Közgazdasági Szemle, LVIII. évf., 2011. január (20–40. o.)

ZALAI ERNŐ

Az egyensúlyi ráták unicitása és a bérráta pozitivitása a Neumann-modell általánosításaiban

Cikkünk arról a paradox jelenségről szól, hogy a fogyasztást explicit módon megjelenítő Neumann-modell egyensúlyi megoldásaiban a munkabért meghatározó létszükségleti termékek ára esetenként nulla lehet, és emiatt a reálbér egyensúlyi értéke is nulla lesz. Ez a jelenség mindig bekövetkezik az olyan dekomponálható gazdaságok esetén, amelyekben eltérő növekedési és profitrátájú, alternatív egyensúlyi megoldások léteznek. A jelenség sokkal áttekinthetőbb formában tárgyalható a modell Leontief-eljárásra épülő egyszerűbb változatában is, amit ki is használunk. Megmutatjuk, hogy a legnagyobbnál alacsonyabb szintű növekedési tényezőjű megoldások közgazdasági szempontból értelmetlenek, és így érdektelenek. Ezzel voltaképpen egyrészt azt mutatjuk meg, hogy Neumann kiváló intuíciója jól működött, amikor ragaszkodott modellje egyértelmű megoldásához, másrészt pedig azt is, hogy ehhez nincs szükség a gazdaság dekomponálhatóságának feltételezésére. A vizsgált téma szorosan kapcsolódik az általános profitráta meghatározásának – Sraffa által modern formába öntött – Ricardo-féle elemzéséhez, illetve a neoklasszikus növekedéselmélet nevezetes bér–profit, illetve felhalmozás–fogyasztás átváltási határgörbéihez, ami jelzi a téma elméleti és elmélettörténeti érdekességét is.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: B16, B23, B41, C62, C67, O41.

A természettudományok látványos megújulása a 19. század második felében, az ennek alapjául szolgáló, akkor még töretlen hit a világ korlátlan megismerhetőségében, és hogy a matematika az igazság mindenható próbaköve, magával sodorta a közgazdaságtant is. A más tudományok területeire kifejlesztett matematikai eszközök és modellek adaptálása, a matematika és a természettudományok területén végzettek közgazdasági kutatási területekre való beáramlása átalakította a matematikai eszközöket felhasználó közgazdaságtani iskola önmagáról alkotott képét, amely az empirikus, reáltudomány felől egyre inkább eltolódott a tiszta tudomány, a nem konstruktív, absztrakt kutatások irányába. A „logikai szigor, az elegancia és az esztétikai szépség" szempontjai túlsúlyba kerültek az empirikus relevanciával szemben, és ez a megközelítés dominánssá vált az uralkodó közgazdaságtani áramlatban is.

Az elmúlt évtizedekben egyre többen és egyre erőteljesebben bírálták emiatt a modern közgazdaságtant, elsősorban annak amerikai neoklasszikus fősodrát (lásd például *Mirowski*, [1989], *Csaba* [2008]). A jelen dolgozatban megfogalmazott, a szakmán belülről jövő bírálat más irányban és hangsúllyal fejt ki kritikát – Leontief szavaival élve – az

* Köszönetemet fejezem ki *Bessenyei István* és a névtelen lektor értékes és hasznos megjegyzéseiért. Természetesen az esetleg fennmaradt hibákért engem terhel a felelősség.

Zalai Ernő akadémikus, a Budapesti Corvinus Egyetem tanszékvezető egyetemi tanára.

„implicit teoretizálással” szemben. Meggyőződésünk szerint ugyanis nem a matematika használatában rejlik az igazi probléma. A jelenséggel kapcsolatos álláspontunkat nagyon frappánsan fogalmazza meg Blaug: „az ilyen gyakorlat orvoslásához a célok tisztázására, s nem radikális és minden bizonnyal korai műtétre van szükség” (*Blaug* [1962] 606. o.).

A probléma gyökerére Neumann János, érdekes módon, nem is a közgazdaságtan, hanem a matematika kapcsán idejekorán figyelmeztetett egy rövid esszéjében. Nevezetesen arra, hogy az empirikus forrásaitól elzárkózó, „tiszta esztétizálássá …, egyre tisztább *l'art pour l'art*-á” váló absztrakt teoretizálás súlyos veszélyének van kitéve, „a degenerálódás fenyegeti”. (*Neumann* [1965] 27. o.) Marshall még jóval korábban figyelmeztetett arra, hogy a matematikai nyelvezetre való átállás a közgazdaságtanban azzal a veszéllyel jár, hogy „félrevezethet bennünket az intellektuális játékokkal, képzetes problémákkal való foglalkozás irányába” (idézi *Pigou* [1925] 84. o.). Úgy tűnik, a figyelmeztetésüknek nem volt kellő foganatja.

Tanulságos tovább is idézni Neumannt: „Ez nem feltétlenül rossz, ha a területet csatlakozó tárgyak veszik körül, amelyek még szorosan kapcsolódnak a tapasztalathoz ...”. (*Neumann* [1965] 27. o.) Ilyennek tekinthető esetünkben a verbális és az alkalmazott közgazdaságtan egy része. A sajnálatos azonban az, hogy a verbális és a matematikai közgazdászok között széles szakadék tátong. És ez alapvetően a matematikai közgazdászok hibája, akik többsége nem fogadta meg Marshall intését sem: „egyre jobban tartottam magam a következő szabályokhoz: *1.* A matematikát csak gyorsírásként használd, s ne a kutatás motorjaként! *2.* Csak addig használd, amíg eredményre nem jutottál! *3.* Fordítsd le angolra!” A további három szabálya is megszívlelendő lenne, de itt nem tudjuk érvényesíteni őket: „*4.* Majd szemléltesd a valós életből vett fontos példákkal! *5.* Vesd tűzbe a matematikai változatot! *6.* Ha nem tudsz sikeresen eleget tenni a 4. szabálynak, akkor égesd el az angol változatot is! Ez utóbbit gyakran megtettem!” (*Pigou* [1925] 427. o.)

Neumann János sok szempontból érdekes és értékes egyensúlyi növekedési modelljének általánosításai során is bekövetkezett a maga által is jelzett veszély: gazdaságelméleti szempontból érdektelen álproblémák és paradoxonok is keletkeztek belőle, amelyeknek „nagyobb volt a füstjük, mint a lángjuk”, hogy *Mirowski* [1989] könyvének címét parafrazáljuk. A Neumann modelljéhez kapcsolódik ugyan a történet, de a jelenség tárgyalható a Neumann-modell Leontief-eljárásra épülő egyszerűbb változatában is, sokkal áttekinthetőbb formában, amit ki fogunk használni.

Ugyancsak kapcsolódik a vizsgált téma Ricardo (Sraffa által modern formába öntött) általános profitráta meghatározásával kapcsolatos elemzéseihez, illetve a neoklasszikus növekedéselmélet nevezetes bér–profit, illetve felhalmozás–fogyasztás átváltási határgörbéihez is, amelyekre ugyancsak ki fogunk térni a dolgozatban. Ezek jól jelzik a téma elméleti és elmélettörténeti érdekességét. Marshall útmutatását követve, amennyire csak a téma kifejtése megengedi, kerüljük a technikai, matematikai részleteket, illetve a bizonyítások nyomon követése nélkül is igyekszünk érthetővé tenni a vizsgált kérdéseket.

A paradox jelenség, amiről szó lesz, a következőképpen foglalható össze. A fogyasztást explicit módon megjelenítő Neumann-modell egyensúlyi megoldásaiban a munkabért meghatározó létszükségleti termékek ára esetenként (az induló paraméterektől függően) mind nulla lehet, és emiatt a reálbér egyensúlyi értéke is nulla lesz. Ezt a jelenséget alapvetően Neumann eredeti feltételeinek és feltevéseinek ártalmatlannak tűnő, *Kemeny–Morgenstern–Thompson* [1956] nevéhez fűződő általánosítása idézte elő. Ez tette lehetővé ugyanis, hogy – Neumann eredeti modelljével ellentétben – eltérő növekedési és profitrátájú, alternatív egyensúlyi megoldások lehessenek. Morishimát ez a lehetőség „a valós életből vett fontos” megállapítás megfogalmazására sarkalta: „mind elméleti, mind tervezési szempontból fontos, mivel a valós, dezaggregált gazdaságok általában dekomponálhatók, és történelmi vagy politikai okoknál fogva a kormányzatok gyakran kénytelenek megelégedni a legnagyobb bővülési ütemnél alacsonyabb szintű" növekedési pályákkal (*Morishima* [1971] 32. o.).

A kiváló matematikus Morishima érdekes és izgalmas közgazdasági következései sajnos nem állják meg a helyüket! Meg fogjuk mutatni, hogy azok a megoldások, amelyek növekedési tényezője a legnagyobbnál alacsonyabb szintű, érdektelenek, mert közgazdasági szempontból értelmetlenek, ugyanis szükségképpen nulla bérrátát eredményeznek. Ezzel voltaképpen azt fogjuk megmutatni, hogy Neumann kiváló intuíciója jól működött, amikor (különböző okok miatt) ragaszkodott modellje egyértelmű megoldásához. De azt is megmutatjuk, hogy ehhez nem feltétlenül szükséges feltenni, hogy a gazdaság nem dekomponálható.

A vizsgált probléma háttere

Idézzük fel röviden a Neumann által vizsgált elvont gazdaság modelljét! Az elsődleges erőforrásoktól Neumann eltekintett, a termékek kibocsátási (**B**) és felhasználási (**A**) együtthatóit változatlannak tekintette, és a termékek felhasználását nem bontotta fel termelő- és személyes fogyasztásra, az **A** ráfordítási együtthatók ezeket együtt képviselik. A termelés műszaki paraméterei és fogyasztási szokások tehát egyszer s mindenkorra adottak, és ennek következtében a termelési tevékenységek egyensúlyi szerkezete (**x**) és az egyensúlyi árak arányai (**p**) időben változatlannak tekinthetők.

Stacionárius egyensúly esetén a termékek kibocsátása (**Bx**) és felhasználása (**Ax**) az egyik időszakról a másikra *egyenletes* (λ) *ütemben* változik, ahol **x** a tevékenységszintek vektora. A **p** (hosszú távú) *egyensúlyi árak* pedig olyanok, amelyek az egységnyi értékű befektetésre minden alkalmazott tevékenység esetén ugyanakkora *megtérülési* (kamat- vagy profit-) *rátát* (π) eredményeznek. Mindezek következtében Neumann modelljében az egyensúly feltételei a következő formát öltik:[1]

$$\lambda, \pi > -1;\ \mathbf{x}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \tag{N0}$$

$$\mathbf{Bx} \geqq (1+\lambda)\cdot\mathbf{Ax}, \tag{N1}$$

$$\mathbf{pB} \leqq (1+\pi)\cdot\mathbf{pA}. \tag{N2}$$

Ebben modellben Neumann az elsők között igazolta az általános egyensúly létezésének lehetőségét, és elemezte az egyensúlyi megoldások tulajdonságait. A bizonyításhoz feltette, hogy mindegyik termék – vagy kibocsátásként és/vagy ráfordításként ($\mathbf{B} + \mathbf{A} > \mathbf{0}$) – megjelenik minden tevékenységben. Ezzel egyúttal a bővülési és a tőkemegtérülési tényező egyértelműségét és azonosságát is biztosította. A megoldás ilyen értelemben vett *unicitása* több szempontból is fontos volt Neumann számára. Itt csak azt emeljük ki, hogy a két tényező közös egyensúlyi értéke egyik oldalról nem más, mint az adott termelési-felhasználási együtthatók által lehetővé tett *legnagyobb növekedési tényező*, másik oldalról pedig a *legkisebb egyöntetű megtérülési tényező*, ami később szerephez jut a dolgozatunkban.

Neumann a fenti feltevéssel kizárta, hogy a gazdaságnak legyen független blokkja, olyan tevékenységek együttese, amelyek alkalmazásához nincs szükség olyan termékekre, amelyeket csak a gazdaság többi, az adott blokkon kívül maradó tevékenységei tudnak előállítani. Az input-output technológiával adott Leontief-gazdaságban egy ilyen független blokk létezése matematikai szempontból annyit jelent, hogy a ráfordítási együtthatók négyzetes mátrixa *dekomponálható* (reducibilis).

[1] A $\geqq$ szimbólum vektorok, illetve mátrixok esetében gyenge (egyenlőséget is megengedő) egyenlőtlenséget, a $\geq$ szimbólum ezzel szemben félig szigorú egyenlőtlenséget jelöl.

Megjegyezzük, hogy Neumann $\mathbf{B} + \mathbf{A} > \mathbf{0}$ feltevése, amely a Leontief-modellek esetében $\mathbf{E} + \mathbf{A} > \mathbf{0}$ formát ölt, elégséges, de nem szükséges ahhoz, hogy az ábrázolt Leontief-gazdaság irreducibilis legyen. A Neumann-modell megoldásának egyértelműségéhez pedig elegendő pusztán annyit feltenni (valamilyen formában biztosítani), hogy a mérleg-egyensúly $\mathbf{Bx} \geqq (1 + \lambda)\mathbf{Ax}$ feltételét kielégítő minden nem triviális megoldásban $\mathbf{Bx}$ pozitív vektor legyen, azaz minden jószág termelésére szükség legyen. *Gale* [1960] egyenesen így és csak ennyivel definiálta az irreducibilitást a Neumann-modell esetére. (Az irreducibilitást, mint az input-output modellekben szokás, a $\mathbf{B}$ és az $\mathbf{A}$ mátrixok szerkezeti tulajdonságaival definiálja és elemzi *Móczár* [1980].)

A Neumann bizonyítását egyszerűsítő *Kemeny–Morgenstern–Thompson* [1956] nem ragaszkodott az irreducibilitás feltevéséhez. Neumann közgazdasági szempontból túl erős ($\mathbf{B} + \mathbf{A} > \mathbf{0}$) feltevése helyett csak azt tették fel, hogy minden jószág újratermelhető, vagyis termék ($\mathbf{B1} > \mathbf{0}$), és hogy minden tevékenység felhasznál legalább egy terméket ($\mathbf{1A} > \mathbf{0}$). Ugyanakkor az egyensúlyi feltételeket kiegészítették egy pótlólagos kikötéssel. Nevezetesen előírták, hogy csak azok a matematikai megoldások lesznek érdekesek, amelyek esetében a *kibocsátások* összértéke *pozitív* ($\mathbf{pBx} > 0$), az egyensúlyban nem csak szabad javakat állítanak elő. Ezekre együtt KMT feltételekként fogunk a továbbiakban utalni.

Ezek a kézenfekvőnek tűnő feltevések szavatolták az egyensúlyi megoldások létezését, de már nem garantálták azok Neumann által megkövetelt egyértelműségét.[2] A fenti feltevések ugyanis megengedik, hogy a gazdaság dekomponálható legyen. A Kemeny–Morgenstern–Thompson-szerzőhármas (KMT) maga is megmutatta, hogy feltételeik mellett potenciálisan több, eltérő tényezővel rendelkező egyensúlyi növekedési pálya létezhet, és hogy azok száma nem lehet több, mint a termékek és tevékenységek száma közül a kisebbik. A dekomponálható gazdaságokkal foglalkozó elemzéseknek kiterjedt irodalma született, amelyben számos, elsősorban matematikai szempontból érdekes eredményről számoltak be.

Emiatt tűnt úgy Morishima számára, hogy ezek az eredmények közgazdasági szempontból is fontosak lehetnek (lásd a bevezetőben idézett megállapítását). Ezek szerint ugyanis a bér és profit, illetve a jelen és jövőbeli fogyasztás nem mindig áll egymással versenyző viszonyban, hanem csak egy adott növekedési pálya mentén. Az okos kormányzatnak az a feladata, hogy egy alacsonyabbról magasabb növekedési pályára vezérelje a gazdaságot, mert így az egymással versenyző célok akár mindegyikének a szintjét képes lenne növelni. Morishima érdekes, gyakorlati relevanciát sejtető dolgozata módszertani szempontból mindenképpen értékes, mivel részletesen jellemezte matematikai szempontból az „egymás alá rendelt” *(subordinate)* alternatív egyensúlyi pályákat.

Morishima egy olyan általánosított Neumann-modell vizsgálata kapcsán jutott erre a következtetésre, amelyben – Neumanntól eltérően – elkülönítették egymástól a termékek termelő- és végső fogyasztását. A fogyasztás Neumann-modellbeli explicit ábrázolására több út is kínálkozik.[3] A leggyakoribb és legegyszerűbb megoldást a klasszikus közgazdászok és Marx által is használt megközelítés, homogén munkaerő és adott szükséges fogyasztás feltevése kínálja. Ebben az esetben a *munkaerő-felhasználási* együtthatókat egy $\mathbf{m}$ (legalább félig pozitív) sorvektorban foghatjuk össze, az egy munkaórára jutó *szükséges fogyasztást* pedig egy $\mathbf{c}$ (szintén legalább félig pozitív) oszlopvektor elemeiként adhatjuk meg. Így a fogyasztási együtthatók $\mathbf{C}$ mátrixát a $\mathbf{c} \circ \mathbf{m}$ diadikus szorzat formájában határozhatjuk meg. Ezt az utat követve a Neumann-modell $\mathbf{A}$ ráfordítási együtthatóit felbonthatjuk és $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{C}$ alakban írhatjuk fel, ahol $\mathbf{R}$ mátrix a termelő-, $\mathbf{C}$ pedig a szükséges fogyasztási együtthatókat tartalmazza. Az így kapott, Morishima által Marx–Neumann-modellnek (MN) nevezett változat egyensúlyi feltételei az alábbi formát öltik:

[2] Az egyértelműséget (unicitást) itt és a továbbiakban mindig csak az egyensúlyi tényező tekintetében értjük.

[3] Lásd *Bauer* [1974] áttekintő cikkét ezekről a lehetőségekről!

$$\alpha > 0;\ \mathbf{x}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \tag{MN0}$$

$$\mathbf{Bx} \geqq \alpha \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{c} \circ \mathbf{m})\mathbf{x}, \tag{MN1}$$

$$\mathbf{pB} \leqq \alpha \cdot \mathbf{p}(\mathbf{R} + \mathbf{c} \circ \mathbf{m}), \tag{MN2}$$

ahol α a növekedési, illetve az azzal egyenlő kamattényező értéke ($\lambda = \pi = \alpha - 1$ növekedési ütem, illetve kamatláb), amelyre a továbbiakban az egyszerűség kedvéért *egyensúlyi tényezőként* fogunk utalni.

A modell felírása még nem teljes, mert egyelőre még nyitva hagytuk azokat a kérdéseket, hogy milyen további feltevésekkel élünk a modell paramétereire, hogyan kötjük meg az **x** és **p** változók szintjét, illetve, hogy élünk-e a KMT-féle kiegészítő egyensúlyi feltétellel. Nem szerepelnek a felírásban a komplementaritási megkötések sem, amelyek a KMT-féle kiegészítő feltétellel együtt szavatolják az egyensúlyi növekedési és a megtérülési tényező egyenlőségét. (De ugyanakkor, ha azok egyenlők, és teljesül a kiegészítő feltétel, akkor azonban nincs szükség külön előírni a komplementaritási megkötéseket, azok teljesülni fognak.)

Mielőtt azonban ezekre a kérdésekre válaszolnánk, átmenetileg kiiktatjuk az ikertermelést és a technológiai választékot a modellből. A modell így nyert változata, amelynek egyszerűbb szerkezete lehetővé teszi az erőteljes Perron–Frobenius-féle tételek alkalmazását, sok szempontból segíteni fog a felmerülő problémák közgazdasági természetének tisztázásában.

A vizsgált jelenség a modell Leontief-eljáráson nyugvó változatában

Tekintsük tehát a Marx–Neumann-modell egy olyan változatát, amelyben mindegyik tevékenység csak egy terméket és mindegyik terméket csak egy tevékenység állít elő. Ebben a modellben a kibocsátási mátrix egy egységmátrix (**E**) lesz, és **Bx** helyén **Ex** = **x**, **pB** helyén **pE** = **p** szerepel az egyensúlyi összefüggésekben. Ettől még a modell megőrzi alapvető Neumann-jellegét, de már csaknem egy stacionárius Leontief-modell lesz. Ezért a modell e változatát egy Marx–Leontief–Neumann-féle (MLN) *stacionárius modellnek* nevezzük. Mindössze abban fog különbözni egy zárt, egy időszakos stacionárius Leontief-modelltől, hogy itt egyenlőtlenségek szerepelnek a feltételekben, és nem egyenlőségek, ami minőségi és tartalmi különbséget takar.

A Leontief-modellekben rendszerint elvárt (*ex post* elemzésekben pedig egyenesen megkövetelt), hogy a termelési és az árváltozók mind pozitívak legyenek. Ha az egyensúlyi feltételeket átírjuk gyenge egyenlőtlenségek formájába, kibővül a Leontief-modell potenciális megoldásainak köre, és már nem lesz mindig és minden változó egyensúlyi értéke pozitív. Továbbá Neumann éves termelési ciklust és tőkemegtérülést feltételezett, ami miatt a lekötött tőkék megegyeznek a felhasznált tőkékkel. A több időszakos Leontief-modellekben ezzel szemben általában csak a beruházások beérése tekintetében élünk az éves ciklus feltevésével, a tőkelekötési együtthatók és a folyó ráfordítási együtthatók mátrixai jellemzően különböznek egymástól. Ezek is jelzik a stacionárius Leontief-modellek és a Neumann-modell között meglevő jelentős tartalmi különbségeket.[4]

A Leontief–Neumann-modell (MLN) egyensúly feltételeinek KMT-féle változata (ahol **pBx** = **px**) a következő lesz:

[4] Neumann és Leontief modelljei közötti különbségek részletesebb elemzése megtalálható a *Zalai* [2006] tanulmányban.

$$\alpha > 0,\ \mathbf{x};\ \mathbf{p} \geqq \mathbf{0};\ \mathbf{1x} = \mathbf{p1} = 1 \tag{MLN0}$$

$$\mathbf{x} \geqq \alpha(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x} \tag{MLN-P}$$

$$\mathbf{p} \leqq \alpha\mathbf{p}(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m}) \tag{MLN-D}$$

$$\mathbf{px} > 0 \tag{KMT}$$

Ha $\mathbf{1}(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m}) > \mathbf{0}$, akkor az MLN-modellnek lesz megoldása, mivel teljesülnek a KMT-féle feltevések ($\mathbf{E1} > \mathbf{0}$, $\mathbf{1A} > \mathbf{0}$). Ez utóbbit a *munka nélkülözhetetlensége* feltevés elfogadásával biztosítjuk. Ez a *Morishima* [1964] által bevezetett feltevés azt jelenti, hogy nem folyhat újratermelés munkaerő felhasználása nélkül, azaz nem létezik olyan $\alpha > 0$ és $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, amely esetén teljesülnek az $\mathbf{x} \geqq \alpha(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}$ mérlegegyensúlyi feltételek, de $\mathbf{mx} = 0$. (Ez a feltevés nem zárja ki, hogy egy kivételével akár minden ágazat automatizált legyen, azaz munkaerő közvetlen igénybevétele nélkül termeljen.)

Ha a munka nélkülözhetetlen, és van személyes fogyasztás, akkor vannak olyan *termékek (létfenntartó termékek),* amelyek – közvetlenül vagy közvetve – minden termék előállításához szükségesek. Ezek pedig nem mások, mint a $\mathbf{c}$ fogyasztási kosárban levők és mindazok az egyéb termékek, amelyek az előbbiek előállításához szükségesek. Mivel $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, ezért vannak létfenntartó termékek. (Azért nem a megszokottabb *létszükségleti* termékek fogalmát használjuk, mert azok elsősorban fogyasztási cikkekre utalnak, itt pedig olyan termelési eszközökről is szó van, amelyek ez előbbiek előállításához kellenek.)

Engedjük meg, hogy a vizsgált gazdaságban létezhessenek *nem létfenntartó* termékek is, amelyeket *luxustermékeknek* fogunk nevezni. A létfenntartó árukat termelő ágak együttesét *létfenntartó alrendszernek*, a luxustermékeket előállító ágazatokat *luxus alrendszernek* fogjuk nevezni.[5]

A termelőágak és termékek nyilván mindig egyértelműen és teljeskörűen besorolhatók a fenti két alrendszer valamelyikébe. Jelölje ezek indexeinek halmazát I_1 és I_2, ahol az utóbbi üres halmaz, ha nincsenek luxustermékek. Viszonylag egyszerűen belátható (lásd *Zalai* [2000] 12.6. tétel), hogy az utóbbi esetben az $\mathbf{A} = (\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})$ mátrix *irreducibilis* lesz, ellenkező esetben az $\mathbf{R}$ mátrix $\mathbf{R}_{21}$ és a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{c}_2$ alblokkjának minden eleme 0 lesz, és az $\mathbf{A}$ mátrix felbontható a következő formában:

$$\begin{array}{c|c|c|} & I_1 & I_2 \\ \hline I_1 & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline I_2 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \\ \hline \end{array} \;=\; \begin{array}{|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{I_1} & \multicolumn{1}{c}{I_2} & \\ \hline (\mathbf{R}_{11} + \mathbf{C}_{11}) & (\mathbf{R}_{12} + \mathbf{C}_{12}) & \text{létfenntartó termékek} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} & \text{luxustermékek} \\ \hline \end{array}$$

ahol $\mathbf{C}_{12} = \mathbf{c}_1\circ\mathbf{m}_1$ és $\mathbf{C}_{12} = \mathbf{c}_1\circ\mathbf{m}_2$, az $(\mathbf{R}_{12} + \mathbf{C}_{12})$ mátrix irreducibilis (vagy az $\mathbf{1R}_{12}$, vagy az $\mathbf{m}_2$ vektornak szükségképpen van pozitív komponense), sőt $\mathbf{1}(\mathbf{R}_{12} + \mathbf{C}_{12})(\mathbf{E} - \mathbf{R}_{22})^{-1} > \mathbf{0}$, ha $\mathbf{R}_{22}$ produktív. (Nemcsak a munkaerő, de a létfenntartó termékek is nélkülözhetetlenek minden termék termeléséhez.) Ezek alapján egyszerűen következik az *1. megállapítás* is.

1. MEGÁLLAPÍTÁS. Az $\mathbf{A} = (\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})$ együtthatómátrix – azaz a MLN-gazdaság – akkor és csak akkor *reducibilis*, ha léteznek *luxustermékek* (is). Az $\mathbf{A}_{12} = (\mathbf{R}_{12} + \mathbf{C}_{12})$ mátrix *domináns sajátértéke* (a mátrix irreducibilitását szavatoló feltevések miatt) pozitív lesz.

Ha tehát vannak luxustermékek is, akkor a létfenntartó és luxustermékek szerinti felbontásban az egyensúlyi feltételek a következő formát öltik:

[5] A létfontosságú és luxusáruk szerző által bevezetett fogalmai nyilvánvalóan rokon *Sraffa* [1960/1975] *bázis-* és *luxustermék* fogalmaival, erről tanúskodnak a használt elnevezések is. Sraffa azonban csak az $\mathbf{R}$ mátrix alapján értelmezte ezeket.

$$\mathbf{x}_1 \geqq \alpha(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2) \qquad \text{(MLN-}P1\text{)}$$

$$\mathbf{x}_2 \geqq \alpha\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \qquad \text{(MLN-}P2\text{)}$$

$$\mathbf{p}_1 \leqq \alpha\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{11} \qquad \text{(MLN-}D1\text{)}$$

$$\mathbf{p}_2 \leqq \alpha(\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22}) \qquad \text{(MLN-}D2\text{)}$$

Az elemzések egyszerűbbé tétele érdekében a továbbiakban feltesszük, hogy az $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{R}_{22}$ mátrix irreducibilis, így *domináns sajátértéke*, a Perron–Frobenius-féle tételek értelmében, szintén pozitív. A matematikai részletek iránt érdeklődő olvasók kedvéért vázoljuk az MLN-modell megoldásainak matematikai elemzését. Akit csak a közgazdasági konklúzió érdekel, a következő apró betűs részt nyugodtan átugorhatja.

Az MLN-modell megoldásainak matematikai elemzése

a) A Perron–Frobenius-tételekből tudjuk, hogy az egyenlőségek formájában felírt primális feladat határozottan pozitív megoldása létezésének az a szükséges és elégséges feltétele, hogy teljesüljenek a $\lambda(\mathbf{A}_{11}) < 1/\alpha = \lambda(\mathbf{A}_{22})$ relációk, ahol $\lambda(\mathbf{A}_{11})$ és $\lambda(\mathbf{A}_{22})$ a két mátrix domináns sajátértéke.

b) Ugyanígy, az egyenlőségek formájában felírt duális feladat pozitív megoldása létezésének szükséges és elégséges feltétele az $1/\alpha = \lambda(\mathbf{A}_{11}) > \lambda(\mathbf{A}_{22})$ relációk fennállása.

c) Először is lássuk be, hogy a fenti két, egymással ellentétes követelmény miatt a modellnek nem létezhet olyan megoldása, amelyben minden ár- és termelési szint pozitív, aminek következtében az egyensúly feltételei mind egyenlőségek formájában teljesülnek.

d) A létfenntartó termékek nélkülözhetetlenek, ezért $\mathbf{x}_1$ szükségképpen határozottan pozitív vektor lesz minden megoldásban, és ebből következően (komplementaritás) szükségképpen egyenlőség formájában teljesülnek az (MLN-*D*1) feltételek. Ez utóbbiból viszont az következik (Perron–Frobenius-tételek), hogy két eset lehet: $\mathbf{p}_1$ vagy a nullavektor, vagy az irreducibilis $\mathbf{A}_{11}$ mátrix (bal oldali) sajátvektora, és ezért határozottan pozitív vektor és $1/\alpha = \lambda(\mathbf{A}_{11})$.

e) Az *a)* és a *d)* pontban igazoltak miatt a $\mathbf{p}_1 > \mathbf{0}$ esetben $\mathbf{x}_2$ csak a nullavektor lehet és $1/\alpha = \lambda(\mathbf{A}_{11})$. A *b)* pontban igazoltak értelmében csak akkor lehet $\mathbf{p}_2$ is pozitív, ha $\lambda(\mathbf{A}_{11}) > \lambda(\mathbf{A}_{22})$.

f) Ha $\mathbf{x}_2$ is pozitív vektor, azaz $\lambda(\mathbf{A}_{11}) < 1/\alpha = \lambda(\mathbf{A}_{22})$, akkor egyrészt az (MLN-*D*2) feltétel is egyenlőség formájában teljesül (komplementaritás). Az előzővel összevetve láthatjuk, hogy $\mathbf{x}_2$ csak akkor lehet pozitív, ha $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$. Ebből következően $\mathbf{p}_2$ nem lehet a nullavektor, mivel $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, és ezért $\mathbf{p}_2$ az irreducibilis $\mathbf{A}_{22}$ mátrix (bal oldali) sajátvektora, s mint ilyen határozottan pozitív vektor.[6]

g) Mivel pedig $\lambda(\mathbf{A}_{11}) > \alpha$, ezért az $(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{11})$ mátrixnak létezik nem negatív, sőt $\mathbf{A}_{11}$ irreducibilitása következtében minden elemében pozitív inverze (Perron–Frobenius-tételek). Így a

$$(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{A}_{11})\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{s}_1$$

egyenletnek tetszőleges $\mathbf{s}_1$ vektor mellett létezik megoldása, s az mindaddig pozitív, amíg $\mathbf{s}_1 \geq \mathbf{0}$. Ilyen esetben ($\mathbf{x}_2$, $\mathbf{p}_2 > \mathbf{0}$; $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$) tehát számtalan olyan $\mathbf{x}_1 > \mathbf{0}$ megoldás létezik, amely esetén a létfenntartó termékekből többletkínálat keletkezik, vagyis szabad javak.

Érdemes bevezetni a következő, közgazdasági szempontból a sajátértékeknél könnyebben értelmezhető fogalmakat. A fogalmakkal nyilvánvalóan arra utalunk, hogy ha az adott blokk önmagában alkotna egy gazdasági rendszert (vagy akár csak a többi ágazattól független alrendszert), mekkora lenne annak az egyensúlyi növekedési üteme, illetve a profitrátája.

Definíció. Az $\mathbf{A}_{11} = (\mathbf{R}_{11} + \mathbf{C}_{11})$, illetve az $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{R}_{22}$ mátrixok domináns sajátértékének reciprokát a két alrendszer *növekedési*, illetve az itt vele megegyező *profitpotenciáljának* nevezzük, és $\rho_1 = \lambda(\mathbf{A}_{11})$ és $\rho_2 = \lambda(\mathbf{A}_{22})$ skalárral jelöljük őket.

[6] Ha $\mathbf{A}_{22}$ reducibilis lenne, akkor a luxuságazatokat magukat is további alágazatokba sorolhatjuk. Ilyen esetben további megoldások is létezhetnének, amelyek természete hasonló lenne az M2 megoldáséhoz. Ezek tárgyalása csak feleslegesen bonyolítaná a jelen elemzést. Ennek elkerülése végett tettük fel $\mathbf{A}_{22}$-ről, hogy irreducibilis.

A fenti, komplementaritási megkötésekkel kiegészített egyenlőtlenségrendszer legalább félig pozitív megoldásai létezésének matematikai elemzéséből a következőket állapíthatjuk meg.

2. MEGÁLLAPÍTÁS (AZ MLN-MODELL MEGOLDÁSAI)

a) Ha *nincsenek luxustermékek*, akkor *egyetlen* egyensúlyi megoldás létezik, amelynek α tényezője az $\mathbf{A}$ mátrix (pozitív) domináns sajátértékének reciproka, az egyensúlyi árak ($\mathbf{p}$) és a tevékenység- (itt egyúttal kibocsátás-) szintek ($\mathbf{x}$) vektora pedig az $\mathbf{A}$ mátrixnak a domináns sajátértékéhez tartozó, *arányaikban egyértelműen meghatározott*, *pozitív* bal és jobb oldali sajátvektorai.

b) Ha *vannak luxustermékek*, akkor két egyensúlyi megoldás is létezhet. Mindig lehetséges az (M1) rendszerbeli megoldás, amelyben csak a létfenntartó ágak termelnek:

$$\alpha_1 = \rho_1, \qquad \mathbf{x}^1 = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{0}) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{p}^1 = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2), \tag{M1}$$

ahol az $\mathbf{x}_1^*$ és a $\mathbf{p}_1^*$ az $\mathbf{A}_{11}$ együtthatómátrix domináns sajátértékéhez tartozó, arányaikban egyértelműen meghatározott, pozitív jobb és bal oldali sajátvektorok. A $\mathbf{p}_2$ értéke általában nem egyértelműen meghatározott. Pontosabban: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ mindig lehetséges megoldás, de a $\mathbf{p}_2$ határozottan pozitív is lehet. Sőt, ha $\rho_2 > \rho_1$, azaz a *luxusiparágak saját profitpotenciálja nagyobb*, mint a létfenntartó alrendszeré, akkor a $\mathbf{p}_2$-nek van olyan értéke is, amely esetén a luxustermékek termelése is biztosítaná az egyensúlyi profitráta elérését, azaz

$$\mathbf{p}_2 = \alpha(\mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12} + \mathbf{p}_2\mathbf{A}_{22}), \qquad \text{éspedig} \qquad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1\mathbf{A}_{12}(\mathbf{E} - \rho_1\mathbf{R}_{22})^{-1} > \mathbf{0}.$$

Ha $\rho_1 > \rho_2$, azaz a *luxusiparágak saját* bővülési potenciálja *kisebb*, mint a létfenntartó alrendszeré, akkor létezik olyan megoldás is, amely esetén luxustermékeket is termelnek, de ekkor a létfenntartó termékek szabad javak

$$\alpha_2 = \rho_2, \qquad \mathbf{x}^2 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^*) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{p}^2 = (\mathbf{0}, \mathbf{p}_2^*), \tag{M2}$$

ahol az $\mathbf{x}_2^*$ és a $\mathbf{p}_2^*$ az $\mathbf{A}_{22}$ együtthatómátrix domináns sajátértékéhez tartozó, arányaikban egyértelműen meghatározott, pozitív jobb és bal oldali *sajátvektorok*. Az $\mathbf{x}_1$ szintén pozitív vektor, de nagysága nem egyértelműen meghatározott, és megválasztható olyannak is, amely esetén a létfenntartó árukból többlet (túlkínálat) lesz, vagyis a létfenntartó termékek szabad javak, ezért lesz az egyensúlyi áruk nulla.

Az MLN-modellnek tehát mindig létezik pozitív létfenntartó bérrátát eredményező, közgazdasági szempontból elfogadható megoldása, éspedig az (M1). Érdemes ennek kapcsán rögtön utalni a Marx–Neumann-modellre, ami a későbbiek szempontjából fontos lesz. Egyrészt majd látni fogjuk, ott már nem mindig létezik pozitív létfenntartó bérrátát eredményező megoldás. Másrészt láthatjuk azt is, hogy a KMT-feltevések (itt: $\mathbf{1A} > \mathbf{0}$) teljesülésének és az egyensúly kiegészítő KMT-feltételének ($\mathbf{px} > 0$) előírása nem szűri ki a matematikai szempontból lehetséges megoldások közül a közgazdasági szempontból értelmetlen ($\mathbf{pc} = 0$) megoldásokat. A munkaerő és fogyasztásának explicit figyelembevétele esetén ezért az egyensúlyi megoldások feltételeként azt kellene inkább előírni, hogy $\mathbf{pc}$ legyen pozitív. Ha pedig mind $\mathbf{pc}$, mind $\mathbf{mx}$ értéke pozitív (az utóbbit, mint láttuk, a munka nélkülözhetetlensége szavatolja), akkor viszont $\mathbf{pAx}$ és $\mathbf{pBx}$ is pozitív lesz (ugyanis fennállnak a $0 < \mathbf{pcmx} = \mathbf{pCx} \leqq \mathbf{pAx} \leqq \alpha\mathbf{pBx}$ egyenlőtlenségek).

A modellnek azonban létezhet olyan megoldása is, amelyben termelnek luxusárukat is. Egy ilyen megoldásban a luxusiparágaknak a létfenntartó alrendszerénél kisebb bővülési potenciálja határozza meg a gazdaság egyöntetű növekedési ütemét. A létfenntartó áruk ezért szabad javakká válnak, ami miatt a megoldás közgazdasági szempontból értelmetlen. A fenti elemzésből világossá válik, mi a probléma gyökere. Az, hogy miközben a technológia megadásakor figyelembe vesszük a luxustermékek előállításának a lehetőségét, a modellben magában nem szerepel *luxusfogyasztás*, ami az utóbbi áruk termelésének értelmet adhatna. A luxustermékeket *öncélúan*, a saját maguk újratermelése céljára állítanák elő ($\mathbf{x}_2^* = \alpha\mathbf{R}_{22}\mathbf{x}_2^*$). Egy ilyen állapotban a luxustermékek előállítására fordított minden ráfordítás (köztük a munkaráfordítások) veszendőbe menne, tehát nem csak a létfenntartó termékek esetleges túlkínálata esetén elpazarolt ráfordítások.

Nézzük meg ennek igazolására közelebbről az utóbbi esetet! Legyen a termelési tevékenységek szintje mindkét megoldás esetében akkora, amely mellett éppen egységnyi munkaerőt használnak fel ($\mathbf{mx}^* = 1$). Ilyen esetben $\mathbf{Ax}$ az $\mathbf{Rx} + \mathbf{c}$ alakra egyszerűsödik ($\mathbf{Ax} = \mathbf{Rx} + \mathbf{c}$). Az első (M1) megoldás esetén a létfenntartó termékek egyensúlyi feltételét az

$$\mathbf{x}_1^* = \alpha_1\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 = \alpha_1(\mathbf{R}_{11}\mathbf{x}_1^* + \mathbf{c}_1)$$

egyenlőség, a másodikban (M2) az

$$\mathbf{x}_1 \geqq \alpha_2\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2^* = \alpha_2(\mathbf{R}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_1) + \alpha_2\mathbf{R}_{12}\mathbf{x}_2^*$$

gyenge egyenlőtlenség formájában írhatjuk fel.

Az $\mathbf{R}_{12}\mathbf{x}_2^*$ vektor feltétlenül tartalmaz pozitív komponenst, már ebből is látható, hogy azonos mennyiségű munkaerő felhasználása esetén α_2 szükségképpen kisebb, mint α_1. A felhasznált munkaerő egy részére ugyanis az $\mathbf{x}_2^*$ mennyiségű luxustermékek előállításához van szükség. A következő időszakban foglalkoztatott egységnyi munkaerő szükséges ($\alpha\mathbf{c}$) fogyasztását tehát kisebb munkaráfordítással is elő lehetne állítani. Másképpen fogalmazva: a munkaerő újratermeléséhez szükséges munka kisebb, mint az egyensúlyi munkaráfordítás. Luxustermékek termelése esetén tehát akkor is *pazarolnak a munkaerővel*, ha a létfenntartó termékekből *nincs túlkínálat*, ugyanis a veszendőbe menő luxustermékek előállítására fordítják.

Ikertermelés esetén a luxustermékek termelése már *nem feltétlenül* jelentené azt, hogy kevesebb munkával is ki lehetne elégíteni a következő időszak keresletét. Látni fogjuk azonban, hogy az, hogy a munkaerő újratermeléséhez szükséges munka mennyisége kisebb, mint az egyensúlyi munkaráfordítás, az ikertermelés esetén is a munkaerő pazarló felhasználását fogja jelezni. Egyik esetben sem lenne ugyanis akadálya annak, hogy nőjön az egy munkaórára jutó fogyasztás szintje (nagyobb **c** együtthatók), és/vagy csökkenjen az egy munkás által ledolgozandó munkaórák száma (nagyobb **m** együtthatók), vagyis javuljanak a munkások életkörülményei, éspedig anélkül, hogy ez akár a növekedési ütem, akár a profitráta csökkenéséhez vezetne. Egyébként is, ha a létfenntartó áruk szabad javak, akkor mi ösztönözné a munkásokat ingyenes bérmunka vállalására? Mi fogná vissza a munkásokat a jobb feltételek kiharcolásától, amikor luxusfogyasztásra (a modell feltevései szerint) nincs is igény? Egy ilyen állapot kialakulása teljesen idegen a szabad versenyes piaci egyensúly szellemétől.

Két dolgot tehetünk a modell e fogyatékosságának kiküszöbölése érdekében.

1. Mivel nincs luxusfogyasztás (ami persze irányulhatna létfenntartó termékekre is), eleve ki kell iktatnunk a modellből a luxustermékeket és iparágakat. Megtartanánk tehát a naturális (primális) és értékbeli (duális) összefüggések szigorú szimmetriáját. Az így redukált modell szükségképpen *irreducibilis* lesz, s ez igazolni látszik Neumannt, aki – ugyan csak a matematikai kényelem és talán a termodinamikai analógia kedvéért – kizárta elemzéséből a dekomponálható rendszereket.

2. A másik lehetőséget a Neumann-modell olyan kiterjesztése kínálja, amelyben már van *luxusfogyasztás* (**G** együtthatók), de megtartjuk a *létfenntartó bérek* feltevését. A modell egy ilyen általánosítása megszünteti a *teljes ráfordítási* ($\mathbf{R} + \mathbf{C}$) és a *teljes felhasználási* együtthatók ($\mathbf{R} + \mathbf{C} + \mathbf{G}$) azonosságát, a modell eredendő szimmetriáját. Egy ilyen modellben mindazonáltal helye van a luxustermékeknek is, és lehetővé válik ezek szerepének közgazdasági szempontból értelmes elemzése, mint ezt a következőkben meg is mutatjuk.

Az egyensúly feltételei luxustermékek és luxusfogyasztás esetén egy Ricardo–Leontief-modellben

Érdemes ezen a ponton egy rövid kitérőt tenni, s közelebbről megnézni a másodikként jelzett (M2) megoldást, a luxusfogyasztás bevezetésének hatását. Lényegében az itt követett megoldást alkalmazhatjuk a Neumann-modell esetén is, egy fontos kivétellel, ami Neumann és Leontief modelljét egymástól markánsan megkülönböztető jellegéből fakad. Neumann modellje az *ex ante* szemléletben fogant (bővebben erről lásd *Zalai* [1999]). Egy olyan elvont matematikai struktúrát vizsgált, amelynek nincs semmi közvetlen kapcsolata a megfigyelésekkel. Definiálja az egyensúly matematikai jellemzőit, s olyan elégséges feltevéseket keres, amelyek mellett az egyensúly létezése igazolható. Leontief modellje ezzel szemben a klasszikus, sőt még a korai neoklasszikus hagyományokra is jellemző *ex post* szemléletet követi. Modelljének változói és paraméterei megfigyelhető nagyságok, és eleve felteszi, hogy a gazdaság megfigyelt állapota egyensúlyinak tekinthető. Így a változók és paraméterek megfigyelt értékei *ab ovo* kielégítik az egyensúly feltételeit.

Egyebek között ez a szemléletbeli rokonság teszi különösen alkalmassá Leontief modelljét egyes klasszikus megállapítások formalizálására és általánosítására. Ezt csak tovább erősíti, hogy a klasszikusokhoz hasonlóan figyelmen kívül hagyja az ikertermelés jelenségét, ami nehezen leküzdhető akadályokat görget minden elemzés elé. Mindezen okoknál fogva a megvalósult egyensúly feltételeit egyenlőségek formájában írhatjuk fel, hiszen minden változó megfigyelt értékéről feltehetjük, hogy pozitív volt. (A nullaárú szabad javakat eleve figyelmen kívül hagyjuk.)

Ennek megfelelően luxusfogyasztás esetén az egyensúly feltételei – létfenntartó és luxustermékek, illetve termelő-, létfenntartó és luxusfogyasztás szerinti bontásban – a következő egyenletrendszerrel adhatók meg.

$$\mathbf{x}_1 = \alpha(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{C}_{11} + \mathbf{G}_{11})\mathbf{x}_1 + \alpha(\mathbf{R}_{12} + \mathbf{C}_{12} + \mathbf{G}_{12})\mathbf{x}_2 \qquad \text{(RL-}P1)$$

$$\mathbf{x}_2 = \alpha\mathbf{G}_{11}\mathbf{x}_1 + \alpha(\mathbf{R}_{22} + \mathbf{G}_{22})\mathbf{x}_2 \qquad \text{(RL-}P2)$$

$$\mathbf{p}_1 = \alpha\mathbf{p}_1(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{C}_{11}) \qquad \text{(RL-}D1)$$

$$\mathbf{p}_2 = \alpha\mathbf{p}_1(\mathbf{R}_{12} + \mathbf{C}_{12}) + \alpha\mathbf{p}_2\mathbf{R}_{22}, \qquad \text{(RL-}D2)$$

ahol $\mathbf{c}$, $\mathbf{m} \geq \mathbf{0}$, mint korábban, $\mathbf{G} = \mathbf{g}\circ\mathbf{m}$, ahol $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$ vektor az egy munkaórára jutó luxusfogyasztás együtthatóit tartalmazzák. Természetesen létfenntartó termékek is lehetnek luxusfogyasztás tárgyai, azt azonban mindenképpen feltesszük, hogy luxustermékből van luxusfogyasztás ($\mathbf{g}_2 \geq \mathbf{0}$, és így $\mathbf{g}_2\circ\mathbf{m} \geq \mathbf{0}$).

Ha nincs luxusfogyasztás, akkor a *növekedési* és a *profitpotenciál* értéke mindkét alrendszer esetén ugyanakkora. Ha viszont van luxusfogyasztás is, akkor a növekedési potenciálok az $(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{G}_{11}) = (\mathbf{R}_{11} + \mathbf{C}_{11} + \mathbf{G}_{11})$ és az $\mathbf{A}_{22} = (\mathbf{R}_{22} + \mathbf{G}_{22})$ teljes *felhasználási* mátrixblokkok domináns sajátértékeinek reciprokai, a profitpotenciálok pedig az $\mathbf{A}_{11} = (\mathbf{R}_{11} + \mathbf{C}_{11})$ és az $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{R}_{22}$ teljes *ráfordítási* mátrixblokkok domináns sajátértékei lesznek. A növekedési potenciálok tehát jellemzően kisebbek lesznek, mint a profitpotenciálok.

A primális feladat határozottan pozitív megoldása létezésének a szükséges és elégséges feltétele az, hogy teljesüljenek a $\lambda(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{G}_{11}) < 1/\alpha < \lambda(\mathbf{A}_{22} + \mathbf{G}_{22})$ relációk. A duális feladat pozitív megoldása létezésének pedig az a szükséges és elégséges feltétele, hogy teljesüljenek az $1/\alpha = \lambda(\mathbf{A}_{11}) > \lambda(\mathbf{A}_{22})$ relációk (lásd fentebb). Mindezek alapján beláthatjuk az 3. megállapítás igaz voltát.

3. Megállapítás (A tőkés árutermelés egyensúlya luxustermékek esetén)

a) Luxustermékeket csak akkor termelhetnek egyensúly esetén, ha van luxusfogyasztás is.

b) Az egyensúlyi profitráta megegyezik a létfenntartó alrendszer profitpotenciáljával.

c) A luxustermékek termelési körülményei és árai nem befolyásolják sem az egyensúlyi profitráta, sem a létfenntartó termékek árainak nagyságát, azaz a luxustermékek termelése nem csökkenti az egyensúlyi profitrátát.

d) Luxustermékek termelése viszont csak akkor egyeztethető össze pozitív árakkal és (a szükséges fogyasztás által meghatározott) pozitív bérrátával, ha a luxustermékek alrendszerének profitpotenciálja nagyobb, mint a létfenntartó alrendszeré.

e) Az egyensúlyi növekedési ütem nem lehet nagyobb a létfenntartó termékek növekedési potenciáljánál (tehát az egyensúlyi profitrátánál sem), ami csak akkor lenne elérhető, ha nem lenne luxusfogyasztás.

A fenti megállapításokból számos érdekes elméleti és elmélettörténeti következtetés vonható le. Ezek közül csak kettőre hívjuk fel a figyelmet itt. Az egyik egy elmélettörténeti érdekesség. *Ricardo* [1821] főművében már megfogalmazta a fenti harmadik konklúziót. Ez, illetve a Malthusszal folytatott levelezésében található utalások indították Sraffát arra a vitatott feltételezésre, hogy Ricardo használhatta a fenti modell kezdetleges, kéttermékes (gabona és selyem) változatát. Arra lehetne gondolni ugyanis, hogy Ricardo ebből vezette le, hogy az egyensúlyi profitráta elvben meghatározható az árak nélkül is, a létfenntartó mezőgazdasági szektorban a gabonában elsajátított értéktöbblet és az ugyancsak gabonában megelőlegezett tőke arányával *(corn rate theory of profit).* Ezt általánosította *Sraffa* [1960/1975] nevezetes művében. Itt mégsem rá hivatkozunk, mert modellje csak ármodell volt, ezért inkább a Ricardo–Leontief-modell elnevezés illik a fenti stacionárius modellre.

Egy másik elméleti érdekesség pedig abból a megállapításból fakad, hogy a luxusalrendszer profitpotenciáljának nagyobbnak kell lennie a létfenntartó alrendszer profitpotenciáljánál, azaz az $(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{C}_{11})$ mátrix domináns sajátértékének nagyobbnak kell lennie az $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{R}_{22}$ mátrixénál. Ha történetesen $\lambda(\mathbf{R}_{11}) < \lambda(\mathbf{R}_{22})$, akkor a fenti követelmény azt jelenti, hogy a luxustermékek termelése csak akkor lehetséges egyensúly esetén, ha a reálbér és/vagy a munkaintenzitás mértéke ($\mathbf{C}$ együtthatók szintje) eléri azt a kritikus értéket, ahol ez reláció a teljes ráfordítási együtthatók esetén megfordul, azaz $\lambda(\mathbf{R}_{11} + \mathbf{C}_{11}) < \lambda(\mathbf{R}_{22})$.

A paradox jelenségek elemzése az általános Marx–Neumann-modellben

A Marx–Neumann-modell ikertermelés és technológia válasz nélküli változatának az elemzése számos fontos megállapításhoz vezetett. Ezek közül a következőket emeljük ki, s tesszük vizsgálat tárgyává az általános lineáris tevékenységelemzési technológiát feltételező modell keretei között.

4. MEGÁLLAPÍTÁS. Az MLN-modell megoldásainak néhány fontos jellemzője a következő:

a) a modellnek mindig van olyan megoldása, amelyben a fogyasztás értéke pozitív;

b) az egyensúlyi tényező, sőt pozitív skalárral való szorzástól eltekintve a termelési és az árszerkezet tekintetében is egyetlen ilyen megoldás létezik, éspedig a legnagyobb arányos növekedési ütemhez rendelhető egyensúlyi állapot;

c) más lehetséges (kisebb ütemű) arányos növekedési pályát csak olyan árrendszer tehetne egyensúlyi megoldássá, amely esetén a fogyasztás értéke nulla lenne (közgazdasági szempontból értelmetlen);

d) ilyen megoldások csak akkor létezhetnek, ha vannak luxustermékek, amelyek miatt a termelési rendszer dekomponálható lesz;

e) az utóbbiak esetén az egy foglalkoztatottra jutó fogyasztás növelhető lenne a növekedési ütem, illetve a profitráta csökkenése nélkül;

f) a modellből előzetesen kiszűrhetők azok a luxustermékek és eljárások, amelyek ilyen megoldáshoz vezetnek, és ezért Neumannal együtt joggal feltehetjük, hogy a vizsgált gazdaság nem dekomponálható, és így az egyensúlyi tényező tekintetében egyetlen megoldás létezik csupán.

Nézzük meg most, fennállnak-e, illetve hogyan módosulnak a fenti megállapítások az általánosabb Marx–Neumann-modellben (MN)! Ez a modell „csak" a kibocsátási együtthatók mátrixa és általában az együtthatómátrixok méretében fog különbözni az MLN-modelltől, és egyensúlyi alapfeltételei a következők lesznek:

$$\alpha > 0,\ \mathbf{x}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \qquad \text{(MN0)}$$

$$\mathbf{Bx} \geqq \alpha(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}, \qquad \text{(MN-}P\text{)}$$

$$\mathbf{pB} \leqq \alpha\mathbf{p}(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m}). \qquad \text{(MN-}D\text{)}$$

Tegyük a modell specifikációját teljessé először az egyensúlyi tevékenységek és árak szintjét meghatározó szokásos

$$\mathbf{1x} = \mathbf{p1} = 1 \qquad \text{(KMT0)}$$

megkötésekkel, illetve a *Kemeny–Morgenstern–Thompson* [1956]-féle értékteremtés feltételével:

$$\mathbf{pBx} > 0. \qquad \text{(KMT3)}$$

A fenti feltevésekkel definiált Neumann-modellnek, mint tudjuk, mindig van megoldása, valahányszor az együtthatómátrixok eleget tesznek a $\mathbf{B1} > \mathbf{0}$ és $\mathbf{1A} > \mathbf{0}$ KMT-feltevéseknek. A kérdés tehát csak az, hogy van-e ezek között közgazdasági szempontból is értelmes megoldás. Nyilván most is érdektelenek lesznek azok a megoldások, amelyekben nem használnak fel munkaerőt ($\mathbf{mx} = 0$, teljesen automatizált gazdaság), illetve amelyekben a fogyasztási cikkek mind szabad javak ($\mathbf{pc} = 0$, ingyenes bérmunka).

A *teljes automatizálás* lehetőségét most is kizárjuk a munkaerő nélkülözhetetlenségének feltevésével, azaz nem létezik olyan $\alpha > 0$ és $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, amelyek esetén $\mathbf{Bx} \geqq \alpha(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}$, és $\mathbf{mx} = 0$. E feltevés biztosítja, hogy a lehetséges növekedési tényezők tartománya felülről korlátos lesz.

Bizonyítás. Azt, hogy a lehetséges növekedési tényezők tartománya a munkaerő nélkülözhetetlensége esetén felülről korlátos lesz, a következőképpen láthatjuk be. Ha α lehetséges növekedési tényező, akkor van olyan $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{1x} = 1$, hogy $\mathbf{Bx} \geqq \alpha(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}$. Az utóbbi egyenlőtlenség két oldalán levő kifejezéseket rendre összegezve (az összegző vektorral beszorozva) azt kapjuk, hogy $\mathbf{1B1} \geqq \mathbf{1Bx} \geqq \alpha\mathbf{1}(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}$, ahol $\mathbf{1}(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x} \geqq (\mathbf{1c})(\mathbf{mx}) > 0$. Emiatt α értéke nyilván korlátos. ■

Ez volt az $\mathbf{1A} > 0$ KMT-feltevés funkciója is a KMT-feltevések között, ezért a jelen modellben ezt már nem kell külön előírni. A pozitív bővülési tényező létezését garantáló $\mathbf{B1} > 0$ feltevést viszont továbbra is megtartjuk.[7] Mindez biztosítja, hogy a (KMT3) feltétellel kiegészített Marx–Neumann-modellnek legyen megoldása.

Az *ingyenes bérmunka* lehetőségét azonban már nem lehet egy ehhez hasonló, egyszerű és kézenfekvő előzetes feltevéssel eleve kizárni. De ha feltesszük, hogy van ilyen ($\mathbf{pc} > 0$), illet-

[7] Ezt a feltevést enyhíthetnék azzal, hogy csak azt tesszük fel, hogy van egyáltalán olyan $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$, amely esetén $\mathbf{Bx}^* > \mathbf{0}$. Ennek azonban csak a Neumann-modell egy olyan általánosításában van jelentősége, ahol a $\mathbf{B}$ mátrix nettó kibocsátási együtthatókat tartalmaz, így lehetnek negatív elemei is (lásd *Zalai* [2006]).

ve csak ilyen megoldást fogadunk el, akkor az **x** és a **p** változók szintjét, az **1x** = **p1** = 1 egyenletek helyett, **mx** = **pc** = 1 egyenlőségekkel is megköthetjük. Ha ezt tesszük, akkor az MN-modell homogén formában felírt feltevéseit átírhatjuk a következő inhomogén alakokba:

$$\mathbf{Bx} \geqq \alpha\cdot(\mathbf{Rx} + \mathbf{c}), \qquad \text{(MN1}a\text{)}$$

$$\mathbf{pB} \leqq \alpha\cdot(\mathbf{pR} + \mathbf{m}). \qquad \text{(MN2}a\text{)}$$

Morishima [1964] megmutatta, hogy kölcsönös és egyértelmű kapcsolat létesíthető az MN-modell közgazdasági szempontból értelmes megoldásai és a következő (LP1) lineáris programozási feladatpár (optimális) megoldásai között.

5. MEGÁLLAPÍTÁS. A Marx–Neumann-modellnek akkor és csak akkor létezik olyan (α, **x**, **p**) megoldása, amelyben **pc** > 0, ha az α egyensúlyi tényező rögzített értéke mellett létezik megoldása az LP1 feladatpárnak, s abban a célfüggvények (közös) optimális értéke 1.

$$\begin{array}{cc} (P1) & (D1) \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} & \mathbf{p} \geqq \mathbf{0} \\ [(1/\alpha)\cdot\mathbf{B} - \mathbf{R}]\mathbf{x} \geqq \mathbf{c} & \mathbf{p}[(1/\alpha)\cdot\mathbf{B} - \mathbf{R}] \leqq \mathbf{m} \\ \mathbf{mx} \rightarrow \text{min!} & \mathbf{pc} \rightarrow \text{max!} \end{array} \qquad \text{(LP1)}$$

A megállapítás helyessége egyszerűen következik az egyensúly és az LP-modell feltételeinek azonosságából. Az **mx** függvény minimuma ($\mathbf{mx}^0$) az a legkisebb munkaráfordítás, amely az α bővülési tényező mellett az egységnyi munkaerő szükséges fogyasztásának előállításához szükséges. Az $\mathbf{mx}^0 = 1$ érték azt jelenti, hogy minden munkaráfordítás a munkaerő újratermelését szolgálja (egységnyi munkaerő újratermelését szolgáló fogyasztói kosár előállításának éppen egy egység a munkaigénye.) Ez a felismerés vezet el a 6. megállapításhoz.

6. MEGÁLLAPÍTÁS. Adott paraméterek mellett a Marx–Neumann-modell KMT-feltételeket kielégítő α egyensúlyi tényezőjű megoldása akkor és csak akkor lesz közgazdasági szempontból értelmes, ha nincs a munkaerő-újratermelés szempontjából felesleges (pazarló) munkaráfordítás.

Ugyanahhoz a következtetéshez jutottunk tehát, mint a Leontief-eljárás esetén, ahol láttuk, hogy a fogyasztási javak nulla ára azt jelzi, hogy a $\mathbf{C} = \mathbf{c}\circ\mathbf{m}$ *fogyasztási együtthatók* mátrixában szereplő paraméterek *nem kompatíbilisek* a **B** és **R** *technológiai együtthatókkal*, illetve a versenyzői *egyensúly feltevésével*. Az adott α bővülési tényezőt rögzítve, az egy órai munkára jutó fogyasztás (**c**) növelésével és/vagy a munkaintenzitás csökkentésével (az **m** paraméterek növelésével) itt is megteremthetjük a szükséges konzisztenciát a paraméterek között.

Ezt a következő gondolatmenettel igazolhatjuk. Helyettesítsünk az LP1 feladatban **c** helyébe $\varphi\mathbf{c}$-t, ami ugyanazt jelenti, mintha a $\mathbf{c}\circ\mathbf{m}$ fogyasztási együtthatók mátrixának elemeit rendre megszoroznánk a φ skalárral. Láttuk, hogy adott α bővülési tényező és $\varphi\mathbf{c}$ fogyasztói kosár pontosan akkor lehet közgazdasági szempontból értelmes egyensúlyi megoldás része, ha $\varphi\mathbf{c}$ előállításának minimális munkaigénye éppen 1. Viszonylag könnyen belátható, hogy az LP1 feladat célfüggvényének optimális értéke ($\mathbf{mx}^0$) a φ változó monoton növekvő függvénye, ha a munkaerő nélkülözhetetlen, ahogy ezt feltettük. Ha tehát az LP1 feladatnak egyáltalán van lehetséges megoldása, φ-nek mindig lesz olyan értéke, amely esetén $\varphi\mathbf{c}$ előállításának minimális munkaigénye éppen 1 lesz. Az is egyszerűen igazolható, hogy φ ezen értékét, illetve az egyensúlyi termelési és árrendszert megkaphatjuk az alábbi LP2 feladat megoldásából, ahol $\varphi = w$ a *reálbér szintje*.

$$\begin{array}{cc} (P2) & (D2) \\ \varphi \geqq 0,\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} & w \geqq 0,\ \mathbf{p} \geqq \mathbf{0} \\ [(1/\alpha)\mathbf{B} - \mathbf{R}]\mathbf{x} \geqq \varphi\mathbf{c} & \mathbf{p}[(1/\alpha)\mathbf{B} - \mathbf{R}] \leqq w\mathbf{m} \\ \mathbf{mx} \leqq 1 & \mathbf{pc} \geqq 1 \\ \varphi \rightarrow \max! & w \rightarrow \min! \end{array} \qquad \text{(LP2)}$$

BIZONYÍTÁS. Egyszerű behelyettesítésekkel beláthatjuk, hogy ha $\mathbf{x}^0$ és $\mathbf{p}^0$ az *LP*1 feladat (optimális) megoldása, és $\mathbf{mx}^0 = \mathbf{p}^0\mathbf{c} > 0$, akkor a $\varphi^* = 1/\mathbf{mx}^0$, $\mathbf{x}^* = \varphi^* \cdot \mathbf{x}^0$ és a $w^* = 1/\mathbf{p}^0\mathbf{c}$, $\mathbf{p}^* = w^*\mathbf{p}^0$ együttes kielégíti az *LP*2 feladat primális, illetve duális feltételeit az α paraméter ugyanazon értéke mellett. Mivel pedig a célfüggvények értéke ugyanakkora, ezért egyúttal optimális megoldás. Ugyanígy láthatjuk be fordítva. ■

Helyettesítsük ennek alapján az egy munkaórára jutó fogyasztás **c** vektorát $\varphi\mathbf{c}$-vel, mintha **c** csak *a fogyasztás szerkezetét* rögzítené, φ pedig a *reálbér szintje* lenne!

7. MEGÁLLAPÍTÁS: Ha a Marx–Neumann-modellnek a KMT-feltételek mellett kapott megoldása közgazdasági szempontból értelmetlen ($\mathbf{pc} = 0$), akkor a legnagyobb α növekedési tényezőhöz mindig egyértelműen hozzárendelhető a reálbér azon szintje (φ), amely esetén α a $\varphi\mathbf{c}$ mellett is a legnagyobb növekedési tényező maradna, és közgazdasági szempontból értelmes **x** és **p** megoldáshoz jutunk.

Elérkeztünk a dolgozatunk célja szempontjából minden bizonnyal a legfontosabb megállapításhoz. Ez lesz az, amely igazolja Neumann zseniális sejtését, hogy be lehet, sőt célszerű is bevezetni olyan feltevést, amely az egyensúlyi tényező unicitását eredményezi. Ez egyszersmind a Neumann-modell KMT-féle általánosításának a kritikája is, ami persze csak akkor válik jogossá, amikor különválasztjuk a termelő- és a személyes fogyasztási együtthatókat a modellben, de továbbra is eltekintünk a luxusfogyasztástól.

8. MEGÁLLAPÍTÁS. Ha a munka nélkülözhetetlen, és a KMT-feltételek mellett Marx–Neumann-modellnek létezik közgazdasági szempontból értelmes ($\mathbf{pc} > 0$) megoldása, akkor annak egyensúlyi tényezője szükségképpen a legnagyobb lehetséges arányos bővülési tényező.

A 8. perdöntő megállapítást, úgy tűnik, *Bromek* [1974] fogalmazta meg és igazolta először. Itt azonban a Bromekénél jóval egyszerűbb bizonyítást adunk.[8]

BIZONYÍTÁS. Jelöljük a $\mathbf{B}$, $\mathbf{A} = (\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})$ technológia által megengedett növekedési tényezők halmazát $H(\mathbf{B}, \mathbf{A})$-vel, ahol

$$H(\mathbf{B}, \mathbf{A}) = \{\alpha : \exists \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ [\mathbf{B} - \alpha\mathbf{A}]\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{1x} = 1\}.$$

A munka nélkülözhetetlensége miatt a fenti α és **x** esetén $\mathbf{mx} > 0$, valahányszor $\alpha > 0$. Ezért az adott **x** vektort **mx**-vel elosztva mindig képezhető olyan $\mathbf{x}'$ vektor, amely esetén $[\mathbf{B} - \alpha\mathbf{A}]\mathbf{x}' \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{mx}' = 1$.

Tegyük fel, hogy az $(\alpha^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ megoldásban szereplő α^* nem maximális egyensúlyi tényező. Ekkor létezik olyan $\alpha' > \alpha^*$, $\alpha' \in H(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ és $\mathbf{x}' \geqq \mathbf{0}$, hogy $\mathbf{mx}' = 1$ és $[\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{A}]\mathbf{x}'$

[8] *Bromek* [1974] az optimális felhalmozás–fogyasztás és a bér–profit frontvonalak Marx–Neumann-modellbeli értelmezésének elemzése (lásd később) kapcsán jutott erre az eredményre. A matematikusi megközelítésére jellemző módon nem ismerte fel eredményének tágabb közgazdasági jelentőségét.

$\geqq \mathbf{0}$, és ebből következően $(1/\alpha')\cdot\mathbf{Bx}' \geqq \mathbf{Rx}' + \mathbf{c}$. Az utóbbi egyenlőtlenségből látható, hogy $[(1/\alpha')\mathbf{Bx}']_i > 0$, valahányszor $c_i > 0$, és mivel $1/\alpha^* > 1/\alpha'$, ezért

$$[(1/\alpha^*)\mathbf{Bx}' - \mathbf{Rx}']_i > c_i, \qquad \text{ha } c_i > 0,$$

$$[(1/\alpha^*)\mathbf{Bx}' - \mathbf{Rx}']_i \geqq 0, \qquad \text{egyébként.}$$

Mindezek miatt található olyan $0 < k < 1$, hogy

$$k[(1/\alpha^*)\mathbf{B} - \mathbf{R}]\mathbf{x}' \geqq \mathbf{c}.$$

Az $\mathbf{x} = k\mathbf{x}'$ vektor $\alpha = \alpha^*$ esetén kielégíti az LP1 feladat primális feltételeit, és $\mathbf{mx} < 1$. A célfüggvény optimális értéke ennél csak kisebb lehet. A fentiek és az 5. megállapításban igazoltak miatt tehát $(\alpha^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ nem lehetett volna az MN-modell egyensúlyi megoldása. ■

A 8. megállapítás egyrészt arra mutat rá, hogy ha az *a priori* adott paraméterek mellett léteznek más egyensúlyi tényezővel rendelkező megoldások (a gazdaság dekomponálható), csak a *legnagyobb bővülési tényezőhöz tartozó megoldások* lesznek érdekesek közgazdasági szempontból, a többiek nem.

Másrészt, ismét igazoltuk, hogy a paraméterekre tett KMT-feltevések ($\mathbf{B1} > \mathbf{0}$ és $\mathbf{1A} > \mathbf{0}$) nem elégségesek a közgazdasági szempontból releváns megoldások létezésének jellemzésére. A fenti megállapítások fényében mindenekelőtt megfogalmazhatunk egy, a paraméterek konzisztenciájára vonatkozó kritériumot.

9. MEGÁLLAPÍTÁS: A Marx–Neumann-modellben csak olyan **c** *fogyasztási vektor konzisztens* az adott **B**, **R** és **m** *technológiai együtthatókkal*, amely esetén az LP1 feladat optimális megoldásában a célfüggvény értéke 1 lesz, ha α a **B** és az $\mathbf{A} = (\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})$ együtthatókkal adott Neumann-modell legnagyobb bővülési tényezője.

E konzisztenciafeltevés teljesülése azonban általában csak utólag derül ki tetszőlegesen megadott paraméterek esetén. Ha viszont kiderül, hogy nem teljesül, akkor a paraméterek hiányzó konzisztenciáját a fogyasztási együtthatók felülvizsgálatával, például az LP2 feladat segítségével meg lehet, és meg is kell teremteni.

Harmadrészt, bár a $\mathbf{pBx} > 0$ és a $\mathbf{pAx} > 0$ egyenlőtlenségek csak egyidejűleg állhatnak fenn, mint már a MLN-modell elemzése kapcsán arra rámutattunk, a közgazdasági logika alapján a $\mathbf{pAx} > 0$ kiegészítő feltétel előírása az indokolt. A termelő- és személyes fogyasztási együtthatók $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{C}$ alakú szétválasztása esetén azonban még ez sem elég, hanem a $\mathbf{pCx} > 0$ kiegészítő feltételt szükséges bevezetni, amelynek teljesülése esetén természetesen fenn fognak állni a $\mathbf{pBx} > 0$ és a $\mathbf{pAx} > 0$ egyenlőtlenségek is.

Ebből következően a Marx–Neumann-modell (MN1)–(MN3) alapösszefüggéseit – a (KMT0) és (KMT3) feltételek helyett – az

$$\mathbf{mx} = \mathbf{pc} = 1 \qquad \text{(MN4)}$$

pótlólagos feltétellel kell kiegészíteni.

Mindezekből adódik dolgozatunk második legfontosabb megállapítása.

10. MEGÁLLAPÍTÁS. A Marx–Neumann-modell kiegészítő feltevéseit nem a szokásos KMT-, hanem az (MN4) feltételekkel kell megadni. Az így definiált modell megoldásának létezését a paraméterekre tett alábbi feltevések biztosítják:

a) $\mathbf{B1} > \mathbf{0}$,

b) a munkaerő nem nélkülözhető, és

c) a technológiai és a fogyasztási együtthatók konzisztensek egymással és a piaci egyensúly követelményével (lásd 9. megállapítás).

Ezek a feltevések nemcsak a közgazdasági szempontból értelmes megoldások létezését szavatolják, hanem azt is, hogy – Neumann feltevéseivel összhangban – az egyensúlyi tényező egyértelműen meghatározott (*unicitás*), és megegyezik a legnagyobb lehetséges arányos bővülési tényezővel (*optimum*).

E megállapításokból az is kiviláglik, hogy tetszőleges módon megadott paraméterek esetén az általános MN-modellből is ki lehet szűrni azokat a javakat és tevékenységeket, amelyek csak az alacsonyabb bővülési tényezőjű, közgazdasági szempontból irreleváns megoldásokban játszanak szerepet. *Morishima* [1971] nyomán a fenti szűrés után fennmaradókat *első osztályú tevékenységeknek, illetve termékeknek*, magát a szűkítés eredményét pedig *első osztályú alrendszernek* nevezhetjük. Ez felel meg a Leontief-technológia esetén értelmezett *létfenntartó* termékeknek és tevékenységeknek.

Az első osztályú alrendszer azonban, a Leontief-modell létfenntartó alrendszerrel ellentétben, nem lesz feltétlenül irreducibilis, és az elsőrendű termékek és tevékenységek sem tekinthetők feltétlenül létfenntartónak. Egyáltalán nem zárható ki ugyanis, hogy létezzenek alternatív egyensúlyi tevékenységek (eljárások), még kevésbé lesz igaz az, hogy minden elsőrendű tevékenység helyet kap valamelyik egyensúlyi eljárásban. Az alternatív egyensúlyi eljárásokban megjelenő termékek köre is eltérő lehet. De mindezek ellenére az elsőrendű alrendszer megőrzi a létfenntartó Leontief-alrendszer azon tulajdonságát, hogy általa az egyensúlyi növekedési és profittényező egyértelműen meghatározott.

A létfenntartó termékek és tevékenységek a Leontief-gazdaság sajátos fogalmai. A Neumann-modellben nem tehetjük fel, és nincs is rá szükség, hogy a gazdaság irreducibilis legyen, mint a Leontief-technológia esetében. Utólag persze, az egyensúlyi megoldás ismeretében lehetne ugyan redukálni a modellt egy olyan irreducibilis alrendszerére, amelynek a megoldása megegyezne az eredeti rendszer megoldásával.[9] Ez azonban nemcsak önkényes lenne, hanem ellentétes is lenne Neumann elemzésének szellemével, aki éppen az alternatív eljárások közötti választás és az árrendszerek kölcsönös meghatározottságát kívánta demonstrálni modelljével.

A felhalmozás–fogyasztás és a bér–profit frontvonalak a Marx–Neumann-modellben

Befejezésül röviden bemutatjuk, hogyan elemezhetjük a felvonultatott eszközök és megállapítások segítségével a neoklasszikus növekedéselméletből ismert optimális felhalmozás–fogyasztás és a bér–profit frontvonalakat. *Bruno* [1969] mutatott rá elsőként, hogy a hicksi „*tényezőár*” (bér–profit), illetve az „*optimális transzformációs*” (fogyasztás–felhalmozás) *frontvonalak* a neoklasszikus növekedési modell esetén egybeesnek, „alapvető duális kapcsolat” van közöttük. Neumann nem elemezte – az adott specifikációban nem is elemezhette – az átváltási lehetőségeket. Morishima azonban, a munkaerő felhasználását és fogyasztását bevezetve, és a konstans $\mathbf{c}$ fogyasztási együtthatók helyébe a $\varphi\mathbf{c}$ meghatározást helyettesítve, alkalmassá tette Neumann így módosított modelljét ezeknek az átváltási frontvonalaknak az értelmezésére.

A létfenntartó bérmeghatározás következtében a φ változó egyidejűleg képviseli a fogyasztás és a reálbér szintjét. Tegyük fel, hogy egy adott tartományban minden φ érték

[9] Voltaképpen ezt tette *Sraffa* [1960/1975]), aki még azt is feltette, hogy mindig található olyan redukált modell, amelyben a termékek és a tevékenységek száma megegyezik egymással (négyzetes technika).

mellett van a modellnek, éspedig – mint Neumann feltevése szavatolta – az α egyensúlyi tényező tekintetében *egyértelmű* megoldása. Az ilyen tartományban a $\varphi \to \alpha$ hozzárendelés révén egy olyan $\alpha(\varphi)$ függvényt kapunk, amely egyik oldalról a *fogyasztás* és a *felhalmozás* (növekedési ütem), másik oldalról a *reálbér* és a *profitráta* közti átváltási lehetőséget ábrázolja. A két frontvonal egybeesik, ugyanúgy, mint az optimális növekedés neoklasszikus modelljében.

A két frontvonal közötti duális kapcsolat voltaképpen annak következménye, hogy – mint azt Neumann hangsúlyozta – modelljének egyértelműen meghatározott egyensúlyi tényezője nem más, mint az

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{pBx}/\mathbf{pAx}$$

alakban definiált *profitfüggvény nyeregpontja*. Ha $(\alpha^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ egyensúlyi megoldás, akkor rögzített $\mathbf{x}^*$ mellett az $F(\mathbf{x}^*, \mathbf{p})$ függvény értéke a $\mathbf{p}^*$ pontban veszi fel a minimális, $\mathbf{p}^*$ rögzítése esetében viszont az $F(\mathbf{x}, \mathbf{p}^*)$ függvény az $\mathbf{x}^*$ pontban veszi fel a maximális értékét, éspedig mindkét esetben α^*-ot.

A megoldás *unicitása* az egyensúlyi tényező tekintetében ezért is fontos volt Neumann számára. (Ez kapcsolta össze egyensúly modelljét a kétszemélyes játékok modelljével és a termodinamikai potenciálfüggvényével.) A két tényező közös egyensúlyi értéke ugyanis egyik oldalról nem más, mint az adott termelési-felhasználási együtthatók által lehetővé tett *legnagyobb növekedési ráta*, másik oldalról pedig a *legkisebb megtérülési ráta*:

$$\lambda^*(\varphi) = \max\{\lambda\colon \exists\, \mathbf{x} \geqq 0,\ \mathbf{1x} = 1,\ \mathbf{Bx} \geqq (1+\lambda)(\mathbf{R} + \varphi\mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}\},$$

$$\pi^*(\varphi) = \min\{\pi\colon \exists\, \mathbf{x} \geqq 0,\ \mathbf{1x} = 1,\ \mathbf{pB} \leqq (1+\pi)\mathbf{p}(\mathbf{R} + \varphi\mathbf{c}\circ\mathbf{m})\}.$$

Morishima az utóbbi két összefüggéssel definiált függvényeket tekintette a felhalmozás–fogyasztás, illetve a bér–profit átváltási frontvonalak megfelelőinek a fogyasztást explicitté és változóvá tevő, akár dekomponálható Marx–Neumann-modellek keretében is. Mivel a KMT-feltételekkel definiálta modelljét, ezért több egyensúlyi tényezőjű megoldás létezése esetén a fenti két szélsőérték különbözik egymástól. A *Morishima* [1971]-ben ezt a jelenséget úgy értelmezte, hogy a dekomponálható Neumann-gazdaságok esetében több, „*egymás alá rendelt*" átváltási frontvonalat lehet értelmezni. Adott φ érték esetén $\lambda^*(\varphi)$ a *maximális növekedési ütemű*, $\pi^*(\varphi)$ a *minimális profitrátájú frontvonal* pontját adja meg. Morishima úgy értelmezte, hogy ez utóbbiak felelnek meg a neoklasszikus modell „*optimális átváltási"*, illetve a „*bér–profit"* görbéinek a Neumann-modell esetében, s így nem feltétlenül esnek egybe.

Morishima fenti értelmezése azonban több szempontból is kifogásolható. Egyrészt, a bér–profit átváltási frontvonalat Hicks definíciójától eltérően használja. Hicksnél ugyanis a profitráta mindig az adott bér mellett lehetséges legnagyobb, nem pedig a legkisebb érték. Másrészt, mint láttuk, φ-nek bőven lehetnek olyan értékei, amelyek mellett van ugyan megoldása a Neumann-modellnek, de közgazdasági szempontból értelmetlen: pozitív reálbér, nulla nominális bérráta. Harmadrészt, ami a legkritikusabb észrevétel, több megoldás esetén, mint láttuk, a minimális profitrátájú frontvonalhoz tartozó nominális bérráta értéke eleve csak nulla lehet.

Mivel egy adott φ fogyasztási szint mellett több egyensúlyi α tényező is létezhet, sőt az is előfordulhat, hogy nem tartozik hozzá közgazdasági szempontból értelmes megoldás, ezért *Bromek* [1974] a fogyasztás szintje helyett a lehetséges egyensúlyi tényezőt tekintette kiinduló paraméternek, és ezekhez kereste meg a fogyasztás elérhető legnagyobb szintjét ($\alpha \to \varphi$ hozzárendelés). Mint láttuk, ha az LP2 programozási feladatnak van megoldása, akkor az egyértelműen meghatározza a fogyasztás, illetve reálbér α paraméter adott értékéhez tartozó legnagyobb szintjét (φ^*), sőt az ahhoz tartozó egyensúlyi tevékenységszintek ($\mathbf{x}^*$) és árak ($\mathbf{p}^*$) vektorát is. Így α értékét parametrikusan változtatva, elvben tehát előállíthatjuk a két tényező közötti átváltási viszonyt leíró $\varphi(\alpha)$ függvényt, amit a keresett $\alpha(\varphi)$ függvény inverzének tekinthetünk. A $\varphi(\alpha)$ függvény értelmezési tartományát egy közgazdasági szempontból triviális feltevéssel adhatjuk meg.

11. MEGÁLLAPÍTÁS. Az α paraméter adott értéke mellett az LP2 feladatnak pontosan akkor létezik megoldása, ha van olyan $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$, amely esetén fennáll a $[(1/\alpha)\mathbf{B} - \mathbf{R}] \geqq \mathbf{c}$, illetve $(\mathbf{B} - \alpha\mathbf{R})\mathbf{z} \geqq \mathbf{c}$ egyenlőtlenség. A $[(1/\alpha)\mathbf{B}, \mathbf{R}]$, illetve $(\mathbf{B}, \alpha\mathbf{R})$ kibocsátási/ráfordítási együtthatókkal adott eljárás esetén tehát a fogyasztási cikkek mindegyikéből keletkezhet egyidejűleg pozitív végső kibocsátás, ezért az ilyen eljárásokat **c**-*produktívnak* nevezhetjük.

Bromek „kopernikuszi fordulata" egy csapásra megoldotta a vitatható problémákat. Először, az átváltási határgörbe így értelmezett és nyert (α, φ) pontjai csak közgazdasági szempontból értelmes megoldásokhoz tartozó megoldások. Másodszor, összhangban a vizsgált átváltási görbék szokásos értelmezésével, az ezekben szereplő α egyensúlyi tényező az adott φ fogyasztási szint (reálbér) mellett a lehetséges legnagyobb bővülési tényező (profitráta), és fordítva. Harmadszor, az így definiált egyensúlyi felhalmozás–fogyasztás és a bér–profit átváltási frontvonalak egybeesnek, eleget tesznek a Bruno-féle dualitási feltételnek.

Bromek kimerítően jellemezte matematikai szempontból a $\varphi(\alpha)$ átváltási frontvonalat. Legfontosabb megállapításait – néhány kiegészítéssel és közgazdasági értelmezéssel megfejelve – egy újabb megállapításban foglaljuk össze. Ehhez fel használjuk *az állandó tőke nélkülözhetőségének fogalmát.*

DEFINÍCIÓ. A termékráfordítás, azaz az állandó tőke akkor és csak akkor *nélkülözhető* egy Marx–Neumann-gazdaságban, ha az újratermelés ezek felhasználása nélkül is folytatható, azaz létezik olyan $\alpha > 0$ és $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, amelyek esetén teljesülnek a $\mathbf{Bx} \geqq \alpha(\mathbf{R} + \mathbf{c}\circ\mathbf{m})\mathbf{x}$ mérlegegyensúlyi feltételek, de ugyanakkor $\mathbf{Rx} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás nélkül közöljük Bromek legfontosabb eredményeit, amelyekből láthatók a Marx–Neumann-modell közgazdasági szempontból értelmes megoldásaival definiált felhalmozás–fogyasztás, illetve az azzal egybeeső reálbér–profitráta frontvonal tulajdonságai.

12. MEGÁLLAPÍTÁS. Legyen a munkaerő (a változó tőke) nélkülözhetetlen, és $\mathbf{B1} > \mathbf{0}$ egy olyan Marx–Neumann-modellben, amelyben a fogyasztás szintje (φ) változó paraméter.

a) A $\varphi(\alpha)$ átváltási görbe mindenhol értelmezett, és monoton csökkenő egy $(0, \alpha_0)$ összefüggő tartományban, ahol α_0 végtelen, ha az állandó tőke nélkülözhető.

b) Az α_0 egyébként nem más, mint a $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ együtthatókkal definiált Neumann-modell azon legnagyobb egyensúlyi tényezője, amely esetén az egyensúlyban pozitív szinten előállítható termékek indexeinek halmaza tartalmazza a **c** vektor pozitív elemeinek indexeit.

c) Az átváltási görbének véges számú pontban lehet csak szakadása, nevezetesen ott, ahol a $(\mathbf{B}, \mathbf{R})$ együtthatókkal definiált Neumann-modellnek egyensúlyi megoldása van, de ez utóbbi pontokban is folytonos alulról.

d) A $\varphi(\alpha)$ átváltási görbe a végtelenből indul, és egy olyan nemnegatív értékhez tart, amely 0, ha α_0 benne van a függvény értelmezési tartományában (azaz annak felső korlátja).

Ezek alapján már láthatjuk azt is, hogyan néz ki $\varphi(\alpha)$ átváltási görbe inverz függvénye, $\alpha(\varphi)$. Itt az értelmezési tartomány már nem összefüggő, lehetnek benne szakadási helyek. Azok a φ értékek esnek ki, amelyek mellett a KMT-feltételekkel definiált Marx–Neumann-modellnek van ugyan megoldása, de az közgazdasági szempontból nem értelmes.

Ezeket a megállapításokat Bromek egyszerű kéttermékes példájával szemléltetjük. Legyenek az MN-modell paraméterei a következők:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{R}=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}c\\ 0\end{pmatrix}\quad \mathbf{m}=(1,\ 1).$$

Ezen együtthatók esetén a mérlegegyensúlyi feltételek a következők lesznek:

$$x_1 + 2x_2 \geqq \alpha\big[(1/3 + c)x_1 + (2/3 + c)x_2\big],$$

$$2x_2 \geqq \alpha 3/2x_2.$$

Ezekből látható, hogy $\alpha \leqq 4/3$, ha $x_2 > 0$. Az első termék az egyetlen létszükségleti cikk, amit mindenképpen termelni kell, és árának pozitívnak kell lennie ahhoz, hogy teljesüljön a **pc** > 0 feltétel. Tehát $p_1 > 0$, ezért az első feltétel mindig egyenlőség formájában teljesül. Legyen $x_1 + x_2 = 1$, és fejezzük ki c-t az egyenlőségre átalakított első feltételből:

$$c=\frac{(1+x_2)(3-\alpha)}{3\alpha}.$$

Ebből látható, hogy adott α mellett c értéke annál nagyobb, minél nagyobb x_2, azaz $x_2 = 1$ és $x_1 = 0$, amikor is

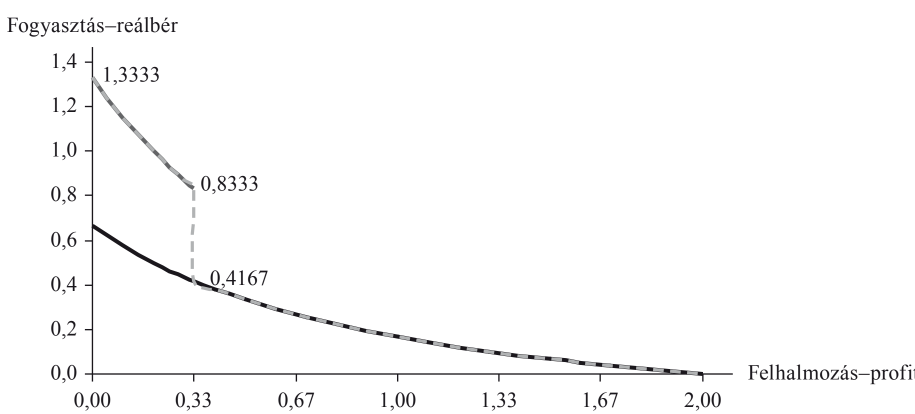
$$c=\frac{2(3-\alpha)}{3\alpha}.$$

Láttuk ugyanakkor, hogy x_2 csak akkor lehet pozitív, ha $\rho \leqq 1/3$. Ahogy ρ értéke nullából elindulva nő, c értéke a kezdeti 4/3-ról fokozatosan csökken és $\alpha = 4/3$-nál 5/6 értéket vesz fel. Itt váltás következik be, s amint α értéke meghaladja 4/3-ot, x_2 nullává válik, és x_1 értéke 1 lesz. Ekkor

$$c=\frac{3-\alpha}{3\alpha},$$

c értéke tehát $\alpha = 4/3$ ponton áthaladva felére csökken, de mindaddig pozitív marad, amíg α el nem éri 3-at. Az eredményül kapott bér–profitráta ($\rho = \alpha - 1$) határvonalat az *1. ábrán* láthatjuk.

1. ábra
A reálbér–profitráta határvonal



Az *1. ábrán* látható, hogy $\rho = 1/3$ értéknél a bér–profitráta határvonalban szakadás áll be, jelezve, hogy nincs megoldása a modellnek, ha c értéke 5/6 és 5/12 közé esik.

Következtetések

Foglaljuk össze fontosabb következtetéseinket! *Kemeny–Morgenstern–Thompson* [1956] a modelljének általánosítása során megszüntette Neumannak a vizsgált gazdaság nem dekomponálható voltát eredményező feltevését, és ezzel együtt a modellnek az egyensúlyi tényező tekintetében megmutatkozó unicitását. Ezzel Neumann modelljének olyan alapvető tulajdonságait írták felül, amelyek több lényeges vonatkozásában megváltoztatták eredeti tartalmát. Nemcsak a Neumann által fontosnak tartott jellemzők (nyeregponti, játékelméleti, termodinamikai kapcsolat), hanem a modell olyan közgazdasági jelentése és értelmezhetősége tekintetében is, amelyekre Neumann valószínűleg nem is gondolhatott.

Már csak azért sem, mert modelljében összevontan szerepeltette a termelő- és személyes fogyasztást, így nála nem volt értelmezhető önállóan a fogyasztás értéke sem. Morishima a modell további, a fogyasztást expliciten megjelenítő Marx–Neumann-modellhez vezető általánosítása során viszont arra nem figyelt fel, hogy a dekomponálható modellekben megjelenő többszörös megoldások – a legnagyobb bővülési tényezővel rendelkező kivételével – közgazdasági szempontból értelmetlenek, mivel azokban a fogyasztás értéke nulla. Így bármennyire is érdekesek és eredetiek matematikai szempontból az egymás alá rendelt növekedési pályákra vonatkozó elemzései, közgazdasági szempontból azok teljesen értelmezhetetlenek, és így nincs sem alapja, sem indoka a fogyasztás–felhalmozás és bér–profit frontvonalak Morishima-féle átértelmezésének sem.

Végül is, Bromek korrigálta a fenti frontvonalak Morishima-féle bírálható értelmezését, s rávilágított a jelentkező problémák matematikai természetére, de adós maradt a közgazdasági következtetések levonásával, és a KMT-feltevések felülvizsgálatával. Talán részben éppen ez magyarázza, hogy dolgozata szinte visszhang nélkül maradt (a scholar.google-ban csak két-három hivatkozás található rá).

A szakmai közvélemény tehát továbbra sem vesz tudomást a Neumann-modell általánosításával kapcsolatos anomáliákról és azok helyes megoldásáról. Mindennek a valódi oka az, hogy a modellel foglalkozó kiváló matematikusok nemcsak a közgazdaságtan „tapasztalati forrásaitól” (Neumann) kerültek távol, de magától a közgazdaságtantól is, figyelmük megrekedt a matematikai konstrukciók és problémák elemzésénél.

Hivatkozások

Bauer, L. [1974]: Consumption in von Neumann matrix models. Megjelent: *Łoś–Łoś* [1974] 13–25. o.

Blaug, M. [1962]: Economic Theory in Retrospective. Irwin, Homewood, Ill.

Bromek, T. [1974]: Consumption-investment frontier in decomposable von Neumann models. Megjelent: *Łoś–Łoś* [1974] 47–57. o.

Bruno, M. [1969]: Fundamental Relations in the Pure Theory of Capital and Growth. Review of Economic Studies, Vol. 36. 39–54. o.

Csaba László [2008]: Módszertan és relevancia a közgazdaságtanban. A mai közgazdaságtan és a társtudományok. Közgazdasági Szemle, 55. évf. 3. sz. 285–307. o.

Gale, D. [1960]: The Theory of Linear Economic Models. McGraw-Hill, New York.

Kemeny, J. G.–Morgenstern, O.–Thompson, G. L. [1956]: A Generalization of von Neumann's Model of an Expanding Economy. Econometrica, 24. 125–135. o.

Łoś, J.–Łoś, M. W. (szerk.) [1974]: Mathematical Models in Economics. North-Holland, Amszterdam–New York.

Mirowski, P. [1989]: More Heat than Light: Economics as Social Physics, Physics as Nature's Economics. Cambridge University Press, Cambridge.

Móczár József [1980]: Indekompozábilitás kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben. Szigma, 1–2. sz.

Morishima, M. [1964]: Equilibrium, Stability and Growth. Clarendon Press, Oxford.

MORISHIMA, M. [1971]: Consumption-investment Frontier, Wage-profit Frontier and the Von Neumann Growth Equilibrium. Zeitschrift für Nationalökonomie, Supplementum 1. 31–38. o.

NEUMANN JÁNOS [1965]: Válogatott előadások és tanulmányok. Fordította: *Augusztinovics Mária*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

PIGOU, A. C. [1925]: Memorials of Alfred Marshall. Macmillan, London.

RICARDO, D. [1821]: The Principles of Political Economy and Taxation. John Murray, London.

SRAFFA, P. [1960/1975]: Áruk termelése áruk révén. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

ZALAI ERNŐ [1999]: A közgazdaságtan metodológiájáról és a matematikai közgazdaságtanról a Neumann-modell ürügyén. Közgazdasági Szemle, 7–8. sz. 600–629. o.

ZALAI ERNŐ [2000]: Matematikai közgazdaságtan. A korszerű mikroökonómiai elemzés klasszikus és neoklasszikus szemléletű modelljei. KJK–Kerszöv, Budapest.

ZALAI ERNŐ [2006]: Leontief versus Neumann: A Neumann-modell egy Leontief-szemléletű általánosítása. Megjelent: *Trautmann László* (szerk.): In memoriam Kollár Zoltán. Aula, Budapest, 156–180. o.