagy egy köztes pontban veszi-e föl a minimumát. Utóbbi esetben a gyűjtési rátát *nem-triviálisnak* fogjuk nevezni. A 4.2 fejezetben részletesen elemezzük a BT-MÚ problémát.

Hasonlóan az eddigiekhez, a (7)-(9) kifejezésekből következik, hogy a rendszerszintű optimális tételnagyság (azaz, az BT-MÚ probléma megoldása) úgy adható meg, hogy

$$q^*(\beta) = \sqrt{\frac{2\cdot D\cdot(s_v + s_p)}{W + \beta^2\cdot\Delta_M + \beta\cdot U}} \tag{15}$$

és ebből következően a rendszer minimum teljes költsége:

$$TC^*(\beta) = \sqrt{2 \cdot D \cdot (s_v + s_P) \cdot (W + \beta^2 \cdot \Delta_M + \beta \cdot U)} + R_T(\beta). \tag{16}$$

Láthatjuk, hogy a fenti három eset mindegyikében a klasszikus EOQ modellt alkalmaztuk, kisebb módosításokkal, amik a költségfüggvény koefficiensek szerkezetét tükrözik a beszállító, a termelő és az egész rendszer problémájában.

4. Az optimális visszagyűjtési és újramegmunkálási ráta

Mielőtt tovább folytatnánk a vizsgálatunkat a beszállító, a termelő és az egész rendszer optimális gyűjtési és újramegmunkálási rátájának elemezésével, érdemes kihasználnunk azt a tényt, hogy a (12), (14) és (16) formája hasonló, így bevezethetjük a következő segédfüggvényt:

$$K(\beta) = G\sqrt{A + B\beta^2 - 2C\beta} + E\beta + F\,, \tag{17}$$

amire feltételezzük, hogy $A, G > 0$ és

$$A + B\beta^2 - 2C\beta > 0 \tag{18}$$

teljesül a teljes $0 \le \beta \le 1$ tartományon. Innen egyértelműen adódik, hogy $K(\beta)$, akkor és csak akkor, szigorúan konvex, ha

$$AB > C^2, \tag{19}$$

máskülönben konkáv. Ha szigorúan konvex, akkor a függvény minimuma a tartomány belsejébe esik, ha $K'(0) < 0$ és $K'(1) > 0$ — ami, akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{C - B}{\sqrt{A + B - 2C}} < \frac{E}{G} < \frac{C}{\sqrt{A}} \tag{20}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Minden más esetben a minimum az egyik $\beta = 0, \beta = 1$ határpontban lesz. Ez biztosítja a következőt.

1. lemma Tegyük fel, hogy $AB > C^2$. Ha (20) feltétel teljesül, akkor $K(\beta)$, függvénynek globális minimuma van a

$$\beta^* = \frac{C}{B} - \frac{E}{B}\sqrt{\frac{AB - C^2}{BG^2 - E^2}} \tag{21}$$

pontban, máskülönben

$\beta^* = 0$ pontban, ha (20) egyenlőtlenség jobb oldala nem teljesül, és $\beta^* = 1$ pontban, ha a bal oldal nem teljesül.

Bizonyítás: Ahogy azt az előbb levezettük, a lemma feltevéséből következik, hogy $K(\beta)$, szigorúan konvex. Tegyük föl, hogy (20) teljesül. Akkor a függvény $\beta = 0$ pontban csökken, mivel $K'(0) < 0$ és $\beta = 1$ pontban növekszik, mivel $K'(1) > 0$. A szigorú konvexitás miatt, a minimum $\beta^* \in (0,1)$ kitüntetett belső pontban van, ahol $K'(\beta^*) = 0$, amit

$$K'(\beta) = G\frac{B\beta - C}{\sqrt{A + B\beta^2 - 2C\beta}} + E = 0 \tag{22}$$

egyenlet megoldásával határozhatunk meg. Ebből következik, hogy

$$\frac{C^2 - 2BC\beta + B^2\beta^2}{A + B\beta^2 - 2C\beta} = \left(\frac{E}{G}\right)^2.$$

A tagok átrendezésével a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$B\left(BG^2 - E^2\right)\beta^2 - 2C\left(BG^2 - E^2\right)\beta + \left(C^2G^2 - AE^2\right) = 0.$$

Vegyük észre, hogy $B > 0$ lemma feltételezése miatt. Az is vegyük észre, hogy $BG^2 - E^2 \neq 0$, mivel máskülönben $C^2G^2 = AE^2$ teljesülne, ami ellentmond a (20) egyenlőtlenségnek. Így a fenti egyenlőség

$$\beta^2 - 2\frac{C}{B}\beta + \frac{C^2G^2 - AE^2}{B\left(BG^2 - E^2\right)} = 0$$

formában is felírható.

Az egyenlet gyökei:

$$\beta_{1,2} = \frac{C}{B} \pm \sqrt{\frac{C^2}{B^2} - \frac{C^2G^2 - AE^2}{B\left(BG^2 - E^2\right)}} = \frac{C}{B} \pm \frac{|E|}{B}\sqrt{\frac{AB - C^2}{BG^2 - E^2}}. \tag{23}$$

Ha behelyettesítjük mindkét gyököt (22) egyenletben β helyére, akkor láthatjuk, hogy $\beta^* = \beta_2$, ha $E > 0$, máskülönben $\beta^* = \beta_1$. Innen azt kapjuk, hogy:

$$\beta^* = \frac{C}{B} - \frac{E}{B}\sqrt{\frac{AB - C^2}{BG^2 - E^2}}.$$

Most tegyük föl, hogy a (20) jobboldali egyenlőtlenség nem teljesül —, amiből következik, hogy $K'(0) \geq 0$. A szigorú konvexitás miatt $K'' > 0$ és így K' növekvő a tartomány minden pontjában. Ezért $K'(\beta) > 0$ minden $0 < \beta \leq 1$ pontban, ami bizonyítja, hogy $K(\beta)$, jobb oldalon növekvő $\beta = 0$ ponttól. Innen nyilvánvaló, hogy $\beta^* = 0$ a függvény globális minimuma. Hasonló érveléssel azt kapjuk, hogy $\beta^* = 1$, ha (20) bal oldali egyenlőtlenség nem teljesül. Vegyük észre, hogy $K'' > 0$ esetén, a (20) egyenlőtlenségek közül legalább az egyiknek teljesülnie kell. □

A fenti bizonyításból következik, hogy olyan (23) valós értékű gyökök, amik (22) megoldásai, az 1. lemma feltételezése esetén, akkor és csak akkor léteznek, ha $BG^2 > E^2$, máskülönben nem létezik olyan belső pont, ahol $K'(\beta) = 0$. Ebből a következő korolláriumot kapjuk.

1. **következmény.** Az 1. lemma feltevését csak, akkor lehet kielégíteni, ha $B > \frac{E^2}{G^2}$ teljesül. Ehhez elégséges (de nem szükséges) feltétel, hogy $C>0$, $E\geq 0$ legyen, biztosítva, hogy az 1. lemma feltétele és feltételezése teljesül.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $C > 0$ és $E \geq 0$ valóban teljesül. Az 1. lemma feltétele miatt $\frac{E}{G} < \frac{C}{\sqrt{A}}$, ezért az is igaz, hogy $\frac{E^2}{G^2} < \frac{C^2}{A}$, mivel feltételeztük, hogy $K(\beta)$, függvényről, hogy $A, G > 0$. Ugyanakkor a lemma feltételezéséből, az következik, hogy $\frac{C^2}{A} < B$. Így azt kapjuk, hogy $\frac{E^2}{G^2} < B$, ahogy azt vártuk. □

A következő lemma foglalkozik azzal az esettel, amikor $K(\beta)$, konkáv.

2. **lemma** Ha $AB\leq C^2$, akkor $K(\beta)$, függvénynek globális minimum van $\beta^* = 0$ pontban, ha teljesül a

$$\sqrt{A} - \sqrt{A + B - 2C} \leq \frac{E}{G}$$

egyenlőtlenség, és $\beta^* = 1$ pontban, ha az egyenlőtlenség fordítva igaz. Egyenlőtlenség esetén mindkét pontban, $\beta = 0$ és $\beta = 1$, globális minimum van.

Bizonyítás: Az $AB\leq C^2$ feltételből következik, hogy a K'' második derivált nem negatív és konstans a függvény egész tartományán, ezért $K(\beta)$, vagy szigorúan konkáv vagy lineáris.

Így, ha egy lokális optimum a tartományon belül van, akkor az csak globális maximum lehet, különben a függvény monoton a teljes tartományon és mindkét esetben elegendő a határpontokat összehasonlítani a globális minimum meghatározásához. Ez rögtön a lemma bizonyításához vezet. □

Most már rátérhetünk a termelő, a beszállító és az egész rendszer optimális gyűjtési rátájának vizsgálatára.

4.1. A termelő problémájának megoldása

Jól látható, hogy a termelő (12) minimum költségfüggvényét a $K(\beta)$ segédfüggvényünk segítségével, úgy írhatjuk föl, hogy $A = h_p$, $B = 0$, $C = u_p / 2$, $F = cD$, $G = \sqrt{2Ds_p}$, ami nyilvánvalóan megfelel a $K(\beta)$, függvénnyel kapcsolatban a 4. rész elején elfogadott feltételezéseinknek. Az is kézenfekvő, hogy kielégíti a 2. lemma feltételét, mivel a termelőnek nem áll érdekében használt terméket gyűjteni (β^*=0), ha

$$(c+d)\sqrt{D} < \left(\sqrt{h_p + u_p} - \sqrt{h_p}\right)\cdot\sqrt{2s_p} ,$$

viszont ellenkező esetben (β^*=1), az összeset be fogja gyűjteni és közömbös lesz a két stratégiával szemben, ha a fenti egyenlőtlenség egyenlőségre teljesül.

4.2. A beszállító problémájának megoldása (BK-MÚ)

A beszállító minimum költségfüggvényét (14) a $K(\beta)$, formájában, úgy írhatjuk föl, hogy $A = V$, $B = \Delta_M$, $C = \Omega_M$, $E = (d + c_R - c_M)D$, $F = c_M D$ és $G = \sqrt{2Ds_v}$. Ezért teljesül a következő lemma.

3. lemma A (18)–(20) feltételek mellett a beszállító optimális újramegmunkálási rátája nem triviális és igaz rá, hogy

$$\beta^* = \frac{\Omega_M}{\Delta_M} - \frac{E}{\Delta_M}\sqrt{\frac{\Delta_M \cdot V - \Omega_M^2}{\Delta_M \cdot 2Ds_v - E^2}} . \qquad (24)$$

2. következmény. A (24) egyenlőséget felhasználva meghatározhatjuk a beszállító optimális újramegmunkálási rátáját, ha az alábbi feltételek egyszerre teljesülnek:

$$\Delta_M > \frac{\Omega_M^2}{V} \qquad (25)$$

$$\Delta_M > \frac{D\cdot\left(d + c_R - c_M\right)}{2s_v} \qquad (26)$$

$$\frac{u_v\cdot\left(D/P_R - 1\right)}{\sqrt{\left(h_v - u_v\right)\cdot D/P_R + 2u_v}} < \frac{D\cdot\left(d + c_R - c_M\right)}{\sqrt{2Ds_v}} < \frac{\Omega_M}{\sqrt{V}} \qquad (27)$$

A (25) és (26) feltételből is külön következik, hogy

$$\frac{P_R}{P_M} > 1 + \frac{u_v}{h_v} . \qquad (28)$$

Ezért P_R szükségszerűen nagyobb, mint P_M, β^* nem triviális megmunkálási rátára. Ha (25)-(27) feltételek közül bármelyik sérül, akkor a beszállító optimális újramegmunkálási rátája vagy β^*=0 vagy β^*=1 lesz.

Bizonyítás: Könnyen belátható, hogy a (19) és (20) feltétel rögtön megfeleltethető a (25) és (27) feltételnek, mivel a (18) megfelel, annak, hogy:

$$\Delta_M \beta^2 - 2\Omega_M \beta + V > 0 .$$

Jól látható, hogy a bal oldali másodfokú függvénynek nincs valós értékű gyöke, ha $\Omega_M^2 < \Delta_M V$ — amit viszont megkövetel a (25) feltétel. Szintén a (25) feltétel alapján, $\Delta_M > 0$ és a másodfokú függvény fölfelé nyíló parabola, vagyis konvex. Ez biztosítja, hogy a függvény – az elvárásunknak megfelelően -β minden lehetséges értékére pozitív. Így, a (25) miatt a (18) is teljesül. Továbbá, a (26) feltétel az 1. következmény közvetlen folyománya. Végül, vagy (25), vagy a (26) miatt, $\Delta_M > 0$. Mindezek a Δ_M (3) definíciójával együtt a (28) egyenlőtlenséghez vezetnek. □

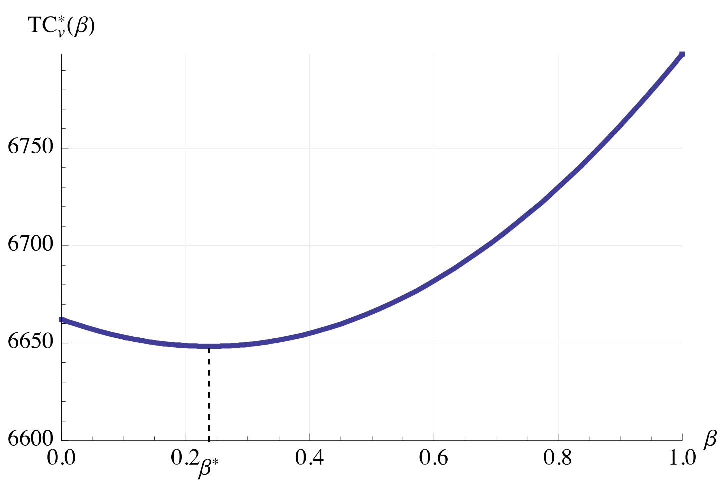
1. **példa** (SK-MÚ)**.** Legyen $D = 100$, $s_v = 1000$, $h_v = 100$, $u_v = 5$, $c_M = 35$, $c_R = 20$, $d = 17$, $P_M = 200$, $P_R = 250$ (lásd 7. ábra). Akkor $A=V=50$, $B = \Delta_M = 8$, $C = \Omega_M = 5$, $E = 200$, F=3500, $G \approx 447.21$. Jól látható, hogy (25), (26), (27) feltételek teljesülnek:

$$\Delta_M = 8 > \frac{\Omega_M^2}{V} = \frac{25}{50} = 0,5$$

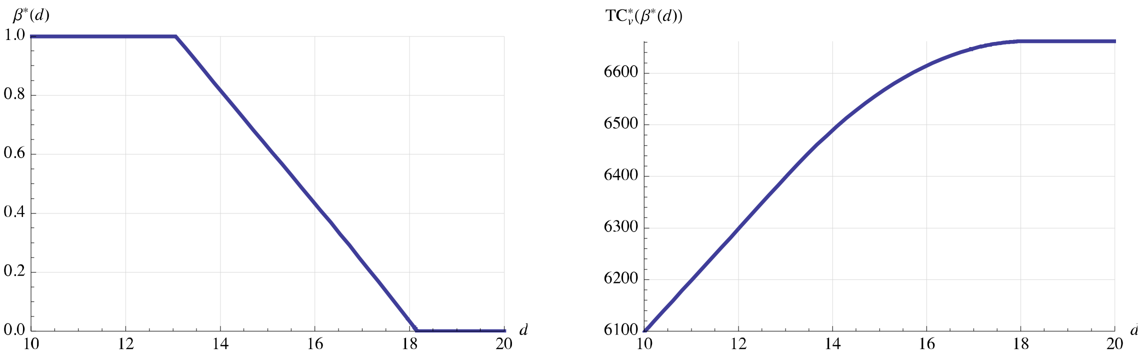
$$\Delta_M = 8 > \frac{D \cdot (d + c_R - c_M)^2}{2s_v} = \frac{100 \cdot (17 + 20 - 35)^2}{2000} = 0,2$$

$$\frac{u_v \cdot (D / P_R - 1)}{\sqrt{(h_v - u_v) \cdot D / P_R + 2u_v}} \approx -0,433 < \frac{D \cdot (d + c_R - c_M)}{\sqrt{2Ds_v}} \approx 0,447 < \frac{\Omega_M}{\sqrt{V}} \approx 0,707$$

Ezért a 2. következményből kifolyólag, a beszállító optimális újramegmunkálási rátája nem triviális és β^*≈0,237, a beszállító teljes költsége – ennek megfelelően - $TC_v^*(\beta^*) \approx 6648,35$, lásd 7. ábra. A 8. ábra szemlélteti β^* és $TC_v^*(\beta^*)$ értékeit, különböző d visszavételi értékek mellett.



7. ábra: $TC_v^*(\beta)$ **minimum költséggörbe és a nem triviális újramegmunkálási ráta az 1. példa alapján**



8. ábra: Az optimális gyűjtési ráta (bal) és a beszállító minimum teljes költsége (jobb) a visszavétel függvényében, az 1. példa alapján

4.3. Az egész rendszer megoldása (RK-MÚ)

Az egész rendszerre jellemző költségfüggvényt (16) a $K(\beta)$, segítségével, úgy írhatjuk föl, hogy $A=W$, $B=\Delta_M$, $C=\frac{-U}{2}=\Omega_M-\frac{u_p}{2}$, $E=(c_R-c-c_M)D$, $F=(c_M+c)D$ and $G=\sqrt{2D(s_v+s_p)}$.

4. lemma A (18)–(20) feltételek mellett az egész rendszer optimális gyűjtési és újramegmunkálási rátája nem triviális és úgy adható meg, hogy

$$\beta_T^*=\frac{\Omega_M}{\Delta_M}-\frac{E}{\Delta_M}\sqrt{\frac{\Delta_M\cdot W-(\Omega_M-u_p/2)^2}{\Delta_M\cdot 2D(s_v+s_p)-E^2}}-\frac{u_p}{2}. \tag{29}$$

3. következmény A (29) egyenlőséget felhasználva meghatározhatjuk a rendszer optimális gyűjtési és újramegmunkálási rátáját, ha a következő feltételek egyszerre teljesülnek:

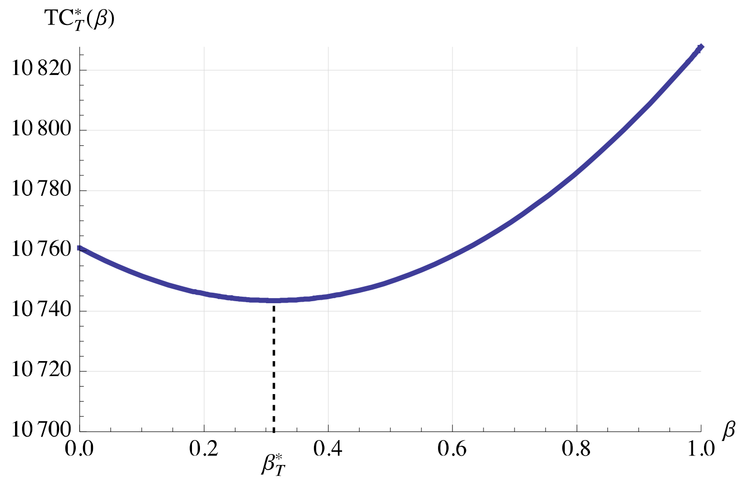
$$\Delta_M>\frac{(\Omega_M-u_p/2)^2}{V+h_p} \tag{30}$$

$$\Delta_M>\frac{D\cdot(c_R-c-c_M)^2}{2(s_v+s_p)} \tag{31}$$

$$\frac{u_v\cdot(D/P_R-1)-u_p/2}{\sqrt{(h_v-u_v)\cdot D/P_R+2u_v+h_p+u_p}}<\frac{\sqrt{D}\cdot(c_R-c-c_M)}{\sqrt{2(s_v+s_p)}}<\frac{\Omega_M-u_p/2}{\sqrt{V+h_p}} \tag{32}$$

Vagy a (30), vagy (31) feltételből következik a (28), és ezért, P_R szükségszerűen nagyobb, mint P_M, β_T^* nem triviális gyűjtési és újramegmunkálási rátára. Ha (30)–(32) feltétel közül valamelyik sérül, akkor a rendszer optimális gyűjtési és újramegmunkálási rátája vagy $\beta_T^*=0$, vagy $\beta_T^*=0$.

Bizonyítás: 2. következmény bizonyításával analóg módon.



9. ábra: A $TC_T^*(\beta)$ minimum költséggörbe és a rendszer optimális, nem triviális gyűjtési rátája, a 2. példa alapján

Figyeljük meg, hogy a (24) és a (29) egybeesik, ha $s_p = u_p = 0$ és $c_M + c - c_R = d + c_R - c_M$.

2. példa Vegyük az 1. példa adatait a következő módosításokkal: $c_R = 45$, továbbá legyen $s_p = 400$, $h_p = 90$, $u_p = 5$, $c = 10$. Ekkor a rendszer optimális gyűjtési és újramegmunkálási $\beta_T^* \approx 0{,}3125$, a megfelelő teljes költség $TC_T^*(\beta) \approx 10743{,}5$, lásd 9. ábra.

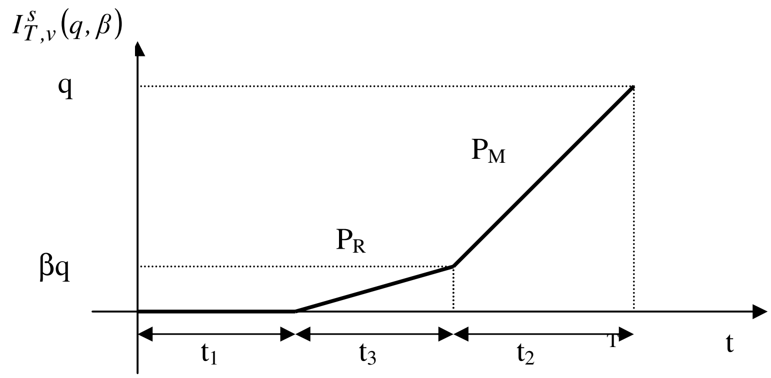
5. Az újramegmunkálás-megmunkálás esete (ÚM)

5.1. A beszállító készletezési költsége

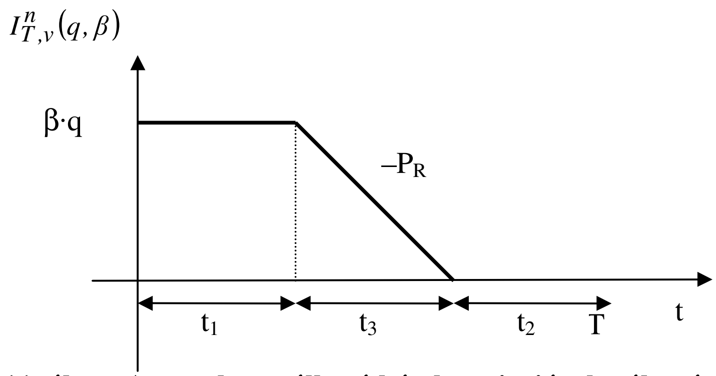
Vizsgáljuk először a beszállító problémáját. Mivel most azt feltételezzük, hogy a megmunkálást megelőzi az újramegmunkálás, a használható és nem használható készletek szintje egy rendelési cikluson belül a 10. és 11. ábrának megfelelően változik. Ennek megfelelően a beszállító időegységre jutó teljes készlettartási költsége a következőképpen írható le:

$$H_s(q,\beta)+H_n(q,\beta)=\frac{q}{2}\cdot\left\{h_v\cdot\left[\beta^2\cdot\left(\frac{D}{P_R}-\frac{D}{P_M}\right)+\frac{D}{P_M}\right]+u_v\cdot\left[\beta^2\cdot\left(2\cdot\frac{D}{P_M}-\frac{D}{P_R}\right)+\beta\cdot\left(2-2\cdot\frac{D}{P_M}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{q}{2}\cdot\left\{h_v\cdot\left[\beta^2\cdot\frac{D}{P_R}+(1-\beta^2)\cdot\frac{D}{P_M}\right]+u_v\cdot\beta\cdot\left[2-2\cdot(1-\beta)\cdot\frac{D}{P_M}-\beta\cdot\frac{D}{P_R}\right]\right\} \tag{33}$$



10. ábra: A használható készlet szintjének változása egy rendelési cikluson belül



11. ábra: A nem használható készlet szintjének változása egy rendelési cikluson belül

Ha összehasonlítjuk a beszállító készlettartási költségére vonatkozó (3)–(4) és (33) kifejezéseket MÚ és ÚM stratégia esetén, rögtön a következőhöz jutunk

5. lemma Alkalmazzuk ugyanazt a q rendelési nagyságot β újramegmunkálási rátát MÚ és ÚM stratégiára is. Ekkor:

A beszállító teljes tartási költsége MÚ stratégia mellett, akkor és csak akkor szigorúan kisebb, mint ÚM esetén, ha

$$\frac{P_R}{P_M} > 1 + \frac{u_v}{h_v - u_v} \tag{34}$$

Akkor és csak akkor egyenlők, ha (34) egyenlőségre teljesül vagy $\beta \in \{0,1\}$.

4. következmény A MÚ stratégia teljesítménye felülmúlja az ÚM-ét, ha az újramegmunkálás termelékenysége kellően meghaladja a megmunkálását.

5. következmény Figyeljük meg, hogy (34) erősebb feltétel, mint a (28), ami szükséges ahhoz, hogy a beszállító MÚ stratégia melletti, nem triviális, optimális újramegmunkálási rátáját megkapjuk.

5.2. A beszállító megoldása (BK-ÚM)

A 2. fejezethez hasonlóan, vezessük be a következő definíciókat:

$$\Delta_R = (h_v - u_v)\left(\frac{D}{P_R} - \frac{D}{P_M}\right) + u_v \frac{D}{P_M} \qquad \text{és} \qquad \Omega_R = u_v\left(1 - \frac{D}{P_M}\right). \tag{35}$$

A beszállító tartási költsége (33) úgy írható fel, mint

$$H_v(q,\beta) = \frac{q}{2}\left(V + \beta^2\Delta_R + 2\beta\Omega_R\right), \tag{36}$$

ennek megfelelően a teljes költsége

$$TC_v(q,\beta) = s_v\frac{D}{q} + \frac{q}{2}\left(V + \beta^2\Delta_R + 2\beta\Omega_R\right) + R_v(\beta),$$

és a minimum teljes költsége adott újramegmunálási ráta mellett

$$TC_v^*(\beta) = \sqrt{2\cdot D\cdot s_v\cdot\left(V + \beta^2\Delta_R + 2\beta\Omega_R\right)} + R_v(\beta), \tag{37}$$

Ez utóbbi kifejezés úgy írható fel $K(\beta)$ függvény alakjában – a (17) definíciónak megfelelően - hogy, $A = V$, $B = \Delta_R$, $C = -\Omega_R$, $E = (d + c_R - c_M)D$, $F = c_M D$ és $G = \sqrt{2\cdot D\cdot s_v}$.

6. lemma A (18)–(20) feltételek és ÚM stratégia mellett, a beszállító optimális újramegmunkálási rátája nem triviális és a következő alakban adható meg

$$\beta_{RbM}^* = \frac{\Omega_R}{\Delta_R} - \frac{E}{\Delta_R}\sqrt{\frac{\Delta_R\cdot V - \Omega_R^2}{\Delta_R\cdot 2Ds_v - E^2}}. \tag{38}$$

6. következmény. A (38) egyenlőséget felhasználva meghatározhatjuk a beszállító optimális újramegmunkálási rátáját, ha a következő feltételek egyszerre teljesülnek

$$\Delta_R > \frac{\Omega_R^2}{V} \tag{39}$$

$$\Delta_R > \frac{D\cdot(d + c_R - c_M)^2}{2s_v} \tag{40}$$

$$\frac{(h_v - u_v)\cdot(D/P_R - D/P_M) + u_v}{\sqrt{(h_v - u_v)\cdot D/P_R + 2u_v}} > \frac{\sqrt{D}\cdot(c_M - d - c_R)}{\sqrt{2s_v}} > \frac{\Omega_R}{\sqrt{V}} \tag{41}$$

A (39) és (40) feltételből is külön következik, hogy:

$$\frac{P_M}{P_R} > 1 - \frac{u_v}{h_v - u_v}. \tag{42}$$

Mivel adott egy viszonylag alacsony u_v készlettartási költség a nem használható termékekre, a P_M megmunkálás szintje szükségszerűen meg kell haladja a P_R újramegmunkálás szintjének egy eléggé nagy hányadát ahhoz, hogy β^* nem triviális újramegmunkálási ráta legyen. Továbbá, a (41) feltételből következik, hogy

$$c_M > c_R + d.$$

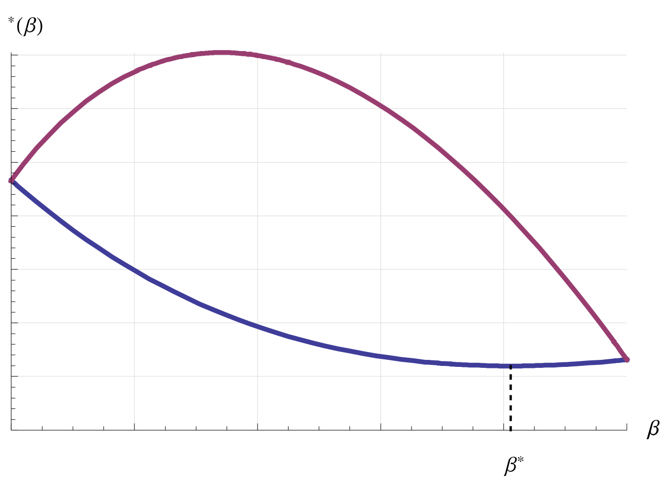
Ha a (39)–(41) feltételek közül bármelyik sérül, akkor a beszállító optimális újramegmunkálási rátája vagy β^*=0 vagy β^*=1 lesz.

Bizonyítás: a 2. következmény bizonyításával analóg módon.

3. példa Legyen D = 2000, s_v = 500, h_v = 200, u_v = 120, c_M = 40, c_R = 20, d = 15, P_M = 3000, and P_R = 2500. Ekkor

$$\frac{P_R}{P_M} = 0{,}83 < 1 + \frac{u_v}{h_v - u_v} \approx 2{,}5$$

és az 5. lemmából kifolyólag, az ÚM stratégia teljesítménye felülmúlja a MÚ megfelelőjét minden rögzített q rendelési nagyság és $\beta \in (0,1)$ újramegmunkálási ráta esetén. Továbbá $V \approx$ 133,33, $\Delta_R \approx 90{,}67$, $\Omega_R = 40$, E= −10000. Jól látható, hogy a 6. következmény feltétele teljesül, ennek eredményeképpen $\beta^*_{RbM} \approx$ 0,81 és a beszállító minimum teljes költsége $TC^*_v(\beta^*_{RbM}) \approx 94598{,}88$. A 12. ábra mutatja a beszállító teljes költségét minden $\beta \in [0,1]$ esetre, ÚM és MÚ stratégia mellett, feltételezve, hogy a rendelési nagyság optimális. Látható, hogy a példánkban a 2. következmény feltétele nem teljesül MÚ stratégia mellett, így az optimális újramegmunkálási ráta β^*_{RbM}=1.



12. ábra: A beszállító költségfüggvénye MÚ és ÚM stratégia esetén, a 3. példa alapján

5.3. A teljes rendszer megoldása (RK-ÚM)

Egyszerűen belátható, hogy a teljes rendszer költsége ÚM stratégia esetén, ha feltételezzük, hogy a rendelési nagyság optimális

$$TC_T^*(\beta)=\sqrt{2\cdot D\cdot(s_v+s_p)\cdot\left(W+\beta^2\cdot\Delta_R+\beta(2\Omega_R+u_p)\right)}+R_T(\beta), \tag{43}$$

ami $K(\beta)$ függvény segítségével, úgy írható föl, hogy $A=W$, $B=\Delta_R$, $C=U=-\Omega_R-u_p/2$, $E=(c_R-c-c_M)D$, $F=(c_M+c)D$ és $G=\sqrt{2\cdot D\cdot(s_v+s_p)}$.

7. lemma A (18)–(20) feltételek és ÚM stratégia mellett, a rendszer optimális gyűjtési és újramegmunkálási rátája nem triviális és a következőképpen adható meg

$$\beta^*_{T,RbM}=-\frac{\Omega_R}{\Delta_R}-\frac{E}{\Delta_R}\sqrt{\frac{\Delta_R\cdot W-(\Omega_R+u_p/2)^2}{\Delta_R\cdot 2D(s_v+s_p)-E^2}}-\frac{u_p}{2\Delta_R}. \tag{44}$$

7. következmény. A (44) egyenlőséget felhasználva meghatározhatjuk a rendszer optimális gyűjtési és újramegmunkálási rátáját, ha a következő feltételek egyszerre teljesülnek:

$$\Delta_R>\frac{(\Omega_M+u_p/2)^2}{V+h_p} \tag{45}$$

$$\Delta_R>\frac{D\cdot(c_R-c-c_M)^2}{2(s_v+s_p)} \tag{46}$$

$$\frac{(h_v-u_v)\cdot(D/P_R-D/P_M)+u_v+u_p/2}{\sqrt{(h_v-u_v)\cdot D/P_R+2u_v+h_p+u_p}}>\frac{\sqrt{D}\cdot(c+c_M-c_R)}{\sqrt{2(s_v+s_p)}}>\frac{\Omega_M+u_p/2}{\sqrt{V+h_p}} \tag{47}$$

A (45) és a (46) feltételből külön is következik, hogy:

$$\frac{P_M}{P_R}>1-\frac{u_v}{h_v-u_v}, \tag{48}$$

ami mindig teljesül, ha $h_v/2>u_v$, máskülönben a

$$\frac{P_R}{P_M}<1+\frac{u_v}{h_v-u_v} \tag{49}$$

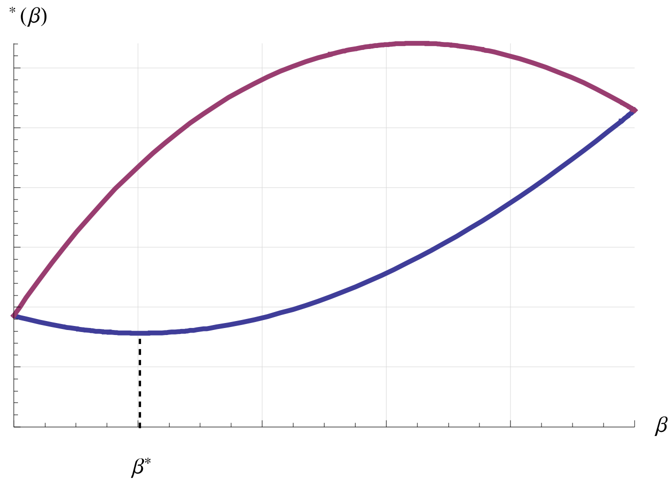
egyenlőtlenséggel egyezik meg, ami ugyanakkor szükséges és elégséges, ahhoz ÚM stratégia teljesítménye felülmúlja a MÚ-ét minden rögzített q rendelési nagyság és $\beta\in(0,1)$ újramegmunkálási rátára Tovább, (47) feltételből következik, hogy:

$$c+c_M>c_R.$$

Ha (45)–(47) feltételek közül bármelyik sérül, akkor a rendszer optimális gyűjtési és újramegmunkálási rátája $\beta^*_{T,RbM}$ vagy 0 vagy 1.

Bizonyítás: 2. következmény bizonyításával analóg módon, felhasználva az 5. lemmát.

Példa 4. Legyen $D = 1000$, $s_v = 900$, $s_p = 400$, $h_v = 200$, $h_p = 220$, $u_v = 30$, $u_p = 40$, $c_M = 20$, $c_R = 33$, $c = 15$, $P_M = 2500$, $P_R = 1200$. Akkor a rendszer optimális gyűjtési és újramegmunkálási rátája $\beta^*_{T,RbM} \approx 0{,}2$, a megfelelő teljes költség $TC^*_{T,RbM}(\beta^*_{T,RbM}) \approx 62782{,}4$. 13. ábra mutatja az egész rendszerre jellemző minimum költséget β függvényében, MÚ és ÚM esetén.



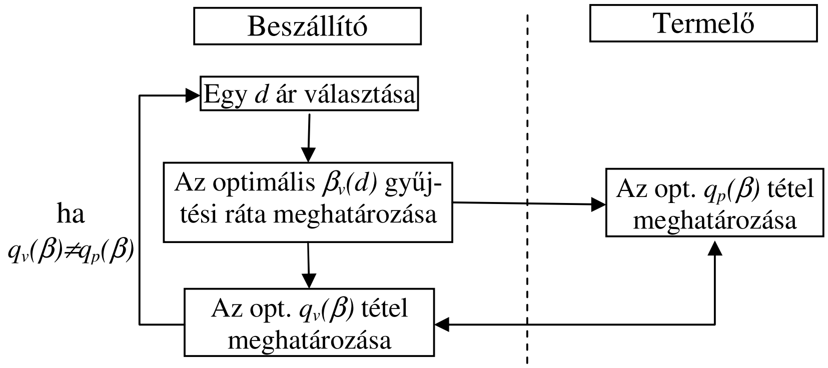
13. ábra: $TC^*_T(\beta)$, az egész rendszer költségfüggvénye MÚ és ÚM stratégia esetén, a 4. példa alapján

6. Tárgyalás a visszavételről és a visszagyűjtési rátáról: a BTK-MÚ probléma

Ebben a fejezetben egy tárgyalásos megoldást fogunk vizsgálni MÚ rendszerben. Feltételezzük, hogy a beszállító és a termelő nem vertikálisan integráltak és mindketten a saját érdekeiket követik.

Tekintsük a 14. ábrán szemléltetett alkufolyamatot. Először a beszállító határoz meg egy d visszavételi árat és erről tájékoztatja a termelőt. Majd ajánlatot tesz a β újramegmunkálási rátára, amit a termelőre nézve kötelező.[1] Ugyanakkor a rendelési nagyság meghatározása a termelő döntési joga. Feltételezzük, hogy racionálisan cselekszik és válaszul a beszállító által meghatározott visszavásárlási ár és az újramegmunkálási ráta nagyságára, olyan rendelési mennyiséget választ, ami minimalizálja a saját költségeit. Ezután a beszállító problémáját a következőképpen fogalmazhatjuk meg: milyen visszavételi ár nagyság és újramegmunkálási ráta optimális a számára?

[1] Azt feltételezzük, hogy a beszállító és a termelő már megállapodott az alku folyamat feltételeiben a tárgyalás egy korábbi szakaszában.



14. ábra: Az alkufolyamat

Az általunk vizsgált probléma egy Stackelberg-játék, amiben a beszállító a vezető és a termelő a követő. Általánosabban megfogalmazva, egy kétszereplős, extenzív játék, tökéletes információval (Osborne és Rubinstein, 1994), aminek a megoldása visszafelé haladó indukció segítségével határozható meg, mint részjáték tökéletes egyensúlyban -, ahogy ezt lentebb bemutatjuk.

A beszállító a termelő optimális válaszát számításba véve, képes előre kiszámítani, hogy a döntése (d,β), milyen teljes költséget fog eredményezni – amit a következőképpen definiálunk:

$$\tilde{TC}_v(d,\beta)=C_v(q_p^*(\beta),\beta)+R_v(d,\beta) \tag{50}$$

ahol $C_v(q,\beta)$ és $R_v(d,\beta)$ a beszállító (5)–(6) szerint definiált költségösszetevői, $q_p^*(\beta)$ pedig a termelő optimális rendelési nagysága, a (11) definíció alapján. Vegyük észre, hogy míg $R_v(d,\beta)$-t határozottan d-től tettük függővé, $q_p^*(\beta)$ független d-től. Az (5)–(6) és (11) definíciókat behelyettesítve a teljes költség egyenletébe (50), azt kapjuk, hogy

$$\tilde{TC}_v(d,\beta)=\frac{s_v D}{\sqrt{\dfrac{2s_p D}{h_p+\beta u_p}}}+\frac{\Delta_M\beta^2-2\Omega_M\beta+V}{2}\sqrt{\frac{2s_p D}{h_p+\beta u_p}}+(c_M+(d+c_R-c_M)\beta)D \tag{51}$$

Így a beszállító optimális (d,β) döntését a következő korlátozott optimalizálási probléma megoldásával adhatjuk meg:

$$\min_{(d,\beta)}\tilde{TC}_v(d,\beta) \text{ s.t. } d\geq 0, 0\leq\beta\leq 1 \tag{52}$$

Ez a probléma nem szükségszerűen konvex, ezért a Karush–Kuhn–Tucker (KKT) feltételek (Bazaraa et al., 2006, p. 204) önmagukban nem elégségesek a globális optimumpont meghatározásához. De, felhasználhatóak a lehetséges lokális optimumok megkereséséhez, amikből, ezt követően, kiválasztható a globális minimum. Ahhoz, hogy ezt a megközelítést alkalmazzuk, először vizsgáljuk meg az (52) probléma Lagrange-függvényét:

$$L(d,\beta,\lambda)=\tilde{TC}_v(d,\beta)+\lambda\cdot(\beta-1), \tag{52}$$

ennek az argumentumai – feltevés szerint – nem negatívok. A megfelelő KKT feltételek egyszerűsíthetőek:

$$\frac{\partial L}{\partial d} = \beta D \geq 0 \text{ és } d \cdot \frac{\partial L}{\partial d} \equiv d\beta D = 0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\partial \tilde{TC}_v}{\partial \beta} + \lambda \geq 0 \text{ és } \beta \cdot \frac{\partial L}{\partial \beta} \equiv \beta \cdot \left(\frac{\partial \tilde{TC}_v}{\partial \beta} + \lambda \right) = 0 \tag{54}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \beta - 1 \leq 0 \text{ és } \lambda \cdot \frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv \lambda \cdot (\beta - 1) = 0 \tag{55}$$

Az (53) feltételből rögtön következik, hogy

8. lemma Ha a beszállító optimális döntést hoz, akkor nem fizet a termelőnek a visszavételért.

Az (53) második része, valóban megköveteli, hogy d vagy β vagy mindkettő nulla legyen, ha $\beta = 0$, akkor a termelő egyetlen terméket se küld vissza, így a beszállító nem fizet visszatérítést, különben $d = 0$ és, ezért ebben az esetben sincs visszatérítés.

A 8. lemma állítása egészen nyilvánvaló: mivel az újra használás szintjét a beszállító határozza meg, ezért a visszavétel nem ösztönzi a termelőt a használt termékek visszaküldésére, és a beszállító számára pedig annak visszatérítése csak szükségtelen költséget jelentene.

Vegyük észre, hogy, ha $\beta = 0$, akkor a visszavétel nagyságáról hozott döntés irreleváns. Ezért szükséges optimalitási feltételként elvárhatjuk, minden $\beta \in [0,1]$ esetben, hogy $d = 0$ legyen. Így az (54)-(55) feltételek vizsgálatát a következőkben három esetre bonthatjuk: $\beta = 0$, $0 < \beta < 1$, és $\beta = 1$.

$\beta = 0$. Ekkor az (55) feltételből következően $\lambda = 0$, következésképpen az (54) mindig teljesül, ha a derivált

$$\frac{\partial \tilde{TC}_v(0,\beta)}{\partial \beta} = (c_R - c_M)D + \sqrt{\frac{2Ds_p}{h_p + \beta u_p}} \left(\Delta_M \beta - \Omega_M + \frac{u_p}{4} \left(\frac{s_v}{s_p} - \frac{\Delta_M \beta^2 - 2\Omega_M \beta + V}{h_p + \beta u_p} \right) \right) \tag{56}$$

nem negatív $\beta = 0$-ban, vagyis, ha

$$(c_R - c_M)D + \sqrt{\frac{2Ds_p}{h_p}} \left(\frac{u_p}{4} \left(\frac{s_v}{s_p} - \frac{h_v}{h_p} \cdot \frac{D}{P_M} \right) - \Omega_M \right) \geq 0 . \tag{57}$$

Vegyük észre, hogy ebben a kifejezésben a gyökös tényező a termelő klasszikus gazdaságos rendelési nagysága.

$0 < \beta < 1$. Ahogy korábban említettük, az (55) feltételből következően $\lambda = 0$, míg az (54) feltétel megkívánja, hogy β stacionárius pont legyen $\tilde{TC}_v(0,\cdot)$-ben — azaz, a megoldás az (56) egyenlőséget nullára teljesítse. A következő példán azt fogjuk megmutatni, hogy ilyen $\beta \in (0,1)$ nem létezik minden esetben, és, ha létezik, akkor lokális minimum és lokális maximum is lehet.

5a. példa 5a Legyen $D = 400$, $s_v = 2000$, $s_p = 500$, $h_v = h_p = 50$, $u_v = u_p = 25$, $c_M = c_R = 50$, $P_M = 500$, $P_R = 2000$. Ekkor

$$\tilde{TC}_v(0,\beta) \approx 20000 + 1264.9\sqrt{25\beta+50} + 316.2\frac{25\beta^2 - 10\beta + 40}{\sqrt{25\beta+50}}$$

$(0,1)$ intervallumon nincs stacionárius pont, ahogy azt a 15a ábrán láthatjuk.

5b. példa Most legyen $h_v = 100$. Ekkor

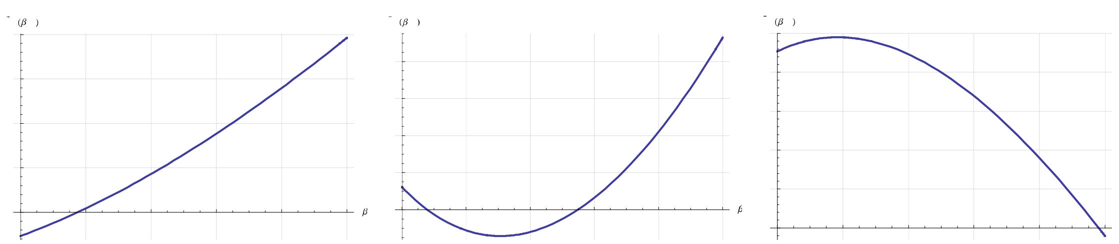
$$\tilde{TC}_v(0,\beta) \approx 20000 + 1264.9\sqrt{25\beta+50} + 316.2\frac{55\beta^2 - 70\beta + 80}{\sqrt{25\beta+50}}$$

$\beta \approx 0{,}31$-ben stacionárius pont van, ami globális minimum, ahogy azt a 15b. ábra mutatja.

5c. példa Legyen most $P_M = 1250$ és $c_M = 57.5$. Ekkor

$$\tilde{TC}_v(0,\beta) \approx 23000 - 3000\beta + 1264.9\sqrt{25\beta+50} + 316.2\frac{7\beta^2 + 26\beta + 32}{\sqrt{25\beta+50}}$$

$\beta \approx 0{,}18$ -ban stacionárius pont van, ami globális maximum, ezt a 15c. ábra szemlélteti.



15a-c. ábra: a beszállító $\tilde{TC}_v(0,\beta)$ költségfüggvénye, 5a-c. példák alapján (balról jobbra)

Ugyan, lehetséges $\tilde{TC}_v(0,\beta)$ függvény stacionárius pontját analitikus formában megadni, de ez egy igen hosszú és nehezen használható képlethez vezetne, ezért praktikusabb megoldásnak tűnik a lokális szélsőértékek vizsgálata minden adott esetben. A magasabb fokú deriváltak segíthetnek meghatározni, hogy melyik stacionárius pontok lokális minimumok, de ez a lépés elhagyható és helyette vizsgálhatjuk és összehasonlíthatjuk a függvényértékeket minden stacionárius pontban, ahogy ezt a következőekben tenni fogjuk.

β = 1. Ekkor az (54) és (55) feltételek miatt, az (56) függvény deriválja $\beta = 1$ pontban szükségszerűen nem pozitív, azaz

$$(c_R - c_M)D + \sqrt{\frac{2Ds_p}{h_p + u_p}}\left[u_v\left(1 - \frac{D}{P_R}\right) + \frac{u_p}{4}\left(\frac{s_v}{s_p} - \frac{2u_v + (h_v - u_v)D/P_R}{h_p + u_p}\right)\right] \leq 0. \tag{58}$$

Most már összehasonlíthatjuk a függvényértékeket az a)-c) esetekben meghatározott pontokban, hogy megkapjuk $\widetilde{TC}_v(d,\beta)$ globális minimumát.

6. példa Használjuk az 5c. példa adatait, és legyen $c = 3$. $\widetilde{TC}_v(0,\beta)$ deriváltja pozitív (≈41,05) és negatív (≈-109,2441,05) β = 0 és β = 1 pontokban, a stacionárius pont pedig $\beta \approx$ 0,18 (lásd 15c. ábra). A függvény értéke a három lehetséges pontban 33375,36, 33327,92 és 33379,01. Ez alapján láthatjuk, hogy a függvény a globális minimumát β = 1 pontban éri el. Ebben az esetben a függvény értékét $\beta \approx$ 0,18 pontban nem szükséges kiszámolnunk, mivel az (56) deriváltja 0-ban pozitív és 1-ben negatív, míg [0, 1] intervallumon folytonos, ezért az egyetlen stacionárius pont (0,1) intervallumon egyben maximum pont is.

A beszállító optimális $(d,\beta) = (0,1)$ döntésére, a termelő optimális válasza a $q_p^*(1) \approx 73{,}03$ rendelési nagyság, ami a termelőnél ≈5477,23 költséget jelent. Az 1. táblázat összefoglalja a tárgyalásos modell megoldását, összehasonlítva az egész rendszer megoldásával (vö. 4.3 fejezet).

	d	β	q	TC_v	TC_p	TC_T
Tárgyalásos modell	0	1	73.03	33 327.92	5 477.22	38 805.14
Rendszer optimum	0	1	119.52	30 577.77	5 477.22	36 733.2

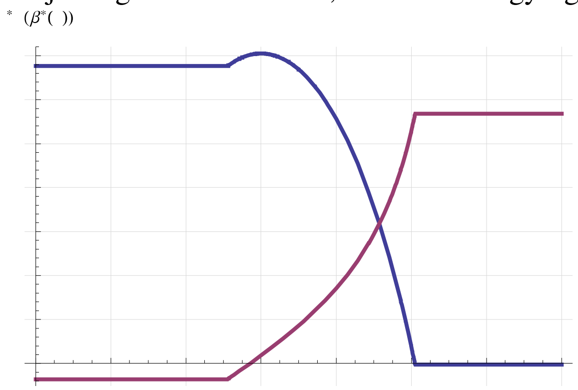
1. táblázat: A tárgyalásos és a rendszer optimális megoldás összehasonlítása, a 6. példa alapján

A 1. táblázat utolsó oszlopa azt mutatja, hogy az ellátási lánc koordinációja nem valósul meg az optimális tárgyalásos megoldás esetén; ugyanakkor, a termelő költségei olyan alacsonyak, mint az együttes optimális megoldás mellett, (ahol a visszavásárlás lehet nulla is).

Itt hívjuk föl a figyelmet a most kapott megoldásunk optimalitása — amit a tiszta újramegmunkálási stratégiára vezetőβ = 1 szélsőérték és az 5a. példában bemutatott, tiszta megmunkálást jelentő β = 0 érték jellemez — és a Richter (1997) által bevezetett tiszta stratégiák optimalitása közötti párhuzamra.

Ahogy az szintén látszik a fenti példában, a tárgyalásos modellben a termelő döntése a rendelési nagyságról nem egyezik meg a rendszeroptimális rendelési nagysággal. A beszállító megpróbálhatna, olyan d visszavételi ár nagyságot választani, ami — együtt a megfelelő, beszállító számára optimális $\beta^*(d)$ újramegmunkálási rátával —, arra késztetné a termelőt, hogy a beszállítónak kedvező, $q_v^*(\beta^*(d))$ mennyiséggel megegyező, $q_p^*(\beta^*(d))$ rendelési nagyság mellett döntsön. A 7. példa azt szemlélteti, hogy, ha létezik is ilyen beszállítói döntés, az nem lesz optimális stratégia.

7. példa Legyen $D = 500$, $s_v = 300$, $s_p = 900$, $h_v = 50$, $h_p = 70$, $u_v = 5$, $u_p = 60$, $c_M = 20$, $c_R = 10$, $c = 3$, $P_M = 600$, $P_R = 2000$. A 16. ábra mutatja, $q_p^*(\beta^*(d))$ és $q_v^*(\beta^*(d))$ rendelési nagyság függvényeket, ahol $\beta^*(d)$ rátát a 2. következmény, a rendelési nagyságokat pedig a (11) és (13) egyenlőségek alapján kapjuk. A grafikonon jól látszik, hogy valóban létezik, olyan visszavételi ár nagyság — $d \approx 13{,}15$ és $\beta^*(d) \approx 0{,}31$ —, ahol mindkét fél egyéni optimuma megegyezik és ez ≈100,9. Azonban, ahogy a 2. táblázatban látható, ezt az eredményt dominálja a tárgyalásos megoldás, a beszállító és az egész rendszer szempontjából is. Az optimális tárgyalásos megoldás eléggé közelít a rendszeroptimális megoldáshoz, ahol az újramegmunkálási ráta 1, a rendelési nagyság ≈ 89 és a rendszerszintű költség ≈ 18 472,19.



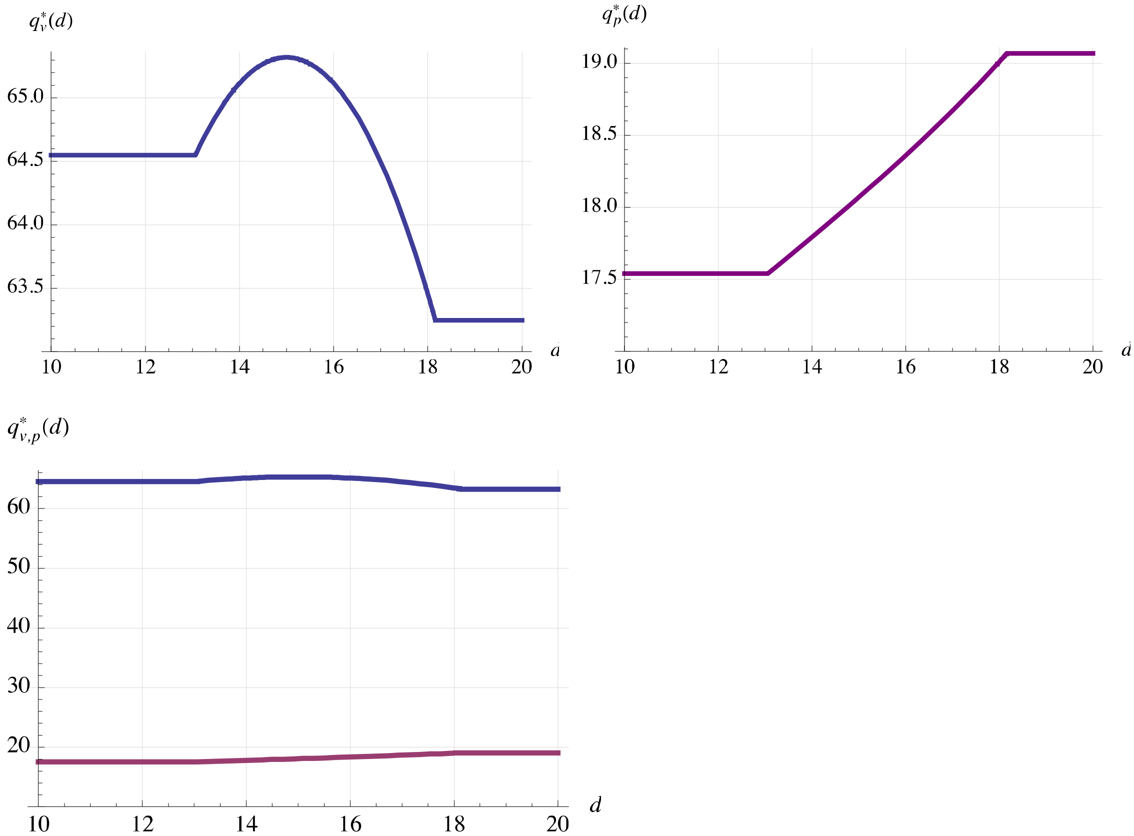
16. ábra: a beszállító (kék) és a termelő (piros) optimális tételnagysága *d* visszavételi ár függvényében, a 7. példa alapján

	d	β	q	TC_v	TC_p	TC_T
Egyenlő rendelési nagyság	13.15	0.31	100.9	13 456.19	7 943.18	21 399.37
Tárgyalásos optimum	0	1	83.2	7 686.83	10 816.65	18 503.48

2. táblázat: A beszállító stratégiájának összehasonlítása egyenlő rendelési nagyság és tárgyalásos optimum esetén, a 7. példa alapján

A következő példa azt az esetet szemlélteti, amikor egyáltalán nem létezik olyan *d* visszavásárlási ár nagyság, ami mindkét fél számára optimális.

8. példa A keresletre és a beszállító adataira alkalmazzuk az 1. példa értékeit: $D = 100$, $s_v = 1000$, $h_v = 100$, $u_v = 5$, $c_M = 35$, $c_R = 20$, $P_M = 200$, $P_R = 250$, a termelő adataihoz használjuk a 4. példát: $s_p = 400$, $h_p = 220$, $u_p = 40$, $c = 15$. A 17. ábra mutatja a beszállító és a termelő rendelési nagyság függvényét. Ahogy az alsó grafikonon látható, a beszállító nem tudja rávenni a termelőt, arra, hogy ugyanazt a rendelési nagyságot válassza, ami mellett ő maga döntene, figyelembe véve a saját optimális újramegmunkálási rátáját.



15. ábra: A beszállító (bal) és a termelő (jobb) optimális tételnagysága *d* visszavételi ár függvényében, az 5. példa alapján. Az alsó diagram a két függvényt közös skálán szemlélteti.

7. Következtetések

Jelen tanulmányunkban zártkörű ellátási láncban, kétszereplős, beszállító-termelő modellbe vizsgáltunk egy problémacsoportot, hogy meghatározzuk az egyedi és közös optimális árutétel (rendelési) nagyságot, újramegmunkálási (gyűjtési) rátát és visszavételi ár nagyságot. Nem vezettük le az optimális tárgyalás melletti visszavásárlási ár nagyság analitikus kifejezését, de zárt formulát adunk minden más mennyiségre. Példákon keresztül bemutattuk, hogy az ellátási lánc koordinációja nem feltétlenül valósul meg az általunk vizsgált tárgyalásos játékban.

Felhasznált irodalom.

Affisco, J. F., Paknejad, M. J., Nasri, F., 2002. Quality improvement and setup reduction in the joint economic lot size model. *European Journal of Operational Research* 142(3), 497–508.

Ahn, H., 2009. On the profit gains of competing reverse channels for remanufacturing of refillable containers. *Journal of Service Science* 2009, 147–190.

Banerjee, A., 1986a. A joint economic lot-size model for purchaser and vendor. *Decision Sciences* 17, 292–311.

Banerjee, A., 1986b. On "A quantity discount model to increase vendor profits". *Management Science* 32(11), 1513–1517.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., Shetty, C. M., 2006. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, 3rd ed.

Bonney, M., Jaber, M. Y., 2011. Environmentally responsible inventory models: Non-classical models for a non-classical era. *International Journal of Production Economics* 133(1), 43–53.

Chung, S.-L., Wee, H.-M., Yang, P.-C., 2008. Optimal policy for a closed-loop supply chain inventory system with remanufacturing. *Mathematical and Computer Modelling* 48, 867–881.

Eben-Chaime, M., 2004. The effect of discreteness in vendor-buyer relationships. *IIE Transactions* 36, 583–589.

Gou, Q., Liang, L., Huang, Z., Xu, C., 2008. A joint model for an open-loop reverse supply chain. *International Journal of Production Economics* 116, 28–42.

Goyal, S. K., 1976. An integrated inventory model for a single supplier–single customer problem. *International Journal of Production Research* 15, 107–111.

Goyal, S. K., 1988. "A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor": a comment. *Decision Sciences* 19, 236–241.

Grimes-Casey, H. G., Seager, T. P., Theis, T. L., Powers, S. E., 2007. A game theory framework for cooperative management of refillable and disposable bottle lifecycles. *Journal of Cleaner Production* 15, 1618–1627.

Hill, R. M., 1997. The single-vendor single-buyer integrated production-inventory model with a generalised policy. *European Journal of Operational Research* 97(3), 493–499.

Hill, R. M., 1999. The optimal production and shipment policy for the single-vendor single-buyer integrated production-inventory problem. *International Journal of Production Research* 37(11), 2463–2475.

Hill, R. M., Omar, M., 2006. Another look at the single-vendor single-buyer integrated production-inventory problem. *International Journal of Production Research* 44(4), 791–800.

Hoque, M. A., 2009. An alternative optimal solution technique for a single-vendor single-buyer integrated production inventory model. *International Journal of Production Research* 47(15), 4063–4076.

Kohli, R., Park, H., 1989. A cooperative game theory model of quantity discounts. *Management Science* 35(6), 693–707.

Lee, H. B., Cho, N. W., Hong, Y. S., 2010. A hierarchical end-of-life decision model for determining the economic levels of remanufacturing and disassembly under environmental regulations. *Journal of Cleaner Production* 18, 1276–1283.

Leng, M., Parlar, M., 2005. Game theoretic applications in supply chain management: A review. *INFOR* 43(3), 187–220.

Liu, X., Çetinkaya, S., 2007. A note on "quality improvement and setup reduction in the joint economic lot size model". *European Journal of Operational Research* 182(1), 194–204.

Mitra, S., 2009. Analysis of a two-echelon inventory system with returns. *Omega* 37, 106–115.

Osborne, M. J., Rubinstein, A., 1994. *A Course in Game Theory*. MIT Press.

Pibernik, R., Zhang, Y., Kerschbaum, F., Schröpfer, A., 2011. Secure collaborative supply chain planning and inverse optimization – The JELS model. *European Journal of Operational Research* 208(1), 75–85.

Richter, K., 1994. An EOQ repair and waste disposal model. In: *Proceedings of the Eighth International Working Seminar on Production Economics*, Innsbruck, Vol. 3, 83–91.

Richter, K., 1997. Pure and mixed strategies for the EOQ repair and waste disposal problem. *OR-Spektrum* 19, 123–129.

Richter, K., Dobos, I., 1999. Analysis of the EOQ repair and waste disposal problem with integer setup numbers. *International Journal of Production Economics* 59, 463–467.

Subramoniam, R., Huisingh, D., Chinnam, R. B., 2010. Aftermarket remanufacturing strategic planning decision-making framework: theory & practice. *Journal of Cleaner Production* 18, 1575–1586.

Sucky, E., 2005. Inventory management in supply chains: A bargaining problem. *International Journal of Production Economics* 93–94, 253–262.

Sucky, E., 2006. A bargaining model with asymmetric information for a single supplier–single buyer problem. *European Journal of Operational Research* 171, 516–535.

Voigt, G., Inderfurth, K., 2011. Supply chain coordination and setup cost reduction in case of asymmetric information. *OR Spectrum* 33(1), 99–122.

Yuan, K. F., Gao, Y., 2010. Inventory decision-making models for a closed-loop supply chain system. *International Journal of Production Economics* 48, 6155–6187.

Zhou, Y.-W., Wang, S.-D., 2007. Optimal production and shipment models for a single-vendor–single-buyer integrated system. *European Journal of Operational Research* 180(1), 309–328.