

DOBOS Imre

# VÁLLALATOK EGY NEUMANN-TÍPUSÚ GAZDASÁGBAN

**A dolgozat a klasszikusnak tekinthető Neumann-féle növekedési modell egy új alapra helyezését tartalmazza. Az eredeti Neumann-modellben expliciten vállalatok nem szerepelnek, csak technológiák vagy eljárások. A dolgozat egy olyan Neumann-típusú modellt vizsgál, amelyben az egyes technológiáknak vállalatokat feleltet meg, és azt vizsgálja, hogy ilyen feltételezés mellett egy ilyen gazdaságban léteznek-e olyan megoldások, amelyek mellett a vállalatok maximalizálják a nyereségüket. Ennek vizsgálata közben arra az eredményre juthatunk, hogy erre az esetre a klasszikus Neumann-modell által feltételezett nempozitív nyereséget felül kell vizsgálni, ami a klasszikus matematikai közgazdaságtan dualitáson alapuló alapfeltételezése.**

*Kulcsszavak:* Neumann-modell, növekedési modell, optimalizálás, matematikai programozás

A Neumann-modellt tekintik ma a növekedési és egyensúlyelméletek egyik előfutárának. Ugyanakkor ez a modell felfogható úgy is, mint a Koopmans (1951) által kifejlesztett lineáris tevékenységelemzés dinamikus változata. A modell széles körben kutatott nemcsak az angolszász világban, hanem a magyar matematikai közgazdaságtanban is, csak néhány dolgozatot említve: Medvegyev (1984), Móczár (1995), Móczár (1997), Zalai (1999), Zalai (2004)<sup>1</sup>.

A klasszikus Neumann-modell gazdaságában  $n$  terméket állítanak elő  $m$  különböző eljárás vagy technológia segítségével. A modell Neumann János által adott interpretációjában nem deríthető ki, hogy az eljárásokhoz vállalatokat vagy ipari ágazatokat lehet-e rendelni, netán több eljárás testesíti meg a vállalatokat. Amint az a modellből is kitűnik, az eljárások csak nempozitív nyereség mellett működhetnek. Ez a vállalati gyakorlattal és a vállalat-gazdaságtanban oktattakkal ellentétesnek tűnik. A vállalat-gazdaságtan vállalatai nem létezhetnek középtávon (pozitív) nyereség nélkül, mert különben csődbe jutnak.

A dolgozat célja ezért az, hogy a klasszikus Neumann-modell egyes feltételezéseit megtartva egy új, más értelmezést adjon a bemutatandó modellnek. Az új értelmezésben tételezzük fel, hogy a technológiák vállalatokat testesítenek meg. Arra építjük a módosított modell ezen értelmezését, hogy egy eljáráshoz egy vállalat rendelhető. Ekkor a vállalatok ikertermékeket állíthatnak elő. Azt a modellváltozatot, amikor csak egy

termék állítható elő az adott technológiával, Leontief-Neumann-modellnek nevezik.

A dolgozat az alábbi részekből áll. A következő részben a Neumann-modell egy dinamikus változatát mutatjuk be, aminek a stacionárius esetét, azaz egyensúlyi helyzetét vizsgálta Neumann (1945), majd Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) gazdaságilag racionális feltételekkel bővítette azt ki. Ezen az eredeti modellen mutatjuk meg, hogy ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy egy eljárás egy vállalatnak feleltethető meg, akkor a nempozitív nyereség feltételezése esetén a vállalatok nyereségüket akkor is maximalizálhatnák, ha nem termelnének semmit. Ugyanakkor az így előálló zérus optimális kumulált nyereséget a modell klasszikus neumann megoldása is garantálja, tehát a megoldások halmaza egy konvex halmaz. Ezért a nempozitív nyereség feltételezést helyettesítjük a nemnegatív nyereség feltevésével, amennyiben az eljárásokat vállalatnak (ágazatnak) tekintjük, mert az a gazdaság tevékenységeinek megszüntetését is jelenthetné, ha az optimális megoldások halmazából a vállalatok a semmittevés stratégiáját választanák. A harmadik fejezetben az átfogalmazott modellt vizsgáljuk. Amennyiben az eljárások vállalatoknak felelnek meg, akkor is azt kérdezhettük, hogy milyen termelési szintek és árak mellett lesz a gazdaság egyensúlyban. Ennek a kérdésnek a megválaszolásához egy játékelméleti modellt választunk és röviden érintjük a modell megoldhatóságát. Végül összegezzük az eredményeket.

## A Neumann-modell dinamikus változata és annak átfogalmazása

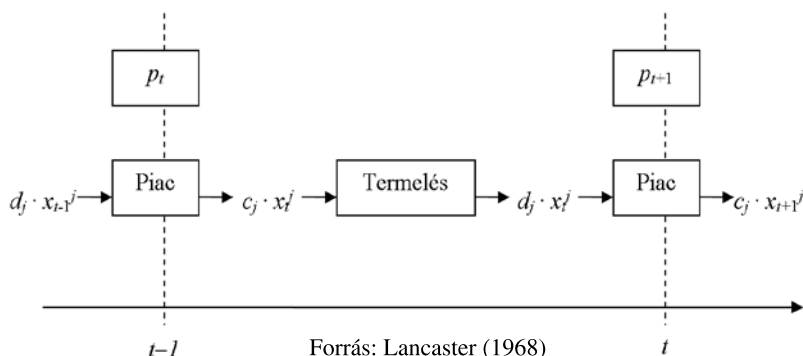
Ebben a részben egészen bemutatjuk a Neumann-modellt. E dolgozatban nem célunk a Neumann-modell didaktikus bemutatása, azt Zalai (1999) dolgozatában aprólékosan megtette. A modell bemutatásakor nem a stacionárius, egyensúlyi megoldásból indulunk ki, hanem a turnpíke-elméletben (Dorfman – Samuelson – Sollow [1958]) alkalmazott dinamikus lineáris programozási feladat megoldásából. E megoldás alapján azt vizsgáljuk, hogy vajon a Neumann-modell megoldása utat enged-e annak a megfeleltetésnek, hogy egy eljárás egy vállalatot takar.

### A Neumann-modell rövid összefoglalása

A modell dinamikus változatát Asmanov (1984) munkája alapján ismertetjük. A modell alapmátrixait a Hegedűs és Zalai (1978) könyvében található mátrixos jelölésekkel ismertetjük, a Neumann által használt hagyományosabb jelöléssel szemben.

A modell alapfeltételezései között szerepel, hogy a  $j$ -ik technológia egységnyi szintű alkalmazásához  $c_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})$  nagyságú induló készletre van szükség a termékekből, míg a termelési periódus végén egységnyi szintű alkalmazás esetén  $d_j = (d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{nj})$  készlet áll rendelkezésre a piaci csereére. A  $j$ -ik technológia input-output összefüggéseit tehát a  $(c_j, d_j)$  vektorpárral szemléltethetjük. A vektorok  $n$  dimenziósak, vagyis a gazdaságban  $n$  számú termék van, míg az eljárások száma  $m$ . Ha a  $j$ -ik technológia alkalmazási szintje a  $t$ -ik periódusban  $x_t^j$ , akkor az eljárás induló készlete  $c_j \cdot x_t^j$  és a periódus zárókészlete  $d_j \cdot x_t^j$ . Az eljárással előállított, és piacon értékesíthető termékek mennyisége tehát  $d_j \cdot x_t^j$ . A  $t$ -ik termelési periódus végén, a  $t$ -ik időpontban zajlik le a piaci csere az ott kialakuló áron, amelyet a  $p_{t+1} = (p_{t+1}^1, p_{t+1}^2, \dots, p_{t+1}^n)$  nemnegatív  $n$  elemű vektorral jelölünk. Az anyagáramlást a technológiák szempontjából az 1. ábra szemlélteti.

A Neumann-modell dinamikája a  $j$ -ik eljárásra



Forrás: Lancaster (1968)

Foglaljuk most össze a gazdaságra az egyensúlyi feltételeket. A természetes egyensúly feltétele a  $t$ -ik időpontban az, hogy a piacra vitt termékek készlete a csere után nem lehet nagyobb, mint a csere előtt az egész gazdaságban, vagyis  $D \cdot x_{t-1} - C \cdot x_t \geq 0$ , ahol  $C = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{mj})$  és  $D = (d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{mj})$  a technológiák egységnyi input és output készletének mátrixa. Az  $x_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^m)$  vektor a termelési szintek  $m$  dimenziós vektorát jelöli a  $t$ -ik periódusban. A nempozitív nyereségre pedig a  $p_{t+1} \cdot D - p_t \cdot C \leq 0$  összefüggés írható fel. Ha feltesszük, hogy a gazdaság tervezési időhorizontja  $T$ , akkor az induló készletek állománya  $D \cdot x_0$ , míg a terminális árbevétel összértéke  $p_{T+1} \cdot D \cdot x_T$  kell, hogy legyen, ahol az  $x_0$  kezdeti termelési szint és a  $p_{T+1}$  végső árrendszer adottak. Ezenkívül a Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) által javasolt feltételeket a modellhez csatoljuk, ami azt jelenti, hogy minden termék szükséges legalább egy másik termék előállításához:  $I \cdot C > 0$ , valamint minden termék előállítható legalább egy eljárással:  $D \cdot I > 0$ , ahol az  $I = (1, 1, \dots, 1)$  az összegző vektort jelöli.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy az előzőekben intuitívan kapott egyensúlyi feltételek egy lineáris programozási feladat primális és duális párjainak felel meg. A programozási feladat primális oldala a következő (1)-(4) feladat:

$$x_t \geq 0, (t = 1, 2, \dots, T), \tag{1}$$

$$C \cdot x_t \leq D \cdot x_{t-1}, \tag{2}$$

$$-D \cdot x_{t-1} + C \cdot x_t \leq 0, (t = 2, 3, \dots, T), \tag{3}$$

$$p_{T+1} \cdot D \cdot x_T \rightarrow \max. \tag{4}$$

Ez a feladat később a turnpíke elméletek kiindulópontja volt, amely Dorfman, Samuelson és Solow (1958) munkájában található meg. Ezek szerint, ha  $T$  elég nagy, akkor az optimális pálya a Neumann-sugarhoz esik elég közel. (A Neumann-sugarat a következő bekezdésekben definiáljuk.)

1. ábra A fenti feladat (5)-(8) duálisát az alábbi módon írhatjuk fel:

$$p_t \geq 0, (t = 1, 2, \dots, T), \tag{5}$$

$$p_t \cdot C - p_{t+1} \cdot D \geq 0, (t = 1, 2, \dots, T), \tag{6}$$

$$p_T \cdot C \geq p_{T+1} \cdot D, \tag{7}$$

$$p_1 \cdot D \cdot x_0 \rightarrow \min. \tag{8}$$

A két lineáris programozási feladat megoldható, mivel a  $C$  és  $D$  mátrixokra tett feltételek biztosítják egyrészt a primális feladat lehetséges megoldásainak halmaza korlátosságát, másrészt a duális feladat lehetséges megoldásainak

halmaza alulról korlátosságát. Az optimális  $(x_t^o, p_t^o)_{t=1}^T$  vektorpároknak ki kell elégíteniük a következő egyenlőségeket:

$$p_t^o \cdot (C \cdot x_t^o - D \cdot x_{t-1}^o) = 0, \quad (9)$$

$$(p_t^o \cdot C - p_{t+1}^o \cdot D) \cdot x_t^o = 0. \quad (10)$$

Vegyük most a probléma stacionárius megoldását, vagyis legyen  $x_{t+1} = \alpha \cdot x_t$ , valamint  $p_{t+1} = \beta \cdot p_t$ , akkor a stacionárius pályának ki kell elégítenie a

$$D \cdot x^e \geq \alpha^e \cdot C \cdot x^e, \quad (11)$$

$$p^e \cdot D \cdot x^e = \alpha^e \cdot p^e \cdot C \cdot x^e, \quad (12)$$

$$p^e \cdot C \geq \beta^e \cdot p^e \cdot D, \quad (13)$$

$$p^e \cdot C \cdot x^e = \beta^e \cdot p^e \cdot D \cdot x^e, \quad (14)$$

$$p^e \cdot C \cdot x^e > 0 \quad (15)$$

összefüggésrendszer, ami a Neumann-modell egyensúlyi helyzeteit foglalja össze. Az  $x$  és  $p$  vektorok nemnegatívak. A (11)-(15) egy egyensúlyi pályáját a  $(\alpha^e, x^e, \beta^e, p^e)$  négyessel írhatjuk le, amit *Neumann-sugárnak* neveznek. Ezekből a pályákból keressük a legnagyobb  $\alpha^e$ -t tartalmazó növekedési pályákat. A (11)-(15) modell egyensúlyi pályáinak létezésével nem foglalkozunk, az érdeklődő olvasó annak bizonyítását megtalálja pl. Hegedűs és Zalai (1978) könyvében.

### Lehet-e a klasszikus Neumann-modellben vállalat egy eljárás?

Most áttérünk annak a vizsgálatára, hogy mi történhet akkor, ha az eljárásokat vállalatoknak tekintjük, és ezzel folytatjuk elemzésünket. Ekkor a Neumann-féle gazdaságban fellelhető nempozitív nyereség feltételezését fel kell oldani, mert a vállalat-gazdaságban a nempozitív nyereség a vállalat megszűnéséhez vezethet, amint azt a következő példa mutatja. Előbb vizsgáljuk a vállalat működését, amit most azonosítunk a klasszikus Neumann-modell egy-egy eljárásával.

Az egyes vállalatok termékeit feloszthatjuk aszerint, hogy nyersanyagról, alapanyagról van-e szó, vagy végtermékről. Ezt a következő módon szemléltethetjük a  $j$ -ik vállalat esetén. Az  $i$ -k termék végtermék, azaz a piacon értékesíthető termék, ha  $d_{ij} > c_{ij}$ . Ugyanakkor egy másik,  $k$ -ik termék nyersanyag, ha  $d_{kj} \leq c_{kj}$ . Így a  $j$ -ik eljárással előállított termékek mennyisége a  $t$ -ik periódusban, ahol  $i$  végterméket jelöl  $(d_{ij} - c_{ij}) \cdot x_t^j > 0$ , míg a felhasználás  $(c_{kj} - d_{kj}) \cdot x_t^j \leq 0$  a  $k$ -ik nyersanyag esetén. Itt azzal a feltételezéssel élhetünk, hogy a készletváltozást azonosítjuk a termeléssel és a termelőfelhasználással. Mivel a modell csak stock (állomány) jellegű mutatókat tartalmaz, ezért a flow (folyam) mutatókat a készletadatokból kell meghatároznunk.

A piacon az eljáráshoz, termeléshez felhasznált (így megsemmisített) terméket kell beszerezni, pl. a  $t$ -ik időpontban az  $k$ -ik termék esetén  $c_{kj} \cdot x_t^j - d_{kj} \cdot x_{t-1}^j \geq 0$  nagyságban. Ezzel a mennyiséggel növekszik az eljárás lefolytatásához a következő periódusban rendelkezésre álló készletek mennyisége. Ugyanezen időpontban az értékesítés mennyisége  $d_{ij} \cdot x_{t-1}^j - c_{ij} \cdot x_t^j > 0$ . Ez a folyamatot a készletek csökkenését szemlélteti. Újra meg kell jegyeznünk, hogy a csere esetén is stock adatokból kell flow információkat előállítanunk. Ezzel az eljárással két tevékenységre bontottuk a Neumann-modellben megadott folyamatokat: termelésre és piaci cserére.

Az előbb bemutatott összefüggéseket a készletgazdálkodásból ismert stock-flow (állomány-folyam) egyenletek segítségével is szemléltethetjük:

$$d_j \cdot x_t^j = d_j \cdot x_{t-1}^j + (d_j - c_j) \cdot x_t^j - (d_j - x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j), \quad (16)$$

$(t = 1, 2, \dots, T).$

A vállalat a termelési folyamat során  $(d_j - c_j) \cdot x_t^j$  mennyiségű terméket állít elő, illetve semmisít meg az előbbi bekezdésekben meghatározott értelemben, míg a piaci csere során  $d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j$  nagyságú terméket értékesít, vagy szerez be a termelés folytatásához.

A vizsgált vállalat által elért piaci bevétel-kiadást a  $t$ -ik időpontban a  $p_t \cdot (d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j)$  kifejezéssel írhatjuk le, ahol  $p_t = (p_t^1, p_t^2, \dots, p_t^n)$  vektor az árak  $n$  dimenziós vektora a  $t$ -ik időpontban. Ez csak a piaci árbevétel, de nem a nyereség. A nyereséget az egyes periódusokra értelmezhetjük, ami a  $t$ -ik periódusra  $p_{t+1} \cdot d_j \cdot x_t^j - p_t \cdot d_j \cdot x_{t-1}^j$ . Ezt azért írhatjuk ebben a formában, mert két időszak „mérlegfőösszege” közötti különbség lesz az eredménykimutatásban szereplő nyereség vagy veszteség a vállalat számára, amint az a vállalati számvitelben szerepel. Alakítsuk ezt az összefüggést tovább az alábbi módon, a (16) egyenletrendszerrel beszorozva:

$$p_{t+1} \cdot d_j \cdot x_t^j - p_t \cdot d_j \cdot x_{t-1}^j = (p_{t+1} - p_t) \cdot d_j \cdot x_t^j + p_t \cdot (d_j - c_j) \cdot x_t^j - p_t \cdot (d_j - x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j).$$

Ez azt mutatja, hogy a nyereség három részből áll, amelyek

– a Bródy (1980) által is leírt papírprofit:

$$(p_{t+1} - p_t) \cdot d_j \cdot x_t^j,$$

– a termelési tevékenység során képződő „belső” nyereség:  $p_t \cdot (d_j - c_j) \cdot x_t^j$ , és

– a piaci csere során kialakult áru-pénz egyenlege (árbevétel):  $p_t \cdot (c_j \cdot x_t^j - d_j \cdot x_{t-1}^j)$ .

Az eredeti Neumann-modellben az eljárások nyeresége nempozitív, tehát  $p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j \leq 0$ .

Ezek után tételezzük fel, hogy az így megalkotott vállalat célja az árbevétel/ráfordítás maximalizálása a tervezési időhorizonton. Feltesszük azt is, hogy az árak egy adott  $T$  időhorizonton belül adottak, és az (5)-(8) lineáris programozási feladat optimális megoldásával egyeznek meg. Nem foglalkozunk azzal, hogy milyen mechanizmus alakítja ki az optimális, egyensúlyi árakat, amit  $p_t^o$ -vel jelölünk,  $t = 1, 2, \dots, T$ . A vállalat kumulált árbevétel-függvénye a vizsgált tervezési horizonton a következő alakot ölti:

$$\sum_{t=1}^T p_t^o \cdot (d_j \cdot x_{t-1}^j - c_j \cdot x_t^j) + p_{T+1} \cdot d_j \cdot x_T^j = \sum_{t=1}^T (p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j) \cdot x_t^j + p_1^o \cdot d_j \cdot x_0^j. \quad (17)$$

A vállalat célja tehát olyan termelési szintek kiválasztása, amely mellett az árbevétel maximális lesz, természetesen adott árak mellett. Tegyük még egy feltételezést, ami az egyensúlyi naturális feltételéből következik:

$$-d_j \cdot x_{t-1}^j + c_j \cdot x_t^j \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (d_k \cdot x_{t-1}^{k0} - c_k \cdot x_t^{k0}), \quad (t = 1, 2, \dots, T), \quad (18)$$

ami azt jelenti, hogy a piaci csere korlátozza a vállalat által beszerzett és eladott áruk mennyiségét, ahol  $x_t^{k0}$  az (1)-(4) modell optimális megoldása. Mindez azt is jelenti, hogy a vállalat maximális árbevétele függ a többi vállalat által értékesített és beszerzett termékek mennyiségétől. Itt feltesszük, hogy a vállalat számára ismertek a más vállalatok által piacon realizált egyensúlyi mennyiségek.

A (17) és (18) feltételezések felhasználásával a (19)-(22) lineáris programozási feladatot definiáltuk, amely a következő formában írható fel:

$$x_t^j \geq 0, \quad (t = 1, 2, \dots, T) \quad (19)$$

$$c_j \cdot x_1^j \leq d_j \cdot x_0^j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (d_k \cdot x_0^{k0} - c_k \cdot x_1^{k0}) \quad (20)$$

$$-d_j \cdot x_{t-1}^j + c_j \cdot x_t^j \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (d_k \cdot x_{t-1}^{k0} - c_k \cdot x_t^{k0}), \quad (t = 2, 3, \dots, T) \quad (21)$$

$$\sum_{t=1}^T (p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j) \cdot x_t^j \rightarrow \max. \quad (22)$$

A probléma megoldása könnyen megadható, ugyanis ha nempozitív az árbevétel, vagyis  $p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j \leq 0$ , akkor az optimális termelési szint minden periódusban zérus, azaz  $x_t^{j0} = 0$ , ( $t = 1, 2, \dots, T$ ) is lehet. Ezt szekvenciálisan láthatjuk be, a bizonyítást a függelék tartalmazza. Ugyanakkor a cél-függvény (17) összefüggésnek megfelelő átalakítása során látható, hogy a (10) egyenlőség teljesülése miatt a neumann megoldás,

azaz az (5)-(8) lineáris programozási feladat megoldása is adja a zérus nyereséget. Mindez azzal a következménnyel járhat, hogy el kell vetni a nempozitív nyereség feltételezését ebben a modellben, vagyis akkor, ha az eljárásokat vállalatoknak, ágazatoknak tekintjük.

A továbbiakban feltételezzük, hogy nemnegatív nyereség fordulhat elő:

$$p_{t+1} \cdot d_j - p_t \cdot c_j \leq 0, \quad (t = 1, 2, \dots, T), \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Ez a feltételezés azt mondja ki, hogy egységnyi szintű működés esetén a  $t$ -ik periódusra a termelési időszak végi készlet értékének nagyobbak kell lennie, mint az inputként szereplő készletek értéke. Ha ezt a feltételt nem tennénk meg, akkor a nempozitivitás miatt az optimális szintek értéke 0 lenne, amit nem tudnánk értelmezni.

A feltételezés ellentmondásban van a klasszikus Neumann-modell azon feltételezésével, hogy nem pozitív nyereséget értelmezünk. Azonban vállalatok modelljeként tekintve Neumann növekedési modelljét az eredeti feltételezés nem lenne – amint láttuk – tartható.

1. példa. Fejtegetésünket szemléltessük egy szám-példával. Tételezzük fel, hogy az alábbi két technológiával rendelkező gazdaságban három vállalat létezik, valamint két termék:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ebben a gazdaságban a vállalatok a következő termelési technológiával rendelkeznek.

1. vállalat:  $d_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,
2. vállalat:  $d_2 - c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,
3. vállalat:  $d_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

Ez azt jelenti, hogy az első vállalat esetén a beszerzendő termék a második, aminek egy egységnyi felhasználásával kettő darab első terméket állíthat elő. A másik két vállalatra ugyanígy értelmezhetjük a vektorainkat.

Tegyük most fel, hogy az (1)-(4) és (5)-(8) feladatokat vizsgáljuk. Legyen a nulladik időszak termelési szintje  $x_0 = [1, 1, 1]$ , ami azt jelenti, hogy a nulladik periódus végén cserére rendelkezésre álló termékmennyiség

$$D \cdot x_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ugyanakkor tételezzük fel azt is, hogy három periódus termelési és árképzését vizsgáljuk. Ekkor legyen a negyedik periódus árvektora:  $p_4 = [1,1]$ , amiből az egységnyi árbevétel (kiadás)

$$p_4 \cdot D = [4 \ 5 \ 7].$$

Az (1)-(4) feladat induló és megoldási táblája a Microsoft Excel solveréből ekkor:

x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33		
4,222222	0	0,555556	1,987654	0	2,469136	5,105624	0	1,652949		
1	3	5	0	0	0	0	0	0	7	7
2	2	1	0	0	0	0	0	0	9	9
-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	1,78E-15	0
-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	7,55E-15	0
0	0	0	-3	-1	-3	1	3	5	3,55E-15	0
0	0	0	-1	-4	-4	2	2	1	7,99E-15	0
0	0	0	0	0	0	4	5	7		31,99314

Innen látható, hogy az optimális megoldás a jobb alsó sarokban látható, ami nagyjából 32 pénzegység. Az optimális megoldást a második sor tartalmazza. Amint látható, a második vállalat nem fog termelni, mert a harmadik vállalat hatékonyabban állítja elő a második terméket.

Az (5)-(8) feladat megoldása, vagyis a Neumann-rendszer megoldását a következő táblázat tartalmazza:

p11	p12	p21	p22	p31	p32		
1,775034	2,174211	1,493827	1,641975	1,111111	1,444444		
1	2	-3	-1	0	0	5,11E-15	0
3	2	-1	-4	0	0	1,611797	0
5	1	-3	-4	0	0	-8,88E-16	0
0	0	1	2	-3	-1	2,44E-15	0
0	0	3	2	-1	-4	0,876543	0
0	0	5	1	-3	-4	8,88E-16	0
0	0	0	0	1	2	4	4
0	0	0	0	3	2	6,222222	5
0	0	0	0	5	1	7	7
7	9	0	0	0	0		31,99314

Ez a feladat duálisa az előbbinek, ezért lesz az optimális célfüggvény értéke szintén mintegy 32. Az optimális megoldásban a tervezési horizonton mindkét terméket termelik, hiszen pozitív a termékek árnyékára.

A következőkben tételezzük fel, hogy az utóbbi árnyékárak a valódi piaci árak, és próbáljuk ennek segítségével maximalizálni a termelési szintek vektorait, amint azt a (19)-(22) feladatok is teszik. Ekkor az optimális megoldást szolgáltató Microsoft Excel tábla az alábbi:

x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33		
0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	7
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	9
-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	0	0
-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	0	0
0	0	0	-3	-1	-3	1	3	5	0	0
0	0	0	-1	-4	-4	2	2	1	0	0
0	-21,6296	0	0	-13,8889	0	0	-5,66665	0		0

A célfüggvényben szereplő vektort a

$$[p_1^o \ p_2^o \ p_3^o \ p_4] \cdot \begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \\ D & -C & 0 \\ 0 & D & -C \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

művelet elvégzésével nyerhetjük, amely az időszaki termékekre eső nyereséget tartalmazza. Amint látható, ez a fajlagos zérus, ha a terméket termelik, és negatív, ha nem termelik.

Az optimális célfüggvény értéke zérussal egyezik meg, de az eredmény azt is mutatja, hogy az optimális termelési szintek ekkor erre a megoldásra szintén nullával egyeznek meg.

### A Neumann-modell egy másfajta megfogalmazása

A modellt a fentiek ismeretében a következő módon írhatjuk fel, mint a (23)-(28) optimalizálási feladatot:

$$x_t \geq 0, p_t \geq 0 \quad (t = 1, 2, \dots, T), \tag{23}$$

$$C \cdot x_1 \leq D \cdot x_0, \tag{24}$$

$$-D \cdot x_{t-1} + C \cdot x_t \leq 0, \quad (t = 2, 3, \dots, T), \tag{25}$$

$$-p_t \cdot C + p_{t+1} \cdot D \geq 0, (t = 1, 2, \dots, T-1), \quad (26)$$

$$p_T \cdot C \leq p_{T+1} \cdot D, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \cdot d_1 \cdot x_0^1 + \sum_{t=1}^T (p_{t+1} \cdot d_1 - p_t \cdot c_1) \cdot x_t^1 \\ p_1 \cdot d_2 \cdot x_0^2 + \sum_{t=1}^T (p_{t+1} \cdot d_2 - p_t \cdot c_2) \cdot x_t^2 \\ \dots \\ p_1 \cdot d_m \cdot x_0^m + \sum_{t=1}^T (p_{t+1} \cdot d_m - p_t \cdot c_m) \cdot x_t^m \end{bmatrix} \rightarrow opt,$$

ahol  $D \cdot x_0$  az ismert készletállomány a tervezési periódus elején, valamint  $p_{T+1} \cdot D$  egységnyi kibocsátás értéke a tervezési periódus végén.

A feladat így annak a  $\{x_t\}_{t=1}^T$  termelési szerkezetnek és  $\{p_t\}_{t=1}^T$  árrendszernek a felkutatása, ami mellett a vállalatok maximalizálják a nyereségüket. A vázolt probléma tehát egy játékelméleti, többcélú programozási feladat megoldását igényli. Matematikailag vizsgálva a problémát egy kvadratikusan többcélű függvényes matematikai programozási feladatot nyertünk. (Lásd pl. Krekó (1972) művét.) Az ilyen feladatot visszavezethetjük egy egycélű függvényes matematikai programozási feladattá, amennyiben a célvektort egy konstans  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  nemnegatív vektorral szorozzuk meg, amelyet az összegző vektorral szorozva éppen egyet kapunk, azaz  $\lambda' \lambda = 1$ .

A többcélű függvényes programozás témaköréből ismert, hogy a megoldások halmaza nemkonvex, ugyanis az összes lehetséges  $\lambda$  vektorra meg kellene oldanunk a problémát. A továbbiakban más utat választunk.

A feladat megoldását egyszerűsítsük arra az esetre, amikor a gazdaságban képződő összes nyereséget maximalizáljuk, azaz az előbbi feladat célfüggvénye a következő alakot veszi fel:

$$\sum_{t=1}^T (p_{t+1} \cdot D - p_t \cdot C) \cdot x_t + p_1 \cdot D \cdot x_0 \rightarrow \max.$$

$$\text{Ekkor } \lambda_i = \frac{1}{m}.$$

A feladatot még egyszerűbb formában is felírhatjuk, ha az árvektorokat és a tevékenységi szintek vektorát, valamint a mátrixokat összevonjuk:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{T-1} \\ x_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{T-1} \\ p_T \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -D & C & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C & \\ 0 & 0 & \dots & -D & C \end{bmatrix}.$$

Ennek segítségével a (23)-(28) probléma újabb, öszszevonottabb alakja:

$$\tilde{x} \geq 0, \quad \tilde{p} \geq 0, \quad (29)$$

$$\tilde{C} \cdot \tilde{x} \leq a, \quad (30)$$

$$\tilde{C}' \cdot \tilde{p} \leq b, \quad (31)$$

$$-\tilde{p} \cdot \tilde{C} \cdot \tilde{x} + a \cdot \tilde{x} + b \cdot \tilde{p} \rightarrow \max \quad (32)$$

ahol

$$a = \begin{bmatrix} D \cdot x_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ D' \cdot p_{T+1} \end{bmatrix}.$$

A vesszővel a transzponáltat jelöltük. Mivel az így felvetett probléma egy kvadratikusan programozási feladat, ezért még ez utóbbi feladatot is tovább egyszerűsíthetjük a (33)-(35) alakra:

$$y \geq 0, \quad (33)$$

$$E \cdot y \leq c, \quad (34)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot y' \cdot E \cdot y + c \cdot y \rightarrow \max \quad (35)$$

ahol

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C} \\ \tilde{C}' & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Ennek a feladatnak a megoldása Lagrange-függvénnyel nem ad olyan szimmetrikus megoldást, mint a lineáris programozás dualitási eredményei, ezért eltekintünk annak vizsgálatától. A megoldás létezésének elemzésétől is eltekintünk, mert a mátrixokra tett Kemény, Morgenstern és Thompson (1956) feltételezések garantálják a (33)-(35) programozási feladat megoldását. Foglalkozunk inkább e feladat stacionárius megoldásaival.

A stacionárius megoldás legyen újra  $x_{t+1} = \alpha \cdot x_t$ , valamint  $p_{t+1} = \beta \cdot p_t$ . Ekkor

$$D \cdot x \geq \alpha \cdot C \cdot x, \quad (36)$$

$$p \cdot C \leq \beta \cdot p \cdot D, \quad (37)$$

$$p \cdot C \cdot x > 0 \quad (38)$$

A  $p$  árvektor és az  $x$  termelési szintek vektora ebben az esetben is nemnegatív. Ez a modellváltozat tehát három ponton különbözik a klasszikus (11)-(15) Neu-

mann-modelltől. Hiányoznak belőle a (12) és (14) dualitási tulajdonságok, valamint a (13) összefüggésben az egyenlőtlenség előjele megfordult. Az optimális  $\alpha$  növekedési rátát és a  $\beta$  árnövekedési rátát optimalizálási feladat megoldásaként kaphatjuk meg.

A modell megoldása így azon  $(\alpha, x, \beta, p)$  egyensúlyi pályák felkutatása, amelyekre  $\alpha$  maximális és  $\beta$  minimális. Ha  $\beta$  minimális, akkor  $\frac{1}{\beta}$  nak maximálisnak

kell lennie. Ez azt jelenti, hogy ebben a modellben nem kell minden vállalatnak maximális nyereséget elérnie, mint a klasszikus Neumann-modellben, hanem csak egy maximális nyereséget, amint azt a következő összefüggés mutatja:

$$\frac{p \cdot (d_j - c_j)}{p \cdot c_j} \geq \frac{1}{\beta} - 1. \quad (39)$$

A (39) képlet szerint a  $j$ -ik vállalat eszközarányos nyeresége nagyobb, mint egy adott érték, amit a garantált nyereségként definiálhatunk. Extraprofitot azok a vállalatok érhetnek el, amelyeknél a (39) egyenlőtlen-

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\alpha \rightarrow \max$$

A feladat megoldását szintén Microsoft Excellel elő lehet állítani:  $x_1 = 0,648371, x_2 = 0, x_3 = 0,351629$ .

Az optimális növekedési ütem:  $\alpha = 1,246616$ .

A legalacsonyabb árnövekedést az alábbi feladat megoldása szolgáltatja:

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \beta \in \Re$$

$$[p_1 \ p_2] \cdot \left( \beta \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \geq [0 \ 0 \ 0]$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$\beta \rightarrow \min$$

Az optimális értékek a következők:  $p_1 = 0,411277, p_2 = 0,588723, \beta = 0,871702$ . A garantált profitráta

ekkor  $\frac{1}{\beta} = 1,147181$ , vagyis mintegy 15 százalék.

A (33)-(35) feladat megoldását az alábbi táblázat tartalmazza:

x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33	p11	p12	p21	p22	p31	p32		
4,222222	0	0,555556	0	2,555556	1,333333	0	0	1,311111	-1E-06	1,57143	0,857143	0,571428	0	0	2	
1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,78E-15
-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,66E-15
0	0	0	-3	-1	-3	1	3	5	0	0	0	0	0	0	0	-1,78E-15
0	0	0	-1	-4	-4	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	-14,24444
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-3	-1	0	0	-2,89E-15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	-1	-4	0	0	-2,22E-15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	-3	-4	0	0	-3,285719
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	-3	-1	1,39E-12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	-1	-4	-4,285713
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	-3	-4	-3,142855
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	2

37,66667

ség szigorú formában teljesül. Az extraprofit nagysága ekkor az  $i$ -ik vállalatra

$$\frac{p \cdot d_i}{p \cdot c_i} - \frac{1}{\beta} > 0.$$

Az egyensúly létezését Hegedűs és Zalai (1978) bizonyították. Ebben az esetben azonban a duális oldalról is hasonlóan bizonyítható az egyensúly létezése.

2. példa. Folytassuk az eredmények szemléltetését az 1. példa mátrixaival és vektoraival. Először az új értelmezés egyensúlyi termelési szintjeit és árvektorait a következő két feladat optimális megoldásaiként kaphatjuk meg:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \alpha \in \Re$$

$$\left( \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az optimális megoldás ekkor a tervezési horizonton 37,666667, az optimális termelési szinteket és az árvektorokat a táblázat második, bekeretezett sora tartalmazza. Összevetve ezt a megoldást a klasszikus Neumann-modell megoldásával látható, hogy a gazdaság összes nyeresége majdnem hat pengzégységgel nőtt.

### Összegzés

A dolgozat abból a feltételezésből indult ki, hogy a Neumann-modell eljárásainak egy-egy vállalat (iparág) is megfeleltethető meg. Feltételezve, hogy az így definiált vállalatok célja a nyereség maximalizálása, azt kérdeztük, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie az egyensúly eléréséhez. Arra az eredményre jutottunk, hogy a Neumann-modell eredeti feltételei közül kettő továbbra is teljesül, nevezetesen a természetes egyensúly, valamint az időszak elejei készletek értékének pozitívi-

tása, de az áregyensúlynak meg kell fordulnia, vagyis nemnegatív nyereségek kelljenek, hogy legyenek az új modellben. Az új modellben a dualitási feltételekről is le kell, hogy mondjunk.

További kutatást igényel, hogy  $\alpha$  és  $\beta$  milyen feltételek mellett lehetnek azonosak. Ezenkívül azt is kérdezhettük, hogy hogyan alakul az egyensúly stacionárius feltétele, ha egy vállalat több eljárással (technológiával) rendelkezik.

## Lábjegyzet

<sup>1</sup> A szerző köszöni Zalai Ernőnek a dolgozat korábbi változataihoz fűzött alapos megjegyzéseit. Minden további, dolgozatban maradó hiba és pontatlanság a szerzőt terheli.

## Felhasznált irodalom:

- Asmanov, Sz. A. (1984): Vvegyenyije v matyematyiceszkuju ekonomiku, Nauka, Moszkva  
 Bródy A. (1980): Ciklus és szabályozás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest  
 Dorfman, R. – Samuelson, P.A. – Sollow, R.M. (1958): Linear programming and economic analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

- Hegedűs M. – Zalai E. (1978): Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp.  
 Kemeny, J.G. – Morgenstern, O. – Thompson, G.L. (1956): A generalization of von Neumann's model of an expanding economy, *Econometrica* 24, p. 115–135.  
 Koopmans, T.C. (Eds.) (1951): Activity analysis of production and allocation, John Wiley and Sons, New York  
 Krekó B. (1972): Optimumszámítás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest  
 Lancaster, K. (1968): Mathematical economics, Collier-Macmillan Ltd, London  
 Medvegyev P. (1984): A general existence theorem for von Neumann economic growth model, *Econometrica* 52, p. 963–974.  
 Móczár J. (1995): Reducible von Neumann models and uniqueness, *Metroeconomica* 46, p. 1–15.  
 Móczár J. (1997): Non-uniqueness through duality in the von Neumann growth models, *Metroeconomica* 48, p. 280–299.  
 Neumann, J. von (1945): A model of general economic equilibrium, *Review of Economic Studies* 13, p. 1–9.  
 Zalai E. (1999): A közgazdaságtan metodológiájáról és a matematikai közgazdaságtanról a Neumann-modell ürügyén, *Közgazdasági Szemle* XLVI., p. 600–628.  
 Zalai E. (2004): The von Neumann model and the early models of general equilibrium, *Acta Oeconomica* 54, p. 3–38.

## Függelék

A (19)-(22) probléma megoldását arra az esetre vizsgáljuk, amikor a fajlagos árbevétel/ráfördítés nempozitív, azaz  $p_{t+1}^o \cdot d_j - p_t^o \cdot c_j \leq 0$ . Azt látjuk be, hogy ekkor az optimális termelési szint minden periódusban zérus lehet, azaz  $x_t^{jo} = 0$ , ( $t = 1, 2, \dots, T$ ). Ezt szekvenciálisan láthatjuk be.

Vizsgáljuk először az  $x_t^j$  optimális értékét; feltételezve, hogy a többi optimális termelési szint  $x_t^{jo}$ , ( $t = 1, 2, \dots, T-1$ ) ismert. Az optimalizálási feladat alakja ekkor

$$x_T^j \geq 0,$$

$$c_j \cdot x_T^j \leq d_j \cdot x_{T-1}^{jo} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (d_k \cdot x_{T-1}^{ko} - c_k \cdot x_T^{ko}),$$

$$(p_{T+1}^o \cdot d_j - p_T^o \cdot c_j) \cdot x_T^j \rightarrow \max.$$

Mivel a célfüggvény nempozitív, ezért annak felső korlátja zérus. Ezt az értéket akkor éri el a célfüggvény, ha az  $x_T^{jo}$  optimális termelési szint nulla, vagyis  $x_T^{jo} = 0$ . Ennek az összefüggésnek minden egyes vállalatra igaznak kell lennie, ezért  $x_T^{jo} = 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

Tekintsük most a (T-1)-ik periódus optimális termelési szintjeit, ami a következő optimalizálási feladat megoldásaként áll elő:

$$x_{T-1}^j \geq 0,$$

$$c_j \cdot x_{T-1}^j \leq d_j \cdot x_{T-2}^{jo} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (d_k \cdot x_{T-2}^{ko} - c_k \cdot x_{T-1}^{ko}),$$

$$-d_j \cdot x_{T-1}^j \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_j \cdot x_{T-1}^{ko},$$

$$(p_T^o \cdot d_j - p_{T-1}^o \cdot c_j) \cdot x_{T-1}^j \rightarrow \max,$$

ahol ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Ennek a feladatnak a megoldása  $x_{T-1}^{jo} = 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), amint azt az előző optimalizálási feladat megoldásakor is láttuk.

Szekvenciálisan folytatva az optimalizálási feladatok megoldását azt kapjuk, hogy nempozitív árbevétel/ráfördítés esetén a vállalatok optimális tevékenységi szintje zérus, azaz a semmittevés. Ezért abban az esetben, ha az eljárásokat vállalatnak tekintjük, akkor el kell vetni a nempozitív árbevételt, és helyette a nemnegatív árbevételt kell tennünk.

Cikk beérkezett: 2008. 10. hó

Lektori vélemény alapján véglegesítve: 2009 11. hó

## VEZETÉSTUDOMÁNY