Együttműködés és verseny ellátási láncokban: játékelméleti perspektíva

Dobos Imre

Kivonat
Az ellátási láncok feladata az, hogy fogyasztói szükségletet elégítsenek ki. Az ellátási láncok vállalatok halmazai, amelyek kapcsolatban állnak egymással. Ezen vállalatokat a köztük lévő anyag- és információáramlás köti össze. Mivel komplex rendszereket nehéz vizsgálni, ezért az elemzések két és három vállalat kapcsolatát tanulmányozzák. Ebben a dolgozatban a Banerjee (1986) által javasolt modellt terjesztjük ki arra az esetre, amikor a kereslet a beszerzési ártól függ. Összehasonlítjuk a közös megegyezéssel kialakított rendelési tételnagyságot a verseny esetén kialakuló rendeléssel.

1. Bevezetés

Az ellátási láncokban felmerülő anyag- és információáramlás problémái ismertek voltak ugyan, de a vállalatgazdasági vizsgálatok megmaradtak az egyes vállalatok szintjén. Az első elemzések, amelyek az ellátási láncok költségproblémáit két vállalat esetére elemezték, viszonylag rövid múltra tekintenek vissza. Az irodalomban Goyal (1977) és Banerjee (1986) dolgozatai elemezték a vállalatok közötti rendelési tételnagyság meghatározását két vállalat esetén. Érdekes módon az utóbbi modell vált ismertebbé, talán azért, mert az 1970-es években a tudományos közvélemény még nem volt nyitott a kölcsönhatások elemzésére, az nem okozott hatékonysági problémát, vagy ha mégis, akkor a problémát más módszerekkel próbálták megoldani. Ebben a cikkben Banerjee (1986) modelljét vizsgáljuk arra az esetre, ha a készletezési költségeken kívül a beszerzési költségek is a döntést befolyásoló szerepet játszanak. Az ellátási láncok koordinációjának irodalmában a most leírt modellt beszerzési

Dobos Imre
Budapesti Corvinus Egyetem, Logisztika és Ellátási Lánc Menedzsment Tanszék,
email: imre.dobos@uni-corvinus.hu

ár szerződésnek hívják, hiszen a kialakult ár egy megállapodás eredménye (Cachon, 2003). Az ellátási láncok koordinációja matematikai oldalról szoros kapcsolatban van a játékelmélettel, ugyanis egy olyan „szerződést” kell kötni, amely mindkét fél számára kielégítő. Ekkor alkalmazhatóak a játékelmélet eredményei (Szép és Forgó, 1974).

Ebben a dolgozatban feltételezzük, hogy az ellátási lánc két szereplőből áll: a beszállítóból és a termelőből. A láncban a beszállítóról feltételezzük, hogy áralakító, azaz nincs piaci ár, az a két fél megállapodásán nyugszik. Ugyanakkor a termelő dönt arról, hogy egy adott áron mekkora tételnagyságot rendel. Feltételezzük, hogy a megállapodás eredményét mindkét fél elfogadja, ahhoz tartja magát. A kérdés tehát az lesz, hogy mekkora mennyiséget rendel a termelő a beszállító által javasolt áron. Ehhez ismertnek tételezzük fel a termelő keresleti függvényét a beszerzési ár függvényében. A modell ebben a formájában egy klasszikus determinisztikus játékelméleti feladattá egyszerűsödik a releváns költségek ismeretében.

Ugyanakkor az irodalomban ismert, hogy ez a játékelméleti megoldás, azaz a Nash-egyensúly nem optimális a rendszer egészének szempontjából, azaz ha együttes stratégiával lépnének fel a felek, például egy mediátorral/tárgyalóval történő egyeztetés révén, vagy a költséginformációkat teljesen megosztanák, akkor nagyobb nyereséget érnének el (Banerjee, 1986). Ebben az esetben azonban a többletnyereség elosztása lenne a következő feladat, amivel dolgozatunkban nem foglalkozunk.

A dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a javasolt beszerzési ár szerződés mennyire tér el a közös, azaz Pareto-optimumtól. A következő részben a modellt ismertetjük, valamint azt, hogy hogyan működik a modell. A harmadik fejezetben a feladat Nash-egyensúlyát elemezzük, az egyensúlyi rendelési tétellel és beszerzési árral. A következő rész a közösen elérhető maximális nyereséghez rendelhető döntési változókat, vagyis a tételnagyságot és az árat határozza meg. Ezután az ötödik fejezet egy numerikus példát mutat be, végül összegezzük eredményeinket.

2. A modell

A modell paraméterei a következőek:

- s_t a termelő egy rendelésre eső rendelési költsége,
- h_t a termelő készlettartási költsége, pénzegység/darab/év,
- s_b a beszállító egy rendelésre eső fixköltsége, pénzegység,
- h_b a beszállító készlettartási költsége, pénzegység/darab/év.

A modell döntési változói az alábbiak lesznek:

- p a beszállító által javasolt beszerzési ár, pénzegység, nemnegatív,
- q a termelő rendelési tételnagysága, darab, nemnegatív.

A termelő éves keresleti függvénye is adott, monoton csökkenő függvénye a beszerzési árnak. Tételezzük fel, hogy ez a függvény lineáris, és egy adott p_0 árnál többet nem hajlandó az áruért a termelő fizetni. A keresleti függvény a következőképpen írható fel:

$$D(p) = a - bp,\ 0 < p < p_0,$$

ahol az a és b paraméterek ismertek korábbi tapasztalatok alapján, és feltesszük, hogy $p_0 < a/b$, vagyis a maximális árnál is pozitív a kereslet. Ehhez az árhoz tartozik egy minimális kereslet, amit feltétlenül el kell adni, hogy a beszállító vállalat ne legyen veszteséges.

A beszállító nyereségfüggvénye az árbevétel és a készletezési költségek különbségeként értelmezhető:

$$TC_b(p,q) = pD(p) - \left[s_b \frac{D(p)}{q} + \frac{q}{2}h_b\right]. \tag{1}$$

Ez a konstrukcióval egy konkáv függvényt ad.

A termelőnek esetünkben csak költségei vannak, a piacon a végtermékéből elért árbevételét nem vesszük figyelembe, mert csak az adott tranzakcióra összpontosítjuk figyelmünket:

$$TC_t(p,q) = pD(p) + \left[s_t \frac{D(p)}{q} + \frac{q}{2}h_t\right]. \tag{2}$$

Az (1)-(2) feladat megoldásait keressük. Két formában kutatjuk fel az egyensúlyi pontokat. Ha a probléma versenyegyensúlyát, azaz a Nash-egyensúlyát keressük, akkor olyan $\left(p^N, q^N\right)$ párt akarunk felkutatni, amelyre

$$TC_b\left(p^N, q^N\right) \geq TC_b\left(p, q^N\right)$$

és

$$TC_t\left(p^N, q^N\right) \leq TC_t\left(p^N, q\right)$$

ami azt jelenti, hogy a beszállító a nyereségét maximalizálja, míg a termelő kizárólag a költségek minimalizálását tűzi ki céljául.

Foglalkozzunk most azzal a problémával, ha a felek a költségeiket összegzik, azaz úgy viselkednek, mintha egy vállalat lennének. Ekkor a közös „költségfüggvény” az alábbi formát veszi fel:

$$TC^p(p,q) = TC_b(p,q) + TC_t(p,q) = (s_b + s_t)\frac{D(p)}{q} + \frac{q}{2}(h_b + h_t) \tag{3}$$

ugyanis a beszállító árbevétele a termelő költsége, vagyis kioltja azt, ezért nem szerepel az összegzett költségfüggvényben. A (3) feladat megoldása egyben Pareto-optimumot jelent, amit a (p^p, q^p) pont jelöl.

A Nash-egyensúly és a Pareto-optimum kapcsolatáról ismert, hogy az elért összes hasznosság (esetünkben a „játékosok” összes minimális költsége, mint negatív hasznosság) a

Pareto-optimumban nagyobb, mint a Nash-egyensúlyban, vagyis

$$TC^p\left(p^N, q^N\right) \geq TC^p\left(p^p, q^p\right).$$

Az ellátási láncok koordinációjának irodalmában arra a kérdésre keresik a választ, hogy milyen koordinációs mechanizmussal lehet ezt a Pareto-optimumot elérni.

3. A probléma Nash-egyensúlya

Határozzuk meg az (1)-(2) probléma egyensúlyi pontjait. Először adott rendelés esetén optimalizáljuk a feladatot a beszállító szemszögéből, azaz a q rendelési tételnagyságot változatlannak feltételezve.

Az (1) nyereségfüggvényt a következőképpen írhatjuk fel:

$$TC_b\left(p, q^N\right) = p\left(a - bp\right) - s_b\frac{a - bp}{q^N} - \frac{q^N}{2}h_b, \;\; 0 \leq p \leq p_0.$$

A beszállító összköltségét egyszerűbb formában is felírhatjuk az ár függvényében:

$$TC_b\left(p, q^N\right) = -bp^2 + \left(a + \frac{s_b b}{q^N}\right)p - \left(s_b\frac{a}{q^N} + \frac{q^N}{2}h_b\right), \;\; 0 \leq p \leq p_0.$$

A beszállító által adható ár, amely mellett maximalizálja a termelését adott rendelési mennyiség esetén:

$$p^N\left(q^N\right) = \begin{cases} \dfrac{aq^N + s_b b}{2bq^N} & 0 \leq \dfrac{aq^N + s_b b}{2bq^N} \leq p_0 \\ p_0 & \dfrac{aq^N + s_b b}{2bq^N} > p_0 \end{cases}. \tag{4}$$

Ezzel definiáltuk a beszállító egyensúlyi döntését. Tekintsük most a termelő problémáját azzal a feltételezéssel, hogy az ár adott számára. A (2) költségfüggvény nem függ az anyagköltségtől, ezért csak a készletezési költségeket kell minimalizálni:

$$TC_t\left(p^N, q\right) = p^N D\left(p^N\right) + \left[s_b\frac{D\left(p^N\right)}{q} + \frac{q}{2}h_t\right],$$

ami a klasszikus optimális tételnagyságot adja megoldásként:

$$q^N\left(p^N\right) = \sqrt{\frac{2s_t D\left(p^N\right)}{h_t}}. \tag{5}$$

Eredményünket az alábbi állításban foglalhatjuk össze.

1. Állítás. *Az (1)-(2) játékelméleti modell Nash-egyensúlyát a következő ár és tételnagyság írja le:*

$$p^N\left(q^N\right)=\begin{cases}\dfrac{aq^N+s_bb}{2bq^N} & 0\le\dfrac{aq^N+s_bb}{2bq^N}\le p_0\\[2ex] p_0 & \dfrac{aq^N+s_bb}{2bq^N}\ge p_0\end{cases}$$

$$q^N\left(p^N\right)=\sqrt{\frac{2s_tD\left(p^N\right)}{h_t}}.$$

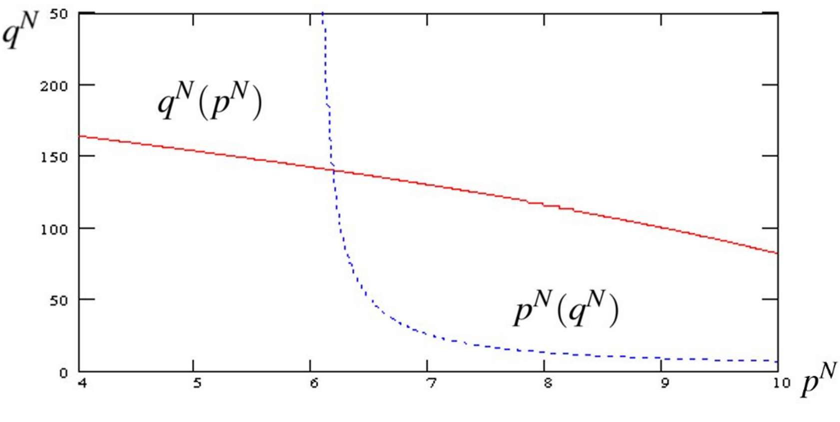
Az egyensúlyi költségek a beszállítónál:

$$TC_b\left(p^N,q^N\right)=-b\left(p^N\right)^2+\left(a+\frac{s_bb}{q^N}\right)p^N-\left(s_b\frac{a}{q^N}+\frac{q^N}{2}h_b\right),$$

míg a termelőnél

$$TC_t\left(p^N,q^N\right)=p^N\left(a-bp^N\right)+\sqrt{2s_th_t\left(a-bp^N\right)}.$$

A játékelméleti feladat numerikus megoldásához az 1. ábra nyújt segítséget. Az analitikus megoldás meghatározása nem lehetséges, annak előállítása közelítéssel történhet. Közelítő eljárásokkal nem foglalkozunk, a numerikus analízisben rendelkezésre állnak az optimumhoz vezető módszerek.



1. ábra. A modell egy grafikus megoldás

Mivel mindkét függvényünk, az ár- és mennyiségfüggvény is monoton, ezért, ha létezik a feladatnak megoldása, akkor az egyértelmű.

A Nash-egyensúly meghatározása után vizsgáljuk a feladat Pareto-optimumát.

4. A Pareto-optimum

A Pareto-optimum meghatározás nem okoz gondot, ugyanis a (3) optimalizálási feladatot kell megoldanunk a változók szerint.

A probléma megoldása az ár vonatkozásában nagyon egyszerű, mert a keresleti függvényünk monoton csökkenő egy zárt intervallumban, így

$$p^p = p_0.$$

A maradék feladat pedig nem más, mint az egyesített optimális tételnagyság modellje, aminek a megoldása a klasszikus EOQ, azaz az optimális tételnagyság lesz:

$$q^p = \sqrt{\frac{2\,(s_b+s_t)\,(a-bp_0)}{h_b+h_t}}.$$

Eredményünket a következő állítás tartalmazza.

2. Állítás. *A (3) probléma optimális ár és mennyiségi megoldása, valamint a hozzájuk tartozó minimális összköltség a következő hármassal jellemezhető:*

$$p^p = p_0,$$

$$q^p = \sqrt{\frac{2\,(s_b+s_t)\,(a-bp_0)}{h_b+h_t}},$$

$$TC^p\,(p^p,q^p) = \sqrt{2\,(s_b+s_t)\,(h_b+h_t)\,(a-bp_0)}.$$

Ezzel a felvázolt probléma Nash-egyensúlyát és Pareto-optimumát is meghatároztuk. Röviden érintsük azt a problémát, hogy a javasolt koordinációs mechanizmus, vagyis a beszerzési ár szerződés koordinálja-e az ellátási láncot.

5. Koordinálja-e az ellátási láncot beszerzési ár szerződés?

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy létezik-e olyan p_0 beszerzési ár, amely mellett a felek a Nash-egyensúly feltételeit megtartva a Pareto-optimumba jutnak el, vagyis koordinálhatja-e a beszerzési ár szerződés az általunk vizsgált ellátási láncot.

A feltett kérdés megválaszolásához elemezzük azt, hogy van-e megoldása az alábbi egyenleteknek:

$$q = \sqrt{\frac{2s_tD\,(p_0)}{h_t}} = \sqrt{\frac{2\,(s_b+s_t)\,(a-bp_0)}{h_b+h_t}},$$

és

$$p = p_0 = \frac{aq + s_b b}{2bq}.$$

Ha a fenti egyenletrendszernek lenne megoldása, akkor a Nash-egyensúly egybeeshetne a Pareto-optimummal, amit nevezhetünk rendszerszintű optimumnak is.

A kérdésre a válasz csak akkor igenlő, ha a paraméterek egy sor speciális tulajdonságot teljesítenek. Az első ilyen tulajdonság, hogy a beszállító és a termelő egységnyi rendelési és készletezési költségei arányának is azonosnak kell lennie:

$$\frac{s_b}{h_b} = \frac{s_t}{h_t},$$

és teljesülni kell a következő azonosságnak is:

$$p_0 = \frac{a}{2b} + \frac{s_b}{2}\sqrt{\frac{h_t}{2s_t\,(a - bp_0)}}.$$

Mivel ez utóbbi egyenlőség csak nagyon speciális paraméteregyüttes esetén teljesülhet, ezért a válasz általánosságban nemleges a kérdésünkre. Az utóbbi egyenlőségünk az árak felső határára csak akkor teljesül, ha egy harmadfokú polinomnak van pozitív megoldása, és ez éppen az előre megadott lehetséges maximális ár. A következő részben mutatunk olyan példát, amikor a paraméterek értékei mellett a Nash-egyensúly és a Pareto-optimum egybeesik. Ekkor a versenyegyensúly egyben a kooperatív egyensúllyal is megegyezik. Természetesen a költségek különbsége becsülhető, amit szintén egy számpéldán demonstrálunk.

6. Egy numerikus példa az egyensúlyok meghatározására

Az első példánkban egy általános megoldást mutatunk be. Ekkor a megoldás létezik, és a részvevők összköltsége a Pareto-optimumban a legkisebb.

6.1. Példa az általános megoldásra

Paramétereink értékeit az alábbiak szerint adtuk meg:

s_t = 100 PE/rendelés,

h_t = 3 PE/db/év,

s_b = 50 PE/rendelés,

h_b = 3 PE/db/év,

a = 600,

$b\ \ = 50$,

$p_0 = 10$ PE.

A keresleti függvény: $D(p) = 600 - 50p, \quad 0 \leq p \leq 10$

Ezen paraméterek mellett a Nash-egyensúly:

$$p^N = 6,1795\,\text{PE},$$
$$q^N = 139,29\,\text{db}.$$

Az egyensúlyi költségek a beszállítónál:

$$TC_b\left(p^N, q^N\right) = -1554,63\,\text{PE},$$

mivel a negatív költség a nyereséget jelöli, míg a termelőnél

$$TC_t\left(p^N, q^N\right) = 2216,26\,\text{PE}.$$

A Nash-egyensúly teljes költsége $TC\left(p^N, q^N\right) = 661,63\,\text{PE}$.

A Pareto-optimum értékei a következőek:

$$p^p = 10,00\,\text{PE},$$
$$q^p = 77,46\,\text{db}.$$

Az egyensúlyi költségek a beszállítónál:

$$TC_b\left(p^p, q^p\right) = -857,99\,\text{PE}$$

mivel a negatív költség a nyereséget jelöli, míg a termelőnél

$$TC_t\left(p^p, q^p\right) = 1245,29\,\text{PE}.$$

A Pareto-optimum teljes költsége $TC\left(p^N, q^N\right) = 387,30\,\text{PE}$.

Látható, hogy a számpéldánkban az összköltség a Pareto-optimumban 274,33 pénzegységgel, azaz tehát mintegy 42%-kal csökkent. Ennek az az ára, hogy a termelő 696,64 pénzegységnyi nyereségről mondott le a beszállító javára, hogy az csökkenthesse a költségeit.

6.2. Példa arra az esetre, amikor a Nash-egyensúly és a Pareto-optimum egybeesik

Paramétereink értékeit az alábbiak szerint adtuk meg:

$s_t = 120$ PE/rendelés,

$h_t = 3$ PE/db/év,

s_b = 80 PE/rendelés,
h_b = 2 PE/db/év,
a = 600,
b = 50,
p_0 = 6,264 PE.

Keresleti függvényünk formája megegyezik az előző példában ismertetettel, azzal az eltéréssel, hogy a maximális ár kisebb: $D(p) = 600 - 50p$, $0 \leq p \leq 6,264$. Ellenőrizzük, hogy a speciális feltételeink teljesülnek-e:

$$\frac{s_b}{h_b} = \frac{s_t}{h_t} = 40$$

valamint

$$p_0 = \frac{a}{2b} + \frac{s_b}{2}\sqrt{\frac{h_t}{2s_t(a - bp_0)}} = 6,264,$$

vagyis erre a speciális paraméteregyüttesre a Nash-egyensúly egyben Pareto-optimumot is jelent.

Az egyensúlyi termelési és árdöntés ekkor:

$$p^N = 6,264\,\text{PE},$$
$$q^N = 151.47\,\text{db}.$$

Az egyensúlyi költségek a beszállítónál:

$$TC_b\left(p^N, q^N\right) = -1493,59\,\text{PE}$$

mivel a negatív költség a nyereséget jelöli, míg a termelőnél

$$TC_t\left(p^N, q^N\right) = 2250,95\,\text{PE}.$$

Az egyensúly teljes költsége $TC_t\left(p^N, q^N\right) = 757,36\,\text{PE}$.

7. Összegzés

Dolgozatunk egy diadikus ellátási láncot vizsgált a beszerzési ár, mint koordinációs mechanizmus mellett. A termelő ismert keresleti függvénye mellett sikerült meghatározni a probléma Nash-egyensúlyát és Pareto-optimumát is. Megmutattuk azt is, hogy bizonyos paraméteregyüttes mellett a Nash-egyensúly egybeesik a Pareto-optimummal. Ebben a nagyon speciális esetben a beszerzési ár szerződés koordinálja az ellátási láncot, az együttműködés „versenyzés” mellett is rendszerszintű optimumhoz vezet.

Az ismertetett modellt három irányba lehet továbbfejleszteni. Elsőként a modell által adott költségmegtakarítás felosztási mechanizmusát lehetne tisztázni egy alkufolyamat során. Egy második általánosítási lehetőség lehet más koordinációs mechanizmusok tesztelése, eltérő szerződést feltételezve, például a költség- vagy nyereségmegosztási szerződés beépítése a modellbe. Végül harmadikként azt lehetne megvizsgálni, hogy mi történik akkor, ha három vállalat vertikális integrációban van egymással. Ez a modelltípus mélyebb betekintést nyújthatna a kooperatív játékelméleti modell megoldásainak struktúrájába, ami a költségmegtakarítások elosztásának mechanizmusát is árnyaltabbá tehetné.

Hivatkozások

Banerjee, A. (1986). A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor. *Decision Sciences*, 17(3):292–311.

Cachon, G. (2003). Supply chain coordination with contracts. In: Kok, A., Graves, S. (szerk.) *Supply Chain Management: Design, Coordination and Operation*. Handbooks in Operations Research and Management Science, Elsevier, Amsterdam. pp. 229–339.

Goyal, S. K. (1977). An integrated inventory model for a single supplier-single customer problem. *International Journal of Production Research*, 15(1):107–111.

Szép J., Forgó F. (1974). *Bevezetés a játékelméletbe*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.