A kompetitív piac közelítése sokszereplős Cournot-oligopóliumokkal

Tasnádi Attila

Kivonat
Mikroökonómia tankönyvekből és példatárakból ismert, hogy egy homogén termékű Cournot-oligopol piacon a termelők számának növelésével közelíthető a kompetitív piac. Az iskolapéldában lineáris keresleti görbét és állandó egységköltséget tételeznek fel. Az irodalomban több munka is foglalkozik az említett feltételek enyhítésével. Jelen dolgozatban egy új, egyszerű approximációs tételt igazolunk.
Az első szakaszban áttekintjük a Cournot-oligopol játék egyensúlyának egzisztenciájára és a kompetitív piac Cournot-oligopóliumokkal történő approximálhatóságára vonatkozó eredményeket. Az egyensúly létezésével kapcsolatos eredményeket felhasználjuk a második szakaszban található approximációs tételünkhöz, amit aztán összevetünk az irodalomban található approximációs tételekkel.

1. Irodalmi áttekintés

A kompetitív piacon a szereplők egyéni cselekedeteinek (feltevés szerint) nincsen áralakító hatása. Intuíciónk alapján a szereplők árbefolyásoló képessége igazából csak kellően sok szereplő esetén hanyagolható el. A kompetitív piac ilyen irányú megalapozása sokszereplős homogén termékű Cournot-oligopóliumok segítségével megvalósítható. Az iskolapéldában lineáris keresleti görbe és állandó egységköltség feltételezése mellett igazolható, hogy a Cournot-oligopolisták számának növelésével közelíthető a kompetitív piac. A konvergencia biztosításához szükséges feltételek enyhítésével több kutató is foglalkozott. A dolgozat tárgya egy az iskolapéldánál általánosabb, de mégis viszonylag egyszerű új approximációs tétel.

Tasnádi Attila
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, email: attila.tasnadi@uni-corvinus.hu

A Cournot-oligopóliumban a vállalatok egyszerre hozzák meg a mennyiségi döntéseiket, majd egy nem specifikált mechanizmuson keresztül határozódik meg a piactisztító ár. Ennek „kikiáltását” gyakran egy fiktív árverezőhöz kötik, illetve előszeretettel hivatkoznak Kreps és Scheinkman (1983) eredményére, amelyben egy kapacitáskiépítési (mennyiségi) szakaszt egy árjáték követ. Az idézett szerzők megmutatták, hogy az így értelmezett összetettebb modell egyensúlyában a vállalatok első időszakban kiépített kapacitásai megegyeznek az azonos költségfüggvényű Cournot-duopólium egyensúlyi termelésével, ezáltal a Cournot-modell egyfajta megalapozását adták.

Szidarovszky és Yakowitz (1977) igazolta, hogy konkáv keresleti görbe és konvex költségfüggvények mellett a Cournot-oligopóliumnak létezik egyértelmű megoldása. A konvergenciatételünk bizonyításában Szidarovszky és Yakowitz (1977) egzisztencia és unicitási tételét fogjuk alkalmazni. Érdemes azonban néhány további nevezetes egzisztencia, illetve unicitási tételt is megemlíteni. A létezés szempontjából Bamon és Fraysee (1985), Novshek (1985a), Amir (1996), illetve Forgó (1996) feltételei enyhébbek, és többek között megszabadulnak a költségfüggvények konvexitásának erős feltevésétől. Példának okáért Amir (1996) a keresleti függvény szigorú monoton csökkenését és logkonkavitását, a költségfüggvények szigorú monoton növekedését és balról folytonosságát, továbbá a „módosított” profitfüggvények egy ponttól kezdődő negativitását követeli meg.[1] A feltételekhez a költségfüggvények konkavitását hozzávéve adódik az egyensúly egyértelműsége. Konkávból konvexbe váltó költségfüggvények esetén Forgó (1996) bizonyítja az egyensúly létezését. Egy friss munkában Ewerhart (2011) az eddigi legáltalánosabb egzisztenciatételt adja, amit az általánosság mellett elsősorban az a törekvés vezérelt, hogy csak keresleti és költségfüggvényre vonatkozó kikötés szerepeljen az egzisztenciatételben, így Amir (1996) „módosított” profitfüggvényre vonatkozó feltevését kiváltja a keresleti függvény úgynevezett α-bikonkavitása.[2]

A Cournot-oligopólium egyik jó tulajdonsága, hogy amennyiben a piac kínálati oldalát elegendően sok kisvállalat alkotja, akkor a Cournot-oligopólium egyensúlyi ára közel esik a kereslet és kínálat egyensúlyaként meghatározott kompetitív árhoz, azaz a Cournot-oligopolisták közel határköltségen termelnek. A Cournot-oligopóliumok ilyen jellegű viselkedését, különböző feltételekből kiindulva, többek között Frank (1965), Ruffin (1971), Novshek (1985b), valamint Campos és Padilla (1996) igazolták. A kérdéshez kapcsolódik a gyengébb kvázikompetitivitási tulajdonság teljesülése, ami csak annyit követel meg, hogy a vállalatok számának növekedésével csökkenjen a piaci ár. Ilyen irányú eredményeket ért el például Okuguchi (1973) és Amir (2000). Vives (1999) számos további, a sokszereplős Cournot-oligopóliumokra vonatkozó eredményt tárgyal.

---

[1] Léteznie kell olyan $\overline{Q}$ mennyiségnek, hogy $P(Q)Q - C_i(Q) < 0$ bármely $Q > \overline{Q}$-ra és bármely $i \in \{1,\ldots,n\}$-re.

[2] Az $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény α-bikonkáv, ha $[f(x)]^\alpha/\alpha$ az $x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$-nak konkáv függvénye. Megjegyzendő, hogy az $\alpha \to 0$ határátmenettel értelmezhető a 0-konkavitás is, ami a logkonkavitással ekvivalens.

2. Egy új approximációs tétel

Ebben a szakaszban egy könnyen igazolható új approximációs eredményt mutatunk be. A fő feltevéseink az inverz keresleti görbe monoton csökkenő és konváv volta, továbbá a költségfüggvények szigorú konvexitása, valamint a vállalati kínálati görbék elhanyagolhatóvá válása az összpiaci kínálathoz képest, ha a vállalatok száma a végtelenbe tart. Eredményünk abban tér el Frank (1965), valamint Campos és Padilla (1996) konvergenciatételeitől, hogy nem korlátozzuk az eltérő költségfüggvényű vállalatok számát. Novshek (1985b) nagyon általános konvergenciatétele nem érvényes fixköltségek hiányában és jóval bonyolultabb az itt közöltnél. Egyébként Campos és Padilla (1996) adott példát arra, hogy a szükséges feltételek hiányában Cournot-oligopóliumokkal nem feltétlenül közelíthető a kompetitív piac.

A $P:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ inverz keresleti görbéről feltesszük, hogy kielégíti az alábbi feltételeket:

1. Feltevés. *P szigorúan monoton csökkenő a $[0,a]$ intervallumon, azonosan nulla az (a,∞) intervallumon, kétszer differenciálható a $(0,a)$ intervallumon és konkáv a $[0,a]$ intervallumon.*

A P függőleges tengelymetszetét jelölje b, azaz $P(0)=b$.

Az eredmény aszimptotikus természete miatt oligopol piacok sorozatát vesszük, amelynek az n-edik piacát n vállalat alkotja. Feltesszük, hogy a sorozat összes piacán a kereslet azonos. Az n-edik piacon az $i\in\{1,\ldots,n\}$ vállalat költségfüggvényét és kompetitív kínálati függvényét jelölje rendre c_i^n és s_i^n. Ezért az n-edik oligopol piac megadható a

$$\langle\{1,\ldots,n\},(c_1^n,\ldots,c_n^n),P\rangle$$

hármassal. Jelölje $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát. A sorozatban szereplő mindegyik Cournot-oligopóliumnak, a következő feltétel miatt, létezik egy egyértelmű egyensúlya.

2. Feltevés. *A $c_i^n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ ($n\in\mathbb{N}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$) költségfüggvények kétszer differenciálhatók, nincsenek fixköltségek, szigorúan monoton növekedők és szigorúan konvexek. Továbbá $(c_i^n)'(0)=\lim_{q\to0^+}(c_i^n)'(q)=mc_i^n(0)=0$ és $\lim_{q\to\infty}mc_i^n(q)=\infty$ bármely $n\in\mathbb{N}$-re és bármely $i\in\{1,\ldots,n\}$ vállalatra.*

A fixköltségek hiánya garantálja, hogy a piacon jelenlévő vállalat mindegyike aktív legyen. A 2. feltevésből az is következik, hogy az i vállalat kompetitív kínálata, a továbbiakban röviden kínálata, a p áron $s_i^n(p)=(mc_i^n)^{-1}(p)$, mert az $\arg\max_{q\geq0}pq-c_i^n(q)$ probléma egyértelműen megoldható bármely $p\geq0$ áron a 2. feltevés alapján. Jelölje $S_c^n=\sum_{i=1}^n s_i^n$ a vállalatok aggregált kompetitív kínálatát és annak inverzét $MC_c^n=(S_c^n)^{-1}$.

A *mennyiségi profilnak* nevezett $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)\in[0,a]^n$ vektor megadja az n vállalat mennyiségi döntését. Az n-edik mennyiségi játékot az $O_q^n=\left\langle\{1,\ldots,n\},[0,a]^n,(\pi_i^n)_{i=1}^n\right\rangle$ struktúra adja meg, ahol

$$\pi_i^n(\mathbf{q})=P(q_1+\ldots+q_n)\,q_i-c_i^n(q_i)$$

bármely $i \in \{1, \ldots, n\}$ vállalatra. Ha O_q^n kielégíti az 1. és a 2. feltevéseket, akkor Szidarovszky és Yakowitz (1977) egzisztencia tétele biztosítja, hogy az O_q^n oligopol játéknak egyértelműen létezik tiszta Nash-egyensúlya.

A konvergenciatételünkhöz szükségünk lesz még két további feltételre:

3. Feltevés. *Az* $1, \ldots, n$ *vállalatok összkínálata az* $\left(O_q^n\right)_{n=1}^{\infty}$ *oligopol piacok sorozatának minden egyes piacán azonos.*

A 3. feltevés miatt a vállalatok aggregált kompetitív kínálata $S_c = \sum_{i=1}^{n} s_i^n$ és az $MC_c = S_c^{-1}$ inverze független n-től.

4. Feltevés. *Létezik olyan c pozitív valós érték, hogy*

$$s_i^n(p) < \frac{c}{n} S_c(p)$$

teljesül bármely $p \in (0, b]$ *árra, bármely* $n \in \mathbb{N}$ *pozitív egészre és bármely* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *vállalatra.*

n növelésével a 3. és a 4. feltevés alapján az összes vállalat kompetitív kínálata tetszőlegesen kicsivé tehető a piaci összkínálathoz képest. Megjegyzendő, hogy ez utóbbi két feltevés az approximáció jellegére is rámutat. A feltételek alapján a kompetitív piacot egy egyre több nemcsak relatív értelemben, hanem egyben abszolút értelemben is kisebb súlyú vállalatból álló Cournot-piaccal közelítjük. Tehát eredményünk lényegében azt állítja majd, hogy egy minél több kisvállalatból álló Cournot-piac lényegében úgy viselkedik, mint az azonos kínálatú és keresletű kompetitív piac. Az általunk alkalmazott megközelítéssel élt például Novshek (1985b).

Végül jelölje p^c a piactisztító árat és a q^c az aggregált kompetitív kibocsátást, azaz

$$p^c = P(q^c) = MC_c(q^c).$$

Megmutatjuk, hogy az 1., a 2., a 3. és a 4. feltételeket kielégítő $\left(O_q^n\right)_{n=1}^{\infty}$ oligopol piacok sorozatához egyértelműen létező egyensúlyi árak sorozata a p^c piactisztító árhoz tart.

1. Állítás. *Elégítse ki az* $O_q = \left(O_q^n\right)_{n=1}^{\infty}$ *Cournot-oligopóliumok sorozata az 1., a 2., a 3. és a 4. feltételeket. Ekkor az* O_q^n *oligopóliumnak egyértelműen létezik tiszta Nash-egyensúlya bármely* $n \in \mathbb{N}$*-re, amelyet ha* $(q_i^n)_{i=1}^n$ *jelöl, akkor*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^n\right) = p^c \text{ és } \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} q_i^n = S_c(p^c),$$

azaz a mennyiségi játékok sorozatának egyensúlyai a kompetitív kimenetelhez tartanak.

Bizonyítás: A feltevéseink lehetővé teszik Szidarovszky és Yakowitz (1977) egzisztencia és unicitási tételének alkalmazását tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re, amely alapján biztosított a

$\mathbf{q}^n = (q_i^n)_{i=1}^n$ egyensúlyi mennyiségi profil létezése. Legyen $q_c^n = \sum_{i=1}^n q_i^n$ a vállalatok egyensúlyi össztermelése. A $(q_c^n)_{n=1}^\infty$ sorozat korlátos volta miatt létezik konvergens részsorozata. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $(q_c^n)_{n=1}^\infty$ már konvergens és a határértéke $\overline{q}_c$. A vállalatok $(q_i^n)_{i=1}^n$ egyensúlyi döntései szükségszerűen kielégítik a

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(\mathbf{q}^n) = P(q_c^n) + P'(q_c^n)\, q_i^n - mc_i^n(q_i^n) = 0 \tag{1}$$

elsőrendű feltételeket.

Ekkor $\lim_{n\to\infty} q_i^n = 0$, ahol az a_i^n ($i, n \in \mathbb{N}$ és $i \leq n$) kettős sorozatra $\lim_{n\to\infty} a_i^n = a$ teljesül, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : |a_i^n - a| < \varepsilon.$$

Az (1) feltételből és a 4. feltevésből

$$\begin{aligned} q_i^n &= s_i^n \left(P(q_c^n) + P'(q_c^n)\, q_i^n\right) < \\ &< \frac{c}{n} S_c \left(P(q_c^n) + P'(q_c^n)\, q_i^n\right) \leq \frac{c}{n} S_c(b) \end{aligned} \tag{2}$$

adódik bármely $i \in \{1, \ldots, n\}$-re. Ezért $\lim_{n\to\infty} q_i^n = 0$.

Legyen $p^n = P(q_c^n)$ és jelölje $\overline{p}$ a $(p^n)_{n=1}^\infty$ sorozat határértékét. Nyilván $\overline{p} = P(\overline{q}_c)$ teljesül a P folytonossága és monotonitása miatt. Ezért határértékeket véve az (1) feltételben,

$$\overline{p} = \lim_{n\to\infty} mc_i^n(q_i^n) \tag{3}$$

adódik, figyelembe véve a P' korlátosságát. Vegyük észre, hogy (3) szerint

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \forall i \in \{1, \ldots, n\} : |mc_i^n(q_i^n) - \overline{p}| < \varepsilon. \tag{4}$$

Válasszuk a $\widehat{q}_i^n$ és $\widetilde{q}_i^n$ értékeket úgy, hogy $mc_i^n(\widehat{q}_i^n) = \overline{p} - \varepsilon$ és $mc_i^n(\widetilde{q}_i^n) = \overline{p} + \varepsilon$ legyen. A $\widehat{q}_i^n \leq q_i^n \leq \widetilde{q}_i^n$ egyenlőtlenségből $\widehat{q}_c^n \leq q_c^n \leq \widetilde{q}_c^n$ következik, ebből pedig $MC_c(\widehat{q}_c^n) \leq MC_c(q_c^n) \leq MC_c(\widetilde{q}_c^n)$ adódik. Mivel $MC_c(\widehat{q}_c^n) = \overline{p} - \varepsilon$ és $MC_c(\widetilde{q}_c^n) = \overline{p} + \varepsilon$, az MC_c folytonosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\overline{p} = MC_c(\overline{q}_c). \tag{5}$$

Tehát $\overline{q}_c$ kielégíti a $P(q) = MC_c(q)$ egyenlőséget, aminek létezik egyértelmű megoldása az 1. és a 2. feltevések alapján. Ezért a $(q_c^n)_{n=1}^\infty$ sorozatnak csak egyetlen torlódási pontja lehet (5) alapján, amiből $\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^n q_i^n\right) = p^c$ és $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n q_i^n = S_c(p^c)$ ($\overline{q}_c = q^c$ és $\overline{p} = p^c$) következik. ❑

Köszönetnyilvánítás:
A szerző kutatásait az OTKA K-101224 pályázat támogatta.

Hivatkozások

Amir, R. (1996). Cournot oligopoly and the theory of supermodular games. *Games and Economic Behavior*, 15: 132–148.

Amir, R., Lambson, V. (2000). On the effects of entry in Cournot markets. *Review of Economic Studies*, 67: 235–254.

Bamon, R., Fraysee, J. (1985). Existence of Cournot equilbrium in large markets. *Econometrica*, 53:587–597.

Campos, J., Padilla, A. (1996). On the limiting behavior of asymmetric Cournot oligopoly: a reconsideration. *CEMFI Working Paper Series*, No. 9607.

Ewerhart, C. (2011). Cournot oligopoly and concavo-concave demand. *University of Zürich, Department of Economics, Working Paper Series*, No. 16.

Forgó, F. (1996). Cournot-Nash equilibrium in concave oligopoly games. *Pure Mathematics and Applications*, 6: 161–169.

Frank, C. (1965) Entry in a Cournot market. *Review of Economic Studies*, 329: 245–250.

Kreps, D. M., Scheinkman, J. A. (1983). Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes. *Bell Journal of Economics*, 14: 326–337.

Novshek, W. (1985a). On the existence of Cournot equilibrium. *Review of Economic Studies*, 52:85–98.

Novshek, W. (1985b). Perfectly competitive markets as the limits of Cournot markets. *Journal of Economic Theory*, 35:72–82.

Okuguchi, K. (1973). Quasi-competitiveness and Cournot oligopoly. *Review of Economic Studies*, 40: 145–148.

Ruffin, R. (1971). Cournot oligopoly and competitive behaviour. *Review of Economic Studies*, 3: 493–502.

Szidarovszky, F., Yakowitz, S. (1977). A new proof of the existence and uniqueness of the Cournot equilibrium. *International Economic Review*, 18:787–789.

Vives, X. (1999). *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools*. MIT Press, Cambridge, MA.