

KREKÓ BÉLA SZEREPE A KÖZGAZDÁSZKÉPZÉS MODERNIZÁLÁSÁBAN KREKÓ BÉLA (1915-1994) EMLÉKÉRE¹

FORGÓ FERENC – KOMLÓSI SÁNDOR
Budapesti Corvinus Egyetem – PTE KTK

Krekó Béla a magyar közgazdasági oktatás megújításának kiemelkedő alakja, aki 1956 után és az 1960-as években a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen (MKKE) élharcosa volt a matematika oktatás reformjának, az operációkutatási oktatás bevezetésének és a terv-matematika szak beindításának. Születésének 100-ik évfordulóján megemlékezünk róla, mint a közgazdászok modernizálásának egyik legfontosabb szereplőjéről és a generációk számára alapműként szolgáló könyvek szerzőjéről. Ízelítőt adunk ezeknek a könyveknek az egységes szemléletét adó elemi bázistranszformáció (pivotálás) felhasználásából a lineáris algebra néhány klasszikus problémájának megoldására.

I. Krekó Béla szerepe a közgazdászok modernizálásában

Előzmények

Noha ebben a megemlékezésben főleg az MKKE-n folyó közgazdászokképzéssel foglalkozunk, röviden meg kell ismerkednünk az előzményekkel. Magyarországon egyetemi szintű közgazdászokképzés 1934 óta van. Az MKKE 1948-ban történt megalapítása előtt ez a Budapesti József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közgazdasági Karán folyt. Itt tanított a világhírű Jordán Károly, akinek tanítványa volt az ugyancsak világhírű Takács Lajos és a Magyarországon jól ismert és elismert Ziermann Margit. 1960 előtt az MKKE-n a matematikaoktatás két dologra korlátozódott:

- középiskolai matematikai ismeretek pótlása,
- némi elemi szintű pénzügyi, biztosítási számítások és valamennyi kombinatorika oktatása.

Az előbbire azért volt szükség, mert tömegével kerültek be az egyetemre olyan hallgatók (például szakérettségisek, akik egy gyorsított középiskolai képzést kaptak), akiknek középiskolai ismereteik, ezen belül különösen a matematikai előképzettségük rendkívül gyenge volt. A már akkor is a tanszéken dolgozó kollégák (Halmai Erzsébet, Bikics Istvánné, Gyurkó Lajos, Gáspár László)

¹Beérkezett: 2015. november 20. E-mail: komlosi@tkk.pte.hu.

elmesélt történeteiből egy olyan kép rajzolódott ki, amelyben a tanszék dolgozói tulajdonképpen korrepetálást végeztek a középiskolai anyagból. Abszurd módon egyedül őket tették felelőssé a hallgatók gyenge jegyei miatt. A Matematika Tanszék vezetője Huszár Géza professzor volt. Huszár Géza az 1956-ban játszott szerepe miatt kényszernyugdíjba vonult. Ezután 1961-ig, amikor Szép Jenő átvette a tanszék vezetését, ideiglenes tanszékvezetők voltak. Mentés Imre halála után 1959-ben Krekó Béla lett a megbízott tanszékvezető és tulajdonképpen ettől számíthatjuk a matematika reformjának és az operációkutatás akkor, és nagyrészt ma is, legfontosabb területeinek az oktatásba való beépítését.

A legnagyobb újdonságnak a lineáris programozás tananyagba való beemelése számított. A kezdetek központi találkozóhelyének számított a Matematikai Kutató Intézetben 1957-ben Prékopa András vezetésével indult szeminárium, amelynek Krekó Béla is aktív tagja volt. Az ELTE-n Prékopa András első lineáris programozási speciális előadásait 1958-ban tartotta és összeállított ebben a témában egy koherens, teljesen modern anyagot, amit a Bolyai Társulatban egy továbbképző tanfolyamon 1967 és 1969 között adott elő. Itt felhasználta a legendás, még ma is modern, matematikai igényességgel megírt „fehér könyv”-et, Prékopa (1968). Az ELTE-n az operációkutatás 1968-ban lett szakirány, a lineáris programozás, mint tantárgy speciális kollégiumként folyamatosan szerepelt 1958-tól kezdődően.

Az áttörés

Az MKKE-n azonban az az út, amelyen Prékopa András és az ELTE elindult, nem volt járható. Egyrészt a hallgatóság matematikai előképzettsége nem tette lehetővé annak a matematikai precizitásnak a befogadását, amelyet a „fehér könyv” reprezentált, másrészt az egyetem vezetőségét és a diákokat meg kellett nyerni az ügynek. Krekó Béla egy kiváló stratégiát talált ki és ezt igazi hadvezérként meg is valósította. A lineáris programozás gyakorlati, főleg közgazdasági, üzleti alkalmazásaival kezdett, a matematikai tárgyalás főleg intuitív, a konkrét feladathoz alkalmazott, szemléletes, „közgazdasági” nyelven szólt a hallgatósághoz. Ragyogó példája ennek első két lineáris programozás könyve, Krekó és Bacskay (1957) majd Krekó (1962). Az utóbbi könyv két részből áll. Az első részben gyakorlati példákon mutatja be a szimplex módszer működését, majd a második részben a szimplex módszer matematikájára koncentrált. A hallgatóságtól függően lehetséges volt csak az első részt oktatni, vagy adott esetben mindkettőt. Megjegyzendő, hogy az 1957-es könyv kézírata már 1955-ben készen volt. A gyakorlati kipróbálás 1959-ben történt meg egy fakultatív tárgy keretében, kb. 20-30 hallgató részvételével, nagy sikerrel.

Közben állandó harcot kellett vívni az egyetem vezetőségével (rektor, egyetemi tanács, dékánok, kari tanácsok és egyes véleményvezér tanárok) az oktatás és a tananyag ilyen irányú modernizálásáért. Ennek egyik oka az az álláspont, amely a Szovjetunióban az 1920-as években alakult ki, és amely szerint a matematikai közgazdaságtan „burzsoá áltudomány”, amely a kapi-

talista kizsákmányolás elleplezésére és igazolására szolgál. Sztálin halála után ez a vonal némileg enyhült, de a hatalom részéről állandó gyanakvás kísért minden ilyen irányú tevékenységet. Mivel eleinte csak szűk körben létezett az operációkutatás fogalma, az operációkutatásnak is meg kellett harcolni a megfelelő státusért. A hivatalos állásfoglalás azonban idővel lepuhult: akkor és annyiban lehet a matematikai módszereket használni a közgazdaságtanban (az üzleti tudományok beleértendőek), amennyiben ez elősegíti a gazdasági teljesítmény növelését. A szemléletváltás azonban nem ment máról holnapra, főleg az ideológiával túltöltött MKKE-n. Minden egyes kis lépésért harcolni kellett a legkülönbözőbb fórumokon, leginkább a tananyagokat jóváhagyó legfelsőbb fórumon, az egyetemi tanácsban. Krekó Béla ragyogó harcos volt. Tudása, műveltsége, iróniája segítette. Sok igaz anekdota-szerű történet kering arról is, hogy felelős testületekben milyen nivójú véleményekkel kellett megküzdenie. Íme egy jellemző történet. Az egyetemi tanácsban, a hatvanas években, Krekó Béla javaslatot tett arra, hogy a játékelmélet is kerüljön be választható tárgyként a tantervbe. Erre az egyik felháborodott ellenvetés így hangzott: „Na de elvtársak, őrizzük meg az egyetem komolyságát”.

Egyébként a hatvanas évek közepétől már gondtalanul lehetett használni az operációkutatás elnevezést, de konkrét tartalmáról még sokáig folytak szakmai viták, főleg a mind a mai napig rendszeresen megtartott operációkutatás konferenciákon. Ennek azonban már semmi köze nem volt az ideológiához. Az operációkutatás hazai története egyébként nem tárgya ennek a visszaemlékezésnek.

A terv-matematika szak

Krekó Béla szinte egyszemélyes küzdelmét az MKKE-n a matematika/operációkutatás egyetemi státusának megteremtésére 1960-ban siker koronázta. Engedélyt kapott, hogy a felvételik során válasszon a matematikából kiemelkedően felvételiző hallgatók közül 15-20-at, akikkel megindulhat egy új szak, amelynek a terv-matematika elnevezést adták. A szak bevezetésének sikerében jelentős szerepe volt László Imre rektorhelyettesnek, a Népgazdaság tervezése tanszék vezetőjének, aki felkarolta és támogatta a kezdeményezést. Megkönnyítette a helyzetet az, hogy korábban volt egy terv-statisztika szak, természetesen teljesen eltérő tartalommal. A „terv” szó a korszemlemnek megfelelően az új szak eladhatóságát és a különböző jóváhagyó fórumokon való túljutását támogatta. Persze a későbbi végzettkből sokan dolgoztak az Országos Tervhivatalban, de ennek már nem sok köze volt a szak elnevezéséhez, sokkal inkább a tartalmához. A szak gondozását és felügyeletét közösen a Matematika és a Népgazdaság tervezése tanszékek látták el.

Az 1. táblázat a négy és fél év matematikai, statisztikai, számítástechnikai és operációkutatási szaktárgyait, tantervi helyét, heti óraszámát és tantárgy-felelősét (előadó) mutatja.

Félév	Tárgy neve	Heti óraszám	Előadó
1	Matematika (lineáris algebra)	8	Krekó Béla
1	Fizika	2	Kovács Győző
2	Matematika (analízis)	8	Szép Jenő
2	Elektrodinamika	2	Kovács Győző
3	Felsőfokú matematika (lineáris algebra)	8	Krekó Béla
3	Általános statisztika	3	Köves Pál
4	Felsőfokú matematika (valószínűségszám.)	8	Krekó Béla
4	Általános statisztika	4	Párniczky Gábor
5	Matematikai gépek	2	Kovács Győző
5	Gazdasági programozás (lineáris)	4	Krekó Béla
5	Matematikai statisztika	3	Meszéna György
5	Gazdaságstatisztika	4	Benedecki Jánosné
6	Matematikai statisztika	3	Meszéna György
6	Gazdasági programozás (nemlineáris)	4	Krekó Béla
6	Statisztika	4	Benedecki Jánosné
7	Gazdasági programozás (egészértékű)	3	Krekó Béla
7	Készletgazdálkodás	2	Ziermann Margit
8	Számítástechnika	4	Szelecsán János
8	Gazdasági programozás	4	Krekó Béla
8	Sorbanállási modellek	3	Ziermann Margit
9	Számítástechnika	4	Révész György
9	Számítástechnika	4	Környei Imre
9	Gazdasági programozás	2	Krekó Béla
10	Gazd. mat. szakszeminárium	3	Jándy Géza
10	Játékelmélet	2	Szép Jenő

1. táblázat

A matematikai alaptárgyak (lineáris algebra, analízis, valószínűségszámítás) az általános matematikai alapon kívül elsősorban a későbbi szaktárgyak igényeit igyekeztek kiszolgálni. A táblázatot vizsgálva láthatjuk, hogy Krekó Béla a tanításból és az azt támogató tananyagok kidolgozásából is milyen nagy részt vállalt, elsősorban a szakterületének számító lineáris algebrából, a lineáris és nemlineáris programozásból.

Közben 1968-ban, párhuzamosan az ELTE-én Prékopa András vezetésével a matematika szak egyik szakirányaként létrejött az operációkutatás szakirány. A terv-matematika szak az MKKE-n és az operációkutatás szakirány az ELTE-én egymást erősítették, a végzettek különböző intézményeknél jó csapatmunkások lettek és jól megértették egymást.

Tananyagok, könyvek

Krekó Béla az egyetemi tananyagokat egységes szemlélet alapján állította össze és az írásos anyagokat (elsősorban tankönyveket) is ebben a szellemben írta. Első magyar nyelvű lineáris programozás könyve, Krekó-Bacsokay (1957) ihletője Charnes, Cooper és Henderson (1953) könyve volt. A további könyveknek mintául Hadley (1961, 1963, 1964) könyvei szolgáltak, de a rengeteg ötlet, veretes stílus és az egységes szemlélet igazán egyedivé tette őket. A kor nemzetközi tendenciáit és a legújabb kutatások eredményeit is tartalmazta, a diákság szélesebb rétegei számára is „emészthető” formában. Az egységes szemléletet a konstruktív bizonyításokra való törekvés, az elemi bázistranszformáció (pivotálás) szinte univerzális használata, az algorit-

mikus szemlélet, a számítástechnikai megvalósítás mérlegelése, a gyakorlati, főleg közgazdasági alkalmazások előtérbe helyezése, az egyes matematikai fogalmak és eljárások gazdasági interpretációja biztosította. Érdekes, hogy a determináns csak epizódszerephez jutott. Természetesen a számítástechnikai megvalósítást a kor technikája behatárolta.

A lineáris programozás Krekó (1966), a nem-lineáris és egészértékű programozás Krekó (1972), mátrixszámítás Krekó (1963) és a lineáris algebra Krekó (1976) voltak a témái a következő könyveknek. Ezek hosszú időre tankönyvként és kézikönyvként szolgálták az oktatást, kutatást és a gazdasági szakemberek igényét. Annak illusztrálására, hogy mennyire a kor színvonalát tükrözte a tananyag, álljon itt példának az Optimumszámítás (Nemlineáris programozás) könyv fejezeteinek jegyzéke:

1. Bevezetés
2. A folytonos modellekről általában
3. A szimplex módszer
4. A hatékony irányok módszere
5. Metsző síkok módszere
6. A szeparábilis célfüggvények módszere
7. A szekvenciális módszer
8. A dualitás
9. Optimumszámítás több célfüggvény mellett
10. Nemfolytonos modellekről általában
11. A metszési módszer
12. Kombinatorikus módszerek
13. Gráfelméleti módszerek
14. A nemfolytonos modellek és a dualitás

Ezeknek a könyveknek a minőségét jelzi, hogy lineáris programozásról szóló könyvei megjelentek a világpiacon is. Angol nyelvű, Krekó (1968), német nyelvű, Krekó (1964) és szerb-horvát nyelvű Krekó (1966) kiadásai bizonyítják ezt. Az angol nyelvű könyvet ma is meg lehet rendelni az Amazonon.

Tudományos tevékenység

Mint azt már korábban említettük, Krekó Béla missziója a korszerű matematikai-operációkutatási módszerek és modellek megismertetése volt a közgazdászokkal. Ilyen mértékű könyvírás és szakmai közéleti tevékenység mellett kevesebb ideje és energiája maradt a szoros értelemben vett, folyóirat-cikkekben is tükröződő tudományos munkára. Olyan nagyon ezt nem is ambicionálta. Ennek ellenére az irodalomjegyzékben találunk sok szakmai cikket, amelyek ugyan nem a legjobb nemzetközi folyóiratokban jelentek meg, de mindig volt mondanivalójuk, elsősorban a gazdasági szakemberek számára. Erős rábeszélésre megszerezte a kandidátusi címet tudományos munkásságának tézisszerű összefoglalásával, Krekó (1975), de ennél tovább nem ment.

Ha végignézzük Krekó Béla munkásságának legfontosabb alkotásait jelentő könyveit, szembeötlő, hogy nem csak egy könyvön belül vonul végig egy egységes szemlélet, hanem a könyvek is szinte „egy füzérre” vannak fűzve. Ez a füzér az elemi bázistranszformáció. A megemlékezés hátralévő részét ennek a témának szenteljük.

II. Az elemi bázistranszformáció széleskörű alkalmazása Krekó Béla munkásságában

Az 1950-es években a lineáris programozás numerikus módszere, a szimplex módszer a korábbinál fontosabb helyre pozícionálta az alapjául szolgáló elemi bázistranszformációt. Ahogy azt a múlt század 50-es, 60-as éveinek irodalma mutatja, ez a módszer azonban sokáig csupán a lineáris programozás numerikus módszerének számított.

Krekó Béla azok közé tartozott, akik felismerték az elemi bázistranszformáció szélesebb körű alkalmazhatóságát a mátrixszámításban, lineáris algebrában, de ismereteink szerint az egyetlen volt, aki már az 1960-as évek elején tankönyveiben, szakkönyveiben ezt be is mutatta. Ezt a tudatos törekvését ő maga így fogalmazta meg *Matrixszámítás* c. könyvének előszavában 1963-ban:

„Az anyag felépítése eltér a matrixszámítással foglalkozó könyvek szokásos felépítésétől. A számítási módszerek nem a determináns fogalomra, hanem az elemi bázistranszformációra támaszkodnak. Így sikerült elérni, hogy a lineáris algebra numerikus problémáinak megoldására lényegében ugyanazt az apparátust lehet használni, beleértve a lineáris programozási feladatok megoldását és a transzformációk kanonikus alakjának meghatározását is. Ez a tárgyalásmód, úgy vélem, jóval racionálisabb a szokásosnál, szorossá teszi a kapcsolatot az elmélet és a gyakorlat között, továbbá olyan numerikus eljárások megkonstruálásához vezet, amelyek viszonylag könnyen alkalmazhatók a programvezérlésű számolóberendezésekre is. ”

A következőkben röviden áttekintjük azokat a problémákat, melyekre Krekó Béla az elemi bázistranszformációt alkalmazta. (A lineáris egyenletrendszerek megoldását, a mátrixok invertálását és a lineáris programozást, mint közismert problémákat itt most nem tárgyaljuk.) A Krekó Béla által javasolt numerikus eljárások legtöbbször a szimmetrikus mátrixok LDL^T -felbontásának elemi bázistranszformációra épülő eljárásán alapul.

Szimmetrikus mátrixok LDL^T -felbontása (Matrixszámítás, 210–217. oldalak). Minden A szimmetrikus mátrix előállítható $A = LDL^T$ alakban, ahol L olyan alsó háromszög mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme 1, D pedig diagonális mátrix.

Ezt az eljárást kvadratikus formák négyzetösszegre való redukciójára is alkalmazta, tudomásunk szerint elsőként a világon. Éppen ezért a Krekó-féle módszert ennek a problémának a tárgyalása során mutatjuk be. Ez a problémakör egyébként is kiemelt szerepet játszik az optimalizáláselméletben.

Kvadratikus forma négyzetösszegre való redukciója (Matrixszámítás, 210–217. oldalak). Legyen A n -ed rendű kvadratikus mátrix. Ekkor megadható olyan nemszinguláris G mátrix, hogy a $\mathbf{z} = G\mathbf{x}$ koordinátatranszformáció az $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ kvadratikus formát diagonális formára transzformálja.

Ennek a tételnek különös jelentősége van kvadratikus formák definitásának vizsgálatában.

Kvadratikus formák definitásáról. Tekintsük a $Q(x) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kvadratikus formát. Ha az A mátrix diagonális mátrix, akkor a kvadratikus formát diagonális formának nevezzük. Kvadratikus formák a matematika, fizika számos területén fontos szerepet játszanak, a sok lehetőség közül itt most csak a többváltozós függvények feltétel nélküli, illetve egyenlőség feltételes szélsőérték feladatait említjük.

A) Tétel. Legyen $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kétszer differenciálható függvény, melynek legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ stacionárius pontja. Ha az $\mathbf{x}^T f''(\mathbf{a})\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- (i) *pozitív definit*, akkor $f(\mathbf{x})$ -nek \mathbf{a} -ban *lokális szigorú minimuma* van,
- (ii) *negatív definit*, akkor $f(\mathbf{x})$ -nek \mathbf{a} -ban *lokális szigorú maximuma* van,
- (iii) *indefinit*, akkor $f(\mathbf{x})$ -nek \mathbf{a} -ban *nincs szélsőértéke*.

B) Tétel. Legyenek $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kétszer differenciálható függvények. Legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ Lagrange-stacionárius pontja az

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{extr}$$

$$\text{feltéve, hogy } g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, m$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

feladatnak és legyen a feltételrendszer Lagrange-reguláris ebben a pontban. Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, a megfelelő Lagrange szorzók. Tekintsük a feladat *aktualizált Lagrange függvényét*:

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}).$$

Jelölje G a feltételrendszer Jacobi mátrixát:

$$G = [g'_1(\mathbf{a}) \quad g'_2(\mathbf{a}) \quad \cdots \quad g'_m(\mathbf{a})]^T.$$

- (i) Ha az $\mathbf{x}^T L''(\mathbf{a})\mathbf{x}$ kvadratikus forma *pozitív definit* a $G\mathbf{x} = 0$ altéren, vagyis, ha

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, G\mathbf{x} = 0 \implies \mathbf{x}^T L''(\mathbf{a})\mathbf{x} > 0,$$

akkor az $f(\mathbf{x})$ függvénynek a feltételi halmazon *szigorú lokális minimuma* van az \mathbf{a} helyen.

- (ii) Ha az $\mathbf{x}^T L''(\mathbf{a})\mathbf{x}$ kvadratikus forma *negatív definit* a $G\mathbf{x} = 0$ altéren, vagyis, ha

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, G\mathbf{x} = 0 \implies \mathbf{x}^T L''(\mathbf{a})\mathbf{x} < 0,$$

akkor az $f(\mathbf{x})$ függvénynek a feltételi halmazon *szigorú lokális maximuma* van az \mathbf{a} helyen.

C) Konvex és pszeudokonvex függvények másodrendű jellemzése

- (a) A klasszikus analízisből jól ismert tétel, hogy a kétszer folytonosan differenciálható $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ függvény akkor és csak akkor *konvex* a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt konvex halmazon, ha minden $\mathbf{x} \in K$ pontban az $f''(\mathbf{x})$ Hesse-mátrix pozitív szemidefinit. Ha $f''(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x} \in K$ pontban pozitív definit, akkor $f(\mathbf{x})$ szigorúan konvex a K halmazon.
- (b) Pszeudokonvex függvényekre az alábbi tulajdonság jellemző. A kétszer folytonosan differenciálható $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ függvény akkor és csak akkor *pszeudokonvex* a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt konvex halmazon, ha minden $\mathbf{a} \in K$ pontban teljesül a következő két feltétel egyike:
- (i) Ha $\mathbf{a} \in K$ és $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, akkor $f(\mathbf{x})$ -nek \mathbf{a} -ban lokális minimuma van,
- (ii) Ha $\mathbf{a} \in K$ és $f'(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{x}^T f''(\mathbf{a})\mathbf{x}$ kvadratikus forma pozitív szemidefinit az $f'(\mathbf{a})^T \mathbf{x} = 0$ altéren.

Kvadratikus formák diagonalizációja. Kvadratikus formák definitás vizsgálatának egy nagyon egyszerű, de nagyon hatékony módja a kvadratikus forma diagonális formára való transzformációja egy alkalmasan választott $\mathbf{z} = G\mathbf{x}$ lineáris transzformáció segítségével. Ez az ötlet akkor vezet eredményre, ha G invertálható mátrix és $D = (G^{-1})^T A G^{-1}$ diagonális mátrix. Legyenek D diagonális elemei $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Ekkor

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{z}^T D \mathbf{z} = \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_2^2 + \dots + \delta_n z_n^2. \quad (D)$$

Ebből nyilvánvaló, hogy $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ akkor és csak akkor pozitív (negatív) definit, ha D valamennyi főátlóbeli eleme pozitív (negatív).

Egy kvadratikus alakot négyzetösszegé transzformálni sokféleképpen lehet. Legyen F egy olyan invertálható mátrix, melyre $F^T A F$ diagonális mátrix. Jelöljék az F mátrix oszlopvektorait $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$, melyek bázist alkotnak \mathbb{R}^n -ben. Mivel

$$F^T A F = [\mathbf{f}_i^T A \mathbf{f}_j],$$

ezért $F^T A F$ csak úgy lehet diagonális mátrix, ha $i \neq j$ esetén $\mathbf{f}_i^T A \mathbf{f}_j = 0$. Ha az $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ bázis rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor azt *A-ortogonális* bázisnak nevezzük. Az *A-ortogonális* vektorokat szokták még *A-konjugált* vektoroknak is nevezni.

A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás értelemeszerű módosításával \mathbb{R}^n bármely bázisa *A-ortogonalizálható*, ez bizonyítja azt az állítást, hogy egy adott kvadratikus formát többféleképpen is lehet diagonalizálni. Mint később majd látni fogjuk, Krekó Béla módszere *A-ortogonális* bázis előállítását is eredményezi.

Kvadratikus formák négyzetösszegre redukálhatóságát leggyakrabban a szimmetrikus mátrixok főtengelettranszformációjával szokták illusztrálni. Legyen S egy olyan mátrix, melynek oszlopvektorai valamennyien az A mátrix

sajátvektorai és ortonormált bázist alkotnak \mathbb{R}^n -ben. Ekkor az $\mathbf{u} = S^{-1}\mathbf{x}$ transzformáció alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{u}^T \mathbf{L} \mathbf{u} = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_n u_n^2, \quad (\text{L})$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ az A mátrix sajátértékei. Ebből adódik a definitási tulajdonságoknak a mátrix sajátértékeivel való jól ismert karakterizációja.

A főtengeleytranszformáció nagyon számításgényes eljárás. Kvadrátikus formák diagonális alakra való transzformálására ennél lényegesen egyszerűbb eljárásokat is kidolgoztak. A legelső említést érdemlő numerikus módszert Lagrange nevéhez kapcsolják, aki a „teljes négyzetté kiegészítés” módszerével adott eljárást a négyzetes alakra hozásra. (Hadley, G., Linear Algebra, Addison-Wesley, Massachusetts, 1961, Chapter 7.)

A Lagrange-féle teljes négyzetté alakítás módszere. Tekintsük a $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadrátikus formát. Tegyük fel, hogy A diagonális elemei között van 0-tól különböző. Az általánosságot nem korlátozzuk, ha feltesszük, hogy $a_{11} \neq 0$. Partíciónáljuk A -t, illetve \mathbf{x} -et a következő módon:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_1 & C_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $Q(\mathbf{x})$ a következő alakban is felírható:

$$Q(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + 2x_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^T C_1 \mathbf{x}_2.$$

A jobb oldali összeg első két tagjára alkalmazzuk a teljes négyzetté kiegészítést:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + 2x_1\mathbf{b}_1^T\mathbf{x}_2 &= a_{11} \left(x_1^2 + 2x_1 \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{x}_2}{a_{11}} + \frac{\mathbf{x}_2^T \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T \mathbf{x}_2}{a_{11}^2} \right) - \frac{\mathbf{x}_2^T \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T \mathbf{x}_2}{a_{11}} = \\ &= a_{11} \left(x_1 + \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{x}_2}{a_{11}} \right)^2 - \frac{\mathbf{x}_2^T \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T \mathbf{x}_2}{a_{11}}. \end{aligned}$$

Ennek az összefüggésnek a segítségével $Q(\mathbf{x})$ következő alakját kapjuk:

$$Q(\mathbf{x}) = a_{11} \left(x_1 + \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{x}_2}{a_{11}} \right)^2 + \mathbf{x}_2^T F_1 \mathbf{x}_2,$$

ahol

$$F_1 = C_1 - \frac{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T}{a_{11}}.$$

Vezessük be az

$$y_1 = x_1 + \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{x}_2}{a_{11}}$$

új változót. Ekkor

$$\hat{Q}(y_1, \mathbf{x}_2) = [y_1 \quad \mathbf{x}_2^T] \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & F_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = a_{11}y_1^2 + \mathbf{x}_2^T F_1 \mathbf{x}_2.$$

Az (x_1, \mathbf{x}_2) változóról az (y_1, \mathbf{x}_2) változókra való áttérés mátrixa

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{t}_1^T \\ 0 & E_{n-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{a_{11}}$. Teljesül ugyanis az alábbi transzformációs kapcsolat

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{t}_1^T \\ 0 & E_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Ha a Lagrange-féle módszert hatékony numerikus eljárás szintjére akarjuk emelni, akkor „mindössze” a T_1 mátrix első sorát kell az A mátrix elemeiből egy könnyen megadható eljárással kialakítani. 1966-ban két amerikai matematikus, Beightler, C. S. and Wilde, D. J. (1966) megmutatta, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineáris egyenletrendszer Gauss-féle eliminációs technikája (amikor az x_1 változót elimináljuk az egyenletrendszer második, harmadik, ..., n -edik sorából) pontosan a T_1 mátrix első sorát állítja elő.

Hasonló eredményre jutott Krekó Béla valamivel korábban (1964 előtt több évvel is), és korszerűbb módszert használva, felismerte azt, hogy a fent leírt transzformációs lépésben fontos szerepet játszó \mathbf{t}_1^T vektort és F_1 mátrixot az A mátrixon a_{11} generáló elem választással végrehajtott elemi bázistranszformációval könnyedén megkapjuk. Krekó Béla módszerét 1964-ban megjelent könyve alapján ismertetjük, Krekó Béla (1964) 210-217. old.

A Krekó-féle módszer

1. eset. Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor az A szimmetrikus mátrixnak van 0-tól különböző diagonális eleme. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az első diagonális elem éppen ilyen. (Az \mathbf{x} komponenseinek átindexezésével ez az adott esetben mindig biztosítható.) A feltevésünk értelmében tehát

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_1 & C_1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

ahol $p_1 \neq 0$ és $C_1 = C_1^T$. Az A oszlopvektorai – mint tudjuk – felfoghatók, mint az egységvektorok által meghatározott bázisban megadott vektorok. Vonjuk bázisba az A első oszlopvektorát, mégpedig az \mathbf{e}_1 egységvektor helyébe. Az A oszlopvektorainak az új bázisbeli koordinátáit a $p_1 = a_{11}$ generáló elem szerinti elemi bázistranszformáció szolgáltatja. Így a 2. táblázathoz jutunk,

	x_1	\mathbf{x}_2^T	\mathbf{x}_2^T
x_1	p_1	\mathbf{b}_1^T	\mathbf{f}_1^T
	\mathbf{b}_1	C_1	F_1

2. táblázat

ahol

$$\mathbf{f}_1^T = \frac{1}{p_1} \mathbf{b}_1^T \quad \text{és} \quad F_1 = C_1 - \frac{1}{p_1} \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T .$$

A műveleti szabályok közvetlen alkalmazása révén belátható, hogy

$$\begin{bmatrix} p_1 & \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_1 & C_1 \end{bmatrix} - p_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix} [1 \quad \mathbf{f}_1^T] = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & F_1 \end{bmatrix} . \quad (2)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A_1 = A \quad \mathbf{g}_1^T = [1 \quad \mathbf{f}_1^T] \quad \text{és} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & F_1 \end{bmatrix} .$$

Ezekkel (2) a következőképpen írható:

$$A = A_1 = p_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_1^T + A_2 . \quad (3)$$

Ha az F_2 első diagonális eleme $p_2 \neq 0$, akkor az egész eljárás megismétlésével az

$$A_2 = p_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T + A_3$$

összefüggéshez jutunk, ahol $\mathbf{g}_2^T = [0 \quad 1 \quad \mathbf{f}_2^T]$, és az A_3 olyan szimmetrikus mátrix, melynek első két sora és első két oszlopa csupa 0-ból áll. Ha az egymás után következő A_3, A_4, \dots, A_r mátrixokban mindig találunk 0-tól különböző diagonális elemet, akkor a további

$$A_3 = p_3 \mathbf{g}_3 \mathbf{g}_3^T + A_4 ,$$

$$A_4 = p_4 \mathbf{g}_4 \mathbf{g}_4^T + A_5 ,$$

$$\vdots$$

$$A_r = p_r \mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T + 0_{n-r}$$

összefüggésekhez jutunk, ahol r az A mátrix rangja. Az egymást követő A_3, A_4, \dots mátrixokban a csupa zérusból álló sorok és oszlopok száma lépésről lépésre nő, éppen úgy, mint a $\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \dots$ vektorokban a 0-elemek száma. r számú elemi bázistranszformációval A -nak a következő előállítását kapjuk:

$$A = p_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_1^T + p_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T + \dots + p_r \mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T . \quad (4)$$

Legyen

$$G^T = [\mathbf{g}_1 \quad \dots \quad \mathbf{g}_r \quad \mathbf{e}_{r+1} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n] ,$$

és legyen P diagonális mátrix $\langle p_1, \dots, p_r, 0, \dots, 0 \rangle$ diagonális elemekkel. Ezekkel a jelölésekkel (4) egyenértékű az

$$A = G^T P G \quad (5)$$

összefüggéssel, aminek egyszerű következménye, hogy

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T G^T P G \mathbf{x} . \quad (6)$$

A G megkonstruálásának módjából következik, hogy G nemszinguláris, következésképpen a

$$G\mathbf{x} = \mathbf{z}$$

összefüggés koordináta-transzformáció \mathbb{R}^n -ben. Ez a koordinátatranszformáció, tekintettel (6)-ra, diagonális formára transzformálja $Q(\mathbf{x})$ -et. A $G\mathbf{x} = \mathbf{z}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$Q(\mathbf{x}) = \hat{Q}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T P \mathbf{z} = p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + \dots + p_r z_r^2, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Ebből az előállításból nyilvánvaló, hogy $Q(\mathbf{x})$ akkor és csak akkor pozitív (negatív) definit, ha $r = n$ és valamennyi generáló elem pozitív (negatív). Ha $r < n$ és valamennyi generáló elem pozitív (negatív), akkor $Q(\mathbf{x})$ pozitív (negatív) szemidefinit. Az is nyilvánvaló, hogy ha a generáló elemek között különböző előjelű elemek is vannak, akkor $Q(\mathbf{x})$ indefinit. Ezzel bebizonyítottuk, hogy elemi bázistranszformáció segítségével minden kvadratikus formát diagonál formára lehet transzformálni. Az elmondottakat Krekó Béla a következő numerikus példával illusztrálta.

1. Példa. Legyen a $Q(\mathbf{x})$ kvadratikus forma mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -13 \\ 1 & 1 & -13 & 1 \end{bmatrix}.$$

A diagonalizációhoz szükséges számítások a következők:

0	a1	a2	a3	a4	1	a1	a2	a3	a4
e1	1	2	0	1	a1	1	2	0	1
e2	2	3	4	1	e2	0	-1	4	-1
e3	0	4	1	-13	e3	0	4	1	-13
e4	1	1	-13	1	e4	0	-1	-13	0

2	a1	a2	a3	a4	3	a1	a2	a3	a4	4	a1	a2	a3	a4
a2	0	1	-4	1	a3	0	0	1	-1	a4	0	0	0	1
e3	0	0	17	-17	e4	0	0	0	-16					
e4	0	0	-17	1										

1. ábra

A felső sorokban az aktuális \mathbf{g}_i^T vektorok találhatóak, ennél fogva

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és $P = \text{diag}(1, -1, 17, -16)$. Ha tehát alkalmazzuk a $G\mathbf{x} = \mathbf{z}$ transzformációt, a következő négyzetösszegre redukált alakhoz jutunk:

$$Q(\mathbf{x}) = \hat{Q}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T P \mathbf{z} = z_1^2 - z_2^2 + 17z_3^2 - 16z_4^2.$$

Ebből már látható, hogy a vizsgált kvadratikus forma indefinit.

Megjegyzés. A G^{-1} mátrix oszlopvektorrendszere A -ortogonális bázis \mathbb{R}^4 -ben, ahol

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. eset. Ha az A mátrixnak minden diagonális eleme 0, akkor végrehajtunk egy olyan bázistranszformációt, amelyben az A mátrix transzformáltjának már van 0-tól különböző diagonális eleme. Ez az eljárás azon a tényen nyugszik, hogy az

$$S = \begin{bmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol $s \neq 0$, az

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

átmenet mátrixszal olyan

$$\hat{S} = R^T S R = \begin{bmatrix} 2s & 0 \\ 0 & -2s \end{bmatrix}$$

alakra hozhatjuk, amelynek diagonális elemei már 0-tól különbözőek. Ezen az alapon belátható, hogy minden, a fenti tulajdonságú A mátrixhoz található olyan T mátrix, hogy az

$$\hat{A} = T^T A T \tag{7}$$

mátrixnak már van 0-tól különböző diagonális eleme. Ha ezután az \hat{A} mátrixot már fel tudjuk bontani az

$$\hat{A} = \hat{G}^T P \hat{G}$$

szorzatra, ahol P diagonális mátrix, akkor az $\hat{A} = T^T A T = \hat{G}^T P \hat{G}$ egyenlőségéből

$$A = (T^{-1}) \hat{G}^T P \hat{G} T^{-1} = G^T P G \tag{8}$$

összefüggéshez jutunk, ahol $G = \hat{G} T^{-1}$. Ez azt jelenti, hogy a $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ kvadratikus formát a $\mathbf{z} = G\mathbf{x}$ koordináta transzformáció diagonális formára transzformálja. Az persze előfordulhat, hogy a (7) típusú transzformációt többször is alkalmazni kell.

Az elmondottakat Krekó Béla a következő példával illusztrálta.

2. Példa. Legyenek

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\hat{A} = T^T A T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazva az előző részben ismertetett eljárást, a következő számításokhoz jutunk:

0	a1	a2	a3	1	a1	a2	a3
e1	2	0	6	a1	1	0	3
e2	0	-2	-2	e2	0	-2	-2
e3	6	-2	0	e3	0	-2	-18
2	a1	a2	a3	3	a1	a2	a3
a2	0	1	1	a3	0	0	1
e3	0	0	-16				

2. ábra

Ezekből azonnal leolvasható, hogy

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix},$$

és kiszámítható, hogy

$$B = \hat{G} T^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 3 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ kvadratikus formát a $\mathbf{z} = B \mathbf{x}$ koordinátatranszformáció a

$$Q(\mathbf{x}) = \hat{Q}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T D \mathbf{z} = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 16z_3^2$$

diagonális formára transzformálja.

Megjegyzés. A B^{-1} mátrix oszlopvektorrendszere A -ortogonális bázis \mathbb{R}^3 -ban, ahol

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Krekó Béla módszerének ismertetése kapcsán mindenképpen meg kell említeni Sylvester tehetetlenségi tételét, melyet Ő maga is tárgyal könyveiben.

Sylvester tehetetlenségi tétele — szimmetrikus mátrix inerciája. Hogy az $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ kvadratikus forma különböző négyzetösszegre transzformált alakjaiban mi a közös, azt J. J. Sylvester (1852) mutatta meg. Jelöljék $\nu(D)$, $\zeta(D)$ és $\pi(D)$ az

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{z}^T D \mathbf{z} = \delta_1 z_1^2 + \delta_2 z_2^2 + \dots + \delta_n z_n^2. \quad (D)$$

négyzetösszeg együtthatói közül a negatív, a zérus és a pozitív együtthatók számát. Az

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{u}^T L \mathbf{u} = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_n u_n^2, \quad (L)$$

négyzetösszeg esetében ezeket a mennyiségeket jelöljék $\nu(L)$, $\zeta(L)$ és $\pi(L)$. A Sylvester-féle tehetetlenségi tétel szerint

$$\nu(D) = \nu(L), \quad \zeta(D) = \zeta(L) \quad \text{és} \quad \pi(D) = \pi(L).$$

Mivel ezek az egybeeső mennyiségek az A mátrixot jellemzik, ezért használhatjuk a

$$\nu(A) = \nu(L), \quad \zeta(A) = \zeta(L) \quad \text{és} \quad \pi(A) = \pi(L)$$

jelöléseket. Ezek alkotják a következő definíció alapját.

Szimmetrikus mátrix inerciája. Az n -ed rendű szimmetrikus A mátrix inerciája alatt azt az

$$\text{Iner}(A) = (\nu(A), \zeta(A), \pi(A))$$

rendezett számhármast értjük, ahol $\nu(A)$, illetve $\pi(A)$ az A negatív, illetve pozitív sajátértékeinek számát jelenti (figyelembe véve a multiplicitásokat is). $\zeta(A)$ a 0 sajátérték multiplicitása. Szimmetrikus mátrixok sajátértékeire vonatkozó ismert tételből következik, hogy

$$\nu(A) + \zeta(A) + \pi(A) = n.$$

A Krekó-féle módszer megad egy transzformációt, mellyel egy kvadratikus formát négyzetösszegre lehet redukálni. Ebből az alakból aztán egyszerűen kiolvasható az inercia is. Számos feladatnál, és ide tartoznak az optimalitás másodrendű feltételei is, csak az inerciára van szükségünk, az azt feltáró transzformációra azonban nincs.

Egy későbbi eredmény: a Haynsworth-Cottle-féle módszer. E. V. Haynsworth (1968) megadott egy mátrixalgebrai összefüggést, amely arra vonatkozott, hogyan lehet szimmetrikus mátrix inerciáját kisebb méretű szimmetrikus mátrixok inerciája segítségével kiszámítani.

A Haynsworth-féle inercia formula. Tekintsük az n -ed rendű szimmetrikus A mátrixot a következő módon partícionálva

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

ahol A_{11} nonszinguláris és szimmetrikus. A következő állítások akkor is érvényben maradnak, ha az A_{11} blokk nem „bal felső” helyzetű. A lényeges kikötés az, hogy *principális* legyen, mely azt jelenti, hogy a szóban forgó blokk sorindexeinek halmaza megegyezzen oszlopindexeinek halmazával. Az

$$(A_{11} | A) := A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \quad (\text{S})$$

mátrixot az A_{11} mátrix A -ra vonatkozó Schur-komplementének nevezzük, amely A , A_{11} és A_{22} szimmetriája folytán maga is szimmetrikus. Igaz a következő állítás:

$$\text{Iner}(A) = \text{Iner}(A_{11}) + \text{Iner}(A_{11} | A), \quad (\text{H})$$

ahol az összeadás komponensenként értendő.

R.W. Cottle (1974), egy 1974-ben publikált cikkében a (H) formula iteratív alkalmazását javasolta szimmetrikus mátrix inerciájának kiszámítására a következő módon.

1. eset. Az A főátlójában van 0-tól különböző elem. Az általánosságot nem sértve feltehetjük, hogy $a_{11} \neq 0$. Legyen tehát $A_{11} = [a_{11}]$. Az A mátrixon hajtsunk végre egy elemei bázistranszformációt, ahol $a_{11} \neq 0$ a generáló elem. Ha a transzformált táblából elhagyjuk az első sort és első oszlopot, akkor a megmaradó „komplement” rész pontosan az $S = (A_{11} | A)$ Schur-komplement. Mivel az A_{11} mátrixnak egyetlen sajátértéke $\lambda_1 = a_{11}$, ezért

$$\text{Iner}(A_{11}) = \begin{cases} (1, 0, 0), & \text{ha } a_{11} < 0; \\ (0, 0, 1), & \text{ha } a_{11} > 0. \end{cases}$$

Az eljárást az S Schur-komplementtel folytatva, meghatározhatjuk az A mátrix inerciáját, melyet az 1. Példa A mátrixán mutatjuk be.

0	a1	a2	a3	a4
e1	1	2	0	1
e2	2	3	4	1
e3	0	4	1	-13
e4	1	1	-13	1

1	a1	a2	a3	a4
a1	1	2	0	1
e2	0	-1	4	-1
e3	0	4	1	-13
e4	0	-1	-13	0

2	a1	a2	a3	a4
a2	0	1	-4	1
e3	0	0	17	-17
e4	0	0	-17	1

3	a1	a2	a3	a4
a3	0	0	1	-1
e4	0	0	0	-16

3. ábra

A (H) formula ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\text{Iner}(A) = \text{Iner}([1]) + \text{Iner}([-1]) + \text{Iner}([-1]) + \text{Iner}([17]) + \text{Iner}([-16]) = (2, 0, 2).$$

Láthatjuk, hogy abban az esetben, ha minden lépésben főátlóból tudunk generáló elemet választani, az eljárás numerikus része semmiben nem különbözik a Krekó-féle eljárástól.

2. eset. Abban az esetben azonban, ha A -nak minden diagonális eleme 0, akkor a Cottle-féle eljárás kevesebb vesződséggel jár, mint a Krekó-féle. Ebben az esetben főátlón kívüli generáló elemet kell választanunk. Legyen ez $a_{ij} \neq 0$. Az ehhez tartozó egyelemű blokk azonban nem principális blokk A -ban és ennek következtében a hozzá tartozó Schur-komplement se lesz általában szimmetrikus. Végrehajtottunk egy elemi bázistranszformációs lépést az $a_{ij} \neq 0$ generáló elemmel. Mivel A -ban minden főátlóbeli elem 0, ezért az új táblában a j -edik sor i -edik oszlopában álló elem változatlan marad és megegyezik az $a_{ji} = a_{ij} \neq 0$ elemmel. A következő transzformáció generáló eleme a_{ji} kell, hogy legyen. Ha a transzformált táblából töröljük az i -edik és j -edik sorokat és oszlopokat, akkor pontosan az

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ a_{ji} & 0 \end{bmatrix}$$

blokkhoz tartozó $S = (A_{11} \mid A)$ Schur-komplementet kapjuk. A (H) formula numerikus alkalmazhatóságát segíti elő az a tény, hogy tetszőleges $p \neq 0$ esetén

$$\text{Iner} \begin{bmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{bmatrix} = (1, 0, 1).$$

Egyszerűen kiszámítható ugyanis, hogy a $\begin{bmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{bmatrix}$ mátrixnak a sajátértékei $\lambda_1 = p$ és $\lambda_2 = -p$. Illusztrációként nézzük a 2. Példában szereplő mátrixot!

0	a1	a2	a3
e1	0	1	2
e2	1	0	4
e3	2	4	0

1	a1	a2	a3
a2	0	1	2
e2	1	0	4
e3	2	0	-8

1	a1	a2	a3
a2	0	1	2
a1	1	0	4
e3	0	0	-16

4. ábra

Ebből (H) alapján megállapítható, hogy

$$\text{Iner}(A) = \text{Iner} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \text{Iner}([-16]) = (1, 0, 1) + (1, 0, 0) = (2, 0, 1).$$

Szimmetrikus mátrix inerciájának meghatározásával nemcsak az A) feladat másodrendű feltételének ellenőrzése valósítható meg, hanem a B) illetve C) feladatoké is. Ezt a lehetőséget a következő eredmény biztosítja, Chabrilac, Y. and Crouzeix, J.-P. (1984).

A Chabrilac–Crouzeix-féle inerciateszt. Teljesüljenek a B) Tételben megfogalmazott feltételek. Ekkor az $\mathbf{x}^T L''(\mathbf{a})\mathbf{x}$ kvadratikus forma

(i) akkor és csak akkor pozitív definit a $G\mathbf{x} = \mathbf{0}$ altéren, ha

$$\text{Iner} \left(\begin{bmatrix} L''(\mathbf{a}) & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \right) = (m, 0, n).$$

(ii) akkor és csak akkor negatív definit a $G\mathbf{x} = \mathbf{0}$ altéren, ha

$$\text{Iner} \left(\begin{bmatrix} L''(\mathbf{a}) & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \right) = (n, 0, m).$$

A Krekó-féle determinánsszámítás

A mátrixalgebra számos problémáját determinánsok segítségével fogalmazza meg. A klasszikus értelmezés szerint egy determináns kiszámítása (főleg, ha az nagy méretű) meglehetősen számításigényes művelet. Krekó Béla megmutatja, hogy az elemi bázistranszformáció segítségével itt is lényegesen egyszerűsítenyi lehet a számításokat.

Krekó Béla Matrixszámítás (1964) könyvében egy új determináns fogalmat vezet be. Azt, hogy ez ekvivalens a klasszikus determináns fogalommal, csak évekkel később Lineáris algebra (1976) könyvében (14.1. alfejezet) mutatja meg.

Krekó Béla determináns fogalma (Matrixszámítás, 59-60. old.). Legyen $A \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ oszlopvektorrendszerrel adott n -ed rendű nonszinguláris kvadratikus mátrix. n elemi bázistranszformációt végrehajtva a mátrix determinánsát a generáló elemek előjeles szorzataként értelmezzük. Az előjel meghatározása a következőképpen történik. Az A oszlopvektorainak bázisba

vonása eredményezze az $\{\mathbf{a}_{i(1)}, \mathbf{a}_{i(2)}, \dots, \mathbf{a}_{i(n)}\}$ bázist. Ha ezt a vektorrendszert páros számú elemcserékkel tudjuk az eredeti $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ sorrendbe visszaállítani, akkor az előjel $(+1)$. Ha az eredeti sorrend visszaállításához páratlan számú elemcsere szükséges, akkor az előjel (-1) . (Ha mindig a főátlóból választunk generáló elemet, akkor nincs szükség előjel korrekcióra.). Szinguláris mátrix determinánsa 0.

Krekó Béla Lineáris algebra c. könyvében egy egész fejezetet szentel a klasszikus és a „modern” definíciók egyenértékűségének bizonyítására. Ennek során is eljut az egyenértékűséget igazoló Schur-lemmához.

A Schur-lemma. Legyen A n -edrendű kvadratikus mátrix és legyen A_{11} $k \times k$ -as nonszinguláris blokk A -ban

$$(A_{11} | A) := A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \quad (\text{S})$$

mátrixra, mely a mátrixalgebra számos problémájában előfordul, Haynsworth vezette be a *Schur-komplement* elnevezést, mégpedig azon az alapon, hogy I. Schur egy 1917-es cikkében bizonyította és alkalmazta a

$$\det(A) = \text{par}(A_{11}) \det(A_{11}) \det(A_{11} | A) \quad (\text{SF})$$

formulát, ahol, A_{11} paritását a következő módon értelmezzük. Jelöljék i_1, i_2, \dots, i_k illetve j_1, j_2, \dots, j_k az A mátrix azon sorainak illetve oszlopainak indexeit, amelyek az A_{11} blokkot meghatározzák. Legyen

$$\text{par}(A_{11}) = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k}.$$

Az (SF) formulát *Schur-formula* néven hivatkozzák a mátrixalgebrában.

Mivel $\text{par}([a_{ij}]) \det([a_{ij}]) = (-1)^{i+j} a_{ij}$, ezért a *Schur-formula* megalapozza a determináns-számítás elemi bázistranszformációra épülő iteratív numerikus módszerét.

Az elemi bázistranszformáció további alkalmazásai Krekó Béla munkáiban

A-ortogonális bázis előállítása (Matrixszámítás, 210-217. old.). Legyen A n -ed rendű szimmetrikus mátrix. Ekkor megadható olyan F mátrix, mellyel $F^T A F$ diagonál mátrix. Ekkor az F mátrix oszlopai A -ortogonálisak (A -konjugáltak). *Megjegyzés.* Ha az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \gamma$ kvadratikus függvénynek keressük a szélsőértékeit, akkor az A -ortogonális keresési irányokra épülő módszerek (konjugált gradiens módszerek) elég magasan jegyzett módszerek. (Hestenes-Stiefel, Fletcher-Reeves, Davidon-Fletcher-Powell, stb.)

Bázisok ortogonalizálása (Krekó: Matrixszámítás 220. oldal). Legyen A teljes oszlopangú $m \times n$ -es mátrix. Ekkor megadható olyan F n -ed rendű mátrix, hogy a $B = A F$ mátrix ortogonális, abban az értelemben, hogy oszlopvektorai páronként merőlegesek és normáltak.

Pozitív definit szimmetrikus mátrixok Cholesky-felbontása (Matrixszámítás, 210-217. oldalak). Legyen A n -ed rendű pozitív definit mátrix. Ekkor A előállítható $A = \hat{L}\hat{L}^T$ alakban, ahol \hat{L} alsó háromszögmátrix.

Trianguláris faktorizáció (Lineáris algebra 303. oldal). Legyen A n -ed rendű kvadratikus mátrix. Ekkor A előállítható az $A = LDU$ alakban, ahol D diagonál mátrix, L és U pedig olyan alsó-, illetve felső háromszögmátrixok, melyek minden diagonális eleme 1.

Ez a megemlékezés csak Krekó Béla szakmai életrajzának egy részéről (noha szerintünk a legfontosabbról) szólt. Köszönet jár neki kollégáitól, tanítványaitól és az egész közgazdász közösségtől az egész életműért, és azért a lehetőségért, hogy oly sokan ismerhettük, tanulhattunk tőle, és élvezhettük egy kiváló, nagy műveltségű, sokoldalú ember barátságát. Példaképként tiszteljük és állítjuk őt az ifjúság elé.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozunk Prékopa Andrásnak, aki az események aktív szereplőjeként sok hasznos információval segített reális képet adni Krekó Béla munkásságáról. Köszönjük az OTKA támogatását (101224 témaszám).

Krekó Béla válogatott művei

Krekó, B. és Bacskay, Z. (1957) Bevezetés a Lineáris programozásba. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

Krekó, B. (1958) A szállítási problémáról. A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Évkönyve, 251–271.

Krekó, B. (1959) Lineáris egyenletrendszerek megoldása szimplex módszerrel. MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei, No. 3-4, 265–275.

Krekó, B. (1959) A gazdasági tevékenységek elemzésének néhány modern matematikai eszközéről. Közlekedés és Közlekedésépítéstudományi Intézet, Budapest, 183–197.

Krekó, B. (1961) Einige Fragen der linearen Programmierung. Wiss. Z. Tech. Univ. Dresden 10: 1073–1075.

Krekó, B. (1962) Lineáris programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

Krekó, B. (1962) Ein neues Modell in der Verkehrsprogrammierung. Wiss. Z. Univ. Rostock 11:447–451.

Bacskay, Z. és Krekó B. (1963) Matematikai alapismeretek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

Krekó, B. (1963) Mátrixszámítás. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest.

Krekó, B. (1963) Problèmes de programmation discrète dans le planning du trafic. Revue Scientifique de l'Université Technique du Bâtiment et des Transports, Budapest, No.2. 257–265.

- Krekó, B. (1964) Lehrbuch der linearen Optimierung. Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Krekó, B. (1965) Über einige neue Untersuchungen der mathematischen Optimierung. Colloquium on applications of mathematics to economics, Budapest 1963.
- Krekó, B. (1965) Über das stetige Optimierungsproblem. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie, Akademie Verlag, Berlin 285-295.
- Krekó, B. (1966) Lineáris programozás (átdolgozott és bővített kiadás). Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- Krekó, B. (1966) Linearno programiranje. Savrmena administracija, Beograd.
- Krekó, B. (1967) A szimplex módszer egy változata nagyvolumenű feladatok megoldására. Döntési modellek, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 7–36.
- Krekó, B. (1968) Linear programming. Pitman, London.
- Krekó, B. (1968) Linear programming. American Elsevier Publishing Company, Boston.
- Krekó, B. (1974) Optimierung: nichtlineare Modelle. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Krekó, B. (1975) Tézisek. (Tudományos tevékenység tézisszerű összefoglalója) MTA, p. 47.
- Krekó, B. (1976) Lineáris algebra. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- Krekó, B. (1994) Biztosítási matematika – Életbiztosítás I., Aula, Budapest.

Egyéb hivatkozások

1. Beightler, C. S. and Wilde, D. J. (1966) Diagonalization of Quadratic Forms by Gauss Elimination. *Management Science*, **12** 371–379.
2. Chabrilac, Y. and Crouzeix, J.-P. (1984) Definiteness and semidefiniteness of quadratic forms revisited. *Linear Algebra Appl.* **63** 283–292.
3. Charnes, A.- Cooper, W. W. and Henderson, A. (1953) *An introduction to linear programming*. John Wiley & Sons, Inc. New York.
4. Cottle R. W. (1974) Manifestations of the Schur complement. *Linear Algebra Appl.*, **8** 189–211.
5. Hadley, G. (1961) *Linear algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.
6. Hadley, G. (1963) *Linear Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.
7. Hadley, G. (1964) *Nonlinear and dynamic programming*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.
8. Haynsworth, E.V. (1968) Determination of the inertia of a partitioned hermitian matrix. *Linear Algebra Appl.*, **1** 73–81.
9. Prékopa, A. (1968) *Lineáris Programozás*. Bolyai Társulat, 1969.
10. Sylvester, J. J. (1852) A demonstration of a theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. *Philosophical Magazine*, **4** 138–142.

THE ROLE OF BÉLA KREKÓ IN THE REFORM OF ECONOMICS AND BUSINESS EDUCATION — IN MEMORIAM BÉLA KREKÓ (1915-1994)

Mathematics in the curriculum of business and economics education at the Karl Marx University of Economics had been confined to some college algebra and combinatorics before Béla Krekó launched his campaign to introduce basic operations research as part of a modernization process. He was also the founding father of a new specialization, a group of students majoring in mathematics and operations research. He fiercely fought with wit and determination to overcome the resistance of an old guard of professors opposing the plan. Béla Krekó emerged from this battle with flying colors. As a result, in the early sixties operations research became an integral part of economics education and it has been there ever since. He did a tremendous job in writing books catering to the special needs of economists and business people. These books were on par of those used at leading universities in the western world. The books were written in the unmistakable style of a witty, insightful author. The exposition was centered around the pivoting techniques (Gauss-Seidel elimination) making proofs constructive, ready to be converted to algorithms. A sample of problems is given where by the pivoting approach standard problems in linear algebra are solved. The exposition is based on parts taken from Krekó's books.

NEM-PARAMÉTERES OKSÁG TESZTEK KÉT VÁLTOZÓRA¹

ABALIGETI GALLUSZ
PTE KTK

Tanulmányunkban a klasszikus Granger-féle okság teszt legismertebb nem-paraméteres alternatíváit mutatjuk be, továbbá ismertetünk egy független kopuláción alapuló, önállóan kidolgozott módszert. A tesztek bemutatása után különböző nem-lineáris adatgeneráló folyamatok segítségével szimulált adatsorokon hasonlítjuk össze őket, illetve a referenciaként szolgáló klasszikus okság tesztet. Eredményeink azt mutatják, hogy az új módszer bizonyos esetekben jobban teljesít a korábbiaknál. Végül a Dow Jones index hozama és kereskedési volumene közti oksági viszony vizsgálatán keresztül szemléltetjük, miként lehet gyakorlatban alkalmazni a módszereket. Az empirikus eredmények az irodalomban korábban is kimutatott oksági viszonyok létezését támasztják alá.

1 Bevezetés

A gazdasági modellezés a 20. század második felében a sztochasztikus idősorok felé orientálódott, ami rengeteg új fogalom megjelenését eredményezte. Többek között a sztochasztikus folyamatok és idősorok közti oksági relációk definiálására merült fel igény. Már 1956-ban Wiener is kísérletet tett rá (Wiener, 1956), később Granger egy műhelytanulmányában (Granger, 1963), az áttörést azonban az 1969-es *Econometrica* cikke (Granger, 1969) hozta meg.

Granger eredeti megfontolása gyorsan elterjedt az ökonometriai vizsgálatokban. Ennek oka, hogy – később látni is fogjuk – rendkívül könnyen tesztelhető és nem kell hozzá különösebb számítási kapacitás sem. Ennek következtében gyakorlatilag ez lett az egyetlen okság teszt, ami minden ökonometriai szoftverbe implementálásra került. Az elmúlt 40 évben ugyanakkor megjelentek más alternatívák is okság tesztekre, melyek igyekeznek a Granger-féle okság teszt hiányosságait pótolni, ebben a tanulmányban négy ilyen tesztet mutatunk be és hasonlítjuk össze teljesítményüket a klasszikus Granger-féle okság teszttel.

A precíz elméleti fogalmak előtt próbáljunk intuitíve oksági viszonyt definiálni két idősor között. Arról van tehát szó, hogy tudjuk megragadni az időben eltolt események közötti viszonyt. Erre a legegyszerűbb módszer a

¹Szeretnék köszönetet mondani dr. Rappai Gábornak témavezetőmnek, dr. Kehl Dánielnek kollégámnak valamint a tanulmány lektorának a többszöri alapos átolvasásért és az előremutató megjegyzéseikért. Beérkezett: 2015. május 30. E-mail: xx@ktk.pte.hu.

korreláció pontosabban a parciális korreláltság, hiszen abból már minden más hatás ki van szűrve. A legegyszerűbb, ha egy lineáris modellt írunk fel, ekkor ugyanis a parciális korrelációs együtttható kapcsolatban áll a lineáris modell paramétereivel. Tekintsük tehát a következő modellt:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta X_{t-1} + \epsilon_t^Y, \quad (1)$$

ahol $\epsilon_t^Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ függetlenek egymástól, korábbi értékeiktől valamint az X_t és Y_t változóktól minden $t = 1, \dots, T$ -re. Ez alapján azt mondhatjuk, hogy X „naivan” *nem oka* az Y -nak, ha $\beta = 0$, hiszen egy adott időpontbeli Y érték és az őt megelőző időpontbeli X érték között nincs – lineáris – kapcsolat.

Általában véve maradunk annál az egyszerű esetenél, amikor két változót vizsgálunk, és az egyik időszori érték a másikhoz képest csupán egy periódussal van késleltetve. Tesszük ezt azért, hogy a lehető legerősebb jelöléseken keresztül tudjuk bemutatni a módszertant. Természetesen minden módszer tetszőlegesen kiterjeszthető a késleltetés hosszának és a változók számának szempontjából, a hivatkozott cikkek ezeket precízen meg is teszik.

A tanulmány szerkezete a következő: a 2. szakaszban a klasszikus Granger-okságról lesz szó röviden, taglalva előnyeit, hátrányait. A 3. szakasz a klasszikus oksági fogalom nem-paraméteres kiterjesztését és a hozzá tartozó teszteket mutatja be, illetve ajánlunk egy, a független kopulán alapuló önállóan kidolgozott módszert, míg a 4. szakaszban Monte-Carlo szimuláció segítségével hasonlítjuk össze az addig bemutatott módszereket különböző adatgeneráló folyamatok esetén, végül az 5. szakaszban egy illusztratív példán mutatjuk be a módszereket.

2 Klasszikus Granger-okság

Az oksági irodalom gyakorlatilag legtöbbször hivatkozott, úttörő cikke Granger (1969) szerint az X idősor oka az Y -nak, ha javítja az előrejelzést az – ebben az esetben – egy periódussal korábbi értékének segítségével. Azaz, ha a múlt információi közül kivesszük az X korábbi értékét, akkor nagyobb lesz a becslésünk varianciája, tehát romlik a becslés:

$$\mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) < \mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}), \quad (2)$$

ahol $\mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1})$ abból a becslésből származó hibatagok varianciáját jelöli, amiben az Y_t -t magyarázzuk az Y_{t-1} és X_{t-1} változókkal, míg a (2) bal oldalán a restriktív tartalmú modell becslésének varianciája áll. A (2) egyenlőtlenség tagadásaként áll elő a nem-okság definíciója

$$\mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}), \quad (3)$$

azaz, ha a becslés hibáját nem csökkenti az X_{t-1} változó bevonása (természetesen növelni nem fogja tudni, ezért szerepel egyenlőségjel a két variancia között).

Ez a definíció nem ír elő semmit a modellre, de éppen ezért nem is ad iránymutatást arra nézve, miként kellene tesztelni az okságot. Granger

nyomán tekintsünk ezentúl egyszerűen lineáris esetet, azaz vegyük az (1) modellt, és számoljuk ki először a (3) egyenlet jobb és bal oldalán szereplő varianciák kifejezéséhez szükséges feltételes várható értékeket:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) &= \mathbf{E}(\alpha Y_{t-1} + \beta X_{t-1} + \epsilon_t^Y | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \\ &= \alpha Y_{t-1} + \beta X_{t-1} + \mathbf{E}\epsilon_t^Y = \alpha Y_{t-1} + \beta X_{t-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1}) &= \mathbf{E}(\alpha Y_{t-1} + \beta X_{t-1} + \epsilon_t^Y | Y_{t-1}) = \\ &= \alpha Y_{t-1} + \beta \mathbf{E}(X_{t-1}) + \mathbf{E}\epsilon_t^Y = \alpha Y_{t-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Így a (3) egyenlet alapján, akkor nincs okság X és Y idősorok között, ha felírva a varianciákat

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) &= \mathbf{D}^2(Y_t - \mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1})) = \\ &= \mathbf{D}^2(Y_t - \alpha Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) = \mathbf{D}^2\epsilon_t^Y, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}) &= \mathbf{D}^2(Y_t - \mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1})) = \mathbf{D}^2(Y_t - \alpha Y_{t-1}) = \\ &= \mathbf{D}^2(\beta X_{t-1} + \epsilon_t^Y) = \beta^2 \sigma_X^2 + \mathbf{D}^2\epsilon_t^Y, \end{aligned} \quad (7)$$

azok megegyeznek. Tehát az előző szakaszban a nem okságra intuitívan bevezetett kritériumot kaptuk vissza az eredeti Granger-féle definíciót alkalmazva, azaz

$$\mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}) \Leftrightarrow \beta = 0. \quad (8)$$

Visszatérve a (4) és (5) egyenletekre, rögtön át tudjuk fogalmazni a definíciót, hiszen

$$\mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1}) \Leftrightarrow \beta = 0 \quad (9)$$

feltétel is igaz lesz. Vagyis, ha nem változik a feltételes várható értéke Y idősornak az X egy periódussal korábbi értékének ismeretében, akkor X nem oka Y -nak, vagy másképpen ha X nem módosítja Y várható értékét, akkor nem is oka annak.

Végül egy harmadik módon is ki lehet fejezni a nem-okságot, mégpedig a korábban már említett parciális korreláció segítségével:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_t X_{t-1} | Y_{t-1}) &= \mathbf{E}((\alpha Y_{t-1} + \beta X_{t-1} + \epsilon_t^Y) X_{t-1} | Y_{t-1}) = \\ &= \mathbf{E}(\alpha Y_{t-1} X_{t-1} + \beta X_{t-1}^2 + \epsilon_t^Y X_{t-1} | Y_{t-1}) = \\ &= \alpha Y_{t-1} \mathbf{E}(X_{t-1}) + \beta \mathbf{E}(X_{t-1}^2) + \mathbf{E}(\epsilon_t^Y) \mathbf{E}(X_{t-1}) = \beta \sigma_X^2, \end{aligned} \quad (10)$$

amiből a nem okság feltétele:

$$Y_t \perp X_{t-1} | Y_{t-1} \Leftrightarrow \beta = 0. \quad (11)$$

Ezek alapján már tudunk adni egy definíciót a klasszikus nem-okság fogalmára, ami ebben az egyszerű 2-változós, egy periódus késleltetést tartalmazó esetben az alábbi:

1. Definíció. Az X idősor klasszikus vagy gyenge értelemben nem-oka az Y -nak, ha az alábbi ekvivalens tulajdonságok valamelyike teljesül²

- (i) $\mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \mathbf{D}^2\epsilon(Y_t | Y_{t-1})$,
- (ii) $\mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1})$,
- (iii) $Y_t \perp X_{t-1} | Y_{t-1}$.

Gyakorlatban a definíció teljesülését – egyszerű esetben a $\beta = 0$ körülmény fennállását – az (i) tulajdonság vizsgálatára vezetjük vissza. F-próbával tesztljük az X_{t-1} bevonásának szignifikáns varianciacsökkentő hatását (Wald-teszt).

A klasszikus oksági fogalmat lezárandó vegyük sorba, milyen előnyökkel, hátrányokkal bír ez a megközelítés. Mellette szól, hogy egyszerű, könnyen érthető fogalomról van szó, a hozzá tartozó tesztek egyszerűen elvégezhetők ráadásul a legtöbb statisztikai, ökonometriai szoftver támogatja őket, ráadásul a teszt a mintaelemszámra nézve robusztus. Ugyanakkor a linearitás feltételezése nagyon megkötí a kutató kezét, miközben egyáltalán nem biztos, hogy modellezni is kívánja a folyamatokat, csupán kideríteni változók közötti okság meglétét. További hátránya, hogy magasabb rendű momentumokban bekövetkező hatásokat nem mutatja ki. Napjainkban a pénzügyi idősorok kapcsán már nemcsak a várható érték (vagy valamilyen származtatott változó várható értéke) fontos, ha csak a VaR-ra gondolunk, máris világos, hogy a szórás központi szereppel bír a modellekben, de hasonlóan lényeges lehet a döntéshozóknak a csúcossága vagy ferdesége egy-egy hozamidőszaknak. Az ezeket befolyásoló hatások kimutatására sajnos a klasszikus Granger-féle teszt – közvetlenül – nem alkalmas. Erre kínál megoldást a következő szakaszban bemutatandó nem-paraméteres változata a Granger-okságnak.

3 Nem-paraméteres Granger-okság

Az előző szakasz végén láttuk, hogy a klasszikus Granger-okság – a sok jó tulajdonsága mellett – rengeteg hiányossággal bír, ezeket orvosolandó merült fel az erős értelemben vett oksági fogalom bevezetése.

Az 1. Definícióból kiderült, hogy a gyenge okságot jól lehet jellemezni a feltételes várható érték és a feltételes kovariancia fogalmával. Ez utóbbi fogalmak szigorítása merült fel Granger–Newbold (1977) könyvben, ahol a szerzőpáros definiálja az erős okságot:

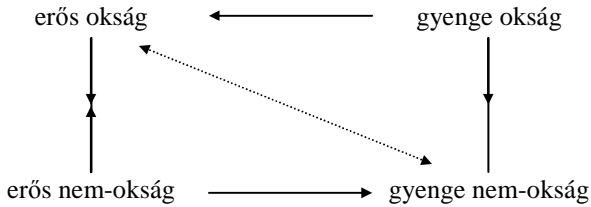
2. Definíció. Az X erősen nem oka az Y -nak, ha az alábbi két ekvivalens tulajdonság valamelyike teljesül minden $t = 1, \dots, T-r$ ³

- (i) $\mathcal{L}(Y_t | Y_{t-1}) = \mathcal{L}(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1})$,
- (ii) $Y_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1} | Y_{t-1}$.

²Az (ii) átírást lásd Granger (1963) cikkben, az (iii) átírást lásd Florens–Mouchart (1985) cikkben.

³Természetesen az (i) és (ii) egyenletek ekvivalenciája könnyen belátható, azért emeltük ki mindkét megfogalmazási módot, mert az irodalomban mindkettőt gyakran használják.

A definíció első állítása a feltételes várható értéket szigorította feltételes eloszlássá, míg a második a feltételes korrelálatlanságot feltételes függetlenséggé. Rögtön látszik, hogy ha X erősen nem-oka Y -nak, akkor gyengén sem oka, hiszen ha két eloszlás megegyezik, akkor azok várható értékei is megegyeznek. Másrészt a ha X gyengén oka Y -nak, akkor erősen is oka hiszen, ha a feltételes várható értékek nem egyenlőek akkor a feltételes eloszlások sem lehetnek egyenlőek. Ezeket a tulajdonságokat foglaltuk össze az alábbi ábrán.



Ugyanakkor megfordítva ezek az állítások nem igazak, példaként tekintsük a következő idősorokat:

$$Y_t = X_{t-1} \cdot \epsilon_t^Y$$

$$X_t = \epsilon_t^X,$$

ahol $\epsilon_t^X, \epsilon_t^Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ korrelálatlan fehér zajok. Vizsgáljuk először is a gyenge okságot! Az 1. definíció (ii) pontjában szereplő egyenlőség két oldalát kifejtve:

$$\mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \mathbf{E}(X_{t-1} \cdot \epsilon_t^Y | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \mathbf{E}\epsilon_t^Y \cdot X_{t-1} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{E}(Y_t | Y_{t-1}) = \mathbf{E}(X_{t-1} \cdot \epsilon_t^Y | Y_{t-1}) = \mathbf{E}(\epsilon_{t-1}^X \cdot \epsilon_t^Y) = \mathbf{E}\epsilon_{t-1}^X \cdot \mathbf{E}\epsilon_t^Y = 0, \quad (13)$$

mivel a két feltételes várható érték megegyezik, a definíció értelmében az X gyengén nem oka az Y -nak. Nézzük most meg az erős okságot a 2. definíció (i) pontja alapján:

$$\mathcal{L}(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \mathcal{N}(0, X_{t-1}^2) \quad (14)$$

$$\mathcal{L}(Y_t | Y_{t-1}) = \mathcal{L}(Y_t) = \mathcal{L}(\epsilon_t^Y) \cdot \mathcal{L}(\epsilon_{t-1}^X) = \mathcal{N}(0, 1) \cdot \mathcal{N}(0, 1), \quad (15)$$

utóbbi viszont még csak nem is normális eloszlás, tehát erős értelemben oka X az Y -nak.

A gyenge vagy klasszikus értelemben vett oksági definíciókhoz lineáris modellen keresztül jutottunk el, míg az erős okság definíciójához nem kellett semilyen modellfeltevéssel élni, ezért a továbbiakban az erős okságra a szakirodalomban elterjedt *nem-paraméteres okság* névvel hivatkozunk.

A 2. definíció (ii) pontja alapján, egyszerűen ki lehet mondani a mintabeli nem-paraméteres nem-okságra vonatkozó nullhipotézist:

$$H_0 : \mathcal{L}(Y_t | Y_{t-1}, X_{t-1}) = \mathcal{L}(Y_t | Y_{t-1}) . \quad (16)$$

Sajnos ennek az ellenőrzése rendkívül nehézkes, éppen ezért rengeteg, egymástól akár jelentősen is különböző módszer is ismert az irodalomban sokszor egészen mély matematikai ismeretek igényelve. Közös ugyanakkor a tesztekben, hogy – éppen a nem-paraméteres – mivoltuk miatt csupán valamilyen határeloszlást tudnak követni a tesztstatistikák, amik pedig viszonylag nagy mintaelemszámot követelnek meg, ez tovább szűkíti ezen tesztek alkalmazhatóságát. Utóbbi problémát súlyosbítja, hogy minél több késleltetést szerepeltetünk a vizsgálatban, a felhasználható része a mintának is annál rövidebb lesz.

Röviden áttekintve a módszerek Su–White (2007) cikkben a szerzők a feltételes eloszlások egyezőségét a változókhoz tartozó feltételes karakterisztikus függvények eltérésén keresztül igyekeznek vizsgálni, míg Sun (2008) funkcionálanalízisbeli ismeretekre építve a kovariancia operátor segítőjével oldja meg a nem-linearitás problémáját. Van azonban egy jobban körülhatárolható halmaza a módszereknek, amikor a sűrűségfüggvények viszonyait vizsgálják a szerzők, utóbbiak információtartalmát sűrítve, átalakítva kezelik a problémát. Jelen tanulmány kereteibe ez utóbbi módszerek összehasonlítása fért bele.

A szakasz végén vegyük sorba, milyen előnyökkel, illetve hátrányokkal bír a nem-paraméteres okság fogalom a klasszikus értelemben vett Granger-oksággal szemben. A fogalom előnyei:

- Semmilyen feltevéssel nem kell élni arra vonatkozólag, hogy milyen modell illeszkedik az időszori értékekre, illetve milyen eloszlást követnek, ez adja a nem-paraméteres jellegét a tesztnek.
- Míg a klasszikus Granger-teszt csupán az „okozati” idősor várható értékében bekövetkező változást jelzi, azaz csak az első momentumban történő okságot mutatja ki, addig a nem-paraméteres okság tesztek a magasabb rendű momentumokban is jeleznek. Ez elsősorban a rövid távú, magas frekvenciás – általában pénzügyi – adatokban rendkívül fontos, ahol a várható érték olykor teljesen irreleváns, sokkal fontosabb a szórás.

Természetesen hátrányai is vannak ennek a megközelítésnek:

- Látni fogjuk a következő szakaszokban, hogy ezek a próbák összetett számításokat igényelnek, amihez társul a szoftveres támogatás hiánya is, így egy gyakorlati felhasználónak nehéz dolga van, ha alkalmazni szeretné őket.
- Ebben az esetben két eloszlást hasonlítunk össze, tehát az idősoroktól elvárt az erős stacionaritás ahhoz, hogy a próbák megbízható eredményt

adjanak⁴. Szemben a klasszikus Granger-féle teszttel, amihez csupán a gyenge stacionaritás szükséges.

- Kis minták esetében erősen megkérdőjelezhetőek az eredmények, amiket a nem-paraméteres tesztek szolgáltatnak.

A következőkben két, merőben más megközelítést mutatunk be a nem-paraméteres okság tesztelésére. Az egyes megközelítésekben gyakorlatilag az a különbség, hogyan tudják az eloszlásokban rejtőző információt úgy sűríteni, hogy végül tesztelhető legyen az eredeti nullhipotézis – azaz a feltételes eloszlások egyezősége. Az első információsűritő módszer a korrelációs integrál, melynek kapcsán két, egymással közeli kapcsolatban álló tesztet mutatunk be. Míg a második információsűritésre alkalmazott módszer a kopulák segítségével történik, gyakorlatilag arról van szó, hogy a kopulák segítségével nem véges tartójú sűrűségfüggvények „beszoríthatóak” az egységnégyzetbe (kockába), s így az eloszlások vizsgálata leegyszerűsödik.

3.1 Korrelációs integrál alapú tesztek

A (16) egyenletben megfogalmazott nullhipotézis könnyebb kezelhetősége érdekében tegyük fel, hogy az Y_t és X_t változóknak létezik sűrűségfüggvénye. Így a feltételes függetlenség akkor teljesül, ha

$$f_{Y_t|Y_{t-1}, X_{t-1}}(y_t | y_{t-1}, x_{t-1}) = f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}), \quad (17)$$

ahol y_t, y_{t-1}, x_{t-1} tetszőleges valós számok. Azaz az X változó nem oka az Y -nak, ha az iménti sűrűségfüggvények minden pontban megegyeznek. Ezzel kapcsolatban – többek között – két nagy probléma merül fel:

- Empirikus esetben egy folytonos változó a legritkább esetben veszi fel kétszer ugyanazt az értéket, így a mintában annyi különböző feltételünk lesz a sűrűségfüggvényekben, amennyi a mintaelemszáma, ebből következően egy elemű „almintákon” kellene tesztelni a függetlenséget – ugyebár minden különböző feltételre –, ami értelmetlen feladat.
- Ha az előbbi problémát megoldottuk, akkor is a sűrűségfüggvények teljes tartóján kellene összehasonlítani az egyenlet jobb és bal oldalát, ami szintén nagyon nehéz.

Ez adja a motivációt, egy olyan fogalom bevezetéséhez, ami egyrészt a feltételben „megengedőbb” a szigorú egyenlőségnél, másrészt van annyi információtartalma, hogy ki lehessen váltani vele a sűrűségfüggvényt, ugyanakkor ne egy függvény legyen – amit ismét pontonként kellene összehasonlítani –, hanem egy, a mintát jellemző skálár.

Ezeknek az elvárásoknak próbál megfelelni a korrelációs integrál, melyet Baek-Brock (1991) cikk alapján a következőképpen definiálunk:

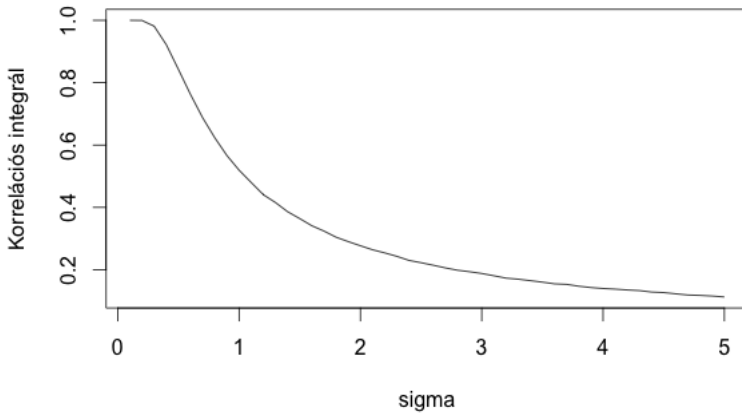
⁴Mindhárom bemutatásra kerülő módszer esetében elvárás, lásd (Hiemstra–Jones, 1994), (Diks–Panchenko, 2005), (Taamoutia et al., 2014).

3. Definíció. Az X d -dimenziós valószínűségi változóhoz tartozó korrelációs integrál a következő

$$C_X(\delta) = \mathbf{P}\left(\max_{i=1}^d |X_i^1 - X_i^2| < \delta\right), \quad (18)$$

ahol $X^1, X^2 \sim X$ független valószínűségi változók és $\delta > 0$.

Természetesen $d = 1$ esetben a definíció egyszerűen $C_X(\delta) = \mathbf{P}(|X^1 - X^2| < \delta)$. Ez gyakorlatilag egy, az eloszlásra jellemző mérőszám (mint pl. az eloszlásnak egy momentuma), azt fejezi ki, mennyire koncentrálnak az adott eloszlásban az értékek. Vegyük példaképpen a normális eloszlást, ekkor a szórás függvényében kifejezhető a korrelációs integrál, amit az 1. ábra szemléltet.



1. ábra Normális eloszláshoz tartozó korrelációs integrál különböző szórások mellett ($\delta = 1$, $n = 10000$)

Jól látható, hogy alacsony szórás mellett a korrelációs integrál értéke egyhez közeli, ahogy nő a szórás, úgy kevésbé koncentráltak az értékek, és ezzel párhuzamosan csökken a korrelációs integrál értéke is.

Lássuk, miként kapcsolódik a korrelációs integrál fogalma eloszlások egyenlőségének teszteléséhez, eleget tud-e tenni elvárásainknak. Legyen $f_X(x)$ az X valószínűségi változóhoz tartozó sűrűségfüggvény, először is vezessük be a következő indikátorfüggvényt, amit a későbbiekben is használni fogunk:

$$\mathbf{1}_\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x - y| < \delta \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (19)$$

Vegyünk egy n elemű mintát X -ből, jelölje x_i az i -edik mintaelemet, és becsljük meg minden mintaelemre a hozzá tartozó sűrűségfüggvény értéket:

$$f_X(x_i) \approx \frac{1}{2\delta} \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} \mathbf{1}_\delta(x_i, x_j) = \hat{f}_X(x_i). \quad (20)$$

Most átlagoljuk le minden mintaelemre a hozzá tartozó becslt sűrűségfüggvény értékét:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_X(x_i) &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_X(x_i) = \\ &= \frac{1}{2\delta} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \mathbf{1}_\delta(x_i, x_j) = \hat{C}_X(\delta) \approx C_X(\delta), \end{aligned} \tag{21}$$

ezzel végérvényben egy becslőfüggvényét kaptuk a korrelációs integrálnak. A (21) egyenletből az is látszik, hogy ha két eloszlás megegyezik, akkor nyilván a hozzájuk tartozó korrelációs integrál is, tehát ha a korrelációs integrálra vonatkozó nullhipotézist vetünk el, akkor az eredeti eloszlásokra is el kell vetni. Ennek az állításnak a megfordításáról az irodalomban nem találtunk eredményt. Úgy sejtjük, általában nem igaz, de „hétköznapi” eloszlásokra valamint elég kicsi δ mellett bizonyos mértékben igaz a megfordítás is, hiszen egyébként nem lenne ereje az erre épülő teszteknek.

Gyakorlatilag ez a logikája mindkettő korrelációs integrálra építő tesztnek, amiket a következő szakaszokban bemutatunk.

3.1.1 Hiemstra–Jones-teszt

A továbbiakhoz alakítsuk át a (17) egyenletet a következő – tesztelendő – formára:

$$H_0 : f_{Y_t, X_{t-1} | Y_{t-1}}(y_t, x_{t-1} | y_{t-1}) = f_{Y_t | Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}) f_{X_{t-1} | Y_{t-1}}(x_{t-1} | y_{t-1}), \tag{22}$$

ez a valószínűségi változók nyelvén pontosan azt jelenti, hogy az Y_t az X_{t-1} -től független Y_{t-1} ismeretében.

A Hiemstra–Jones-teszt (Hiemstra–Jones, 1994) ebből az alakból indul ki, és maga a módszer a következő észrevételen alapul⁵:

1. Lemma. *Amennyiben a (22) igaz, úgy különböző t és s időpontokra*

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta, |X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta \mid Y_{t-1} = Y_{s-1} = y) = \\ &= \mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta \mid Y_{t-1} = Y_{s-1} = y) \mathbf{P}(|X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta \mid Y_{t-1} = Y_{s-1} = y). \end{aligned} \tag{23}$$

Bizonyítás. Az F1 függelékben közöljük. □

A szakasz elején bevezetett korrelációs integrál segítségével a (23) egyenlőség, mint nullhipotézis már „majdnem” tesztelhető. A Szerzők ötlete az, hogy ezt a feltételben szereplő egyenlőséget „rontsuk” el egy kicsit, tehát ne várjuk el a tökéletes egyenlőséget a feltételben, csupán annyit, hogy megfelelően közel essen egymáshoz a két érték, azaz

⁵Ez az alapötlet Baek-Brock (1991, 1992) cikkekben már megtalálható, végül ennek egy módosítása „terjedt el” a gyakorlatban

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta, |X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta \mid |Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \delta) = \\ & = \mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta \mid |Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \delta) \mathbf{P}(|X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta \mid |Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \delta). \end{aligned} \quad (24)$$

Ez nyilván némileg torzítja az eredményeket (természetesen $\delta \rightarrow 0$ határértékben visszkapjuk a pontos H_0 -t). A fenti feltételes valószínűségeket visszaírjuk egyszerűbb formába, és ezzel meg is kapjuk a Hiemstra–Jones-teszt nullhipotézisét

$$\begin{aligned} H_0^\dagger : \quad & \mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta \mid |Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \delta, |X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta) = \\ & = \mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta \mid |Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \delta). \end{aligned} \quad (25)$$

Ezt a kifejezést már lehet a korrelációs integrálok alapuló módszerrel tesztelni, először is átírjuk a feltételes valószínűségeket, így a következőhöz jutunk:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta, |Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \delta, |X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta)}{\mathbf{P}(|Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \delta, |X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta)} = \\ & = \frac{\mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta, |Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \delta)}{\mathbf{P}(|Y_{t-1} - Y_{s-1}| < \delta)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Felhasználva a korrelációs integrál definícióját, adódik hogy

$$\frac{C_{Y_t, Y_{t-1}, X_{t-1}}(\delta)}{C_{Y_{t-1}, X_{t-1}}(\delta)} = \frac{C_{Y_t, Y_{t-1}}(\delta)}{C_{Y_{t-1}}(\delta)}. \quad (27)$$

Vegyük észre, hogy ugyanerre a kifejezésre jutunk, ha a korrelációs integrált „naiv” módon használjuk, tehát (99) egyenletben egyszerűen kicseréljük a sűrűségfüggvényeket a hozzájuk tartozó korrelációs integrálra.

A következőkben vázlatosan ismertetjük a teszt menetét, idáig viszonylag könnyű dolgunk volt a nullhipotézisek felírásával, természetesen a tesztfüggvények – asszimptotikus – eloszlásának levezetése ennél sokkal bonyolultabb, az eredeti cikkekben megtalálhatóak. Eddig az y_t , y_{t-1} és x_{t-1} tetszőleges valós számokat jelöltek, a következőkben azonban egy véges minta elemeit fogjuk érteni alattuk, ahol $t = 1, \dots, T$. Először is írjuk át (27) egyenletben szereplő elméleti korrelációs integrálokat azok becslőfüggvényeire:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{Y_t, Y_{t-1}, X_{t-1}} &= \frac{1}{(2\delta)^3} \frac{1}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T \sum_{s \neq t} \mathbf{1}_\delta(y_t, y_s) \cdot \mathbf{1}_\delta(y_{t-1}, y_{s-1}) \cdot \mathbf{1}_\delta(x_{t-1}, x_{s-1}) \\ \hat{C}_{Y_{t-1}, X_{t-1}} &= \frac{1}{(2\delta)^2} \frac{1}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T \sum_{s \neq t} \mathbf{1}_\delta(y_{t-1}, y_{s-1}) \cdot \mathbf{1}_\delta(x_{t-1}, x_{s-1}) \\ \hat{C}_{Y_t, Y_{t-1}} &= \frac{1}{(2\delta)^2} \frac{1}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T \sum_{s \neq t} \mathbf{1}_\delta(y_t, y_s) \cdot \mathbf{1}_\delta(y_{t-1}, y_{s-1}) \\ \hat{C}_{Y_{t-1}} &= \frac{1}{2\delta} \frac{1}{T(T-1)} \sum_{t=1}^T \sum_{s \neq t} \mathbf{1}_\delta(y_{t-1}, y_{s-1}), \end{aligned} \quad (28)$$

ekkor H_0^\dagger fennállása esetén aszimptotikusan igaz lesz, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{\hat{C}_{Y_t, Y_{t-1}, X_{t-1}} - \hat{C}_{Y_t, Y_{t-1}}}{\hat{C}_{Y_{t-1}, X_{t-1}} - \hat{C}_{Y_{t-1}}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (29)$$

$$\frac{S_{\text{HJ}}(T)}{\sqrt{T}}$$

ahol $S_{\text{HJ}}(T)$ becslésére a Szerzők (Hiemstra–Jones, 1994) a cikk függelékében térnek ki. A szimulációk során ezt az Z -statisztikát számoltuk ki, majd kétoldali p -értéket határoztuk meg hozzá.

3.1.2 Diks–Panchenko-teszt

Diks és Panchenko szerint a Hiemstra és Jones tesztje sokszor jelez okságot indokolatlan esetben is (Diks–Panchenko, 2005), ami elsősorban a iménti szakaszban bemutatott torzító hatás miatt van, ennek minimalizálása motiválja a szerzőket.

Az ötletük, hogy a nullhipotézis fennállása mellett egy súlyfüggvénnyel szorozzák meg (99) egyenlet mindkét oldalát. Világos, hogy tetszőleges $g(\cdot)$ függvénnyel megszorozva a nullhipotézist az nem változik, tehát ezt megtehetjük, de természetesen újra ki kell számolni, hogy immáron milyen eloszlást fog követni a próbafüggvény. A szerzők az $f_{Y_{t-1}}^2(y_{t-1})$ függvényt választották, így a Diks–Panchenko-teszt nullhipotézise

$$H_0^\dagger : \quad f_{Y_t, Y_{t-1}, X_{t-1}}(y_t, y_{t-1}, x_{t-1}) f_{Y_{t-1}}(y_{t-1}) = \quad (30)$$

$$= f_{X_{t-1}, Y_{t-1}}(x_{t-1}, y_{t-1}) f_{Y_t, Y_{t-1}}(y_t, y_{t-1}).$$

Ennek az állításnak is korrelációs integrálon keresztül történik a tesztelése, ahogy azt az előző szakaszban a Hiemstra–Jones-tesztnél láttuk. Felhasználva a (28) jelöléseit az alábbi próbafüggvényhez jutunk:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\hat{C}_{Y_t, Y_{t-1}, X_{t-1}} \hat{C}_{Y_{t-1}} - \hat{C}_{Y_{t-1}, X_{t-1}} \hat{C}_{Y_t, Y_{t-1}}}{S_{\text{DP}}(T)} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (31)$$

$$\sqrt{T}$$

ahol az $S_{\text{DP}}(T)$ kiszámításáról Diks–Panchenko (2005) cikk A.1 függelékében térnek ki a szerzők. A HJ-teszthez hasonlóan itt is kétoldali p -értéket számoltunk a tesztfüggvény értékéből. Mindkét teszt esetében felmerül a kérdés, hogy milyen δ értékkel számoljunk, ennek optimális értékéről, illetve levezetéséről részletesen (Diks–Panchenko, 2005) cikkben olvashatunk.

Összefoglalóan elmondhatjuk a korrelációs integrálon alapuló módszerekről, hogy a feltételes függetlenség tesztelésének problémáját ötletesen visszavezeti feltétel nélküli eloszlásokra, így folytonos változókra is kezelhetővé válik a probléma. Ugyanakkor a feltételes eloszlásokban a feltétel „gyengítése” azzal jár, hogy nem pontosan az eredeti problémát tudjuk tesztelni segítségükkel.

3.2 Kopulákkal kapcsolatos tesztek

A kopulák használata mára már teljesen általánossá vált a pénzügyi matematika legtöbb területén (kockázatmenedzsment, árazási modellek stb.), használatukat a valószínűségi változók együttmozgását mérő korreláció hiányosságai tették indokolttá. A pénzügyi piacokon az Eszközök árfolyamai/hozamai szövevényes módon függenek egymástól, ezeket a függőségeket nem lehet lineáris keretek között mérni, ahogyan azt a korreláció teszi. Ugyanakkor az együttes eloszlásukat nem ismerjük, a kopulák ezt a hiányt próbálják kisebb-nagyobb sikerrel pótolni. A bemutatni kívánt módszerhez a kopuláknak csupán néhány tulajdonsága fontos, így viszonylag rövid bevezetőt adunk róluk, magyar nyelven (Varga, 2004) cikkét ajánljuk a részletesebb megismerésükhöz.

A továbbiakban nekünk csupán 2 és 3 dimenziós kopulákra lesz szükségünk, így az egyszerűség kedvéért most 3 dimenziósra mondjuk ki a definíciót valamint mutatjuk be a számunkra szükséges tulajdonságokat, abból egyszerűen lehet szűkíteni 2 változóra.

4. Definíció. *Egy $C: [0, 1]^3 \rightarrow [0, 1]$ eloszlásfüggvény kopula, ha minden változója szerinti marginális eloszlása standard egyenletes.*

Tekinthetjük úgy is, hogy a kopula egy $[0, 1]$ -es értelmezési tartományra átskálázott eloszlásfüggvény, s így tudunk belőle a $[0, 1]$ intervallumba eső véletlen számokat generálni, amiből inverz eloszlásfüggvényekkel véletlen értékeket kapunk. A kopulákkal kapcsolatos legfontosabb tétel következik (szintén három változós formában):

1. Tétel (Sklar, 1959). *Minden 3 változós F eloszlásfüggvényhez létezik olyan, szintén 3 változós C kopula, hogy*

$$C(F_X(x), F_Y(y), F_Z(z)) = F(x, y, z).$$

Tehát, ha a priori a kopulából, vagy a marginálisokból, vagy az együttes eloszlásfüggvényből ismerünk kettőt (vagy feltesszük, hogy ismert), akkor a harmadikat ki tudjuk számolni. A tétel jelentősége abban áll, hogy empirikus problémáknál a marginálisokat tipikusan ismerjük, hiszen az egyes változók empirikus eloszlásfüggvényét a mintából meg tudjuk határozni. Ezek után valamilyen a priori feltevés útján kiválasztjuk a használatos kopulát, s ki tudjuk számolni az együttes eloszlásfüggvényt, illetőleg tudunk generálni az együttes eloszlásfüggvény segítségével mesterséges mintát, amit különböző szimulációkhoz felhasználhatunk.

A kopuláknak számos hasznos és fontos tulajdonsága van, számunkra most a kopulasűrűség, ami kiemelt szerepet játszik. Deriváljuk mindhárom változó szerint a (32) egyenlet mindkét oldalát, így a következőt kapjuk:

$$\frac{\partial^3}{\partial u \partial v \partial w} C(u, v, w) f_X(x) f_Y(y) f_Z(z) = f(x, y, z), \quad (33)$$

ahol $u = F_X(x)$, $v = F_Y(y)$ és $w = F_Z(z)$ valamint f_X, f_Y, f_Z a megfelelő marginálisokhoz és f az együttes eloszlásfüggvényhez tartozó sűrűségfüggvények.

5. Definíció. Egy 3 változós C kopulához tartozó kopulasűrűség alatt a következő függvényt értjük

$$c(u, v, w) = \frac{\partial^3}{\partial u \partial v \partial w} C(u, v, w). \quad (34)$$

Amíg a kopula az eloszlásfüggvényhez kapcsolódó fogalom volt, addig a kopulasűrűség a sűrűségfüggvényhez, tulajdonságai is ehhez hasonlítanak: nem-negatív (de nem biztos hogy egynél kisebb) és a kopulához hasonlóan az egység kockán (négyzeten) van értelmezve. A rövid módszertani áttekintés után két eljárást mutatunk be, melyek segítségével a feltételes függetlenség problémája kezelhető.

3.2.1 Bernstein-kopulán alapuló teszt

Taamoutia et al. (2014) cikke nyomán a kopulán alapuló okság teszt ötlete, hogy a peremeloszlások ismeretében egy kopulából származtatjuk az együttes eloszlást. Azaz az együttes eloszlásokat, pontosabban azok sűrűségfüggvényeit kicseréljük kopulasűrűségekre, s az együttes eloszlás helyett a becsült kopulákat fogjuk összehasonlítani, ebből vezetjük le a tesztet. Ha tehát fennáll (16), akkor igaz, hogy

$$H_0 : f_{Y_t|Y_{t-1}, X_{t-1}}(y_t | y_{t-1}, x_{t-1}) = f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_t | y_{t-1}). \quad (35)$$

Először a feltételes sűrűségeket írjuk át, így a H_0

$$\frac{f_{Y_t, Y_{t-1}, X_{t-1}}(y_t, y_{t-1}, x_{t-1})}{f_{Y_{t-1}, X_{t-1}}(y_{t-1}, x_{t-1})} = \frac{f_{Y_t, Y_{t-1}}(y_t, y_{t-1})}{f_{Y_{t-1}}(y_{t-1})}, \quad (36)$$

beírva a kopulasűrűségeket a (33) egyenlet alapján, és bevezetve a $w_t = F_{Y_t}(y_t)$ illetve $u_t = F_{X_t}(x_t)$ jelöléseket

$$\begin{aligned} & \frac{c_{Y_t, Y_{t-1}, X_{t-1}}(w_t, w_{t-1}, u_{t-1}) f_{Y_t}(y_t) f_{Y_{t-1}}(y_{t-1}) f_{X_{t-1}}(x_{t-1})}{c_{Y_{t-1}, X_{t-1}}(w_{t-1}, u_{t-1}) f_{Y_{t-1}}(y_{t-1}) f_{X_{t-1}}(x_{t-1})} = \\ & = \frac{c_{Y_t, Y_{t-1}}(w_t, w_{t-1}) f_{Y_t}(y_t) f_{Y_{t-1}}(y_{t-1})}{f_{Y_{t-1}}(y_{t-1})}, \end{aligned} \quad (37)$$

így egyszerűsítések után az átírt – immáron csak kopulasűrűségeket tartalmazó – nullhipotézis:

$$H_0^* : \frac{c_{Y_t, Y_{t-1}, X_{t-1}}(w_t, w_{t-1}, u_{t-1})}{c_{Y_t, Y_{t-1}}(w_t, w_{t-1}) c_{Y_{t-1}, X_{t-1}}(w_{t-1}, u_{t-1})} = 1. \quad (38)$$

Az világos, hogy a mintából ismerjük az empirikus peremeloszlásokat, már „csak” egy megfelelő empirikus kopulát kell kiválasztani, amivel meg tudjuk becsülni a fenti kifejezést, és meg tudjuk határozni, milyen eloszlást követ.

Idősoros modellekben leggyakrabban alkalmazott kopula a Bernstein-kopula (részletesen lásd Sancetta–Satchell, 2004). A teljesen általános definícióját nem mondjuk ki, már csak a speciálisan erre a feladatra felírandó 2- és 3-dimenziós esetekkel foglalkozunk (általában sem nehezebb megadni a kopulát,

ezért is tekintünk el az általánosságtól). Ehhez tekintsük az (Y_t, Y_{t-1}, X_{t-1}) – ismeretlen – eloszlásból származó $\{(y_t, y_{t-1}, x_{t-1})\}_{t=1}^T$ mintát. Legyenek továbbá $u_t = F_{X_t, T}(x_t)$ és $w_t = F_{Y_t, T}(y_t)$, ahol $F_{Y_t, T}$ és $F_{X_t, T}$ a T hosszú mintából származó empirikus eloszlásfüggvényt jelöli, azaz a mintabeli x_t és y_t értékek az u_t és w_t -hez tartozó empirikus kvantilisek.

Vezessük be továbbá a következő 2- és 3-dimenziós kockákat:

$$B_k^{i_1, i_2} = \left[\frac{i_1 - 1}{k}, \frac{i_1}{k} \right) \times \left[\frac{i_2 - 1}{k}, \frac{i_2}{k} \right), \quad (39)$$

$$B_k^{i_1, i_2, i_3} = \left[\frac{i_1 - 1}{k}, \frac{i_1}{k} \right) \times \left[\frac{i_2 - 1}{k}, \frac{i_2}{k} \right) \times \left[\frac{i_3 - 1}{k}, \frac{i_3}{k} \right), \quad (40)$$

valamint legyen $\mathbf{1}_{B_k^{i_1, i_2}}(\cdot, \cdot)$ és $\mathbf{1}_{B_k^{i_1, i_2, i_3}}(\cdot, \cdot, \cdot)$ a kockákba esésre vonatkozó indikátor függvény.

Ekkor a 2-dimenziós, becült Bernstein-kopulákat egy tetszőleges pontban a mintán az alábbi módon számítjuk

$$\begin{aligned} & \hat{c}_{Y_t, T, Y_{t-1}, T}(g_1, g_2) = \\ & = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[k^2 \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \mathbf{1}_{B_k^{i_1, i_2}}(w_t, w_{t-1}) \prod_{\ell=1}^2 \binom{k}{i_\ell - 1} g_\ell^{i_\ell - 1} (1 - g_\ell)^{(k - i_\ell - 1)} \right], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \hat{c}_{Y_{t-1}, T, X_{t-1}, T}(g_2, g_3) = \\ & = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[k^2 \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \mathbf{1}_{B_k^{i_1, i_2}}(w_{t-1}, u_{t-1}) \prod_{\ell=1}^2 \binom{k}{i_\ell - 1} g_\ell^{i_\ell - 1} (1 - g_\ell)^{(k - i_\ell - 1)} \right], \end{aligned} \quad (42)$$

továbbá a 3-dimenziókat az alábbi módon

$$\begin{aligned} & \hat{c}_{Y_t, T, Y_{t-1}, T, X_{t-1}, T}(g_1, g_2, g_3) = \\ & = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[k^3 \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k \sum_{i_3=1}^k \mathbf{1}_{B_k^{i_1, i_2, i_3}}(w_t, w_{t-1}, u_{t-1}) \prod_{\ell=1}^3 \binom{k}{i_\ell} g_\ell^{i_\ell} (1 - g_\ell)^{(k - i_\ell - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Ebből a három – a mintán megbecsült – kopulából egy ún. *oksági mérték*et számolunk ki⁶

$$\text{CM}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log \left(\frac{\hat{c}_{Y_t, T, Y_{t-1}, T, X_{t-1}, T}(w_t, w_{t-1}, u_{t-1})}{\hat{c}_{Y_t, T, Y_{t-1}, T}(w_t, w_{t-1}) \cdot \hat{c}_{Y_{t-1}, T, X_{t-1}, T}(w_{t-1}, u_{t-1})} \right). \quad (44)$$

Ez mutató Taamoutia et al. (2014) alapján már aszimptotikusan normális eloszlást fog követni a megfelelő várható értékkel és szórással:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T k^{-3/2} \frac{2\text{CM}_T - T^{-1} k^{3/2} \xi}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

⁶Geweke (1982) cikkben szereplő oksági mérték nem-lineáris kiterjesztése.

ahol $\sigma = \sqrt{2}(\pi/4)^{3/2}$ valamint $\xi = -\pi^{3/2}/8 + \pi/2k^{-1/2} - k^{-1}(\pi^{1/2} - 1)$.

Ahogy a korrelációs integrál alapú teszteknel, itt is el kell látni értékkel egy „bandwidth” paramétert, a k -t, ami jelen esetben a kockák méretében jelenik meg. A szerzők nyomán ezt $k = \lfloor T^{1/2} \rfloor$ nagyságúra választjuk.

3.2.2 Független-kopulán alapuló teszt

Az utolsó módszer, ami bemutatásra kerül, egy általunk kidolgozott teszt a nem-paraméteres okság vizsgálatára. Módszerünk alapja, hogy két folytonos skálán mért változó – gondolhatunk itt rögtön idősorokra – feltétel nélküli függetlenségének tesztelése kopulák segítségével megoldott feladat (lásd. Genest–Remillard, 2004; Genest et al., 2007). Ugyanakkor számunkra a feltételes függetlenség, ami igazán érdekes, hiszen éppen a feltétel ismeretében tudjuk kiszűrni azokat a hatásokat, melyek nem közvetlenül lépnek fel Y_t és X_{t-1} között.

A probléma hasonló mint a korábbi korrelációs integrálon alapuló módszer bemutatásnál, a folytonos skálán mért idősori értékeknél véges mintán lehetetlen egy-egy adott pontra elkészíteni a feltételes eloszlást, mert a rész-minta egy elemből fog állni. Ennek áthidalására – Hiemstra és Jones ötletétől vezérelve – beosztottuk a mintában szereplő y_{t-1} értékeket k darab csoportba, így kaptunk k számú egymástól elszeparált almintát. Ezt követően minden almintán elvégeztük a kopula alapú függetlenség tesztet, amit \mathbf{R} környezetben a *copula* csomag tartalmaz (Hofert et al. 2015), ami szintén Genest–Remillard módszerét használja. Majd az így kapott p -értékeket aggregáltuk, a módszer Fisher (1948) ötletén alapul, aki azonban független rész-mintákra dolgozta ki a módszert. Nem független minták esetére Brown (1975) adott egy aggregálási módszert. Ez azonban viszonylag nehézkesen alkalmazható a gyakorlatban, ugyanis numerikus integrálást is tartalmaz, s így a számítási idő rendkívüli módon megnő, a szimuláció számítási ideje egyszerűen túl hosszú. Alternatív megoldást kínál Poole et al. (2015), az ő módszerüket – amire empirikus Brown-módszer néven fogunk hivatkozni ezentúl – azonban némileg módosítani kellett (melyről később lesz szó), hogy esetünkben is alkalmazni lehessen.

Összefoglalva – és formalizálva – a fentieket, a következő lépéseket kell követni ez eljárás során:

1. Definiáljuk a feltételi halmazokat: legyen $k > 1$ és

$$B_k^i = \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k} \right),$$

ahol $i \in \{1, \dots, k\}$, így természetesen $\cup_{i=1}^k B_k^i = [0, 1)$ és $B_k^i \cap B_k^j = \emptyset$.

2. Bontsuk szét a teljes mintánkat az alábbi almintákra

$$(y_t^i, x_{t-1}^i) := \{(y_t, x_{t-1}) \mid F_{Y_{t-1}}(y_{t-1}) \in B_k^i\},$$

és az empirikus marginálisokra vezessük be az $F_{Y_t, T}^i(\cdot)$ és $F_{X_{t-1}, T}^i(\cdot)$ jelöléseket. Legyenek továbbá az egyes alminták idő indexei a \mathcal{T}_k^i -vel

jelölve, ezekre természetesen igaz, hogy $\cup_{i=1}^k \mathcal{T}_k^i = \{1, \dots, T\}$ és $\mathcal{T}_k^i \cap \mathcal{T}_k^j = \emptyset$. Ez utóbbi halmazok hosszát pedig jelöljük rendre T_k^i -vel, ekkor természetesen $\sum_{i=1}^k T_k^i = T$.

3. Minden S_k^i részmintán végezzük el a függetlenség tesztet. Ehhez először becsüljük meg az empirikus kopulákat a részmintákon:

$$\hat{C}_T^i(u, w) = \frac{1}{T_k^i} \sum_{t \in \mathcal{T}_k^i} \mathbf{1}(F_{Y_{t,T}}^i(y_t) \leq u) \mathbf{1}(F_{X_{t-1,T}}^i(x_{t-1}) \leq w) .$$

A nullhipotézisben a függetlenséget a független kopula segítségével tudjuk megfogalmazni:

$$H_0^i : \hat{C}_T^i(u, w) = u \cdot w .$$

Magában a függetlenség tesztben a próbafüggvény az empirikus kopula pontonkénti eltérését vizsgálja a független kopulától:

$$\text{CM}(u, w) = \sqrt{n}(\hat{C}_T^i(u, w) - u \cdot w) .$$

Ez a kifejezés véletlen u, w értékekre aszimptotikusan Cramer–von Mises statisztikát követ⁷, melynek saját táblázatából olvassuk ki az i -edik almintához tartozó teszt p -értékét, jelöljük ezt p^i -vel. Megjegyezzük, hogy ezt a lépést teljes egészében a **copula** csomag végzi.

4. Aggregáljuk a p -értékeket az empirikus Brown-módszer segítségével:

$$\Psi = -2 \sum_{i=1}^k \log p^i ,$$

ami egy átskálázott χ^2 eloszlást követ, azaz $\Psi \sim c\chi_{2f}^2$. A c és f konstansok kiszámítását az F-2 Függelékben ismertetjük. Ezek alapján a „globális” p -értéket a következőképpen számolhatjuk ki

$$p = 1 - F_{\chi_{2f}^2}(\Psi/c) ,$$

amennyiben ez az előre rögzített szignifikanciaszint alatt van, akkor elvetjük az eredeti, feltételes függetlenségre vonatkozó nullhipotézist.

A módszer fontos része a B_k^i -k halmazok rendszerének meghatározása, természetesen nem kötelező egyenletesen k részre osztani a $[0, 1]$ intervallumot, viszont minden esetben biztosítani kell az elegendő mintaelemszámot a részmintákban a számításokhoz. További vizsgálatra lehet érdemes a B_k^i -k valamilyen más – bizonyos szempontból optimális – felosztása, ez nem tárgya ennek a cikknek.

⁷A Cramer–von Mises statisztika eloszlások közti távolságot mér, ebből a szempontból hasonló a Kolmogorov–Szmirnov statisztikához, részletesebben Csörgő–Faraway (1996) tanulmányát ajánljuk.

A kopula alapú módszerekről összefoglalásképpen elmondhatjuk, hogy a tesztelendő feltételes függetlenséget kopulák függetlenségére vezetik vissza. Ennek a megközelítésnek az előnye, hogy nem a teljes \mathbb{R}^2 és \mathbb{R}^3 halmazokon kell vizsgálni sűrűségfüggvényeket, hanem az egység oldalú négyzeteken, kockákon ezzel gyakorlatilag besűrítjük a mintapontokat. Általában a kopulák illesztése szoftveresen viszonylag jól támogatott, ugyanakkor ezek konkrét problémákra való alkalmazása, ahogy az esetünkben is történik, már önálló programozási munkát igényel.

Ezzel a végére értünk a tesztek – legalábbis vázlatosan – bemutatató résznek, amiből kiderült, hogy a nem-paraméteres okság tesztelése alapvetően egy feltételes függetlenség tesztre vezethető vissza. Ezt pedig eltérő metodológiákkal próbálják kezelni a szerzők, azonban közös vonása a teszteknek, hogy relatíve nagy a számításigényük, és mivel asszimptotikus tulajdonságaikat ismerjük a próbafüggvényeknek, így elengedhetetlen a megfelelő mintanagyság az alkalmazásukhoz.

4 Szimulációs példa

A számításokhoz R környezetet használtunk, elsősorban a meggyőző teljesítménye miatt, illetve a kopulák illesztése csomagokkal jól támogatott. A korábban bemutatott négyféle nem-paraméteres Granger-tesztből a Hiemstra–Jones- és Diks–Panchenko-teszteket egy külső szoftver segítségével futtattuk.⁸ A Bernstein-kopulán alapuló tesztet teljes egészében R nyelven implementáltuk, a független kopula módszer lényegi részét a `copula` csomag végzi (Hofert et al., 2015) illetve (Poole et al., 2015) módszert a szerzők által írt függvények, valamint a referencia tesztként szolgáló klasszikus Granger-tesztet többek között az `lmtest` csomag (Zeileis–Hothorn, 2002) tartalmazza.

A szimulációkhoz négy különböző adatgeneráló folyamatot használtunk, melyek az alábbiak:

$$\text{DGP1: } Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta X_{t-1} + \epsilon_t^Y, \quad X_t = \gamma X_{t-1} + \epsilon_t^X, \quad (46)$$

$$\text{DGP2: } Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta X_{t-1}^2 + \epsilon_t^Y, \quad X_t = \gamma X_{t-1} + \epsilon_t^X, \quad (47)$$

$$\text{DGP3: } Y_t = \beta Y_{t-1} X_{t-1} + \epsilon_t^Y, \quad X_t = \gamma X_{t-1} + \epsilon_t^X, \quad (48)$$

$$\text{DGP4: } Y_t = \sigma_t \epsilon_t^Y, \quad \sigma_t^2 = \alpha + \beta X_{t-1}^2, \quad X_t = \gamma X_{t-1} + \epsilon_t^X, \quad (49)$$

ahol $\epsilon_t^X, \epsilon_t^Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ független valószínűségi változók. Valamennyi adatgeneráló folyamatot úgy definiáltuk, hogy $\beta \neq 0$ esetben $X \rightarrow Y$ okság álljon fenn, valamint $\alpha, \beta, \gamma < 1$ feltétel mellett mind a négy folyamat stacioner, így a próbák megbízható eredményt szolgáltatnak.⁹

⁸Ez gyakorlatilag egy, a szerzőpáros által írt C kód, amit apróbb módosítások után újrafordítottunk és R-ből hívtuk meg a programot, majd visszaolvastuk az eredményeket R-be, a kód megtalálható a Cees Diks weblapján: <http://www.uva.nl/en/about-the-uva/organisation/staff-members/content/d/i/c.g.h.diks/c.g.h.diks.html>

⁹Taamoutia et al. (2014) is többek között ezeket a DGP-eket használják a szimulációkban.

Valamennyi adatgeneráló folyamatnál „ok” szerepét betöltő X_t idősor elsőrendű autoregresszív idősor, a különbség az „okozat” idősor formájában van. A DGP1 egyszerű lineáris modell gyakorlatilag referenciaként szolgál, a DGP2-ben az ok kvadratikus formában jelenik meg, a DGP3 folyamat felfogható egy változó együtthatós elsőrendű autoregresszív modellként, ahol az együttható szintén egy AR(1)-ből származik, míg a DGP4 leginkább egy GARCH modellre hasonlít, amiben a feltételes variancia egy exogén változótól függ. Az elsőt leszámítva mindegyikben van valamilyen nemlinearitás, így azt várjuk, hogy esetükben a Granger-féle teszt „rossz” eredményt szolgáltat, ugyanakkor a másik három módszer jelezzen a $\beta \neq 0$ esetben.

A szimulációk során 250 periódus hosszú idősorokat generáltunk ezt praktikusán úgy értelmezzük, mintha egy éves időhorizonton, napi frekvencián vizsgálnánk tőzsdei idősorokat (pl. napi záróárfolyamot). Ezekre a generált idősorokra minden esetben alkalmazzuk a teszteket és a kapott p -érték valamint az előre rögzített szignifikancia szint alapján döntünk a nullhipotézisről. Majd a szimuláció végén minden különböző β értékre ($\beta = 0$ esetben ez a H_0 , egyébként a H_1 feltétel teljesülését jelenti) kiszámoltuk milyen arányban vetettük el a nullhipotézist, azaz néhány pontban kiszámoltuk a tesztek erőfűggyvényeit, kiegészítve azzal az esettel, amikor a nullhipotézis igaz. Ez utóbbi feltétel mellett ideális esetben vissza kellene kapni az előre rögzített szignifikanciaszintet, minden egyéb β érték mellett pedig elméletileg minden esetben el kellene vetni a nullhipotézist. Az eredményeket bemutatásakor „HJ”-vel a Hiemstra–Jones-tesztet, „PD”-vel a Panchenko–Diks-tesztet, „CB”-vel a Bernstein-kopulán, „CI”-vel a független kopulán alapuló tesztet, míg „GR”-rel a Granger-féle tesztet jelöltük.

Az 1. táblázat a 0 és 0.5 közötti β értékek esetében vizsgálja a tesztek teljesítményét $\alpha = \gamma = 0.5$. Ahogyan vártuk a DGP1 esetében (lineáris modell), a Granger-féle teszt érzékenyebben reagál a β növekedtével mint a többi, nem-paraméteres társa. Nem sokkal elmaradva tőle a független kopula alapú teszt is viszonylag alacsony β mellett nagy arányban jelzi az okságot, a két korrelációs integrálon alapuló módszer csupán 0.3-as β érték körül mutat szignifikáns okságot, a legrosszabb eredményt pedig a Bernstein-kopulán alapuló teszt produkálja. Ugyanakkor a többi – nem lineáris – eset mindegyikében nagyon rosszul teljesít a Granger-féle teszt, hiszen rendkívül kicsi arányban jelez okságot, itt már csak a nem-paraméteres próbákban bízhatunk. A DGP2 (kvadratikus) esetében a korrelációs integrálon alapuló tesztek bizonyultak hatékonyabbnak, míg a DGP3-nál (változó paraméterű AR) a kopula alapúak reagáltak gyorsabban a β paraméter növekedtére. A DGP4 esetében (GARCH jellegű) a korrelációs integrál alapú tesztek jeleztek korábban, ráadásul a független kopula alapú teszt az adott paraméter tartományban nagyon rossz arányban jelzett okságot.

A szimulációk tanulsága, hogy a nem-paraméteres próbák esetében sem mindegy, hogy milyen jellegű nem-linearitás jelenik meg a folyamatban. A kopula alapú módszerek érzékenyebbek a várható értékben történő elmozdulásokra (DGP2, DGP3), míg a korrelációs integrálon alapuló módszerek jobban teljesítenek a második momentumban bekövetkező hatásokra.

	β	HJ	PD	CB	CI	GR
DGP1	0.00	0.041	0.029	0.001	0.040	0.050
	0.10	0.080	0.073	0.009	0.114	0.436
	0.20	0.308	0.373	0.052	0.461	0.952
	0.30	0.743	0.816	0.261	0.837	0.999
	0.40	0.968	0.984	0.708	0.983	1.000
	0.50	0.999	0.999	0.931	1.000	1.000
DGP2	0.00	0.045	0.039	0.001	0.051	0.052
	0.10	0.156	0.157	0.014	0.085	0.082
	0.20	0.661	0.680	0.232	0.183	0.163
	0.30	0.948	0.958	0.689	0.370	0.256
	0.40	0.997	0.998	0.970	0.629	0.300
	0.50	1.000	1.000	0.997	0.795	0.369
DGP3	0.00	0.028	0.020	0.055	0.039	0.053
	0.10	0.045	0.038	0.087	0.086	0.061
	0.20	0.139	0.125	0.309	0.410	0.076
	0.30	0.359	0.361	0.692	0.824	0.113
	0.40	0.730	0.734	0.964	0.986	0.149
	0.50	0.910	0.917	0.996	0.997	0.244
DGP4	0.00	0.037	0.031	0.069	0.051	0.044
	0.10	0.628	0.548	0.191	0.055	0.105
	0.20	0.931	0.892	0.432	0.081	0.158
	0.30	0.991	0.974	0.607	0.093	0.144
	0.40	0.996	0.993	0.780	0.110	0.176
	0.50	0.998	0.998	0.877	0.106	0.187

1. táblázat. $T = 250$, $N = 1000$, $\beta \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$,
nominális szignifikancia szint= 5%

Ez alapján nem gondoljuk, hogy létezik – legalábbis jelenleg – egy olyan módszer, amit önmagában lehetne alkalmazni, a gyakorlati problémáknál célszerű mindegyik módszerrel megvizsgálni az adott idősorokat. A továbbiakban mi is ezt a gyakorlatot fogjuk követni.

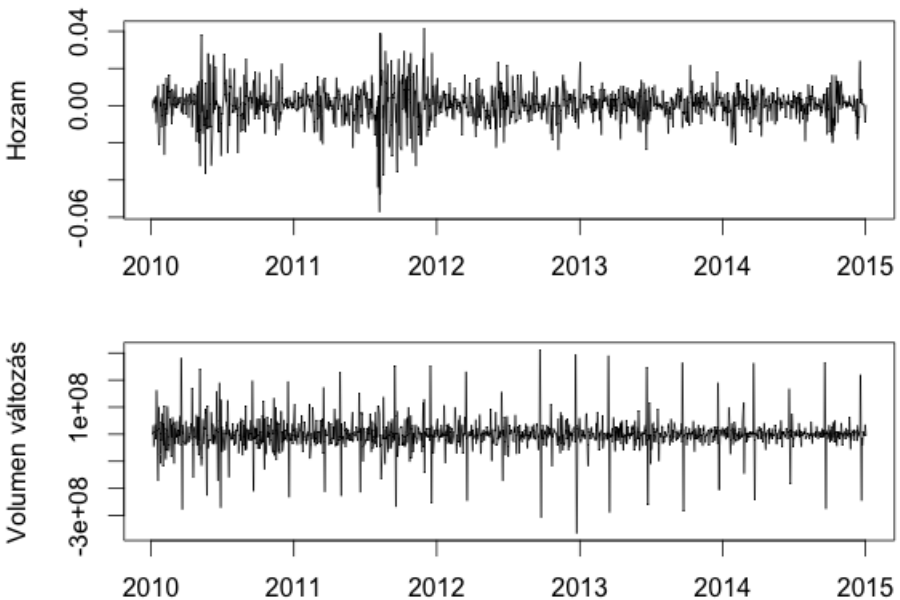
5 Empirikus példa: hozam és kereskedési volumen kapcsolata

A tőzsdei részvények hozama és kereskedési volumenük közötti viszony régóta témája a pénzügyi ökonometriának. Az első cikk, ami ezen a területen készült Granger–Morgenstern (1963) szerzők nevéhez fűződik, ők még csupán heti kereskedési adatok alapján próbálta egyes részvények illetve részvényindexek hozama és volumene közti kapcsolatot feltárni. Azóta természetesen sok más elemzés is napvilágot látott¹⁰, kiváló összefoglalót ad a téma empirikus eredményeiről és az ezeket magyarázni próbáló elméleti modellekről Karpoff (1987). Általában az mondható el, hogy a hozam volumenre gyakorolt hatását könnyebb kimutatni, hiszen a piaci szereplők nagy része árjelzés alapján kereskedik, a fordított irány ilyen szempontból érdekesebb, hiszen ebben az esetben az sem egyértelmű, hogy létezik-e ilyen hatás.

¹⁰Többek között Hiemstra–Jones (1994) cikk is ezen a példán teszteli az általuk kifejlesztett tesztet

A korábban tárgyalt módszertani részeket bemutató cikkek is szinte kivétel nélkül a hozam-volumen kapcsolatán keresztül illusztrálják elméleti eredményeiket. Hiemstra–Jones (1994) hosszú adatsorokon (30 éves idősor a II. világháború előtt és 40 éves utána) mindkét irányú nem-lineáris kapcsolatot kimutatták a Dow Jones Industrial Average (továbbiakban DJIA) részvény index esetében. Ugyanezen az indexen végzett elemzést Diks–Panchenko (2005), 1950 és 1990 között szintén bizonyították mindkét irányú nemlineáris kauzalitást. Míg Bouezmarni et al. (2009) 1988 és 2005 között vizsgálták az S&P 500-at, ahol mindkét irányban talált nem lineáris kapcsolatokat. Közös továbbá az említette cikkekben, hogy klasszikus – lineáris – okságot csak úgy sikerült kimutatni, ha az oknak a hozamot, okozatnak pedig a volument tekintették, fordított irányban nem.

Elemzésünk során mi a DJIA indexet vizsgáltuk napi frekvencián. Hozam alatt a napi záró indexérték loghozamát értjük, a volumen pedig a részvényindexbe tartozó papírok napi összes kereskedési volumenének első differenciája (darabszámban megadva). Az vizsgálat időtartomány 2010.01.04-től 2015.01.02-ig terjed, tehát 5 év kereskedési napjainak adatai, ezeket láthatjuk a 2. ábrán.

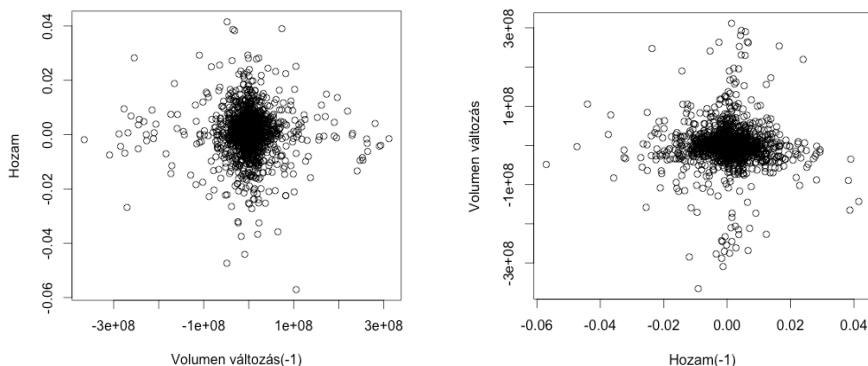


2. ábra. DJIA index hozama és volumen változása 2010.01.04-től 2015.01.02-ig

Mindkét idősor esetben vizsgáltuk a stacionaritást, a loghozam és a volumen első differenciája is egyértelműen stacioner mind a Dickey-Fuller, mind a KPSS teszt alapján. Differencia képzés nélkül a volumen csak Dickey-Fuller teszt alapján tekinthető stacionernek, ezért döntöttünk az első rendű integrálás mellett. Meg kell még jegyezni, hogy a volumen változás esetében negyedévenként tapasztalható kiugrások egyrészt az osztalék fizetésnek, másrészt a szokásos negyedéves jelentésnek köszönhető. Ettől a hatástól nem sérült a

stacionaritás, így amellet döntöttünk, hogy nem szűrjük ki az adatokból, hiszen ez is egyfajta információvesztést eredményezne.

Az oksági viszonyt egy napos késleltetésben vizsgáltuk, ezt pontdiagramon is megpróbáltuk vizualizálni (természetesen ez egy feltétel nélküli eloszlás, így csalóka lehet az ábra), amit a 3. ábrán mutatunk be.



3. ábra. Hozam és volumen változás viszonya a DJIA index esetében 2010.01.04-től 2015.01.02-ig

Az ábrákról egyértelmű tendenciát nem tudtunk leolvasni, „ránézésre” kiugró értékek is gyakorlatilag minden irányban tapasztalhatóak, így semmiféle prekoncepciónk nem volt a tesztek eredményével kapcsolatban. A 2. táblázatban közöljük tesztek p -értékeit.

	$R \Rightarrow \Delta V$	$\Delta V \Rightarrow R$
HJ	0.015**	0.012**
PD	0.016**	0.012**
CB	0.018**	0.014**
CI	0.036**	0.244
GR	0.006***	0.169

2. táblázat. Oksági tesztek eredményei a DJIA indexen, R -rel a hozamot, ΔV -vel a volumen változást jelöltük

Az eredményekből kiderül, hogy 5 éves időhorizonton egyértelműen teljesül, hogy az egy nappal késleltetett hozam oka a másnapi volumenváltozásnak, 5%-on minden teszt szignifikáns hatást mutat, a Granger-féle okságteszt pedig 1%-on is szignifikáns hatást jelez. Fordítva ugyanakkor a klasszikus Granger-teszt valamint a független kopulán alapuló teszt nem mutat okságot, ellentétben a többi teszttel, mely összecseng az irodalom eredményeivel. Utóbbi alapján úgy gondoljuk, a fordított okság nem a várható értékben jelenik meg, ugyanis arra a független kopula alapú teszt érzékeny, hasonlóan

a Granger-féle teszthez (feltéve persze, ha lineáris módon hat a volumen a hozam várható értékére).

6 Összegzés

Munkánkban bemutatunk három ismert, a nem-paraméteres (vagy másképp erős) Granger-okság tesztelésére alkalmas módszert, illetve egy önállóan kidolgozott eljárást. Majd a módszereket összehasonlítottuk szimulációk segítségével különböző adatgeneráló folyamatok esetén, végül egy empirikus példán szemléltettük gyakorlati használhatóságukat.

A szimulációink eredménye alátámasztja a bevezetőben is taglalt jelenséget, miszerint ezek a tesztek méltatlanul alulreprezentáltak ökonometriai vizsgálatokban, ennek oka vélhetőleg a szoftveres támogatás hiánya. Az eredmények láttán megállapítható, hogy a nem-paraméteres tesztek nem teljesítenek sokkal rosszabbul lineáris esetben, mint a klasszikus Granger-teszt, ugyanakkor messze felülmúlják azt nem-lineáris esetben, így mindenképpen érdemes kipróbálni őket, olyan esetben, amikor a Granger-teszt nem jelez okságot, ám az intuíció mégis az ellenkezőjét súgja. A szimulációk során továbbá azt tapasztaltuk, hogy bizonyos esetekben az általunk kidolgozott módszer hatékonyabb az irodalomban eddig ismereteseknél, így indokoltnak találjuk használatát.

Az empirikus példánk a tőzsdei hozamok és a kereskedési volumen közti okságot hivatott feltérképezni, azt találtuk, hogy hosszú távon mindkét irányú okság igazolható, azonban rövidebb távon egyiket sem lehet szignifikánsan kimutatni. Hosszú távon ez az irodalommal összecsengő eredmény, ugyanakkor meglepő a rövid távon kapott eredmény. Ehhez azonban hozzá kell tenni, hogy a nem-paraméteres tesztek kismintás tulajdonságai nem meggyőzőek, elsősorban azért, mert a tesztek valamilyen határeloszlási tételen alapulnak.

További kutatási irányként elsősorban a független kopulán alapuló teszt precíz kidolgozását látjuk, illetve egyéb olyan empirikus példák vizsgálatát, amikben az okság vélhetően valamilyen nem-lineáris módon hat.

Függelék

F1 Az 1. Lemma bizonyítása

1. Lemma. *Amennyiben a (22) igaz, úgy különböző t és s időpontokra*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta, |X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta \mid Y_{t-1} = Y_{s-1} = y) = \\ & = \mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta \mid Y_{t-1} = Y_{s-1} = y) \mathbf{P}(|X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta \mid Y_{t-1} = Y_{s-1} = y). \end{aligned} \tag{50}$$

Bizonyítás. Ennek belátására írjuk fel a valószínűségeket indikátorfüggvények várható értékeként¹¹, így:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta, |X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta \mid Y_{t-1} = Y_{s-1} = y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \mathbf{1}(|y_t - y_s| < \delta, |x_{t-1} - x_{s-1}| < \delta) f(y_t, y_s, x_{t-1}, x_{s-1} \mid y) d(y_t, y_s, x_{t-1}, x_{s-1}). \end{aligned} \quad (51)$$

Kihasználva, hogy t és s időpontok egymástól független megfigyeléseket indukálnak, szorzatra bontható az együttes sűrűségfüggvény

$$= \int_{\mathbb{R}^4} \mathbf{1}_\delta(y_t, y_s) \mathbf{1}_\delta(x_{t-1}, x_{s-1}) f(y_t, x_{t-1} \mid y) f(y_s, x_{s-1} \mid y) d(y_t, y_s, x_{t-1}, x_{s-1}). \quad (52)$$

Most már alkalmazhatjuk a (22) egyenletben megfogalmazott nullhipotézist, így

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^4} \mathbf{1}_\delta(y_t, y_s) \mathbf{1}_\delta(x_{t-1}, x_{s-1}) f(y_t \mid y) f(x_{t-1} \mid y) f(y_s \mid y) f(x_{s-1} \mid y) d(y_t, y_s, x_{t-1}, x_{s-1}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \mathbf{1}_\delta(y_t, y_s) \mathbf{1}_\delta(x_{t-1}, x_{s-1}) f(y_t, y_s \mid y) f(x_{t-1}, x_{s-1} \mid y) d(y_t, y_s, x_{t-1}, x_{s-1}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_\delta(y_t, y_s) f(y_t, y_s \mid y) d(y_t, y_s) \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_\delta(x_{t-1}, x_{s-1}) f(x_{t-1}, x_{s-1} \mid y) d(x_{t-1}, x_{s-1}) = \\ &= \mathbf{P}(|Y_t - Y_s| < \delta \mid Y_{t-1} = Y_{s-1} = y) \mathbf{P}(|X_{t-1} - X_{s-1}| < \delta \mid Y_{t-1} = Y_{s-1} = y). \end{aligned} \quad (53)$$

□

F2 Az empirikus Brown-módszer módosítása

A szükséges paraméterek tehát:

$$f = \frac{\mathbf{E}^2\Psi}{\mathbf{D}^2\Psi}, \quad c = \frac{k}{f},$$

ahol $\mathbf{E}\Psi = 2k$ és $\mathbf{D}^2\Psi = 4k + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(-2 \log p^i, -2 \log p^j)$. Ez utóbbi kovarianciának a kiszámítása, pontosabban megbecslése azonban nem triviális feladat, hiszen a p -értékekből nem rendelkezünk mintával. Poole et al. (2015) cikkben éppen ezzel foglalkozik, a szerzőknek sikerült a p -értékek közti kovarianciát a minták közti kovarianciára visszavezetni. Az általuk ehhez készített kódot használjuk fel a szimulációkhoz a későbbiekben.

Esetünkben a p -értékek kétmintás próbából származnak, így kicsit módosítani kell a számításokat. Az alábbi kifejezést igyekszünk megbecsülni

$$\mathbf{D}^2\Psi = 4k + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(-2 \log p^i, -2 \log p^j). \quad (54)$$

Vezessük be a következő jelölést (a szerzők nyomán), $w_i = 2 \log p_i$, ekkor az elméleti kovarianciát becsülhetjük a szokásos módon

$$\text{Cov}(-2 \log p^i, -2 \log p^j) = \mathbf{E}((w^i - \mathbf{E}w^i)(w^j - \mathbf{E}w^j)).$$

¹¹ $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}(X \in A))$

A probléma, hogy w_i -ből kellene úgy mintát venni, hogy csak egy darab áll rendelkezésre belőle. Ezt oldják fel a szerzők úgy, hogy egyes elemeihez rendelt percentilisek transzformáltjai lesznek a w_i -ből származó mintaelemek. Azaz t -ik mintaelem

$$w_t^i = -2 \log F_{Y_t^i, X_{t-1}^i}(y_t^i, x_{t-1}^i),$$

ahol $F_{Y_t^i, X_{t-1}^i}$ az i -ik almintához tartozó – és a szerzőkkel ellentétben nem egy-, hanem – kétváltozós empirikus eloszlásfüggvény. Az ebből kiszámolt i -edik és j -edik almintá közötti kovarianciát c_{ij} -vel jelölve már ki tudjuk számolni a paramétereket:

$$f = \frac{2k}{4k + 2 \sum_{i < j} c_{ij}}, \quad c = \frac{k}{f}.$$

F3 További szimulációs eredmények

Elsőként a korábbi $T = 250$ hosszú mintát $T = 100$ -ra rövidítettük, ennek a szimulációnak az eredményeit láthatjuk a 3. táblázatban.

	β	HJ	PD	CB	CI	GR
DGP1	0.00	0.034	0.025	0.000	0.038	0.064
	0.10	0.048	0.037	0.000	0.094	0.204
	0.20	0.139	0.140	0.000	0.212	0.593
	0.30	0.324	0.365	0.007	0.461	0.892
	0.40	0.617	0.668	0.040	0.751	0.989
	0.50	0.863	0.890	0.151	0.913	0.999
DGP2	0.00	0.031	0.021	0.000	0.044	0.053
	0.10	0.073	0.067	0.001	0.065	0.077
	0.20	0.252	0.253	0.002	0.121	0.153
	0.30	0.573	0.582	0.028	0.211	0.219
	0.40	0.798	0.804	0.105	0.303	0.321
	0.50	0.931	0.937	0.274	0.428	0.348
DGP3	0.00	0.024	0.013	0.002	0.048	0.068
	0.10	0.029	0.024	0.000	0.081	0.064
	0.20	0.062	0.042	0.008	0.179	0.051
	0.30	0.150	0.130	0.033	0.447	0.098
	0.40	0.323	0.308	0.148	0.696	0.159
	0.50	0.540	0.537	0.397	0.926	0.205
DGP4	0.00	0.025	0.018	0.001	0.044	0.053
	0.10	0.267	0.202	0.001	0.057	0.098
	0.20	0.498	0.404	0.012	0.076	0.123
	0.30	0.677	0.565	0.019	0.067	0.147
	0.40	0.785	0.706	0.045	0.087	0.159
	0.50	0.872	0.792	0.065	0.091	0.186

3. táblázat. $T = 100$, $N = 1000$, $\beta \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$,
nominális szignifikancia szint = 5%

Az eredményekből jól látható, hogy a tesztek jelentősen veszítenek erejükből, ahogy a minta egyre rövidül. Ez elsősorban annak köszönhető, hogy minden nem-paraméteres teszt valamilyen határeloszlási tételre épít. Továbbá

az is látszik, hogy az „erőviszonyok” érdemben nem változnak: a független kopula alapú teszt továbbra is a DGP1 és DGP3 esetben teljesít jobban. Ugyanakkor a Bernstein-kopulán alapuló módszer ereje jelentősen visszaesik a minta rövidülésével.

A második konfigurációban $T = 500$ hosszú idősorokat generáltunk és ezen vizsgáltuk a teszteket, az eredményeket a 4. táblázat tartalmazza.

Az eredményekből látható, hogy elsősorban a Bernstein-kopulán alapuló módszer, ami jelentősen javult a mintahossz duplázásával (várható volt a korábbiak alapján), ugyanakkor a többi módszernek is javult a teljesítménye.

A szakaszt összefoglalva azt mondhatjuk, hogy rövid minták esetében nem célszerű a Bernstein módszert alkalmazni, illetve általában – mivel a módszerek határeloszlási tételeken nyugszanak – érdemes hosszabb adat-sorokat bevonnai az elemzésbe.

	β	HJ	PD	CB	CI	GR
DGP1	0.00	0.043	0.038	0.038	0.032	0.040
	0.10	0.107	0.129	0.110	0.152	0.743
	0.20	0.578	0.691	0.423	0.631	0.998
	0.30	0.960	0.988	0.906	0.981	1.000
	0.40	0.999	1.000	0.996	1.000	1.000
	0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
DGP2	0.00	0.043	0.033	0.041	0.051	0.042
	0.10	0.282	0.306	0.246	0.081	0.090
	0.20	0.933	0.951	0.887	0.243	0.167
	0.30	1.000	1.000	1.000	0.610	0.249
	0.40	1.000	1.000	1.000	0.862	0.308
	0.50	1.000	1.000	1.000	0.984	0.362
DGP3	0.00	0.038	0.029	0.637	0.038	0.033
	0.10	0.067	0.054	0.713	0.150	0.034
	0.20	0.213	0.210	0.958	0.634	0.067
	0.30	0.617	0.640	0.999	0.975	0.112
	0.40	0.936	0.954	1.000	1.000	0.171
	0.50	0.999	0.999	1.000	1.000	0.244
DGP4	0.00	0.036	0.034	0.641	0.033	0.059
	0.10	0.920	0.881	0.923	0.063	0.095
	0.20	0.998	0.997	0.991	0.093	0.108
	0.30	1.000	1.000	0.998	0.120	0.140
	0.40	1.000	1.000	1.000	0.143	0.178
	0.50	1.000	1.000	1.000	0.155	0.160

4. táblázat. $T = 500, N = 1000, \beta \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$,
nominális szignifikancia szint = 5%

Irodalom

1. Baek, E.–Brock, W.: A general test for nonlinear Granger causality: Bivariate model, *Working paper*. Iowa State University and University of Wisconsin, Madison, 1992.
2. Baek, E.–Brock, W.: A nonparametric test for independence of a multivariate time series, *Statistica Sinica*. Vol. 31, No. 2 (1992), pp. 137–156.
3. Brown, Morton B.: 400: A Method for Combining Non-Independent, One-Sided Tests of Significance, *Biometrics* No. 4 (1975), pp. 987–992,

4. Csörgő Sándor–Faraway, Julian J.: The Exact and Asymptotic Distributions of Cramér–von Mises Statistics, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* Vol. 58, No. 1 (1996), pp. 221–234.
5. Diks, Cees–Panchenko, Valentyn: A new statistic and practical guidelines for nonparametric Granger causality testing, *Journal of Economic Dynamics & Control*. Vol. 30, No. 9–10 (2006), pp. 1647–69.
6. Fisher, R. A.: Answer to Question 14 on Combining independent tests of significance, *The American Statistician*. Vol. 2 (1948), p. 30.
7. Florens, J.-P.–Mouchart, M.: A Linear Theory for Noncausality, *Econometrica*. Vol. 53, No. 1 (1985), pp. 157–176.
8. Genest, Christian–Rémillard, Bruno: Test of independence and randomness based on the empirical copula process, *TEST*. Vol. 13, No. 2 (2004), pp. 335–369.
9. Genest, Christian–Quessy, Jean-Francois—Rémillard, Bruno: Asymptotic local efficiency of Cramer–von Mises tests for multivariate independence, *The Annals of Statistics*. Vol. 35, No. 1 (2007), pp. 166–191.
10. Geweke, John: Measurement of Linear Dependence and Feedback Between Multiple Time Series, *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 77, No. 378 (1982), pp. 304–313.
11. Granger, Clive W. J.: Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, *Econometrica*. Vol. 37, No. 3 (1969), pp. 424–438.
12. Granger, Clive W. J.: Economic Processes Involving Feedback, *Information and Control* Vol. 6, No. 1 (1963), pp. 28–48.
13. Granger, Clive W. J.–Morgenstern, Oskar: Spectral Analysis of New York Stock Market Prices, *Kyklos*. Vol. 16, No. 1 (1963), pp. 1–27.
14. Granger, Clive W. J.–Newbold, Paul: *Forecasting Economic Time Series*. Academic Press (1977).
15. Hiemstra, Craig–Jones, Jonathan D.: Testing for Linear and Nonlinear Granger Causality in the Stock Price-Volume Relation, *Journal of Finance*. Vol. 49, No. 5 (1994), pp. 1639–64.
16. Hofert, Marius–Kojadinovic, Ivan–Maechler, Martin–Yan, Jun: copula: Multivariate Dependence with Copulas. R package version 0.999-13 (2015) <http://CRAN.R-project.org/package=copula>
17. Karpoff, Jonathan: The Relation Between Price Changes and Trading Volume: A Survey, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 22, No. 1 (1987), pp. 109–126.
18. Poole, William–Gibbs, David L.–Shmulevich, Ilya–Bernard, Brady–Knijnenburg, Theo: Combining Dependent P-values with an Empirical Adaptation of Brown’s Method, DOI: <http://dx.doi.org/10.1101/029637>
19. Sancetta, Alessio–Satchell, Stephen: The Bernstein Copula and Its Applications to Modeling and Approximations of Multivariate Distributions, *Econometric Theory*. Vol. 20, No. 3 (Jun., 2004), pp. 535–562.
20. Sklar, A.: Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ.* Vol. 8, pp. 229–231.
21. Su, Liangjun–White, Halbert: A consistent characteristic function-based test for conditional independence, *Journal of Econometrics*. Vol. 141, No. 2 (Dec., 2007), pp., 807–834.

22. Sun, Xiaohai: Assessing Nonlinear Granger Causality from Multivariate Time Series, In *Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*. Springer Berlin Heidelberg (2008), pp. 440–455.
23. Bouezmarni, Taoufik–Rombouts, Jeroen V.K.–Taamouti, Abderrahim: A Non-parametric Copula Based Test for Conditional Independence with Applications to Granger Causality, *Working Paper, Universidad Carlos III de Madrid*. Vol 19 (2009)
24. Taamoutia, Abderrahim–Bouezmarni, Taoufik–El Ghouchc, Anouar: Non-parametric estimation and inference for conditional density based Granger causality measures, *Journal of Econometrics*. Vol 180, No. 2 (2014), pp. 251–264.
25. Varga József: Kopulák alkalmazása a pénzügyi kockázat menedzsmentben: Matematikai alapok, *SZIGMA*. 35. évf. 3-4. sz. (2004), 91–106. o.
26. Wiener, Norbert: *The theory of prediction*, Modern Mathematics for Engineers. McGraw-Hill (1956).
27. Zeileis, Achim–Hothorn, Torsten: Diagnostic Checking in Regression Relationships. *R News* Vol. 2, No. 3 (2002), pp. 7–10. <http://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/>

NON-PARAMETRICAL CAUSALITY TESTS FOR TWO VARIABLES

In this paper we present the most important non-parametric alternatives of the classical Granger-causality furthermore introduce a new method based on independent copulas. After describing the causality tests we compare them simulating different non-linear data generating processes. The results show that our new method performs better in some cases. The paper concludes by analysing a well-known empirical problem in finance: the relation between return and trading volume of the Dow Jones Index.

ÁLTALÁNOS KÖLTSÉGMUTATÓ(K) PÉNZÜGYI TERMÉKEKRE¹

BANYÁR JÓZSEF
Budapesti Corvinus Egyetem

A pénzügyi termékek minél nagyobb csoportjára kiterjedő, egységes, egyszerű elvek alapján megszerkesztett, könnyen értelmezhető költségmutató kérdése a gyakorlatban már több országban felbukkant, de átfogó problémává, az angolul „packaged retail insurance and investment products”, röviden PRIIPs-re vonatkozó rendelet megjelenése után vált. A témában nagyrészt hiányzik az elméleti irodalom, így sok félreértés van körülötte. A tanulmány egy meglehetősen általános nézőpontból keresi a megfelelő, lehetséges költségmutatókat, az egyes lehetőségek tulajdonságait összehasonlíttja egymással, s állást foglal, hogy melyeket és hogyan, illetve hogyan nem célszerű bevezetni.

Kulcsszavak: PRIIPs, költséginдикátor. *JEL kódok:* C43, E21, E30, G22

Bevezetés

A pénzügyi szolgáltatók tradicionálisan elrejtik a költségeiket az ügyfeleik elől. Ebből a szempontból a legsikeresebb termékek talán a hagyományos életbiztosítások (pl. a vegyes biztosítás), ahol az ügyfél közvetlenül lényegében semmit nem tud a biztosító által rá kivetett költségekről, de a többi pénzügyi termék esetében is elég nehéz az ügyfél számára kideríteni a pontos költségeket.

Erre a helyzetre válaszul, nagyjából egy évtizeddel ezelőtt a szabályozók deklarálták a pénzügyi termékek költségtranszparenciájának követelményét számos országban. Eszerint a szolgáltatónak az összes általa felszámított költséget be kell mutatnia ügyfelének. A cél, hogy versenyt indukáljanak a szolgáltatók között a költségek leszorítására, ami azáltal lesz lehetséges, hogy a költségek összehasonlíthatóvá válnak. Ugyanakkor, a tapasztalatok arra mutatnak, hogy a verseny meglehetősen részleges lesz, mert az egyes szolgáltatók költséglistája meglehetősen hosszú és nehezen összehasonlítható tételekből áll. Nehéz ugyanis két olyan pénzügyi termék költségeit összehasonlítani, ahol a költségek gyakorisága, a költség felmerülésének időpontja és a költség vetítési alapja (a díj vagy a tartalék százaléka, stb.) különböző. Melyik a drágább, ha minden havi díjból levonunk 10%-ot, vagy ha a tartalékból vonunk el évi 1%-ot? (A helyes válasz: attól függ!)

Miután ezt a problémát felismerték, némely pénzügyi szektor általában, vagy némely ország valamely szektor vonatkozásában továbbment és speciális

¹Szeretnék köszönetet mondani segítségükért Nagy Koppánynak, Paál Zoltánnak és Zubor Zoltánnak, valamint Horváth Gyulának, aki 10 éve felhívta a figyelmemet a költségmutatóra, mint sokféle probléma lehetséges megoldására. Beérkezett: 2015. október 17. E-mail: banyarj@gmail.hu.

költségindikátorokat vezetett be. A költségindikátorok bevezetése a lakossági hiteltermékekkel kezdődött (amelyekkel azonban konkrétan itt nem foglalkozunk, bár megállapításaink viszonylag egyszerűen kiterjeszthetők azokra is) még évtizedekkel ezelőtt az Egyesült Államokban (CFPB (1968)) és már korán belső megtérülési ráta alapúra állították azt át (BCP (1979)), s ezt a gyakorlatot a legtöbb ország – így Magyarország is – már régóta követi. A hiteltermékekhez hasonló költségindikátor bevezetése más pénzügyi szektorokra azonban csak itt-ott történt meg a közelmúltban, bár a témát elméletileg már majd két évtizede felvetették, érdekes módon egy olyan pénzügyi szektor vonatkozásában, ahol alkalmazását az EU máig sem ambicionálja. Ez pedig az egyéni nyugdíjszámlák piaca. Itt – a költségek mérésére vonatkozó próbálkozások után – P. Diamond javasolta (Diamond 1999) az általa „charge ratio”-nak nevezett mutató megalkotását, amire egy nagyon általános, inkább elméletinek nevezhető képletet is adott. Ez lényegében megegyezik azzal a megközelítéssel, amit ebben a tanulmányban „levonás a díjból”-nak nevezek.² Ezt ismerteti Whitehouse (2000), aki megemlíti, hogy korábban a Bacon and Woodrow (1999) javasolt két (egymással összefüggő) költségmutatót a Financial Services Authoritynek. Az egyiket „reduction in premium”-nak nevezi és kimutatja róla, hogy lényegében megegyezik a Diamond-féle mutatóval, a másikat viszont „reduction in yield”-nek, ami lényegében az ebben a tanulmányban tárgyalt kamatrés típusú mutató. Ezek után a kezdeményezések után a mutatók tárgyalásával és általánosításával nem igazán lehet az irodalomban találkozni, illetve ez szórványos. Érdekesség, hogy jóval korábban Babbel (1985) saját használatra definiált egy saját biztosítási ármutatót (amit ez a tanulmány is megemlíti, mint olyat, amivel nem foglalkozik): ez az összes költséget a tartam eleji néhány díjban fejezi ki – de nem tudunk folytatásról, sőt később a biztosítási irodalom visszaesett arra a szintre, hogy a biztosítás árát a díjjal azonosították. (Pauly *at. al.*, 2003)³

2010-ben az egész európai befektetési alap szektorban bevezették a Total Expencc Ratio-t (TER), (CESR, 2010, illetve magyarul: PSZÁF, 2012). Magyarországon, a Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete (PSZÁF), 2007-ben, egy vezetői körlevélben (PSZÁF, 2007) azt javasolta a biztosítóknak, hogy vezessenek be egy költségindikátort a megtakarítási jellegű életbiztosítási termékekre – tudomásunk szerint ez az első próbálkozás, hogy reduction in yield mutatót biztosításokra általánosítsák. A Magyar Biztosítók Szövetsége (MABISZ) 2009-ben tényleg bevezetett egy költségmutatót (Teljes Költségmutató – TKM) a unit-linked (UL) termékekre (MABISZ, 2009) és a tapasztalatok nagyon jók. A költségmutató következtében csökkenni kezdett a unit-linked termékek költsége és az extrém magas TKM-ű termékek kiszorultak a piacról. Később a német életbiztosítók is bevezettek egy költségmutatót.

Hosszú előkészület után az Európai Unió elhatározta, hogy a TER-hez ha-

²A különbség az általa adott képlet és az ebben a tanulmányban tárgyaltak között, hogy itt fontosnak tartjuk a kiszámíthatóságot, míg Diamond az elméleti szépséget, így ő a képletét folyamatos kamatozással, integrálható függvény formájában adta meg. Azokkal a részletekkel, amelyeket itt bőségesen tárgyalunk, ő nem foglalkozott.

³Köszönettel tartozom Vékás Péternek, aki ezeknek az irodalmaknak a többségére felhívta a figyelmemet.

sonló költségindikátort kiterjeszti szinte az összes lakossági pénzügyi termékre. A „szinte összes” azt jelenti, hogy csak azokra, amelyek megtakarítási vagy befektetési részt is tartalmaznak és összetettebb, mint az egyszerű kötvény vagy részvény (vagyis „csomagolt”). 2014. december 9-én jelent meg Az Európai Parlament és a Tanács 1286/2014/EU Rendelete a lakossági befektetési csomagtermékekkel, illetve biztosítási alapú befektetési termékekkel kapcsolatos kiemelt információkat tartalmazó dokumentumokról (EU, 2014). Az angol rövidítés után röviden „PRIIPs Rendelet”-nek nevezett jogszabály megköveteli egy egyetlen, átfogó költségmutató bevezetését, ami ugyanaz minden pénzügyi szektorban (befektetési alapok, életbiztosítások és strukturált termékek). Jelenleg (2015 szeptemberében) a 3 európai felügyeleti hatóság dolgozik ezen a költségmutatón – és más, PRIIPs-el kapcsolatos témán (ld. pl.: EIOPA, 2014 és EIOPA, 2015). Ennek eredménye egy Szabályozó Technikai Standard (Regulatory Technical Standard - RTS) lesz, ami definiálni fogja a költségmutató részleteit.

A szerző rendelkezik információkkal erről a munkáról, de ebben az anyagban nem fogja ezt bemutatni,⁴ sőt még kommentálni sem. Ehelyett megpróbálom ettől függetlenül kifejteni a problémát és megmutatni a különböző megoldási lehetőségeket – remélve természetesen, hogy ezzel is hozzá tud járulni a megfelelő végeredmény eléréséhez.

1 Problémafelvetés

A pénzügyi termékekre vonatkozó általános költségmutató problémája felbontható egy elvi és egy technikai részre. Az elvi problémát a Banyár, 2013 vizsgálta meg részletesen, s arra jutott, hogy (a megfelelően megkonstruált) költségmutatók nem mások, mint a pénzügyi termékek árai, amit nem szabad összekeverni azok díjával, vagy törlesztő-részletével. A problémának ezzel a vonatkozásával ebben a tanulmányban a továbbiakban nem foglalkozom, hanem annak technikai aspektusára koncentrálok: hogyan lehet megkonstruálni a pénzügyi termékek vonatkozásában egy (vagy több), minél általánosabban használható költségmutatót.

A probléma megoldásához a kiindulópontunk, hogy pénzügyi termékek technikailag leegyszerűsíthetők egy cash-flowra, ami két ágra bontható: az ügyféltől a pénzügyi szolgáltató, illetve a pénzügyi szolgáltatótól az ügyfél felé áramló pénzekre. A pénzügyi termékek költségének/árának kérdése technikailag azt jelenti, hogy a cash-flownak ezt a két ágát összehasonlítjuk. Ha valamilyen, méltányosnak tartott szempontból a két ág egyenlő, akkor a pénzügyi termék ára nulla, vagyis az ingyenesnek, költségmentesnek tekinthető, ha nem, akkor általában az ügyfél fizet többet.⁵ Ezt a többletet tekinthetjük a termék költségének vagy árának, a költségmutató ennek egyszerű kimutatását szolgálja.

⁴Megtette ezt ugyanakkor a közelmúltban más, ld. Paál-Lencsés, 2015.

⁵Technikai szempontból nem probléma az sem, ha a pénzügyi szolgáltató fizet többet: ekkor a költségmutató egyszerűen negatív lesz. Ugyanakkor egy negatív költségmutató nyilván nem „normális”, tehát ezt az esetet – ha felmerül – alaposan meg kell vizsgálni.

Az egységes költségmutató túllép az eddig leginkább jellemző gyakorlati fogyasztóvédelmi jellegű megközelítésen, a költségek egyszerű transzparenciájának követelésén – miközben eleget tesz annak is. Mint már jeleztük, a probléma az egyszerű költségtranszparenciával az, hogy – bár ahol megvalósult, nagyon pozitív hatásai voltak – a költségek nagyon sokfélék, amelyeket általában nem lehet egyszerűen összeadni (mi az összege a díj 1%-ának, a tartalék 0,5%-ának, a biztosítási összeg 2 ezrelékének és 3 eurónak?). Így az ügyfelek nem tudják összehasonlítani az egyes termékek különböző struktúrájú költségeit, sőt még azt sem nagyon tudják megmondani egy költségeket tartalmazó táblázat ismeretében, hogy az összességében sok-e vagy sem. Ezt hidalja át a *költségmutató*, aminek az a lényege, hogy ezeket a különböző jellegű, különböző gyakorisággal, *különböző alapokra vetített költségeket egyetlen költségtípusra transzformálja*. A költségmutató megkonstruálásához ezért először azt kell számba venni, hogy milyen jellegű költségek merülhetnek fel egyáltalán, s utána kell megvizsgálni azt a kérdést, hogy ezek közül melyikre célszerű transzformálni a többit.

A legfontosabb költségjellemzők a következők:

- a költség vetítési alapja,
- a költség felmerülésének ideje,
- a költség felmerülésének gyakorisága,
- feltételes vagy feltétlen jellege.

És itt mindjárt érdemes egy újabb fontos megkülönböztetést tenni. A költségmutatót számíthatják előre és utólag. Mindegyiknek van értelme, de másra lehet használni az egyiket, mint a másikat. Az ügyfelet döntésében csak az előre számított költségmutató tudja segíteni. Ennek kiszámítása bonyolult, mindegyik fenti költségjellemzőt figyelembe kell venni, de nem mindegyik költségtípust lehet előre jól felmérni, vagyis a költségmutató részévé tenni. Utólag ilyen probléma nincs, az utólagos költségszámítás csak technikai jellegű problémát okoz, ott már nincs feltételes, csak már felmerült költség. Utólag csak a vetítési alapokat és a költségek felmerülésének idejét (no meg persze a költségek nagyságát) kell a számításhoz felhasználni. De az ilyen költségmutató felhasználhatósága csak az utólagos ellenőrzés, döntéseinkhez nem nyújt segítséget.

Az alábbiakban mi az előre számítandó költségmutatóval és annak problémáival foglalkozunk. Ha vesszük a fenti költségjellemzőket, akkor azokon belül nagyjából a következő alternatívák vannak:

- a vetítési alap, vagyis hogy minek az arányában számítják fel a költséget, lehet:
 - az ügyfél befizetése (díj⁶),
 - az ügyfél felhalmozott tőkéje (tartalék⁷),

⁶Erre a biztosításban elterjedt a díj kifejezés, más pénzügyi iparágakban nem, ennek ellenére én általánosságban fogom ezt használni.

⁷A tartalék szintén a biztosításban elterjedt kifejezés erre, de szintén általánosan használok.

- egy előre definiált szolgáltatási összeg (összeg⁸),
- abszolút összeg – a díjtól, szolgáltatástól, stb. függetlenül, meghatározott nagyság. Míg a fentiek arányszámok („százalékok”), addig ez az adott valutában van meghatározva.
- a felmerülés ideje, gyakoriság. A gyakoriság lehet egyszeri, rendszeres és eseti. Az egyszeri leginkább a tartam elején merül fel, a rendszeres az általában díjfizetéskor (rendszeres díjas termékeknél) a díjból, vagy ettől függetlenül a tartalékokból történő levonásként. Ezek általában feltétlen, vagy ütemezett költségek, az esetiek pedig jellemzően valamely feltétel teljesülésétől függenek.
- és végül (kapcsolódva ez utóbbi megjegyzéshez) a költségek lehetnek ütemezett (vagyis amik többé-kevésbé biztosan/feltétlenül felmerülnek) és lehetnek feltételesek. A feltételes költségeket a feltételtől függően tovább lehet bontani aszerint, hogy mitől függenek:
 - az ügyfél döntésétől,
 - a szolgáltató döntésétől,
 - külső tényezőtől.

Az 1. táblázatban megpróbálunk példákat adni az egyes lehetőségekre.

A költségmutató (legalábbis az előre számított változatának) számítása során az ütemezett költségek csak technikai problémát okoznak (ez a tanulmány elsősorban ezekről a technikai problémákról szól majd) a feltételesek viszont sokszor már elvit is.

A külső tényezőktől függő költségek általában kezelhetők feltételezésekkel. A legfontosabb külső tényező a jövőben elérendő hozam, amire a költségmutató számításához egyébként is szükség van valamilyen feltételezésre vagy szcenáriókra.

Az ügyfél döntésétől függő költségeket – ha egyébként az ügyfeleknek járható út, hogy nem hoznak ilyen döntéseket, vagy valamennyi döntés számukra díjmentes, és a többségük ezt az utat járja – nem szükséges belevenni a költségmutatóba. Itt járható út, hogy a fontosabb ilyen költségeket (pl. a korai felmondás költségét) elkülönülten mutatjuk be, nem a költségmutatóban. Lehetséges, de nem jó (és ezért nem ajánlott) módszer, hogy ezeknek a költségeknek a múltbeli átlagát kivetítjük a jövőbe. Ezzel az a probléma, hogy ha – amint az általában történik – kevesek nagy költségét terítjük sokakra, akkor ez meghamisítja a költségmutatót: nagyobbak mutatja azt a többségnek, amelyiknél nem merül fel ilyen költség, és jóval kisebbnek azok esetében, akiknél viszont felmerül. Én ezeket a költségeket a továbbiakban – a fentiek miatt – nem veszem be a költségmutatóba.

⁸A biztosításban erre a „biztosítási összeg” kifejezés terjedt el, itt általánosan az „összeg” szót fogom használni.

Feltétel	Feltétlen		Feltételes				
Gyakoriság	egyszeri	folyamatos	eseti		folyamatos		
Kitől (mitől) függ		ügyfél	szolgáltató	külső tényező	ügyfél	szolgáltató	külső tényező
Díjarányában	díjbeszedési költség, fenntartási jutalék	ua.	díjbeszedési költség				
Tartalék arányában	nem jellemző ⁹	befektetési költség	alapok váltása, korai felmondás (early exit)	tranzakciós költség			performance fee
Szolgáltatási összeg arányában	jutalék	nem jellemző					
Abszolút összeg	nem jellemző	adminisztrációs költség					

1. táblázat. A lehetséges költségtípusok. Forrás: a szerző.

Problémásabbak azonban a szolgáltató döntésétől függő költségek, ha azok az ügyfeleket terhelik. Ez nem jellemző mindegyik pénzügyi iparágra. A befektetési alapoknál szokásos gyakorlat az előre nem ismert mértékű tranzakciós költségek ügyfelekre terhelése, a biztosításban viszont nem. Itt leginkább a múltbeli gyakorlat jövőre történő kivetítése lehet a járható út. A továbbiakban a magam részéről ezzel a problémával nem foglalkozom (vagyis feltételezem, hogy vagy nincsenek ilyen költségek, vagy kivetítik őket, s így besorolódnak az ütemezett költségek közé).

Ha megnézzük a megtakarítási és befektetési termékek cash-flowját, amelyekre a PRIIPs rendelet a költségmutatót keresi, akkor azt látjuk, hogy technikai szempontból ezeknek három fontos jellemzője van:

1. az ügyféltől a szolgáltatóhoz irányuló cash-flow ág teljes egészében, vagy legalább részben megelőzi a fordított cash-flow ágot. Az első fizetés mindig az ügyféltől jön, az utolsó mindig a szolgáltatótól.
2. a hozam nem előre rögzített (ez leginkább a rendelet által megcélzott legfontosabb jellemzőnek, a „csomagolt” jellegnek a következménye)
3. az ügyfél biztosan kap szolgáltatást.

⁹Az egyszeri díjas termékeknél azért nem, mert azt nem ide, hanem a díjból való levonáshoz soroljuk, a rendszeres díjasoknál pedig azért nem, mert a tartalék fokozatosan épül fel (és például a tiszta haláleseti biztosításoknál fokozatosan épül le is), s értéke nagy változást mutat a tartam során.

Az első jellemző kizárja a vizsgált pénzügyi termékek közül a hiteltermékeket, ahol a költségmutató kialakítása egyébként szintén releváns követelés, és sok helyen (pl. Magyarországon) meg is valósították azt. A második kizárja a betéti termékeket, amelyeknél nem szoktak költségmutatót számítani, mert úgy tűnik, mintha költségek nem is merülnének fel. (Ténylegesen nem ez a helyzet – ld. erről Banyár, 2013.) A harmadik jellemző kizárja a tisztán kockázati jellegű életbiztosításokat e termékek köréből. Az általunk bemutatott költségmutató (legalábbis annak legáltalánosabb változata) szempontjából azonban a 3. jellemző nem igazán lényeges, azt minden további nélkül lehet alkalmazni azokra a pénzügyi termékekre, amelyekre ez nem, de az első kettő jellemző igaz – mint azt később megmutatjuk. (És azt is, hogy ennek elvi következményei is vannak.)

A fenti fontos előkészületek után rátérhetünk magának a költségmutatónak a problémáira. Mint már kifejtettem, az egységes költségmutató lényege, hogy a különböző típusú költségeket egyetlen típusúvá transzformáljuk. A költségmutató elvileg lehetne olyan is, ami a gyakorlatban nem alkalmazott költségtípusra transzformál, vagy olyan, ami nem is azonosítható be, mint költségtípus, de egyik sem ajánlatos, hiszen ezáltal a mutató magyarázó ereje csorbul úgy, hogy cserébe nem nagyon kapunk semmit. A gyakorlatban leginkább használt költségtípusokat az 1. táblázat mutatja be. A szóba jöhető típusokat leszűkíthetjük a „feltétlen” oszlopra. Az utolsó két sort ki is húzhatjuk a jelöltek közül, részben mert előre definiált szolgáltatási összeg nem minden pénzügyi termékénél van, részben mert az, hogy eleve abszolút összegre próbáljuk meg transzformálni a költségeket, túlságosan leszűkíti a lehetőségeket.¹⁰ Marad tehát a díjra, illetve a tartaléokra felszámított költségekre transzformált mutató.

A díj lehet egyszeri vagy rendszeres. A pénzügyi termékek többségénél (pl. a befektetési alapoknál) az egyszeri díj a jellemző, míg az életbiztosításoknál inkább a rendszeres, azzal, hogy jelentős az egyszeri díjas biztosítások aránya is. Az egyszeri díjas pénzügyi termékek esetében a díjra transzformált költségmutató az egyszeri díj százalékában felszámított költségekre transzformált összköltséget jelenti. A rendszeres díjas esetben már nem ilyen magától értetődő a helyzet. Az egyszeri díjas eset természetes kiterjesztése, hogy feltételezzük, hogy ugyanolyan arányban vannak el költséget minden egyes díjból. Az alábbiakban ennél a változatnál ezt a megoldást fogjuk bemutatni. Ugyanakkor itt elvileg elképzelhetőek más módszerek is, például feltételezzük, hogy az összes költséget a szerződés elejére transzformáljuk, vagyis az első díj nagy része, vagy esetleg az első néhány díj teljes egésze költségfizetésre megy el, a többi díjból azonban nem történik ilyen kifizetés. Ezzel (és a többi más lehetséges) változattal az alábbiakban nem foglalkozunk, de a később kifejtendő módszereket nem nehéz kiterjeszteni erre az esetre sem, ha valakinek mégis ez a fajta költségmutató lenne szimpatikus.

¹⁰Ehhez ugyanis előre rögzíteni kell a pénzügyi termék fontosabb paramétereit, így a díjat, szolgáltatási összeget, tartamot, stb., így a mutató csak egy nagyon speciális esetre fog vonatkozni. Ezzel ellentétben a relatív mutató bármikor átváltható abszolút összegre, ha ezeket a mutatókat példaként rögzítjük, vagyis az eleve sok esetre lesz alkalmazható.

A tartalék arányában felszámolt költségeket szinte kizárólag évente szokták levonni (vagy folyamatosan vonják, de éves nagyságként mutatják ki). Ezt általában nem is így kommunikálják, hanem, mint a kamatból/hozamból levont költséget, de maga a kamat/hozam eleve a tartalék százalékában van meghatározva, így ez a lényegét nem érinti. A leggyakoribb módszer, hogy a teljes („bruttó”) hozamból levonnak valamekkora részt, s a maradék hozamot elnevezik „nettó” hozamnak. A kettő különbsége egyfajta kamatrés, marge, így ezt a mutatót a továbbiakban kamatrés típusú mutatónak nevezzük. Leggyakrabban a befektetéssel kapcsolatos költségeket szokták így levonni, de gyakoriak az olyan termékek is, amelyek esetében ez a fő vagy egyedüli költséglevonási típus, így ez egy ismert módszer, az ilyen típusú költségmutató alkalmazását mindenképpen meg kell fontolni.

Természetesen, a korrektül kiszámított, különböző típusú költségmutatók ugyanazt az összköltséget mutatják, így egymással ekvivalensek. Ez másképp azt is jelenti, hogy egymásra átalakíthatóak/átválthatóak, az átváltással ezért külön alfejezetben foglalkozunk majd.

Most nézzük részletesen ennek a két fő mutatótípusnak a kiszámítását. Igazából mindegyiknek két altípusa is van, attól függően, hogy az ügyfelek nettó (tehát költségmentes), vagy bruttó befizetéseit tekintjük alapnak. Az egyik esetben ez az eltérés nagyon erősen megváltoztatja a két altípushoz tartozó mutató kiszámítását, a másik esetben nem különösebben.

2 Kamatrés típusú mutató

A kamatrés típusú mutató esetében, ahol a mutatót magát a tartalék arányában számítjuk ki, úgy tűnik egyértelmű a vetítési alap: a felhalmozott nettó díj(ak), ahol nettó díj alatt a költségek nélküli díjat értjük (a biztosítási szóhasználattal megegyezően). Ha azonban belemegyünk a számítás részleteibe, akkor azt tapasztaljuk, hogy a felhalmozott bruttó díjakra is vetíthetjük a költségmutatót, sőt ennek a számításnak határozott előnyei vannak a másik számításhoz képest. Vagyis a kamatrés típusú költségmutatónak két altípusa van:

1. a nettó díjra (az abból felhalmozott tartalékra) vetített,
2. a bruttó díjra (az abból felhalmozott tartalékra) vetített.

Az alábbiakban mindkettő számítást bemutatjuk, majd összehasonlítjuk őket és értékeljük az eltéréseket.

2.1 A nettó díjra vetített alváltozat

Vegyünk egy egyszerű pénzügyi terméket, egy befektetési alapot (befektetési jegyet), és tétélezzük fel, hogy valaki néhány ezer euróért szándékozik ilyet vásárolni, és a befektetését 1 évig tartani. Ekkor ez a típusú költségmutató

egyszerűen az alábbi lesz:

$$\text{költségmutató} = \frac{\text{várhatóan felmerülő költségek}}{\text{befektetett tőke (nettó eszközérték)}}. \quad (1)$$

Ez nagyon hasonlít a befektetési alapoknál rendszeresített Total Expense Ratio (TER) költségmutatóra (ott is a nettó, nem pedig a bruttó eszközérték a vetítési alap – ld. CES, 2010, PSZÁF, 2012), csak egy ponton nem azonos vele: ott elvileg az átlagos tőkére, nem az induló tőkére kell vetíteni, de ha a hozam nem jelentős, akkor a különbség elhanyagolható.

Azt, hogy a befektetés csak 1 évig tart, a fenti mutatónál, maximálisan kihasználtuk. De mi van, ha tovább, mondjuk 2 évig? Ekkor két helyen mindenképpen módosítani kell rajta:

- már ténylegesen valamifajta átlagos tőkére (tartalékra) kell vetíteni a költségeket (mint a TER mutatóban)
- a költségeket le kell bontani egy évre (pl. úgy, hogy elosztjuk összértéküket a futamidővel, itt 2-vel), különben nem évesített nagyságot mutat majd a költségmutató.

Igazából felmerül egy harmadik módosítás is, mégpedig a pénz időértékének a figyelembe vétele mind a számlálóban, mind a nevezőben, de olyan rövid tartamnál, mint az 1 és 2 év, ettől eltekinthetünk anélkül, hogy az eredmény lényegesen megváltozna. Ez viszont azt is jelenti, hogy lényegesen hosszabb tartamnál már nem tekinthetünk el ettől a tényezőtől, különösen, ha a költségek az időben és nagyságban nem egyenletesen eloszolva merülnek fel. Mivel a befektetési alapokat tipikusan 1-2 évre vesszük, így az azokhoz számított költségmutatónál az időérték figyelembe vételétől el lehet tekinteni (mint teszi azt a TER), viszont a tipikusan néhány évtizedre vásárolt életbiztosításoknál ez már komoly torzulást okozna a számításban.

Nézzük meg, hogy hosszabb tartamoknál hogyan lehet az időértéket figyelembe venni. Ezt egy, a fentihez hasonló termékre az olyan egyszeri díjas unit-linket életbiztosításra nézzük meg, ami nem tartalmaz biometrikus kockázatot, tehát tisztán befektetési terméknek tekinthető. Ehhez előbb rendezzük át az (1)-t (amit a fentieknek megfelelően már módosítottunk):

$$\begin{aligned} \text{befektetett átlagos nettó eszközérték} \cdot \text{költségmutató} &= \\ &= \frac{\text{várhatóan felmerülő költségek}}{\text{futamidő}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ebből is látszik, amit már korábban is mondtunk, hogy a felmerült költségek itt éves hozamvesztésséggé lettek transzformálva. A képlet módosítását folytassuk ott, hogy jelöléseket vezetünk be az alábbiak szerint:

GP : a bruttó egyszeri díj

C_j : a j -edik évfordulón felszámított költségek

n : tartam

r : költségmutató

i : feltételezett bruttó hozam (az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az a futamidő alatt állandó – előre úgysem igazán tudnánk a hozamingadozást megmondani)

A költségek kapcsán most és a későbbiekben (hacsak ezt fel nem oldjuk valahol) a következő egyszerűsítéseket tesszük, amelyek csak kismértékben érintik a végeredményt, de nagymértékben megkönnyítik a számításokat:

- feltesszük, hogy költségek csak évfordulókon merülnek fel, mégpedig először a kötésnél (0. évforduló), utoljára pedig a tartam vége előtt 1 évvel ($n - 1$. évforduló). Ez egyébként nagyrészt megfelel a tényleges gyakorlatnak. A mégsem az évfordulóra eső költségeket a hozzájuk legközelebb eső évfordulóhoz tesszük.
- az évfordulón felmerülő költségeket áttranszformáljuk a díj típusára, ami a (3) és a későbbi képletekben kétféle lehet:
 - abszolút nagyság, ha konkrét feltételezéssel élünk a díj nagyságáról
 - relatív nagyság („egységnyi”), ha általánosabban beszélünk a díjról. A képlet maga nem mondja meg, hogy ezek közül melyiket használjuk.
- ez a transzformáció szintén nem okoz problémát, hiszen az adott évfordulón, akármi is a költség típusa, egyértelmű a nagysága.

Ekkor a (2) átváltozik a következővé:

$$\frac{(GP - C_0) \cdot (1 + i)^1 + ((GP - C_0) \cdot (1 + i)^1 - C_1) \cdot (1 + i)^1 + \dots + (((((GP - C_0) \cdot (1 + i)^1 - C_1) \cdot (1 + i)^1 \dots) - C_{n-1}) \cdot (1 + i)^1)}{n} \cdot r = \quad (3)$$

$$= \frac{C_0 \cdot (1 + i)^n + C_1 \cdot (1 + i)^{n-1} + \dots + C_{n-1} \cdot (1 + i)^1}{n}.$$

Ez azonban nem egy különösebben célszerű felírási mód, túl bonyolult – annak ellenére, hogy maga a keresett eredmény (r) végül is egyetlen hányadosként áll elő.¹¹ Egy célszerűbb felíráshoz némileg átfogalmazzuk a kérdést, tudva, hogy a költségindikátor végül is kamatvesztés. A költségmutatóra vonatkozó új kérdés: mekkora az a kamatláb (kamattöbblet), ami hatástalanítja a költséglevonásokat? (Ez egyébként – másként fogalmazva – ugyanaz a kérdés, ami alapján (1)-(3)-at kerestük.)

Ezt egy egyszerű esetben vizsgálva, amikor feltesszük, hogy $i = 0\%$, s hogy a költséget mindig csak a díjból vonnak le közvetlenül (tehát egyszeri díjasoknál egyedül az elején), a következő egyenletet kapjuk:

$$GP - C_0 = GP \cdot \left(\frac{1}{1 + r} \right)^n. \quad (4)$$

¹¹Felhívnom a figyelmet arra, hogy ha a (4)-et, illetve annak későbbi, bonyolultabb variációit nem a (3)-al, hanem a (2)-vel hasonlítjuk össze, akkor úgy tűnhet, mintha a (4) lenne bonyolult, nem a (2), pedig valójában fordított a helyzet! A bonyolult képlet egyszerű szöveggel való helyettesítése meglepően egyszerű, amiből időnként helytelen érvelést „faragnak”.

Vagyis technikailag ekkor egy belső kamatláb (IRR) számítására vezettük vissza a feladatot. (A továbbiakban a kamatrés típusú mutatóknál mindig belső kamatlábat keresünk.)

$n = 1$ esetben ez nem más, mint:

$$GP - C_0 = GP \cdot \left(\frac{1}{1+r} \right).$$

Amiből r -et kifejezve kapjuk, hogy

$$r = \frac{C_0}{GP - C_0}, \quad (5)$$

ami megegyezik az (1)-gyel, vagyis lényegében a TER mutatóval, azaz (4) és (1) ilyenkor kompromisszumok nélkül egyenlő.

$n = 2$ esetben azt kapjuk, hogy

$$(1+r)^2 = 1 + 2r + r^2 = \frac{GP}{GP - C_0}.$$

Ha r kicsi, akkor r^2 elhanyagolható, így azt kapjuk, hogy

$$r \approx \frac{C_0/2}{GP - C_0}, \quad (6)$$

ami a TER mutató fenti közelítő értékének tekinthető. Ugyanakkor az is látszik, hogy magasabb n -ekre egyre nagyobb kompromisszumokkal tudjuk csak ezt az egyszerű formulát használni a pontos (4) helyett (vagyis a költségek időértékét nem használó (3) egyre kevésbé használható (4) helyett). Az (5) és (6) azt is mutatja, ami a (4) esetében (és főleg annak későbbi, bonyolultabb változatainál) már nem magától értetődő: a költségmutató a (4)-nél is a tartalékra vetített mutatószám.

A (4)-et fent még egyszerűsítő feltevések mellett fogalmaztuk meg. Ezeket fel kell oldani, majd az eredményeket általánosítani kell rendszeres díjas esetre, illetve biometrikus kockázatokat tartalmazó cash-flowra is. Nézzük sorrendben!

Egyszeri díjas pénzügyi termékek esetében a folyamatos költségek jellemzően eleve kamatrés típusú költségként kerülnek megfogalmazásra (pl. úgy, hogy a mindenkori hozamból évente x százalékpont kerül levonásra), vagyis ugyanolyan formában, mint maga a költségmutató. Ha ez a helyzet, akkor adódik egy egyszerűsítési lehetőség (különösen itt, a nettó díjra vetített mutatónál – a bruttó díjra vetítettnél ugyanez már problematikusabb lenne): az így megfogalmazott költségeket egyszerűen hozzáadjuk a (4)-gyel kiszámított r -hez. Vagyis ekkor a tényleges költségmutató $r + x$ lesz.

Tudni kell azonban, hogy az r kismértékben változhat, ha i -ről nem 0%-ot feltételezünk, ezért szükség van egy pontosabban megfogalmazott változatra is. Ha most is feltesszük, hogy van folyamatos költséglevonás, de nem feltétlenül csak kamatrés formájában meghatározott (hanem általánosabban: évi C_1, C_2 stb.), akkor a (4) pontosabb változata:

$$GP - C_0 - C_1 \cdot \left(\frac{1}{1+r} \right)^1 - \dots - C_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{1+r} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{1+r} \right)^n \cdot GP \cdot (1+i)^n,$$

vagy némileg tömörebben felírva:

$$GP - \sum_{j=0}^{n-1} C_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = GP \cdot (1+i)^n \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n. \quad (7a)$$

Annyit érdemes megjegyezni, hogy konkrét esetekben maguknak a C_j -knek a kiszámítása is előzetes kalkulációt igényel pl. az i és az x segítségével.

Egyszerűbben is felírhatjuk, ha feltételezzük, hogy ténylegesen csak a tartalék x része kerül levonásra minden évben. Ekkor (7a) helyett a következőt kapjuk:

$$GP \cdot (1-x)^n = GP \cdot (1+i)^n \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n. \quad (7b)$$

Ez azért is egy hasznos aleset, mert innen mindjárt ki is tudjuk fejteni r értékét:

$$1+r = \frac{1+i}{1-x}. \quad (7c)$$

Az r , mint a (7a), illetve mint (7c) megoldása azonban most már nem a költségmutató, hiszen az nyilván nagyobb lesz, mint i . A költségmutató így csak az i feletti rész, amire a költségek miatt van szükség, vagyis értéke ekkor: $r-i$.

Látszik, hogy a (4) a (7a) és (7b) (a továbbiakban, röviden (7)) speciális esete, vagyis a (7) az általánosabb, valamint az is, hogy a (7)-ben (ellentétben (4)-gyel) figyelembe vettük azt is, hogy mikor került sor a költség levonására, azokat nem egyszerűen összeadtuk.

A (7)-et tovább kell általánosítanunk rendszeres díjas esetre. A feladatot technikailag itt is leegyszerűsítjük: csak az éves díjas változatot nézzük meg, nem foglalkozunk a féléves, negyedéves, havi, stb. változatokkal, bár az éves alapján ez már viszonylag könnyen megtehető. A fő különbség, hogy most már nem csak egy díj lesz, tehát annak is kell egy index (az összehasonlíthatóság kedvéért az index szintén azt az évfordulót mutatja, amikor befizették, vagyis az n darab éves díj indexei 0-tól $n-1$ -ig terjednek):

$$\sum_{j=0}^{n-1} GP_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j - \sum_{j=0}^{n-1} C_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} GP_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-j} \cdot (1+i)^{n-j}. \quad (8)$$

A költségmutató itt is $r-i$, és az is látszik, hogy a (7), vagyis az egyszeri díjas eset a (8)-nak speciális esete, amikor $GP_j = 0$, ha $j > 0$.

Tovább lehet általánosítani (8)-at, ha a biometrikus kockázatokat is figyelembe vesszük. Ezt a változatot már eleve csak rendszeres díjra fogalmazom meg, hiszen az egyszeri díjas változat annak speciális esete. A biometrikus kockázatokat pedig leegyszerűsítem a leginkább elterjedt esetre, a halállal kapcsolatos kockázatokra (vagyis a haláleset és komplementere, az elérés kockázatára). Néha szoktak más kockázatokat is beépíteni a megtakarítási elemet is tartalmazó életbiztosításokba, mint a betegség, vagy rokkantság kockázatát, de ez nem jellemző. Sokkal elterjedtebb, hogy ezeket a kockázatokat elkülönült kiegészítő biztosítások formájában teszik hozzá a

megtakarítási jellegű főtermékhez, s az ilyen választható, vagy elutasítható kiegészítő biztosításokat nem veszik be a költségmutató számításába.¹² Ugyanakkor, ha mégis szükség lenne költségmutatóra másfajta biometrikus kockázatot is tartalmazó pénzügyi termékhez, azt – az alábbiak alapján – analóg módon, könnyen meg lehet konstruálni.

Szintén alkalmazok egy, a számításokat megkönnyítő, klasszikus aktuárius feltételezést, miszerint a haláleseti (és minden esetleges más) kifizetésekre mindig biztosítási évfordulón kerül sor. A gyakorlatban ez nem igaz, de az emiatt adódó számítási különbségek elhanyagolhatóak.

Az eddigiekhez képest szükség van további jelölések bevezetésére, úgymint:

AB_j : járadék szolgáltatás a j -edik évfordulón

DB_j : haláleseti szolgáltatás a j -edik évfordulón

MB_j : elérési szolgáltatás a j -edik évfordulón (a gyakorlatban $j = n$)

TB_j : biztos (a biztosított halálától vagy életben lététől független) kifizetés (a gyakorlatban $j = n$)

${}_j|p_x$: túlélési valószínűség. Annak valószínűsége, hogy a biztosítás megkötésekor x éves biztosított még j év múlva is életben van, $j \geq 0$, ${}_0|p_x = 1$.

${}_j|q_x$: haláleseti valószínűség. Annak valószínűsége, hogy a biztosítás megkötésekor x éves biztosított a biztosítás megkötésétől számított j -edik és $j + 1$ -edik évforduló között fog meghalni, $j \geq 0$, ${}_j|q_x = {}_j|p_x - {}_{j+1}|p_x$.

Ekkor (8)-at a következő általánosabb alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} {}_j|p_x \cdot (GP_j - C_j) \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} {}_j|p_x \cdot AB_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} {}_j|q_x \cdot DB_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{j+1} + {}_n|p_x \cdot MB_n \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n + TB_n \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n. \end{aligned} \quad (9)$$

Első ránézésre nem feltétlenül látszik, de a (9) a (8) további általánosítása, vagyis speciális esetként tartalmazza a (8)-at. Az egyenlet bal oldala (a befizetési cash-flow) csak némileg át van rendezve a (8)-hoz képest, illetve a befizetések be vannak szorozva a túlélési valószínűségekkel, hiszen az életbiztosítások (legalábbis a nem tisztán megtakarítási jellegű UL biztosítások) szolgáltatásának lényegi eleme, hogy a díjfizetés a biztosított halálával véget ér, és esedékessé válik valamilyen szolgáltatás. Más pénzügyi termékekbe semmiképpen nem kell beletenni ezt az elemet, annak ellenére, hogy mondhatjuk, hogy ott is meghalhat az ügyfél, s ilyenkor megszűnhet a szerződés. Ez igaz, de ott ez nem feltétlenül történik meg, az örökös minden további nélkül változatlanul viheti tovább a szerződést lejáratig, a pénzügyi szolgáltató esetleg észre sem veszi, hogy volt tulajdonosváltás. A biztosításban viszont ez

¹²Legalábbis ez a szakmailag konzisztens álláspont, ha a költségmutatót leszűkítjük a befektetési elemet is tartalmazó termékekre. Ugyanakkor ezekre magukra elkülönült költségmutatót szintén lehetséges számítani, amint azt majd később – legalábbis a tiszta haláleseti biztosítás esetére – megmutatom.

elképzelhetetlen, annak integráns része, hogy a biztosított halálakor megszűnik a díjfizetés, és az esetek nagyobbik részében a szerződés is, vagy legalábbis jelentősen módosul. Ezért itt a haláleseti és túlélési kockázatokkal számolni kell, a többi pénzügyi terméknél pedig nem. A (8) tehát a (9) olyan speciális esete, ahol a bal oldalon a túlélési valószínűségek 1 értéket vesznek fel. Ebből viszont az is következik (mivel a haláleseti valószínűségek két túlélési valószínűség különbségei), hogy a haláleseti valószínűségek értéke viszont 0, tehát nincs haláleseti szolgáltatás (DB). Járadékszolgáltatás sincs (sőt a biztosítások többségében nincs), ezért az $AB_j = 0$, minden j -re. A lejáratkor esedékes MB pedig szintén 1 valószínűséggel esedékes, a TB pedig itt 0. Ekkor már csak annyiban különbözünk a (8)-tól, hogy ott meg volt adva konkrétan az MB képlete. Ezt itt nem tudtuk megadni, mert egy általános esetet szinte lehetetlen, így meg kell elégednünk azzal, hogy az MB értékét a különböző esetekben háttérszámítással kell kiszámítani, abban a speciális esetben, amire a (8) vonatkozott, úgy, ahogy ott meg volt adva.

A (9) egy nagyon összevont képlet, amiből az egyes konkrét életbiztosítások megfelelő paraméterezéssel kaphatók meg. Nézzük a legfontosabbakat:

- haláleseti kockázat nélküli UL – az előbb adtam meg a paraméterezését.
- UL, haláleseti kockázattal: ekkor – az előbbi esethez képest – már kell használni a díjfizetéshez a túlélési valószínűségeket, de $AB_j = 0$ minden j -re, és $TB_n = 0$. A haláleseti szolgáltatás definíciója sokféle lehet, így ehhez, és az elérési szolgáltatás kiszámításához háttérszámításokra van szükség.
- vegyes biztosítás (halálesetre és elérésre): $AB_j = 0$ minden j -re, $TB_n = 0$. A haláleseti és az elérési szolgáltatások általában megegyeznek, és induló értékük a szerződésben adott, könnyen elérhető. (Vagyis a (9) különösen jól használható lenne a hagyományos életbiztosításokra. Sajnos azonban ez ebben a formában csak a később bemutatandó bruttó díjas változatra igaz, itt a nettó díjnasnál a szerződésben adott értékek helyett, egy annál nagyobb, feltételezett értéket kell használni, amiről alább még beszélek.) Ugyanakkor a biztosítási összegek értéke a tartam során a hozamvisszatérítések és az esetleges indexálás miatt változhat, ilyenkor háttérszámításra (azokhoz pedig megfelelő feltételezésekre) van szükség, hogy évfordulós értéküket pontosan be lehessen állítani.
- elérési biztosítás: itt nem csak $AB_j = 0$ minden j -re, és $TB_n = 0$, de DB_j is 0, minden j -re, stb.
- díjvisszatérítéses elérési. Itt már van haláleseti szolgáltatás, de értéke speciális a vegyes biztosításhoz képest.
- term fix: igazából e miatt a biztosítás miatt került beállításra a TB_n , vagyis az itt nem 0, de az MB_n viszont most igen. Továbbra is $AB_j = 0$ minden j -re (ugyanakkor sok olyan konkrét term fix termék van, amely tartalmaz járadékot is, vagyis ez nem feltétlenül igaz). A haláleseti

szolgáltatás itt speciális: lényegében egy, a díj nagyságával megegyező, biztos járadék (annak egyszeri díja) a hátralévő tartamra. (De ezzel ekvivalens, ha feltesszük, hogy halálesetkor tartalék-feltöltés történik, s a termék díjmentessé – lényegében egyszeri díjassá – válik.)

- járadék: ekkor az AB_j -k nem nullák, a többi érték viszont általában igen. A járadéknál érdemes megjegyezni, hogy ez egy időleges, előleges járadék. Ha élethosszig tartó járadékot akarunk, akkor tartamot a statisztikailag még mért legmagasabb élettartamhoz (ω) kell beállítani, vagyis ilyenkor $n = \omega - x$.
- megemlíteném még a tiszta haláleseti biztosítást, bár ez a többi fentivel ellentétben nem PRIIPs. Mégis könnyen előállítható a rá vonatkozó költségmutató, egyszerűen csak a DB-knek adunk értéket, a többit 0-val tesszük egyenlővé.

Végül érdemes még két témát felvetni. Az egyik, hogy a fentiekben csak egy elérési és egy biztos szolgáltatást engedünk meg, mindkettőt a tartam végén. Ez megfelel a gyakorlatnak, de esetleg előfordulhatnak olyan termékek is, ahol tartam közben is van még egy-két elérési szolgáltatás. Ekkor értelemszerűen és nagyon egyszerűen módosítani lehet a fenti képletet. Ugyanez a helyzet a tartam közbeni biztos szolgáltatással, bár annak a tartam közbe helyezése sokkal kevésbé indokolható, mint az elérésié.

A másik téma, hogy a fentiekben határozott tartamú terméket feltételeztünk, miközben gyakran találkozunk határozatlan tartamúval. A határozatlan tartammal kapcsolatban azonban van egy félreértés, ezért meg kell különböztetni a tényleges határozatlan tartamú termékeket az ál-határozatlan tartamúaktól. Tényleges határozatlan tartamú, amely akkor ér véget, ha az ügyfél azt mondja, hogy vége, vagyis az ügyfél döntésétől függ a dolog – a szerződés szerint is. Ekkor nem lehet mást csinálni, mint a költségmutató számításánál feltételezünk egy vagy több tartamot, s ezekkel számítjuk ki a költségmutatót, technikailag ugyanúgy, mintha a szerződés határozott tartamú lenne.

Az ál-határozatlan tartamú pénzügyi termékek bizonyos biztosítások, amelyek élethosszig szólnak (életjáradékok, whole life biztosítás). Ezek látszólag szintén határozatlan tartamúak, mert nem tudjuk mikor hal meg a biztosított, de ha tüzetesebben megnézzük, akkor ezek ebből a szempontból semiben nem különböznek az olyan határozott tartamú biztosításoktól, mint a vegyes vagy a haláleseti, hiszen ezek is véget érnek akkor, amikor a biztosított meghal, ettől mégsem nevezzük őket határozatlan tartamúnak. Valójában a whole life és a járadékbiztosítások esetében csak arról van szó, hogy olyan hosszúra vesszük a tartamot (vagyis ennél is van „határozott” tartam), hogy az alatt biztos meghal a biztosított. Természetesen végtelen sok ilyen tartam lehet (pl. 1000 év, 100000 év, stb.), de ezek közül a legrövidebb a fent már említett $\omega - x$, így ezeknél tekinthetjük ezt a tartamnak.

Még azt is érdemes számba venni, hogy mi a probléma ezzel a mutatóval. A fentiekben a (4), (7), (8) és (9) képletek ugyanannak a mutatónak egyre általánosabb változatait mutatták be, amelyek egyre többféle pénzügyi termékre terjedtek ki. Azt lehet mondani, hogy a (8) képletig nem is merült

fel semmi komolyabb probléma, mert azok a pénzügyi termékek, amelyek még belefértek ebbe a képletbe (vagyis a befektetési alapok és a biztosítási kockázat nélküli – esetleg nagyon kicsi ilyen elemet tartalmazó – unit-link), azok esetében ez a megközelítés minden probléma nélkül alkalmazható. A hagyományos biztosítások esetében azonban két komoly probléma is felmerül ezzel a megközelítéssel szemben:

1. a (9) – ugyanúgy, mint a korábbi változatok – feltételezi, hogy pontosan ismerjük a menet közben felmerülő költségek nagyságát. Ez igaz is a biztosítások közül a unit-linked típusúakra, de nem igaz a hagyományos biztosításokra, ott csak a bruttó díj nyilvános, hogy ebből mennyi a költség, az nem. Tehát erőteljes technikai akadálya van a mutató kiszámításának a hagyományos biztosítások esetében, bár a (9) képlet világos.
2. a (8) képletben a szolgáltatás oldalon (jobb oldal) nem egy tényleges, hanem egy feltételezett szolgáltatással számoltunk, aminek kiszámítása azonban nem okozott gondot. Azért volt ez feltételezett, mert feltettük, hogy a teljes díjat befektetjük (miközben valójában csak a költségek nélküli, nettó díjjal tesszük ezt meg), és azt is feltettük, hogy az a teljes, bruttó hozamot (i) hozza, miközben a hozamból folyamatosan levonjuk a befektetési költségeket (x). A hagyományos biztosítások esetében viszont – egyébként az előbbieknél megfelelően – úgy kellene kiszámolni a szolgáltatásokat a (9)-ben, mintha a teljes bruttó díj nettó lenne, vagyis nem számítanánk fel költségeket. Ez másképp azt jelenti, hogy nem elég mondjuk a nyereségrészesedés szabályai szerint kiszámítani az egyre növekvő haláleseti és elérési szolgáltatást egy vegyes biztosítás esetében, ezeket még „fel is kell fűjni”, olyan arányban, ahogy a nettó és bruttó díj viszonyul egymáshoz. Mivel a nettó díjat nem ismerjük, ezért ezt is nehéz megtenni.

Egy további probléma a használt valószínűségeké, de ez közös a bruttó díjra vetített mutatókéval, úgyhogy később együtt foglalkozunk vele.

A fentiek miatt, *ha tényleg általános, minden termékre* (így a hagyományos életbiztosításokra is) *kiterjedő mutatót akarunk konstruálni, célszerűbb a másik megoldást választani, vagyis nem a nettó, hanem a bruttó díjra vetíteni a kamatrést.*¹³ Ekkor ugyanis ezekbe a problémákba nem ütközünk bele, egyszerűen nincs szükség a nem ismert költségadatokra, elég az amúgy is nyilvánosan elérhető bruttó díj ismerete a számításához.

Nézzük ezért most részletesen ezt a másik megoldást!

¹³Ennek egyik következménye, hogy a TER mutatót is – amennyiben az megmarad – át kell állítani nettó befektetési értékűről bruttó befektetési értékűre. Mivel a TER mutató az általános képlet speciális esete – ettől a változástól eltekintve – nincs akadálya, hogy megmaradjon abban a termékkörben, amiben ma is használják.

2.2 A bruttó díjra vetített alváltozat

A kifejtés során itt fordított utat fogunk bejárni (remélhetőleg rövidebben), mint az előbb: először a legbonyolultabb esetből indulok ki, vagyis megadom a (9) változatát bruttó díjra:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} j|p_x \cdot GP_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} j|p_x \cdot AB_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} j|q_x \cdot DB_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{j+1} + {}_n|p_x \cdot MB_n \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n + TB_n \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n. \end{aligned} \quad (10)$$

Ez a képlet nagyon hasonlít a hagyományos biztosítások díjkalkulációjához használt ún. ekvivalencia egyenletre. Két fontos különbség van ahhoz képest:

1. a bal oldalon ott nem a bruttó, hanem a nettó (vagyis a költségek nélküli) díjak állnak (ráadásul index nélkül, mert feltesszük, hogy mindegyikük ugyanaz a tartam során)
2. r helyett pedig ott egy rögzített érték, a technikai kamatláb szerepel, amit i -vel szoktunk jelölni, s nem is az r a keresett érték, hanem a nettó díj.

A szolgáltatások általában szintén nem indexáltak ilyenkor, hanem feltesszük, hogy a tartam során változatlanok (bár néha vannak előre rögzített mértékben változó szolgáltatású termékek is a piacon). Az egyes konkrét termékeket ugyanazzal a konkrét paraméterezéssel lehet ebből az általános képletből számítani, ahogyan azt fent is tettük. Nagyon fontos, hogy itt az AB , DB , MB és TB értékek nem feltételezett „felfúj” értékek, mint (9)-ben, hanem a tényleges, a szerződésben szereplő értékek, vagyis azok egyszerűen elérhetőek (legalábbis a hagyományos biztosítások esetében).

A (10)-ben a keresett változó, r értéke – ellentétben (9)-cel – nyilván kisebb lesz, mint i , a feltételezett hozam. Emiatt a korábbihoz képest a költségmutató értéke itt fordított: $i - r$, hiszen ha a költségmentes díjakat íránk be (10)-be, akkor nyilván i lenne az eredmény, s ekkor a költség 0, a költségmutatónak is 0-nak kell lennie. A kisebb belső kamatlábat a költségek okozzák, tehát emiatt marad el az attól, amit korábban felszámoltak.

A (10) legegyszerűbb változatában, vagyis, ha feltesszük, hogy a tartam során elért hozam az előre kalkulált i technikai kamatlábal (ezúttal, mint feltételezett hozammal) lesz egyenlő, számítása nagyon egyszerű, hiszen csupa olyan érték kell hozzá, ami szerepel a szerződésben: a bruttó díj és a biztosítási összegek. Ez alól egyetlen fajta érték a kivétel, a haláleseti és a túlélési valószínűségek, de ezzel a problémával az alábbiakban még foglalkozunk. Ez azt is jelenti, hogy – ellentétben a (9)-cel, ahol a biztosítási összegek kiszámításához mindenképpen háttérszámításokra van szükség – itt nem (legalábbis ebben az egyszerű változatban és a hagyományos életbiztosítások esetében nem).

Ha feltesszük, hogy a bruttó hozam nem egyenlő ezzel az i technikai kamatlábbal, akkor a képlet ugyan nem változik, de a biztosítási összegeket a hozamvisszatérítés termékre vonatkozó szabályai szerint újra kell számolni (legalábbis ha az i felfele, és nem lefele tér el a technikai kamatlábtól). Természetesen nem tudjuk előre, hogy mi lesz a hozam, így a számításhoz hozamfeltételezésekkel kell élni – akár többel is, vagyis a kapott mutató értéke függ a feltételezett hozamtól is. A tényleges hozam már csak azért is különbözik a technikai kamatlábtól, mert az érvényes szabályok szerint a technikai kamatlábat (vagyis a biztosan kiígért hozamot) „szerényen” kell megállapítani, úgy, hogy az a ténylegesen elért hozamba biztosan beleférjen.¹⁴ Hozamra vonatkozó feltevéseket azért is kell tenni, mert szokás szerint a költségek jelentős részét a biztosítók a technikai kamatlábon felüli ún. több-lethozamba teszik. Ha csak a technikai kamatlábbal számolunk, akkor figyelmen kívül hagyjuk ezeket a költségeket a költségmutatóban. Lehetne ugyan úgy is eljárni, mint fent a nettó díjra vetített mutatónál alternatívaként bemutattuk, vagyis a feltételezett hozam%-ban megadott költséglevonást egyszerűen hozzáadjuk a technikai kamatlábbal kiszámított költségmutatóhoz, de ez itt – ellentétben a nettó díjas megoldással – nem konzisztens. A hozam%-ban megadott költséglevonás vetítési alapja ugyanis a tartalék, vagyis a nettó díj, itt pedig a költségmutató a bruttó díjra van vetítve, vagyis a két érték nem adható egyszerűen össze. (Ugyanakkor kis költségek esetén ez a módszer is jó közelítő megoldást ad.)

Mindenképpen kell tenni hozamfeltételezéseket, ha nincs is kiígért hozam, vagyis technikai kamatláb. Ez a helyzet a unit-linked biztosításoknál. Ezeknél ráadásul a hozamfeltevések azért is szükségesek, mert – a hagyományos biztosításokkal ellentétben – a biztosítási összegek nem adottak, azokat (háttérszámítással) ki kell számítani, hozamadatokat is használva. Ezzel a megszorítással a (10) alkalmazható unit-linked biztosításokra is.

A (10) (8)-nak megfelelő változata az alábbi:

$$\sum_{j=0}^{n-1} GP_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} (GP_j - C_j) \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-j} \cdot (1+ni)^{n-j}. \quad (11)$$

Ebben a képletben már nincsenek valószínűségek (pontosabban az elérési valószínűségek értéke 1, a halálesetieké pedig 0), vagyis ugyanazokra a pénzügyi termékekre szűkül az alkalmazása, mint a (8)-nak, vagyis a befektetési alapokra és a biztosítási kockázat nélküli unit-linked biztosításokra. Ide már expliciten beírtam a MB (vagyis az elérési szolgáltatás) képletét, ami a felkamatolt nettó díjakkal egyezik meg. A felkamatoláshoz viszont nem az i -t, vagyis a bruttó hozamot használtam, hanem a nettót (amit ni -vel jelöltem, és értéke lényegében $i - y$)¹⁵. Ellentétben ugyanis a (8) szemléletével, a (11)-ben nem egy konstruált szolgáltatást („mi lett volna, ha az egész bruttó díjat

¹⁴Ezen az általános érvényű megállapításon nem változtat az a tény, hogy mostanában az alacsony kamatláb környezetben sokszor előfordul, hogy a kiígért technikai kamatláb magasabb a ténylegesen elért hozamnál, vagyis a valóság néha alulmúlja a pesszimista feltételezéseket is.

¹⁵A költséget itt azért jelöltem x helyett y -nal, mert annak más a vetítési alapja.

befektették volna”), hanem a ténylegest kell tenni. Minél kisebb (11)-ben a jobb oldal, annál kisebb lesz r , a belső megtérülési ráta, vagyis annál nagyobb lesz $i - r$, a költségmutató. A nettó díjas változatnál a helyzet még fordított volt.

A (10) és (11) között a különbség, hogy a (10)-ben – azoknál a biztosításoknál legalábbis, ahol a szerződés mondja meg, mennyi MB, DB, stb. – nem kellett dolgozni explicit költségadatokkal, a (11)-ben viszont a szolgáltatás oldalon már előfordul ilyen.¹⁶ De ez nem baj, mert a (10) igazából a hagyományos biztosításokra, a (11) pedig a unit-linked biztosításokra optimalizált képletváltozat (még egyszer hangsúlyozva: a (10) és (11) valójában ugyanaz a képlet).

A (10)-(11)-nek a (7a)-nak megfelelő, vagyis az egyszeri díjas termékekre vonatkozó változata az alábbi:

$$GP \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^0 = GP = (GP - C_0) \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \cdot (1+ni)^n. \quad (12a)$$

Ebben a képletben azt feltételeztük, hogy a folyamatos költségek a tartalékkal arányosak, de a tartam elején lehet egyszeri költség, ami ennél nagyobb. Ha nincs ilyen, akkor megkaphatjuk a (7b)-nek megfelelő változatot:

$$GP = GP \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \cdot (1+ni)^n = GP \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \cdot (1+i-y)^n. \quad (12b)$$

(A továbbiakban, hasonlóan (7)-hez, a (12a)-ra és (12b)-re együtt, mint (12)-re hivatkozunk.) Ennek a képletvariánsnak is az a haszna, hogy közvetlenül ki tudjuk fejezni belőle r -t:

$$r = i - y. \quad (12c)$$

Tehát a költségmutató maga y lesz, ami logikus, hiszen minden költség eleve olyan típusú, mint a költségmutató.

Ha feltesszük, hogy a hozam 0%, és nincs befektetési költség a (4)-nek megfelelő változat, akkor kapjuk, hogy:

$$GP = (GP - C_0) \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n. \quad (13)$$

Ekkor a költségmutató $i - r = 0 - r$, vagyis az r abszolút értéke lesz. Ennek r -re való explicit megoldása $n = 1$ esetén (az (5)-nek megfelelő képlet):

$$r = -\frac{C_0}{GP}. \quad (14)$$

Vagyis (14) két dologban különbözik (5)-től: r értéke negatív lesz, és a vetítési alapja nem a nettó, hanem a bruttó tőkeérték lesz. Vagyis ez a TER mutatónak egy, a bruttó befektetett tőkére vetített változata.

A kamatrés típusú mutatók két alváltozata közül ez a technikailag a könnyebben számítható, emiatt a preferált megoldás. Ha a költségek nem

¹⁶Igaz, azoknál a pénzügyi termékeknél, amelyekre (11)-et lehet alkalmazni, a (10)-et is így kell alkalmazni, vagyis (10) esetében is szükség van explicit költségadatokra.

túl nagyok, illetve minél hosszabb tartamról van szó, a két almutató közötti különbség amúgy is egyre kisebb, végül elhanyagolható lesz. Van azonban egy elvi probléma, mégpedig az, hogy míg a nettó díjra/tartalékra vetített mutató a ténylegesen befektetett tőkére van vetítve, tehát ugyanarra az alapra, amiben a szolgáltatók az ügyfelek számára a hozamokat megadják, addig a bruttó díjra vetített mutató nem ilyen. Emiatt a nettó díjra vetített mutató interpretálása az ügyfelek számára egyszerű: a szolgáltató által adott hozamból ezt még le kell vonni, mert a költségek miatt ténylegesen csak ennyi hozam jut a befektetett pénzemre.

A bruttó díjra vetített mutató azonban egy képzelt tartalékra vetíti a költségek miatti hozamlevonást. Azt feltételezzük, mintha az összes ügyfélpénzt, a költségek levonása nélkül befektetnénk, s ennek hozamából kellene levonni a kamatrésben kifejezett költségeket. Természetesen maga az i , vagyis a bruttó hozam érzéketlen arra, hogy azt képzelt vagy tényleges tartalékra vonatkoztatják-e, de a költségmutató így nem alkalmazható közvetlenül úgy, mint a nettó díjas változat, hiszen a szolgáltató továbbra is a nettó díjra, tehát a tartalékra vonatkozó hozamokat adja meg, s ha abból levonjuk a költségmutatót, aminek más az alapja, akkor csak hozzávetőlegesen helyes eredményt kapunk. Igaz, mivel a két mutató a költségek csökkenésével, illetve a tartam növekedésével tart egymáshoz, a legtöbb esetben ez nem gyakorlati probléma.

3 Levonás a díjból

Miután részletesen megtárgyaltuk a kamatrés típusú költségmutatót, nézzük meg alternatíváját, a díjban felszámított költségeket. Ha vesszük az (5) és a (14) képleteket, vagyis a TER mutató két változatát, a nettó és a bruttó díjasat, akkor azt mondhatjuk, hogy ezeket nemcsak kamatrés típusú költségmutatónak tekinthetjük, hanem díjban felszámítottnak is, mégpedig azért, mert $n = 1$ esetén a költségmutatónak ez a két megközelítése egybeesik. Emiatt általánosságban azt a megállapítást is tehetjük, hogy aki a TER mutató felől néz a költségmutatók kérdésére, esetleg észre sem veszi, hogy már eleve itt van egy alternatíva. $n > 1$ esetében azonban nyilvánvalóan elválik ez a kétféle mutató. A díjban felszámított költségmutató ugyanis nem évesített nagyság, hanem annyiszor kerül levonásra, ahány díjfizetés van. Ha egyszeri díjas termékről van szó, akkor egyszer, ha rendszeres díjas termékről, akkor pedig annyiszor, ahány díjfizetés van. A díjból levont költségmutató (jelöljük mondjuk c -vel) lényege, hogy a költségek miatt ilyen arányban lesz kisebb a szolgáltatás, mint akkor lenne, ha nem lennének költségek. Persze ezt a c -t viszonyíthatjuk a bruttó díjhoz is, amiből még nem vonták le a költségeket, és a nettóhoz is, amiből már igen, vagyis ennek a költségmutatónak ugyanúgy két változata van, mint a kamatrés típusúnak.

A bruttó díjra vetített változatot (a (10) megfelelőjét) a következőképpen

kapjuk meg:

$$(1-c) \sum_{j=0}^{n-1} j|p_x \cdot GP_j \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} j|p_x \cdot AB_j \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^j + \sum_{j=0}^{n-1} j|q_x \cdot DB_j \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^j + n|p_x \cdot MB_n \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^n + TB_n \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^n. \quad (15)$$

A (15) két dologban különbözik (10)-től:

- a keresett változó c , nem r , ami ezért nem is szerepel az egyenletben
- az r helyett a feltételezett hozam szerepel.

Az eredmény értelmezése: ha (15) bal oldalán a bruttó díjak helyett a nettó áll, és i a technikai kamatláb, akkor $c = 0$, hiszen így az egyenlet nem más, mint a nettó díjak kalkulációjánál használt ekvivalencia egyenlet. Ekkor a (15) jobb oldalát nevezhetjük akár a pénzügyi termék szolgáltatása „korrekt értékének” (fair value). A költség az, amit a díjban e fölött kell fizetni.

A (15) egyszerűbb változatait különösebb magyarázat nélkül írjuk fel, mert azok ugyanúgy állnak elő, mint korábban a kamatrés típusú mutatóknál. Fontos megjegyezni, hogy ez a megközelítés a befektetési alapokon és az életbiztosításokon túl kiterjeszhető a strukturált termékekre is, amelyekre a kamatrés típusú mutatót nehezen tudnánk megkonstruálni. Ezeknél azonban nem biometrikus valószínűségeket kell alkalmazni.

A (15) (11)-nek megfelelő változata:

$$(1-c) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} GP_j \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} (GP_j - C_j) \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-j} \cdot (1+ni)^{n-j}. \quad (16)$$

A (12a)-nak megfelelő változat:

$$(1-c) \cdot GP = (GP - C_0) \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^n \cdot (1+ni)^n. \quad (17a)$$

A (12b)-nek pedig

$$(1-c) \cdot GP = GP \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^n \cdot (1+ni)^n = GP \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^n \cdot (1+i-y)^n. \quad (17b)$$

És végül a (13)-nak megfelelő (a (14)-nek megfelelő nem különbözik attól):

$$(1-c) \cdot GP = (GP - C_0) \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^n. \quad (18)$$

Most jönnek a nettó díjas változatok, de ezek előállításához ezúttal nem a (9)-en keresztül vezet az út, mivel ott a jobb oldal elég nehezen állítható

elő a „felfúvás” miatt.¹⁷ Viszont egyértelmű, hogy ha a bruttó díj $(1 - c)$ része a nettó díj, akkor c a nettó díjra vetítve a $\frac{c}{1-c}$ értéket veszi fel.

Érdeemes még annyit megjegyezni, hogy ha a költségek egyenletesen, mindig az adott díjjal arányosan, díjfizetéskor merülnek fel, akkor nincs jelentősége azok időértékének, vagyis nem kell használni a diszkontálást, a (15) (19)-cé válik:

$$c = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} C_j}{\sum_{j=0}^{n-1} GP_j}. \quad (19)$$

4 A valószínűségekkel kapcsolatos problémák

4.1 A valószínűségek kiszámítása

A különböző típusú költségmutatók legátfogóbb képletei, vagyis a (9), a (10) és a (15)-ös legfeltűnőbbben abban különböznek az egyszerűbb variánsaitól, hogy biometrikus valószínűségeket alkalmaznak. Erre amiatt van szükség, hogy a biometrikus kockázatokat integráns módon tartalmazó életbiztosításokat is kezelni tudja a képlet. Az, hogy ezek egyszerűen a korábbi képletek általánosításai, vagyis a (9) a (8)-nak, a (10) a (11)-nek, a (15) pedig a (16)-nak, abból is látszik, hogy ezeket megkapjuk, ha a túlélési valószínűségeket biztosra (vagyis 1-re) állítjuk. Az már ebből következik, hogy a haláleseti valószínűségeket (ami két túlélési valószínűség különbsége, vagyis $1-1=0$) pedig 0-ra. Ekkor például a (10) új formája (20) lesz:

$$\sum_{j=0}^{n-1} 1 \cdot GP_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} \cancel{j!p_r \cdot AB_j} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j + \sum_{j=0}^{n-1} 0 \cdot DB_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j + 1 \cdot MB_n \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n + \cancel{TB_n} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n. \quad (20)$$

Ez csak abban különbözik (11)-től, hogy itt a (szintén biztos kifizetésű) lejáratú szolgáltatásnak nem szerepel az explicit képlete. A (20) jobb oldaláról magától kiesik (a 0 szorzó miatt) a haláleseti szolgáltatás. Két másik formulát is áthúztam. A biztos kifizetést (TB) azért, mert felesleges, most már az MB is ilyené vált, a járadék formulát pedig azért, mert a járadékokra csak és kizárólag a legáltalánosabb (vagyis itt a (10)) alkalmazható, az egyszerűsített semmiképpen (erről alább még beszélek).

Sokan érvelnek amellet, hogy ne tegyük meg a (8) és (9), valamint a (11) és (10) közötti lépést¹⁸, hanem az életbiztosításokra is (amelyekre ezek igazából nem elég általánosak) a (20)-t, (11)-t, (8)-t alkalmazzuk. Mielőtt rátérnénk érveikre, nézzük meg, hogy a gyakorlatban ez mit jelent!

¹⁷Valójában a „felfúvást” leginkább a c előzetes kiszámításával lehet legjobban elvégezni, így itt ördögi körbe is kerülénk.

¹⁸A (15) és (16) közötti lépésről csak azért nem esik szó, mert az egész problémát – vagyis, hogy nem csak kamatrés típusú költségmutatók vannak –, mintha nem is fedezték volna fel az illetékesek.

A (10)-ről a (20)-ra (illetve (11)-re) való áttérés egyértelműen az r csökkenését, tehát az $i - r$, vagyis a költségmutató emelkedését jelenti, hiszen azzal, hogy a bal oldalon 1-re növeljük az ennél kisebb túlélési valószínűségeket, azt jelenti, hogy többet kell fizetnünk. Az pedig, hogy a jobb oldalon lenulláztuk a haláleseti szolgáltatást, az elérésit pedig kitoltuk a tartam végére, hogy kevesebbet kapunk. Vagyis számunkra a cash-flow belső megtérülési rátája (az r) csökkent. Ez a növekedés egyedül annak köszönhető, hogy kizártuk a biztosítási szolgáltatásokat (tehát pl. azt, hogy esetleg kevesebb ideig kell a díjat fizetni, de így is hozzájuthatunk ugyanahhoz a biztosítási összeghez, ráadásul esetleg sokkal korábban), miközben azok díját bennhagytuk (beépítve a GP-be) az egyenletben. Tehát a költségmutató növekedése amiatt következett be, hogy a biztosítási szolgáltatás díját költségnek tekintettük, amivel szemben nem áll figyelembe vett szolgáltatás. Emiatt az, amennyivel a költségmutató így megemelkedett, egyben a biztosítási kockázatok díjának kamatrés típusú mutatójának is tekinthető. (Hasonló eredményre jutunk a másik kettő, illetve három bemutatott költségmutató esetében is, de ezzel most részletesen nem foglalkozunk.) Ezt a megállapítást egyébként úgy is interpretálhatjuk, hogy a biometrikus valószínűségek negligálása (vagyis értékük 1-re, illetve 0-ra való állítása) másképp azt jelenti, hogy a biztosítási (vagy legalábbis a haláleseti) kockázat díját költségnek tekintjük.¹⁹

4.2 A valószínűségek használata elleni szokásos érvek

És most nézzük meg, mik az amellet szóló érvek, hogy ezt a lépést tegyük meg! Általában a következő három érv szokott elhangozni, de ezek valamelyikének képviselői nem feltétlenül értenek egyet a többivel, sőt azokat esetleg tévesnek is tarthatják (én magam például csak és kizárólag az elsőt tudom elfogadni, a másik kettő szerintem téves):

1. A biztosítási kockázat díja ugyan nem költség, de ha azt kihagyjuk a költségmutatóból, akkor széles körű manipulációra nyílik lehetőség. A manipuláció lényege: mesterségesen megnöveljük a kockázati díj értékét, ezzel csökkentjük a kimutatott költségek, s így a költségmutató nagyságát, vagyis megtévesztjük a fogyasztókat.
2. Ugyan a biztosítás kockázati díja nem költség, de a valószínűségek alkalmazásával feleslegesen bonyolulttá tesszük a költségmutató számítását. Ennek az érvnek a hangoztatói néha hozzáteszik ehhez, hogy ráadásul az ügyfél pl. egy vegyes biztosítás esetében úgy gondolkodik, hogy biztosan fizeti végig a díjat, s ezért nem kap haláleseti szolgáltatást, csak elérésit, azt viszont a tartam végén. Emiatt a költségmutatót a valószínűségek alkalmazása nélkül kell kiszámítani, de a végén le kell vonni belőle a biometrikus kockázatok díját (hiszen ez mégsem költség, de az így számított mutató annak veszi).

¹⁹Emiatt az az álláspont, miszerint használjuk a (11)-et, de a biztosítás kockázati díját ne tekintsük költségnek, belsőleg ellentmondásos.

3. A biztosítás kockázati díja bizony költség, hiszen nem a megtakarítási cél érdekében merült fel, ezért természetesen nem szabad használni a valószínűségeket a költségmutató kiszámítása során, hiszen ezek alkalmazása lefordítva azt jelenti: a biztosítási kockázat díja nem költség.

Nézzük ezeket az érveket sorjában! Azt már láttuk a fentiekben, hogy ha a (10)-ben 1-re növeljük a túlélési és 0-ra csökkentjük a haláleteseti valószínűségek értékét, akkor ezzel növeljük a költségmutatót. Megfogalmazhatjuk ezt az összefüggést kicsit általánosabban is: ha egy kiinduló helyzethez képest növeljük vagy csökkentjük a (10) képletben a túlélési valószínűségeket (és ennek megfelelően csökkentjük vagy növeljük a haláleteseti valószínűségeket), akkor a költségmutató értéke nő, illetve csökken. (Ez az okfejtés és a következők – mutatis mutandis – alkalmazható a (9)-es és a (15)-ös költségmutatóra is, de itt most csak erre az esetre vezetjük végig.)

Ebből már látszik is a manipulációs lehetőség: lecsökkentjük a költségmutató számításához használt túlélési valószínűségeket (és ezzel konzisztensen: megnöveljük a haláletesetieket), s ezzel csökkentjük a mutató értékét. Azt, hogy a probléma valós, mutatja, hogy Magyarországon 2007-ben a Felügyelet javasolta a piacnak egy, az összes megtakarítási típusú életbiztosításra vonatkozó költségmutató bevezetését (PSZÁF, 2007), és meg is adta az erre vonatkozó képletet, ami lényegében a (10) volt azzal, hogy javasolta i -re a technikai kamatláb alkalmazását (vagyis (10) egy kevésbé általános változataról van szó). A piac válaszul erre a felvetésre, 2009-ben bevezetett egy költségmutatót, a TKM-et (MABISZ, 2009), ami viszont lényegében a (8)-as lett, azzal az egyszerűsítéssel, hogy $i = 0$. Eltekintve attól, hogy az egyik a bruttó, a másik a nettó díjra vetíti a kamatrést, a fő különbség, hogy a (8)-ban nem alkalmaznak valószínűségeket. Igaz, ezzel ez a mutató nem alkalmas a hagyományos életbiztosítások költségeinek a kimutatására (ahhoz az általánosabb (9) kellene), de a MABISZ ezt a problémát úgy oldotta meg, hogy a mutató azokra eleve nem vonatkozott, csak a unit-linked biztosításokra. Ezek esetében pedig kimondta, hogy a kockázati díj is költségnek számít.

A MABISZ-ban senki nem gondolta azt, hogy a kockázati díj költség, viszont azért döntöttek így, és azért választották a (10) helyett a (8)-at, hogy ne lehessen úgy csökkenteni a költségmutatót, hogy megnövelik (legalábbis a költségmutató számításakor, nem ténylegesen) a kockázati díjat.

Az igazsághoz tartozik, hogy a kockázati díjakkal kapcsolatos manipulációs lehetőség máshogyan vetődik fel a (8) és a (10) esetében. A (10)-nél úgy, ahogyan az előbb leírtuk (csökkentjük a túlélési, növeljük a haláleteseti valószínűségek értékét), a (8) esetében viszont egyszerűen a C_j értékeket manipuláljuk, ezek jelentős részét „kinevezzük” kockázati díjnak. Tehát itt már nem közvetlenül a valószínűségek manipulálásáról van szó, tehát elvileg a MABISZ nem közvetlenül a valószínűségek alkalmazását tartotta problémásnak, bár áttételesen igen.

A valószínűségekkel, illetve a kockázati díjjal kapcsolatos előbbi probléma reális, amire többféle megoldási lehetőség létezik. Lehetséges például előírni a használt valószínűségek nyilvánosságra hozatalát és megindoklását, vagy a hatóság is előírhat egy kötelezően használandó halandósági táblát a manipu-

lálások megakadályozása céljából. Célszerűbb azonban egy ezektől teljesen különböző, másik módszer alkalmazása. Ez pedig annak előírása, hogy a költségmutató mellett (ami nem tartalmazza a kockázati díjat, tehát a legáltalánosabb (9), (10) és (15)-ös képlettel számítják ki az értéküket), ugyanolyan módszerrel (tehát a (9) és a (10) esetében tartalékra vetített kamatrésként, a (15) esetében pedig a díjra vetítve) kimutatják a kockázati díj értékét is.

A kockázati díjra vonatkozó mutató így lényegében a (8)-cal és a (9)-cel, a (11)-gyel és a (10)-zel, valamint a (16)-tal és a (15)-tel számított mutatók különbsége.

Ezzel a módszerrel lényegében minden problémát meg lehet oldani: a biztosító ugyan csökkenteni tudja a költségmutató értékét a valószínűségek manipulálásával, de csak olyan áron, hogy ezzel felviszi a kockázati díjra vonatkozó mutató értékét, amit szintén meg kell mutatni és meg kell magyarázni az ügyfélnek. Ezt nyilván nem tudja jól megtenni, ha a mutató értéke nagy, de a vállalt kockázat kicsi.

Vagyis összességében arra jutottunk, hogy a gyakorlatban, az életbiztosítások esetében célszerű mind a valószínűségek alkalmazásával, mind a nélkül kiszámítani a költségmutató értékét, igaz, ez utóbbit csak azért, hogy az előző eredményét kivonják belőle.

A fentieket ugyanakkor nem lehet mindenfajta életbiztosításra alkalmazni, hanem csak azokra, amelyekben a haláleseti kockázat dominálja az elérést (vagyis csak a vegyes, term fix, díjvisszatérítéssel elérést, unit-linked biztosítások esetében), de nem kizárólag haláleseti kockázatra szólnak. Vagyis nem alkalmazható a fenti gondolatmenet a tiszta haláleseti, tiszta elérést és az életjáradék-biztosításokra. Mégpedig azért nem, mert ezekre eleve csak a legáltalánosabb, a (9), (10) és (15)-ös képlet alkalmazható. Nézzük meg a (10)-es képlet példáján, hogy miért (a többire ugyanez a gondolatmenet alkalmazható analóg módon). Ennek „átírását” 1 túlélési és 0 haláleseti valószínűségekkel a (20) mutatja. Ebből látszik, hogy annak jobb oldala (a szolgáltatási oldal) túl kicsi (egészen pontosan 0) lesz tiszta haláleseti biztosítás, és túl nagy járadék és elérést biztosítás esetében. Emiatt a (17) haláleseti biztosításra végtelen nagy költséget hoz ki, a járadék és elérést biztosításra pedig túl kicsit (hiszen nagyon „felülszámítja” a szolgáltatási oldalt).

De ezeknél nem is lehetne külön kimutatni a „biztosítási kockázatot”, hiszen ezek a termékek csak ilyen tartalmazzak. Ebből is látszik, hogy a fentiekben valójában a „biztosítási kockázat” szót implicite leszűkített értelemben használtuk, csak a haláleseti kockázatot értettük alatta, miközben vannak fontos olyan életbiztosítási termékek, amelyek ilyen egyáltalán nem tartalmazzak. (Ezek közül ráadásul az elérést és a járadék-biztosítás PRIIPs is.)

Az előző okfejtés implicite már tartalmazta, hogy a (9)-es szembeállítása a (8)-assal, a (10)-esé a (11)-essel, és a (15)-ösé pedig a (16)-tal, mint ami feleslegesen bonyolult, látszólagos és nem igaz érv. Először is, a „bonyolult” képletekre szükség van, mert az egyszerűbb képletek nem elég általánosak, azokból fontos életbiztosítások egyszerűen kimaradnak. Másodszor: ha azt mondjuk, hogy a (8)-as és a (11)-es képlet alapján kiszámított képletekből

még le kell vonni a kockázati díj miatti részt, akkor ugyanazt mondjuk, mint amire az előbb jutottunk. Ez pedig az, hogy igenis, számítsuk ki az ezen (amúgy hamis) érv alapján favorizált (8)-as, vagy (11)-es mutatóval is a költségindikátort, de csak azért, hogy annak segítségével kiszámítsuk a kockázati díj indikátort. Így a költségindikátort továbbra is a (9)-el és a (10)-el számítjuk. Azt pedig ez a (hamis) érv is kiszámítandónak tartja, de a kiszámítás módszerét homályban hagyja. Vagyis valójában ez a (hamis) érv csak azt mondja, hogy ne közvetlenül számítsuk ki a költségindikátort, hanem közvetve, s egy fontos lépést egyszerűen nem „képletesít”. Tehát ez az egész okfejtés egyszerűen félreértésen alapul, hamis.²⁰

Végül nézzük az utolsó ellenérvet, vagyis hogy azért kell a (8)-at és a (11)-et alkalmazni, mert a kockázati díj költség. Fontos leszögezni már az elején, hogy Európában nincs olyan komoly biztosítási szakember, aki ezt gondolná. Ez alapján itt akár le is zárhatnánk a vitát erről az évről, de mégis foglalkozni kell vele, mert olyanok viszont vannak, akiknek van hatalmuk ilyen kijelentést tenni, s ezzel befolyásolni a ténylegesen használt költségmutató kialakítását. Nézzük meg ezért, hogy miért helytelen a biztosítási kockázat díját költségnek tekinteni. A dolgot először nézzük távolról, majd közelítsük egyre konkrétan a PRIIPs-ekre.

Először is, felvetődik a kérdés, hogy mit jelent az, hogy „kockázati díj”? Ha azt az általános választ adjuk, hogy a biometrikus kockázatok díjai, vagyis technikailag azok, amelyeket mortalitási vagy morbiditási valószínűségek segítségével számolunk, vagy másképp: amelyek feltételes szolgáltatások, s a feltétel valamely biztosítási esemény bekövetkezése, akkor ellentmondásos eredményeket kapunk. Ekkor ugyanis az összes életjáradék-biztosítás, a tiszta haláleseti és a tiszta eléresi biztosítások díja teljes egészében kockázati díj, vagyis az egész díj költség. Másképp: a díjra vetített költségmutató maximális, 100%. Ez amellelt, hogy abszurd eredmény, lényegében semmitmondó is, hiszen az ilyen termékek között is van olcsóbb és drágább, de mindegyiknek ugyanaz lesz a költségmutatója, vagyis semmit nem segít az ügyfélnek.

Valójában ezen az alapon az összes hagyományos biztosítás teljes díja kockázatinak tekinthető, hiszen pl. a vegyes biztosítás díja egy eléresi és egy haláleseti biztosítás összege, ugyanez a helyzet a díjvisszatérítéssel eléresi biztosítással, a term fix pedig egy változó biztosítási összegű haláleseti és egy eléresi biztosítás kombinációja. Igaz, ezeknek a biztosításoknak a díja már nem csak így bontható fel, hanem úgy is, mint a unit-linked biztosításoké: tiszta megtakarítási díjrészre és haláleseti kockázatra.

²⁰Azt is lehetne hinni, hogy akik ezt hangoztatják, nem tudják, mit beszélnek. De lehetséges, hogy egyszerűen arról van szó, hogy egy nagy biztosító már sok-sok eurót elköltött egy olyan költségmutató számítógépes kiszámítására, ami a (11)-es képlettel működik. Ez ugyan nem tudja kezelni a járadékot és az eléresi biztosítást, de olyan biztosítása vagy nincs, vagy arra nem számít még ilyen mutatót, így neki az a fontos, hogy a programját ne kelljen megváltoztatni, s nem érdeklik az elvi „szörszálhasogatások”. Fizetett szakértőik viszont elvinek tüntetnek fel nem elvi problémákat, akár olyan áron is, hogy szakmailag nem helytállót beszélnek. Pl. olyanokat mondanak, hogy „filozófiai” különbség van a biometrikus cash-flow használata és az attól való eltekintés között, pedig egészen másról van szó, mint fent kimutattuk.

Ezért lehetséges, hogy akik ezt az érvet megfogalmazták, csak a haláleseti kockázatra gondoltak (de pongyolán fogalmaztak), s azon belül is arra, ami a megtakarítási díjrészen felül van. Valószínű, hogy ez a helyzet, legalábbis valószínűleg a unit-linked biztosítások lebegtek a szemek előtt. De ha leszűkítjük a „kockázati díjat” erre (vagyis megengedjük, hogy az elérési típusú kockázatokat ne vegyék figyelembe a költségmutató számításánál), akkor is problémákba ütközünk, mégpedig legalább kétfélébe.

Az első, hogy ekkor ugyan a tiszta elérési biztosítások és az életjáradékok díja nem lesz 100%-ban költség, de a tiszta haláleseti biztosítás díja még mindig az marad. Szemfülesek ugyan mondhatják erre az érve, hogy a tiszta haláleseti biztosítás nem PRIIPs, de ez formális ellenvetés, mert a haláleseti biztosítás díját is igenis célszerű kockázati részre és költségrészre osztani, vagyis itt is lehetne definiálni költségmutatót (ezt a fentiekben valójában meg is tettük).

A másik, hogy tulajdonképpen milyen alapon problémás a haláleseti szolgáltatás? Miért kell annak a díját költségnek tekinteni? Azért, mert feltételesen kapja meg az ügyfél? Az elérési szolgáltatást is feltételesen kapják meg, s azt az előbb már kivettük a kockázati díjból. Vagy az a különbség, hogy az elérési valószínűség „nagy”, a haláleseti pedig „kicsi”? Ez attól függ, magas korban már fordított lehet a helyzet. Plusz probléma, hogy akkor más feltételes szolgáltatások díját is költségnek kell tekinteni, pl. a strukturált termékekben lévő opciók díját is, de ez sem lenne helyes.

Lehetséges egy másik, formális irány, amely az előző ellenérvhez kapcsolódik, aminek az a lényege, hogy minden túlélési valószínűséget vegyünk 1-nek, s következésképpen minden haláleseti valószínűséget 0-nak, s így számítsuk ki a költségmutatót. Ez azonban a tiszta elérési biztosítások és a járadékok esetében nemhogy 100%-os, de egyenesen negatív költséget is kimutathat. Vagyis az, hogy a biztosítási díj költség, egy belsőleg ellentmondásos érv, a költségmutató szempontjából két, egyformán rossz, de egymással szögesen ellentétes eredményt is levezethetünk belőle bizonyos életbiztosításoknál.

Ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy ha elfogadjuk a fent javasolt megoldást, miszerint a biztosítás kockázati díját²¹ is mutassuk ki külön, de ugyanolyan metodológiával számolt mutatóval, mint a költségeket, akkor lényegtelenné válik, hogy valaki a kockázati díjat költségnek tekinti vagy sem, ugyanarra a megoldásra jutunk. (Csak ekkor nem a (10), hanem a (11), stb. adja a költségmutatót, de a különbségük továbbra is a kockázati díj indikátor lesz.) Ezért is célszerű a fent javasolt módszer alkalmazása.

5 Átváltások

Tehát a fentiekben 2 mutatófajtát (kamatrés, illetve levonás a díjból), s mindegyiknek két alváltozatát (nettó és bruttó díjra vetített) mutattuk be, kitérve azok speciális eseteire is (amelyekre egyszerűbb mutató adható, a spe-

²¹Pontosabban az előbbi módon leszűkített értelemben vett, a megtakarítási részen felüli, haláleseti kockázat díját.

cialítások kihasználásával). Ezek számszerűleg különböző értékeket adnak, de az ugyanarra a termékre kiszámított egyik fajta mutatót egyértelműen át lehet váltani bármelyik másik fajtára. Itt most két fajta átváltással foglalkozom:

- a nettó díjasról a bruttó díjasra (és fordítva)
- a kamatrés típusúról a levonás a díjból típusúra (és fordítva).

Ezek kombinált alkalmazásával bármely mutató (pl. nettó díjas kamatrés) bármely másikra (pl. bruttó díjas levonás a díjból) átváltható. A technikai nehézségek miatt az átváltásoknál csak az egyszerűbb eseteket vizsgálom, de az itt felállított összefüggések – legalábbis közelítőleg – valószínűleg érvényesek a bonyolultabbakra is.

5.1 Átváltás a nettó és bruttó díjas változatok között

A levonás a díjból mutató két változata közötti átváltást már a fentiekben megadtuk. A bruttó díjas változatot a (15)-ös képlet segítségével számolhatjuk ki, amit nettó díjasra egyszerűen a $c/(1-c)$ transzformációval váltunk át. Vagyis ha a bruttó díj c része a költség, akkor nettó díjnak az a $c/(1-c)$ része lesz.

A kamatrés típusú mutató két változata közti átváltást először a legegyszerűbb esetre nézzük meg, vagyis a (4)-et és az annak megfelelő (13)-at hasonlítjuk össze. Megkülönböztetésül a (4)-ben szereplő r -t megkülönböztető jelzéssel látjuk el, valamint kifejezzük belőle a GP-t, akkor az alábbi egyenlethez jutunk:

$$(GP - C_0) \cdot (1 + r')^n = GP = (GP - C_0) \cdot \left(\frac{1}{1 + r}\right)^n. \quad (21)$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$1 + r' = \frac{1}{1 + r},$$

másképp

$$r' = \frac{1}{1 + r} - 1, \quad (22)$$

vagyis a két kamatláb (az előjeltől eltekintve) a kamatláb-diszkontláb viszonyban van egymással.

Kérdés, hogy ez igaz-e a bonyolultabb változatokra is? Nézzük a bonyolultabb változatpárt, a (7)-et és a (12)-t. Itt csak az egyszerűbb variánsok, (7b) és (12b) összehasonlítására van esély, de azok esetében ez könnyen megy, a (7c) és a (12c) alapján. Ezeket használva azt mondhatjuk, hogy (22) akkor teljesül, ha teljesül, hogy

$$\frac{1 + i}{1 - x} = \frac{1}{1 + i - y}. \quad (23)$$

Ami viszont egy logikus átváltás a bruttó és nettó tartaléokra felszámított kamatrés típusú költségek között. $i = 0$ esetre itt $x = y$, ami szintén logikus. Tehát a (22) érvényes erre az esetre is.

5.2 Átváltás a kamatrés típusú és a levonás a díjból típusú mutatók között

Nézzük meg a legegyszerűbb esetet itt is, vagyis a (18)-at és a (13)-at! A (13)-ból kifejezve $(GP - C_0)$ -t, és behelyettesítve (18)-ba, kapjuk, hogy

$$(1 - c) \cdot GP = GP \cdot (1 + r)^n \cdot \left(\frac{1}{1 + i} \right)^n. \quad (24)$$

Ebből c -t kifejezve kapjuk, hogy:

$$c = 1 - \left(\frac{1 + r}{1 + i} \right)^n. \quad (25)$$

Ha nincs költség, akkor $r = i$, és ekkor c valóban 0 lesz. A (25) működik a (17b) esetében is, ha ide behelyettesítjük, visszkapjuk (12b)-t.

6 Összefoglalás

Összefoglalásul megállapíthatjuk, hogy lehetséges egy általános, lényegében minden pénzügyi termékre ugyanazon elvek szerint működő költségmutató megkonstruálása, bár a fentiekben csak azokat a termékeket vizsgáltuk, ahol az ügyfelektől a szolgáltató felé irányuló cash-flow elem megelőzi az ellenkező irányú cash-flow elemet. (Ezek lényegében a megtakarítási és befektetési termékek – a betétek kivételével –, plusz a kockázati jellegű biztosítások.) A fordított esetet (lényegében a hiteltermékek) nem vizsgáltuk, ugyanakkor ezekre is (és a betétekre is) könnyen kiterjeszthetők az itt elmondottak.²² Az elméleti irodalom, bár – speciális esetekben - már majdnem két évtizede felvetette a költségmutatók kérdését, a téma kidolgozatlan maradt, amit jól mutat az a tapogatózó útkeresés, amit az EU bizottságai tanúsítanak jelenleg, amikor napirenden van egy a pénzügyi termékek jelentős részére, a PRIIP-ekre vonatkozó általános költségmutató bevezetése. Az eddig publikált dokumentumokból kiderül, hogy a megfontolt lehetőségek között vannak teljesen amatőr megoldások, a lényegileg egyformákat elvileg különbözőnek tartják formai szempontok alapján, stb.

Az írásban végigvettem, hogy az eddig – speciális helyzetekre – megalkotott költségmutatókban (mint a TER a befektetési alapoknál, TKM a magyar életbiztosításoknál) mi a közös és mi a különböző, s megalkottam egy teljesen általános mutatót (a (9)-et), illetve annak változatait (a (10)-et és a (15)-öt), s megmutattam, hogy az eddigi konkrét megvalósulások az általános mutató melyik konkrét megvalósulását reprezentálják. Megmutattam, hogy a költségmutató rendkívül sokféle lehet, attól függően, hogy a különböző típusú költségeket melyik egyetlen típusra konvertálják, mégis, a leginkább célszerű költségmutató kétféle lehet: egy kamatrés típusú és egy költségrész (levonás a díjból) típusú, aminek megint két-két alfaja lehetséges attól függően, hogy

²²Ld. erről Banyár-Vékás (2015), ahol viszont a költségmutató részleteibe nem mentünk bele.

a vetítési alap az ügyfél nettó (költségek nélküli), vagy bruttó befizetése. Ezek ugyanazt mutatják, így egymásba konvertálhatóak, sőt, 1 éves tartam esetében a kétféle mutató egybeesik (aminek fel nem ismerése eddig szintén zavarokat okozott).

A leírás során az alkalmazhatóságot tartottam szem előtt, ezért nem törekedtem deriválható függvények megadására (így nem használtam folyamatos kamatozást sem), hiszen ilyenekkel a napi pénzügyi gyakorlatban lényegében nem találkozunk.

A költségmutató megalkotása során a legnagyobb elméleti ugrást az olyan „biztos” szolgáltatású termékek, mint a befektetési alapok és az olyan valószínűségi alapú termékek, mint az életbiztosítások és az opciók között kellett megtenni. A dolgozatban bemutattam, hogy lehetséges egyetlen keret ezekre a látszólag nagyon különböző termékekre, míg eddigi más próbálkozásokban ez az ugrás általában nem sikerült, azok jellemzően kétféle rossz megoldásba torkolltak: 1. elvileg különbözőnek mutatták az életbiztosítások és a többi megtakarítási termék problémáját, amelyekre külön költségmutatóra van szükség; 2. az életbiztosításokat „megerőszkolva” azokat leegyszerűsítették determinisztikus cash-flow-jú termékekké.

Irodalom

1. Banyár, József (2013): Drágák-e a Magyar biztosítások, PSZÁF/MNB honlap http://felugyelet.mnb.hu/data/cms2408424/dragak_e_a_nemelet_biztositasok_130916.pdf - Letöltés: 2015. július 3.
2. Banyár, József – Vékás, Péter (2015): A pénzügyi termékek ára, kézirat, megjelenés alatt
3. Babbel D. F. (1985). The Price Elasticity of Demand for Whole Life Insurance. *Journal of Finance*, 40(1): 225-239.
4. Bacon and Woodrow (1999). Comparative Tables: Proposals for Discussion (report prepared for the Financial Services Authority, London).
5. BCP (1979): Life Insurance Cost Disclosure. Staff Report to the Federal Trade Commission. USA Bureau of Consumer Protection, Bureau of Economics. <https://www.ftc.gov/reports/life-insurance-cost-disclosure>. Letöltés: 2015. szeptember 29.
6. CESR (2010): CESR's guidelines on the methodology for calculation of the ongoing charges figure in the Key Investor Information Document: http://www.esma.europa.eu/system/files/10_674.pdf. Letöltés: 2015. július 3.
7. CFPB (1968): Truth in Lending Act, Appendix J to Part 1026 – Annual Percentage Rate Computations for Closed-End Credit Transactions. USA Consumer Financial Protection Bureau. <http://www.consumerfinance.gov/eregulations/1026-J/2015-09000>. Letöltés: 2015.09.29.
8. Diamond, Peter (1999): Administrative Costs and Equilibrium Charges with Individual Accounts. NBER Working Paper 7050 – <http://www.nber.org/papers/w7050.pdf>. Letöltés: 2015. szeptember 30.
9. EIOPA (2014): Discussion Paper – Key Information Documents for Packaged Retail and Insurance-based Investment Products (PRIIPs) – <https://eiopa.europa.eu/Publications/Consultations/JC%20DP%202014%2002%20-%20PRIIPs%20Discussion%20Paper.pdf>. Letöltés: 2015. július 3.

10. EIOPA (2015): Technical Discussion Paper Risk, Performance Scenarios and Cost Disclosures In Key Information Documents for Packaged Retail and Insurance-based Investment Products (PRIIPs) – <https://eiopa.europa.eu/Publications/Consultations/JC%20DP%202015%2001.pdf>. Letöltés: 2015. július 3.
11. EU (2014): Az Európai Parlament és a Tanács 1286/2014/EU Rendelete a lakossági befektetési csomagtermékekkel, illetve biztosítási alapú befektetési termékekkel kapcsolatos kiemelt információkat tartalmazó dokumentumokról <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/HU/TXT/PDF/?uri=OJ:L:2014:352:FULL&from=EN>. Letöltés: 2015. július 3.
12. Paál Zoltán – Lencsés Katalin (2015): Több vagy jobb minőségű tájékoztatás a befektetési termékek piacán – Az európai PRIIPs szabályozás státusza és kihívásai. Biztosítás és Kockázat, 2015. 3. szám
13. MABISZ (2009): MABISZ TKM angol nyelvű leírása: <http://mabisz.hu/en/annual-cost-rate.html>. Letöltés: 2015. július 3.
14. Pauly, M.V., Withers, K.H., Subramanian–Viswanathan, K., Lemaire, J., Hershey, J.C., Armstrong, K., Asch, D.A. (2003): Price Elasticity of Demand For Term Life Insurance and Adverse Selection. NBER Working Paper no. 9925. <http://www.nber.org/papers/w9925>. Letöltés: 2015.09.10.
15. PSZÁF (2007): 3/2007-as Vezetői körlevél: <http://felugyelet.mnb.hu/data/cms1290632/down.pdf>. Letöltés: 2015. július 3.
16. PSZÁF (2012): PSZÁF 7/2012. számú ajánlása: http://felugyelet.mnb.hu/data/cms2352523/ajanlas_7_2012.pdf. Letöltés: 2015. július 3.
17. Whitehouse, E. (2000): Administrative charges for funded pensions: An international comparison and assessment. Munich Personal RePEc Archive, Social Protection Discussion Paper Series, No. 0016. https://mpa.ub.uni-muenchen.de/14172/1/MPRA_paper_14172.pdf. Letöltés: 2015. szeptember 30.

GENERAL COST INDICATOR(S) FOR FINANCIAL PRODUCTS

The introduction of a uniform, general, easy to understand cost indicator for a large group of financial products has already appeared in a lot of countries, but the problem has become apparent only after the publication of the EU regulation on "packaged retail insurance and investment products" (PRIIPs). The theoretical literature on this topic is largely missing, so there is a lot of misunderstanding about it. This paper is seeking the appropriate, possible cost indicators from a quite general angle, is comparing the characteristics of the different possible solutions with each-others and is proposing what and how should have to introduce or not introduce.

ENTRÓPIA MINT PÉNZÜGYI KOCKÁZATI MÉRTÉK¹ORMOS MIHÁLY – ZIBRICZKY DÁVID
BME Pénzügyek Tanszék

Az entrópiát, mint pénzügyi kockázati mértéket vizsgáljuk. Dolgozatunkban bemutatjuk, hogy az értékpapírok és portfóliók napi hozamán mért differenciális entrópia alkalmas azok kockázati prémiumának magyarázatára, összehasonlítva a tőkepiaci árazási modell (CAPM) béta paraméterével, egyszerűbb és pontosabb becslést adhat. Elemzéseink alapján az entrópiára is érvényes a diverzifikációs hatás: véletlenszerű portfóliók elemszámának növelésével csökkenő kockázatot mértünk, illetve entrópia – várható hozam koordináta-rendszerben a diverzifikálás hatására a portfóliók hiperbola mentén sűrűsödnek, hasonlóan a varianciához. Empirikus vizsgálatunk során véletlenszerűen 150 értékpapírt választottunk a Standard & Poor's 500 részvényindexből, majd ezek napi logaritmikus hozamán 25 éves időtartamra vonatkozóan végeztünk méréseket. Regressziós elemzéseink eredményei alapján az entrópia mint kockázati mérték jobb magyarázó erővel bír a várható hozamra vonatkozóan, mint a variancia, illetve a CAPM bétája.

Kulcsszavak: entrópia; eszközárzás; kockázat becslés; szisztematikus kockázat. *JEL:* G12; C58

1 Bevezetés

Tanulmányunk során egyensúlyi eszközárzásai modellt építünk egy új kockázati mértékre, az entrópiára alapozva. Az entrópia a valószínűségi változó rendezetlenségét, bizonytalanságát, kiszámíthatatlanságát karakterizáló mérték. Esetünkben, amikor egyes befektetések teljesítményértékeléséről szólnak, az entrópia részvények vagy portfóliók hozam-bizonytalanságát, ingadozásának mértékét, rendezetlenségét adja, persze anélkül, hogy a hozam eloszlásáról bármit is állítanánk. A Markowitz-féle portfólió-elméletre (Markowitz, 1952) épülő tőkepiaci eszközárzásai modell során (Capital Asset Pricing Model, CAPM) (Treynor, 1962; Sharpe, 1964; Lintner 1965a,b; Mossin, 1966) egy egyszerű lineáris regressziót alkalmazunk. Ez a megközelítés arra épít, hogy a hozam stacioner és normális eloszlású valószínűségi változó; habár tudjuk, hogy valójában ez a feltételezés a valóságban nem áll fenn (Fama és MacBeth, 1973; Brown és Warner, 1985; Affleck-Graves és McDonald, 1989; Erdős

¹Szeretnénk megköszönni a két anonim bíráló megjegyzéseit, amelyek nagyban járultak hozzá egy jobban áttekinthető és letisztultabb dolgozat elkészítéséhez. Köszönjük a European Financial Systems 2013 (Telc) és a 5th International Conference on "Economic Challenges in Enlarged Europe" (Tallinn) konferenciák résztvevőinek hozzászólását eredményeinkhez. Ormos Mihály munkáját a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatta. Beérkezett: 2015. augusztus 1. E-mail: ormos@finance.bme.hu, zibriczky@finance.bme.hu.

és Ormos, 2009). Az entrópia abból a szempontból tűnik ideális kockázati mértéknek, hogy nem kell élnünk efféle korlátozó feltételezéssel a valószínűségi változóra, azaz hozamra vonatkozóan. Dolgozatunk legfontosabb célja, hogy egyensúlyi modellünkben az entrópiát mint kockázati mértéket alkalmazva mutassuk be az egyensúlyt. A tőkepiaci eszközárzási modell szerint minden pillanatban egyensúly áll fenn a várható hozam és releváns kockázatot reprezentáló béta között. A CAPM bétája a piaci portfólió és az adott befektetési lehetőség kovarianciájának, valamint az adott befektetés varianciájának hányadosa. Amennyiben egy adott valószínűségi változó normális eloszlású, akkor ennek entrópiája a szórástól mindössze egy konstans tényezőben tér el, azaz ideális esetben nem lenne lényegi különbség a két kockázati mérték között. Eredményeink alapján azonban, tekintettel arra, hogy a hozamok nem normális eloszlásúak, a szórás, a béta és az entrópia szignifikánsan eltérő magyarázó erővel bírnak, akár egyedi értékpapírokat, akár portfóliókat vizsgálunk. Dolgozatunkban bemutatjuk, hogy az entrópia ideális alternatíva egy befektetési lehetőség kockázatának mérésére. Mindazonáltal megjegyezzük, hogy ma már a tradicionális kockázati mértékeken túl sok más, a kockázat reprezentálására született mutatót is bemutatathatnánk, mint a VaR (Value at Risk) a CVaR (Conditional Value at Risk), az Omega, a EDR (Expected Downside Risk), SVar (semivariance), vagy éppen a downside béta. Ezek a kockázati mérték nagyban hozzájárultak a tőkepiacokon tapasztalható bizonytalanság számszerűsítéséhez, azonban ezen mértékek egyensúlyi modellben történő alkalmazása nem tekint vissza túl hosszú múltra, ezért dolgozatunkban a valóban klasszikusnak tekinthető kockázati mértékekkel (szórás és CAPM béta) való összevetésére koncentrálunk. Amennyiben nagyszámú részvény és ezekből összeállított portfólió hozamát akarjuk magyarázni különböző kockázati mértékek segítségével egyszerű, a legkisebb négyzetek módszerére épülő regresszióval, az entrópia, mint kockázati mérték magasabb magyarázó erőt mutat a tradicionális kockázati mértékekhez viszonyítva akár mintán belül, akár a mintán kívül. Tanulmányunkban kitérünk arra is, hogy az entrópia, hasonlóan a varianciához, a diverzifikáció függvényében csökken; ugyanakkor annak ellenére, hogy nem szisztematikus kockázatot ragad meg, mégis erősebb magyarázó-képességgel rendelkezik, mint CAPM béta egyedi értékpapírok és nem hatékony portfóliók esetén is. Jól diverzifikált portfóliók tekintetében elmondhatjuk, hogy az entrópia magyarázó ereje 30%-kal magasabb, mint a CAPM béta paraméterének.

Ezen túlmenően megvizsgáltuk, hogy miként viselkedik az entrópia a szokásos kockázati mértékekhez képest változó piaci környezetben; a teljes mintaperiódust felosztottuk bika (emelkedő) és medve (csökkenő) periódusokra. Eredményeink szerint bika piacon az entrópia magyarázó ereje szignifikánsan magasabb, míg medve piacon ez nem tapasztalható. Eredményeink azt mutatják, hogy a különböző kockázati mértékek hasonlóan viselkednek a különböző rezsimekben, azaz pozitív kapcsolatot mutatnak a bika piacon, míg negatívát a medve piacon. Ez utóbbi eredmény megerősíti azt a hipotézist, hogy az entrópia alapú kockázatomérés, hasonlóan a tradicionális kockázatbecsléshez, ellentétes kapcsolatot mutat emelkedő és csökkenő piaci körülmények

között. Dolgozatunkban megvizsgáljuk és összevetjük az entrópia és a CAPM hozam előrejelző-képességét is az egyszerű illeszkedési jóságon túl, így képet kaphatunk arról, hogy a különböző kockázati mértékek mennyire jó előrejelző képességgel rendelkeznek. Eredményeink meglepőek abból a szempontból, hogy a CAPM béta egy szisztematikus kockázati mérték, míg az entrópia és a szórás a teljes kockázatot megragadó változó; mégis az entrópia közel 40%-kal magasabb előrejelző képességgel rendelkezik, mint a CAPM tradicionális kockázati mértéke és ingadozása átlagosan 40%-kal kisebb. Eredményeink szerint az előrejelző képesség tekintetében a szórás és az entrópia hasonlóan viselkedik. További hozzájárulása a dolgozatunknak a befektetéselmélet mélyebb megértéséhez, hogy meglehetősen egyszerű entrópiabecslési módszert mutatunk be.

Dolgozatunkban nem foglalkoztunk az entrópia Artzner és szerzőtársai (1999) által kimunkált kockázati mérték koherencia vizsgálatával. Artznerék szerint egy kockázati mérték koherensnek tekinthető, ha teljesíti az invariancia, szubadditivitás, pozitív homogenitás, monotonitás feltételeit. Intuitív módon belátható, hogy a koherencia axiómáit a javasolt kockázati mérték nagy valószínűséggel teljesíti, azonban jelenleg ezek analitikus és empirikus igazolása nem képezi vizsgálatunk tárgyát.

2 Adatok

Empirikus vizsgálatunkat a Standard & Poor's 500 index 150 véletlenszerűen választott értékpapírján végezzük, melyek forgalomban voltak az 1987-től 2011-ig vizsgált 25 éves periódusban. A piaci hozam adatokat a „Center for Research in Security Prices” (CRSP) adatbázisból vettük, amely alapján a későbbiekben RM piaci hozamot számoljuk. Ez a piaci, kapitalizációval súlyozott, osztalékkal korrigált index hozama (VWRETD), amely a New Yorki tőzsde (New York Stock Exchange: NYSE), az American Stock Exchange (AMEX) és a NASDAQ részvények hozamait összegzi. A kockázatmentes hozam, amely az egyhónapos amerikai diszkont-kincstárjegy hozama, hasonlóan a CRSP-ből származik. Az elemzéseket napi logaritmikus hozamokon végeztük, mivel számíthattunk rá, hogy a napi hozamok esetén elvethetjük a normalitás nullhipotézisét (az egyes értékpapírok leíró statisztikáit a Függelék F-1. táblázata tartalmazza). Erdős és Ormos (2009), illetve Erdős és szerzőtársai (2011) tanulmányaiban összefoglalta a nem normális napi hozameloszlásokból adódó eszközárzadási modellezés nehézségeit. Munkánk során arra teszünk kísérletet, hogy a napi hozamokon végzett kockázatbecslés alapján összevessük az egyes kockázati mértékek és a hozamok közti kapcsolatot.

3 Módszertan

Az entrópia egy matematikailag definiált mérték, melyet egy rendszerben végbemenő folyamatok kimeneteinek megjósolhatatlanságára, rendezetlenségének karakterizálására alkalmaznak. Elsőként Rudolf Clausius (1870) vezet-

te be a termodinamikában egy izolált rendszerben történő visszafordítható folyamat során bekövetkező hőenergia változás leírására. Elméletét később több más tudományterületen is alkalmazták. Az entrópia értelmezése a statisztikus mechanikában egy olyan bizonytalansági mérték, amely egy rendszer makroszkopikus tulajdonságainak (nyomás, hőmérséklet, térfogat) megfigyelése után az elemek elhelyezkedésének véletlenszerűségét jellemzi. Az entrópia ezen megközelítését Ludwig Boltzmann (1970) alkalmazta először tanulmányai során, 1872-ben. Konfigurációs entrópiának nevezte a nagyságrendjét azon variációknak, amelyben a rendszer elemei el tudnak rendeződni. Szoros összefüggést talált az entrópia függvény termodinamikai és statisztikus leírásában, mivel azok csak egy ún. Boltzmann-állandóban térnek el egymástól. Az entrópia egy másik fontos alkalmazási területe az információelmélet, amelynek megalkotója Shannon volt (1948). Egy informatikai rendszerben a hírforrás sztochasztikus kibernetikus rendszerként funkcionál, melyben egy adott üzenet fogadása valószínűségi változóként kezelhető. Az entrópia az egyedi információmennyiség várható értéke, melyet egy üzenetküldés során a rendszer küld. Minél valószínűtlenebb egy üzenet fogadása, annál több információt tartalmaz, így nagyobb az entrópiája. Mivel az entrópia az adott üzenettel érkező várható információmennyiség, egyben mértéke annak a maximális tömörítési aránynak, amellyel információvesztés nélkül lehet üzenetet küldeni.

Pénzügyi vonatkozásban Philipatos és Wilson (1972) alkalmazta először az entrópiát. Munkájuk során a Markowitz-féle hozam-variancia modell („mean-variance model”, MVM) analógiájára hozam-entrópia alapú portfóliókat konstruáltak. A szerzők szerint az entrópia általánosabb mérőszám a varianciához képest, nem fogalmaz meg semmilyen feltételt a hozamok eloszlásáról. Nawrocki és Harding (1986) a befektetések kockázatának mérésére az ún. „state-value weighted” entrópia modellt alkalmazta, ami az entrópia becslésnek egy diszkrét változata. Az értékpapírok hozamainak előrejelzésében Maasoumi és Racine (2002) rávilágított arra, hogy az entrópiának számos előnyös tulajdonsága van, továbbá képes nem-lineáris összefüggéseket modellezni az értékpapírok idősoraiában. Huang (2008) szerint az entrópia képes a portfóliók kockázatának leírására, konklúziójuk szerint minél alacsonyabb a portfólió entrópiája, annál biztonságosabb. Publikációjukban fuzzy-alapú variancia és entrópia modelleket is építettek a portfólió választási problémára. Xu és szerzőtársai (2011) egy ún. „ λ -mean” hibrid entrópia modellt hoztak létre, mellyel egy alternatív megoldást nyújtottak a hozam-kockázat alapú portfólió kiválasztási problémára.

Az entrópiát nemcsak kockázat- és várható hozambecslésre, de a portfóliók diverzifikációjának mérésére is alkalmazták. A diverzifikációs hatás hatékonyabb modellezéséről számol be Dionisio és szerzőtársai (2006), mivel az entrópia több információt képes reprezentálni a hozameloszlásról, mint a variancia, mivel az normális eloszlást feltételez a hozamokról. A szerzők szerint lineáris egyensúlyi modell esetén a kölcsönös információtartalom és a feltételes entrópia mérték pontosabb a szisztematikus és vállalatspecifikus kockázat becslésében. Bera és szerzőtársai (2008) az entrópiát mint diverzifikációs mértéket alkalmazták a portfólió optimalizálás pontosítására. Qin és szer-

zótársai (2008) a portfólió választási problémára az ún. Kapur-féle kereszt-entropia minimalizálási problémáját vezették be és mérték fuzzy-alapú simulációban. Jana és szerzőtársai (2009) az entrópiát mint további változót alkalmazták portfólió újrasúlyozási problémákhoz, mely során a tranzakciós költséget is figyelembe vették. Usta és Kantar (2011) portfólió diverzifikálási problémában alkalmazta az entrópiát a sztenderd módszerekkel együtt. Munkájukban a hozam-varianca-ferdeség modellt („mean-variance-skewness” modell) kiegészítették az entrópiával, mellyel pontosabb eredményeket mértek mintán kívül („out of sample”) az eredeti modellhez képest. Kirchner és Zunckel (2011) véleménye alapján az entropia hatékonyabban képes kimutatni a diverzifikáció kockázatsökkentő hatását a varianciával szemben, bár tanulmányukban normális eloszlást feltételeztek az összes értékpapír napi hozamáról. Az entropia pénzügyi területen való alkalmazhatóságáról Zhou és szerzőtársai (2013) összefoglaló cikket publikáltak, melyben kitérnek a portfólió választási, illetve eszközárzási elméletekre, konkrét eredményeket azonban nem említnek.

A fent citált közlemények eredményei alapján az entropia egy használható kockázati mérték lehet, bár valódi alkalmazhatóságát eddig kevésbé részletezték, jóval inkább elméleti oldalról vizsgálták. Dolgozatunk elsődleges célja, hogy kimutassuk és empirikusan is igazoljuk, hogy az entropia alapú kockázati mérték egyrészt pontosabb, másrészt nem bonyolultabb, mint a béta vagy variancia alapú egyensúlyi modellek. Ezen túlmenően arra is kíváncsiak vagyunk, hogy az entropia hozam-előrejelző képessége meghaladja-e a klasszikus CAPM modell és variancia ez irányú teljesítményét.

3.1 Diszkrét entropia függvény

Legyen X^* egy diszkrét valószínűségi változó, mely k különböző értéket vehet fel. Jelöljük X^* lehetséges értékkészletét (o_1, o_2, \dots, o_k) -val és a hozzá tartozó valószínűségeket $p_i = \Pr(X^* = o_i)$ -vel, ahol $p_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. X^* valószínűségi változóra értelmezett általánosított diszkrét entropia függvény (Rényi, 1961) a következő formában írható fel:

$$H_\alpha(X^*) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^k p_i^\alpha \right), \quad (1)$$

ahol α az entropia rendje, melyre $\alpha \geq 0$, továbbá a logaritmusfüggvény alapja 2. Az entropia függvény rendje kifejezi az egyenletes eloszlástól vett eltérés entrópiában megjelenő érzékenységét. A leggyakrabban használt rendek $\alpha = 1$ és $\alpha = 2$.

Az $\alpha = 1$ egy speciális esete az általános entropia függvénynek. Bár az (1) egyenletbe való $\alpha = 1$ helyettesítéssel 0 nevezőt kapnánk, a l'Hospital-szabály segítségével levezethető, hogy $\alpha \rightarrow 1$ esetén H_α a Shannon-féle entrópiához tart, jelölésben

$$H_1(X^*) = - \sum_{i=1}^k p_i \log(p_i). \quad (2)$$

Az $\alpha = 2$ esetet Rényi (vagy „Collision”) entrópiának nevezzük, melyet a következő formulával jelölünk:

$$H_2(X^*) = -\log\left(\sum_{i=1}^k p_i^2\right). \quad (3)$$

$H_\alpha(X)$ α rend függvényében nem növekvő, illetve véges kimeneti halmaz esetén mindkét speciális entrópiafüggvény nagyobb, mint nulla. Jensen-egyenlőséggel belátható a következő reláció

$$0 < H_2(X^*) \leq H_1(X^*), \quad (4)$$

mely szerint bármely diszkrét változó esetén a Rényi entrópia értéke pozitív, és nem nagyobb, mint a Shannon-féle entrópia.

A valószínűségi változók kiszámíthatatlanságának karakterizálására Rényi- és Shannon-entrópián kívül további függvényeket vezettek be a szakirodalomban. Gyakrabban alkalmazott megoldások a Havrda-Charvát entrópia (Havrda, 1967), Tsallis entrópia (Tsallis, 1988), a speciálisan pénzügyi problémákra bevezetett inkrementális entrópia (Ou, 2005), illetve fuzzy alapú entrópia (Li, 2008). Ezen függvények alkalmazását jelen dolgozatunk nem vizsgálja részletesebben. A diszkrét függvények bemutatása az entrópia világosabb megértését szolgálja. A későbbiekben az empirikus vizsgálataink során a folytonos alakra koncentrálnak majd, melyet differenciális entrópia függvénynek neveznek a szakirodalomban.

3.2 Differenciális entrópia függvény

Legyen X egy folytonos valószínűségi változó, mely értékeit a valós számok halmazáról (\mathbb{R}) veszi $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Analóg módon az (1) egyenlethez, a differenciális (folytonos) entrópia függvény a következő formulával definiálható:

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int f(x)^\alpha dx. \quad (5)$$

Összehasonlítva (1) és (5) képleteket, a folytonosságon kívül ezek csak a logaritmus alapjaiban különböznek. Bár az entrópia értéke függ a logaritmus alapjától, megmutatható, hogy két különböző alapú logaritmus függvény értéke csak konstans tényezőben tér el. Ezen tulajdonság miatt az entrópia alapú kockázati mérték magyarázó erő vizsgálata során irreleváns, hogy melyik alapot használjuk, így természetes alapú logaritmust választunk a differenciális entrópia függvényhez. Folytonos esetben a speciális esetek ($\alpha = 1$ és $\alpha = 2$) képlete a következő:

$$H_1(X) = - \int f(x) \ln f(x) dx, \quad (6)$$

$$H_2(X) = - \ln \int f^2(x) dx. \quad (7)$$

Fontos különbség a diszkrét és differenciális entrópia függvény között, hogy míg diszkrét esetben az entrópia nem-negatív értéket vehet fel, addig a differenciális esetben negatív értéket is kaphat, jelölésben

$$H_\alpha(X) \in \mathbb{R} . \tag{8}$$

Benavides (2011) szerint Dirac-delta függvény esetén a differenciális entrópia $-\infty$ -hez tart, illetve teljesen a valós x tengelyre simuló egyenletes eloszlás esetén ∞ -hez.

A gyakorlatban a sztenderd kockázati mértékeket, mint a szórást és a CAPM bétát napi vagy havi folytonos, azaz logaritmikus hozam adatok alapján becslik meg. Az entrópia alapú kockázatbecslő módszer tervezése során mi is ezt az elvet követjük, így a módszerek magyarázó ereje összevethető lesz. Mivel az értékpapírok napi vagy havi hozama a valós számok halmazáról veheti fel az értékét, munkánk elsősorban a differenciális entrópia alkalmazhatóságára összpontosít. Bár a kockázatbecslési probléma a hozam adatok csoportosításával visszavezethető diszkrét esetre is, e megközelítést a jelen dolgozatunk nem tárgyalja.

3.3 Entrópia becslése hisztogram-alapú módszerrel

Legyen (x_1, x_2, \dots, x_n) X folytonos valószínűségi változó egy megfigyelésének sorozata. Becsüljük meg $f(x)$ sűrűségfüggvényt ezen a mintán, jelöljük ezt $f_n(x)$ -szel. $H_\alpha(X)$ entrópia „plug-in” integrálbecslése ez alapján a következő:

$$H_{\alpha,n}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int_{A_n} f_n(x)^\alpha dx \tag{9}$$

ahol A_n az integrálás tartománya, mely kiszűri $f_n(x)$ farokrészeit, ahol a becslés értéke nagyon alacsony. Javasoljuk a tartomány becslését $A_n = (\min(x), \max(x))$ formában. A „plug-in” típusú módszer azon megközelítésen alapszik, hogy először a sűrűségfüggvényt becsüljük meg, majd ezt alkalmazzuk az entrópia kiszámítására.

A sűrűségfüggvény egyik legegyszerűbb becslési módszere a hisztogram-alapú sűrűségfüggvény becslés. Legyen $b_n = \max(x) - \min(x)$ a tartomány mérete, amit osszunk fel g darab egyenlő szélességű osztályra („bin”-re). Jelöljük a felosztási pontokat t_j -vel, ahol két egymást követő vágási pont közé eső osztály szélessége konstans: $h = b_n/g = t_{j+1} - t_j$. A sűrűségfüggvény hisztogram-alapú becslése ezek alapján a következő:

$$f_n(x) = \frac{\nu_j}{nh} , \tag{10}$$

ha $x \in (t_j, t_{j+1})$, ahol ν_j azon pontok száma, melyek a j -edik osztályba esnek. A módszer paramétere az osztályok száma (g), melynek meghatározására több módszer is létezik, például négyzetgyök szabály, Scott-szabály (Scott, 1979), Feedman-Diaconis szabály (Freedman, 1981). A becslési módszerek hatékonyságát jelen dolgozatban nem vizsgáljuk.

Az entrópia becslése „plug-in” módszerrel nehezen implementálható, mivel integrálási műveletet tartalmaz. A hisztogram tulajdonságai, illetve (6), (7), (9) és (10) egyenletek alapján levezethető a Shannon- és Rényi entrópia egyszerűbben kezelhető, „built-in” becslése a

$$H_{1,n}(X) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^g \nu_j \ln\left(\frac{\nu_j}{nh}\right) \quad (11)$$

és

$$H_{2,n}(X) = -\ln \sum_{j=1}^g h\left(\frac{\nu_j}{nh}\right) \quad (12)$$

formulákban. A „built-in” módszer megközelítése az, hogy a sűrűségfüggvény becslése és az entrópia kiszámítása egy képletben valósul meg. A levezetés segítségével az integrálást összeadássá alakítottuk, mely egyszerűbben implementálható.

Munkánk során két további sűrűségfüggvény becslési módszert is megvizsgáltunk, nevezetesen a magfüggvény-alapú és „sample spacing” alapú módszereket. Eredményeink alapján a hisztogram-alapú becslés bizonyult a legpontosabbnak, így az egyéb sűrűségfüggvény becslési módszerek tárgyalása nem képezi szerves részét a közlemény mondanivalójának. A sűrűségfüggvény becslési módszerek összehasonlítását az F2 Függelékben részletezzük.

3.4 Kockázatbecslési metódus

Legyen adott D adatsor:

$$D : \{ S, R, R_M, R_F \}, \quad (13)$$

ahol az adatsor összetevői (1) az értékpapírok halmaza $S : \{S_1, \dots, S_l\}$, (2) az ezekhez tartozó empirikus megfigyelések $R : \{R_1, \dots, R_l\}$, ahol $R_i = (r_{i1}, \dots, r_{in})$, (3) a piaci hozamra vonatkozó empirikus hozam adatok $R_M = (r_{M1}, \dots, r_{Mn})$, (4) a kockázatmentes hozam adatok $R_F = (r_{F1}, \dots, r_{Fn})$, ahol l az értékpapírok száma, n a megfigyelések száma (minta mérete).

Dolgozatunk célja az entrópia, mint kockázati mérték alkalmazása. Jelen vizsgálatban a kockázati mértékeket mint magyarázó változót fogjuk alkalmazni a kockázati prémium előrejelzésére. Ahhoz, hogy bármely (jelen esetben egyváltozós) kockázati mérték előrejelző képességét megmutassuk, egy általános keretet definiálunk. Jelöljük κ_* -gal egy kockázatbecslési függvényt, amely egy adott eszközhöz egy olyan értéket rendel, ami a megfigyelt eszköz kockázatát karakterizálja. κ_* egy absztrakt jelölés, mely nem követeli meg annak implementációját, csak arra utal, hogy egy olyan függvényt alkalmazunk, mely a pénzügyi kockázat karakterizálását hivatott szolgálni. κ_* definiálása a mérési módszer következő lépése, mely során megadjuk, milyen kockázatbecslési módszereket szeretnénk tesztelni. A módszert jelezzük κ_* indexében, jelöljük például az entrópia alapú kockázati mértéket κ_H -val. Legyen az i -edik értékpapírt leíró egyváltozós kockázati mérték $\kappa_*(S_i)$. Jelöljük a kockázat megfigyelés alapján történő becslését $\hat{\kappa}_*(S_i)$ -vel.

Megközelítésünk szerint az értékpapír hozamadatainak bizonytalansága, így annak entrópiája interpretálható kockázatként. Minél egyenletesebb a hozamok eloszlásfüggvénye (vagy más megközelítésben minél nagyobb azok szóródása), annál magasabb az entrópia értéke. Másik oldalról pedig minél valószínűbb egy hozam (vagy ahhoz közeli érték) bekövetkezése, annál kisebb az entrópia, így a kockázat is. Mivel a hozam adatok valós halmazból vehetik fel értékeiket, differenciális entrópiával modellezzük a kockázatot. A differenciális entrópia tulajdonságaiból belátható, hogy negatív értéket is felvehet (8). A jobb értelmezhetőség érdekében a megbecsült differenciális entrópiát az exponenciális függvény kitevőjeként alkalmazzuk, ezzel definiálva saját entrópia alapú kockázati mértékünket a következő formulában:

$$\hat{\kappa}_H(S_i) = e^{H_n(R_i - R_F)} . \tag{14}$$

Mivel a kockázatot magát csak becsülni tudjuk, ezért κ jelölés helyett $\hat{\kappa}$ -t alkalmazunk. Az exponenciális transzformálás eredményeképpen $\hat{\kappa}_H$ csak nem-negatív értékeket vehet fel $\hat{\kappa}_H \in [0, +\infty)$. Könnyen beláthatjuk, hogy amennyiben a hozamok eloszlása normális, a Shannon-féle kockázati mértékünk mindössze egy konstansban tér el a szórástól. Ennek levezetését az F3 Függelékben részletezzük. A $\hat{\kappa}_H$ függvény egyéb tulajdonságainak elemzésétől e dolgozatban eltekintünk.

Az általunk definiált entrópia-alapú kockázati mérték pontosságát referencia (ún. „baseline”) mértékekkel szeretnénk összevetni. A közgazdasági szakirodalomban legszélesebben alkalmazott kockázati mérték a szórás vagy a variancia (Markowitz, 1952), illetve a tőkepiaci eszközárzadási modell (CAPM) (Treyner, 1962; Sharpe, 1964; Lintner 1965a,b; Mossin, 1966) bétája. Jelöljük ezeket κ_σ -val, illetve κ_β -val. Ezen kockázati mértékekre vonatkozó becslés (13) jelöléseit alkalmazva a következő:

$$\hat{\kappa}_\sigma(S_i) = \sigma(R_i - R_F) \tag{15}$$

és

$$\hat{\kappa}_\beta(S_i) = \beta_i = \frac{\text{cov}(R_i - R_F, R_M - R_F)}{\sigma^2(R_M - R_F)} , \tag{16}$$

ahol β a CAPM béta, $\sigma(\cdot)$ és $\text{cov}(\cdot)$ az argumentumban lévő változók szórása, valamint kovarianciája. Az empirikus vizsgálatok során ezen két kockázat-becslési módszert fogjuk az entrópia függvényekkel összevetni.

3.5 Magyarázó- és előrejelző képesség

A kockázati mértékek magyarázó erejének vizsgálatára két alapvető megközelítést alkalmazunk: a kockázati mértékek tanító mintán belüli („in-sample”) magyarázó képességét a kockázati prémiumra vonatkozóan, illetve a tanító mintán kívüli („out-of-sample”) jövőbeli kockázati prémium előrejelző képességét.

3.5.1 Mintán belüli magyarázóképeség

Legyen V egy célváltozó $v = (v_1, \dots, v_l)$ megfigyelési vektorral, illetve U egy magyarázó változó $u = (u_1, \dots, u_l)$ vektorral. Ahhoz, hogy meghatározzuk U lineáris magyarázóképeségét V -re vonatkozóan, lineáris regressziós becslést alkalmazunk a megfigyelési vektorokra: $V = a_0 + a_1 U + \varepsilon$. A modell paramétereit (a_0 és a_1) a legkisebb négyzetek módszerével („ordinary least squares”, OLS) határozhatók meg². Ezek alapján a célváltozó becslése a megfigyelési pontokban $\hat{v}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_i$, ahol \hat{a}_0 és \hat{a}_1 együtthatók a_0 és a_1 empirikus becslései. A regressziós becslés pontosságára (más szóval a lineáris magyarázó képességére) vonatkozó leggyakrabban alkalmazott mérték az illeszkedés jó-sága, vagy más néven determinációs együttható, jelölésben R^2 .

Arra vagyunk kíváncsiak, milyen pontosan képesek a fent tárgyalt kockázati mértékek megmagyarázni a kockázati prémiumot az alkalmazott adatsoron. Jelöljük az adott kockázati mérték magyarázó erejét $\eta(\kappa)$ -val. A célunk ezen értékek becslése és az eredmények összevetése. Legyen U magyarázó változó az értékpapírok kockázati mértéke, az l hosszú megfigyelési mintával:

$$u_\kappa = (\hat{\kappa}_*(S_1), \dots, \hat{\kappa}_*(S_l)), \quad (17)$$

ahol κ index a kockázati mérték szerinti magyarázó változó definíciót hangsúlyozza, és V célváltozó az elvárt kockázati prémium, szintén l hosszúságú megfigyelési mintával:

$$v_\mu = (E[R_1 - R_F], \dots, E[R_l - R_F]), \quad (18)$$

ahol μ index a várható érték szerinti célváltozó definíciót hangsúlyozza, $E[\cdot]$ az argumentum várható értéke. (17) és (18) változó definiálással κ kockázati mérték mintán belüli magyarázó képességének empirikus becslése a következő:

$$\hat{\eta}(\kappa) = R^2(v_\mu, u_\kappa). \quad (19)$$

3.5.2 Mintán kívüli előrejelző képeség

Osszuk fel két diszjunkt megfigyelési halmazra (I és O) a (13)-ban definiált $D : \{S, R, R_M, R_F\}$ adatsorunkat:

$$D^I : \{S, R^I, R_M^I, R_F^I\}, \quad D^O : \{S, R^O, R_M^O, R_F^O\}, \quad (20)$$

ahol az értékpapírok hozama $R^I : \{R_1^I, \dots, R_l^I\}$, $R_i^I = (r_{i1}, \dots, r_{im})$ és $R^O : \{R_1^O, \dots, R_l^O\}$, $R_i^O = (r_{i,m+1}, \dots, r_{i,m+p})$; a felosztás a piaci hozamokra vonatkozóan $R_M^I = (r_{M1}, \dots, r_{Mm})$ és $R_M^O = (r_{M,m+1}, \dots, r_{M,m+p})$, a kockázatmentes hozamra $R_F^I = (r_{F1}, \dots, r_{Fm})$ és $R_F^O = (r_{F,m+1}, \dots, r_{F,m+p})$, ahol $|R_i^I| = m$, $|R_i^O| = p$, $1 \leq i \leq l$ és $m + p = n$.

²A későbbi tesztek során látszik majd, hogy az adatok nem homoszkedasztikusak. Azaz vagy Newey és West (1987)-féle korrekciót, vagy kvantilis regressziót kellene futtatnunk, azonban a sztenderd egyensúlyi árazási modellekben rendre OLS regresszióval találkozunk, ezért mi is ezt a módszertant követtük.

Az U magyarázó változó értékei az értékpapírok D^I halmazon becült kockázati mértékei

$$u_{\kappa}^I = (\hat{\kappa}_*(S_1), \dots, \hat{\kappa}_*(S_l)), \quad (21)$$

V célváltozó az értékpapírok elvárt kockázati prémiuma D^O adatsoron mért megfigyelési mintával

$$v_{\mu}^O = (E[R_1^O - R_F^O], \dots, E[R_l^O - R_F^O]). \quad (22)$$

(19), (21) és (22) egyenletek alapján κ kockázati mérték előrejelző képességének becslése

$$\hat{\eta}_O(\kappa) = R^2(v_{\mu}^O, u_{\kappa}^I). \quad (23)$$

3.5.3 Szignifikancia vizsgálat

„Bootstrapping” mintagenerálási módszerrel megvizsgáltuk, hogy az egyes kockázati mértékek (szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia) mintán belüli magyarázó, és mintán kívüli előrejelző képessége között szignifikáns eltérés mutatkozik-e. A módszer során 1000 iterációt hajtottunk végre minden kockázati mérték párosításra. Egy iteráció során a 150 vizsgált értékpapírból 25-öt véletlenszerűen kivettünk és a maradék 125-re alkalmaztuk a kockázatbecslést és R^2 mérést. Az iterációk végeredményeképpen 1000 darab R^2 értéket kaptunk minden kockázati mértékre. Két kockázati mérték pontossága között szignifikáns eltérés mérhető, ha a t -teszt alapján az R^2 -ek átlaga szignifikánsan eltér.

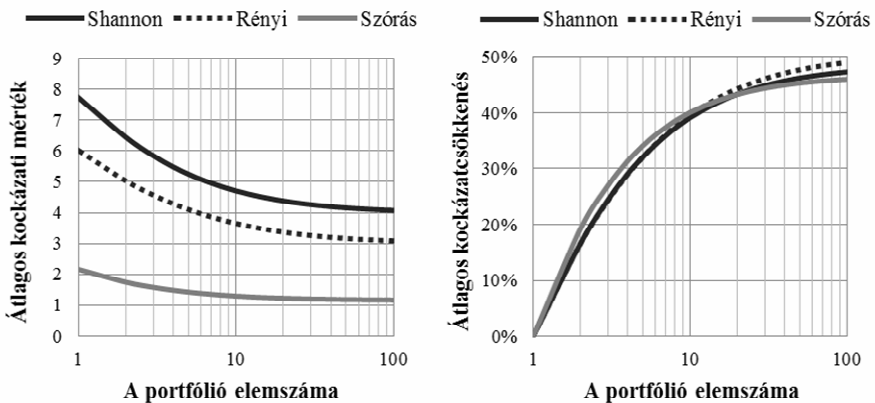
4 Eredmények

Empirikus eredményeinket négy részben mutatjuk be. Először megvizsgáljuk, hogyan viselkednek az egyes kockázati mértékek a portfólió elemszámának növelésével véletlenszerűen összeállított portfóliók esetén, illetve ez mennyiben egyeztethető össze a klasszikus portfólió-elméletben leírtakkal. Ezután összehasonlítjuk a szórás, a CAPM béta, a Shannon- és Rényi entrópia mintán belüli magyarázó képességét a teljes adatsoron (hosszú távon). A harmadik alfejezetben megvizsgáljuk, hogyan teljesítenek a kockázati mértékek abban az esetben, ha emelkedő vagy eső trendet azonosítunk. Végül összehasonlítjuk a mértékek magyarázó és előrejelző képességét rövid távon, illetve megvizsgáljuk azok időbeli stabilitását. A mérésekhez kifejezetten erre a célra, Java programozási nyelven fejlesztett, saját szoftvert használunk.

4.1 Diverzifikáció hatása az entrópiára

Az entrópia, mint kockázati mérték vizsgálata során kíváncsiak vagyunk arra, hogy képes-e a diverzifikációs hatás kimutatására. Ehhez nagyságrendileg 10 millió egyenlően súlyozott, különböző elemszámú portfóliót generáltunk véletlenszerűen választva a 150 darab vizsgált értékpapírból. Az elemszám alatt jelen esetben a portfólióba helyezett értékpapírok számát értjük. Egy-

és kételemű portfólió esetén minden kombinációt (azaz 150, illetve 22350 darabot), egyébként kettőnél magasabb elemszám esetén legfeljebb 100 ezer véletlenszerű portfóliót generáltunk egészen 100 elemszámig (így végül nagyjából 10 millió különböző, de minden esetben egyenlően súlyozott portfólió vizsgálatát tette lehetővé). Minden egyes portfólióra a napi kockázati prémiumok alapján megbecsültük a kockázati mértékeket (nevezetesen a szórást, Shannon- és Rényi entrópiát), majd minden egyes elemszám esetén ezeket átlagoltuk. Mindkét entrópia függvény esetén hisztogram-alapú becslési módszert alkalmaztunk, 175 darab osztályt a Shannon- és 50 darab osztályt a Rényi entrópia esetén³. Mivel a CAPM béta a szisztematikus, a piaci portfólióban történő diverzifikáció után fennmaradó kockázat modellezésére képes, ezért a béta kockázati mértéket kihagytuk az elemzés ezen részéből.



1. ábra. Átlagos kockázat illetve kockázatsökkenés a portfólió elemszámának függvényében

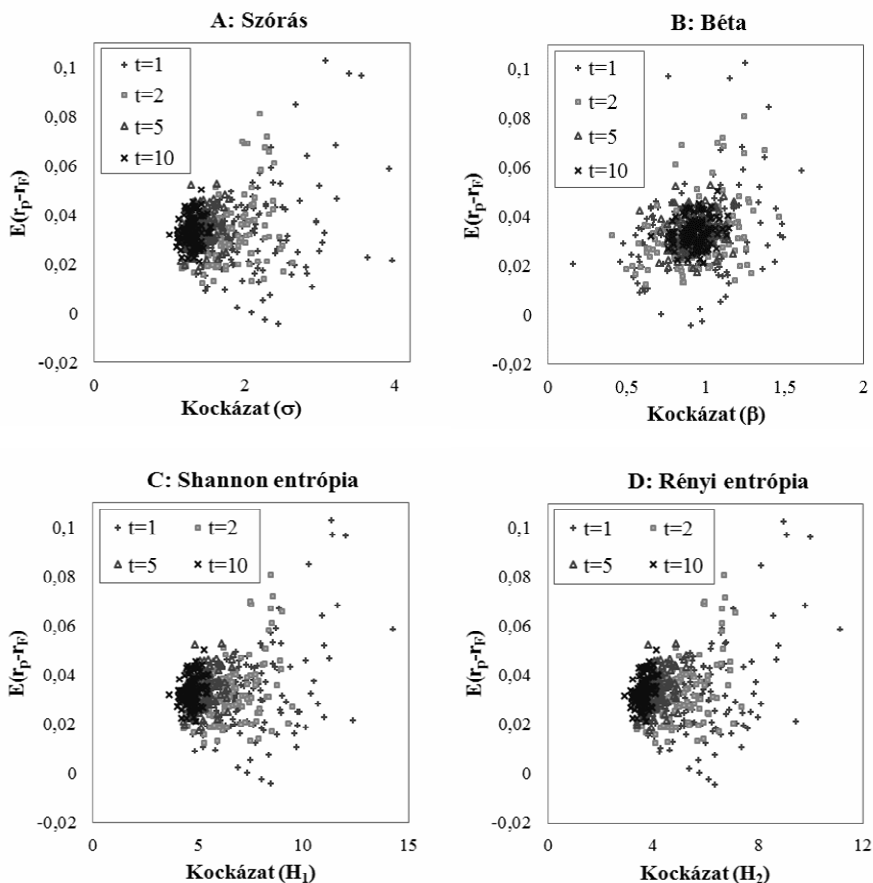
Megjegyzés. A Standard & Poor's 500 részvényindex 150 véletlenszerűen választott értékpapírjaiból 10 millió, különböző elemszámú, egyenlően súlyozott portfóliót generáltunk (elemszámonként legfeljebb 100 ezret, vagy az összes permutációnak megfelelő egy- és kételemű portfóliók esetén). A portfóliók kockázatát szórással (szürke folytonos görbe), Shannon-féle entrópiával (fekete folytonos vonal), illetve Rényi entrópiával (fekete szaggatott görbe) becsültük meg a teljes periódus alapján. Mindkét entrópia alapú kockázati mértéket hisztogram-alapú sűrűségfüggvénnyel becsültünk, Shannon-féle entrópia esetén 175 darab osztállyal, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal. A bal oldali ábra a portfóliók átlagos kockázatát mutatja az elemszám függvényében, a jobb oldali ábra pedig a diverzifikálás hatására történő átlagos kockázatsökkenés mértékét az egyelemű portfólió átlagos kockázatához képest.

Az 1. ábra alapján a diverzifikációs hatás mind a szórás, mind az entrópia alapú kockázati mérték alapján kimutatható. 10 véletlenszerű elemből össze-

³Összehasonlítottuk a hisztogram-, "sample spacing"- és magfüggvény-alapú becslési módszerek pontosságát, eredményeik szerint a hisztogram-alapú becslés bizonyult a legjobbnak a magyarázó- és előrejelző képesség tekintetében. Eredményeinket a Függelék F-3. táblázatában részletezzük.

állított portfólió kockázata átlagosan nagyjából 40%-kal alacsonyabb egy egyelemes portfólióhoz képest mindhárom mérték esetén. Összességében a diverzifikációs hatás karakterizálásában az entrópia hasonlóan viselkedik, mint a szórás.

Ugyancsak megvizsgáltuk, hogyan rendeződnek a különböző portfóliók a várható hozam – kockázat koordináta-rendszerben a diverzifikálás hatására. 150 darab egyelemű, illetve 200-200 darab egyenlően súlyozott 2, 5 és 10 elemű portfóliót generáltunk véletlenszerűen, majd megbecsültük ezek kockázatát szórással, bétával, Shannon- és Rényi entrópiával.



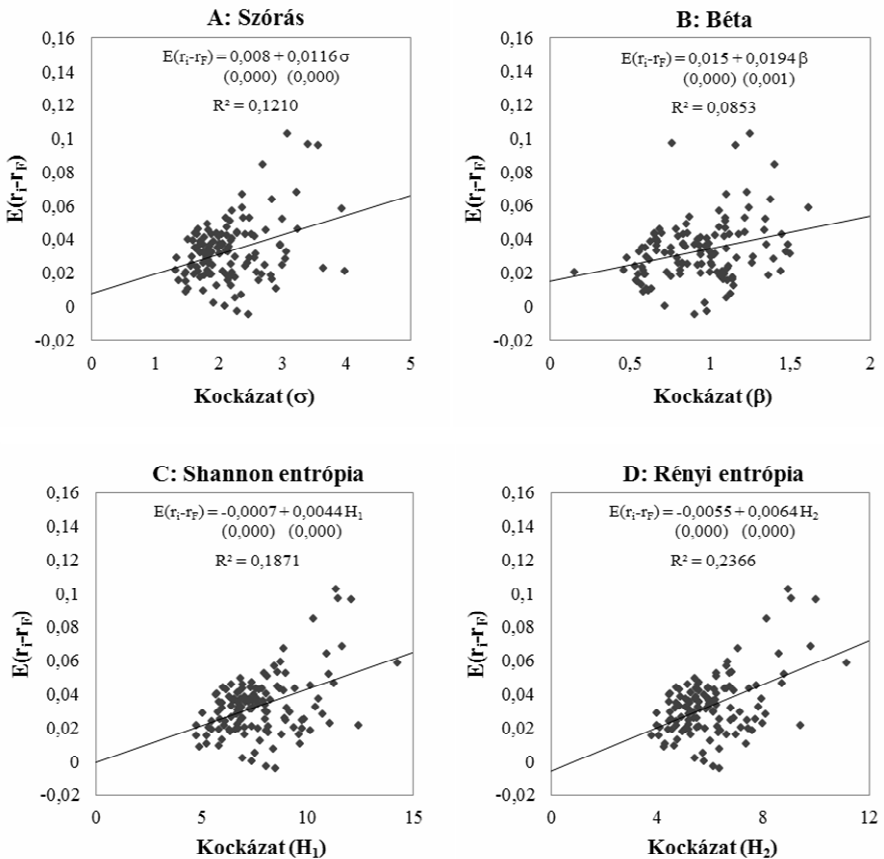
2. ábra. Különböző elemszámú portfóliók elhelyezkedése a várható kockázati prémium – kockázat koordináta-rendszerben

Megjegyzés. Az egyes panelek a portfóliók várható kockázati prémiumát mutatják a különböző kockázati mértékekkel számítva; a portfóliók elemszáma (mérete) – melyet t -vel jelölünk – az ábrákon látható. Az elemzésünkhöz használt 150 részvény felhasználásával 150 darab egyelemű portfóliót készítettünk, illetve 200-200 egyenlően súlyozott portfóliót generáltunk 2, 5, és 10 véletlenszerűen választott részvény segítségével. A portfóliók kockázatát

szórással, CAPM bétával, Shannon-féle entrópiával, illetve Rényi entrópiával becsültük meg napi logaritmikus hozamokat felhasználva az 1987 és 2011 periódusra vonatkozóan. Mindkét entrópia alapú kockázati mérték esetén hisztogram-alapú sűrűségfüggvény becslést alkalmaztunk, Shannon-féle entrópia esetén 175 darab osztállyal, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal.

A 2. ábra a várható kockázati prémium és a kockázat viszonyát mutatja véletlenszerűen generált portfóliók esetén különböző kockázati mértékek szerint. Megfigyelhető, hogy a szórás és az entrópia alapú kockázati mértékek karakterisztikája hasonló: a portfóliók elemszámának növelésével hiperbola alakzatban sűrűsödnek, a Markowitz-féle portfólió-elmélettel egybevágóan (Markowitz, 1952). A béta esetén viszont más jellegű elhelyezkedés körvonalazódik, a portfólió elemszámának növelésével egy középpont körül sűrűsödnek a portfóliókat reprezentáló pontok.

4.2 Hosszú távú magyarázó képesség



3. ábra. A kockázati mértékek hosszú távú magyarázó képessége

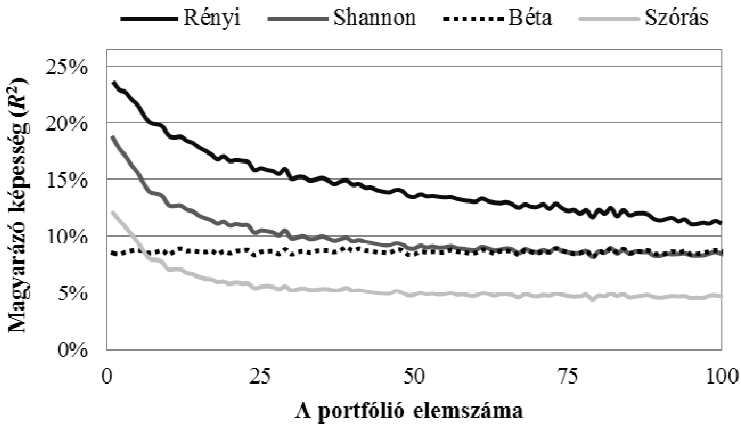
Megjegyzés: A négy panel az egyes kockázati mértékek és a várható kockázati prémium közötti összefüggést ábrázolja a vizsgált teljes periódusra. A Standard & Poor's 500 részvényindexből 150 darab értékpapírt választottunk véletlenszerűen, melyek forgalomban voltak 1987-től kezdve 2011 végéig. A teljes perióduson megfigyelt napi logaritmikus hozamok alapján megbecsültük az egyes értékpapírok kockázatát szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia alapú kockázatbecslő módszerekkel. Mindkét entrópia alapú kockázati mérték esetén hisztogram-alapú sűrűségfüggvény becslést alkalmaztunk, Shannon-féle entrópia esetén 175 darab osztállyal, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal. Egy pont egy értékpapír reprezentációja, a pontokra lineáris regressziós egyenest illesztettünk, majd lemértük az illeszkedésének jóságát (R^2). A paneleken feltüntettük a regressziós egyenes képletét, a determinációs együtthatót, illetve zárójelben az egyes paraméterekhez tartozó p -értéket.

Ahhoz, hogy lemérjük az egyes kockázati mértékek (szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia) várható kockázati prémiumra vonatkozó magyarázó képességét, a teljes perióduson (jelölésben $p1$) vett napi logaritmikus hozamokon megbecsültük azok nagyságát. A módszertanban bemutatott regressziós egyenes illeszkedésének jóságával (R^2) közelítettük a kockázati mértékek $\eta(\kappa)$ magyarázó erejét, ahol U magyarázó változónak az értékpapírok kockázati mértékét, V célváltozónak a várható kockázati prémiumot választottuk.

A 3. ábra összefoglalja a vizsgált kockázati mértékek magyarázó képességét, várható napi kockázati prémium – kockázat koordináta-rendszerben. Az illeszkedés jósága alapján a béta teljesít a leggyengébben, 8,53%-os R^2 -tel. Bár a szórás magyarázó ereje (12,10%) magasabb, mint a bétáé, mindkét entrópia alapú kockázati mérték szignifikánsan⁴ jobban teljesít, Shannon entrópia esetén 18,71%-kal, Rényi entrópia esetén pedig 23,66%-kal. A lineáris regressziós egyenes egyenlete szerint az átlagos, nem megmagyarázott kockázati prémium (Y tengelymetszet, vagy Jensen alfa (Jensen, 1968)) abszolút értéke az entrópia alapú kockázati mértékek esetén alacsonyabb (0,0007 és 0,0055), mint a hagyományos kockázati mértékek esetén (a szórás esetén 0,0080, a béta esetén 0,0150). Megfigyelhető, hogy az illeszkedés jósága, illetve a Jensen alfa abszolút értéke fordítottan arányosan mozog jelen esetben.

Megmértük a magyarázó képességet különböző elemszámú portfólió esetén is. Elemszámunként legfeljebb 100-100 ezer, vagy a maximális permutációnak megfelelő számú véletlenszerű portfóliót generáltunk, illetve lemértük esetenként a legfeljebb 100 ezer pontra illesztett regressziós egyenes illeszkedésének jóságát. Az eredményeinket a 4. ábrán foglaljuk össze.

⁴A „bootstrapping” módszer alapján az entrópia-alapú kockázati mértékek szignifikánsan különböznek a szórástól és a CAPM bétától 1%-os szignifikancia szinten.



4. ábra. A kockázati mértékek hosszú távú magyarázó erejének változása az elemszámok függvényében

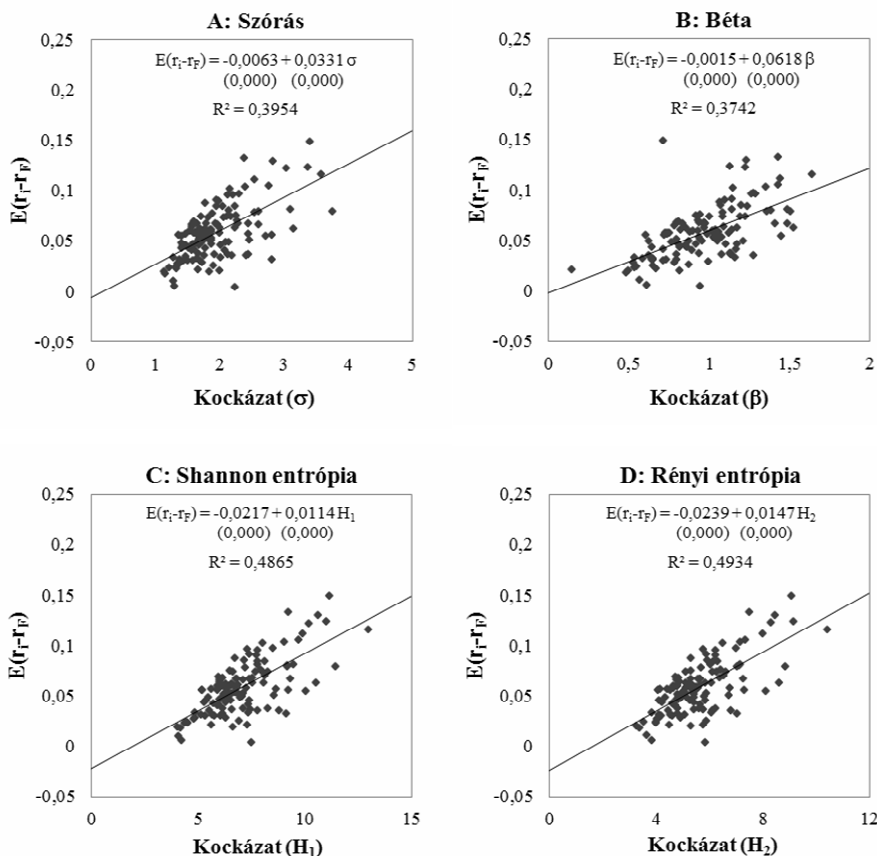
Megjegyzés: Az ábra összehasonlítja a szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia magyarázó képességét (R^2) a portfólió elemszámának függvényében. A Standard & Poor's 500 részvényindex 150 véletlenszerűen választott értékpapírjaiból 10 millió, különböző elemszámú, egyenlően súlyozott portfóliót generáltunk (elemszámonként legfeljebb 100 ezret). A generált portfóliók teljes perióduson vett napi logaritmikus hozama alapján megbecsültük a kockázati mértékeket, majd az egyes elemszámokra lineáris regressziós egyenest illesztettük és lemértük az illeszkedésének jóságát. Az ábrán világosszürke görbe jelzi a szórást, fekete szaggatott görbe a CAPM bétát, szürke folytonos görbe a Shannon-féle entrópiát, illetve fekete görbe a Rényi entrópiát.

A 4. ábra illusztrálja, hogyan változik a magyarázó képesség a diverzifikálás hatására. Megfigyelhető, hogy míg a szórás és entrópia alapú kockázati mértékek esetén ez a portfólió elemszámának növelésével csökken, a béta esetén konstans érték körül mozog. A karakterisztika magyarázata a következő. Egyrészt a béta csak a szisztematikus (nem diverzifikálható) kockázatot modellezi, így a konstans érték indokolt, másrészt a szórás és entrópia alapú kockázati mértékek a vállalat specifikus kockázatot is képesek mérni, így kevésbé jól diverzifikáltak (magasabb egyedi kockázatú) portfóliók esetén ezek további magyarázó erővel bírnak. A magyarázó képesség csökkenése ellenére mindkét entrópia alapú kockázati mérték legalább olyan jó teljesít, mint a béta. Jól diverzifikáltak (100 elemű) portfóliók esetén a Rényi entrópia magyarázó képessége nagyságrendileg 30%-kal magasabb, mint a CAPM bétáé, a Shannon entrópia esetén közel azonosak a teljesítmények.

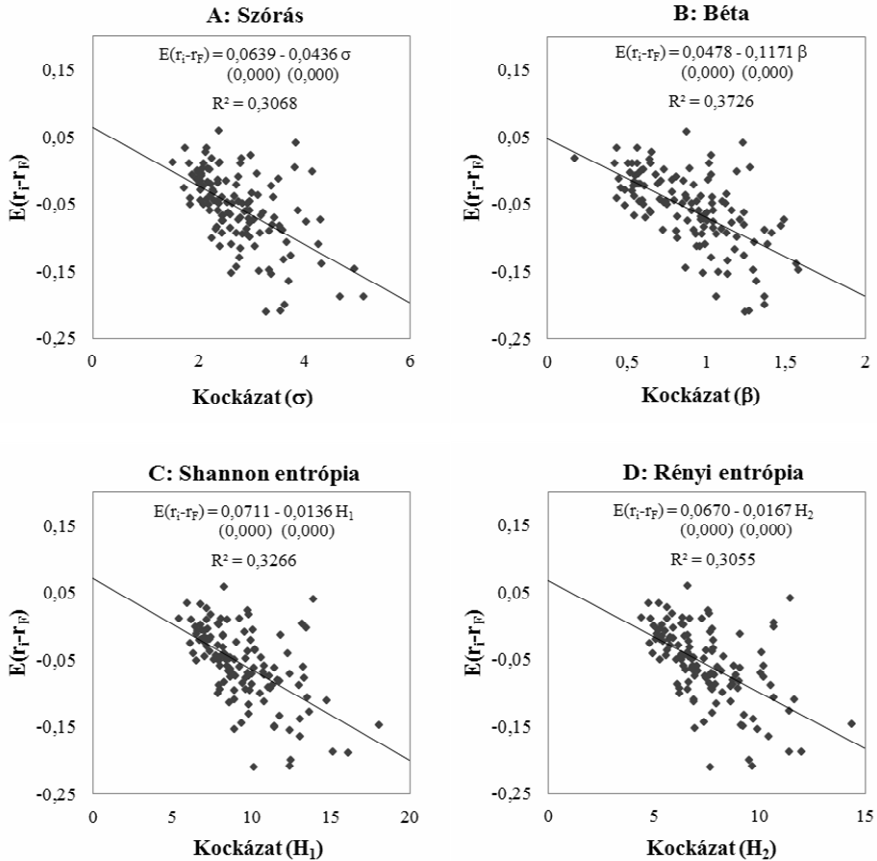
4.3 Magyarázó képesség a piaci trend ismeretében

Az eredeti, 25 éves periódusú, napi logaritmikus hozam adatokat két mintára osztottuk fel attól függően, hogy emelkedő („bika piac”) vagy csökkenő („medve piac”) trendű periódusban történtek a megfigyelések.

Ezzel két olyan megfigyelési halmazt kaptunk, amelynek pontjai vagy emelkedő, vagy csökkenő periódusban történtek. Az emelkedő trendű mintát „p1+”-val, a csökkenőt „p1-”-val jelöljük. A 25 éves periódus felosztását az F4 Függelékben foglaltuk össze. Ezen két diszjunkt mintán külön-külön lefutattuk a 4.2 fejezetben részletezett hosszú távú magyarázó képesség mérésére bemutatott módszert, ugyanazon paraméterekkel. Az elemzéssel kapott eredményeinket az 5. és 6. ábra foglalja össze.



5. ábra. A kockázati mértékek magyarázó képessége emelkedő trendű mintában



6. ábra. A kockázati mértékek magyarázó képessége csökkenő trendű mintában

Megjegyzés: Az 5-6. ábrákon a négy panel az egyes kockázati mértékek és a várható kockázati prémium közötti összefüggést ábrázolja emelkedő (illetve csökkenő) trendű periódusokban. A Standard & Poor's 500 részvényindexből 150 darab értékpapírt választottunk véletlenszerűen, melyek forgalomban voltak 1987-től kezdve 2011 végéig. Az azonos trendben (bika illetve medve piacon) mozgó periódusokon megfigyelt napi logaritmikus hozamok alapján megbecsültük az egyes értékpapírok kockázatát szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia alapú kockázatbecslő módszerekkel. Mindkét entrópia alapú kockázati mérték esetén hisztogram-alapú sűrűségfüggvény becslést alkalmaztunk, Shannon-féle entrópia esetén 175, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal. Egy pont egy értékpapír reprezentációja, a pontokra lineáris regressziós egyenest illesztettünk, majd lemértük az illeszkedésének jóságát (R^2). A paneleken feltüntettük a regressziós egyenes képletét, a determinációs együtthatót, illetve zárójelben az egyes paraméterekhez tartozó p -értéket.

A bika és medve piacokra elvégzett kísérleteink eredménye mutatja, hogy a különböző kockázati mértékek hasonlóan viselkednek a különböző piaci körülmények között: azaz az elméleti modellnek megfelelően a hozam és

kockázat között pozitív kapcsolatot látunk emelkedő piaci rezsimben, viszont minden kockázati mérték esetén negatív kapcsolat látszik csökkenő piaci viszonyok között. Jelen eredményünk interpretálásakor világosan kell látni, hogy semmi különösét nem fedeztünk fel, hiszen a jelenség már eddig is ismert volt (Silver, 1975; DeBondt és Thaler, 1987; Chawla, 2003), azonban az a tény, hogy az entrópia is hasonló karakterisztikákat mutat, abból a szempontból lehet fontos eredmény, hogy alkalmazása az eddig megszokottaknak megfelelő értelmezési tartományban történhet meg. Bika piacon minden kockázati mértékkel kifejezetten erős magyarázó képességet mértünk: 39,54% a szórás, 37,42% a CAPM béta, 48,65% a Shannon entrópia, valamint 49,34% a Rényi entrópia esetén⁵. Emelkedő piacon a regressziós egyenes pozitív meredekségű, hasonlóan a teljes mintára vonatkozó mérésünk során tapasztaltakhoz; azaz a magasabb kockázatvállalásért magasabb hozamra számíthatunk. Ezzel ellentétben, amikor a piacok esnek, azaz medve piaci körülmények között a magasabb kockázatvállalást nem jutalmazza a piac magasabb hozammal, sőt valójában a kockázati prémium a kockázat függvényében csökken, azaz a regressziós egyenes meredeksége negatívvá válik. Meg kell jegyeznünk, hogy ezen megfigyelés esetén a béta magyarázó ereje (37,26%) meghaladja az entrópiáét (Shannon- valamint Rényi entrópia esetén 32,66%, illetve 30,55%). Összességében azt állíthatjuk, hogy eredményeink egybevágóak a sztenderd eszközárzási modellek eredményeivel. Amennyiben a rezsim-függőség is jól láthatóvá válik, lényegesen pontosabb becslést kapunk, mint ezen információ felhasználása nélkül. Mindazonáltal meg kell jegyeznünk, hogy a teljes mintára vonatkozó eredmények abból a szempontból mégis relevánsabbak tűnnek, mivel a befektető egy adott pillanatban nem tudja eldönteni, hogy épp emelkedő, vagy csökkenő piacon fektet be, így annak előrejelzése bizonytalanává válik.

4.4 Rövid távú magyarázó és előrejelző képesség

Bár jelentős eredményeket érhetünk el mintán belül (például túltanulással), ebből még nem következik, hogy a mintán kívül is pontos lesz a modellünk. Az előrejelző képesség mérésére a következő módszert alkalmaztuk. 1987-től kezdve tízéves periódusokat vettünk 1-1 éves eltolással egészen 2002-ben kezdődő 10 éves periódusig bezárólag. Az első periódus 1987-től 1996-ig, az utolsó 2002-től 2011-ig tart, 1 éves eltolásokkal ez a 25 éves teljes adatsoron 16 darab tízéves periódust jelent. A tízéves periódusokat 5-5 éves tanító és teszt periódusokra bontottuk fel, melyeket $p2i$ és $p2o$ -val jelölünk a továbbiakban. Minden tízéves periódusban megbecsültük a kockázati mértékeket az első 5 éves perióduson ($p2i$), majd lineáris regressziót és R^2 mérést alkalmaztunk az azonos (mintán belül, $p2i$), illetve következő 5 éves periódus (mintán kívül, $p2o$) várható kockázati prémiumának becslésére. A kockázati mértékek rövid távú magyarázó és előrejelző képessége a vizsgált periódusok R^2 -ének átlaga mintán belül és kívül. Az eredményeket az 1. táblázatban foglaltuk össze, a

⁵A „bootstrapping” módszer alapján az entrópia-alapú kockázati mértékek szignifikánsan különböznek a szórástól és a CAPM bétától 1%-os szignifikancia szinten.

teljesség kedvéért kiegészítve az előző alfejezetekben teljes perióduson, illetve különböző trendeken mért hosszú távú magyarázó képességgel.

Kockázati mérték	$\hat{\eta}_{p1}$ (%)	$\hat{\eta}_{p1+}$ (%)	$\hat{\eta}_{p1-}$ (%)	$\bar{\eta}_{p2i}$ (%)	$\bar{\eta}_{p2o}$ (%)	$\sigma_R(\hat{\eta}_{p2i})$	$\sigma_R(\hat{\eta}_{p2o})$
Szórás	12,10	39,5	30,7	8,73	9,04	0,59	0,77
CAPM béta	8,53	37,4	37,3	13,12	6,54	0,98	1,09
Shannon entrópia	18,71	48,6	32,7	14,77	9,18	0,60	0,78
Rényi entrópia	23,66	49,3	30,5	14,34	8,55	0,51	0,76

1. táblázat. A kockázati prémiumra vonatkozó magyarázó és előrejelző képesség különböző mintákban

Megjegyzés. A táblázat összefoglalja a megvizsgált kockázati mértékek magyarázó (mintán belüli R^2) és előrejelző (mintán kívüli R^2) képességét különböző mintákon mérve. A Standard & Poor's 500 részvényindexből 150 értékpapírt választottunk véletlenszerűen, melyek forgalomban voltak 1987-től kezdve és 2011 végig. Ezen értékpapírok napi logaritmikus hozamán szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia alapú kockázatbecslő módszerekkel megbecsültük azok kockázatát: (1) hosszú távon, 1987-től 2011-ig bezárólag; (2) emelkedő trendben (bika piacon); (3) csökkenő trendben (medve piacon); (4) 16 darab 10-éves perióduson (1987–1996)-tól kezdve, (2002–2011)-ig 1-1 éves eltolással, felosztva 5-5 éves mintán belüli és mintán kívüli mérési mintára. Mindkét entrópia alapú kockázati mérték esetén histogram-alapú sűrűségfüggvény becslést alkalmaztunk, Shannon-féle entrópia esetén 175 osztállyal, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal. $\hat{\eta}_{p1}$ jelöli az egyes kockázati mértékek hosszú távú magyarázó képességét, $\hat{\eta}_{p1+}$ és $\hat{\eta}_{p1-}$ jelzi a magyarázó erőt, amennyiben a trend azonosított, $\bar{\eta}_{p2i}$ az átlagos mintán belüli magyarázó képesség a 10 éves rövidebb periódusok első 5 évében, $\bar{\eta}_{p2o}$ pedig a második 5 évben mért átlagos előrejelző képesség. Az utolsó két oszlop a rövidebb periódusokon mért teljesítmények relatív szórását összegzi.⁶

Eredményeink alapján a szórás hasonló pontossággal magyarázza, illetve jelzi előre a várható hozamot 5 éves periódusra vonatkozóan (8,73% és 9,04%). A CAPM béta és az entrópia modellek esetén a rövid távú mintán belüli magyarázó képesség jelentősen magasabb az előrejelző képességnél (CAPM esetén: 13,12% és 6,54%; Shannon entrópia esetén: 14,77% és 9,18%, míg Rényi entrópia esetén: 14,34% és 8,55%). A szórás mintán belüli pontossága szignifikánsan alacsonyabb a többi modellhez képest (8,73% szemben a 13,12%, 14,77%, 14,34% értékekkel), előrejelző képessége viszont meglepően magas (9,04%, szemben a 6,54%, 9,18%, 8,55% értékekkel). A CAPM béta esetén a megfigyelés fordított, 5 éves mintán belül jelentősen magasabb, mint a teljes mintán mérve (rövid távon 13,12%, hosszú távon 8,53%), előrejelző képessége viszont jelentősen alacsonyabb (6,54%), ami azt sugallja, hogy a modell nagy valószínűséggel túltanult a tanító perióduson. Az entrópia alapú kockázati mértékek rövid távú magyarázó-, ill. előrejelző képessége relatíve

⁶A rövidebb periódusokra vonatkozó részletes eredményeinket kérésre rendelkezésre bocsátjuk.

magas (Shannon entrópia 14,77% és 9,18%, illetve Rényi entrópia 14,34% és 8,55%, szemben a szórással: 8,73% és 9,04%, illetve a CAPM bétával: 13,12% és 6,54%). Eredményeink meglepőek abból a szempontból, bár a CAPM béta egy szisztematikus kockázati mérték, mégis az entrópia közel 40%-kal magasabb előrejelző képességgel rendelkezik (9,18% szemben a 6,54%-kal). Shannon entrópia alkalmazásával medve piacon kívül minden esetben pontosabb becsléseket mértünk mind a szóráshoz, mind a CAPM bétához képest. A két entrópia függvény közül hosszú távon a Rényi entrópia (23,66%), rövid távon a Shannon entrópia (14,77% és 9,18%) bizonyult pontosabbnak az empirikus vizsgálatok alapján⁷. Az 5 éves periódusokon mért R^2 ingadozás (relatív szórása) alapján elmondható, hogy a legkevésbé megbízható modell a CAPM béta mintán belül 0,98-as, illetve mintán kívül 1,09-es relatív szórással, ami 40%-kal magasabb az entrópia alapú kockázati mértékekhez képest. A szórás és az entrópia alapú kockázati mértékek esetén hasonló ingadozást mértünk, nagyságrendileg mintán belül 0,60, illetve mintán kívül 0,75 körüli értékeket, legmegbízhatóbb rövid távú modellnek a Rényi entrópia bizonyult. Eredményeinket összefoglalva azt az állítást fogalmazzuk meg, hogy a béta kizárólag csökkenő piacokon alkalmasabb kockázat mérésre, mint az entrópia alapú kockázati mértékek. Minden más esetben az entrópia túlszárnyalja a CAPM bétát és a Markowitz-féle modell varianciáját, így jobb és megbízhatóbb kockázati mértéknek tűnik.

5 Összegzés

Az entrópia alapú kockázati mérték ötvözi a szórás és a CAPM béta különböző mintákon mért pontosságát. Ahogyan a szórás, az entrópia is képes a diverzifikációs hatás kimutatására, a kockázati prémiumra vonatkozó rövid távú előrejelző képessége nagyobb. A bétával szemben a modell számításához nincs szükség a valóságban megragadhatatlan piaci portfólió hozamának ismeretére, a várható kockázati prémiumra vonatkozó mintán belüli magyarázó ereje nagyobb, főleg hosszú távon, amikor a piaci trend nem beazonosított. Jegyezzük meg, hogy egy adott pillanatban ez nem is lehetséges, kizárólag későbbi periódusokban tudjuk megállapítani, hogy a múlt egy adott pillanata bika vagy medve piachoz tartozott-e. Amennyiben a piaci trend azonosítható, az entrópia és a béta magyarázó ereje között nincs egyértelmű reláció. Pontosság, stabilitás szempontjából az entrópia alapú kockázati mérték a legkiegyensúlyozottabb, mivel a rövid távú időablakokon mért magyarázó és előrejelző képesség relatív szórása a legalacsonyabb. Az entrópia becslőmódszerek között a hisztogram-alapú megközelítést találtuk a legpontosabbnak, így bevezettünk egy-egy egyszerű formulát a Shannon- és Rényi entrópia becslésére, elősegítve ezzel az entrópia alapú pénzügyi kockázatbecslés széles körű alkalmazhatóságát.

⁷A „bootstrapping” módszer alapján az entrópia-alapú kockázati mértékek pontossága, amennyiben magasabbak, szignifikánsan különböznek a szórástól és a CAPM bétától 1%-os szignifikancia szinten.

Függelékek

F1 Leíró statisztika

Vállalat neve	CRSP azon.	$r - r_j$	Lapos- ság	Ferde- ség	J-B teszt	szig. szint	σ	β	H_1	H_2
Honeywell International	10145	0,0344	22,93	0,24	137910,2	***	2,13	1,10	7,64	5,94
Beam Inc.	10225	0,0262	7,36	0,28	14278,8	***	1,75	0,83	6,37	4,91
Archer Daniels Midland Co	10516	0,0375	8,50	-0,03	18964,9	***	2,05	0,83	7,24	5,92
Brown Shoe Co Inc. New	10866	0,0161	11,89	0,37	37185,2	***	2,82	1,14	9,59	6,96
Brunswick Corp	10874	0,0326	26,59	0,68	185986,0	***	3,06	1,47	10,35	7,82
Unisys Corp	10890	0,0214	32,22	1,34	274237,1	***	3,97	1,44	12,38	9,42
DuPont	11703	0,0207	5,05	-0,11	6688,0	***	1,84	0,99	6,99	5,50
Eaton Corp	11762	0,0349	14,13	-0,07	52363,9	***	1,82	0,98	6,71	5,20
General Dynamics Corp	12052	0,0332	10,79	0,06	30522,3	***	1,76	0,66	6,35	4,84
Ingersoll Rand Plc	12431	0,0446	9,64	-0,25	24451,7	***	2,28	1,21	8,56	6,71
IBM Corp.	12490	0,0309	10,31	-0,02	27881,8	***	1,85	0,94	6,76	5,21
ITT Corp.	12570	0,0372	8,80	0,12	20320,8	***	1,74	0,90	6,51	5,07
N L Industries Inc.	13303	0,0465	6,11	0,42	9965,6	***	3,22	1,09	11,23	8,68
P G & E Corp	13688	0,0130	63,24	-0,43	1049189,8	***	1,96	0,57	5,92	4,73
PepsiCo Inc.	13856	0,0432	6,83	0,32	12346,1	***	1,66	0,65	6,13	4,82
ConocoPhillips	13928	0,0440	7,20	0,01	13585,2	***	1,95	0,85	7,28	5,91
Apple Inc.	14593	0,1027	20,06	-0,42	105725,7	***	3,07	1,25	11,34	8,95
Sunoco Inc.	14656	0,0254	11,21	-0,06	32955,2	***	2,18	0,95	7,97	6,33
Foot Locker Inc.	15456	0,0248	7,60	0,38	15308,9	***	2,71	1,01	9,70	7,39
RadioShack Corp	15560	0,0196	9,37	-0,02	23013,4	***	2,66	1,09	9,70	7,42
Texas Instruments Inc.	15579	0,0641	4,71	0,18	5849,7	***	2,83	1,37	10,87	8,57
Goodyear Tire&Rubber Co	16432	0,0186	7,37	-0,11	14262,6	***	2,81	1,36	10,12	7,58
Hershey Co	16600	0,0350	21,66	0,40	123190,7	***	1,64	0,59	5,96	4,69
Kroger Company	16678	0,0438	139,09	-4,13	5092483,4	***	2,28	0,70	7,82	6,54
CVS Caremark Corp	17005	0,0353	11,76	-0,35	36383,2	***	1,97	0,75	7,17	5,56
Bassett Furniture Ind.	17137	0,0108	16,95	0,72	75867,9	***	2,89	0,60	9,65	7,35
General Mills Inc.	17144	0,0289	6,11	0,18	9816,4	***	1,33	0,48	5,04	3,98
McGraw Hill Cos Inc.	17478	0,0326	11,75	0,40	36364,0	***	1,89	0,94	6,73	5,06
Kimberly Clark Corp	17750	0,0297	16,20	-0,52	69119,0	***	1,56	0,60	5,74	4,47
United Technologies Corp	17830	0,0411	14,63	-0,58	56472,3	***	1,77	0,94	6,64	5,25
Procter & Gamble Co	18163	0,0398	48,10	-1,67	609852,2	***	1,59	0,66	5,65	4,44
Penney J C Co Inc.	18403	0,0244	5,31	0,39	7553,0	***	2,41	1,11	8,96	6,78
Southern Co	18411	0,0216	12,04	0,00	38001,7	***	1,31	0,46	4,71	3,97
Caterpillar Inc.	18542	0,0530	5,93	-0,08	9233,8	***	2,10	1,09	7,94	6,23
Colgate Palmolive Co	18729	0,0440	12,91	0,07	43712,7	***	1,62	0,65	6,00	4,70
F M C Corp	19166	0,0474	15,71	-0,22	64755,9	***	2,11	1,06	7,33	5,54
Deere & Co	19350	0,0571	4,59	0,00	5527,4	***	2,20	1,05	8,43	6,60
Bristol Myers Squibb Co	19393	0,0219	14,35	-0,46	54208,6	***	1,82	0,81	6,65	5,17
Walgreen Co	19502	0,0460	5,35	0,09	7510,2	***	1,83	0,78	6,91	5,51
Crane Co	20204	0,0428	5,90	0,04	9135,8	***	2,11	1,03	7,68	6,14
Abbott Laboratories	20482	0,0365	4,82	-0,17	6112,0	***	1,69	0,66	6,48	5,18
Dow Chemical Co	20626	0,0197	8,26	-0,17	17941,8	***	2,10	1,09	7,61	5,80
Genesco Inc.	21055	0,0965	10,77	-0,06	30437,5	***	3,56	1,15	12,03	9,96
Lockheed Martin Corp	21178	0,0281	12,79	-0,09	42907,8	***	1,83	0,62	6,63	5,17
International Paper Co	21573	0,0173	11,03	0,07	31913,2	***	2,24	1,13	8,11	6,29
Pfizer Inc.	21936	0,0359	4,40	-0,15	5098,0	***	1,84	0,84	7,05	5,57
Cooper Industries Plc	21979	0,0316	16,29	-0,16	69587,8	***	2,00	1,03	7,23	5,60
Emerson Electric Co	22103	0,0310	6,77	0,05	12034,6	***	1,78	1,02	6,65	5,21
Johnson & Johnson	22111	0,0403	9,07	-0,23	21637,2	***	1,50	0,66	5,70	4,48
PPG Industries Inc.	22509	0,0259	7,30	0,03	13958,1	***	1,83	1,00	6,87	5,35
3M Co	22592	0,0255	15,79	-0,62	65777,1	***	1,58	0,82	5,85	4,51
Merck & Co Inc. New	22752	0,0292	12,79	-0,57	43226,6	***	1,80	0,79	6,76	5,36
Motorola Solutions Inc.	22779	0,0456	7,07	-0,15	13123,2	***	2,73	1,33	10,09	7,74
FirstEnergy Corp	23026	0,0090	12,54	0,22	41267,3	***	1,48	0,58	4,85	4,23
Heinz H J Co	23077	0,0193	4,35	0,17	4991,5	***	1,46	0,55	5,44	4,38
Textron Inc.	23579	0,0295	42,58	0,29	47524,6	***	2,48	1,26	8,08	6,10
Public Service EG Inc.	23712	0,0106	10,84	0,13	30819,9	***	1,51	0,63	5,21	4,30
Entergy Corp New	24010	0,0243	13,40	0,10	47085,0	***	1,56	0,53	5,47	4,43
NextEra Energy Inc.	24205	0,0156	15,38	0,00	62068,1	***	1,36	0,54	4,72	3,79
Constellation Energy G.	24221	0,0096	56,57	-2,24	844580,9	***	1,74	0,61	5,81	4,62

Vállalat neve	CRSP azon.	$r - r_j$	Lapos-ság	Ferde-ség	J-B teszt	szig. szint	σ	β	H_1	H_2
Alcoa Inc.	24643	0,0259	9,44	0,10	23380,0	***	2,43	1,26	8,88	6,88
Raytheon Co	24942	0,0194	66,16	-1,91	1151917,6	***	1,85	0,59	6,30	5,06
ONEOK Inc. New	25232	0,0421	24,63	-0,06	159092,7	***	2,00	0,80	6,83	5,56
Campbell Soup Co	25320	0,0238	7,28	0,36	14044,2	***	1,66	0,57	6,10	4,71
Harris Corp	25582	0,0362	8,61	0,11	19457,3	***	2,15	0,97	7,87	6,09
Ford Motor Co Del	25785	0,0293	14,31	0,55	54057,6	***	2,56	1,16	9,16	7,13
Disney Walt Co	26403	0,0433	13,59	-0,16	48446,9	***	2,04	1,12	7,52	5,90
Biglari Holdings Inc.	26607	0,0972	64,45	-0,69	1089956,4	***	3,39	0,76	11,40	9,06
ASA Gold&Precious M.	26649	0,0207	5,51	0,24	8018,1	***	2,19	0,15	8,14	6,25
Kellogg Co	26825	0,0194	22,71	0,06	135320,1	***	1,60	0,60	5,80	4,56
Ryder Systems Inc.	27633	0,0183	5,12	-0,12	6893,3	***	2,18	1,06	8,00	6,39
Baxter International Inc.	27887	0,0323	16,32	-1,03	71001,4	***	1,87	0,72	6,86	5,53
Duke Energy Corp New	27959	0,0152	13,84	-0,10	50266,3	***	1,47	0,54	5,21	4,03
Xerox Corp	27983	0,0158	20,40	0,29	109275,8	***	2,62	1,10	8,76	6,59
Unilever N V	28310	0,0321	69,52	0,16	1267835,1	***	1,70	0,75	5,92	4,67
Hess Corp	28484	0,0406	10,35	-0,51	28395,1	***	2,20	0,98	8,00	6,21
Masco Corp	34032	0,0075	5,90	0,09	9148,4	***	2,34	1,13	8,36	6,34
Occidental Petrol. Corp	34833	0,0364	9,43	-0,05	23341,6	***	2,04	0,93	7,38	5,96
Sherwin Williams Co	36468	0,0433	9,88	-0,16	25616,3	***	1,88	0,83	6,93	5,45
Thomas & Betts Corp	38578	0,0210	19,22	-0,89	97748,4	***	2,05	1,07	7,33	5,58
RR Donnelley & Sons Co	38682	0,0023	16,56	-0,33	72036,9	***	1,90	0,96	6,88	5,39
Skyline Corp	38850	-0,0043	8,00	0,38	16927,6	***	2,45	0,90	8,45	6,34
Mattel Inc.	39538	0,0532	12,50	-0,26	41071,9	***	2,38	0,87	8,56	6,79
Becton Dickinson & Co	39642	0,0389	12,14	-0,32	38742,3	***	1,71	0,63	6,29	4,88
Computer Sciences Corp	40125	0,0300	22,40	-1,11	132907,5	***	2,24	1,00	7,98	6,12
Cummins Inc.	41080	0,0529	7,40	0,26	14447,6	***	2,48	1,21	8,96	6,73
Con Way Inc.	41929	0,0205	4,79	0,12	6027,2	***	2,59	1,04	9,34	7,16
Meredith Corp	42796	0,0248	7,07	0,23	13150,1	***	1,89	0,92	6,80	5,16
Allegheny Technologies	43123	0,0373	6,46	0,39	11096,0	***	2,95	1,35	10,51	7,91
Stanley Black & Decker	43350	0,0316	5,18	0,24	7087,0	***	2,01	1,01	7,37	5,81
McDonald's Corp	43449	0,0463	5,49	-0,09	7898,4	***	1,67	0,69	6,37	5,12
Supervalu Inc.	44951	0,0005	9,18	-0,61	22470,5	***	2,09	0,72	7,35	5,75
Rowan Companies Inc.	45495	0,0684	2,97	0,21	2353,4	***	3,21	1,23	11,61	9,78
Clorox Co	46578	0,0355	11,24	-0,26	33192,1	***	1,62	0,57	5,81	4,45
Genuine Parts Co	46674	0,0207	5,25	0,20	7275,9	***	1,47	0,73	5,29	4,07
Bard C R Inc.	46877	0,0389	8,16	0,09	17472,0	***	1,92	0,67	7,01	5,43
Rite Aid Corp	46922	0,0229	21,20	0,69	118424,0	***	3,63	1,10	11,01	7,98
New York Times Co	47466	-0,0026	9,05	0,61	21850,1	***	2,27	0,97	8,01	6,10
C N A Financial Corp	47626	0,0161	25,24	-0,03	167044,1	***	2,14	1,08	7,01	5,27
JPMorgan Chase & Co	47896	0,0317	12,51	0,46	41257,9	***	2,58	1,49	9,00	6,74
Gannett Inc.	47941	0,0054	29,95	0,80	235880,4	***	2,25	1,10	7,50	5,72
Lincoln National Corp In	49015	0,0368	46,75	0,94	574264,5	***	2,95	1,49	8,21	6,17
Target Corp	49154	0,0510	13,18	-0,31	45655,7	***	2,17	1,09	8,07	6,21
Potlatch Corp New	49744	0,0126	14,15	0,05	52500,8	***	2,18	1,15	7,74	5,98
Lilly Eli & Co	50876	0,0260	18,78	-0,74	93119,5	***	1,85	0,80	6,92	5,49
Tenet Healthcare Corp	52337	0,0251	47,69	0,43	596699,9	***	2,99	0,86	9,83	7,70
Pulte Group Inc.	54148	0,0521	4,57	0,42	5646,1	***	2,99	1,34	11,00	8,78
S P X Corp	55212	0,0422	12,59	-0,74	42115,5	***	2,55	1,09	8,86	6,87
Walmart Stores Inc.	55976	0,0494	3,71	0,17	3629,7	***	1,82	0,85	6,80	5,41
Louisiana Pacific Corp	56223	0,0284	9,38	0,06	23057,6	***	3,04	1,40	10,69	8,10
ConAgra Inc.	56274	0,0215	13,81	-0,61	50389,0	***	1,66	0,58	6,05	4,69
Ball Corp	57568	0,0372	8,94	0,05	20958,2	***	1,87	0,83	6,81	5,40
American Express Co	59176	0,0433	9,44	0,13	23407,2	***	2,40	1,45	8,67	6,59
Molson Coors-B Co	59248	0,0326	7,71	-0,20	15650,8	***	2,13	0,56	7,41	5,89
Intel Corp	59328	0,0848	6,10	-0,08	9765,4	***	2,68	1,40	10,25	8,12
Snap On Inc.	60206	0,0198	7,46	0,13	14626,5	***	1,87	0,94	6,72	5,06
Paccar Inc.	60506	0,0592	4,04	0,11	4282,2	***	2,36	1,24	8,70	6,64
FedEx Corp	60628	0,0336	4,18	0,14	4596,3	***	2,11	0,99	7,97	6,21
Advanced Micro Devices	61241	0,0587	7,73	-0,05	15653,9	***	3,92	1,61	14,25	11,13
Lowes Companies Inc.	61399	0,0672	4,53	0,08	5380,9	***	2,35	1,10	8,85	7,03
Cigna Corp	64186	0,0398	27,41	-0,79	197707,2	***	2,18	0,92	7,42	5,75
Limited Brands Inc.	64282	0,0434	4,65	0,14	5700,5	***	2,51	1,18	9,38	7,44
Norfolk Southern Corp	64311	0,0377	5,01	0,05	6572,6	***	2,01	0,99	7,61	5,89
Verizon Communications	65875	0,0179	11,90	0,57	37487,6	***	1,70	0,75	6,34	4,96
A T & T Inc.	66093	0,0191	10,85	0,13	30881,4	***	1,76	0,81	6,55	5,18

F-1. táblázat. Az értékpapírok leíró statisztikái

Megjegyzés. A táblázat összegzi a 150 véletlenszerűen választott értékpapír kockázatmentes hozammal csökkentett napi hozamán (kockázati prémium) számított leíró statisztikáit és kockázati mértékeit. Mind a kockázatmentes napi hozam, mind részvények napi hozama esetén logaritmikus (folytonos) hozamadatokat alkalmaztunk. „J-B teszt” jelzi a Jarque-Bera teszt eredményét, a „szig. szint” jelzi a nem normális eloszlásra vonatkozó legalacsonyabb szignifikancia szintet, amit 0.01 esetén ***-gal jelölünk. A J-B teszt pontos értéke 9,21 0.01-es szignifikancia szint esetén. Amennyiben a J-B teszt értéke magasabb, mint a 0.01-es szignifikancia szint határa, a normalitás nullhipotézisét elvetjük. A táblázat eredményei alapján a normalitás hipotézise az összes vizsgált értékpapír esetén elvethető. Az összegzett kockázati mértékek a szórás (σ), CAPM béta (β), Shannon entrópia (H_1) és Rényi entrópia (H_2).

F2 Sűrűségfüggvény becslési módszerek

Az entrópia magfüggvény-alapú becslése

A sűrűségfüggvény becslésére alkalmazott magfüggvény-alapú becslés a következő képlettel írható le:

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad (24)$$

ahol $K(\cdot)$ a magfüggvény és h a sáv szélesség paramétere. A leggyakrabban használt magfüggvényeket az F-2. táblázatban gyűjtöttük össze.

Magfüggvény	$K(z)$
Egyenletes	$\frac{1}{2} I_{\{ z \leq 1\}}$
Gauss	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$
Epanechnikov	$\frac{3}{4} (1 - z^2) I_{\{ z \leq 1\}}$
Háromszög	$(1 - z) I_{\{ z \leq 1\}}$
Harmadfokú	$\frac{35}{32} (1 - z^2) I_{\{ z \leq 1\}}$
Koszinus	$\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right) I_{\{ z \leq 1\}}$

F-2. táblázat. A leggyakrabban használt magfüggvények

Megjegyzés. A táblázat összegzi a magfüggvény-alapú sűrűségbecsléshez leggyakrabban használt függvényeket (Härdle, 2004). I jelöli az indikátor függvényt. Az indikátorfüggvény, vagy más néven karakterisztikus függvény, olyan függvény, amely jelzi, hogy az értelmezési tartományának pontjai elemei-e egy halmaznak. Értéke 1, ha igaz a kifejezés, máskülönben 0. Ily módon $I_{\{|z| \leq 1\}}$ értéke 1, ha $|z| \leq 1$, egyébként 0. Härdle (2004) szerint a magfüggvény-alapú sűrűségbecslés során a sáv szélesség helyes megválasztása sokkal fontosabb, mint maga a magfüggvény kiválasztása, így gyakorlati megfontolásból (pl.: számítási idő csökkentése) elsősorban az indikátor alapú magfüggvényeket preferáljuk.

Számításigény szempontjából az indikátor-alapú Epanechnikov magfüggvényt javasoljuk:

$$K(z) = \frac{3}{4}(1 - z^2)I_{\{|z| \leq 1\}}. \quad (25)$$

Az egyik leggyakrabban használt módszer a sávszélesség becslésére a Silverman-féle ökölszabály (1986):

$$\hat{h}_S = 1.06 \min \left\{ \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \frac{\text{IQR}(X)}{1.34} \right\} n^{-1/5}, \quad (26)$$

ahol $\text{IQR}(X)$ X valószínűségi változó interkvartilis terjedelme. Bár a formula normális eloszlást feltételez, jó kezdőértéke lehet pontosabb optimalizáló metódusoknak (Turlach, 1993). Dolgozatunkban a sávszélesség optimalizálására nem térünk ki részletesen, ez további kutatási irány lehet az entrópia becslés mélyebb módszertani elemzésében.

Az entrópia „sample spacing”-alapú becslése

Legyen $x_{n,1} \leq x_{n,2} \leq \dots \leq x_{n,n}$ egy monoton nem-csökkenő rendezése x_1, x_2, \dots, x_n mintának, ahol $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Nevezzük $[x_{n,(i-1)m+1}, x_{n,im+1})$ intervallumot az értéktartomány m -rendű felosztás i -edik osztályának. A felosztás alapján a következő sűrűségfüggvény becslést definiálhatjuk (Beirlant, 1997):

$$f_n(x) = \frac{m}{n} \frac{1}{x_{n,im+1} - x_{n,(i-1)m+1}}, \quad (27)$$

ha $x \in [x_{n,(i-1)m+1}, x_{n,im+1})$. Ezt a becslési módszert egyszerű „sample spacing”-alapú sűrűségbecslésnek nevezzük.

Wachowiak és szerzőtársai (2005) az m -rendű felosztás egy másik változatát vezették be, melyet „Correa” becslésnek neveztek el:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{j=i-m/2}^{i+m/2} (x_j - \bar{x}_i)(j - i)}{\sum_{j=i-m/2}^{i+m/2} (x_j - \bar{x}_i)^2}, \quad (28)$$

ha $i : x \in [x_{n,i}, x_{n,i+1})$; $\bar{x}_i = \frac{1}{m+1} \sum_{j=i-m/2}^{i+m/2} x_j$ és $1 \leq j \leq n$. A módszer paramétere a felosztás m rendje. Gyakorlati okokból (például különböző mennyiségű mintaszám) javasoljuk, hogy m értéke n függvénye legyen. Jelöljük ezt m_n -nel, amit a következő képlettel számítunk ki:

$$m_n = \left\lceil \frac{n}{g} \right\rceil, \quad (29)$$

ahol g a kívánt osztályok száma a felosztás után, a zárójelek a felső egészrészrt jelentik.

Beirlant és szerzőtársai (1997) további entrópiabecslő módszereket foglaltak össze, például behelyettesítés („resubstitution”), adatfelosztás („splitting-data”) vagy keresztvalidáció alapú („cross-validation”) módszereket.

Sűrűségfüggvény becslési módszerek összehasonlítása

Sűrűségfüggvény becslés	$\hat{\eta}_{p1}$ (%)	$\bar{\eta}_{p2i}$ (%)	$\bar{\eta}_{p2o}$ (%)	$\sigma_R(\hat{\eta}_{p2i})$	$\sigma_R(\bar{\eta}_{p2o})$
Hisztogram	18,71	14,77	9,18	0,60	0,78
Sample Spacing (egyszerű)	21,10	16,39	8,88	0,56	0,80
Sample Spacing (Correa)	20,49	16,40	8,66	0,57	0,80
Kernel (Egyenletes)	18,92	15,81	8,79	0,58	0,76
Kernel (Gauss)	18,89	14,53	9,11	0,57	0,74
Kernel (Epanechnikov)	19,05	15,81	8,62	0,60	0,77
Kernel (Háromszög)	18,61	15,80	8,52	0,61	0,78
Kernel (Harmadfokú)	18,45	15,92	8,36	0,61	0,78
Kernel (Koszinusz)	18,89	14,81	9,03	0,58	0,75

F-3. táblázat. Különböző sűrűségfüggvény becslő módszerrel számított Shannon-entrópia magyarázó képessége

Megjegyzés. Annak eldöntésére, hogy melyik sűrűségfüggvény becslő módszert alkalmazzuk az entrópia becsléséhez, összehasonlítottuk a leggyakrabban alkalmazott módszereket. A táblázat összegzi a megvizsgált sűrűségfüggvény becslő módszer alkalmazásával kapott Shannon entrópia magyarázó (mintán belüli R^2) és előrejelző (mintán kívüli R^2) képességét különböző mintákon mérve. A Standard & Poor's 500 részvényindexből 150 darab értékpapírt választottunk véletlenszerűen, melyek forgalomban voltak 1987-től kezdve 2011 végéig. Ezen értékpapírok napi logaritmikusan hozamán különböző sűrűségfüggvény becslő módszereket alkalmaztunk a Shannon-féle entrópia közelítésére, különböző mintákat nevezetesen (1) hosszú távon, 1987-től 2011-ig bezárólag; (2) 16 darab 10 éves perióduson (1987-1996)-tól kezdve, (2002-2011)-ig 1-1 éves eltolással, felosztva 5-5 éves mintán belüli és mintán kívüli mérési mintára. A hisztogram- és „sample spacing”-alapú sűrűségbecslés esetén 175 osztályt alkalmaztunk, a magfüggvény-alapú módszerek esetén a sávszélességet „Szimplex” keresési módszerrel választottuk ki. $\hat{\eta}_{p1}$ jelöli az egyes kockázati mértékek hosszú távú magyarázó képességét, $\bar{\eta}_{p2i}$ az átlagos mintán belüli magyarázó képesség a 10 éves rövidebb periódusok első 5 évében, $\bar{\eta}_{p2o}$ pedig a második 5 évben mért átlagos előrejelző képesség. Az utolsó két oszlop a rövidebb periódusokon mért teljesítmények relatív szórását összegzi. Bár mintán belül a „sample spacing” módszer teljesít a legjobban, a hisztogram-alapú becslés összességében pontosabb eredményt ad a magyarázó és előrejelző képességet tekintve.

F3 A Shannon-féle entrópia normális eloszlás esetén

Legyen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlású folytonos valószínűségi változó μ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Norwich (1993) szerint ebben X valószínűségi változó Shannon entrópiája

$$H_1(X) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma^2). \quad (30)$$

Az általunk definiált Shannon entrópia féle kockázati mérték (14) szerint $\hat{\kappa}_{H_1}(S_i) = e^{H_1(R_i - R_F)}$. Amennyiben az értékpapír kockázati prémiumának

$R_i - R_F$ eloszlása normális, (14) és (30) alapján a következő összefüggés írható fel:

$$\hat{\kappa}_{H_1}(S_i) = e^{\frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma^2)},$$

mely tovább egyszerűsítve

$$\hat{\kappa}_{H_1}(S_i) = \sigma \sqrt{2\pi e}. \tag{31}$$

A képletből látszik, hogy normális eloszlás esetén az entrópia alapú kockázati mértékünk a szórástól csak a $\sqrt{2\pi e}$ konstansban tér el.

F4 Piaci rezsimiek

Első nap	Utolsó nap	Piaci trend
1987-01-02	2000-01-31	emelkedő
2000-02-01	2002-08-31	csökkenő
2002-09-01	2007-04-30	emelkedő
2007-05-01	2009-01-31	csökkenő
2009-02-01	2011-04-30	emelkedő
2011-05-01	2011-08-31	csökkenő
2011-09-01	2011-12-31	emelkedő

F-4. táblázat. Periódusok címkézése piaci trend alapján

Megjegyzés. A táblázat az elemzéshez alkalmazott periódust (1987-2011) rövidebb trendekre osztja. A trendeket a CRSP adatbázisában található, kapitalizációval súlyozott, osztalékkal korrigált piaci index havi logaritmikus hozama alapján határoztuk meg.

Irodalom

1. Affleck-Graves, J., and B. McDonald. (1989). Nonnormalities and Tests of Asset Pricing Theories. *The Journal of Finance*, 44(4), 889–908. doi:10.1111/j.1540-6261.1989.tb02629.x
2. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228. doi:10.1111/1467-9965.00068
3. Beirlant, J., Dudewicz, E. J., Györfi, L. & Van der Meulen, E. C. (1997). Nonparametric entropy estimation: An overview. *International Journal of Mathematical and Statistical Sciences*, 6(1), 17–40.
4. Benavides, E. M. (2011). *Advanced engineering design: an integrated approach*. Elsevier. doi:10.1533/9780857095046
5. Bera, A. K. & Park, S. Y. (2008). Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle. *Econometric Reviews*, 27(4-6), 484–512. doi: 10.1080/07474930801960394
6. Boltzmann, L. (1970). Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. In *Kinetische Theorie II SE – 3*, 67, 115–225. Vieweg+Teubner Verlag. doi:10.1007/978-3-322-84986-1_3
7. Brown, S. J. & Warner, J. B. (1985). Using daily stock returns: The case of event studies. *Journal of Financial Economics*, 14(1), 3–31. doi:10.1016/0304-405X(85)90042-X

8. Chawla, D. (2003). Stability of Alphas and Betas over Bull and Bear Markets: An Empirical Examination. *Vision: The Journal of Business Perspective*, 7(2), 57–77. doi:10.1177/097226290300700205
9. Clausius, R. (1870). XVI. On a mechanical theorem applicable to heat. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 40(265), 122–127. doi:10.1080/14786447008640370
10. DeBondt, W. F. & Thaler, R. H. (1987). Further evidence on investor overreaction and stock market seasonality. *The Journal of Finance*, 42(3), 557–581. doi:10.1111/j.1540- 6261.1987.tb04569.x
11. Dionisio, A., Menezes, R. & Mendes, D. A. (2006). An econophysics approach to analyse uncertainty in financial markets: an application to the Portuguese stock market. *The European Physical Journal B*, 50(1), 161–164. doi:10.1140/epjb/e2006-00113-2
12. Erdős, P. & Ormos, M. (2009). Return calculation methodology: Evidence from the Hungarian mutual fund industry. *Acta Oeconomica*, 59(4), 391–409. doi:10.1556/AOecon.59.2009.4.2
13. Erdős, P., Ormos, M. & Zibriczky, D. (2011). Non-parametric and semi-parametric asset pricing. *Economic Modelling*, 28(3), 1150–1162. doi:10.1016/j.econmod.2010.12.008
14. Fama, E. F., & MacBeth, J. D. (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 607–636. doi:10.1086/260061
15. Freedman, D. & Diaconis, P. (1981). On the histogram as a density estimator: L2 theory. *Probability theory and related fields*, 57(4), 453–476. doi:10.1007/BF01025868
16. Havrda, J. & Charvát, F. (1967). Quantification method of classification processes. Concept of structural a-entropy. *Kybernetika*, 3(1), 30–35. doi:10.1.1.163.683
17. Härdle, W. (2004). *Nonparametric and semiparametric models*. Springer. doi: 10.1007/978-3-642-17146-8
18. Huang, X. (2008). Mean- entropy models for fuzzy portfolio selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(4), 1096–1101. doi:10.1109/TFUZZ.2008.924200
19. Jana, P., Roy, T. K. & Mazumder, S. K. (2009). Multi-objective possibilistic model for portfolio selection with transaction cost. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1), 188–196. doi:10.1016/j.cam.2008.09.008
20. Jensen, M. C. (1968). The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *The Journal of Finance*, 23(2), 389–416. doi:10.1111/j.1540-6261.1968.tb00815.x
21. Kirchner, U. & Zunckel, C. (2011). *Measuring Portfolio Diversification*, 2011. arXiv preprint arXiv:11024722.
22. Li, P. & Liu, B. (2008). Entropy of credibility distributions for fuzzy variables. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(1), 123–129. doi:10.1109/TFUZZ.2007.894975
23. Lintner, J. (1965a). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 73, 13–37. doi:10.2307/1924119
24. Lintner, J. (1965b). Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. *Journal of Finance*, 20(4), 587–615. doi:10.1111/j.1540-6261.1965.tb02930.x

25. Maasoumi, E. & Racine, J. (2002). Entropy and predictability of stock market returns. *Journal of Econometrics*, 107, 291–312. doi:10.1.1.27.1423
26. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection*. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91. doi:10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x
27. Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, 34(4), 768–783. doi:10.2307/1910098
28. Nawrocki, D. N. & Harding, W. H. (1986). State-value weighted entropy as a measure of investment risk. *Applied Economics*, 18(4), 411–419. doi:10.1080/00036848600000038
29. Newey, W., & West, K. (1987). A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708. doi:10.2307/1913610
30. Norwich, K. H. (1993). *The Entropy of the Normal Distribution. Information, sensation, and perception* (pp. 81–87). San Diego: Academic Press.
31. Ou, J. (2005). Theory of portfolio and risk based on incremental entropy. *The Journal of Risk Finance*, 6(1), 31–39. doi:10.1108/15265940510574754
32. Philippatos, G. C. & Wilson, C. J. (1972). Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, 4(3), 209–220. doi:10.1080/00036847200000017
33. Qin, Z., Li, X. & Ji, X. (2009). Portfolio selection based on fuzzy cross-entropy. *Journal of Computational and Applied mathematics*, 228(1), 139–149. doi:10.1016/j.cam.2008.09.010
34. Rényi, A. (1961). On Measures of Entropy and Information. *Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*; Berkeley, Calif. University of California Press. pp. 547–561.
35. Scott, D. W. (1979). On optimal and data-based histograms. *Biometrika*, 66(3), 605–610. doi:10.1093/biomet/66.3.605
36. Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27, 379–423. doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb00917.x
37. Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425–442. doi:10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x
38. Silver, A. (1975). Beta: Up, Down, and Sideways. *The Journal of Portfolio Management*, 1(4), 54–60. doi:10.3905/jpm.1975.408534
39. Silverman, B. W. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. CRC Press. Monographs on Statistics and Applied Probability, 26. doi:10.1007/978-1-4899-3324-9
40. Treynor, J. L. (1962). Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. R. Korajczyk (Ed.), *Asset Pricing and Portfolio Performance*. London: Risk Books. 1999
41. Tsallis, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2), 479–487. doi:10.1007/BF01016429
42. Turlach, B. A. (1993). Bandwidth selection in kernel density estimation: A review. Université catholique de Louvain. doi:10.1.1.44.6770
43. Usta, I. & Kantar, Y. M. (2011). Mean-variance-skewness-entropy measures: a multi-objective approach for portfolio selection. *Entropy*, 13(1), 117–133. doi:10.3390/e13010117

44. Wachowiak, M. P., Smolikova, R., Tourassi, G. D. & Elmaghraby, A. S. (2005). Estimation of generalized entropies with sample spacing. *Pattern Analysis and Applications*, 8(1-2), 95–101. doi:10.1007/s10044-005-0247-4
45. Xu, J., Zhou, X. & Wu, D. D. (2011). Portfolio selection using λ -mean and hybrid entropy. *Annals of operations research*, 185(1), 213–229. doi:10.1007/s10479-009-0550-3
46. Zhou, R., Cai, R. & Tong, G. (2013). Applications of entropy in finance: a review. *Entropy*, 15(11), 4909–4931. doi:10.3390/e15114909

ENTROPY AS FINANCIAL RISK MEASURE

This paper investigates entropy as a novel financial risk measure. We show that differential entropy of the daily returns of single assets and portfolios can capture their risk premium. Entropy gains more accurate estimation on expected return with simpler methodology compared to the Capital Asset Pricing Model (CAPM) beta. Our analysis show that the diversification effect can be captured in entropy: increasing number of assets involved into a portfolio decreasing risk; furthermore, in an entropy – expected return system diversification generates a hyperbolic disposition of portfolios similarly to variance. In our empirical investigation, we use the daily log-returns of 150 randomly selected stocks from the Standard & Poor's 500 index components for a 25 years long period. The regression analysis yields that entropy as a financial risk measure generates higher explanatory power on expected returns than variance or CAPM beta.

Keywords: entropy; asset pricing; risk estimation; systematic risk *JEL:* G12; C58