Pénzügyi hálózatok modellezése Jackson és Watts (2002) nyomán

Balog Dóra, Bátyi Tamás László, Csóka Péter, Pintér Miklós

Kivonat
A hálózatok társadalmi és gazdasági jelentősége vitathatatlan, alkalmazásai pedig szerteágazóak. A kutatási együttműködések hálózata is fontos, négyünk ezen cikkbeli együttműködésének itt csak két okát szeretnénk kiemelni. Egyrészt idén 10 éves Jackson és Watts (2002) cikke, amely a hálózatok evolúcióját a sztochasztikusan stabil hálózatokkal jelzi előre. Másrészt most lesz 70 éves Forgó Ferenc Tanár Úr, akinek a tiszteletére úgy gondoltuk, hogy összefoglalunk öt, általunk fontosnak tartott, az említett cikkhez kapcsolódó pénzügyi alkalmazást és néhány új modellváltozatot. Összefoglaló jellegű cikkünk célja a magyar olvasók kíváncsiságának felkeltése és néhány lehetséges kutatási irány felvázolása.

1. Bevezetés

A hálózatok társadalmi és gazdasági jelentősége vitathatatlan, alkalmazásai pedig szerteágazóak. Hálózatok jelennek meg információcserében (meghívás egy összejövetelre, álláslehetőségek, fogyasztási cikkek, innovációk stb.), szervezeten belüli alkudozásban, javak és

Balog Dóra
Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék,
email: dora.balog@uni-corvinus.hu

Bátyi Tamás László
Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék,
email: batyi.tamaslaszlo@gmail.com

Csóka Péter
Budapesti Corvinus Egyetem, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék,
email: peter.csoka@uni-corvinus.hu

Pintér Miklós
Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika Tanszék, email: miklos.pinter@uni-corvinus.hu

szolgáltatások kereskedése közben (kereskedelmi hálózatok és szövetségek, társadalmi kapcsolatok, házasság, felvételi problémák, stb.) is. Mivel számítanak a hálózati kapcsolatok, fontos megértenünk, hogy mitől függ az, hogy várhatóan milyen hálózatok jönnek létre.

A Jackson és Watts (2002) cikk Jackson és Wolinsky (1996) dinamikus és sztochasztikus változata. Mindkét cikk központi fogalma a párosan stabilitás. Egy hálózat akkor párosan stabil, ha tetszőleges él esetén egyik érintett játékos sem jár jól az él törlésével, vagy tetszőleges két játékos esetén ha őket nem köti össze él, akkor legalább az egyikőjüknek káros az új él felvétele. A fejlesztő út szomszédos gráfok olyan sorozata, ahol az egyik gráfról a szomszédos gráfra lépés a változást jelentő éllel összekötött játékosok egyéni érdekeinek következménye. Érdemes megvizsgálni, hogy hová vezetnek a fejlesztő utak, melyek a stabil hálózatok. Jackson és Wolinsky (1996) belátják, hogy bizonyos feltételek esetén ebben a hálózati modellben a hatékonyság és a stabilitás egymással szemben álló, egymásnak ellentmondó fogalmak. Jackson és Watts (2002) azt vizsgálják, amikor nem csak fejlesztő utak mentén történhet változás, hanem valamilyen pozitív valószínűséggel bekövetkező hibák következményeként is. A szerzők belátják, hogy modellükben mindig van sztochasztikusan stabil egyensúly.

1.1. További modellváltozatok

Vegyük észre, hogy a párosan stabilitás rövidlátást feltételez a játékosokról: csak egy él törlését vagy hozzáadását fontolja meg két játékos, nem számolnak a további következményekkel. Ez a viselkedés racionális lehet nagy hálózatokban, ahol nem sok információval rendelkeznek a játékosok, vagy ha a jövőt kis súllyal veszik figyelembe. Az említett két cikk további feltevése, hogy a játékosok élformálási költségei azonosak, és nem lehet transzferekkel segíteni a kedvezőbb hálózatok kialakulását. Azóta ezeket a feltevéseket megpróbálták feloldani, ahogy azt az alábbi cikkek mutatják.

Dutta et al. (2005) egy olyan dinamikus hálózatalakulási modellt vizsgálnak, amelyben az egyének előrelátóak (farsighted), és úgy döntenek, hogy a lehető legjobb legyen a lépésükből következő kifizetéseik jelenértéke. Belátják, hogy két feltétel esetén van olyan egyensúly, amelyben tetszőleges kezdeti gráfból elérhető a teljes gráf. A két feltétel az élmonotonitás (link monotonicity) és a növekvő hozadékú élformálás (increasing returns to link creation).

Herings et al. (2009) az előrelátást másképpen definiálják. Szerintük a hálózatok egy G halmaza előrelátóan stabil (farsightedly stable), ha

(i) bármilyen előrelátó páros eltérés tetszőleges G-beli hálózattól egy G-n kívüli hálózatra meghiúsul, mert végül rosszabbul, vagy azonosan járnak a felek;

(ii) ha tetszőleges G-n kívüli hálózatból van előrelátó fejlesztő út, amely G-beli hálózatba visz; és

(iii) nincs G-nek olyan szigorú részhalmaza, amely (i)-et és (ii)-t is teljesíti. A szerzők belátják, hogy az előrelátóan stabil hálózatok halmaza nem üres, és ha létezik Pareto domináns hálózat, akkor az az egyedüli eleme.

Jackson és van den Nouweland (2005) olyan hálózatokkal foglalkoznak, amelyek a játékosok tetszőleges koalíciójának linkváltoztatásával szemben stabilak. Ezeket erősen stabil hálózatoknak (strongly stable networks) hívják. A szerzők szerint az erősen stabil hálózatok a párosan stabil hálózatok értelmes finomításai.

Természetesen a játékosok élformálási költségei is eltérőek lehetnek. Galeotti et al. (2006) olyan hálózatokat vizsgálnak, ahol nemcsak az élköltségek, hanem a játékosok értékelőfüggvényei is eltérőek. Arra az eredményre jutnak, hogy a centralitás és az egyének közötti átlagos legrövidebb utak hossza robosztusan leírja az ilyenkor keletkező egyensúlyi hálózatokat.

Bloch és Jackson (2007) a bilaterális transzferek hatását elemzik, amikor két játékos olyan megállapodást köthet, amelyben az egyik fél kompenzálja a másikat, ha létrehozzák (vagy nem hozzák létre) a közös élt. Arra jutnak, hogy ebben a modellben is megmarad a hatékonyság és a stabilitás ellentéte. Az ellentét oka az, hogy csak bilaterális megállapodásokat lehet kötni, és csak közös élre. A cikk rávilágít, hogy a pozitív externáliák akkor és csak akkor oldhatók fel, ha nem csak közös élt lehet támogatni, a negatív externáliák pedig csak akkor oldhatók fel, ha a megállapodások a hálózatok struktúrájához köthetők.

A modelleket kísérletekkel (experiments) is vizsgálják, amelyekben többnyire hallgatóknak kell döntéseket hozniuk elkülönített számítógépek előtt, 10-15 dolláros várható órabér mellett (a konkrét érték attól függ, hogy milyen jó döntéseket hoznak). Például Charness és Jackson (2007) az erősen stabil hálózatoknál megjelenő csoportos (szavazásos) döntést vizsgálják a „szarvasvadászat” játékban, de a módszer tetszőleges szavazásos döntéssel operáló csoportok (például vállalatok vagy egyetemek) közötti döntések vizsgálatára is használható. A kísérlet adatait sikerül egy új megoldás koncepcióval, a robusztus-hiedelem egyensúllyal (robust-belief equilibrium) megmagyarázniuk. Corbae és Duffy (2008) egy olyan kísérletet terveztek, amelyben a szereplők kereskedelmi hálózatokat alakítanak egyedi kockázat és fertőzési lehetőség esetén. Érdemes az eredményeket összehasonlítani az általunk bemutatott pénzügyi témájú cikkek eredményeivel.

1.2. Pénzügyi alkalmazások

Tanulmányunkban kiválasztottuk az öt jelenleg ismert, a Jackson és Watts (2002) cikkhez leginkább kapcsolódó vagy aktuális pénzügyi alkalmazást.

Cikkünk felépítése a következő. Az alapfogalmak bemutatása után olyan alkalmazásokat vizsgálunk, mint az összefonódó pénzügyi rendszerek (Zawadowski, 2011), a rendszerkockázat (Allen et al., 2010), egyensúlyozás diverzifikáció és fertőzés között (Elliott et al., 2011), kockázatmegosztás hálózatokban (Bramoullé és Kranton, 2007) és a világ tőzsdéinek rangsorolása (Cetorelli és Peristiani, 2009). Az utolsó fejezetben további modellváltozatokat tárgyalunk.

2. Alapfogalmak

Ebben a részben ismertetjük a későbbiek során bemutatott hálózati alkalmazások mögött megbúvó modelleket, illetve azok matematikai felépítését. A következőkben, külön említés nélkül, a (Jackson és Wolinsky, 1996) és (Jackson és Watts, 2002) cikkek jelöléseit használjuk és eredményeit ismertetjük.

$G = (V,E)$ egy *gráf*, ahol V a *csúcsok*, E az *élek* halmaza. A teljes gráf egy olyan gráf, ahol tetszőleges két csúcs között van él. Legyenek a csúcsok a játékosok, azaz V a játékosok halmaza, és legyen $G^V = \{G = (V,E),\ E \subseteq \{ij : i, j \in V\}\}$ a V csúcsokkal (játékosokkal) rendelkező gráfok (hálózatok) halmaza. Legyen $G = (V,E) \in G^V$ és $i, j \in V$, ekkor $G + ij$ a $(V,E \cup \{ij\})$, azaz a $G + ij$ gráfot úgy kapjuk a G gráfból, hogy hozzávesszük G éleihez az ij élt. Hasonlóan, $G - ij$ a $(V,E \setminus \{ij\})$ gráf, azaz a $G - ij$ gráfot úgy kapjuk a G gráfból, hogy elvesszük G éleiből az ij élt. A G és G' *gráfok szomszédosak*, ha létezik ij él, hogy $G = G' + ij$ vagy $G = G' - ij$.

Legyen $G = (V,E)$ egy gráf, ekkor az i-ből a j csúcsba vezető *út* olyan $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ csúcsok rendezett halmaza, hogy $v_1 = i$, $v_n = j$ és $v_k v_{k+1} \in E$, $k = 1,2,\ldots,n-1$. Az i és j *csúcsok szomszédosak*, ha $ij \in E$; *kapcsolódóak*, ha van i és j között út.

Legyen $G = (V,E)$ egy gráf, a $G' = (V',E')$, $E' = \{ij \in E : i, j \in V'\}$ részgráf *komponens*, ha tetszőleges $i, j \in V'$ csúcsok között vezet E'-beli út, és tetszőleges $i \in V'$, $j \in V \setminus V'$ csúcsok nem kapcsolódóak.

A $v : \Gamma^V \to \mathbb{R}$ függvény egy *értékelőfüggvény*, ahol $\Gamma^V = \{G' : G'$ részgráfja a V csúcsokkal rendelkező teljes gráfnak$\}$, és $v(G)$ a $G \in \Gamma^V$ gráf értéke.

2.1. *Statikus elemzés*

Ebben az alfejezetben a hálózatok alapvető tulajdonságait tárgyaljuk.

1. Definíció. *Legyen v egy értékelőfüggvény. Ekkor a $G \in \Gamma^V$ hálózat* erősen v-hatékony*, ha tetszőleges $G' \in \Gamma^V$: $v(G) \geq v(G')$.*

Tehát egy G gráf erősen v-hatékony, ha G a v értékfüggvény abszolút maximuma.

2. Definíció. *Legyen $\mathscr{G}^V$ a hálózatok Γ^V osztályán értelmezett értékfüggvények halmaza. Ekkor a $\psi : \Gamma^V \times \mathscr{G}^V \to \mathbb{R}^V$ függvényt* megoldás*nak nevezzük.*

A megoldás tehát egy olyan függvény, amely tetszőleges hálózat és értékelés esetén megadja a játékosok kifizetését.

3. Definíció. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, és ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás. Ekkor a $G = (V,E) \in G^V$ gráf* párosan (ψ, v)-stabil, *ha tetszőleges $i, j \in V$ játékosokra:*

$$ij \in E \Longrightarrow \psi_i(G,v) \geq \psi_i(G-ij,v) \text{ és } \psi_j(G,v) \geq \psi_j(G-ij,v) \,, \tag{1}$$

és

$$ij \notin E \Longrightarrow (\psi_i(G,v) < \psi_i(G+ij,v) \Longrightarrow \psi_j(G,v) > \psi_j(G+ij,v)) \,. \tag{2}$$

Azt mondjuk, hogy a G' gráf (ψ, v)-jobb, mint a G gráf, ha vannak olyan $i, j \in V$ játékosok, hogy $G' = G - ij$ és az (1) *feltétel nem áll, vagy, ha $G' = G + ij$ és a* (2) *feltétel nem teljesül.*

Tehát egy hálózat akkor párosan stabil, ha tetszőleges él esetén egyik érintett játékos sem jár jól az él törlésével, vagy tetszőleges két játékos esetén ha őket nem köti össze él, akkor legalább az egyikőjüknek káros az új él felvétele.

4. Definíció. *Legyen adott a $\pi : V \to V$ permutáció, a $G = (V,E)$ gráf és a $v \in \mathscr{G}^V$ értékfüggvény. Ekkor $G^\pi = (V, E^\pi)$ egy olyan gráf, ahol $E^\pi = \{ij : i = \pi(k),\ j = \pi(l),\ kl \in E\}$, továbbá legyen a v^π értékfüggvény a következőképpen definiált: $v^\pi(G^\pi) = v(G)$.*

Tehát a $G^\pi = (V, E^\pi)$ gráf a $G = (V,E)$ gráf csúcsainak π permutációval történő átnevezése után kapott gráf.

5. Definíció. *ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás* anonim, *ha tetszőleges $G \in G^V$ hálózatra, $v \in \mathscr{G}^V$ értékfüggvényre, π permutációra: $\psi_{\pi(i)}(G^\pi, v^\pi) = \psi_i(G,v)$.*

Magyarán szólva egy megoldás anonim, ha tetszőleges értékfüggvényt alkalmazva tetszőleges hálózatra a játékosok kifizetése nem függ az indexüktől (nevüktől).

6. Definíció. *ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás* kiegyensúlyozott, *ha*

$$\sum_{i \in V} \psi_i(G,v) = v(G),$$

$G \in G^V$ és $v \in \mathscr{G}^V$.

Egy megoldás tehát akkor kiegyensúlyozott, ha tetszőleges hálózat és értékfüggvény esetén a játékosok kifizetéseinek összege pontosan a hálózat adott értékfüggvény szerinti értéke. Tehát egy kiegyensúlyozott megoldás a játékosok között szétosztja a hálózat értékét.

7. Definíció. *A $v \in \mathscr{G}^V$ értékfüggvény* komponens additív, *ha tetszőleges $G \in \mathscr{G}^V$ hálózatra: $v(G) = \sum_{G' \in C(G)} v(G')$, ahol $C(G)$ a G komponenseinek osztálya.*

Tehát egy értékfüggvény komponens additív, ha tetszőleges hálózat értéke a hálózat komponensei értékének az összege. A komponens additivitás egy lehetséges értelmezése, hogy egy hálózat komponensei között nincs szinergia, azok uniójának értéke pusztán értékeik összege.

8. Definíció. *ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás* komponensenként kiegyensúlyozott*, ha tetszőleges $G \in G^V$ gráfra, $G' \in C(G)$ komponensre, és $v \in \mathscr{G}^V$ komponens additív értékfüggvényre: $\sum_{i \in N^{G'}} \psi_i(G,v) = v(G')$.*

Egy megoldás tehát akkor komponensenként kiegyensúlyozott, ha kiegyensúlyozott, és tetszőleges komponensére megszorítva is kiegyensúlyozott.

A következő eredmény a hálózatokra vonatkozó egyik legfontosabb eredményt fogalmazza meg: a hatékonyság és a stabilitás egymással szemben álló, egymásnak ellentmondó fogalmak.

1. Tétel (Jackson és Wolinsky, 1996). *Ha $|V| \geq 3$, akkor nincs olyan ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás, amely anonim, komponensenként kiegyensúlyozott és olyan, hogy tetszőleges $v \in \mathscr{G}^V$ értékfüggvényre van erősen v-hatékony párosan (ψ, v)-stabil hálózat.*

2.2. Hálózatok kialakulása

Ebben az alfejezetben a hálózatok kialakulásának, formálódásának kérdésével foglalkozunk.

9. Definíció. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, és ψ a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás. Ekkor a hálózatok egy $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ rendezett halmaza (ψ, v)-*fejlesztő út*, ha G_k és G_{k+1} gráfok szomszédos gráfok, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, és*

1. *$G_{k+1} = G_k - ij$ teljesül valamely ij élre úgy, hogy $\psi_i(G_k - ij, v) > \psi_i(G_k, v)$, vagy*
2. *$G_{k+1} = G_k + ij$ teljesül valamely ij élre úgy, hogy $\psi_i(G_k + ij, v) > \psi_i(G_k, v)$ és $\psi_j(G_k + ij, v) > \psi_j(G_k, v)$.*

Legyen $IP_{(\psi,v)}(G) = \{G' \in G^V : \text{van } (\psi, v)\text{-fejlesztő út } G'\text{-ből } G\text{-be}\}$, $G \in G^V$.

Tehát egy fejlesztő út szomszédos gráfok olyan sorozata, ahol az egyik gráfról a szomszédos gráfra lépés a változást jelentő éllel összekötött játékosok egyéni érdekeinek következménye. Vegyük észre, hogy egy él (kapcsolat) törléséhez tetszőleges érintett játékos egyedül is elegendő, míg egy új él (kapcsolat) létesítéshez mindkét érintett fél beleegyezése szükséges.

10. Definíció. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, és ψ a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás. Ekkor a hálózatok egy $C \subseteq G^V$ halmaza (ψ, v)-kör, ha tetszőleges $G, G' \in C$ gráf között van (ψ, v)-fejlesztő út.*

Egy (ψ, v)-kör maximális, ha nem valódi részhalmaza egy másik (ψ, v)-körnek, illetve, egy (ψ, v)-kör zárt, ha nem vezet ki belőle (ψ, v)-fejlesztő út.

Magyarán szólva a kör a hálózatok egy olyan halmaza, ahol tetszőleges hálózatból tetszőleges hálózatba el lehet jutni fejlesztő úton keresztül. Egy kör maximális, ha nem része más körnek, illetve, zárt, ha nem vezet ki belőle fejlesztő út. Világos, hogy minden zárt kör maximális.

A következő segédtétel a modellünk végességének egyik közvetlen következményét fogalmazza meg.

1. Segédtétel. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, és ψ, a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás. Ekkor, van legalább egy párosan (ψ, v)-stabil hálózat vagy legalább egy zárt (ψ, v)-kör.*

2.3. A sztochasztikus modell

A sztochasztikus hálózat-kialakulási modellekben nem determinisztikusan történik meg a hálózat kialakulása, formálódása, tehát nem csak az előző alfejezetben ismertetett fejlesztő utak mentén történhet változás, hanem valamilyen pozitív valószínűséggel megtörténhet, hogy olyan él alakul ki, amely nem érdeke egyik játékosnak sem, vagy olyan él marad meg, amely nem jó valamelyiküknek.

Az ilyen hibák teszik azt lehetővé, hogy a hálózat-alakulás ne ragadjon be egy lokális optimumba, hanem abból továbblendülve, esetleg eljusson az abszolút optimumig. Ebben az esetben azonban, szemben a determinisztikus modellel, fontos lehet, hogy melyik éleket vizsgáljuk. Ezért feltesszük, hogy az éleket egy olyan eloszlás szerint választjuk, ahol minden él pozitív valószínűséggel szerepel. Feltesszük továbbá, hogy az él sorsa az érintett játékosok döntésétől függ, de csak $\varepsilon > 0$ hibával, azaz bármi is az érintett játékosok döntése, az ε valószínűséggel nem történik meg.

A fentiek következménye, hogy a sztochasztikus modellben valójában egy Markov-láncunk van, ahol az egyes állapotok az egyes hálózatok, a nem szomszédos gráfok között az átmenetvalószínűség nulla, míg szomszédos hálózatok között az átmenetvalószínűség függ attól (is), hogy a változás egybeesik-e az érintettek egyéni érdekével, vagy ellentétes azzal.

1. Példa. Legyen $V = \{1, 2, 3\}$ a játékosok halmaza $v(\emptyset) = 0$, minden más G' hálózat esetében legyen $v(G') = 1$, a ψ megoldás pedig legyen az egalitáriánus szétosztás, azaz mindenki egyenlően részesedik a hálózat értékéből, és minden élt ugyanazzal a valószínűséggel vizsgálunk. Ekkor az átmenetvalószínűségek mátrixa (sorállapotból oszlopállapotot mutatva) a következő:

állapotok	$\emptyset$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	$\{12,13\}$	$\{12,23\}$	$\{13,23\}$	$\{12,13,23\}$
$\emptyset$	3ε	$1/3-\varepsilon$	$1/3-\varepsilon$	$1/3-\varepsilon$	0	0	0	0
$\{12\}$	ε	$1-3\varepsilon$	0	0	ε	ε	0	0
$\{13\}$	ε	0	$1-3\varepsilon$	0	ε	0	ε	0
$\{23\}$	ε	0	0	$1-3\varepsilon$	0	ε	ε	0
$\{12,13\}$	0	$1/2-\varepsilon$	$1/2-\varepsilon$	0	ε	0	0	ε
$\{12,23\}$	0	$1/2-\varepsilon$	0	$1/2-\varepsilon$	0	2ε	0	ε
$\{13,23\}$	0	0	$1/2-\varepsilon$	$1/2-\varepsilon$	0	0	ε	ε
$\{12,13,23\}$	0	0	0	0	ε	ε	ε	$1-3\varepsilon$

A modell speciális tulajdonságai biztosítják, hogy a megfelelő Markov-láncoknak egyetlen stacionárius állapotuk (eloszlásuk) van. Az ε-nal nullához tartva a stacionárius eloszlások konvergálnak, a határértékük az ún. stacionárius határeloszlás.

11. Definíció. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, és ψ a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás. Ekkor a $G \in G^V$ gráf* sztochasztikusan stabil*, ha G pozitív valószínűséggel szerepel a stacionárius határeloszlásban.*

A sztochasztikusan stabil hálózatok tehát azok, amelyeket a stacionárius határeloszlás pozitív valószínűséggel látogat meg.

12. Definíció. *Legyen $v \in \mathscr{G}^V$ egy értékfüggvény, ψ a $G^V \times \mathscr{G}^V$ halmazon értelmezett megoldás, és $P = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ hálózatok olyan rendezett halmaza, hogy G_k és G_{k+1} gráfok szomszédosak, $k = 1,2,\ldots,n-1$. Ekkor a P* út ellenállása *a következő: $R(P) = \sum_1^{n-1} I(G_k, G_{k+1})$, ahol*

$$I(G_k, G_{k+1}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } G_k \in IP(G_{k+1}) \\ 1 & \text{különben} \end{cases} .$$

Továbbá, legyen $R(G', G) = \min_{P\ (\psi,v)\text{-fejlesztő út } G'\text{-ből } G\text{-be}} R(P)$, és legyen $R(G,G) = 0$.

Magyarán szólva egy út ellenállása a rajta lévő nem fejlesztő lépések összege. Minél nagyobb az ellenállás, annál több nem fejlesztő lépés kell az út bejárásához. Természetes módon tudunk definiálni a hálózatok között távolságot az ellenállás segítségével ($R(\cdot,\cdot)$), amely két hálózat ellenállással kifejezett távolságát adja meg.

13. Definíció. *Legyen $G \in G^V$ egy hálózat. Ekkor a G-*fa *egy olyan irányított gráf, ahol a csúcsok a G^V elemei (hálózatok), és minden $G' \in G^V \setminus \{G\}$ hálózathoz egyértelműen létezik egy G'-ből G-be vezető irányított út. Legyen továbbá $T(G)$ a G-fák osztálya.*

A G-fák és $T(G)$ segítségével „összegyűjthetjük” az összes G-be vezető utat.

14. Definíció. *Legyen* $v \in \mathscr{G}^V$ *egy értékfüggvény,* ψ *a* $G^V \times \mathscr{G}^V$ *halmazon értelmezett megoldás és* $G \in G^V$ *tetszőleges hálózat. Ekkor a* G hálózat ellenállása *a következő:* $R(G) = \min_{T \in T(G)} \sum_{G'G'' \in T} R(G', G'')$*, ahol* $G'G'' \in T$ *azt jelenti, hogy a* T G*-fában benne van a* $G'G''$ *irányított él.*

Tehát egy hálózat ellenállása a minimális összellenállású G-fa összellenállása.

Mielőtt kimondjuk ennek a résznek a fő eredményét, két segédtételt mutatunk be.

2. Segédtétel. *Legyen* $v \in \mathscr{G}^V$ *egy értékfüggvény,* ψ *a* $G^V \times \mathscr{G}^V$ *halmazon értelmezett megoldás és* $G, G' \in G^V$ *két tetszőleges hálózat. Ha* $G' \in IP_{(\psi,v)}(G)$ *és* $G \notin IP_{(\psi,v)}(G')$*, akkor* $R(G) \leq R(G')$*, ha ráadásul* G *párosan* (ψ, v)*-stabil vagy eleme egy zárt* (ψ, v)*-körnek, akkor* $R(G) < R(G')$*. Tehát ha* G *sztochasztikusan stabil, akkor vagy párosan* (ψ, v)*-stabil, vagy eleme egy zárt* (ψ, v)*-körnek. Továbbá, ha egy zárt* (ψ, v)*-körnek egy eleme sztochasztikusan stabil, akkor minden hálózat az adott zárt* (ψ, v)*-körben sztochasztikusan stabil.*

A fenti segédtétel azt mondja, hogy ha a G hálózat „jobb”, mint a G' hálózat, azaz G'-ből vezet fejlesztő út G-be, de G-ből nem vezet fejlesztő út G'-be, akkor a G hálózat ellenállása nem lehet nagyobb, mint a G' hálózat ellenállása. Ráadásul ha G-nél nincs „jobb” hálózat, akkor a reláció szigorú.

A második segédtételhez szükségünk van egy új fogalomra, a korlátozott G-fa fogalmára.

15. Definíció. *Legyen* $v \in \mathscr{G}^V$ *egy értékfüggvény,* ψ*, a* $G^V \times \mathscr{G}^V$ *halmazon értelmezett megoldás, és* $G \in G^V$ *tetszőleges hálózat. A* (ψ, v)-korlátozott G-fa *egy olyan irányított gráf, ahol a csúcsok a* G *hálózat, a páros* (ψ, v)*-stabil hálózatok és a zárt* (ψ, v)*-körök elemei, és minden nem* G *csúcsból egyetlen irányított út vezet* G*-be. Jelölje* $RT_{(\psi,v)}(G)$ *a* (ψ, v)*-korlátozott* G*-fák halmazát.*

A korlátozott G-fa egy olyan G-fa, amiből a „nem fontos” csúcsokat (hálózatokat) kihagytuk, és csak a „fontosakra” korlátozzuk a figyelmünket.

3. Segédtétel. *Legyen* $v \in \mathscr{G}^V$ *egy értékfüggvény,* ψ*, a* $G^V \times \mathscr{G}^V$ *halmazon értelmezett megoldás, és* $G \in G^V$ *tetszőleges hálózat. Ekkor* $R(G) = \min_{T \in RT_{(\psi,v)}(G)} \sum_{G'G'' \in T} R(G', G'')$.

A fenti segédtétel azt mondja, hogy egy G hálózat ellenállásának számításakor elég a korlátozott G-fákra koncentrálnunk.

Befejezésül, kimondjuk ennek a résznek a fő eredményét. A tétel összekapcsolja a sztochasztikus stabilitás és az ellenállás fogalmát.

2. Tétel (Jackson és Watts, 2002). *Egy* $G \in G^V$ *hálózat pontosan akkor sztochasztikus stabil, ha* $R(G) \leq R(G')$*,* $G' \in G^V$.

3. Alkalmazások

Az alábbiakban öt olyan cikket mutatunk be, amelyek a közgazdaságtan egy speciális területén, a pénzügyekben alkalmazzák a hálózatelméletet.

3.1. Összefonódó pénzügyi rendszerek

Hálózatelméleti modellezést alkalmaz Zawadowski (2011) annak vizsgálatára, hogy a bankok milyen módon fedezik partnerkockázatukat, valamint ezen döntésük hogyan hat a rendszer stabilitására.

A cikk egy három időszakos játékelméleti modellt állít fel, amelyben n piac és n bankár szerepel egy körön elhelyezkedve. Az i-edik bankár létrehozhat egy bankot az i-edik piacon, ahol a bankok a $t = 0$ periódusban befektethetnek egy reáleszközbe, amely a $t = 2$-ben egy kockázatos kifizetést biztosít a számukra. A játékosok (bankárok) típusa a saját, valamint a körön velük szomszédos bank hozamát is befolyásolja. Minden egyes banknak lehetősége van a befektetés $t = 1$-ben történő likvidálására, a sikeres befektetésért járónál alacsonyabb hozamért. A bankok a modellben a beruházást két módon finanszírozhatják, hosszú (2 periódus), vagy rövid (1 periódus) lejáratú hitellel. Ez utóbbit a $t = 1$ időpontban tovább kell görgetni, így ilyen esetben van lehetőség a befektetés időközi likvidálására.

A modellben a bizonytalanság három tényezőből fakad. Az első, hogy mint már említésre került, a befektetések hozama függ a bank és a szomszédos bank típusától, valamint a projekt sikerétől. A projekt sikeréhez szükséges, hogy az adott bankot tulajdonló bankár mindkét periódusban végezzen legalább egységnyi munkát (ennek értéke 0 vagy 1 lehet), azonban, hogy ezt megtette-e, az más játékosok számára nem ismert. Továbbá a játék során adott és mindenki számára ismert p valószínűséggel vagy jó vagy rossz világállapot következik be. Előbbi esetben minden projekt, ahol a bankár elvégezte a megfelelő mértékű munkát, sikeres lesz, míg utóbbi esetben egyetlen projekt ennek ellenére is elbukik.

A bankok kockázatuk kezelésére vásárolhatnak biztosítást a kifizetésüket befolyásoló szomszédos partnerbankjaik csődje esetére, vagy ennek alternatívájaként OTC ügyleteket köthetnek, ezáltal fedezve a kockázatot. Az ügylet megkötésének feltétele, hogy mindkét fél részt kívánjon venni abban. A hálózati struktúra kialakulásához, azaz a játék egyensúlyának definiálásához tehát Jackson és Wolinsky (1996) modelljét, az ott bevezetett párosan stabilitás (3. definíció) fogalmat használja a cikk.

A szerző a cikkben megmutatja, hogy csődbiztosítás vásárlása egy társadalmilag optimális kimenet lenne, ugyanakkor egyensúlyban a bankok inkább az OTC piacon történő, megfelelő tőkekövetelmények nélküli fedezést, valamint a rövid távú finanszírozást választják. A játék egyensúlya tehát társadalmilag nem hatékony és pozitív valószínűséget enged a rendszer összeomlásának. A szerző ezen eredménye összhangban áll azzal a ténnyel, hogy a nagy és megbízhatónak vélt piaci szereplők nem igényelnek jelentősebb letéteket egymástól OTC ügyleteik fedezeteként.

A cikk egy numerikus példát, valamint az eredmények lehetséges okait, továbbá az elmúlt évek válságához való kapcsolatát követőena modell szabályozói oldal számára lényeges következtetéseit mutatja be. A szerző megmutatja, hogy egy társadalmilag optimális egyensúly elérhető, például az OTC ügyletek megfelelő megadóztatásával, vagy ezen ügyletek klíringelésének központosításával.

3.2. A rendszerkockázat vizsgálata pénzintézetek hálózatán

Allen et al. (2010) egy Zawadowski (2011) által használthoz hasonló modellen vizsgálja azt a válság kapcsán meglehetősen fontossá vált kérdést, vajon a bankok törekvése portfólióik diverzifikálására és így kockázataik csökkentésére hogyan befolyásolja a rendszerkockázatot, azaz annak valószínűségét, hogy egy a rendszerre ható negatív esemény, vagy fertőzési folyamat következtében számos intézmény csődbe jut. A CDS-ek és egyéb hitelderivatívák segítségével a bankok diverzifikálni tudták portfóliójukat, ugyanakkor elterjedésük nyomán az egyes bankok portfóliói egyre inkább hasonlóvá váltak. Így annak a valószínűsége is megnőtt, hogy egy adott intézmény csődje esetén a többi is bajba kerül, aminek pedig különösen nagy a jelentősége egy olyan környezetben, ahol a bankok eszközei jellemzően hosszú, míg forrásaik rövid lejáratúak, ugyanis egyetlen bankkal kapcsolatos rossz hír érkezése forrásaik kivonására ösztönözheti a befektetőket a többi bankból is. A szerzők ezt az elméletet támasztják alá két leegyszerűsített modell segítségével.

A modellek a hálózatok Jackson és Wolinsky (1996) által definiált párosan stabil (3. definíció) tulajdonságára épülnek. Felépítésük a következő: a pénzintézetek eszközeiket projektek finanszírozására használják. Alaphelyzetben minden pénzintézet csak egy projektet finanszíroz, azonban kockázataik diverzifikálása érdekében a pénzintézetek „elcserélik" egymással projektjeik meghatározott részét, így portfóliójukban végül többféle befektetés szerepel. Mivel feltevés szerint az egyes befektetések hozamai függetlenek, ez csökkenti a kockázatot. A pénzintézetek hálózata tehát a projektek cseréje révén alakul ki. Ugyanakkor a projektek cseréjének c „due diligence" költsége van, mivel a bankok csak saját projektjeiket ismerik, a többi projekt megismerése költséges. A rendszerben mindössze hat bank szerepel, $i = 1, 2...6$. A bankok forrásait a kontinuum számosságú, elhanyagolható méretű befektető biztosítja, két perióduson keresztül ($t = 0, 1, 2$). Hasonlóan Zawadowski (2011) modelljéhez, a finanszírozás itt is hosszú, illetve rövid távú is lehet, ez jelenti a különbséget a cikkben alkalmazott két modell között. Az elsőben a bankok forrásai hosszú távúak, azaz a befektetők két periódusra fektetik be pénzüket, a másodikban viszont a finanszírozás rövid távú, csak egy periódusra biztosított, a bankoknak a $t = 1$ időpontban meg kell újítaniuk forrásaikat.

Az egyszerűbb, hosszú távú modellben tehát a finanszírozásról a $t = 0$ időpontban döntenek a befektetők, és befektetésük két periódussal később, a $t = 2$ időpontban jár le. Az egyes befektetések két periódus alatti hozamát a $\theta_i = \{R_H, R_L\}$ valószínűségi változó írja le, ahol mindkét hozam $p = 1 - p = 1/2$ valószínűséggel realizálódik. A befektetők minimális hozamelvárása rögzített, r_f, és csak abban az esetben fektetik be pénzüket, ha várható hozamuk eléri ezt az elvárt szintet. A bankok ezt csak abban az esetben tudják kifizetni, amennyiben a befektetés magas hozamot (R_H) generál. Ekkor a bank nyeresége $R_H - r$, ahol r a befektetőknek ígért hozam, $r \geq r_f$. Egyébként a bank csődbe megy, a befektető az R_L hozam α százalékát kapja, $(1 - \alpha)R_L$ pedig a csőd költsége.

A bankok, kockázatuk csökkentése érdekében elcserélik egymás között befektetéseik bizonyos hányadát. A csere mindig kölcsönös, azaz a hálózatot leíró gráf irányítatlan. Azt, hogy az egyes bankok hány kapcsolatot létesítenek, a hálózat egyensúlyi voltából vezetik le a szerzők, melyet a Jackson és Wolinsky (1996) által definiált párosan stabil (3. definíció) fogalommal definiálnak. A cikkben a c „due diligence” költség úgy kerül meghatározásra, hogy egyensúlyban minden bank pontosan két kapcsolat létesítsen. Ilyen feltételek mellett kétféle hálózat alakulhat ki: egy kör, amely mind a hat bankot tartalmazza, vagy két kör, melyek egyaránt három-három bankból állnak. A modellben az utóbbi lesz a klasztereződött, előbbi pedig a nem klasztereződött hálózat.

A szerzők a rendszer „jóléte” alatt a bankok várható profitjának és a befektetők várható hozamának az összegét tekintik, és megmutatják, hogy a hosszú távú modellben (tehát amikor a befektetők két periódusra fektetik be pénzüket) a jólét a két lehetséges hálózatban megegyezik. Mivel minden egyes bank portfóliójában három befektetés szerepel, és feltevés szerint egy bank csak abban az esetben megy csődbe, ha minden, a portfóliójában található befektetés az alacsonyabb R_L hozamot hozza, a két hálózat kockázati szempontból sem különbözik.

A hosszú távú modell vizsgálata után a szerzők megvizsgálják a rendszerkockázat és a jólét alakulását rövid távú finanszírozás esetén is. Ekkor a bankok továbbra is két periódusra ruháznak be, a befektetők azonban a $t = 1$ időpontban döntenek arról, hogy megújítják-e befektetéseiket. Döntésüket egy a $t = 1$ időpontban megismert valószínűségi változó („hír”), $S = \{G, B\}$ alapján hozzák meg, ahol G azt jelzi, hogy minden bank szolvens lesz a második periódus végén, B pedig azt, hogy legalább egy bank csődbe megy, azt azonban nem tudni, hogy melyik lesz, illetve melyek lesznek ezek. A befektetők $t = 1$-ben eldöntik, hogy felveszik-e az addigi hozamot, vagy meghosszabbítják a befektetést egy évvel. Ha a bankok nem tudják forrásaikat megújítani, a $t = 1$ időpontban felszámolásra kerülnek, melynek eredményeként a befektetők megkapják a számukra ígért hozamot, a bankoknak viszont nem marad semmi. Amennyiben a bankoknak sikerül forrásaikat megújítani, a második periódus végén – az első modellhez hasonlóan – vagy csődbe mennek, vagy kifizetik befektetőiknek az ígért hozamot, a befektetésekből származó többlet pedig a profitjuk.

A rövid távú modellben azonban már számítani fog, hogy a két lehetséges hálózattípus közül melyik alakul ki. Ennek oka a következő: az S valószínűségi változó eloszlása, így a források megújításának valószínűsége a két hálózatban eltérő. Mivel a magas és az alacsony hozam bekövetkezési valószínűsége az egyes projekteknél egyaránt $1/2$, a klasztereződött hálózatban B, vagyis annak valószínűsége, hogy legalább egy bank csődbe megy $15/64$. Ugyanakkor ez a valószínűség a nem klaszteres hálózatban jóval magasabb, $25/64$. Ez meglehetősen egyszerűen levezethető, aminek az oka az, hogy az első hálózatban a két körön belül a bankok egyszerre mennek csődbe vagy maradnak szolvensek, hiszen a körön belül minden banknak megegyezik a portfóliója. A második hálózatban azonban a portfóliók minden egyes bank esetén különbözőek, így itt az is lehetséges, hogy csak egy vagy két bank lesz inszolvens. Ugyanakkor, a modell speciális feltevései miatt pont ebben a hálózatban lesz nagyobb a rossz jel, B, így a források meg nem újításának a valószínűsége. A szerzők tehát arra mutatnak rá, hogy amennyiben a források megújítása nem biztosított – ahogyan ez a valóságban is jellemző –, a rendszerkockázat nagyban függ a hálózat struktúrájától. A klasztereződés a modell feltevései mellett csökkenti a rendszerkockázatot, jóléti hatása azonban már nem egyértelmű. Ezt vizsgálva a szerzők azt találják, hogy az a csőd költségétől, vagyis az α együttható nagyságától függ, és létezik olyan tartomány is, ahol a klasztereződött, és olyan is, ahol a nem klasztereződött hálózatban nagyobb a jólét, valamint olyan eset is előfordul, ahol a kettő megegyezik.

A cikkben bemutatott modellek speciális feltételek mellett mutatják be, hogy a pénzügyi intézmények hálózatának struktúrája hogyan hat a teljes rendszer kockázatára. Bár a modellek valóban meglehetősen leegyszerűsítettek, és a rövid távú modellben az S jel interpretációja sem kézenfekvő, úgy gondoljuk, a cikk hozzájárulása jelentős az elméleti és az empirikus irodalom összekapcsolásához.

3.3. Pénzügyi hálózatok: egyensúlyozás diverzifikáció és fertőzés között

Elliott et al. (2011) folyamatban lévő munkatanulmánya az előző fejezethez hasonló kérdéseket vizsgál. Minél inkább diverzifikálnak (egymást tulajdonolják) a bankok, annál nagyobb az esélye a bedőlések továbbterjedésének, a fertőzésnek. Modelljükben alaposan megvizsgálják annak a következményét, hogy a bankok értéke nem folytonosan változik. Ha eszközeinek értéke egy bizonyos szint alá esik, akkor ugyanis bedől a bank, ami további hatással lehet a többi bankra. Modelljük a következő.

Tegyük fel, hogy van n bank, az i-edik bank értékét jelölje x_i. A bankok különböző pénzügyi eszközökbe ($z_k, k \in \{1, \dots, K\}$) és egymás részvényeibe fektethetnek. Az i-edik bank a k-adik eszköz $D_{ik} \leq 1$ részét, a j-edik banknak pedig a C_{ij} részét birtokolja (akár azok részvényein, hitelein vagy CDS-ein keresztül).

Ha az i-edik bank értéke egy $\underline{x}_i$ küszöb alá esik, akkor az csődbe megy és β_i csődköltséget szenved el. Az i-edik bank értéke tehát így írható le:

$$x_i = \sum_{j \neq i} C_{ij} x_j - \sum_{j \neq i} C_{ji} x_i + \sum_k D_{ik} z_k - \beta_i \cdot 1_{x_i \leq \underline{x}_i}, \tag{3}$$

ahol β_i a nem folytonos csődköltség, amely akkor jelentkezik, ha az i-edik bank értéke x_i alá esik.

A (3) egyenlet mátrix formában így írható fel:

$$x = (C - \hat{C})x - (I - \hat{C})x + Dz - \beta(x), \tag{4}$$

ahol C $n \times n$-es mátrix, $\hat{C}$ az átlójában a C_{ii} elemeket tartalmazza (egyébként nullát), D pedig $n \times K$-s mátrix, elemei a D_{ik} arányok, és a $\beta(x)$ vektor i-edik eleme $\beta_i \cdot 1_{x_i \le \underline{x}_i}$. Ekkor (4) megoldása:

$$x = (2I - C)^{-1}(Dz - \beta(x)). \tag{5}$$

Mivel (5) egy fixpont-feltétel, ezért több megoldása is lehet. Előfordulhat, hogy az egyik megoldásban az i-edik bank csődbe megy, a másikban pedig nem, mégis konzisztensek a bankok értékei. Ez a többszörös egyensúly arra hívja fel a figyelmet, hogy fontosak a befektetők várakozásai és lehetségesek a bankrohamok.

Elliott et al. (2011) megjegyzik, hogy az (5)-beli csődkorlátokat egy olyan hálózati mérőszám ragadja meg, amely kapcsolódik a sajátérték centralitáshoz (eigenvector centrality). Az is kijön a modelljükből, hogy ha a bankok nagyobb arányban birtokolják egymást, akkor nő a kockázatmegosztás, kivéve amikor a csődkorlátokba ütköznek. Egy példán bemutatják, hogy ha a fertőzések veszélyét is figyelembe vesszük, akkor a hatékony birtoklási arány kisebb, vagyis átváltás van a diverzifikáció és a fertőzés között.

3.4. Kockázatmegosztás hálózatokban

Bramoullé és Kranton (2007) a kockázatmegosztás-fertőzés párosból az elsőre koncentrálnak. A szociológiai kiindulópontú cikk alanyai olyan háztartások, amelyek elfelezik a jövőbeli, bizonytalan együttes jövedelmüket, így informális biztosítást nyújtanak egymásnak. Jellemzően a fejlődő országok falvainak rokoni-baráti kapcsolatait vizsgálják ilyen módszerekkel, de elképzelhető, hogy ez a modell használható olyan helyzetben is, amikor több biztosító együttesen biztosít egy nagyobb vállalatot.

A szociológiai példánál maradva a szerzők felteszik, hogy nincsenek formális biztosítások, és egyszerre csak két fél tud olyan informális megállapodást kötni, hogy az alapján elfelezzék a jövőbeli, bizonytalan együttes jövedelmüket. A megállapodásokat a felek automatikusan betartják (mert például házasság jött létre a két háztartás között), de azok költségesek (például az esküvő explicit és implicit költségei). Modelljük a következő.

Az egyének halmazát jelöljük V-vel, a köztük lévő éleket E-vel. A társadalomban $v = |V|$ egyén van, akik kockázatkerülőek és bizonytalan a jövőbeli jövedelmük. Az i-edik egyén jövedelmét az y_i valószínűségi változó írja le, a jövedelmek függetlenek és azonos eloszlásúak, $\bar{y}$ várható értékkel és σ^2 varianciával. Tekintsük az egyének egy $G = (V, E)$ hálózatát. Ahogy már említettük, két egyén csak akkor adhat egymásnak pénzt, ha előzőleg megállapodtak, vagyis van köztük él. Az él létrehozásának költsége fejenként $c > 0$. Az alapmodellben a megállapodott felek egyenlően osztoznak jövedelmükön, és a páros megállapodások ellenére annyiszor osztozkodnak, amíg a keletkezett $G = (V, E)$ gráf adott komponensében mindenkinek azonos nem lesz a jövedelme. Ha egy komponensben s egyén van összekötve, akkor egyéni várható hasznosság függvényük $u(s)$, ahol a szerzők felteszik, hogy minden s-re

$$u(s+1) > u(s) \text{ és } u(s+2) - u(s+1) < u(s+1) - u(s), \tag{6}$$

vagyis minél többen osztoznak a bizonytalan jövedelem kockázatán, annál nagyobb lesz az egy főre jutó hasznosság, de a létszámnövekedésből eredő határhaszon szigorúan csökkenő.

Jelölje $s_i(G)$, $i = 1, \ldots, k$, a G gráf i-edik komponensének nagyságát (csúcsainak számát), g_{ij}, $i, j = 1, \ldots, v$ pedig legyen 1, ha i és j között van él (megállapodás), egyébként legyen nulla. Ekkor a komponens additív (7. definíció) értékelőfüggvény a következő:

$$v(G) = \sum_{i=1}^{k} s_i(G) u(s_i(G)) - c \sum_{i=1}^{v} (\sum_{j=1}^{v} g_{ij}), \tag{7}$$

vagyis a felek az összes várható hasznosságon és a mindenki által fizetett c költségen osztozkodnak. A komponensen belüli egyenlő osztozkodás miatt a $\psi : \Gamma^V \times \mathscr{G}^V \to \mathbb{R}^V$ megoldás az i-edik egyénnek a következőt adja:

$$\psi_i = u(s_l(G)) - c \sum_{j=1}^{v} g_{ij}, \tag{8}$$

ahol az i-edik egyén az l-edik komponensben van és megkapja a várható hasznosságát, valamint kifizeti a belőle kifutó élek költségét.

A párosan stabil (3. definíció) gráfok definiálása után a szerzők belátják, hogy (Ibid., Proposition 3) ha van párosan stabil gráf, akkor annak minden komponense a lehető legkevesebb éllel kapcsolódik ($s_i(G) - 1$). Ugyanakkor megjegyzik, hogy előfordulhatnak olyan $c_1 > c_2 > c_3$ költségek, amelyeknél c_1 és c_3 esetén van párosan stabil gráf, c_2 esetén viszont nincs. A költségek csökkentésének ugyanis kettős hatása van. Egyrészt, olcsóbb egy periférikus egyénnel (akinek még nincs éle) élt kialakítani, ami növeli a legnagyobb komponens nagyságát. Másrészt, két komponens között is olcsóbb kapcsolatot létesíteni, ami csökkenti a kisebb komponens(ek) maximális nagyságát. Végül a statikus elemzést azzal zárják, hogy rámutatnak a stabilitás és a hatékonyság közötti szokásos ellentétre (az 1. tétel szellemében).

Bramoullé és Kranton (2007) a dinamikus modellben a fejlesztő út (9. definíció) és a kör (10. definíció) definiálása után belátja, hogy (Ibid., Proposition 5) ha van a modellben párosan stabil hálózat, akkor nincsenek zárt körök, valamint (Ibid., Proposition 6) ha nincs párosan stabil hálózat, akkor van egy egyértelmű C kör, a lehető legkevesebb éllel összekötve. A sztochasztikus modellt a szerzők nem vizsgálják, ehelyett két másik modellváltozatot vizsgálnak. Az egyikben az egyének kompenzálhatóak az élek létrehozása miatt

(Bloch és Jackson (2007) szellemében), a másikban az élköltséget jövedelemnek tekintik az egyének.

További kutatási irányként megemlítik, hogy ha a páros kockázatelosztás nem végtelenszer történik meg, akkor nem lesz egyenletes a komponenseken belüli jövedelemelosztás, így számít, hogy ki hol foglal helyet a hálózatban. Az is bonyolíthatja a helyzetet, ha valamennyi jövedelem elfogyasztható, mielőtt az egyének segítenek egymásnak. Ezekben az esetekben már azt várják a szerzők, hogy (a biztonság kedvéért) a minimálisnál több él is lesz egy párosan stabil hálózatban.

3.5. A világ tőzsdéinek rangsorolása hálózatelméleti keretek között

Cetorelli és Peristiani (2009) a társadalmi hálózatok vizsgálatának módszertanát alkalmazzák arra, hogy elemezzék a világ egyes tőzsdéinek fontosságát, és a nemzetközi pénzügyi hálózatban betöltött szerepét. Bár a szerzők nem használnak szofisztikáltabb modelleket, a cikk jól példázza, hogy miként alkalmazható a társadalmi hálózatok elemzésének eszközrendszere a pénzügyekben. Közismert, hogy az Amerikai Egyesült Államokban működő tőzsdék a világ tőkepiacainak központját jelentik. Ugyanakkor a közelmúltban egyre többet hallani az amerikai tőzsdék jelentőségének csökkenéséről, például az európai egységes piac létrejöttének, vagy a kínai gazdaság liberalizálásának köszönhetően. A szerzők a cikkben 45 tőzsdét vetnek össze a társadalmi hálózatok elemzésének eszközeivel. A vizsgálat a kibocsátott IPO-k volumene, vagyis az első nyilvános részvénykibocsátások során bevont tőke nagysága alapján történik, 1990 és 2006 közötti adatok felhasználásával.

A cikk három, a társadalmi hálózatok elemzésében jól ismert mérőszám alapján veti össze a különböző országokban működő tőzsdéket. Az első a fok centralitás („degree centrality"), melyet a befok („in-degree") és a kifok („out-degree") mértékekkel mérnek a szerzők, ahol az előbbi az adott tőzsdén külföldi vállalatok által kibocsátott IPO-k volumenét, utóbbi pedig azokét jelenti, amelyeket az adott országban működő vállalatok külföldi tőzsdékre vittek. A hálózatot mátrix formában felírva jelölje az $N \times N$-es mátrix x_{ij} cellája az i országban bejegyzett vállalatok j ország tőzsdéjén kibocsátott IPO-inak a volumenét. Ekkor a befok mutató egyszerűen $P_d^{in}(n_i) = \sum_{j \neq i} x_{ji}$, a kifok pedig $P_d^{out}(n_i) = \sum_{i \neq j} x_{ij}$, ahol i-vel a hálózat csomópontjait, azaz az egyes tőzsdéket jelöljük. A köztesség index („betweenness index") a tőzsdék közvetítő szerepének fontosságát vizsgálja. A fenti mátrixreprezentáció mellett azt számszerűsíti, hogy bármely két n_j és n_k tőzsde közötti összes lehetséges útvonal (IPO áramlás), mekkora m_{jk} hányada halad át a vizsgált n_i tőzsdén, $m_{jk}(n_i)$. Ezt összegezve minden j-re és k-ra, megkapjuk n_i köztesség indexét: $P_b(n_i) = \sum_j \sum_k m_{jk}(n_i)/m_{jk}$. Az utolsó és talán legfontosabb vizsgált mutató a presztízs index („prestige index"), amely a tőzsdéket azok hálózatban betöltött szerepe, fontossága alapján rangsorolja. Egy adott tőzsdének annál magasabb a presztízs indexe, minél több ország vállalatai választják azt IPO kibocsátásuk helyszínéül, illetve minél magasabb presztízs indexszel rendelkező országokból érkeznek ezek a vállalatok. A presztízs indexeket így egy N egyenletből álló és N ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldása adja.

A szerzők azt találják, hogy bár az egyszerű aggregált volumeneket számszerűsítő befok és kifok mutatók alapján az Egyesült Államok tőzsdéinek vezető szerepe valóban megkérdőjelezhetővé vált 2006-ra (a befok mutató alapján a német és hongkongi tőzsde is megelőzte), a hálózat struktúráját jobban megragadó köztesség és presztízs indexek alapján az USA tőzsdéinek vezető szerepe továbbra is megkérdőjelezhetetlen.

Köszönetnyilvánítás:
Csóka Péter köszöni a TÁMOP/4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0005 projekt és a Befektetések és Vállalati Pénzügyi Tanszék Alapítványa támogatását.
Pintér Miklós kutatásait az OTKA K-101224 pályázat és az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíja támogatta.

Hivatkozások

Allen, F., Babus, A., Carletti, E. (2010). Financial Connections and Systemic Risk. *Working Paper*, http://www.nber.org/papers/w16177.pdf.

Bloch, F., Jackson, M. O. (2007). The formation of networks with transfers among players. *Journal of Economic Theory*, 133(1):83–110.

Bramoullé, Y., Kranton, R. (2007). Risk-sharing networks. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 64(3-4):275–294.

Cetorelli, N., Peristiani, S. (2009). Prestigious stock exchanges: a network analysis of international financial centers. *Working Paper*, http://www.newyorkfed.org/research/staff_ reports/sr384.pdf.

Charness, G., Jackson, M. (2007). Group play in games and the role of consent in network formation. *Journal of Economic Theory*, 136(1):417–445.

Corbae, D., Duffy, J. (2008). Experiments with network formation. *Games and Economic Behavior*, 64(1):81–120.

Dutta, B., Ghosal, S., Ray, D. (2005). Farsighted network formation. *Journal of Economic Theory*, 122(2):143–164.

Elliott, M., Golub, B., Jackson, M. (2011). Financial networks: A tradeoff between diversification and contagions. *Working Paper*, http://ces.univ-paris1.fr/CTN17/pdf/CTN17-papers/Elliott.pdf.

Galeotti, A., Goyal, S., Kamphorst, J. (2006). Network formation with heterogeneous players. *Games and Economic Behavior*, 54(2):353–372.

Herings, P., Mauleon, A., Vannetelbosch, V. (2009). Farsightedly stable networks. *Games and Economic Behavior*, 67(2):526–541.

Jackson, M., van den Nouweland, A. (2005). Strongly stable networks. *Games and Economic Behavior*, 51(2):420–444.

Jackson, M., Watts, A. (2002). The evolution of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, 106(2):265–295.

Jackson, M., Wolinsky, A. (1996). A strategic model of social and economic networks. *Journal of Economic Theory*, 71(1):44–74.

Zawadowski, A. (2011). Entangled financial systems. *Boston University School of Management Research Paper*, No. 2011-2.