Mai és régi idők tenisze

A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok egy alkalmazása

Temesi József, Csató László, Bozóki Sándor

Kivonat

A többtényezős döntési módszertan egyik fontos eszköze a páros összehasonlítás. Preferenciasorrendek meghatározására, adott tényező szerinti értékelések számszerűsítésére egyaránt felhasználják a páros összehasonlításokból kapott mátrixokat. Tanulmányunk egy viszonylag új kutatási területtel, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok alkalmazásával foglalkozik. Az elmúlt 40 év egymás elleni eredményei alapján profi teniszjátékosok rangsorait adjuk meg. Mivel a játékosok közül nem mindenki játszott mindenkivel, ezért – különböző feltételek mellett – az eredmények nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokhoz vezetnek. Számításaink nem csak jól értelmezhető rangsorok létrehozására vonatkoznak, hanem a mátrixok bizonyos tulajdonságainak a rangsorokra gyakorolt hatását is megvizsgáljuk.

1. Bevezetés

Forgó Ferenc a játékelmélet művelése mellett egyes játékokat a gyakorlatban is szívesen űz. Ezek között kiemelkedő helyet foglal el a sakk és a tenisz. Mivel e cikk legidősebb

Temesi József
Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék,
email: jozsef.temesi@uni-corvinus.hu

Csató László
Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék,
email: laszlo.csato@uni-corvinus.hu

Bozóki Sándor
Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport és Budapesti Corvinus Egyetem, Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék, email: bozoki@sztaki.hu

szerzőjének alkalma volt Ferivel egy teniszcsapatban játszani – ez leggyakrabban még az 1980-as években történt –, így testközeli megfigyelésekre volt lehetősége Feri stratégiáinak és kifizetéseinek elemzésében. Ha eltekintünk a tudományos modellezési technikák alkalmazásától, akkor a legkézenfekvőbb, ám triviális megfigyelési eredmény az volt, hogy Feri nem szeret veszíteni (Ki szeret?). Amikor ez mégis bekövetkezett, már átvezetne bennünket a magatartáselméleti kutatások ingoványosabb talajára. Feri szerva-röpte játékstratégiája mellett a legjobban az emlékeztetett McEnroe és más nagy játékosok stílusára, amilyen kérlelhetetlenséggel saját hibáit megítélte. Akik jól ismerik szelíd, iróniára hajló habitusát, bizonyára nem hiszik el a régmúlt idők tanújának, ha azt állítja, hogy időnként nem csak a labda repült, hanem az ütő is…

Ahogyan teltek az évek, a tenisz szeretete és gyakorlása – legtöbbször családi körben – megmaradt, viszont kiegészült a nagy versenyek televíziós közvetítéseinek megtekintésével és elemzésével. Ma is jókat beszélgetünk arról, hogy a modern kori teniszgladiátorok közül ki a legjobb, és vajon felvennék-e a versenyt a korábbi hősökkel? Ez a gondolat vezetett el bennünket ahhoz, hogy egy olyan teniszversenyt hirdessünk meg, ahol a régi és új csillagok megmérkőzhetnek egymással. No persze nem a teniszpályán (bár sokan még most is játszanak korosztályos versenyeken vagy bemutató mérkőzéseken), hanem a számítógép virtuális valóságában, a modellezés eszközeivel.

Az elmúlt 40 év nagy férfi teniszezői közül 34 játékost választottunk ki, köztük mindenkit, aki 1974. július 29-e óta az ATP világranglistáját vezette – ők 23-an vannak. Ám a szokásos egyenes kieséses fordulók helyett az általunk rendezett „torna” végeredménye az egymás elleni eredmények alapján alakult ki. Így a 34 játékos sorrendjének meghatározásához felhasználható volt a páros összehasonlítások módszertana. A „rangsorolás” érdekességét az adja, hogy vannak olyan játékosok, akik az 1980-as vagy az 1990-es években befejezték aktív pályafutásukat, így biztosan nem találkozhattak a pályán a 2000-es évek csillagaival. Emellett akár egy időben aktív játékosoknál is előfordulhatott, hogy nincs egymás elleni eredményük. Ezért a páros összehasonlítás mátrixok egy speciális osztályával, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokkal kellett a feladatot megoldani, s ez – a játék izgalmán túlmenően – egy új módszertan érdekes alkalmazásának is ígérkezett.

A tanulmány első részében a páros összehasonlítás mátrixok tulajdonságaival foglalkozunk olyan mértékben, amennyire a továbbiakban szükséges, majd a teniszezők életpályájára és egymás elleni eredményeire vonatkozó részleteket mutatjuk be. A konkrét számításokhoz szükséges adatok ismertetése után a különböző feltevéseken alapuló modellvariánsok eredményeit közöljük. Az egyes „rangsorok” elemzésekor a módszertani tanulságok mellett igyekszünk a tenisz sajátos viszonyait és a játékosokra vonatkozó többletinformációt is figyelembe venni.

Reméljük, hogy Forgó Feri kedvencei az általa elvárt módon szerepelnek majd ebben a történelmi versengésben – ha mégsem, akkor majd közösen megvitatjuk, mi az, amit még javíthatunk a modelleken.

2. Páros összehasonlítás mátrixok

A páros összehasonlítás mátrixok talán legismertebb alkalmazási területe a többszempontú döntési modellezés, ahol az egyes szempontok fontosságának számszerű meghatározására vagy az alternatívák adott szempont szerinti értékelésére használhatók. A dolgozatban az utóbbi esettel foglalkozunk, hiszen teniszezők rangsorát szeretnénk felállítani. A páros összehasonlítás mátrix egy négyzetes mátrix, amelynek (i,j)-edik eleme megmutatja, hogy az i-edik játékos hányszor jobb az j-edik játékosnál:

1. Definíció. *(Páros összehasonlítás mátrix) Jelölje $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ a pozitív valós elemekből álló $n\times n$-es mátrixok osztályát. Az*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

mátrixot páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük, ha minden $i,j=1,\dots,n$ indexre teljesül, hogy

$$a_{ii} = 1, \qquad a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}. \tag{1}$$

(1) alapján az önmagával való összehasonlítás eredménye mindig 1, továbbá ha az i-edik játékos a_{ij}-szer jobb, mint a j-edik, akkor a j-edik szükségképpen $1/a_{ij}$-szer jobb, mint az i-edik. Az (1)-ből adódóan n játékos esetén $n(n-1)/2$ összehasonlítás alapján a mátrix minden eleme felírható.

2. Definíció. *(Konzisztens páros összehasonlítás mátrix) Ha egy $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ mátrixra* (1)*-en túl még $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ is teljesül minden $i,j,k = 1,\dots,n$ indexre (tranzitivitás), akkor konzisztens páros összehasonlítás mátrixnak nevezzük. Az* (1) *feltételt igen, de a tranzitivitást nem teljesítő mátrixot inkonzisztens mátrixnak nevezzük.*

A feladat: a játékosok páronkénti összehasonlításának ($\mathbf{A}$ mátrix) ismeretében egy olyan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ súlyvektor meghatározása, amire $w_i > 0 \quad (i = 1,2,\dots,n)$, valamint $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, és amelynek a komponenseiből képzett w_i/w_j arányok *jól tükrözik* a mátrixban szereplő a_{ij} értékeket minden $i,j = 1,2,\dots,n$ indexpárra (miután csak a súlyok arányai számítanak, a súlyvektort valamilyen módon normalizálni kell, általában összegüket 1-nek választjuk). A dőlt betűvel szedett cél matematikailag sokféle, egymással nem feltétlenül ekvivalens módon fogalmazható meg. Az Analytic Hierarchy Process (AHP) módszertanban a mátrix maximális sajátértékéhez (λ_{max}) tartozó jobboldali sajátvektor komponensei adják a súlyokat (Eigenvector Method, *EM* módszer; Saaty (1980)). Matematikai szempontból legalább ennyire természetesnek tűnik olyan távolságminimalizáló módszereket használni, amelyekben a döntéshozó által megadott páros összehasonlítás mátrixot egy súlyvektor által generált konzisztens mátrixszal közelítjük és célfüggvényként a két mátrix távolságát írjuk fel, például a logaritmikus legkisebb négyzetek értelemben (*LLSM*; Crawford és Williams (1980, 1985); De Graan (1980)):

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\log a_{ij} - \log \left(\frac{w_i}{w_j} \right) \right]^2 \tag{2}$$

$$w_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \tag{3}$$

Ha a döntéshozó eleve konzisztens mátrixot ad meg, akkor mindegyik súlyozási módszer vissza is adja ezt eredményül, míg inkonzisztens esetben az egyes módszerek egymástól kisebb-nagyobb mértékben eltérő súlyvektorokat eredményeznek. A számos további célfüggvény felírását és összehasonlítását (lásd Bozóki (2006), 4.1. fejezet) oly módon foglalhatjuk össze, hogy nincs olyan súlyozási módszer, amely minden tekintetben jobb lenne a többinél. Az *LLSM* módszer egyik előnye, hogy az optimális megoldás könnyen számolható a páros összehasonlítás mátrix sorelemeinek mértani közepeiből (Crawford és Williams, 1985).

A súlyvektorból a koordináták nagyság szerinti sorrendje alapján azonnal adódik a játékosok rangsora.

2.1. A páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciája

Az előző fejezetben az inkonzisztenciát a konzisztencia hiányával definiáltuk, de az inkonzisztencia szintjére még nem adtunk mérőszámot. Az mindenesetre érezhető, hogy az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/5 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok nem egyformán inkonzisztensek, hiszen az elsőben „épphogy csak” nem teljesül a konzisztencia $2 \times 3 = 5$ egyenlete, míg a másodikban sokkal nagyobb az eltérés az egyenlet két oldala között. Ráadásul a második esetben a körbeverés jelensége is megjelenik.

Az AHP módszertanban Saaty úgy definiálta egy páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciáját (*CR*), hogy maximális sajátértékének egy pozitív lineáris transzformáltját vette és a mátrixot elfogadhatónak tekintette, ha ennek értéke $0,1$ alatt van, ami a szakirodalomban a 10%-os szabályként vált ismertté (Saaty, 1980).

Az inkonzisztencia mérésére számos további ötlet ismert, az irodalomban legalább tízféle megközelítést említenek (Brunelli és Fedrizzi, 2011). A dolgozatban a körhármasokkal – triádokkal – fogunk foglalkozni (Kéri, 2011; Kindler és Papp, 1977). Ezek esetében eltekintünk a preferenciák intenzitásától, csak azok irányát (a közömbösséget kifejező 1-hez viszonyított nagyságát) vizsgáljuk. E tekintetben elsősorban az intranzitív triádok, a fenti példában a jobb oldalihoz hasonló „következetlen” hármasok aránya lesz érdekes.

2.2. *Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok*

Számos oka lehet annak, hogy egy páros összehasonlítás mátrix néhány eleme hiányzik. Ha a döntéshozó idejét és figyelmét csak szűkre szabott korlátok között tudjuk igénybe venni, akkor könnyen előfordulhat, hogy nincs lehetőség az összes szempontpár vagy alternatívapár közötti arány lekérdezésére. A teniszjátékosok esetében pedig természetszerűleg jelennek meg a hiányzó elemek, hiszen nem tudunk közvetlenül összehasonlítani két olyan játékost, akik sohasem játszottak egymás ellen.

A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix csak annyiban különbözik a (teljesen kitöltött) páros összehasonlítás mátrixtól, hogy néhány eleme ismeretlen. A következő felírásban a hiányzó elemek helyére $*$-ot teszünk:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & * & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & * \\ * & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & * & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

A fenti objektum még nem egy matematikai fogalom, hiszen minden lineáris algebrai definíció, művelet és állítás olyan mátrixokra van értelmezve, amelyeknek az összes eleme adott. A problémát könnyen áthidalhatjuk, ha a főátló fölötti hiányzó elemeket az $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}_+$ változókkal helyettesítjük, a nekik megfelelő főátló alattiakat pedig a reciprokaikkal: $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_d$. A mátrixban tehát összesen $2d$ hiányzó, illetve mostantól változóval jelölt elem lesz.

Jelölje

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_1 & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & x_d \\ 1/x_1 & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/x_d & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d_+$. A fentieknek megfelelően az (5) alakot nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixnak hívjuk. Ez tekinthető egy mátrixosztálynak, amelynek bármely realizációja (az $x_1, x_2, \dots, x_d$ változók mindegyikének valamilyen pozitív értéket adunk) egy-egy páros összehasonlítás mátrixot eredményez.

A továbbiakban a *páros összehasonlítás mátrix* fogalmát a teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra használjuk, míg a *nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix* fogalmát a fentebb definiált nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixra. A nyelvi logika ellenére a páros összehasonlítás mátrix fogalma nem bővebb, mint a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix fogalma (a „nem teljesen kitöltött” jelző tehát most nem szűkítést jelent.) A két halmaz közötti tartalmazás csak a fenti realizációs formában értelmezhető, ekkor viszont éppen a nem teljesen kitöltött mátrixok fogalma a bővebb.

Mind döntéselméleti, mind alkalmazási szempontból az alábbi kérdések tűnnek fontosnak és izgalmasnak:

- Hogyan számítsuk ki a súlyvektort?
- Hogyan számítsuk ki az inkonzisztenciát?

Természetesen adódik még az a kérdés is, hogy milyen értékek beírásával lehet valamilyen szempontból optimálisan kitölteni a mátrixot. Ezt önmagában nem tartjuk elsődleges fontosságúnak, bár megjegyezzük, hogy a későbbiekben tárgyalt algoritmusok mintegy melléktermékeként ez is megoldódik és bizonyos információk kiolvashatók az eredményekből.

2.3. Gráf reprezentáció

Amikor a döntéshozót arra kérjük, hogy páronként hasonlítsa össze n szempont fontosságát, akkor minden egyes összehasonlítás során egyfajta reláció, viszony megállapítása történik. Minden egyes reláció egy arányszám formájában jelenik meg, jelesül a két szempont fontosságának hányadosaként vagy legalábbis annak becsléseként. Két, még össze nem hasonlított szempont között tehát nincs semmilyen közvetlen reláció. Közvetett persze lehet, ha a további szempontokkal való összehasonlításokat is figyelembe vesszük. A fentiek alapján természetesen adódik a gráfokkal való kapcsolat.

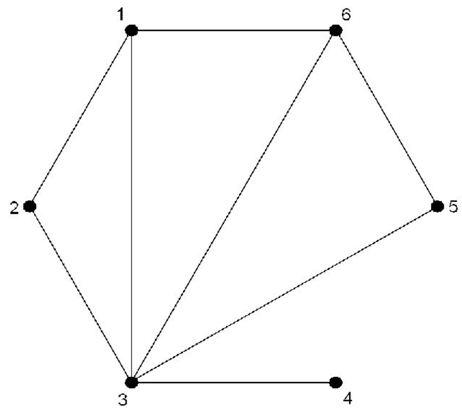
Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix. Ehhez egy gráfot definiálunk az alábbiak szerint:

- $G := (V, E)$, ahol
- $V := \{1, 2, \dots, n\}$, minden csúcs egy-egy összehasonlítandó elemnek (például teniszjátékosnak) felel meg;
- $E := \{e(i, j) \,|\, a_{ij}$ (és a_{ji}) adott és $i \neq j\}$, az irányítatlan élek a mátrix ismert elemeit képviselik;

- Ha hiányzó elem van a mátrixban, akkor a neki megfelelő él nincs behúzva a gráfban. G egy irányítatlan gráf.

1. Példa. Legyen $\mathbf{C}$ egy 6×6-os nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix, a hozzátartozó G gráfot az 1. ábra mutatja.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & * & * & a_{16} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & * & * & * \\ a_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ * & * & a_{43} & 1 & * & * \\ * & * & a_{53} & * & 1 & a_{56} \\ a_{61} & * & a_{63} & * & a_{65} & 1 \end{pmatrix}.$$



1. ábra. A $\mathbf{C}$ mátrixhoz tartozó G irányítatlan gráf

2.4. Súlyok számítása nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok esetén

A Saaty-féle CR inkonzisztencia mérőszám és a maximális sajátérték között közvetlen kapcsolat van: egymás pozitív lineáris transzformáltjai. Minél nagyobb a mátrix maximális sajátértéke, annál magasabb a CR inkonzisztencia szintje.

A fentiekből kiindulva egy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz azokat a kitöltő elemeket fogjuk megkeresni, amelyekkel teljessé téve a mátrixot a maximális sajátértéke minimális lesz. Formálisan:

$$\min_{\mathbf{x}>\mathbf{0}} \lambda_{max}(\mathbf{A}(\mathbf{x})). \tag{6}$$

Belátható, hogy az *EM* módszernek megfelelő (6) optimalizálási feladat megoldása akkor és csak akkor egyértelmű, ha nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó G gráf összefüggő (Bozóki et al., 2010).

A logaritmikus legkisebb négyzetek módszerének a nem teljesen kitöltött esetre vonatkozó kiterjesztése természetes módon a következő: a (2) célfüggvényben csak azokhoz az (i,j) indexpárokhoz tartozó tagokat vesszük figyelembe, amelyekre a_{ij} adott:

$$\min \sum_{e(i,j)\,\in\, E} \left[\log a_{ij} - \log\left(\frac{w_i}{w_j}\right)\right]^2 \tag{7}$$

$$w_i > 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n), \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \tag{8}$$

Az előző esethez hasonlóan megmutatható, hogy a nem teljesen kitöltött mátrixokra felírt (7)-(8) *LLSM* feladat megoldása pontosan akkor egyértelmű és egy lineáris egyenletrendszerből explicit módon számítható, ha a G gráf összefüggő (Bozóki et al., 2010).

3. A tenisz világranglisták vezető játékosainak összehasonlítása: az adatrendszer

Napjainkban a tenisz világszerte az egyik legnépszerűbb sport. Nagy egyéniségeit a televízió révén százmilliók láthatják akár élő közvetítésekben is, népszerűségük óriási. A legnagyobb versenyek (Grand Slam, ATP 100-as tornák, Davis Kupa) nézettsége reklámértékét tekintve a sportágak között az elsők közé emelte. Ennek okait, történetét itt nem tudjuk feltárni; kihasználjuk viszont azt a számunkra nagyon fontos következményét, hogy a versenyekről, eredményekről, a játékosok pályafutásáról rengeteg szabadon elérhető információ áll rendelkezésre. Az adatokat többféle szemléletben közölték, táblázatok tömege mutatja be ezeket, ennek ellenére (vagy éppen ezért?) feldolgozásuk egyáltalán nem egyszerű.

A férfi és női hivatásos teniszezők világszövetségei honlapjaikon sokféle statisztikai feldolgozást közölnek. Ezek egy része a teniszezők egyéni életútjára vonatkozik: hány mecscset játszott, milyen győzelem-vereség aránya volt az egyes években, mennyi pénzt keresett a különböző hivatalos tornákon, melyek voltak a ranglista helyezései. Számunkra az egymás elleni eredmények adatbázisa volt különösen fontos, ahogyan arra hamarosan részletesen is kitérünk. Végül a honlapok nyilvántartják az aktuális világranglistákat, míg archív oldalaikon a régi ranglisták és eredmények is elérhetők.

Tanulmányunkban a férfi világranglisták élversenyzőivel foglalkozunk. A női teniszezőkre vonatkozóan az adatok szintén összegyűjthetők és a számítások analóg módon elvégezhetők, ám terjedelmi keretek ezt nem tették lehetővé (ráadásul Feri is szívesebben követi a férfi tornák mérkőzéseit). A vizsgált játékosok között ugyan többen vannak, akik párosban is kiemelkedő eredményeket értek el, ám itt csak az egyéni mérkőzésekre koncentrálunk.

Célunk az, hogy a jelen és a múlt nagy játékosait egymással összevessük. Használhatnánk erre a világranglistákat, de szemléletünk eltér attól, ahogyan ezek a listák összeállnak. Míg néhány sportágban az egyéni ranglisták megpróbálják az egymás elleni eredményeket értékelni (például a sakkban), vagy az egyes versenyeken elért eredményeket valamilyen módon aggregálni (egyes atlétikai számok, vívás), addig a tenisz ranglisták készítői a versenyek eredményeit jelentőségük szerinti pontszámokkal látják el, s így alakítják ki a helyezéseket. A különböző tornák fontosságát a pénzdíjak mérik. Az elért pontszámban egyáltalán nem játszik szerepet a legyőzött ellenfél kiléte, ez csak indirekt módon, a számításba vett versenyek nevezési és kiemelési rendszerében jelenik meg. A tenisz ranglista-készítés speciális szabályaira nem térünk ki, mivel ezeket nem használjuk (illetve csak a szóba jöhető játékosok körének meghatározására).

Logikusnak látszik a játékosok egy zárt körének értékelésére az egymás elleni eredmények felhasználása. Ugyanakkor egyáltalán nem magától értetődő, hogy olyan sportágakban, ahol két játékos sokszor találkozott egymással, és hol az egyik, hol a másik kerekedett felül, az egyes eredmények közül melyeket választjuk ki, illetve hogyan súlyozzuk azokat. A világhálón elérhető adatbázisok mind a 34 játékosunk esetében lehetővé tették az összes egymás elleni „hivatalos” eredmény figyelembevételét, amit meg is tettünk, mégpedig a versenyek megkülönböztetése nélkül. Valószínűleg nem nagyon tévedünk ugyanis, ha azt gondoljuk, hogy a pályán egy játékos legjobb tudását bevetve mindig le akarja győzni ellenfelét, és nem a pénzdíj vagy egyéb körülmények motiválják. Ha például két játékos valamelyik nagy versenyen játszott egymással, az ugyanolyan módon került be az adataink közé, mint amikor egy Challenger tornán vagy a Davis Kupa csapatmérkőzésein találkoztak. Az egymás elleni mérkőzések eredménye és az egyéb adatok forrása minden esetben a FEDEX ATP Head 2 Head Statistics játékos-összehasonlító oldal.

Nem mindegy az sem, mit tekintünk eredménynek. Ha az egyik játékos egy 2 vagy 3 nyert játszmáig menő mérkőzésen legyőzte a másikat, azt a javára írt egy pontnak tekinthetjük, míg a másik játékos nem kap pontot. Így bármely két játékosra meg tudunk állapítani egy győzelem/vereség arányt. Számításainkban ez lesz az egyik numerikus adat. Ez a hányados mindenképpen mond valamit a két játékos erőviszonyáról: ha 1 közelében van, akkor az erőviszonyok kiegyenlítettek, ha valamelyik fél javára magas az érték, akkor őt sokkal jobbnak tekinthetjük a másiknál. Ennél árnyaltabb megközelítést jelent az, ha a két játékos egymás elleni játszmaarányát tekintjük értékmérőnek. Ezzel általában az az eset is kivédhető, ha az egyik játékos soha nem nyert egy másik ellen, s így a hányados nem lenne értelmezhető.

Elemzéseink a páros összehasonlítás mátrixokból számított súlyvektorokra és az ezek alapján felállított sorrendekre épülnek. Feltevésünk szerint a játékosok egymás elleni eredményeinek aránya egyben kettőjük páros összehasonlítása a fenti értelemben. Háromféle mátrixot állítottunk elő. Az első típusú mátrixnak ($PC1$) azok az elemei kapnak értéket (vagyis azok lesznek a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix ismert elemei), ahol a két játékos legalább egy mérkőzést játszott egymással. Mivel több esetben mindössze néhány, olykor csak egy-két mérkőzés van a két játékos között, ezek eredménye az arányszemléletben erősen torzíthatja az erőviszonyokat, akárhogyan is igyekszünk a nullával való osztást elkerülni. Itt azt a megoldást választottuk, hogy az ilyen „végtelenül erősebb, mint a másik” esetben egy korrigált értéket írtunk be. Ennél jobb lehet az a megoldás – bár adatvesztést és némi torzítást okoz –, ahol csak azokat a párokat vettük figyelembe, amelyekben a játékosok legalább ötször mérkőztek egymással. Ez a második típusú mérkőzésarányt tartalmazó mátrix (*PC*2). Harmadik típusú mátrixunkban (*PC*3) a játszmaarányok képviselik a páronkénti összehasonlításokat.

Ez a szemlélet jól kezeli azt, hogy ebben az egyéni sportban is váltakozó szerencsével folyhat a két játékos közötti küzdelem. Azonban ezek a találkozók nem egyetlen rövid időszakban zajlottak le, hanem a sportolók teljes játékos pályafutása alatt. Egy-egy győzelmet vagy vereséget a hozzáértő másként kezelhet, ha két olyan játékos találkozott egymással, akiknek a pályafutásuk kezdete és csúcsa más-más időszakra esett. Ha egyikük még fiatal, kezdő hivatásos, míg a másik pályája csúcsán van, akkor az eredmény nem feltétlenül számítható be azzal azonos módon, mint amikor ugyanez a két játékos ereje teljében találkozott. Ezzel a kérdéssel – részben módszertani nehézségek miatt – nem foglalkozunk. Tapasztalataink szerint egyébként fiatal játékosok néha már pályájuk elején is nagy eredményekre voltak képesek (például Becker, Nadal), így nem igazán tudnánk egy meggyőző súlyozási módszert érvényesíteni.[1]

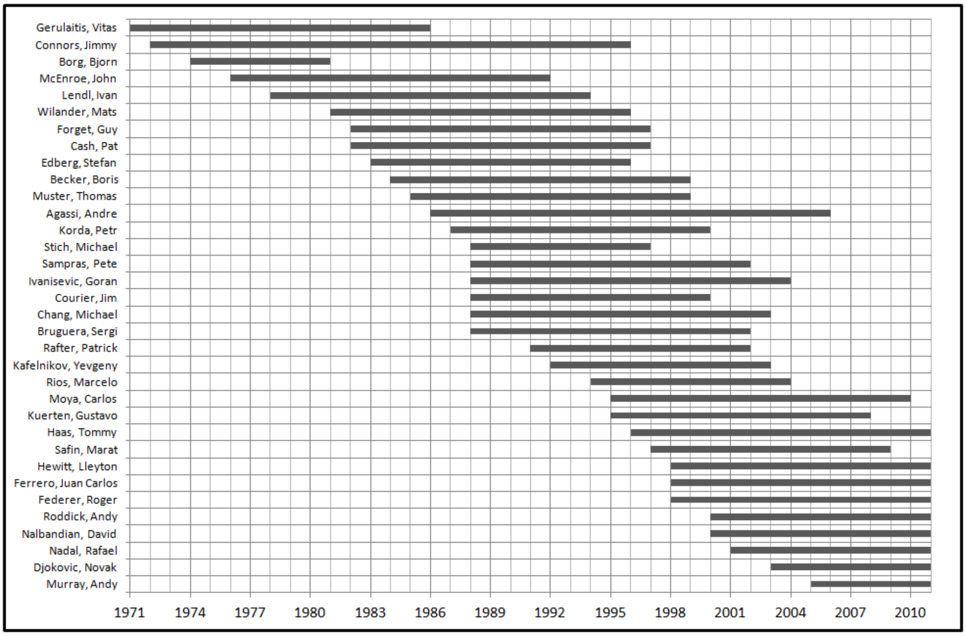
Az elemzések során mégis érdemes lehet követni az egyes játékosok aktív pályafutásának idejét, és figyelni arra, mikor találkozhattak egymással. A 2. ábra mutatja játékosaink aktív pályafutásának időszakait. Jól láthatóan vannak, akik hamar visszavonultak (például Borg 8 év professzionális karrier után), míg másoknál rendkívül hosszú aktív hivatásos időszakok is előfordulnak (Agassi: 21 év, Connors: 25 év). Megemlítendő, hogy az ATP honlap szerint jelenleg még 8 játékos aktív versenyző: Djokovic, Federer, Ferrero, Haas, Murray, Nadal, Nalbandian, Roddick (Muster késői „visszatérését” a profik közé nem számítjuk ide). Az ő egymás elleni eredményeik később még módosíthatnak a rangsorokon; e tekintetben elsősorban a két fiatal versenyző, Djokovic és Murray előretörése várható a többiek rovására. Az adatbázisban a 2011 végéig lejátszott hivatalos mérkőzések szerepelnek.[2]

A 2. ábra rávilágít arra, hogy vannak olyan játékosok, akik aktív pályafutásuk során soha nem találkozhattak egymással! Ha tehát a páros összehasonlítás mátrixok módszertanát akarjuk alkalmazni, akkor mátrixaink nem lesznek teljesen kitöltöttek. Az előző fejezetben megmutattuk, hogy a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok módszertani kezelése akkor megoldott, ha a mátrix ismert elemeit reprezentáló gráf összefüggő. Teniszezőink esetében ez akkor teljesül, ha nincsenek olyan izolált időszakok, amikor bizonyos

---

[1] Ebben az is szerepet játszhat, hogy egy fiatal játékos minden bizonnyal nagyobb motivációval lép pályára az aktuális sztárok ellen, mint fordítva, hiszen számukra ez jelentheti „életük meccsét”.

[2] Az egyetlen kivétel ez alól a 12. táblázat teljes pályafutásra vonatkozó adatállománya. Ezek összegyűjtése 2011. október-november folyamán történt, és utólag nehezen lehetne 2011 végéig frissíteni. Mindenesetre ez egyáltalán nem befolyásolja számítási eredményeinket.



2. ábra. A professzionális teniszkarrier időtartama az elemzésbe bevont játékosoknál

játékosok kizárólag egymással játszottak. A diagramon az is látható, kik azok, akik leginkább kapcsolatot teremtenek az egyes időszakok között. Az 1980-as, illetve a 2000-es évek játékosai közül például Agassi vagy Kuerten viszonylag sokakkal játszhatott, de Lendl is a 20. század végi tenisz egyik ilyen összekötő egyéniségének tekinthető.

Itt érkeztünk el arra a pontra, ahol módszertanunk legizgalmasabb és egyben legvitathatóbb eleme jelenik meg: együtt kezeljük, együtt rangsoroljuk azokat, akik játszottak egymással (akár egyetlen meccset), azokkal, akik aktív pályafutásuk során a pályán egyszer sem álltak egymással szemben. Az együttes rangsorolás lehetőségét a feltételünket teljesítő nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixnak az a tulajdonsága adja, hogy indirekt módon az egymás ellen nem játszó versenyzők is összehasonlításra kerülnek.

Mielőtt azonban az eredményeket bemutatnánk és elemeznénk, ki kell térnünk néhány technikai részletre. Szenteljünk még néhány szót a játékosoknak. Mivel a mátrixainkban szereplő mérkőzések egymás elleniek, ezért érdekes kérdés lehet, vajon egy-egy játékos teljes karrierjének ezek a meccsek mekkora részét fedik le. Rendelkezésre áll olyan statisztika, ahonnan kigyűjthetők a szükséges adatok és összeállítható a függelékben közölt 12. táblázat, mely szerint a versenyzők többségénél az általunk kiválasztott játékosokkal történt összecsapások az összes mérkőzéshez viszonyítva 15 és 20% között mozognak (FEDEX ATP Head 2 Head Statistics). A legkisebb (nagyjából 10%-os) ez az arány Borg, Gerulaitis és Connors esetében. A másik végletet Edberg, Sampras és Becker (23% körül) képviselik. Talán meglepő, hogy az éljátékosok világa ennyire „belterjes”: az éljátékosok mérkőzéseik legnagyobb részét – a nevezési rendszerek és a fizető nézők, valamint a televízióadások követelményeinek megfelelően – egymás ellen játsszák.

Számításaink alapját, mint arról már szó volt, három mátrix képezte. Ezek közül a $PC1$ mátrixban szereplő arányok alapadatait – az egymás elleni eredményeket – a függelék 14. a. és 14. b. táblázataiban láthatjuk. Ennek egy cellájában a sor szerinti játékos oszlop szerinti játékos elleni győztes mérkőzéseinek száma szerepel, zárójelben kettejük összes egymás elleni találkozójával. Agassi például 10 alkalommal nyert Becker ellen, Becker pedig 4-szer Agassi ellen. Így a $PC1$ mátrixban $10/4$ és $4/10$ lesz a páros összehasonlítás mátrix megfelelő két eleme (A $PC3$ mátrix hasonlóképpen épül fel a játszmaarányokból). Üres cellák, ismeretlen elemek jelzik azt, ha a két játékos nem mérkőzött egymással. A $PC1$ mátrix az elméletileg lehetséges 561 páros összehasonlításból 322-t tartalmaz (57,4%). Ennek kitöltöttségét azzal is jellemezhetjük, hogy a 34×34-es méretű mátrixban mennyi az ismert elem. Ekkor a mátrix reciprok tulajdonságából adódó nem nulla értékeket és a főátlóban szereplő egyeseket is számításba vesszük, így a $PC1$ mátrix kitöltöttsége 58,7% (pontosabban $678/1156 \approx 58,65\%$).

A $PC1$ és $PC3$ mátrixokban a győzelmi és a játszmaarányok iránya általában azonos. Egyes esetekben a döntetlen arány a játszmáknál sem változik (például Hewitt-Nalbandian $3/3$, illetve $10/10$), többnyire azonban – bár csekély mértékben – a játszmaarány „eldönti”, ki volt jobb (például Borg-McEnroe $7/7$ és $23/21$). Akadnak megforduló irányok is, a 322-ből összesen 8 esetben. Talán a legérdekesebb az Edberd-Wilander párosítás, ahol a mérkőzésarány $9/11$, míg a játszmaarány $29/24$. Számításainkat a győzelmi és a játszmaarányokra is elvégezzük és mindkét megoldást elemezni fogjuk.

Azokban az esetekben, amikor az egyik játékos egyáltalán nem nyert mérkőzést (vagy játszmát), egy azonos – relatíve nagy – számérték alkalmazása nyilvánvalóan erős torzítást vitt volna a rendszerbe. A *mérkőzésarányokat tartalmazó mátrixoknál* a korrekcióra kétféle megoldást alkalmaztunk:

a) 5 mérkőzésenként változtattuk az arányt; az első öt esetben $(1:0, 2:0, \ldots, 5:0)$ a beírt hányados 5, majd a következő öt esetben $(6:0, \ldots, 10:0)$ 10, és így tovább: ez a $PC1$;

b) $1:0$ esetében 3, $2:0$ esetében 4, $3:0$-nál 5 volt az arány, a továbbiakban is úgy folytatva, hogy a győzelmek számához kettőt adtunk hozzá: ez a $PC4$.

A $PC2$ mátrix úgy állt elő, hogy a $PC1$ mátrixból (a 14. a. és 14. b. táblázatok adatai közül) kihagytuk azokat, ahol a mérkőzések száma két játékos között kevesebb, mint 5. Ezzel a módosítással egy olyan variánst kívántunk létrehozni, ahol a fenti korrekciót csak kevés elemre kell alkalmazni. Mivel a 322 párosításból 134 esetben volt a mérkőzésszám 5-nél kisebb, ezért a $PC2$ mátrix kitöltöttsége az összes lehetséges egymás elleni mérkőzéshez viszonyítva 33,5%. A $PC5$ mátrix a $PC2$ adataiból a *b)* korrekció révén keletkezik.

A *játszmaarányokat tartalmazó mátrixnál* – mivel kevesebb korrigálandó eset volt – úgy kerültük el ezt a problémát, hogy az ilyen eredményeket kihagytuk. Így a $PC3$ mátrix 279 elemet tartalmazott (a lehetséges páros összehasonlítások 49,7%-a). Végeztünk egy olyan számítást is, ahol a $PC3$ mátrixnál a *b)* korrekciót alkalmaztuk, így állt elő a $PC6$ mátrix (ennek kitöltöttsége azonos a $PC1$-ével, azaz 57,4%).

4. Súlyvektorok előállítása a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokból

A három alapmátrix mindegyikére kiszámítottuk a súlyvektorokat a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével ($LLSM$) és a Saaty-féle sajátérték módszerrel (EM) is. A $PC1$ és $PC2$ mátrix elemeinél a szükséges korrekciót az *a)* variáns szerint végeztük el. Az egyes mátrixokhoz és módszerekhez tartozó súlyvektorokat a függelék 13. táblázatában $LLSM1$, $LLSM2$ és $LLSM3$, illetve $EM1$, $EM2$ és $EM3$ jelöli.

Elvégeztük a számításokat a *b)* korrekciós módszer szerint előállított $PC1$ és $PC2$ mátrixokra is, terjedelmi okokból azonban az $LLSM4$, $LLSM5$ futtatások vektorait nem közöljük, ahogyan azt a számítást sem, amelyben a $PC3$ mátrixra a *b)* korrekciót alkalmaztuk az elemek kihagyása helyett ($LLSM6$). Ugyanez érvényes a 4, 5, 6 indexű EM rangsorokra is. Elegendő megjegyezni, hogy ezekből a vektorokból gyakorlatilag az előző eredményekből származó rangsorokkal azonos sorrendeket kaptunk. Ennek igazolását a későbbiekben a 3. a. és a 3. b. táblázatok elemzésénél fogjuk látni.

Mivel a korrekciók az eredeti és a korrigált hányadosokat vegyesen tartalmazó mátrixokat eredményeznek, úgy gondoltuk, szükség lehet egy olyan transzformációra, amelyik minden elemre érvényes, és a mérkőzések eredményhányadosainak azt a tulajdonságát is kezeli, hogy egyes esetekben kevés, más esetekben viszonylag sok az egymás elleni mérkőzések száma – hiszen több lejátszott mérkőzés esetén „biztosabbnak” tekinthető a páros összehasonlítás eredménye. Új páros összehasonlítás mátrixokat képeztünk, ahol az eddigi hányadosok helyébe ezek hatványait írtuk be az *egymás elleni mérkőzésszám / maximális mérkőzésszám* kitevővel.[3]

Az új mátrixokra a $WPC1$, $WPC2$ és $WPC3$ jelöléseket vezetjük be, a hozzájuk tartozó $LLSM$ és EM számítások eredményeit a megfelelő indexű $WLLSM$ és WEM vektorokat adják. Ezek alapján azt találtuk, hogy gyakorlatilag eltűnik a különbség (az a kicsi is, amit eddig láttunk) az *a)* és a *b)* korrekciós módszerrel kapott eredmények között, aminek igazo-

[3] Például az Agassi-Becker $10/4 = 2,5$ érték helyébe $(10/4)^{14/36} \approx 1,43$ lép, ahol a kitevő nevezőjében szereplő 36 a Lendl-McEnroe párosításból kapott maximális mérkőzésszám. Ez a módosítás nyilvánvalóan nem változtat a páros összehasonlítás mátrix főátlójában szereplő egyeseken, viszont „összébb húzza” a végső súlyok tartományát.

lására ismét a rangkorrelációs együtthatókat fogjuk felhasználni.[4] Így a 13. táblázathoz hasonlóan elegendő a $WLLSM1$, $WLLSM2$ és $WLLSM3$ futtatásokat, illetve a $WEM1$, $WEM2$ és $WEM3$ futtatások súlyvektorait elemezni, melyek közlését ezúttal mellőzzük. Viszont az $LLSM$ és EM módszerrel kapott súlyvektorokat jól jellemezhetjük maximális és minimális értékeikkel, illetve ezek arányával, ahogy azt az 1. a. és 1. b. táblázatok mutatják. (A súlyvektorok elemeinek összegét minden esetben 1-re normalizáltuk.)

	$LLSM1$	$LLSM2$	$LLSM3$	$WLLSM1$	$WLLSM2$	$WLLSM3$
Max	0,0827	0,0776	0,0682	0,0409	0,0422	0,0373
Min	0,0079	0,0076	0,0130	0,0205	0,0163	0,0234
Arány	10,4605	10,1819	5,2374	1,9894	2,5917	1,5908

1. a. táblázat. A súlyvektorok maximális és minimális értékei ($LLSM$)

	$EM1$	$EM2$	$EM3$	$WEM1$	$WEM2$	$WEM3$
Max	0,0658	0,0737	0,0626	0,0411	0,0436	0,0372
Min	0,0072	0,0083	0,0128	0,0206	0,0165	0,0235
Arány	9,1647	8,8339	4,8706	1,9948	2,6388	1,5843

1. b. táblázat. A súlyvektorok maximális és minimális értékei (EM)

A logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével és a sajátérték módszerrel számított súlyvektoroknak nem csak a maximális és minimális értékei, valamint ezek arányai hasonlók egymáshoz a megfelelő korrekciós, illetve transzformációs pároknál, hanem lényegében minden elemük, illetve a belőlük kapott rangsorok is. A következőkben ezeket fogjuk elemezni.

[4] Ez a tény nem igazán meglepő, tekintve, hogy a korrigálandó eredmények esetén az egyik játékos egyáltalán nem nyert mérkőzést a másik ellen, vagyis várhatóan kevés mérkőzést játszottak egymás ellen. Ekkor a páros összehasonlítás mátrix megfelelő helyére kerülő elem közel van 1-hez, azaz kevésbé befolyásolja a végső súlyokat, mint a nagyobb kitevővel rendelkező valódi „párharcok”. Természetesen ez alól is vannak kivételek, legfeltűnőbb a Borg-Gerulaitis 16 : 0-ás mérkőzésarány.

5. Négy évtized együtt: a mi tenisz világranglistánk

A súlyvektorok adatai alapján összeállíthatók a különböző mátrixokhoz és becslési módszerekhez tartozó rangsorok. A 2. a. táblázat a legkisebb négyzetek módszerével előállított rangsorok közül az összes adat *a)* korrekciójával és a mérkőzésszámokkal transzformált értékekkel történt futtatásokból származókat mutatja be. A 2. b. táblázatban ugyanezen mátrixokra a sajátérték módszerrel kapott rangsorok vannak.

5.1. Az adatkorrekcióból adódó eltérések

Mielőtt az egyéb rangsor-eltérésekre térnénk rá, zárjuk le az adatkorrekció már előzetesen említett hatásának vizsgálatát, amihez a 3. a és a 3. b. táblázatok rangkorrelációs adatait használjuk fel. A Spearman-féle rangkorrelációs együttható -1 és $+1$ közötti értékeket vesz fel, -1 a rangsorok tökéletes különbözőségét, $+1$ pedig a teljes egyezőséget mutatja. A táblázatban a módszereket jelölő rövidítések mögött az 1, 2 értékek az *a)* korrekciót, a 4, 5 és 6 értékek a *b)* korrekciót jelentik. (A 3 jelű számításoknál nem alkalmaztunk korrekciót, hanem elhagytuk a gondot okozó adatokat).

A megfelelő indexpárokat tartalmazó számításokból nyert rangsorok (1-4; 2-5) rangkorrelációs együtthatói alátámasztják azt, hogy **a korrekció módjának a rangsorokra nincs hatása**. Az $LLSM1$ és $LLSM4$ számításokból kapott rangsorok rangkorrelációs együtthatója 0,9893, az $LLSM2$ és az $LLSM5$ esetében az együttható értéke 0,9988. Hasonló a helyzet az $EM1-EM4$ és az $EM2-EM5$ párok között (az együttható értéke 0,9774, illetve 0,9969).

Ezeket a mutatókat a transzformált adatokkal történt számításoknál is meghatároztuk. A $WLLSM1$ és $WLLSM4$ közötti rangkorrelációs együttható 0,9997, a $WLLSM2-WLLSM5$ pedig 0,9979. Hasonlóképpen a $WEM1$ és $WEM4$ közötti rangkorreláció értéke 0,9985, míg a $WEM2$ és $WEM5$ rangsorok esetén 0,9969. Ez természetesen a konstrukcióból adódóan várható volt.

A továbbiakban tehát eltekinthetünk a korrekció esetleges befolyásoló szerepétől, **az elemzésekből kihagyhatjuk a 4, 5 és 6 indexű futtatásokat**. A következők alfejezetekben kizárólag az elemszámok különbözőségéből és az adattranszformációból adódó eltéréseket fogjuk vizsgálni.

5.2. Az elhagyott mérkőzésekre visszavezethető eltérések

A 2. a. táblázatban azt látjuk, hogy az 57%-os és a 33%-os kitöltöttségű mátrixokat felhasználó $LLSM1$ és $LLSM2$ rangsor több helyen erősen különbözik. A két rangsorhoz tartozó rangkorrelációs együttható 0,8564. Az $EM1$ és $EM2$ rangsorokhoz tartozó együttható

	$LLSM1$	$LLSM2$	$LLSM3$	$WLLSM1$	$WLLSM2$	$WLLSM3$
Borg, Bjorn	2	4	3	1	3	1
Federer, Roger	3	2	2	2	1	3
Nadal, Rafael	1	1	1	3	2	2
Sampras, Pete	6	8	5	4	4	4
Becker, Boris	5	6	6	5	5	6
Lendl, Ivan	12	10	10	6	9	5
Agassi, Andre	7	7	8	7	8	7
Murray, Andy	4	5	7	8	6	11
Hewitt, Lleyton	11	9	9	9	10	9
Kuerten, Gustavo	18	12	15	10	12	10
Djokovic, Novak	9	3	4	11	7	8
McEnroe, John	22	14	21	12	15	12
Safin, Marat	8	18	16	13	14	17
Kafelnikov, Yevgeny	10	16	13	14	16	15
Wilander, Mats	17	15	12	15	24	23
Edberg, Stefan	14	19	18	16	22	18
Ferrero, Juan Carlos	16	17	11	17	13	14
Courier, Jim	20	20	17	18	18	13
Ivanisevic, Goran	29	23	23	19	21	21
Stich, Michael	15	26	19	20	25	20
Nalbandian, David	26	13	24	21	11	19
Moya, Carlos	21	22	20	22	20	16
Rios, Marcelo	28	28	27	23	26	22
Roddick, Andy	13	11	14	24	17	24
Rafter, Patrick	19	32	22	25	33	25
Haas, Tommy	25	21	31	26	19	27
Muster, Thomas	30	27	30	27	27	26
Chang, Michael	23	25	25	28	23	28
Bruguera, Sergi	24	30	28	29	30	31
Connors, Jimmy	31	24	29	30	28	29
Korda, Petr	27	29	26	31	29	30
Cash, Pat	32	31	32	32	32	32
Forget, Guy	33	33	34	33	31	33
Gerulaitis, Vitas	34	34	33	34	34	34

2. a. táblázat. $LLSM$ rangsorok (a $WLLSM1$ oszlopot használva referenciaként)

	$EM1$	$EM2$	$EM3$	$WEM1$	$WEM2$	$WEM3$
Borg, Bjorn	3	3	3	1	3	1
Federer, Roger	2	1	2	2	1	2
Nadal, Rafael	1	2	1	3	2	3
Sampras, Pete	6	8	4	4	4	4
Becker, Boris	4	5	6	5	5	5
Lendl, Ivan	10	9	11	6	9	6
Agassi, Andre	5	7	5	7	8	7
Murray, Andy	7	6	7	8	6	11
Hewitt, Lleyton	12	10	9	9	10	9
Kuerten, Gustavo	18	12	14	10	12	10
Djokovic, Novak	17	4	8	11	7	8
Kafelnikov, Yevgeny	11	13	12	12	16	14
McEnroe, John	29	15	22	13	15	12
Safin, Marat	8	18	21	14	13	17
Edberg, Stefan	13	14	18	15	19	18
Wilander, Mats	20	16	13	16	25	24
Courier, Jim	19	20	17	17	17	13
Ferrero, Juan Carlos	21	19	16	18	14	15
Ivanisevic, Goran	28	21	23	19	20	21
Stich, Michael	14	27	20	20	24	19
Nalbandian, David	30	17	28	21	11	20
Moya, Carlos	24	23	19	22	22	16
Rios, Marcelo	27	29	27	23	27	22
Muster, Thomas	26	22	24	24	26	26
Roddick, Andy	15	11	15	25	18	23
Rafter, Patrick	9	32	10	26	33	25
Chang, Michael	22	25	25	27	23	28
Haas, Tommy	25	24	31	28	21	29
Bruguera, Sergi	16	30	29	29	30	31
Connors, Jimmy	31	26	30	30	28	27
Korda, Petr	23	28	26	31	29	30
Cash, Pat	33	31	32	32	32	32
Forget, Guy	32	33	34	33	31	33
Gerulaitis, Vitas	34	34	33	34	34	34

2. b. táblázat. EM rangsorok (a $WEM1$ oszlopot használva referenciaként)

	*LLSM*2	*LLSM*3	*LLSM*4	*LLSM*5	*LLSM*6
*LLSM*1	0,8564	0,9487	0,9893	0,8622	0,9856
*LLSM*2		0,9120	0,8970	0,9988	0,8588
*LLSM*3			0,9627	0,9144	0,9389
*LLSM*4				0,9016	0,9887
*LLSM*5					0,8662

3. a. táblázat. Rangkorrelációs együtthatók az *LLSM* számításoknál

	*EM*2	*EM*3	*EM*4	*EM*5	*EM*6
*EM*1	0,7314	0,8836	0,9774	0,7357	0,9786
*EM*2		0,8591	0,8182	0,9969	0,7601
*EM*3			0,9325	0,8659	0,9031
*EM*4				0,8246	0,9737
*EM*5					0,7681

3. b. táblázat. Rangkorrelációs együtthatók az *EM* számításoknál

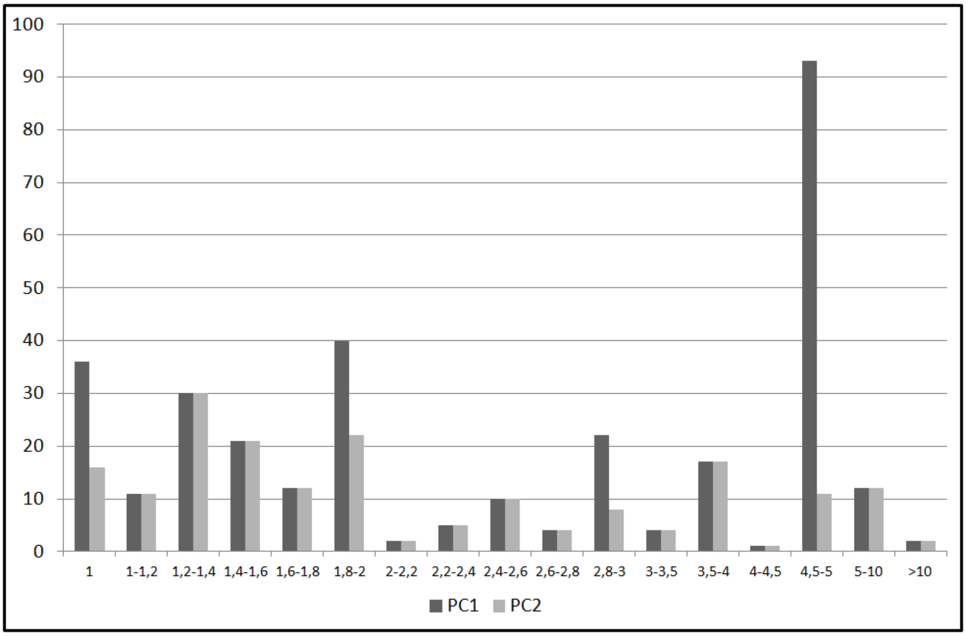
érték még kisebb: 0,7314 (az adatokat a 3. a és a 3. b. táblázatokból vettük). A $PC1$ mátrix 134 olyan mérkőzésben különbözik a $PC2$ mátrixtól, ahol a kevés mérkőzésszámból adódó eredmények az elemek nagyságrendi eloszlását jelentős mértékben befolyásolják. Feltevésünk az, hogy nem a kitöltöttségi arány változása, hanem a kihagyott elemek specialitásai okozzák a különbséget. Ezt kétféleképpen is ellenőrizhetjük:

- megnézzük, milyen az elemek, illetve a fokszámok eloszlása a $PC1$ és a $PC2$ mátrixokban, illetve a hozzájuk tartozó gráfokban;
- az összes adatot tartalmazó adatmátrixból véletlenszerűen elhagyunk annyi adatot, hogy továbbra is minden játékos szerepeljen, a mátrixot reprezentáló gráf összefüggő maradjon és az összes lehetséges összehasonlításhoz viszonyított kitöltési arány csökkenjen.

A 3. ábra az elemek eloszlását mutatja a 322 elemet tartalmazó $PC1$ és a 188 elemet tartalmazó $PC2$ mátrixokra vonatkozóan. Eszerint a $PC1$-ben jelentős az 5-ös érték nagysága, hiszen az $1:0$, $2:0$, stb. eredmények 5 vagy ennél alacsonyabb mérkőzésszámnál 5-ös hányadosnak feleltek meg, és a $PC2$-ben elhagyott, de a $PC1$-ben szereplő 188 mérkőzés között sok ilyen eredmény van. Ezenkívül kevés eltérést látunk. Valószínűleg nem az egyetlen kiugró érték felelős a rangsorbeli változásokért.

A 4. ábra a fokszámok eloszlását mutatja. Itt már jelentős eltéréseket látunk: a $PC1$ mátrixban a kapcsolatot mérő fokszám a magasabb értékek felé ferde eloszlású, a $PC2$ az alacsonyabb fokszám-tartományokban jóval kiegyenlítettebb képet mutat.

A mátrixelemek véletlenszerű kihagyásához a $PC1$ mátrixot használtuk fel. A 322 ismert elemből úgy vettünk 50%-os mintát ($R1$), hogy a mátrix gráfja összefüggő maradjon és



3. ábra. A $PC1$ és $PC2$ mátrixok elemeinek eloszlása

minden sorban legalább az eredeti elemek számának 40%-a szerepeljen (például Hewitt összesen 20 játékos ellen játszott, melyek közül legalább 8 elleni eredményének meg kellett maradnia). Egy másik véletlen mintának ennek komplementerét ($R2$) tekintettük.[5]

Az $R1$ és $R2$ mintákból számított rangsorokat összehasonlítottuk az eredeti $PC1$ mátrixból kapottal. A 4. táblázat az $LLSM$ és $WLLSM$ eredményeket tartalmazza.

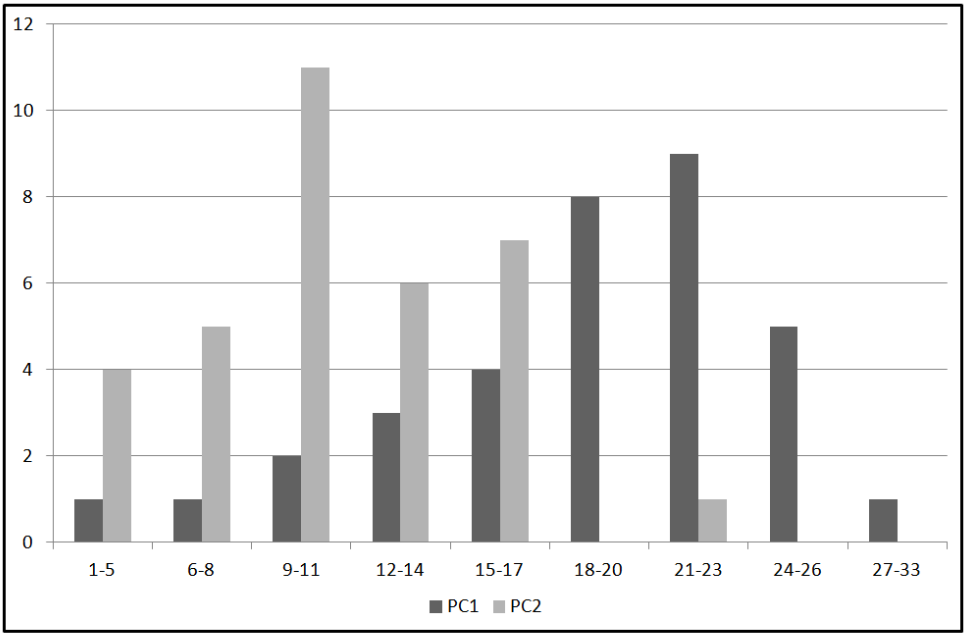
Ezek között jelentős különbségeket találunk, a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerével az eredeti adatokból számolt és az $R1$ mátrixból kapott rangsorpárok kivételével. A rangkorrelációs együtthatók (5. táblázat) megerősítik ezt. A különbségek arra utalnak, hogy a bevett-kihagyott eredmények – a súlyvektorok változásán keresztül – néhány esetben jelentős hatást gyakorolnak a rangsorokra.[6] Általában a fele adatot tartalmazó mátrixokkal számolva a rangkorreláció 0,8, sőt 0,7 alatti, bár a nagyobb információtartalmú $R1$ és a $PC1$ rangsorok (egyetlen) magasabb korrelációs együtthatója éppen arról tanúskodik, nem mindegy, hogyan képezzük a mátrixot.

[5] Tehát az $R1$ és $R2$ mátrixok ismert elemeinek uniója éppen az eredeti – szintén nem teljesen kitöltött – páros összehasonlítás mátrixot adja. Ennek fényében arra számíthatunk, hogy az egyik minta alapján jól szereplő játékosok a másikban hátrébb kerülnek, és fordítva. Vegyük észre, hogy $R2$-nél már nem biztosított a 40%-os küszöb teljesülése, vagyis $R1$ „megbízhatóbbnak” tekinthető.

[6] Például Borg már említett rendkívül kedvező – magas értékkel megjelenített – Gerulaitis elleni eredménye nincs benne az $R1$-ben, így visszaesésének ez lehet az egyik oka.

	LLSM			*WLLSM*		
	*PC*1	*R*1	*R*2	*PC*1	*R*1	*R*2
Agassi, Andre	7	9	5	7	8	5
Becker, Boris	5	5	9	5	5	6
Borg, Bjorn	2	7	2	1	2	1
Bruguera, Sergi	24	26	22	29	26	21
Cash, Pat	32	30	33	32	31	32
Chang, Michael	23	21	27	28	24	25
Connors, Jimmy	31	31	23	30	30	20
Courier, Jim	20	16	20	18	32	14
Djokovic, Novak	9	13	10	11	17	7
Edberg, Stefan	14	11	25	16	22	18
Federer, Roger	3	2	3	2	4	2
Ferrero, Juan Carlos	16	23	7	17	20	13
Forget, Guy	33	34	32	33	33	31
Gerulaitis, Vitas	34	33	34	34	34	34
Haas, Tommy	25	24	31	26	19	28
Hewitt, Lleyton	11	10	16	9	12	11
Ivanisevic, Goran	29	28	24	19	16	22
Kafelnikov, Yevgeny	10	8	17	14	13	19
Korda, Petr	27	19	30	31	29	30
Kuerten, Gustavo	18	14	15	10	10	12
Lendl, Ivan	12	15	12	6	6	9
McEnroe, John	22	25	21	12	11	24
Moya, Carlos	21	22	18	22	25	17
Murray, Andy	4	3	4	8	7	10
Muster, Thomas	30	29	26	27	28	23
Nadal, Rafael	1	1	1	3	1	3
Nalbandian, David	26	32	14	21	27	16
Rafter, Patrick	19	17	19	25	18	29
Rios, Marcelo	28	27	28	23	14	27
Roddick, Andy	13	4	29	24	9	33
Safin, Marat	8	12	6	13	21	8
Sampras, Pete	6	6	8	4	3	4
Stich, Michael	15	18	13	20	15	26
Wilander, Mats	17	20	11	15	23	15

4. táblázat. A véletlen kiválasztással kapott $R1$ és $R2$ mátrixokból származó rangsorok összehasonlítása a $PC1$-ből számítottakkal



4. ábra. A $PC1$ és $PC2$ mátrixokhoz tartozó gráfok fokszámainak eloszlása

	$LLSM\_R1$	$LLSM\_R2$	$WLLSM\_PC1$	$WLLSM\_R1$	$WLLSM\_R2$
$LLSM\_PC1$	0,9392	0,8570	0,8934	0,8176	0,8102
$LLSM\_R1$		0,6761	0,7901	0,7876	0,6611
$LLSM\_R2$			0,8683	0,6785	0,9080
$WLLSM\_PC1$				0,8561	0,8964
$WLLSM\_R1$					0,6309

5. táblázat. Az $PC1$, $R1$ és $R2$ mátrixokból kapott rangsorok rangkorrelációs együtthatói

Nem tekinthetünk el attól a hatástól sem, ami az alacsony (és a véletlen mintában még tovább csökkenő) – a mátrix gráfjának összefüggőségét jellemző, fokszámokra vonatkozóan az $R1$ és $R2$ mátrixoknál érvényesül.[7]

Tehát több tényező egyszerre befolyásolja a véletlen kiválasztással kapható rangsorokat, és nem nyilvánvaló, hogy ezek közül melyik a domináns. Mivel a fentiek alapján nem tudunk egyértelmű választ adni rá, ezért **egyelőre nyitva hagyjuk a $PC1$ vagy a $PC2$ mátrixokból származó rangsorok közül történő választás kérdését**.

[7] Ez Borgnál eleve a legkisebb, mindössze 5 volt, ami a véletlen mátrixokban 2-re, illetve 3-ra módosult.

5.3. Rangsorok a mérkőzésarány és a játszmaarány alapján

A $PC1-PC2$ és $PC3$ típusú mátrixok korrigált, illetve a mérkőzésszám alapján transzformált adataival történő számítások elemzésekor mind a legkisebb négyzetek, mind a sajátérték módszer esetében (például $LLSM1-LLSM2$ vs. $LLSM3$, $EM1-EM2$ vs. $EM3$) figyelembe kell vennünk azt, hogy a mérkőzésarányokkal operáló két változatnál jelentős különbségeket figyeltünk meg az elhagyott/megmaradt mérkőzések szerint. A kérdés tehát az, hogy a játszmaarányokat felhasználó eredmények a kettő közül valamelyikkel jobban korrelálnak-e, esetleg egy markáns, önálló rangsort képeznek.

Az elemzéshez szükséges adatokat a 3. a. táblázatból vesszük. Az együtthatók értékei alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a $PC1$ és $PC3$ mátrixokból kapott rangsorok lényegesen közelebb vannak egymáshoz, mint a $PC2$ és $PC3$ mátrixokból kapott rangsorok. A páronkénti rangkorrelációs együtthatók az alábbiak szerint alakulnak:

- $LLSM1$ és $LLSM3$: 0,9487;
- $LLSM4$ és $LLSM6$: 0,9887;
- $LLSM2$ és $LLSM3$: 0,9120;
- $LLSM5$ és $LLSM6$: 0,8662.

Az EM mátrixoknál a 3. b. táblázat adatai ugyanezt a tendenciát mutatják.

Ez „ránézésre” is látszik. Például a 2. a. táblázat $LLSM1$ és $LLSM3$ oszlopaiban 6 olyan játékost találunk, akik helyezése a két rangsorban legalább 5-tel különbözik (például Djokovic és Wilander), a legnagyobb eltérés 8 (Safin). Az $LLSM1$ és $LLSM3$ oszlopokat tekintve 7 játékosnál van 5-nél nagyobb helyezésbeli különbség, a legnagyobb értékek 11 (Nalbandian) és 10 (Haas és Rafter).

A 3. a. táblázat nem tartalmazza a $WLLSM$-mel való kapcsolatokat, de elvégeztük a számításokat és hasonló eredményeket kaptunk; például a $WLLSM1$ és a $WLLSM3$ rangsorok rangkorrelációs együtthatója 0,9704, míg a $WLLSM2$ és $WLLSM3$ rangsorok közötti együttható értéke 0,9312.

Az összes mérkőzést tartalmazó mérkőzésarányokból felépített mátrixból ($PC1$) és a játszmaarányokból felépített mátrixból kapott ($PC3$) két rangsor jobban egyezik, mintha a mérkőzésarányokat tartalmazó mátrixból elhagyjuk a kevés mérkőzést tartalmazó párosításokat ($PC2$) és ezt hasonlítjuk össze a játszmaarányokat tartalmazó mátrixszal ($PC3$).

A játszmaarányokat azért vettük be az elemzésbe, hogy kiegyenlítettebb képet adjanak az egymás elleni küzdelmekről, erőviszonyokról. Az ezekkel dolgozó számításunkban minden megnyert játszma egyforma jelentőségű (és az arányt tekinthetjük úgy, mintha egyetlen „monstre” mérkőzést játszott volna egymással a két játékos, például egy már említett esetben Sampras Stichet 14 : 12-re győzte volna le). Így más képet ad a játékerőről, mint a mérkőzésarány alkalmazása, ahol az is tükröződik, hogy a nyertes játékos a mérkőzést végül lezáró játszmában mennyire tudott annak megnyerésére összpontosítani (a Sampras-Stich párosításban a 4 : 5 azt mutatja, hogy Sampras 4-szer, Stich pedig 5-ször tudott mérkőzést eldöntő játszmát nyerni – ezek „számítanak”, a többi 17 játszma csak ezeket „készítette elő”.)

A játszmaarány tehát a fenti okok miatt alkalmas lehet arra, hogy eldöntse a $PC1$ és $PC2$ közötti választás kérdését. Mivel a mérkőzésarányt felhasználó két módszer közül a játszmaarányt használó verziókkal a $PC2$ mátrixok esetében rosszabb az egyezés, ezért **a** $PC1$ **mátrix adataira épülő számításokat választjuk**.

5.4. *Az eredeti és transzformált adatokból kapott rangsorok eltérései*

Tekintsük az $LLSM$ és $WLLSM$, valamint az EM és WEM futtatásokból kapott rangsorok közötti rangkorrelációs együtthatókat. Itt is csak az *a)* típusú korrekciós mátrixokból származó rangsorokat felhasználva kapjuk a 6. táblázatot.

	$LLSM1$	$LLSM2$	$LLSM3$
$WLLSM1$	0,8934	0,9077	0,9282
$WLLSM2$	0,8448	0,9618	0,8839
$WLLSM3$	0,8552	0,8952	0,9129

	$EM1$	$EM2$	$EM3$
$WEM1$	0,7937	0,9221	0,8927
$WEM2$	0,7109	0,9481	0,8023
$WEM3$	0,7522	0,9001	0,8827

6. táblázat. Az eredeti és a transzformált adatokból származtatott rangsorok rangkorrelációs együtthatói

A $PC1$ és $PC3$ mátrixok eredeti és transzformált adataiból kapott rangsorok rangkorrelációs együtthatója relatíve alacsony: 0,8934, illetve 0,9129 az $LLSM$, és 0,7937, illetve 0,8827 az EM esetében. Mivel a rangkorreláció alacsony, **az eddigi szempontoktól különböző, új szempont vagy új információ bevonása szükséges ahhoz, hogy eldöntsük, melyik rangsort tekintjük érvényesnek**. Ez az új információ a későbbiekben a tenisszel foglalkozó szakember véleménye lesz.

Az $LLSM2$ és $WLLSM2$ aránylag magas rangkorrelációja (0,9618) technikai jellegű és várakozásainknak megfelel: ha az adatmátrixból éppen azokat az adatokat vesszük ki nagy számban, ahol kevés volt a mérkőzésszám, akkor a mérkőzésszámra épülő transzformáció hatásának mérsékeltnek kell lennie (ugyanez igaz az EM módszerrel kapott rangsorokra is).

5.5. *A különböző becslési módszerekkel kapott rangsorok eltérései*

Végül azt is meg kell vizsgálnunk, hogy a két becslési módszer (az $LLSM$ és az EM) szerinti eredmények mennyire hasonlóak. A 7. táblázat rangkorrelációs mutatói ezt a célt szolgálják. Ezek alapján kimondható, hogy **a becslési módszer megválasztásának a rangsorokra nincs jelentős hatása**.

$LLSM-EM$			$WLLSM-WEM$		
$PC1$	$PC2$	$PC3$	$PC1$	$PC2$	$PC3$
0,9386	0,9832	0,9569	0,9960	0,9960	0,9972

7. táblázat. Eltérő becslési módszerekkel kapott rangsorok rangkorrelációs együtthatói

5.6. *Néhány észrevétel a konkrét rangsorok kapcsán*

Minden rangsornál a legizgalmasabb kérdés az, vajon kiket találunk az élen. A 2. a. és a 2. b. táblázatokban – az $LLSM2$ kivételével a maradék 11 esetben – az első három helyen Borg, Nadal és Federer áll. Borg az adatok szerint minden vizsgált játékos ellen nemnegatív, Nadal pedig pozitív mérleggel rendelkezik, tehát az, hogy valamelyikük foglalja el az első helyet, nem meglepő. Egyikük a múlt, másikuk a jelen évszázadot képviseli, így egymással soha nem játszottak. Nadal és Federer között a szakértő hajlamos lenne az egymás elleni mérkőzések alapján „dönteni" és Nadalt előbbre helyezni.

Figyelemre méltó, hogy táblázatunkban az általában az első 9 játékos (a három említetten kívül Agassi, Becker, Hewitt, Lendl, Murray, és Sampras) pozíciója viszonylag stabil, többnyire egy-két helyet mozog. Ebben a névsorban talán Hewitt a meglepetés. Az utolsó 10-12 is szinte változatlan(Chang, Bruguera, Haas, Korda, Rios, Muster, Connors, Cash, Forget és Gerulaitis), bár itt a különböző típusú rangsorokban már nagyobbak a kilengések. Közülük meglepő (ám stabil) Connors helyezése. A középmezőnyben esetleg Wilandert vagy Edberget várnánk előbbre.

A mérkőzésszám transzformációval készült W típusú rangsorok néhány esetben jelentősebb változással járnak. Ezek a rangsorok előkelőbb helyre teszik McEnroe-t, Lendlt vagy Samprast, hátrébb sorolják Wilandert vagy Raftert és főleg Roddickot. Ezek a mozgások szakértői-teniszkedvelői szemmel „megalapozottnak" tűnhetnek.

5.7. *Szakértői vélemény bevonása az elemzésbe*

Eddigi elemzéseinkből az alábbi összefoglaló következtetéseket tudjuk levonni.

Mivel a 0 nevezőjű arányokat kezelő különböző típusú korrekcióknak és a becslési módszernek a rangsorokra nem volt jelentős hatása, ezért elegendő az egyik korrekciós eljárást és becslési módszert kiválasztani. **Tekintsük a minden újabb ötödik nyertes mérkőzésenként módosuló korrekciót** (a leírásban az *a)* változat) **és a logaritmikus legkisebb négyzetek módszerét.**

Mivel a kevesebb és a több mérkőzés eredményét tartalmazó mátrixok rangsorait vizsgálva azt találtuk, hogy azok több helyen eltérnek egymástól, ezért meg kell találnunk a közülük történő választás alapját. Erre a célra a játszmaarányokból készült rangsorokat használjuk: azt választjuk, ahol a játszmaarányokból és a mérkőzésarányokból számított rangsorok jobban egyeznek (ezzel az erőviszonyok kiegyenlítettségének szempontját megjelenítve), vagyis **az összes adatot tartalmazó futtatásokat. Ezekből pedig nem a játszma-, hanem a mérkőzésarányokat tartalmazó változatot** (itt viszont a mérkőzések megnyerésének lényeges sportszempontját kiemelve).

Végül döntenünk kell abban, hogy az összes adatot tartalmazó mérkőzésarányokból az *a)* korrekcióval elkészített adatmátrixoknál **érvényesítsük-e a mérkőzésszámok különbözőségének hatását kiegyenlítő transzformációt?** Mivel a kétféle módon számított rangsor eltér egymástól, ezért a közöttük történő választást külső információ bevonásával tehetjük meg. Itt figyelembe vesszük azokat a szakértői észrevételeket, amelyeket a fentiekben mutattunk be.

Így végül – ha egyetlen rangsor mellett kell letenni a voksot – mind módszertani, mind szakértői oldalról **az** $LLSM1$ **és a** $WLLSM1$ **közötti választást javasoljuk**. Mivel ezek nem azonosak (rangkorrelációs együtthatójuk is csak 0,9 körüli), mindenkinek lehetősége van szíve szerint választani és így lehet az első Nadal vagy Borg, míg Murray vagy Lendl kerülhet előbbre vagy hátrébb (hogy csak az első 12-ről szóljunk). Saját „szakértői" szempontjaink alapján a $WLLSM1$ **rangsort jelöljük meg „végső rangsornak".**

Ez alapján a Top 10: Borg, Federer, Nadal, Sampras, Becker, Lendl, Agassi, Murray, Hewitt, Kuerten.

6. Érzékenységvizsgálat

A sokféle lehetséges érzékenységvizsgálat közül azt választottuk, hogy miként hat a rangsorra, ha kiveszünk játékosokat. Ez egyben azt az izgalmas kérdést is magában rejti, vajon történnek-e rangsorváltások és milyen mértékben?

Kézenfekvőnek tűnt az a szűkítés, hogy a 34 játékosból csak azokat tartsuk meg, akik ebben az időszakban ATP világranglista-vezetők voltak. Ennek a kritériumnak nem felel meg Bruguera, Cash, Chang, Forget, Gerulaitis, Haas, Ivanisevic, Korda, Murray, Nalbandian és Stich – összesen 11 játékos.

A 23 ranglistavezető egymás elleni eredményei alapján kiszámoltuk a $PC1$ mátrix *a)* és *b)* korrekciós adataival és transzformált adataival, valamint a $PC3$ mátrix eredeti és transzformált adataival a logaritmikus legkisebb négyzetek módszeréhez tartozó rangsorokat. A 8. táblázatban ezek mellett feltüntettük ugyanezen játékosoknak a 34-es rangsorból származtatott, de 23-ra „szűkített” sorrendjeit is. A 9. táblázat az *LLSM* vs. *WLLSM* rangkorrelációkat tartalmazza.

	$LLSM1$		$LLSM3$		$WLLSM1$		$WLLSM3$	
	23	34 / 23	23	34 / 23	23	34 / 23	23	34 / 23
Federer, Roger	2	3	2	2	1	2	2	3
Nadal, Rafael	1	1	1	1	2	3	1	2
Sampras, Pete	3	5	3	5	3	4	3	4
Borg, Bjorn	4	2	7	3	4	1	4	1
Lendl, Ivan	9	11	10	9	5	6	5	5
Becker, Boris	5	4	6	6	6	5	6	6
Agassi, Andre	8	6	9	7	7	7	7	7
Hewitt, Lleyton	7	10	4	8	8	8	8	9
Kuerten, Gustavo	15	16	16	14	9	9	10	10
Djokovic, Novak	10	8	5	4	10	10	9	8
Safin, Marat	11	7	15	15	11	12	13	16
Ferrero, Juan Carlos	14	14	13	10	12	16	12	13
McEnroe, John	18	20	19	19	13	11	11	11
Rafter, Patrick	13	17	12	20	14	21	14	21
Rios, Marcelo	21	21	21	21	15	19	15	18
Wilander, Mats	17	15	11	11	16	14	19	19
Kafelnikov, Yevgeny	16	9	17	12	17	13	20	14
Roddick, Andy	6	12	8	13	18	20	17	20
Edberg, Stefan	12	13	14	17	19	15	18	17
Moya, Carlos	20	19	18	18	20	18	16	15
Courier, Jim	19	18	20	16	21	17	21	12
Muster, Thomas	22	22	23	23	22	22	22	22
Connors, Jimmy	23	23	22	22	23	23	23	23

8. táblázat. A 23 ATP világranglista-vezető rangsorai (23: csak a 23 játékos egymás elleni mérkőzései; 34 / 23: a teljes 34-es rangsor 23-ra szűkítése; a $WLLSM1(23)$ rangsort használva referenciaként)

A 2. a. és 2. b., illetve a 3. a. és a 3. b. táblázatok megfelelő elemeivel összhangban lévő eredményeket kaptunk. A rangsorok tehát a technikai jellemzőkre vonatkozóan (korrekció, transzformáció, becslési módszer) önmagukban koherens módon azonos következtetésekre vezettek a játékosok egy részhalmazára vonatkozóan, maguk a rangsorok viszont nem egyeznek meg. Már első ránézésre is jelentős eltérések látszanak. Ha újra a $WLLSM1$ rangsort tekintjük a 8. táblázatban, akkor most a Top 10: Federer, Nadal, Sampras, Borg, Lendl, Becker, Agassi, Hewitt, Kuerten, Djokovic.

	$LLSM3$	W$LLSM1$	W$LLSM3$
$LLSM1$	0,9417	0,8409	0,8340
$LLSM3$		0,8123	0,8063
W$LLSM1$			0,9763

9. táblázat. A 23 játékosra vonatkozó *LLSM* és *WLLSM* rangsorok rangkorrelációs együtthatói

Az első 10 játékos változatlan, de többségük helyezése módosult, a legjelentősebb változás Borg esetén következett be. Általánosságban elmondható, hogy például Borg, Agassi, Djokovic és Kafelnikov rosszabb, míg Federer, Nadal, Sampras, Hewitt, Rafter és Roddick jobb helyezést ért el az „elitkörrel” szembeni eredmények alapján. A két rangsor közötti kapcsolat mégis erősnek mondható, első benyomásunkat megerősítik a 10. táblázat rangkorrelációs együtthatói is.

$LLSM1(23-34/23)$	$LLSM3(23-34/23)$	$WLLSM1(23-34/23)$	$WLLSM3(23-34/23)$
0,9209	0,9042	0,9209	0,8962

10. táblázat. A 23 és a 34 / 23 rangsorok rangkorrelációs együtthatói (23: csak a 23 játékos egymás elleni mérkőzései; 34 / 23: a teljes 34-es rangsor 23-ra szűkítése)

Mi lehet az oka a jelentős rangsorváltozásnak? Mivel a teljesen kitöltött inkonzisztens páros összehasonlítás mátrixok esetében nem érvényesül az Arrow-féle irreleváns alternatíváktól való függetlenség elve, ezt itt sem várhatjuk el, hiszen adatmátrixainkban voltak intranzitív triádok. A 10. táblázatban rögzítettük ezek számát a 34, illetve a 23 játékost tartalmazó *PC* mátrixokra. Kéri (2011) részletesen foglalkozik az ilyen triádok jellemzőivel, azonosítva mind a 7 lehetséges esetet, melyek közül 3 nem tranzitív. A mi nem teljesen kitöltött mátrixainkban a triádok száma az összes lehetséges triádhoz képest viszonylag alacsony, 7,47 és 26,93% között mozgott. Érdemes megfigyelni, hogy ez a hányad gyakorlatilag azonos volt a 23 és a 34 játékost szerepeltető változatokban, a minimális értékek a $PC2$ mátrixhoz, a maximálisak a $PC1$ és $PC3$ mátrixokhoz tartoztak.

Az intranzitív triádok aránya – amit egyfajta inkonzisztencia mérőszámként foghatunk fel –, a $PC1$ mátrixnál a legnagyobb: 27,4%, ám a $PC2$ és $PC3$ esetében sem sokkal kisebb, 20% körül van. Ugyanezek az értékek az $R1$ és $R2$ mátrixokban 23,8%, illetve 27,2%.[8]

[8] Megjegyzendő, hogy a triádok vizsgálata azért elterjedt, mert egy teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó irányított gráfban bármilyen hosszúságú kör létezése automatikusan magával vonja legalább egy intranzitív triád létezését Kindler és Papp (1977) – gondoljunk arra, hogy egy 4 hosszúságú körben miként húzható be az „átló”. Ez azonban nem teljesen kitöltött esetben nem igaz, hiszen ott lehetnek

	*PC*1	*PC*2	*PC*3	*PC*1	*PC*2	*PC*3
Mátrix mérete	34	34	34	23	23	23
Maximális triádszám	5984	5984	5984	1771	1771	1771
Összes triád	1600	457	1133	477	131	399
Arány	26,7%	7,6%	18,9%	26,9%	7,4%	22,5%
Tranzitív triád	1177	365	908	352	104	313
Intranzitív triád	423	92	225	125	27	86
Tranzitívak aránya	73,6%	79,9%	80,1%	73,8%	79,4%	78,4%

11. táblázat. Triádok jellemzői a 34 és 23 játékost tartalmazó változatokban

A sportnyelven körbeverésnek hívott jelenség egyébként jól ismert a teniszkedvelők előtt is, ezért a valós helyzetekben nem lepi meg őket egy-egy váratlan, az eddigi erősorrendet nem tükröző eredmény. Ha a 34 játékost 23-ra csökkentjük, akkor a kimaradók és a bentmaradtak közötti körbeverések minden bizonnyal befolyásolják a végső rangsort. Általában is igaz, hogy a nem konzisztens mátrixok rangsorainak részmátrixaiból képzett rangsorok eltérhetnek egymástól. Ennek a jelenségnek az egzakt vizsgálata azonban további kutatásokat igényel.

7. A kutatás folytatása

Kutatásunk több kérdést vet fel, mint amennyit megválaszol. Az első eredmények arra ösztönöznek bennünket, hogy több irányban is folytassuk vizsgálatainkat, ezáltal mélyebben megismerve a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok természetét, illetve összevetve jellemzőiket a teljesen kitöltött esettel.

Különösen érdekes lehet az adatmátrixok kitöltöttségének és az ismert elemek struktúrájának elemzése. Az elemek konkrét értéke, illetve eloszlása és a fokszám változása közül vajon melyek hatnak az eredményre? A vizsgálathoz az ebben a tanulmányban elemzett példához hasonló – esetleg elemeiben egyszerűbben kezelhető – sporteredményekre (vagy egyéb területről vett hiányos páros összehasonlításokra) támaszkodhatunk, de véletlen módon generált mátrixok segítségével is megpróbálhatunk sejtéseket, esetleg állításokat megfogalmazni.

A nem teljesen kitöltött mátrixok inkonzisztenciájának elemzése szintén új kutatási irányt jelenthet.

hiányzó elemek is. Ennek ellenére az intranzitív triádokat tekinthetjük úgy, mint amelyek „leginkább” sértik a konzisztenciát, lévén ez a legegyszerűbb módja a körkörös preferenciarendezésnek, a körbeveréseknek.

Köszönetnyilvánítás:
A kutatás az OTKA K-77420 pályázat támogatásával készült.

Hivatkozások

Bozóki S. (2006). *Súlyozás páros összehasonlítással és értékelés hasznossági függvényekkel a többszempontú döntési feladatokban*. PhD értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem.

Bozóki, S., Fülöp, J., Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1):318–333.

Brunelli, M., Fedrizzi, M. (2011). Characterizing properties for inconsistency indices in the AHP. In *Proceedings of the 11th International Symposium on the Analytic Hierarchy Process (ISAHP)*. Sorrento (Naples), Italy.

Crawford, G., Williams, C. (1980). Analysis of subjective judgment matrices. Rand Corporation Technical report, Office of the Secretary of Defense, USA. R-2572-AF.

Crawford, G., Williams, C. (1985). A note on the analysis of subjective judgment matrices. *Journal of Mathematical Psychology*, 29(4):387–405.

De Graan, J. (1980). Extensions of the multiple criteria analysis method of TL Saaty. In *EURO IV Conference*, Cambridge, UK.

FEDEX ATP Head 2 Head. Downloadable at:
http://www.atpworldtour.com/Players/Player-Landing.aspx.

Kéri, G. (2011). On qualitatively consistent, transitive and contradictory judgment matrices emerging from multiattribute decision procedures. *Central European Journal of Operations Research*, 19(2):215–224.

Kindler J., Papp., O. (1977). *Komplex rendszerek vizsgálata – Összemérési módszerek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Saaty, T. (1980). *Analytic hierarchy process*. McGraw-Hill, New York.

Függelék

	Teljes pályafutás alatt			Adatbázisban			Elemzett arány		
Játékos	+	−	Σ	+	−	Σ	+	−	Σ
Agassi, Andre	870	274	1144	147	102	249	16,90%	37,23%	21,77%
Becker, Boris	713	214	927	133	78	211	18,65%	36,45%	22,76%
Borg, Bjorn	608	127	735	45	17	62	7,40%	13,39%	8,44%
Bruguera, Sergi	447	271	718	43	62	105	9,62%	22,88%	14,62%
Cash, Pat	242	149	391	19	33	52	7,85%	22,15%	13,30%
Chang, Michael	662	312	974	81	98	179	12,24%	31,41%	18,38%
Connors, Jimmy	1242	277	1519	68	90	158	5,48%	32,49%	10,40%
Courier, Jim	506	237	743	69	77	146	13,64%	32,49%	19,65%
Djokovic, Novak	394	111	505	45	48	93	11,42%	43,24%	18,42%
Edberg, Stefan	806	270	1076	123	123	246	15,26%	45,56%	22,86%
Federer, Roger	807	186	993	127	71	198	15,74%	38,17%	19,94%
Ferrero, Juan Carlos	474	250	724	42	56	98	8,86%	22,40%	13,54%
Forget, Guy	380	291	671	33	70	103	8,68%	24,05%	15,35%
Gerulaitis, Vitas	510	221	731	12	52	64	2,35%	23,53%	8,76%
Haas, Tommy	469	267	736	45	67	112	9,59%	25,09%	15,22%
Hewitt, Lleyton	551	204	755	74	70	144	13,43%	34,31%	19,07%
Ivanisevic, Goran	599	333	932	79	98	177	13,19%	29,43%	18,99%
Kafelnikov, Yevgeny	609	306	915	79	68	147	12,97%	22,22%	16,07%
Korda, Petr	410	248	658	50	70	120	12,20%	28,23%	18,24%
Kuerten, Gustavo	358	195	553	48	35	83	13,41%	17,95%	15,01%
Lendl, Ivan	1071	239	1310	124	88	212	11,58%	36,82%	16,18%
McEnroe, John	875	198	1073	82	80	162	9,37%	40,40%	15,10%
Moya, Carlos	575	319	894	58	76	134	10,09%	23,82%	14,99%
Murray, Andy	323	107	430	37	32	69	11,46%	29,91%	16,05%
Muster, Thomas	622	274	896	52	68	120	8,36%	24,82%	13,39%
Nadal, Rafael	541	116	657	83	40	123	15,34%	34,48%	18,72%
Nalbandian, David	356	170	526	30	47	77	8,43%	27,65%	14,64%
Rafter, Patrick	358	191	549	40	55	95	11,17%	28,80%	17,30%
Rios, Marcelo	391	192	583	34	49	83	8,70%	25,52%	14,24%
Roddick, Andy	589	197	786	50	61	111	8,49%	30,96%	14,12%
Safin, Marat	422	267	689	51	55	106	12,09%	20,60%	15,38%
Sampras, Pete	762	222	984	147	77	224	19,29%	34,68%	22,76%
Stich, Michael	385	176	561	61	59	120	15,84%	33,52%	21,39%
Wilander, Mats	571	222	793	51	51	102	8,93%	22,97%	12,86%

12. táblázat. Az elemzett mérkőzések jelentősége a játékosok pályafutása során
(+ Győzelem; − Vereség; Σ Összesen)

	LLSM1	LLSM2	LLSM3	EM1	EM2	EM3
Agassi, Andre	0,0420	0,0390	0,0383	0,0449	0,0446	0,0402
Becker, Boris	0,0451	0,0496	0,0406	0,0464	0,0532	0,0397
Borg, Bjorn	0,0646	0,0611	0,0460	0,0530	0,0606	0,0425
Bruguera, Sergi	0,0195	0,0140	0,0197	0,0272	0,0146	0,0201
Cash, Pat	0,0114	0,0135	0,0155	0,0110	0,0130	0,0150
Chang, Michael	0,0204	0,0170	0,0209	0,0239	0,0179	0,0230
Connors, Jimmy	0,0146	0,0184	0,0195	0,0151	0,0178	0,0184
Courier, Jim	0,0241	0,0212	0,0285	0,0262	0,0219	0,0292
Djokovic, Novak	0,0349	0,0663	0,0412	0,0272	0,0577	0,0369
Edberg, Stefan	0,0295	0,0229	0,0275	0,0325	0,0264	0,0283
Federer, Roger	0,0543	0,0746	0,0509	0,0546	0,0737	0,0496
Ferrero, Juan Carlos	0,0261	0,0244	0,0311	0,0247	0,0226	0,0293
Forget, Guy	0,0090	0,0101	0,0130	0,0110	0,0104	0,0128
Gerulaitis, Vitas	0,0079	0,0076	0,0138	0,0072	0,0083	0,0132
Haas, Tommy	0,0189	0,0190	0,0174	0,0220	0,0182	0,0172
Hewitt, Lleyton	0,0326	0,0346	0,0360	0,0331	0,0356	0,0361
Ivanisevic, Goran	0,0172	0,0188	0,0240	0,0187	0,0196	0,0239
Kafelnikov, Yevgeny	0,0332	0,0244	0,0300	0,0338	0,0285	0,0310
Korda, Petr	0,0180	0,0140	0,0209	0,0236	0,0174	0,0219
Kuerten, Gustavo	0,0260	0,0295	0,0293	0,0267	0,0289	0,0305
Lendl, Ivan	0,0325	0,0333	0,0333	0,0340	0,0362	0,0331
McEnroe, John	0,0206	0,0266	0,0256	0,0186	0,0262	0,0242
Moya, Carlos	0,0212	0,0188	0,0261	0,0228	0,0188	0,0280
Murray, Andy	0,0502	0,0573	0,0399	0,0397	0,0510	0,0370
Muster, Thomas	0,0165	0,0165	0,0192	0,0207	0,0190	0,0236
Nadal, Rafael	0,0827	0,0776	0,0682	0,0658	0,0699	0,0626
Nalbandian, David	0,0185	0,0269	0,0214	0,0169	0,0245	0,0208
Rafter, Patrick	0,0259	0,0125	0,0251	0,0355	0,0122	0,0342
Rios, Marcelo	0,0178	0,0162	0,0204	0,0205	0,0151	0,0215
Roddick, Andy	0,0323	0,0327	0,0295	0,0291	0,0319	0,0301
Safin, Marat	0,0349	0,0243	0,0286	0,0372	0,0230	0,0268
Sampras, Pete	0,0429	0,0353	0,0406	0,0406	0,0386	0,0411
Stich, Michael	0,0287	0,0169	0,0270	0,0306	0,0175	0,0274
Wilander, Mats	0,0260	0,0252	0,0309	0,0254	0,0253	0,0307

13. táblázat. Az *LLSM* és *EM* módszerrel előállított súlyvektorok

	Gerulaitis	Connors	Borg	McEnroe	Lendl	Wilander	Cash	Forget	Edberg	Becker	Muster	Agassi	Korda	Bruguera	Chang	Courier	Ivanisevic
Gerulaitis		4 (20)	0 (16)	3 (14)	3 (6)	1 (4)	1 (2)			0 (2)							
Connors	16 (20)		8 (23)	14 (34)	13 (34)	0 (5)	4 (6)	4 (5)	6 (12)	0 (6)		0 (2)	1 (1)	1 (2)	0 (1)	0 (3)	
Borg	16 (16)	15 (23)		7 (14)	6 (8)	1 (1)											
McEnroe	11 (14)	20 (34)	7 (14)		15 (36)	7 (13)	3 (4)	2 (4)	7 (13)	2 (10)		2 (4)	0 (1)		4 (5)	1 (3)	2 (6)
Lendl	3 (6)	21 (34)	2 (8)	21 (36)		15 (22)	5 (8)	4 (5)	13 (27)	11 (21)	4 (5)	6 (8)	1 (5)	1 (2)	5 (7)	4 (4)	5 (6)
Wilander	3 (4)	5 (5)	0 (1)	6 (13)	7 (22)		4 (9)	5 (6)	11 (20)	3 (10)	2 (2)	2 (7)					1 (1)
Cash	1 (2)	2 (6)		1 (4)	3 (8)	5 (9)		1 (1)	2 (10)	1 (4)	2 (3)	0 (1)	0 (1)	0 (1)	1 (2)		
Forget		1 (5)		2 (4)	1 (5)	1 (6)	0 (1)		6 (13)	3 (13)	5 (8)	0 (3)	2 (2)	0 (1)	0 (3)	1 (8)	3 (10)
Edberg		6 (12)		6 (13)	14 (27)	9 (20)	8 (10)	7 (13)		10 (35)	10 (10)	3 (9)	4 (9)	6 (9)	12 (21)	4 (10)	9 (19)
Becker	2 (2)	6 (6)		8 (10)	10 (21)	7 (10)	3 (4)	10 (13)	25 (35)		2 (3)	4 (14)	6 (6)	2 (4)	5 (6)	6 (7)	10 (19)
Muster					1 (5)	0 (2)	1 (3)	3 (8)	0 (10)	1 (3)		4 (9)	3 (5)	12 (15)	6 (9)	5 (12)	3 (6)
Agassi		2 (2)		2 (4)	2 (8)	5 (7)	1 (1)	3 (3)	6 (9)	10 (14)	5 (9)		7 (8)	7 (9)	15 (22)	5 (12)	4 (7)
Korda		0 (1)		1 (1)	4 (5)		1 (1)	0 (2)	5 (9)	0 (6)	2 (5)	1 (8)		3 (9)	3 (9)	1 (4)	4 (11)
Bruguera		1 (2)			1 (2)		1 (1)	1 (1)	3 (9)	2 (4)	3 (15)	2 (9)	6 (9)		3 (8)	2 (7)	4 (9)
Chang		1 (1)		1 (5)	2 (7)		1 (2)	3 (3)	9 (21)	1 (6)	3 (9)	7 (22)	6 (9)	5 (8)		12 (24)	6 (11)
Courier		3 (3)		2 (3)	0 (4)			7 (8)	6 (10)	1 (7)	7 (12)	7 (12)	3 (4)	5 (7)	12 (24)		8 (11)
Ivanisevic				4 (6)	1 (6)	0 (1)		7 (10)	10 (19)	9 (19)	3 (6)	3 (7)	7 (11)	5 (9)	5 (11)	3 (11)	
Sampras		2 (2)		3 (3)	5 (8)	2 (3)		5 (9)	8 (14)	12 (19)	9 (11)	20 (34)	12 (17)	2 (5)	12 (20)	16 (20)	12 (18)
Stich		3 (4)		1 (2)	1 (7)	1 (1)		3 (6)	10 (16)	4 (12)	3 (5)	0 (6)	4 (12)	4 (6)	3 (6)	7 (12)	5 (7)
Rafter					1 (1)	1 (3)		1 (1)	0 (3)	1 (3)	3 (3)	5 (15)	2 (5)	2 (8)	4 (11)	3 (3)	2 (4)
Kafelnikov						1 (2)	1 (1)	4 (5)	2 (3)	2 (6)	1 (5)	4 (12)	7 (9)	4 (6)	4 (4)	5 (6)	5 (15)
Rios								2 (2)	0 (1)	2 (5)	1 (4)	2 (3)	4 (8)	2 (3)	1 (7)	3 (3)	1 (1)
Kuerten											3 (3)	4 (11)	0 (1)	3 (3)	3 (5)	0 (1)	6 (8)
Moya									0 (1)	2 (4)	4 (8)	1 (4)	1 (2)	2 (2)	5 (5)	1 (3)	3 (4)
Haas								1 (1)			0 (2)	4 (10)	0 (2)	1 (1)	0 (2)	2 (2)	
Safin										1 (1)	1 (1)	3 (6)	1 (1)		2 (3)	1 (2)	1 (2)
Federer												8 (11)		0 (1)	4 (5)		2 (2)
Ferrero												3 (5)		2 (2)	0 (1)		1 (1)
Hewitt										0 (1)		4 (8)		0 (1)	2 (2)		3 (3)
Nalbandian												0 (1)				0 (1)	
Roddick												1 (6)			2 (2)		0 (1)
Nadal												2 (2)					2 (2)
Djokovic																	
Murray																	

14. a. táblázat. Egymás elleni eredmények; sorokban a győzelmek száma (összes egymás elleni mérkőzés száma) I.

	Sampras	Stich	Rafter	Kafelnikov	Rios	Kuerten	Moya	Haas	Safin	Federer	Ferrero	Hewitt	Nalbandian	Roddick	Nadal	Djokovic	Murray
Gerulaitis																	
Connors	0 (2)	1 (4)															
Borg																	
McEnroe	0 (3)	1 (2)															
Lendl	3 (8)	6 (7)	0 (1)														
Wilander	1 (3)	0 (1)	2 (3)	1 (2)													
Cash				0 (1)													
Forget	4 (9)	3 (6)	0 (1)	1 (5)	0 (2)			0 (1)									
Edberg	6 (14)	6 (16)	3 (3)	1 (3)	1 (1)		1 (1)										
Becker	7 (19)	8 (12)	2 (3)	4 (6)	3 (5)		2 (4)		0 (1)			1 (1)					
Muster	2 (11)	2 (5)	0 (3)	4 (5)	3 (4)	0 (3)	4 (8)	2 (2)	0 (1)								
Agassi	14 (34)	6 (6)	10 (15)	8 (12)	1 (3)	7 (11)	3 (4)	6 (10)	3 (6)	3 (11)	2 (5)	4 (8)	1 (1)	5 (6)	0 (2)		
Korda	5 (17)	8 (12)	3 (5)	2 (9)	4 (8)	1 (1)	1 (2)	2 (2)	0 (1)								
Bruguera	3 (5)	2 (6)	6 (8)	2 (6)	1 (3)	0 (3)	0 (2)	0 (1)		1 (1)	0 (2)	1 (1)					
Chang	8 (20)	3 (6)	7 (11)	0 (4)	6 (7)	2 (5)	0 (5)	2 (2)	1 (3)	1 (5)	1 (1)	0 (2)		0 (2)			
Courier	4 (20)	5 (12)	0 (3)	1 (6)	0 (3)	1 (1)	2 (3)	0 (2)	1 (2)				1 (1)				
Ivanisevic	6 (18)	2 (7)	2 (4)	10 (15)	0 (1)	2 (8)	1 (4)		1 (2)	0 (2)	0 (1)	0 (3)		1 (1)	0 (2)		
Sampras		4 (9)	12 (16)	11 (13)	2 (2)	2 (3)	3 (4)	5 (8)	3 (7)	0 (1)		4 (9)		1 (3)			
Stich	5 (9)		2 (2)	3 (11)	1 (1)			1 (1)									
Rafter	4 (16)	0 (2)		2 (5)	2 (3)	4 (8)	1 (4)	1 (1)	1 (1)	3 (3)	1 (3)	1 (4)					
Kafelnikov	2 (13)	8 (11)	3 (5)		6 (8)	5 (12)	3 (6)	5 (7)	2 (4)	4 (6)	2 (3)	1 (8)	2 (2)				
Rios	0 (2)	0 (1)	1 (3)	2 (8)		2 (4)	5 (7)	4 (7)	1 (4)	0 (2)	1 (4)	2 (5)		0 (2)			
Kuerten	1 (3)		4 (8)	7 (12)	2 (4)		4 (7)	5 (6)	4 (7)	2 (3)	2 (5)	1 (4)	0 (1)	1 (2)			
Moya	1 (4)		3 (4)	3 (6)	2 (7)	3 (7)		5 (11)	4 (7)	0 (7)	6 (14)	5 (12)	3 (7)	1 (5)	2 (8)	2 (4)	0 (2)
Haas	3 (8)	0 (1)	0 (1)	2 (7)	3 (7)	1 (6)	6 (11)		5 (7)	2 (12)	2 (5)	4 (10)	3 (3)	7 (13)	0 (4)	2 (4)	1 (3)
Safin	4 (7)		0 (1)	2 (4)	3 (4)	3 (7)	3 (7)	2 (7)		2 (12)	6 (12)	7 (14)	6 (9)	3 (7)	0 (2)	2 (2)	1 (1)
Federer	1 (1)		0 (3)	2 (6)	2 (2)	1 (3)	7 (7)	10 (12)	10 (12)		9 (12)	18 (26)	11 (19)	21 (23)	9 (26)	14 (24)	6 (14)
Ferrero			2 (3)	1 (3)	3 (4)	3 (5)	8 (14)	3 (5)	6 (12)	3 (12)		4 (10)	3 (7)	0 (5)	2 (9)	1 (2)	0 (3)
Hewitt	5 (9)		3 (4)	7 (8)	3 (5)	3 (4)	7 (12)	6 (10)	7 (14)	8 (26)	6 (10)		3 (6)	6 (13)	4 (10)	1 (5)	0 (1)
Nalbandian				0 (2)		1 (1)	4 (7)	0 (3)	3 (9)	8 (19)	4 (7)	3 (6)		2 (6)	2 (5)	1 (5)	2 (6)
Roddick	2 (3)				2 (2)	1 (2)	4 (5)	6 (13)	4 (7)	2 (23)	5 (5)	7 (13)	4 (6)		3 (10)	5 (8)	3 (11)
Nadal							6 (8)	4 (4)	2 (2)	17 (26)	7 (9)	6 (10)	3 (5)	7 (10)		16 (29)	13 (18)
Djokovic							2 (4)	2 (4)	0 (2)	10 (24)	1 (2)	4 (5)	4 (5)	3 (8)	13 (29)		6 (10)
Murray							2 (2)	2 (3)	0 (1)	8 (14)	3 (3)	1 (1)	4 (6)	8 (11)	5 (18)	4 (10)	

14. b. táblázat. Egymás elleni eredmények; sorokban a győzelmek száma (összes egymás elleni mérkőzés száma) II.