FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉKFELADATOK A MIKROÖKONÓMIÁBAN[1]

SZABÓ IMRE[2]
BKÁE Matematika Tanszék, Budapest

A mikroökonómiában mind a fogyasztási elmélet, mind a termelési elmélet a gazdasági szereplők viselkedését igen egyszerű szélsőértékfeladatokkal írja le. Ezeket a ma már klasszikusnak számító feladatokat már sokféleképpen megvizsgálták. Mindkét elméletben kétféle megközelítésben is megfogalmazták a problémát.

1 Bevezetés

A dolgozat a fogyasztók illetve a termelők viselkedésének a mikroökonómiában szokásos szélsőértékfeladatokkal való jellemzése hátterét vizsgálja. Ez egy igen régen vizsgált terület, sőt a graduális tananyag része is, ennek ellenére még nem teljesen kidolgozott. A dolgozat ezen terület széles körben ismert állításait (ún. néptételeit) gondolja újra, elsősorban Diewert [4] és [5] dolgozata alapján. Úgy igyekeztem elrendezni az állításokat és megfogalmazni a bizonyításokat, hogy jól látszódjon, miszerint egyrészt a kapott leképezések (például indirekt hasznossági függvény, költségvetési leképezés, keresleti leképezés) tulajdonságai a szélsőértékfeladatok függvényeinek milyen tulajdonságaiból következnek, másrészt mi a felhasznált matematikai eszközök (például a Berge-tétel) szerepe. Ennek során sikerült eléggé áttekinthető bizonyítást találni a költségvetési leképezés folytonosságára, amely általánosabb esetben is működik. Továbbra is nyitott kérdésnek mondható az értékfüggvény deriválhatóságának a problematikája, amelynek vizsgálata meghaladja e dolgozat kereteit.

Érdekes módon kétféle szélsőértékfeladattal is jellemezhetjük a fogyasztókat: egy maximum- és egy minimumfeladattal. Ezek a feladatok ugyanannak a dolognak két különböző, de teljesen egyenrangú megközelítései, amelyek egymáshoz való viszonya ismert. Azonban tudjuk, hogy a szélsőértékfeladatok általában is összetartozó párban jelennek meg. Az egyes problémák kellő matematikai kitisztázása után távolabbi cél lehet a mikroökonómia e két feladatának egymáshoz való viszonyát leírni, ezen viszony konvex analízisbeli hátterét megvilágítani. Mindezek ismeretében ezen feladatok közgazdasági értelmezése gazdagabbá és harmonikusabbá tehető majd.

---

[1] Beérkezett: 1998. október 7.

[2] A kutatást részben a Soros Alapítvány Belföldi Doktorandusz Ösztöndíj programja támogatta.

2 A haszonmaximalizálási feladat (Marshall-féle megközelítés)

Elsőként a haszonmaximalizálási feladatot, a Marshall-féle megközelítést tárgyaljuk. Ez a megközelítés azért is érdekes, mert az általános egyensúlyelmélet Arrow-Debreu modeljében ennek a feladatnak egy általánosításával írják le a fogyasztók magatartását. Az egyensúly létezésének, azaz a Kakutani fixponttétel alkalmazhatóságának a feltétele, a Berge-tételen keresztül, a költségvetési leképezés folytonossága. Ennek a bizonyítása tekinthető az elmélet legmunkásabb részének. Az alábbiakban a haszonmaximalizálási alapfeladat és az általánosított haszonmaximalizálási feladat költségvetési leképezésének a folytonosságát hasonló gondolatmenettel bizonyítjuk.

Legyen $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ adott függvény. Tekintsük a következő, $(\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpárral paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max \\ & \text{miközben } \langle p, x\rangle \le \mu \text{ és } x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned} \tag{1}$$

2.1 Definíció. *Az (1) feladatsereg* feltételi leképezés*ének nevezzük azt a $H : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén*

$$H(\mu, p) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle p, x\rangle \le \mu\}\,.$$

Ekkor az (1) feladatsereg a következő ekvivalens alakba írható:

$$\begin{aligned} & f(x) \to \max \\ & \text{miközben } x \in H(\mu, p) \end{aligned}$$

2.2 Definíció. *Az (1) feladatsereg* megoldásleképezés*ének nevezzük azt az $\mathcal{X} : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$, halmazértékű leképezést, amelyre $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpár esetén*

$$\mathcal{X}(\mu, p) := \mathrm{argmax}_{H(\mu,p)} f\,.$$

Amennyiben $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $\mathcal{X}(\mu, p) \ne \emptyset$, akkor az $\mathcal{X}$ halmazértékű leképezés egy $\chi : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ szelekcióját az (1) feladatsereg egy megoldásfüggvény*ének nevezünk.*

2.3 Definíció. *Az (1) feladatsereg* értékfüggvény*ének azt az $f^\vee : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt nevezzük, amelyre*

$$f^\vee(\mu, p) := \sup_{H(\mu,p)} f\,.$$

Ha létezik $\chi : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ megoldásfüggvénye a feladatseregnek, akkor $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $f^\vee(\mu, p) = f(\chi(\mu, p))$, így $f^\vee = f \circ \chi$.

2.4 Megjegyzés. Az értékfüggvény segítségével a megoldásleképezés a következőképpen is megadható: $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpár esetén

$$\mathcal{X}(\mu, p) = \{x \in H(\mu, p) : f(x) = f^\vee(\mu, p)\}\,.$$

2.5 Megjegyzés. A fogyasztási elméletben a fentieket a következőképpen interpretálhatjuk: Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl, hogy egy fogyasztónak van egy fogyasztási halmaza, ez legyen $\mathbb{R}^n_+$. Jelölje $x \in \mathbb{R}^n_+$ a fogyasztási javaknak, $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ pedig ezen fogyasztási javak árainak vektorát. A fogyasztó rendelkezik egy $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel, valamint $\mu \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+$ nagyságú jövedelemmel. A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát úgy határozza meg, hogy maximalizálja az $f(x)$ hasznosságát a $\langle p, x\rangle \leq \mu$ költségvetési feltétel mellett. Ekkor az (1) feladatot *haszonmaximalizálási feladatnak*, a $H : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezést *költségvetési leképezésnek*, az $\mathcal{X} : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezést *Walras- illetve Marshall-féle* vagy *közönséges verseny keresleti leképezésnek*, az $f^\vee : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvényt *indirekt hasznossági függvénynek* nevezzük.
A későbbi (4) feladattal ellentétben az (1) feladatnak nincs interpretációja a termelési elméletben, mert a profitmaximalizálási feladat más szerkezetű.

2.6 Definíció. *Az (1) feladatban μ-vel osztva, $\frac{p}{\mu}$ helyett p-t írva, a feladatnak a következő módosítását kapjuk:*

$$\begin{aligned} &f(x) \to \max \\ &\text{miközben } \ \langle p, x\rangle \leq 1 \ \textit{és} \ x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned} \tag{2}$$

A (2) feladatsereg feltételi leképezése *az a $\hat{H} : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezés, amelyre $\forall\ p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén*

$$\hat{H}(p) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle p, x\rangle \leq 1\}\,.$$

A (2) feladatsereg megoldásleképezése *az az $\hat{\mathcal{X}} : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ halmazértékű leképezés, amelyre $\hat{\mathcal{X}}(p) := \mathrm{argmax} f|_{\hat{H}(p)}$. A (2) feladatsereg* értékfüggvénye *az az $\hat{f}^\vee : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, amelyre*

$$\hat{f}^\vee(p) := \sup f|_{\hat{H}(p)} = \sup\{f(x) : \langle p, x\rangle \leq 1 \ \textit{és} \ x \in \mathbb{R}^n_+\}\ .$$

Ha létezik $\chi : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ megoldásfüggvénye e feladatseregnek, akkor $\hat{f}^\vee(p) = f(\chi(p))$, így $\hat{f}^\vee = f \circ \chi$.

2.1 A feltételi (költségvetési) leképezés tulajdonságai

2.7 Állítás. *A (2) feladatsereg $\hat{H} : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ feltételi leképezése*

(1) konvex, kompakt értékű,

(2) lokálisan Lipschitz-folytonos a Hausdorff-metrikára nézve, így Hausdorff-folytonos, ezért

(3) Vietoris-folytonos leképezés.

Bizonyítás. (1) A $\hat{H}$ nyilván konvex és zárt értékű. Belátjuk még, hogy korlátos értékű. Legyen $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott, ekkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy $\forall\ k = 1, \dots, n$ esetén $p_k \geq \alpha$. Legyen $x \in \hat{H}(p)$ tetszőleges, ekkor egyrészt $x \in \mathbb{R}^n_+$, másrészt

$$1 \geq \langle p, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k \geq \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k = \|x\|_1 \geq \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|,$$

azaz $\|x\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$, jelölje $\mathcal{K} := \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$, ekkor $\|x\| \leq \mathcal{K}$. Ezek szerint a $\hat{H}(p)$ halmaz korlátos. Mivel egy zárt halmaznak és egy zárt halmaz folytonos ősképének a metszete, azért zárt is, így kompakt.

(2) Legyen $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott, ekkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy $\forall\ k = 1, \dots, n$ esetén $p_k \geq \alpha$, ezért $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ q \in B(p, \delta)$ mellett $\forall\ k = 1, \dots, n$ esetén $p_k \geq \frac{\alpha}{2}$.

A $B(p, \delta)$ halmazon a $\hat{H}$ egyenletesen korlátos. Valóban: Legyen $q \in B(p, \delta)$ tetszőleges. Legyen $x \in \hat{H}(q)$, ekkor egyrészt $x \in \mathbb{R}^n_+$, másrészt

$$1 \geq \langle q, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} q_k \cdot x_k \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{2} \cdot x_k = \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{\alpha}{2}\|x\|_1 \geq \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|,$$

azaz $\|x\| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}$, jelölje $\mathcal{K} := \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}$, ekkor $\|x\| \leq \mathcal{K}$. Legyenek $q_1, q_2 \in B(p, \delta)$. Belátjuk, hogy ha az $x_1 \in \hat{H}(q_1)$, akkor az $x_2 := \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1 \in \hat{H}(q_2)$. Ugyanis: Legyen $x_1 \in \hat{H}(q_1)$, ekkor egyrészt $x_1 \in \mathbb{R}^n_+$, másrészt $\langle q_1, x_1\rangle \leq 1$, így $\langle q_2, x_1\rangle = \langle q_1, x_1\rangle + \langle q_2 - q_1, x_1\rangle \leq 1 + \|q_2 - q_1\| \cdot \|x_1\| \leq 1 + \mathcal{K}\|q_2 - q_1\|$, ezért az $x_2 = \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1$ esetén $\langle q_2, x_2\rangle = \langle q_2, \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1\rangle = \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|}\langle q_2, x_1\rangle \leq 1$.

Végül belátjuk, hogy $\forall q_1, q_2 \in B(p, \delta)$ esetén

(a) $\hat{H}(q_1) \subset B(\hat{H}(q_2), \mathcal{K}^2\|q_2 - q_1\|)$,
(b) $\hat{H}(q_2) \subset B(\hat{H}(q_1), \mathcal{K}^2\|q_2 - q_1\|)$,
(c) ezért $d_H(\hat{H}(q_2), \hat{H}(q_1)) \leq \mathcal{K}^2\|q_2 - q_1\|$.

(a) Legyen $x_1 \in \hat{H}(q_1)$ tetszőleges, ekkor a fentiek szerint egyrészt az $x_2 := \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1 \in \hat{H}(q_2)$, másrészt $\|x_1 - x_2\| = \|x_1 - \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|} \cdot x_1\| = |1 - \frac{1}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|}| \cdot \|x_1\| \leq \frac{\mathcal{K}\|q_2-q_1\|}{1+\mathcal{K}\|q_2-q_1\|}| \cdot \mathcal{K} \leq \mathcal{K}^2\|q_2 - q_1\|$.

A (b) fordított szereposztással adódik, míg a (c) ezekből következik.

Ezek szerint a $\hat{H}$ halmazértékű leképezés a $B(p, \delta)$ környezetben Lipschitz-Hausdorff-folytonos, így az $\mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ halmazon lokálisan Lipschitz-Hausdorff-folytonos, ezért Hausdorff-folytonos.

(3) Következik (2)-ből. □

2.8 Állítás. *A (1) feladatsereg* $H : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *feltételi (költségvetési) leképezése*

(1) konvex, kompakt értékű,

(2) lokálisan Lipschitz-folytonos a Hausdorff-metrikára nézve, így Hausdorff-folytonos,

(3) Vietoris-folytonos leképezés.

Bizonyítás. Egyrészt látható, hogy $H = \hat{H} \circ \mathrm{frac}$, ahol $\mathrm{frac} : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, amelyre $\mathrm{frac}(\mu, p) = \frac{p}{\mu}$. Másrészt $\hat{H}$ az előző állítás szerint lokálisan Lipschitz-folytonos a Hausdorff-metrikára nézve, a frac függvény lokákisan Lipschitz-folytonos, azért a kompozíciójuk azaz a H halmazértékű leképezés, konvex és kompakt értékű lokálisan Lipschitz-Hausdorff-folytonos, ezért Hausdorff- folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés. □

2.9 Megjegyzés. A fenti állítás alapvetően fontos, mert a Berge-tétel alapján ezen múlik mind a megoldásleképezés felső-Vietoris-folytonossága, mind az értékfüggvény folytonossága.

2.2 A megoldásleképezés tulajdonságai

Az (1) feladatsereg megoldásleképezése (keresleti leképezése) a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

2.10 Állítás.

(1) Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor $\mathcal{X} : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ felső-Vietoris-folytonos.

(2) Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény kvázikonkáv, akkor $\mathcal{X} : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}_{conv}(\mathbb{R}^n_+)$ konvex értékű, azaz $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $\mathcal{X}(\mu, p) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ konvex halmaz.

(3) Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan kvázikonkáv, akkor $\mathcal{X}$ értékei egyelemű halmazok, azaz $\mathcal{X} = \chi : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ függvény, azaz $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $\exists!\ \chi(\mu, p)$ megoldása az (1) feladatnak.

Bizonyítás. (1) Mivel a $H : \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ kompakt halmazértékű, Vietoris-folytonos leképezés, azért ez következik a Berge-tételből.

(2) Mivel az f kvázikonkáv, azért $\forall\ (\mu, p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpár esetén $f^{-1}([f^{\vee}(\mu, p), \infty)) \subset \mathbb{R}^n_+$ konvex halmaz, ezért az

$$\mathcal{X}(\mu, p) = f^{-1}([f^{\vee}(\mu, p), \infty)) \cap \mathbb{R}^n_+ \cap \langle p, . \rangle^{-1}(-\infty, \mu]$$

halmaz is konvex.

(3) Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\mathcal{X}(\mu, p)$ megoldáshalmaz több pontból áll, legyen $x_1, x_2 \in \mathcal{X}(\mu, p)$. Mivel (2) szerint az $\mathcal{X}(\mu, p)$ halmaz konvex, azért $\forall\ \lambda \in (0, 1)$ esetén $\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2) \in \mathcal{X}(\mu, p)$, mivel f szigorúan kvázikonkáv, azért $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2)) > \min\{f(x_1), f(x_2)\}$, ami ellentmondás. □

2.3 Az értékfüggvény tulajdonságai

Az (1) feladatsereg $f^\vee : \mathrm{int}I\!\!R_+ \times \mathrm{int}I\!\!R^n_+ \to \overline{I\!\!R}$ értékfüggvénye (indirekt hasznossági függvénye) a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

2.11 Állítás.

(1) Ha az $f : I\!\!R^n_+ \to I\!\!R$ függvény folytonos, akkor $f^\vee : \mathrm{int}I\!\!R_+ \times \mathrm{int}I\!\!R^n_+ \to \overline{I\!\!R}$ véges és folytonos.

(2) Ha az $f : I\!\!R^n_+ \to I\!\!R$ függvény monoton növekedő, akkor

(a) $\forall p \in \mathrm{int}I\!\!R^n_+$ esetén $f^\vee(.,p) : \mathrm{int}I\!\!R^n_+ \to \overline{I\!\!R}$ monoton növekedő,

(b) $\forall \mu \in \mathrm{int}I\!\!R_+$ esetén $f^\vee(\mu,.) : \mathrm{int}I\!\!R_+ \to \overline{I\!\!R}$ monoton csökkenő.

(3) Az $f^\vee : \mathrm{int}I\!\!R_+ \times \mathrm{int}I\!\!R^n_+ \to \overline{I\!\!R}$ függvény kvázikonvex. (A (3) tulajdonsághoz nincs szükség az $f : I\!\!R^n_+ \to I\!\!R$ függvény kvázikonkávitására.)

Bizonyítás. (1) Mivel a $H : \mathrm{int}I\!\!R_+ \times \mathrm{int}I\!\!R^n_+ \to \mathcal{P}(I\!\!R^n_+)$ kompakt halmazértékű, Vietoris-folytonos leképezés, azért ez következik a Berge-tételből.
(2) (a) Legyen $p \in \mathrm{int}I\!\!R^n_+$ tetszőleges adott. Ha $\mu_1 \le \mu_2$, akkor $(-\infty,\mu_1] \subset (-\infty,\mu_1]$ ezért $\langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,\mu_1] \subset \langle p,.\rangle^{-1}(-\infty,\mu_2]$ így $H(\mu_1,p) \subset H(\mu_2,p)$, mivel az f monoton növekedő, azért $f^\vee(\mu_1,p) = \sup_{H(\mu_1,p)} f \le \sup_{H(\mu_2,p)} f = f^\vee(\mu_1,p)$.
(b) Legyen $\mu \in \mathrm{int}I\!\!R^+$ tetszőleges adott. Ha $p_1 \le p_2$, akkor $\langle p_2,.\rangle^{-1}(-\infty,\mu] \subset \langle p_1,.\rangle^{-1}(-\infty,\mu]$, ugyanis ha valamely $x \in I\!\!R^n_+$ esetén $\langle p_2,x\rangle \le \mu$, akkor $\langle p_1,x\rangle \le \mu$, (ha $p_1 < p_2$, akkor is csak $\le$-ség van,) így $H(\mu,p_2) \subset H(\mu,p_1)$, mivel az f monoton növekedő, azért $f^\vee(\mu,p_1) = \sup_{H(\mu,p_1)} f \ge \sup_{H(\mu,p_2)} f = f^\vee(\mu,p_2)$.
(3) Be kell látni, hogy $\forall\alpha \in I\!\!R$ esetén az $(f^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha] \subset I\!\!R^n_+$ konvex. Legyenek (μ_1,p_1), $(\mu_2,p_2) \in (f^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha]$, azaz $f^\vee(\mu_1,p_1)$, $f^\vee(\mu_2,p_2) \le \alpha$ tetszőlegesek, legyen $\lambda \in (0,1)$ tetszőleges.
Legyen $(\mu,p) := (\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)$. Be kell látni, hogy $(\mu,p) \in (f^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha]$. Legyen $x \in H(\mu,p)$ tetszőleges, azaz

$$\lambda\langle p_1,x\rangle + (1-\lambda)\langle p_2,x\rangle \le \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 \ .$$

Ekkor $\langle p_1,x\rangle \le \mu_1$ vagy $\langle p_2,x\rangle \le \mu_2$. Ugyanis, indirekt módon tegyük fel, hogy $\langle p_1,x\rangle > \mu_1$ és $\langle p_2,x\rangle > \mu_2$, ekkor mivel $\lambda, (1-\lambda) > 0$, azért $\lambda\langle p_1,x\rangle + (1-\lambda)\langle p_2,x\rangle > \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$, ami ellentmondás.
Ha $\langle p_1,x\rangle \le \mu_1$, akkor $f(x) \le f^\vee(\mu_1,p_1) \le \alpha$, ha $\langle p_2,x\rangle \le \mu_2$, akkor $f(x) \le f^\vee(\mu_2,p_2) \le \alpha$, ezért $f(x) \le \alpha$. Ez igaz $\forall\ x \in H(\mu,p)$ estetén, azért $f^\vee(\mu,p) \le \alpha$, azaz $(\mu,p) \in (f^\vee)^{-1}(-\infty,\alpha]$. □

2.4 A haszonmaximalizálási feladat általánosítása

Az általános egyensúlyelmélet Arrow-Debreu modelljében a fogyasztókat leíró haszonmaximalizálási feladat a fenti (1) feladatnál valamivel általánosabban van megfogalmazva. Nem azt teszik fel, hogy a fogyasztási halmaz $\mathbb{R}^n_+$, hanem azt, hogy az $\mathbb{R}^n$-nek egy konvex és zárt részhalmaza. A kompaktságot direkt módon nem kell feltenni, mert egy ügyes trükkel, a releváns allokáció fogalmának a bevezetésével el lehet érni, hogy az egyensúly szempontjából szóbajöhető pontok halmaza egy rögzített kompakt halmazban legyen benne.

Az alábbiakban legyen X Banach-tér (speciálisan ez szokásosan $\mathbb{R}^n$). Legyen $M \subset X$ egy konvex, kompakt halmaz. Ezt tekintjük egy fogyasztó fogyasztási halmazának. Jelölje $x \in X$ a fogyasztási javaknak, $p \in X^*$ pedig ezen fogyasztási javak árainak vektorát. A fogyasztót egy $f : X \to \mathbb{R}$ hasznossági függvény jellemez. A fogyasztó jövedelme a következőkből áll: Egyrész rendelkezik egy $a \in X$ kezdőkészlettel, másrészt egy $h : X^* \to \mathbb{R}$ folytonos függvénnyel, ami megadja a termelők profitjából való részesedését, ezek alapján a jövedelme egy adott $p \in X^*$ ár esetén $p(a) + h(p)$ $(= \langle p, a\rangle + h(p))$.

A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát úgy határozza meg, hogy maximalizálja az $f(x)$ hasznosságát a $p(x) \leq p(a) + h(p)$ (azaz $\langle p, x\rangle \leq \langle p, a\rangle + h(p)$) költségvetési feltétel mellett.

A fogyasztó viselkedését a következő, $p \in X^*$ paraméterrel paraméterezett feladatsereg írja le:

$$\begin{aligned} &f(x) \to \max \\ &\text{miközben } \ x \in M \text{ és } p(x) \leq p(a) + h(p) \end{aligned} \tag{3}$$

2.12 Definíció. *Az (3) feladatsereg feltételi leképezésének (költségvetési leképezésének) nevezzük azt a* $H : X^* \to \mathcal{P}(X)$ *azt a halmazértékű leképezést, amelyre* $\forall\ p \in X^*$ *esetén*

$$H(p) := \{x \in M : p(x) \leq p(a) + h(p)\}\,.$$

Ekkor az (3) feladatsereg a következő ekvivalens alakba írható:

$$\begin{aligned} &f(x) \to \max \\ &\text{miközben } \ x \in H(p) \end{aligned}$$

2.13 Definíció. *Az (3) feladatsereg* megoldásleképezés*ének (keresleti leképezésének) nevezzük azt az* $\mathcal{X} : X^* \to \mathcal{P}(X)$ *halmazértékű leképezést, amelyre* $\forall\ p \in X^*$ *paraméter esetén*

$$\mathcal{X}(p) := \operatorname{argmax}_{H(p)} f\,.$$

Amennyiben $\forall\ p \in X^*$ *esetén* $\mathcal{X}(p) \neq \emptyset$*, akkor az* $\mathcal{X}$ *halmazértékű leképezés egy* $\chi : X^* \to X$ *szelekcióját az (3) feladatsereg egy* megoldásfüggvény*ének nevezünk.*

2.14 Megjegyzés. Az Arrow-Debreu elméletben az egyensúly létezéséhez, azaz a Kakutani-tétel alkalmazhatóságához be kell látni, hogy a keresleti leképezés felső-Vietoris-folytonos. Ez a Berge-tétel alkalmazásával a költségvetési leképezés Vietoris-folytonosságából következik. Ennek a bebizonyítása tekinthető az elmélet legmunkaigényesebb részének. Ennek során használjuk fel a pozitív kezdőkészletre (más néven létminimumra vagy döntési szabadságra) vonatkozó, viszonylag erősnek tekinthető, közgazdaságilag nehezen indokolható feltételt:

$$\forall\, p \in X^* \text{ árvektor esetén } \exists\, b_p \in X, \text{ hogy } p(b_p) < p(a) + h(p)\ .$$

Az alábbiakban az (3) feladatsereg H költségvetési leképezésének a Vietoris-folytonosságát az (1) feladatsereg H költségvetési leképezésének Vietoris-folytonosságához hasonlóan, a bizonyítás némi módosításával látjuk be.

2.15 Állítás. *Legyen* $\hat{H} : X^* \to \mathcal{P}(X)$ *az a halmazértékű leképezés, amelyre* $\forall p \in X^*$ *esetén* $\forall\, p \in X^*$ *esetén*

$$\hat{H}(p) = \{x \in M : p(x) \leq 1\}.$$

Tegyük még fel, hogy $\forall\, p \in X^*$ *esetén* $\exists\, b_p \in X$, *hogy* $p(b_p) < 1$. *Akkor* $\hat{H} : X^* \to \mathcal{P}(X)$ *nemüres, konvex és kompakt értékű, Hausdorff-folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\forall\, p \in X^*$ esetén $\tilde{H}(p) \neq \emptyset$, valamint konvex és kompakt halmaz.

Legyen $p \in X^*$ tetszőleges adott. Ekkor $\exists\, \alpha > 0$, hogy $p(b_p) < 1 - \alpha$, ezért $\exists\, \delta_1 > 0$, hogy $\forall\, q \in B(p, \delta_1)$ esetén $q(b_p) < 1 - \alpha$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Legyen $\mathcal{K} := \max_{x\in M} \|x\| + \mathrm{diam} M$. Legyen $0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}}$.

Mivel $\lim_{\delta\to 0+} \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1+\delta) = \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda) = 1 - \lambda\alpha < 1$, azért $\exists\, \delta_2 > 0$, hogy $\lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1+\delta_2) < 1$. Legyen $\delta_3 := \min\{\delta_1, \frac{\delta_2}{\mathcal{K}}\}$. Ekkor $\forall\, q_1, q_2 \in B(p, \delta_3)$ esetén $\forall\, x \in M$ mellett $|q_2(x) - q_1(x)| \leq \delta_2$, így $q_2(x) \leq q_1(x) + \delta_2$.

Legyenek $q_1, q_2 \in B(p, \delta_3)$ tetszőlegesek. Belátjuk, hogy ekkor $\forall\, x_1 \in \hat{H}(q_1)$ esetén az $x_2 := \lambda \cdot b_p + (1-\lambda) \cdot x_1$ vektorra

(a) $x_2 \in \hat{H}(q_2)$,
(b) $\|x_2 - x_1\| < \varepsilon$, ezért
(c) $x_1 \in B(\hat{H}(q_2), \varepsilon)$.

(a) Mivel az M halmaz konvex, azért $x_2 \in M$. Továbbá $q_2(x_2) = q_2(\lambda \cdot b_p + (1-\lambda) \cdot x_1) = \lambda \cdot q_2(b_p) + (1-\lambda) \cdot q_2(x_1) \leq \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(q_1(x_1) + \delta_2) \leq \lambda(1-\alpha) + (1-\lambda)(1+\delta_2) < 1$, azaz $q_2(x_2) < 1$, mivel $x_2 \in M$ is, azért $x_2 \in \hat{H}(q_2)$.
(b) $\|x_2 - x_1\| = \|\lambda \cdot b_p + (1-\lambda) \cdot x_1 - x_1\| = \|x_1 - \lambda \cdot (b_p - x_1) - x_1\| = \lambda\|b_p - x_1\| \leq \lambda \cdot \mathrm{diam} M < \frac{\varepsilon}{\mathcal{K}} \cdot \mathrm{diam} M < \varepsilon$.
(c) Következik (a) és (b)-ből.

Ezek szerint $\hat{H}(q_1) \subset B(\hat{H}(q_2), \varepsilon)$. A q_1 és q_2 szerepét felcserélve adódik, hogy $\hat{H}(q_2) \subset B(\hat{H}(q_1), \varepsilon)$. Ezért $\hat{H}(q_1)$ és $\hat{H}(q_2)$ Hausdorff-távolsága nem nagyobb ε-nál, ahonnan $q_2 = p$ választással adódik a $\hat{H}$ leképezésnek a p-beli Hausdorff-folytonossága. □

2.16 Állítás. *Tegyük fel, hogy* $\forall\, p \in X^*$ *árvektor esetén fennáll a pozitív kezdőkészlet feltétele:* $\exists\, b_p \in X$, *hogy* $p(b_p) < p(a) + h(p)$.

Akkor a (3) feladatsereg $H : X^* \to \mathcal{P}(X)$ költségvetési leképezése konvex és kompakt értékű, Hausdorff-folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés.

Bizonyítás. Egyrészt látható, hogy $H = \hat{H} \circ \frac{\mathrm{id}}{a+h}$, ahol $a : X^* \to \mathbb{R}$ az a lineáris leképezés, amelyre $\forall\ p \in X^*$ esetén $a(p) := p(a)$. Másrészt mivel $\hat{H}$ az előző állítás szerint konvex és kompakt értékű, Hausdorff-folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés, valamint az $\frac{\mathrm{id}}{a+h}$ folytonos függvény, azért a kompozíciójuk, azaz a H halmazértékű leképezés konvex és kompakt értékű, Hausdorff-folytonos, így Vietoris-folytonos leképezés. □

3 A költségminimalizálási feladat (Hicks-féle megközelítés)

Legyen $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ adott függvény. Tekintsük a következő, $(\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpárral paraméterezett feladatsereget:

$$\begin{aligned} &\langle p, x\rangle \to \min \\ &\text{miközben} \quad f(x) \geq \nu \text{ és } x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned} \tag{4}$$

3.1 Definíció. *Az (4) feladatsereg* feltételi leképezés*ének nevezzük azt a* $H : \mathcal{R}(f) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$, *halmazértékű leképezést, amelyre* $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ *esetén*

$$H(\nu, p) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ f(x) \geq \nu\}.$$

Megjegyzés: A $H(\nu, .)$ halmazértékű leképezés nyilván konstans.

Ekkor az (4) feladatsereg ekvivalens a következővel:

$$\begin{aligned} &\langle p, x\rangle \to \min \\ &\text{miközben} \quad x \in H(\nu, p) \end{aligned}$$

3.2 Definíció. *Az (4) feladatsereg* megoldásleképezés*ének nevezzük azt az* $\mathcal{X} : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$, *halmazértékű leképezést, amelyre* $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ *esetén*

$$\mathcal{X}(\nu, p) := \mathrm{argmin}_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle.$$

Tegyük fel, hogy $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $\mathcal{X}(\nu, p) \neq \emptyset$, ekkor az $\mathcal{X}$ halmazértékű leképezés egy $\chi : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ szelekcióját az (4) feladatsereg egy megoldásfüggvény*ének nevezünk.*

3.3 Definíció. *Az (4) feladat* értékfüggvény*ének azt az* $f^\wedge : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ *függvényt nevezzük, amelyre* $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ *esetén*

$$f^\wedge(\nu, p) := \inf_{H(\nu,p)} \langle p, .\rangle.$$

Ha létezik $\chi : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ *megoldásfüggvénye a feladatseregnek, akkor* $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ *esetén* $f^\wedge(\nu,p) = \langle p, \chi(\nu,p)\rangle$ *, így* $f^\wedge = \langle .,. \rangle \circ (pr_2, \chi)$.

3.4 Megjegyzés. Az értékfüggvény segítségével a megoldásleképezés a következőképpen is megadható: $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ paraméterpár esetén

$$\mathcal{X}(\nu,p) = \{x \in H(\nu,p) : \langle p,x\rangle = f^\wedge(\nu,p)\}.$$

3.5 Megjegyzés. A fentieket mind a fogyasztási elméletben mind a termelési elméletben interpretálhatjuk. A fogyasztási elméletben a fentieket a következőképpen interpretálhatjuk: Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl, hogy egy fogyasztónak van egy fogyasztási halmaza, ez legyen $\mathbb{R}^n_+$. Jelölje $x \in \mathbb{R}^n_+$ a fogyasztási javaknak, $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ pedig ezen fogyasztási javak árainak vektorát. A fogyasztó rendelkezik egy $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ hasznossági függvénnyel. A fogyasztó a fogyasztási javainak vektorát úgy határozza meg, hogy minimalizálja a $\langle p,x\rangle$ költségét, miközben legalább ν megkívánt hasznossági szintet ér el. A (4) feladatnak a korábbi (1) feladattal ellentétben a termelési elméletben is adható egy interpretációja. Tekintsünk egy gazdaságot, amelyben tegyük föl, hogy n input felhasználásával egyetlen outputot állítunk elő. A technológiát egy f termelési függvény írja le, ami azt jelenti, hogy egy adott periódus alatt az x n-dimenziós inputvektor felhasználásával legfeljebb $f(x)$ mennyiségű output állítható elő. A termelő úgy határozza meg az termelési tényezők inputvektorát, hogy minimalizálja a $\langle p,x\rangle$ költségét, miközben legalább ν mennyiséget termel. A fenti esetekben a (4) feladatot *költségminimalizálási feladatnak*, az $\mathcal{X} : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ megoldásleképezést *Hicks-féle* vagy *kompenzált keresleti leképezésnek*, az $f^\wedge : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvényt *kiadási-* vagy *feltételes költségfüggvénynek*, $\forall p$ esetén a $\partial_1 f^\wedge(.,p) : \mathcal{R}(f) \to \overline{\mathbb{R}}$ deriváltfüggvényt (feltéve, hogy ez létezik) *határköltségfüggvénynek* nevezzük.

3.1 A feltételi leképezés tulajdonságai

3.6 Állítás. *Az* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ *függvény pontosan akkor felülről félig folytonos, ha* $H : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$, *zárt gráfú.*

Bizonyítás. *Szükségesség:* Legyen az f felülről félig folytonos, és (ν_n, p_n, x_n) graph$H$-beli sorozat, azaz $\forall\ n$-re $f(x_n) \geq \nu_n$. Tegyük fel, hogy $(\nu_n, p_n, x_n) \to (\nu, p, x)$, ekkor $f(x) = f(\lim x_n) \geq \limsup f(x_n) \geq \lim \nu_n = \nu$, azaz $x \in H(\nu,p)$, azaz $(\nu,p,x) \in \mathrm{graph}H$.

Elégségesség: Mivel a H zárt gráfú, azért zárt értékű is, azaz az $f^{-1}[\nu,\infty)$ halmazok zártak, azaz az f felülről félig folytonos. □

3.7 Állítás. *Legyen az* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ *függvény felülről félig folytonos, ekkor* $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ *esetén* $\exists\ \mathcal{K} > 0$ *szám és* $\exists\ U \times B(p,\delta)$ *környezet, hogy*

1. $\forall\ (\mu,q) \in U \times B(p,\delta)$ *esetén* $\mathcal{X}(\mu,q) \subset H(\mu,q) \cap B(\mathbf{0},\mathcal{K})$;

2. *legyen* $\hat{H} : U \times B(p, \delta) \to \mathcal{P}(I\!R^n_+)$ *az a halmazértékű leképezés, amelyre* $\forall\ (\mu, q) \in U \times B(p, \delta)$ *esetén* $\hat{H}(\mu, q) := H(\mu, q) \cap \bar{B}(\mathbf{0}, \mathcal{K})$, *ekkor a* $\hat{H}$ *kompakt értékű, felső-Vietoris-folytonos leképezés;*

3. $\forall\ (\mu, q) \in U \times B(p, \delta)$ *esetén* $f^\wedge(\mu, q) = \inf_{H(\mu,q)}\langle q, .\rangle = \inf_{\hat{H}(\mu,q)}\langle q, .\rangle$,

4. $\forall\ (\mu, q) \in U \times B(p, \delta)$ *esetén* $\mathcal{X}(\mu, q) = \{x \in \hat{H}(\mu, q) : \langle q, x\rangle = f^\wedge(\mu, q)\}$.

Bizonyítás. 1. Legyen $(\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+$ tetszőleges adott. Ekkor $\exists\ \alpha > 0$, hogy $\forall\ k = 1, \dots, n$ esetén $p_k \geq \alpha$, ezért $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ q \in B(p, \delta)$ mellett $\forall\ k = 1, \dots, n$ esetén $q_k \geq \frac{\alpha}{2}$. A következő két eset lehetséges:

I. eset: $\exists\ x_0 \in I\!R^n_+$, hogy $f(x_0) > \nu$. Ebben az esetben legyen $U := (-\infty, \nu)$, ez környezete ν-nek.

II. eset: $\nu = \max \mathcal{R}(f)$, ekkor $\exists\ x_0 \in I\!R^n_+$, hogy $f(x_0) = \nu$. Ebben az esetben legyen $U := (-\infty, \nu]$, ez $\mathcal{R}(f)$-beli környezete ν-nek.

Legyen $(\mu, q) \in U \times B(p, \delta)$ tetszőleges. Ekkor egyrészt $x_0 \in H(\mu, q)$. Másrészt $\langle q, x_0\rangle \leq \|q\| \cdot \|x_0\| \leq (\|p\| + \delta) \cdot \|x_0\|$. Legyen $x \in \mathcal{X}(\mu, q)$ tetszőleges, ekkor $\langle q, x\rangle \leq \langle q, x_0\rangle$. A fentiek szerint

$$\frac{\alpha}{2}\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{2} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} q_k x_k = \langle q, x\rangle \leq \langle q, x_0\rangle \leq (\|p\| + \delta) \cdot \|x_0\|,$$

ezért $\|x\| \leq \mathcal{K} := \sqrt{2}\frac{2}{\alpha}(\|p\| + \delta)\|x_0\|$, azaz $\mathcal{X}(\nu, p) \subset B(\mathbf{0}, \mathcal{K})$. Ezek szerint $\mathcal{X}(\mu, q) \subset H(\mu, q) \cap \bar{B}(\mathbf{0}, \mathcal{K})$.

2. Mivel a H zárt gráfú, azért a $\hat{H}$ is az, valamint $\hat{H}$ értékei benne vannak egy adott kompakt halmazban, azért felső-Vietoris-folytonos, továbbá ugyanezért nyilván kompakt értékű.

3. Ez abból következik, hogy egyrészt 1. szerint $\forall\ (\mu, q) \in U \times B(p, \delta)$ esetén $\mathcal{X}(\mu, q) \subset \hat{H}(\mu, q)$, másrészt $f^\wedge(\mu, q) = f(\chi(\mu, q))$, ahol $\chi(\mu, q) \in \mathcal{X}(\mu, q)$.

4. A 3 megjegyzés szerint $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+$ paraméterpár esetén $\mathcal{X}(\nu, p) = \{x \in H(\nu, p) : \langle p, x\rangle = f^\wedge(\nu, p)\}$, így ez következik 3.-ból. □

3.8 Állítás. *Ha az* $f : I\!R^n_+ \to I\!R_+$ *függvénynek nincs lokális maximuma (például szigorúan monoton növekvő), akkor a* $H : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+ \to \mathcal{P}(I\!R^n_+)$, *leképezés alsó-Vietoris-folytonos.*

Bizonyítás. 1. Legyen $(\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}I\!R^n_+$ tetszőleges adott. Legyen $G \subset I\!R^n_+$ nyílt halmaz, amelyre $H(\nu, p) \cap G \neq \emptyset$, ekkor $\exists\ x \in H(\nu, p) \cap G$, azaz $f(x) \geq \nu$ és $x \in G$. Mivel az $f|_G$-nek x-ben nincs maximuma, azért $\exists\ y \in G$, hogy $f(x) < f(y)$. Ekkor $U := (0, f(y))$ környezete ν-nek, továbbá $\forall\ \mu \in U$ esetén $f(y) > \nu$, ezért $y \in H(\mu, p)$, ezért $y \in H(\mu, p) \cap G$, így $H(\mu, p) \cap G \neq \emptyset$, azaz $\forall\ \mu \in U$ esetén $H(\mu, p) \cap G \neq \emptyset$, azaz a $H(., p)$ leképezés alsó-Vietoris-folytonos ν-ben. Mivel a H leképezés p-ben konstans, azért a H leképezés alsó-Vietoris-folytonos (ν, p)-ben, mivel (ν, p) tetszőleges, azért az egész értelmezési tartományon. □.

3.2 A megoldásleképezés tulajdonságai

A (4) feladatsereg megoldásleképezése (keresleti leképezése) a következő tulajdonságokkal rendelkezik.

3.9 Állítás.

(1) Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény kvázikonkáv, akkor $\mathcal{X} : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}_{conv}(\mathbb{R}^n_+)$ konvex értékű, azaz $\mathcal{X}(\nu,p) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ konvex halmaz minden $(\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén.

(2) Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény szigorúan kvázikonkáv, akkor $\mathcal{X}$ értékei egyelemű halmazok, azaz $\mathcal{X} = \chi : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ függvény, azaz $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $\exists!\ \chi(\nu,p)$ megoldása az (4) feladatnak.

Bizonyítás. (1) és (2) Legyen $(\nu,p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott.

[[*Állítás:* Legyen az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény kvázikonkáv, (ebben az esetben $H(\nu,p) = \mathbb{R}^n_+ \cap f^{-1}[\nu,\infty)$ konvex halmaz), akkor az $\mathrm{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$ halmaz a $H(\nu,p)$ halmaz extremális halmaza.
Bizonyítás: Legyen $x \in \mathrm{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$ tetszőleges, ekkor ha $u, v \in H(\nu,p)$ olyan, hogy valamely $\lambda \in (0,1)$ esetén $\lambda u + (1-\lambda)v = x$, ekkor

$$\lambda\langle p,u\rangle + (1-\lambda)\langle p,v\rangle = \langle p, \lambda u + (1-\lambda)v\rangle = \langle p,x\rangle = \lambda\langle p,x\rangle + (1-\lambda)\langle p,x\rangle,$$

így $\lambda(\langle p,u\rangle - \langle p,x\rangle) + (1-\lambda)\langle p,v\rangle - \langle p,x\rangle = 0$, mivel $\langle p,u\rangle - \langle p,x\rangle \geq 0$ és $\langle p,v\rangle - \langle p,x\rangle \geq 0$, azért $\langle p,u\rangle = \langle p,x\rangle$, és $\langle p,v\rangle = \langle p,x\rangle$, azaz $u \in \mathrm{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$ és $v \in \mathrm{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$.]]

Ebből következik, hogy ha az f kvázikonkáv, akkor $\mathrm{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$ konvex halmaz. Továbbá az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan kvázikonkáv pontosan akkor, ha $f^{-1}[\nu,\infty) \subset \mathbb{R}^n_+$ szigorúan konvex halmaz, azaz minden extremális halmaza singleton, ezért a $H(\nu,p) = \mathbb{R}^n_+ \cap f^{-1}[\nu,\infty)$ halmaz is szigorúan konvex, ezért az $\mathrm{argmin}_{H(\nu,p)}\langle p,.\rangle$ halmaz singleton. □

3.3 Az értékfüggvény tulajdonságai

Ha csupán azt tesszük is fel, hogy létezik az (4) feladatnak megoldása, azaz az f függvény felülről félig folytonos, az értékfüggvénye már akkor is számos szép tulajdonsággal rendelkezik.

3.10 Állítás *Ha az $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ függvény felülről félig folytonos (azaz az $f^{-1}[\nu,\infty) \subset \mathbb{R}^n_+$ halmaz zárt), akkor*

1. az $f^\wedge : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ értékfüggvény

(a) nemnegatív,

(b) véges értékű,

(c) alulról félig folytonos,

2. $\forall\ p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén az $f^\wedge(.,p) : \mathcal{R}(f) \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény

(a) *monoton növekedő,*

(b) *ha* $0 \in \mathcal{R}(f)$, *akkor* $f^\wedge(0,p) = 0$,

(c) *ha* $\sup f = \infty$, *akkor* $\lim_\infty f^\wedge(.,p) = \infty$,

3. $\forall\ \nu \in \mathcal{R}(f)$ *esetén az* $f^\wedge(\nu, .) : \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \overline{\mathbb{R}}$ *függvény*

(a) *pozitívan homogén*

(b) *konkáv,*

(c) *monoton növekedő.*

(d) *folytonos.*

Bizonyítás. 1. (a) Mivel $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $f^\wedge(\nu,p) = \inf_{H(\nu,p)} \langle p, . \rangle$, ahol $H(\nu,p) = \mathbb{R}^n_+ \cap f^{-1}[\nu, \infty)$, azért $f^\wedge(\nu,p) \geq 0$.

(b) és (c) A 3.1 3. szerint $\forall\ (\nu,p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ pontnak $\exists\ U \times B(p,\delta)$ környezete, hogy $\forall\ (\mu,q) \in U \times B(p,\delta)$ esetén

$$f^\wedge(\mu,q) = \inf_{\hat{H}(\mu,q)} \langle p, . \rangle ,$$

továbbá ugyanezen 3.1 állítás 2. szerint ebben a környezetben a $\hat{H}$ feltételi leképezés kompakt értékű, felső-Vietoris folytonos. Ezért egyrészt $f^\wedge(\nu,p)$ véges érték. Másrészt a Berge-tétel szerint, mivel infimumot veszünk, $f^\wedge$ alulról félig folytonos ezen a környezeten, így a (ν,p) pontban is, de ez tetszőleges volt, így $f^\wedge$ alulról félig folytonos az értelmezési tartományán.

2. Legyen $p \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ tetszőleges adott.

(a) Ha $\nu_1 < \nu_2$, akkor $[\nu_1, \infty) \supseteq [\nu_2, \infty)$, így $f^{-1}[\nu_1,\infty) \supseteq f^{-1}[\nu_2,\infty)$, így $H(\nu_1,p) \supseteq H(\nu_2,p)$, ezért $\inf_{H(\nu_1,p)}\langle p, .\rangle \leq \inf_{H(\nu_2,p)}\langle p, .\rangle$, azaz $f^\wedge(\nu_1,p) \leq f^\wedge(\nu_2,p)$.

(b) Egyrészt a fentiek szerint $f^\wedge(0,p) \geq 0$, másrészt $\mathbf{0} \in H(0,p)$, ezért $f^\wedge(0,p) \leq \langle p, \mathbf{0} \rangle = 0$.

(c) Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\ \nu_k \to \infty$ sorozat, és $\mathcal{K} > 0$, hogy $\forall\ k$ esetén $f^\wedge(\nu_k,p) < \mathcal{K}$. Ekkor $\forall\ k$ esetén $\exists x_k \in H(\nu_k,p)$, amelyre $\langle p, x_k\rangle \leq \mathcal{K}$. Mivel $p > \mathbf{0}$, azért az (x_k) sorozat korlátos (ugyanis $\forall\ k$ és $j = 1, \ldots, n$ esetén $x_k^{(j)} < \mathcal{K}$). Mivel az f felülről félig folytonos, azért az $f(x_k)$ sorozat korlátos, ugyanakkor $f(x_k) \geq \nu_k$ és $\nu_k \to \infty$.

3. Legyen $\nu \in \mathcal{R}(f)$ tetszőleges. Ekkor a $p \mapsto H(\nu,p) = \mathbb{R}^n_+ \cap f^{-1}[\nu,\infty)$ halmazértékű leképezés konstans, jelölje ezért az alábbi bizonyítások során $H(\nu,p_0) := \mathbb{R}^n_+ \cap f^{-1}[\nu,\infty)$ ezt a halmazt, ahol $p_0 \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$, tetszőleges rögzített.

(a) $\forall\ \lambda > 0$ esetén $f^\wedge(\nu, \lambda \cdot p) = \inf_{H(\nu,p_0)}\langle \lambda \cdot p, .\rangle = \lambda \cdot \inf_{H(\nu,p_0)}\langle p, .\rangle = \lambda \cdot f^\wedge(\nu,p)$.

(b) $f^\wedge(\nu, .) = \sigma^\flat(.|H(\nu,p_0))$, és ismert, hogy az alsó támaszfüggvény konkáv. Részletesen: Legyenek $p_1, p_2 \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$, $\lambda \in [0,1]$, ekkor

$f^\wedge(\nu, \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) = \inf_{H(\nu,p_0)}\langle \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2, .\rangle \geq \lambda \inf_{H(\nu,p_0)}\langle p_1, .\rangle +$ $(1-\lambda)\inf_{H(\nu,p_0)}\langle p_2, .\rangle = \lambda f^\wedge(\nu, p_1) + \lambda f^\wedge(\nu, p_2)$.

(c) Mivel $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ esetén $f^\wedge(\nu, p) = \inf_{H(\nu,p_0)}\langle p, .\rangle$, azért ha $p_1 \leq p_2$, akkor $f^\wedge(\nu, p_1) \leq f^\wedge(\nu, p_2)$.

(d) Mivel konkáv és véges, azért folytonos $\mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$-on. □

3.11 Megjegyzés. Általában az értékfüggvénynek csak a ν-beli alulról félig folytonosságát szokták belátni, de ez a fentiek szerint igaz együttesen is. Sőt az együttes folytonosság is viszonylag gyenge feltételek mellett belátható, amelyet dolgozatunk fő eredményeképpen az alábbi tételben rögzítünk.

3.12 Állítás. *Ha az* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ *függvény felülről félig folytonos, valamint nincs lokális maximuma (például szigorúan monoton növekvő), akkor*

1. *az* $f^\wedge : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ *értékfüggvény folytonos,*
2. *az* $\mathcal{X} : \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n_+)$ *megoldásleképezés felső-Vietoris-folytonos.*

Bizonyítás. 1. A 3.1 állítás szerint a H feltételi leképezés alsó-Vietoris-folytonos, ezért a Berge-tétel szerint a $-f^\wedge$ alulról félig folytonos, ezért az $f^\wedge$ értékfüggvény felülről félig folytonos. (Most nem szükséges, hogy a H feltételi leképezés kompakt értékű legyen, mert alsó Vietoris-folytonosság esetén ez csak az értékfüggvény végességéhez kell, de az előző állítás ezt már úgyis biztosítja.) Az előző 3.3 állítás szerint pedig $f^\wedge$ alulról félig folytonos is, ezért folytonos.

2. A 3.1 állítás 4. szerint $\forall\ (\nu, p) \in \mathcal{R}(f) \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$ pontnak létezik olyan $U \times B(p, \delta)$ környezete, hogy $\forall\ (\mu, q) \in U \times B(p, \delta)$ esetén $\mathcal{X}(\mu, q) = \{x \in \hat{H}(\mu, q) : \langle q, x\rangle = f^\wedge(\mu, q)\} = \hat{H}(\mu, q) \cap \{x : \langle q, x\rangle = f^\wedge(\mu, q)\}$. Mivel az $f^\wedge$ folytonos, azért a fenti szinthalmaz zárt gráfú, valamint $\hat{H}$ felső Vietoris-folytonos, ezért a metszetük is felső Vietoris-folytonos. □

Végül szeretnék köszönetet mondani Kánnai Zoltánnak a dolgozat megírása során nyújtott támogatásáért.

Irodalom

1. Frank H. Clarke: Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley-Interscience, New York, 1983.
2. J. P. Crouzeix: Duality between Direct and Indirect Utility Functions, *J. Math. Econom.*, 12 (1983), 149–165.
3. W. E. Diewert: Applications of duality theory, in *Frontiers of quantitative economics*, Vol. II., edited by M. D. Intriligator and D. A. Kendrick, 106–171, North-Holland, Amsterdam, 1974.
4. W. E. Diewert: Duality Approches to Microeconomic Theory, in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II., edited by K. J. Arrow and M. D. Intriligator, North-Holland, Amsterdam, 1982.

5. W. E. Diewert: Applications of Generalized Concavity to Economics, in *Generalized Concavity*, edited by M. Avriel, W. A. Diewert, S. Schaible, Plenum Press, New York, London, 1988.
6. A. Ioffe, V. Tichomirov, Theory of Extremal Problems, North Holland, Amsterdam, New York, 1979.
7. Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston and Jerry R. Green: Microeconomic Theory, Oxford University Press 1995.
8. R. T. Rockafellar: Convex Analysis, Princeton Univ. Press 1970.

CONSTRAINT EXTREMAL PROBLEMS IN MICROECONOMICS

Both in production and consumption theory we can describe the behavior of agents of an economy by optimization problems. It turns out that such problems can be formulated simultaneously as maximization and minimization problems in a dual way. According to Marshall's approach the consumer possesses a utility function, and intends to maximize this function subject to his budget set which is determined by the prices of the commodities and the wealth of the consumer. On the other hand Hicks proposed an approach such that the consumer minimizes his/her budget subject to his/her utility level. Our main goal is to examine the mathematical background of the two dual approaches.