

# NÉHÁNY SZEMÉLYES HANGVÉTELŰ EMLÉKÜNK BENOÎT MANDELBROT RÓL ÉS A FRAKTÁLOKRÓL

## SOME PERSONAL MEMORIES OF BENOÎT MANDELBROT AND THE FRACTALS

Vicsek Mária<sup>1</sup>, Vicsek Tamás<sup>2</sup>

<sup>1</sup>címzetes egyetemi docens, Budapesti Corvinus Egyetem Adatelemzés és Informatika Intézet, Budapest

<sup>2</sup>az MTA rendes tagja, professor emeritus, ELTE TTK Fizikai Intézet, Budapest

vicsekt@gmail.com

### ÖSSZEFOGLALÁS

Benoît Mandelbrot (1924–2010) születésének 100. évfordulóján felidézzük néhány személyes találkozásunkhoz kötődő emlékeinket. A „fraktálok atyja” a munkásságán keresztül megismert csodás természeti objektumokhoz hasonlóan igen komplex személyiség volt. Nagy rajongója volt a művészeteknek, kíváncsi volt a magyar történelem egyik periódusára, időnként csatákat vívott a multifraktálokról beszélő előadókkal, de arról is szó lesz, hogy milyen kellemes délutánt töltöttünk el nála, amikor barátságos otthonában vendégül látott minket.

### ABSTRACT

On the 100th anniversary of the birth of Benoît Mandelbrot (1924–2010), we recall some of our personal encounters. The “father of fractals” was a complex man, similarly to the wonderful natural objects we have come to know through his work. He was a great fan of the arts, curious about a period of Hungarian history, occasionally engaged in battles with speakers about multifractals, but we will also talk about the pleasant afternoon we spent with him when he hosted us in his friendly home.

**Kulcsszavak:** multifraktálok, művészetek, budapesti konferencia, Yale University, vendégségben Mandelbrotéknál

**Keywords:** multifractals, arts, conference in Budapest, Yale University, visiting the Mandelbrots

*Vicsek Tamás:* Személyesen 1987 januárjában találkoztam először Benoît Mandelbrot professzorral. Azért tudom az évet beazonosítani, mert különlegesen kemény tél volt akkor, sok hóval. Ugyanakkor, ez valahogy mégse jelentett komoly akadályt, fűtött minket a fraktálok iránti lelkesedés: Mandelbrotot mint a széles körben csak „a fraktálok atyjának” (father of fractals) nevezett, óriási formátumú tudóst (1. ábra), engem mint a fraktálok komplex szépségére rácso-

dálkozó kutatót.<sup>1</sup> Mandelbrot egyébként fizikai megjelenésében is nagy formátumú volt, én meg alacsony és vékony vagyok, szóval kicsit olyan benyomást kelthettünk, mint Stan és Pan. Mindenesetre nagy szerencsém volt, Marx György professzor, aki meghívta és vendégül látta a világhírű kollégát, kiderítette, hogy személyemben van egy hazai fizikus, aki bizonyára örömmel bevállalja, hogy egy napig kísérgeti a jeles vendéget. Így is történt.



1. ábra. Benoît Mandelbrot egy 1997-ben készült fényképen

*Forrás:* Mandelbrot emlékdala<sup>2</sup>

<sup>1</sup> A fraktálok olyan bonyolult geometriai alakzatok, amelyek nem írhatóak le egész számú dimenzióval, innen (a latin *fractio* – töredék szó felhasználásával) ered, hogy azt mondjuk: fraktál dimenzióval jellemezhető. Ebből következik, hogy egy adott dimenziójú térbe ágyazott fraktál annak csak elhanyagolhatóan kis (matematikai határesetben nulla) hányadát tölti ki. Ezzel a tulajdonsággal jár különös esztétikai megjelenésük is, amelyet az önhasonlóság kifejezéssel szokás jellemezni. Egy alhalmaza a térnek akkor önhasonló, ha egy tetszőlegesen kiragadott kis részét a teljes halmazra felnagyítva visszakapjuk az eredeti halmazt, vagy egy azzal statisztikai tulajdonságait tekintve megegyező objektumot. Nyilvánvalóan, ez nincs így egyszerű formákra (például egy körvonal picit része egy majdnem egyenes vonalhoz hasonlít), azonban egy bonyolult, ágas-bogas alakzatra már igaz lehet. Egyszerű példaként a fákat szokás említeni, amelyeknek, ha letörjük egy nagy ágát, függőleges helyzetbe hozzuk, és felnagyítjuk, akkor egy az eredeti fához igen hasonló formához jutunk. A hivatkozott URL1 és URL2 szép példákat mutat be fraktálokra.

<sup>2</sup> <https://users.math.yale.edu/mandelbrot/>.

Az a havas nap maradandó élmény volt. Úgy indult, hogy Benoît közölte, ő most elsősorban a Szépművészeti Múzeumba menne, mert kikereste, hogy Rubens és Goya néhány eredeti festménye is ott van nálunk, és akkor már a többi kincsünket is szívesen megtekintené. Ez könnyű menet volt. A fraktálokhoz engem is nagyban vonzott az általuk jelentett esztétikai élmény, valamint a múzeumtól 600–700 méterre növe fel, sokat jártam benne, szerettem ott nézelődni.

A nap másik fő programjának terve azonban kissé sokkoló élményt okozott, Mandelbrot közölte, hogy tudomása szerint aznap este egy igen színvonalas produkció lesz az Erkel Színházban, ahol a *Figaro házasságát* fogják előadni. Édesapám nagy operarajongó volt, de én ebből egy szemernyit sem örököltem, és amikor ebédszünetre különváltunk, attól tartva értem haza, hogy este nagyon komoly problémát fog okozni, ha Benoît mellett ülve elalszom. Am előbb jegyet is kellett szerezni! Talán épp az utolsó pillanatban mondhatta le valaki, de úgy alakult, hogy végül az első sorban ültünk, és végig rendkívül élveztem a valóban nagyszerű előadást.

*Vicsek Mária:* 1988 augusztusában Mandelbrot professzor meghívására négy hónapot töltöttünk a Yale Egyetemen. Itthon már nagy változások kezdődtek, közeledett a „rendszerátalakítás”. Érdekes, hogy éppen akkor volt ott az egyetemen néhány olyan magyar honfitársunk, aki a következő években aktív szereplője lett az alakuló új magyar rendszernek. Találkoztunk Illés Zoltánnal, ő szerzett szállást a családuknak. Ott volt a jogász Varga Csaba, és a nem politikusként, de fontos közéleti szereplővé vált Vámos Miklós író is.

Érkezésünk tájékán Mandelbrot éppen titkárnő nélkül maradt, így szerencsémre napi pár órára megkaptam e nemes feladatot. A titkárnő botrányosan távozatott, mert hihetetlen káoszt találtam a prof kis irodájában. Bontatlan levelek fiókok mélyén. A polcon rengeteg CD teljes összevisszaságban. A számítógépen fájlok minden rendszerezés nélkül. Mandelbrot nem adott utasítást vagy magyarázatot, hogy mit vár. Időnként bejött és körülnézett. Elcsodálkozott a renden, talán még valami rövid dicséretet is mormolt. Rögtön első napomon kezembe nyomott egy kinyomtatott cikket, hogy sürgősen csináltassak róla néhány másolatot. Fogalmam sem volt, hogy melyik épületben keressem a *Xeroxot*, különösen hogy azt az itthon akkor szokásos szóhasználattal szemben „copy machine”-nak hívták (és nem a hozzánk először elkerült másológépek gyártója után nevezték el). Persze némi bolyongás után találtam valakit, aki megmutatta a helyet (csak utána vissza kellett találnom az irodába).

Egy délután áthívtott látogatóba a gyerekeinkkel együtt (András 12, Lilla 14 éves volt). Egy magas, tágas, puritán berendezésű nappaliban kis, kerek asztalnál beszélgettünk (2. ábra). A falon selyemhímzések függtek képkeretben. Feleségével mindketten nagyon kedvesek voltak, a gyerekekkel is foglalkoztak. Aliette finom salátát és pudingot készített. Nostalgiaival említette, hogy két fiúgyermekük – Laurent és Didier – már felnőtt, és mindketten külföldön élnek. Kellemes élmény volt.



2. ábra. Vendégségben Mandelbrotéknál. Benoît, Alette, Mária, Tamás, Lilla, 1988

*Forrás: Vicsek András felvétele*

A másik szép emlék Mandelbrottal és a fraktálokkal kapcsolatban az 1993. augusztus 30. és szeptember 2. között Budapesten megrendezett *Fractals in Natural Sciences* konferencia, amelynek titkára lehettem. Ez a konferencia volt a fraktálokról szóló első konferencia, amelyet kifejezetten azzal a céllal szerveztek, hogy lehetővé tegye az olyan különböző tudományágak, mint az asztrofizika, a biológia, a kémia, a geofizika és a fizika felfedezéseinek, eredményeinek egyidejű megvitatását (3. ábra).

A konferenciakiadvány bevezetője szerint: „A fő célkitűzés az volt, hogy a legfrissebb eredmények és a különböző tudományterületek ismert szakértőinek összehozásával a komplex térbeli és időbeli viselkedésekkel kapcsolatos megközelítések és tudományos nézetek gyümölcsöző kölcsönhatására kerüljön sor. A magas színvonalú előadások, amelyek olyan témákban hangzottak el, mint a növekedési jelenségek, az önszerveződő kritikusság, a turbulencia, a biológiai és geofizikai mintaképződés, az iteratív függvények, a kolloid aggregáció és az inhomogén anyagok, valóban ösztönző interakciót eredményeztek a résztvevők között a találkozó során. Azt vártuk, hogy ez hasznos lesz a fraktáloknak a természeti jelenségek széles körében való jelenlétéből eredő közös elvek megtalálásában.”



**3. ábra.** Az 1993-as budapesti fraktálkonferencia minden résztvevője ilyen pólót kapott

*Forrás:* Vicsek András felvétele

A konferencia fő előadója és díszvendége Mandelbrot volt. Szervezői Macusita Micugu (Mitsugu Matsushita, Csuo [Chuo] Egyetem, Tokió, Japán), Michael F. Shlesinger (Office of Naval Research, USA) és Vicsek Tamás. A kor fraktálokkal foglalkozó legnevesebb kutatóinak döntő többsége eljött, sokan családotul. 210 kutató és diák vett részt a találkozón 23 országból. Megoldottuk, hogy a hazai kutatók és egyetemi hallgatók a hivatalos részvételi díj befizetése nélkül is látogathassák az előadásokat. A szünetekben a folyosón inspiráló, pezsgő beszélgetések folytak. Mandelbrot szívesen válaszolt mindenkinek, akkor is, ha valaki akár ismeretlenül odament hozzá. A konferencián bemutatott eredményekről két, 89 cikket tartalmazó kiadvány is megjelent: a *Fractals* folyóirat különszámában (*Fractals*, 1993), illetve a World Scientific kiadásában (Vicsek et al., 1994).

Különösen forró nyár volt, mint ahogy maga a fraktál témája is „forró” volt. A résztvevők a Budapesti Műszaki Egyetem Ménes utcai, szerényen felszerelt, klímaberendezés nélküli kollégiumában szálltak meg, az előadásokat is ott tartották. A meghívott előadók kóstolónak még finom, érett szilvát is kaptak. A szolid körülmények sem rontották el az emberek lelkes hangulatát. A problémákat igye-

keztünk minél gyorsabban megoldani. Például Mandelbrot hátfájása miatt ágyához szerezniünk kellett a puha matrac alá valami kemény, sima deszkát, ez végül egy asztallap lett. Mandelbrot az előadását is hátával egy íróasztalnak dőlve, állva tartotta. A plenáris előadásokat az első sor közepéről nagy figyelemmel követte. Előfordult, hogy odakiáltott az előadónak: „ezt már én megcsináltam!”. Élvezte és el is várta az őt körülvevő tiszteletet és figyelmet. Aktívan részt vett az eseményeken. Vitatkozott, sokat beszélgetett. A kirándulásra is eljött feleségével, szemmel láthatóan jól érezték magukat.

*Tamás:* A fraktálok kutatásának történetében Mandelbrot kétségtelenül meghatározó szerepet játszott. A teljes képhez azért hozzátartozik, hogy az általa fraktáloknak nevezett matematikai objektumokat már jóval előtte definiálták olyan nagy matematikusok is, mint például Georg Cantor vagy Felix Hausdorff. De míg a halmazelméletben ezek a komplex, a végtelen bonyolult módon végtelen kis részeket is tartalmazó objektumok a lehetséges halmazok különlegesen érdekes fajtáiként jelentek meg, addig Mandelbrot volt az, aki felfedezte – és itt a felfedezésnek talán a felismerés változata a használandó értelmezés –, hogy a tört dimenziójú objektumok valójában mindenféle gyakorlati helyzetben is megjelennek, ahogy ő írta: a fraktálok geometriája egyúttal a természet geometriája. A sok példa, amely említhető, rendkívül széles jelenséggört ölel át, a geomorfológiától kezdve a felhők cizellált peremén át az élőlények energia-háztartását biztosító érrendszerig.

Köztudomású, hogy Mandelbrot jelentős ambíciókat táplált felfedezésének elismerésével kapcsolatban. Ebből számos vicces vagy éppen konfliktusos helyzet is támadt. Kezdetből fogva lehetett tudni, hogy hiába szeretné, hogy felismerését Nobel-díjjal ismerjék el, erre – matematikai Nobel-díj híján – eleve nincs esélye. Sokan gondoltuk, hogy amikor a fraktálgeometria közgazdasági alkalmazása felé fordult, az is motiválhatta, hogy azon a tudományterületen létezik Nobel-díj. De nemcsak a díjak kontextusában keletkeztek prioritási kérdésekkel kapcsolatos konfliktusai. Valahogy azt szerette implikálni az előadásai során, hogy a fraktálokkal kapcsolatos összes fontos felfedezést ő már a kortársak előtt leírta, publikálta. Ezért volt például kiélezett a helyzet, amikor a multifraktálok kapcsán vitába keveredett egy jelentős kutatócsoporttal, amely a turbulens áramlás leírására vezette be a multifraktálok formalizmusát. Mandelbrot egy, az említett csoport előtt néhány évvel a turbulens áramlások kapcsán írt cikkére hivatkozva ragaszkodott a vonatkozó felfedezés terén való elsőbbségéhez, amelyre csak mint „az 1974-es cikk”-re („the 1974 paper”) szeretett hivatkozni. Ez egy kivételesen bonyolult publikációja volt, kevésbé letisztult következtetésekkel. Ezért is voltak feszült, amolyan „meghült bennünk a vér” pillanatok, amikor egy konferencia során az akkor vele egy egyetemen – a Yale-en – dolgozó Katapalli Sreenivasan professzor a kísérleti eredményeiről azt állította, hogy azok jól leírhatóak azzal

a multifraktál formalizmussal, amelyet az „oroszk iskola” („Russian School”) már „az 1970-es cikkben” („in the 1970 paper”) publikált.

Érdekes volt a hírnévhez közvetve kapcsolódó más fejlemény is. Mandelbrot nagyon fontosnak tartotta, hogy ő találta ki a „fraktál” szót a környezetünkben előforduló komplex alakzatokra. Ezek között egy fizikus idővel rámutatott a fraktálokra egy olyan speciális változatára, amelyek a térben nem valamiféle, azt elhanyagolható mértékig kitöltő halmazok (mint amilyenek a fraktálok általában), hanem a fraktálokhoz hasonlóan komplexek, de ettől még a térnek véges hányadát kitöltik a végtelen kicsi méretek ellenére is. Ezeket Doyne Farmer professzor ezért „kövér fraktálokra” (fat fractals) nevezte el. Erről Mandelbrot komoly csalódással és helytelenítéssel beszélt nekem, mert úgy gondolta, hogy a névadás nagyon fontos aspektusa a terület sikerességének, ő a fraktál szó bevezetésével jelentős hozzájárulást tett, és egyébként is, a kapcsolódó elnevezések privilégiuma őt illeti. Igaza lehetett abban, hogy ha sikerül szerencsés szavakat találni egy tudományág terén, akkor az így megeremtett nyelvi környezet segít a gondolatok kisugárzásában.

Nemcsak a természetben általa beazonosított halmazok geometriája volt komplikált, hanem Mandelbrot gondolkodásmódja is, a legkülönfélébb kontextusokban. Amikor Atlantában voltam vendégkutató egy évig, azt követően, hogy előtte négy hónapig Mandelbrot munkatársa voltam New Havenben, egy közös kéziratunkon dolgoztunk. Így rendszeresen konzultáltunk – volna – róla, de a telefonbeszélgetéseink általában hamar átalakultak a magyar történelem egyes részleteinek tárgyalásává. Különösen sokat kérdezett a kiegyezés korszakáról, olyannyira, hogy egy ponton megkérdeztem, hogy mi az eredője ennek a fraktálokhoz (és különösen a készülő cikkünkhöz!) semennyire sem kapcsolódó kérdéskörnek. Nos, mondta, akkor a magyarok valamit nagyon jól csináltak, sikerült elérniük egy számukra kedvező megoldást egy bonyolult történeti helyzetben. Értetlenkedtem, de lassan csak-csak megértettem, bár nem pontosan így mondta el, de azt fejtegette, hogy a történelem sikeres fejezeteiből azt is megtanulhatja az ember, hogy ő maga miként lehet minél sikeresebb.

Mandelbrot kapcsán mindenképpen fontos megemlíteni, hogy ő fedezte fel a róla elnevezett halmazt, amely egészen egyedülálló bonyolultságával varázslatosan szép ábrák és videók készítését is lehetővé teszi. Amellett, hogy az eltelt évek során sokan gyönyörködhetnek a vonatkozó ábrázolásokban, a történet kutatásokkal kapcsolatos tanulságot is tartalmaz. A felfedezés lényege az volt, hogy az a formula, amely végtelenül gazdag alakzatokhoz vezet, valójában nagyon egyszerű! Ugyanakkor a halmaznak ezt a komplexitását csak akkor lehet felismerni, ha a tulajdonságait nagy alaposággal, a vizuális és matematikai részletek iránti rendkívüli érdeklődéssel, képességekkel és igényességgel megáldva vizsgálja valaki. Olyannyira, hogy valójában a Mandelbrot-halmaz első változatát már pár évvel Mandelbrot előtt egy matematikus „legyártotta” (és idővel nekem is megküldtek egy másolatot belőle). Az a kolléga még egy akkor épp kifutóban lévő

mátrixnyomtatót használt, érdekesnek találta a formula által generált, egymáson látható néhány almára emlékeztető pacát, csak éppen a valódi bonyolultságot nem lát(hat)ta – és így ténylegesen nem született izgalmas felismerés – az elnagyolt, részletekben szegény kiprintelt ábrán.

A Mandelbrot-halmaz a vizuális művészek közül is sokakat megihletett, az American Mathematical Society honlapján számos érdekes példa van erre (URL1). Különösen lenyűgözőek a végtelen sok (és ezt itt szó szerint lehet érteni) részletet fokozatosan feltáró, egy, a halmaz melletti pont környezetében látható gazdag, változó mintázatokra növekvő mértékben ráfókuszáló videók (a sok közül csak egy példa: URL2).

Az tehát, hogy a fraktálok kutatása két évtizeden át jelentős kutatási irány lett a tudományok világában, nagyban betudható Mandelbrot alaposságának, a komplex jelenségek iránti mély érdeklődésének és kitartó, fáradhatatlan kutatási tevékenységének. Ő tanított meg minket arra, hogy ha „körbenézünk” (az utcán, a mikroszkópba vagy a távcsövekbe tekintve), akkor a körök, egyenesek, háromszögek helyett meglássuk a csodálatos fraktálokat (4. ábra).



**4. ábra.** A házunkból kilépve máris fraktálokat láthatunk: ez a faág-rengeteg jó példa a fraktálgeometriára

*Forrás:* Vicsék Tamás felvétele



## IRODALOM

- [Proceedings of the conference on *Fractals in Natural Sciences*] (1993): *Fractals* 1, 3, DOI: 10.1142/S0218348X93001246; 1, 4, DOI: 10.1142/S0218348X93001222
- Vicsek Tamás – Shlesinger, Michael – Matsushita, Mitsugu (eds.) (1994): *Fractals in Natural Sciences*. Singapore: World Scientific. [www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789814503792\\_fmatter](http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789814503792_fmatter)
- URL1: American Mathematical Society, *Fractal Art: Beauty and Mathematics*, [www.ams.org/publicoutreach/math-imagery/mandelbrot](http://www.ams.org/publicoutreach/math-imagery/mandelbrot)
- URL2: Mathigon, *Mandelbrot Zoom Sequence*, [www.youtube.com/watch?v=b005iHf8Z3g](http://www.youtube.com/watch?v=b005iHf8Z3g)