

A koronavírus-járvány miatti többlethalálozás becslése Magyarországon

Készítette: Varga Livia

PhD-hallgató, Budapesti Corvinus Egyetem

AZ INNOVÁCIÓS ÉS TECHNOLÓGIAI MINISZTERIUM KOOPERATÍV DOKTORI PROGRAM DOKTORI HALLGATÓI
ÖSZTÖNDÍJ PROGRAMJÁNAK A NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI ÉS INNOVÁCIÓS ALAPBÓL FINANSZÍROZOTT
SZAKMAI TÁMOGATÁSÁVAL KÉSZÜLT.



NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL

2021

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés.....	1
2.	Halandósági modellek	1
3.	Megfontolások a modellek alkalmazása előtt.....	3
4.	A halandósági modellek illesztése.....	5
5.	A halandósági modellek közötti választás	11
6.	A férfiak és nők halálzásának számítása.....	12
7.	Összefoglalás a többlethalalozás mértékéről.....	13
	Melléklet.....	17
	Irodalom	26

Táblázatjegyzék

1. táblázat: A mortalitási index illesztett SARIMA modelljeinek felírása késleltetési operátor használatával a Lee–Carter modell esetében..... 7
2. táblázat: A mortalitási indexek illesztett SARIMA modelljeinek felírása késleltetési operátor használatával a CBD modell esetében..... 7
3. táblázat: A Lee–Carter és a CBD modell „találatainak” száma a 2019. év hónapjaiban 12

Ábrajegyzék

1. ábra: A Lee–Carter modell szerinti κ_t index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb férfiak esetében.....	8
2. ábra: A Lee–Carter modell szerinti κ_t index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb nők esetében.....	8
3. ábra: A CBD modell szerinti $\kappa_t^{(1)}$ index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb férfiak esetében.....	9
4. ábra: A CBD modell szerinti $\kappa_t^{(2)}$ index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb férfiak esetében.....	9
5. ábra: A CBD modell szerinti $\kappa_t^{(1)}$ index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb nők esetében.....	10
6. ábra: A CBD modell szerinti $\kappa_t^{(2)}$ index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb nők esetében.....	10
7. ábra: A halálozások számának alakulása a 60 éves vagy idősebb férfiak körében.....	16
8. ábra: A halálozások számának alakulása a 60 éves vagy idősebb nők körében.....	16
9. ábra: Periodogram a Lee–Carter modell illesztett κ_t indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb férfiak).....	17
10. ábra: Periodogram a Lee–Carter modell illesztett κ_t indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb nők).....	17
11. ábra: Periodogram a CBD modell illesztett $\kappa_t^{(1)}$ indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb férfiak).....	18
12. ábra: Periodogram a CBD modell illesztett $\kappa_t^{(2)}$ indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb férfiak).....	18
13. ábra: Periodogram a CBD modell illesztett $\kappa_t^{(1)}$ indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb nők).....	19
14. ábra: Periodogram a CBD modell illesztett $\kappa_t^{(2)}$ indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb nők).....	19
15. ábra: A Lee–Carter modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált κ_t indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak).....	20
16. ábra: A Lee–Carter modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált κ_t indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak).....	20
17. ábra: A Lee–Carter modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált κ_t indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők).....	21
18. ábra: A Lee–Carter modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált κ_t indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők).....	21

19. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(1)}$ indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)	22
20. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(1)}$ indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)	22
21. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(2)}$ indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)	23
22. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(2)}$ indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)	23
23. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(1)}$ indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők).....	24
24. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(1)}$ indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők).....	24
25. ábra: A CBD modell nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(2)}$ indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők).....	25
26. ábra: A CBD modell nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(2)}$ indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők).....	25

1. Bevezetés

Lee és Carter 1992-ben kidolgozott modellje mérföldkő a halálozás valószínűségi alapokon nyugvó előrejelzését illetően. Napjainkban a sztochasztikus mortalitási modellek széles választéka ismert, a Lee–Carter modellnek számos továbbfejlesztett változata született az elmúlt évtizedekben. Ezek közül az egyik *Cairns, Blake és Dowd* modellje, az ún. CBD modell, amelyet kifejezetten az idősebb népesség halálozási rátájának előrejelzésére javasolnak.

A sztochasztikus mortalitási modelleket rendszerint éves, idősoros adatokon számítják. Segítségükkel akár 2020-ra is készíthető (utólagos) prognózis, amely megfelelő megközelítése lehet annak, hogy megtudjuk, mi történt volna akkor, ha a koronavírus-járvány nem tör ki. 2020-ban a COVID-19 vírusnak köszönhetően egyre nagyobb hangsúly helyeződött a heti és havi halálozási adatokra, illetve a többlethalandóság kérdésére. A halálozási többlet mértékének becslésekor gyakran hasonlítják a 2020-ban megfigyelt halálozási adatokat az előző évhez vagy a korábbi évek átlagához. Ennek lehetnek hátrányai, például akkor, ha az előző év(ek)ben magasabb vagy alacsonyabb volt a halálozás, mint általában.

Jelen kutatás során a 60 éves vagy annál idősebb népesség körében előrejelezzük a 2020. évi halálozást havonta, nemek szerint. A Lee–Carter-féle és a CBD modell közötti választást a 2019-re szóló előrejelzés alapján teszteljük, vagyis megnézzük, hogy a kettő közül melyik lehet alkalmasabb havi projekció elkészítésére. Eredményként látni fogjuk, hogy amennyiben a 2020. évi tényleges halálozási adatokat egy modell szerinti előrejelzéssel vetjük össze, eltérő értéket kapunk, mint ha az előző évek átlagához viszonyítanánk azt. A sztochasztikus mortalitási modellek alkalmazása mellett szól, hogy az előző évekhez történő hasonlítás nem veszi figyelembe a halandóság évről évre történő javulását, míg a halandósági modellek igen. A számítások elvégzése során három adatforrásra támaszkodunk: a Központi Statisztikai Hivatal (KSH), az elektronikus anyakönyvi rendszer (EAK) és egy kormányzati portál adatait használjuk fel. Elsőként az alkalmazott mortalitási modelleket ismertetjük.

2. Halandósági modellek

Lee és Carter 1992-ben írt tanulmánya a halandóság modellezésének és valószínűségi alapokon nyugvó előrejelzésének fontos mérföldköve. Takarékos modelljünkben a halálozási ráta logaritmus egy nem megfigyelt, időspecifikus index lineáris függvénye. A becslés nagy előnye, hogy nincs szükség a halálozást befolyásoló, múltbeli orvostudományi, társadalmi és egyéb hatások ismeretére,

számszerűsítésére. Ezek helyett egy hosszú távú trendre, a mortalitási indexre (κ_t) támaszkodik a modell. A kiinduló egyenlet a következőképpen írható fel:

$$\ln m_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt},$$

ahol m_{xt} a központi halálozási ráta, vagyis a halálozások számának (D_{xt}) és az évközepi népességszámnak (E_{xt}^c) a hányadosa korévenként (x), adott évben (t). A hibtag (ε_{xt}) 0 átlagú és σ^2 szórású fehér zaj. A paraméterek közül α és β az életkortól függ, κ pedig az időtől. Az egyenletben a halandóság változásának (javulásának) historikus trendjét κ_t írja le. A β_x tag a mortalitási index halandóságra gyakorolt hatását fejezi ki különböző életkorokban.

Annak érdekében, hogy a megoldás egyedi legyen β_x -re és κ_t -re vonatkozóan a következő korlátozásokat teszik a szerzők: $\sum_x \beta_x = 1$ és $\sum_t \kappa_t = 0$. Mindez azt is eredményezi, hogy α_x tag az időbeli átlagát jelenti a mortalitási ráta logaritmusának. A β_x együtttható értéke elvben negatív is lehet néhány életkort tekintve (a mortalitás bizonyos életkorokban romolhat, miközben más életkor esetében javul), de ez nem okoz problémát. Negatív halálozási ráta nem jelenik meg eredményként.

Mivel a kiinduló egyenlet jobb oldalán csak paraméterek állnak, az OLS regresszió (angolul 'ordinary least squares regression') nem alkalmazható. *Lee és Carter* a szinguláris értékbontás (angolul 'singular value decomposition', röviden SVD) segítségével határozta meg a megoldást. Mivel az alacsonyabb halálozási rátával jellemezhető fiatal korcsoportok ugyanolyan súlyt kapnak becsléskor, mint az idősebbek, az illesztett és a tényleges mortalitási ráták nem egyeznek meg egymással. Emiatt egy következő lépésben κ_t -t újra kell becsülni.¹ Ekkor a különböző korcsoportok eltérő nagysága már különböző súlyokat eredményez. A mortalitási index előrejelzésével adható becslés a jövőbeni halálozási ráták alakulására vonatkozóan. Az index előrejelzésekor azt feltételezzük, hogy a halandóság változásának (javulásának) hosszú távú trendje tovább folytatódik. *Lee és Carter* tanulmányukban az USA adatait elemezték és megállapították, hogy a mortalitási index értéke 1900 és 1989 között hozzávetőlegesen lineárisan csökkent, vagyis a halandóság javult. Ennek a trendnek a folytatását jelezték előre a későbbi évtizedekre. A szerzők úgy találták, hogy a mortalitási index pályája eltolásos véletlen bolyongást követ.

A Lee–Carter modellt több bírálat is érte, amelynek köszönhetően számos továbbfejlesztett változata született az elmúlt évtizedekben.² Az egyik ilyen modell *Cairns et al. (2006)* nevéhez fűződik,

¹ A mortalitási index második lépcsőben történő becslése során a következő formulának kell teljesülnie: $D_t = \sum\{\exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) E_{xt}\}$.

² *Villegas et al. (2018)* tanulmánya az eredeti Lee–Carter modellnek és néhány módosított változatának kitérnő összefoglalását nyújtja, továbbá R programozási segédlet is egyben. Szintén érdemes elolvasni a *Hunt–Blake (2014)* és *Hunt–Blake (2015)* tanulmányokat mint összegző műveket.

akik egy kéttényezős sztochasztikus modellt dolgoztak ki, amelyben nem egy, hanem két mortalitási index szerepel. Az első index a mortalitási ráta dinamikájára ugyanúgy hat mindegyik életkorban, míg a második faktor az idősebb korcsoportok esetében fejt ki inkább a hatását. Ennek a modellnek a rövidített neve CBD, amely a szerzők vezetéknevének kezdőbetűiből áll össze. A CBD modellben nincs α_x tag. Kezdeti mortalitási rátát és logit függvényformát alkalmazva az egyenlet a következő:

$$\ln\left(\frac{q_{xt}}{1-q_{xt}}\right) = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)},$$

ahol q_{xt} a kezdeti mortalitási ráta, vagyis a halálozások számának (D_{xt}) és az év eleji népességnek (E_{xt}^0) a hányadosa x éves korban, t időben, továbbá \bar{x} az átlagos életkor. A $\kappa_t^{(1)}$ és $\kappa_t^{(2)}$ mortalitási indexek előrejelzéséhez kétváltozós, eltolásos véletlen bolyongás (angolul 'bivariate random walk with drift') modell alkalmazható, de külön-külön is előrejelezhetjük őket. A CBD modellnek nincs identifikációs problémája, ezért korlátfüggvényekre nincs szükség.

3. Megfontolások a modellek alkalmazása előtt

Ebben a fejezetben leírjuk, milyen megfontolásokra volt szükség a sztochasztikus mortalitási modellek havi adatokon történő alkalmazása előtt. Amennyiben a COVID-19 vírusnak köszönhető többlethalálozás kérdése érdekel bennünket, az éves adatok elemzése helyett célszerű lehet a havi adatok vizsgálata, ugyanis a járválynak különböző hullámai ismertek, vagyis nem volt egyenletes intenzitású az elmúlt hónapokban. A Központi Statisztikai Hivatalban elérhetőek a két népszámlálás közötti népmozgalmi statisztikák (a születés, a halálozás és a migráció mértéke) alapján továbbvezetett, havi népesség adatok, amelyekből adott év január 1-jei eszmei időpontra vonatkozóan az éves népességszám is előáll. Az elemezni kívánt időszak kezdő hónapjának 2012 januárját választottuk, ugyanis 2011-ben még a 2001. évi census alapján történt a továbbvezetés, 2012-től kezdődően pedig a 2011. évi népszámlálás alapján. Emiatt kisebb mértékű törés figyelhető meg az adatsorban 2011. december és 2012. január között. Véleményünk szerint a 2012-től induló és 2019 decemberéig tartó időszak megfelelő hosszúságú ahhoz, hogy 2020-ra és 2021 első hónapjára előrejelezzük a mortalitási rátákat. Ezeket szeretnénk a későbbiekben összevetni a tényleges adatokkal. 2020-ra és 2021-re vonatkozóan azonban a halálozási adatok még nem véglegesek. Mindig az utolsó időszak adataiban rejlik a legtöbb bizonytalanság, éppen ezért a 2021. februári adatokat még nem elemezzük.

A halálozási ráta előrejelzése alkalmas lehet a halálozások számának becslésére egy olyan hipotetikus esetet feltételezve, amikor a korábbi években megfigyelt, hosszú távú mortalitási trend tovább folytatódik és nincs világválság. Azonban az influenza hatását sem hagyhatjuk figyelmen kívül. Kisebb-nagyobb mértékben ez a vírus is hatással lehetett a halálozások számára az elmúlt években, főleg az idősebb korcsoportok esetében, akik körében bizonyos alapbetegségek jelenléte sem kizárt. Éppen ezért fontosnak tartottuk ennek a figyelembevételét is. A halálozási adatokban és az influenzavírus terjedési dinamikájában megmutatkozó szezonális ARIMA modellek alkalmazása mellett döntöttünk, amikor a sztochasztikus modellek mortalitási indexeit jeleztük előre.

További megfontolás tárgyát képezte, hogy melyik korcsoportokat vonjuk be az elemzésbe. A koronavírussal megfertőződött betegek körében az elhunytak többsége 60 év feletti. A kormányzat járvánnyal kapcsolatos tájékoztatási portálja szerint³ a regisztrált fertőzöttek közül az elhunytak 91,1 százaléka volt 60 éves vagy annál idősebb 2021 januárjáig. Emiatt célszerűnek tűnt, hogy a többlethalálozást a 60 évesek és idősebbek körében vizsgáljuk. A CBD modellt kifejezetten az idősebb népesség halálozási rátáinak becslésére dolgozták ki. Ez volt az egyik fő oka annak, hogy a számítások elvégzéséhez ezt a modellt is kiválasztottuk. Továbbá nem okozott gondot a kohorszhatás értelmezése, ugyanis a kor (év) és periódus (hónap) intervallumának eltérő hossza identifikációs problémát okoz. (Holford 2006) Az egyes sztochasztikus modellekben szereplő kohorszhatás annak kifejezésére szolgál, hogy a halandóság javulása, változása nem független a kohorsztól, ami a t idő és az életkor közötti különbséget jelenti. A CBD modell kohorszhatást nem számszerűsíti, ugyanúgy ahogyan a Lee–Carter modell sem.

A fiatalabb kohorszokat tekintve a halálozás különböző mintázataival találkozhatunk. Például a csecsemőhalandóság, és különösen az egy hónapnál fiatalabbak halálozási száma függhet a születés hónapjától. Magyarországon legtöbbször szeptember hónapban születnek. Így a halálozás havi szezonális nem feltétlenül egyezik az egyes életkorokban. Ez egy újabb érv volt az elemezni kívánt korosztály szűkítése mellett. Fontosnak tartottuk továbbá, hogy a nők és férfiak időszoros adatait külön-külön vizsgáljuk, mert azonos életkorokban a halálozás jelentősen eltérhet nemenként.

A sztochasztikus mortalitási modelleket nemek szerint és korévenként illesztettük. Azonban a 90 évesek vagy annál idősebbek esetében aggregáltuk a halálozások számát és ennek megfelelően a népességszámot is. Ezt a kevés számú halálozás és a kis létszámú ilyen korú népesség indokolta. Kisebb korcsoportok esetében a becslés bizonytalansága megnőhet.

A továbbiakban bemutatjuk az illesztett modellek eredményeit. A számításokhoz az R szoftvert használtuk. Elsősorban a 'StMoMo' és a 'forecast' programcsomagok függvényeire volt szükség. Az

³ <https://koronavirus.gov.hu>

előbb említett csomag lehetővé teszi néhány sztochasztikus mortalitási modell 'maximum likelihood' módszerrel történő becslését. E programcsomagot használva a Lee–Carter modellt kezdeti mortalitási ráták mellett, binomiális eloszlást feltételezve illesztettük, hogy a CBD modellel történő összehasonlítás egyszerűbb legyen.

4. A halandósági modellek illesztése

Az elemzést a mortalitási ráták számításával kezdtük: a koréves havi halálozások számát elosztottuk a megfelelő hóeleji népesség számával. A 60 éves vagy annál idősebb nők és férfiak idősorát külön vizsgáltuk. Az 1–6. ábrák illusztrálják a Lee–Carter-féle és a CBD modell mortalitási indexeinek változását az idő függvényében 2012. januártól kezdődően havonta. *Lee és Carter (1992)* az USA adatait elemezve úgy találták, hogy a mortalitási index egy negatív meredekségű görbeként ábrázolható. Jelen tanulmányban nem éves, hanem havi bontású adatokra támaszkodtunk, továbbá a vizsgált évek száma kevés, így a hosszú távú trend megállapítása korlátokba ütközik. Az index(ek) értékeinek hónapról hónapra történő változása rendkívül volatilis.

A jövőbeni mortalitási ráták előrejelzéséhez időszorelemzési módszerre van szükség. A 2012. január és 2019. december közötti időszakra illesztett mortalitási indexek segítségével – idősoros elemzésével és előrejelzésével – becsülhetők a jövőbeni halálozási ráták. Jelen tanulmányban 2021. január jelenti az előrejelzési időhorizont végét.

A mortalitási ráták tény időszakra történő illesztése után elsőként a szezonalitást vizsgáltuk meg. Amennyiben matematikai módszerrel szeretnénk azonosítani a szezonális ingadozást, alkalmazhatjuk a Fourier-transzformációt, amely a jelet frekvenciákra bontja fel. Elemzésünkben egy jel 96 adatpontból áll, mert a 2012. január és 2019. december közötti időszak hónapjainak száma éppen ennyi. A szezonalitást nem koréves bontásban, hanem a 60 éves vagy idősebb korosztályra vonatkozóan együtt, de nemek szerint külön-külön vizsgáltuk. A Fourier-elemzés célja, hogy megtaláljuk a főbb frekvenciákat az idősorban. A lehetséges frekvenciákat és relatív fontosságukat az ún. periodogram szemlélteti (lásd a melléklet 9–14. ábráit). Ez segít a megfigyelt adatok elsődleges szezonálisának azonosításában. A Fourier-módszer mindig a legkisebb frekvenciával kezd. Ennek értéke a vizsgált idősort tekintve $1/96 \approx 0,01$ Hz. Kb. 0,083 Hz-nél férfiak és nők esetében is kiugrás figyelhető meg. Amennyiben az 1 értéket elosztjuk 0,083-del, 12-t kapunk eredményül. Ez azt jelenti, hogy a mortalitási indexek idősorában elsődlegesen 12 havi szezonális ingadozás látható.

Az egyes mortalitási indexek esetében külön-külön vizsgáltuk meg, hogy melyik a legjobban illeszkedő SARIMA (angolul 'seasonal autoregressive integrated moving average') modell. A Box–

Jenkins modellezési technika értelmében a megfelelő idősoros modell kiválasztása három lépésben történik. Az első az identifikáció, amelynek során ellenőrizzük az idősort, megnézzük például, hogy van-e kiugró, hiányzó érték, esetleg strukturális törés az adatsorban. Az autokorreláció függvény (angolul 'autocorrelation function', vagyis ACF), illetve a parciális autokorreláció függvény (angolul 'partial autocorrelation function', vagyis PACF) segítségével sejthetjük meg, hogy hány késleltetett tagra van szükség az ARIMA modellhez (lásd a 15–26. ábrákat). A második lépésben egy takarékos modellt illesztünk, mert ezek jobb előrejelzők a túl sok paraméterrel rendelkezőknél. A harmadik teendő annak az ellenőrzése, hogy a becsült modell reziduálisai biztosan fehér zaj folyamatot követnek-e. (Enders 2014) A Box–Jenkins modell szelekciós eljárást követve az 1–2. táblázatban található SARIMA(p,d,q)(P,D,Q) modellek kerültek kiválasztásra a nők és férfiak adatait tekintve. A paraméterek ($\kappa_t^{(i)}$) értékeinek előrejelzéséhez ezeket használtuk fel. Az egységgyök jelenlétét kibővített Dickey–Fuller-tesztel ellenőriztük,⁴ míg a reziduálisokat Ljung–Box Q-statisztika⁵ segítségével vizsgáltuk.

A CBD modellt tekintve a $\kappa_t^{(1)}$, valamint a Lee–Carter modell esetében a κ_t mortalitási index a szezonális és az elsőrendű differenciálás után vált stacionáriussá férfiaknál és nőknél egyaránt. Elsőként képeztük a szezonális differenciákat, ezután azonban szükség volt azok elsőrendű differenciáira is. A tény időszakra illesztett CBD modell szerinti $\kappa_t^{(2)}$ paraméter tagjainak szezonális és nem-szezonális differenciálására szintén szükség volt a férfiak esetében, nőknél viszont elegendőnek bizonyult a 12 havi differencia-képzés. Megvizsgáltuk a differenciált idősorok autokorrelációs és parciális autokorrelációs függvényeit annak érdekében, hogy döntsünk az AR és MA tagok késleltetéseinek számáról. Mindegyik mortalitási index esetén többféle SARIMA modellt illesztettünk, amelyek közül a megfelelőt elsősorban a koefficiensek szignifikanciája, az információs kritériumok (angolul 'Akaike information criterion' és 'Bayesian information criterion', röviden AIC, illetve BIC), valamint a reziduálisok vizsgálata alapján választottuk ki.

A Box–Jenkins modellezési technikát követve a SARIMA(1,1,1)(1,1,1)[12] modellt választottuk a Lee–Carter és a CBD modell κ_t , illetve $\kappa_t^{(1)}$ indexének előrejelzéséhez nők és férfiak esetében egyaránt. A $\kappa_t^{(2)}$ mortalitási index esetén a SARIMA(1,1,1)(0,1,1)[12] modell bizonyult a legmegfelelőbbnek a férfiakat, a SARIMA(0,0,1)(0,1,1)[12] modell pedig a nőket tekintve. Ezeket az idősoros modelleket használtuk fel a $\kappa_t^{(i)}$ értékek előrejelzéséhez a 2019-et követő hónapokra. Piros vonal jelzi a mortalitási indexek előrejelzett értékeit az 1–6. ábrákon, ahol az X tengely a 2012. január

⁴ A $\Delta y_t = a_0 + \beta y_{t-1} + a_2 t + \omega_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \omega_k \Delta y_{t-k} + \varepsilon_t$ formában felírható idősorok esetében a kibővített Dickey–Fuller-teszt nullhipotézése: $\beta = 0$. Az egyenletben $a_2 t$ tag a trendet jelöli.

⁵ Képlettel: $Q = T(T + 2) \sum_{k=1}^s r_k^2 / (T - k)$, ahol T a megfigyelések száma és r a mintabeli autokorreláció.

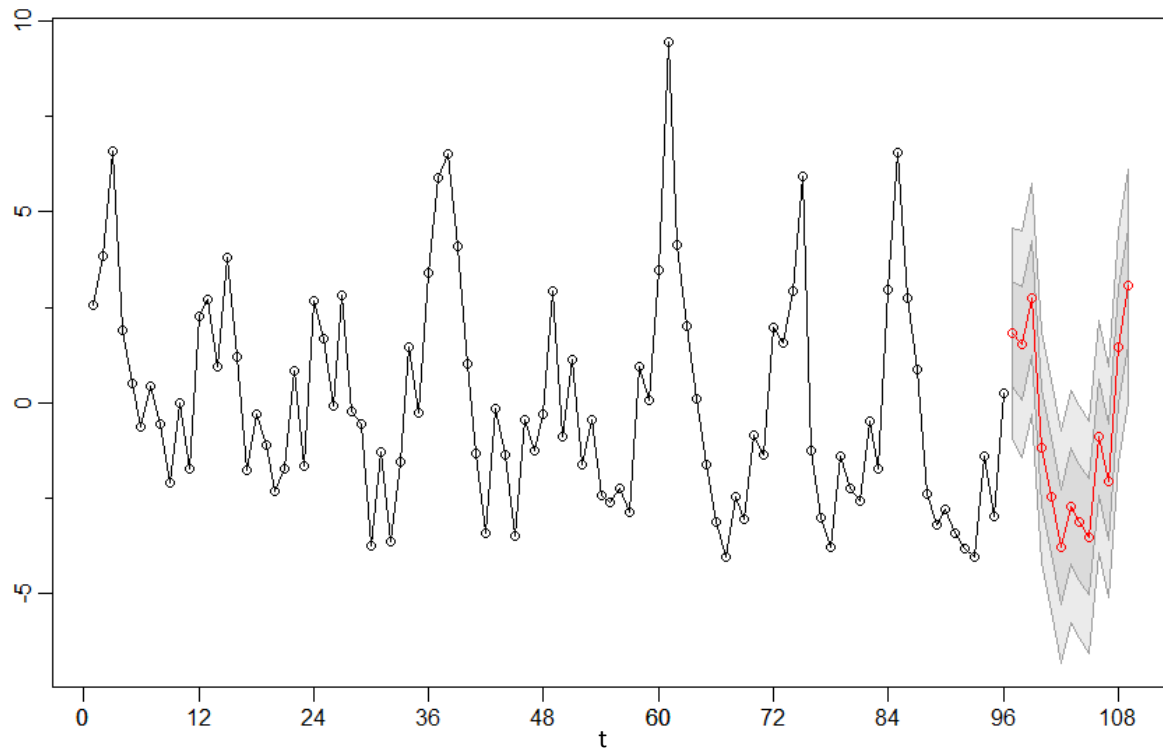
és 2021. január között eltelt hónapok számára utal. A szürke sávok a 80 és 95 százalékos konfidencia intervallumok alsó és felső határát jelölik.

	κ_t
Férfiak	$(1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_{12} L^{12})(1 - L)(1 - L^{12})\kappa_t =$ $= (1 + \beta_1 L)(1 + \beta_{12} L^{12})\varepsilon_t$
Nők	$(1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_{12} L^{12})(1 - L)(1 - L^{12})\kappa_t =$ $= (1 + \beta_1 L)(1 + \beta_{12} L^{12})\varepsilon_t$

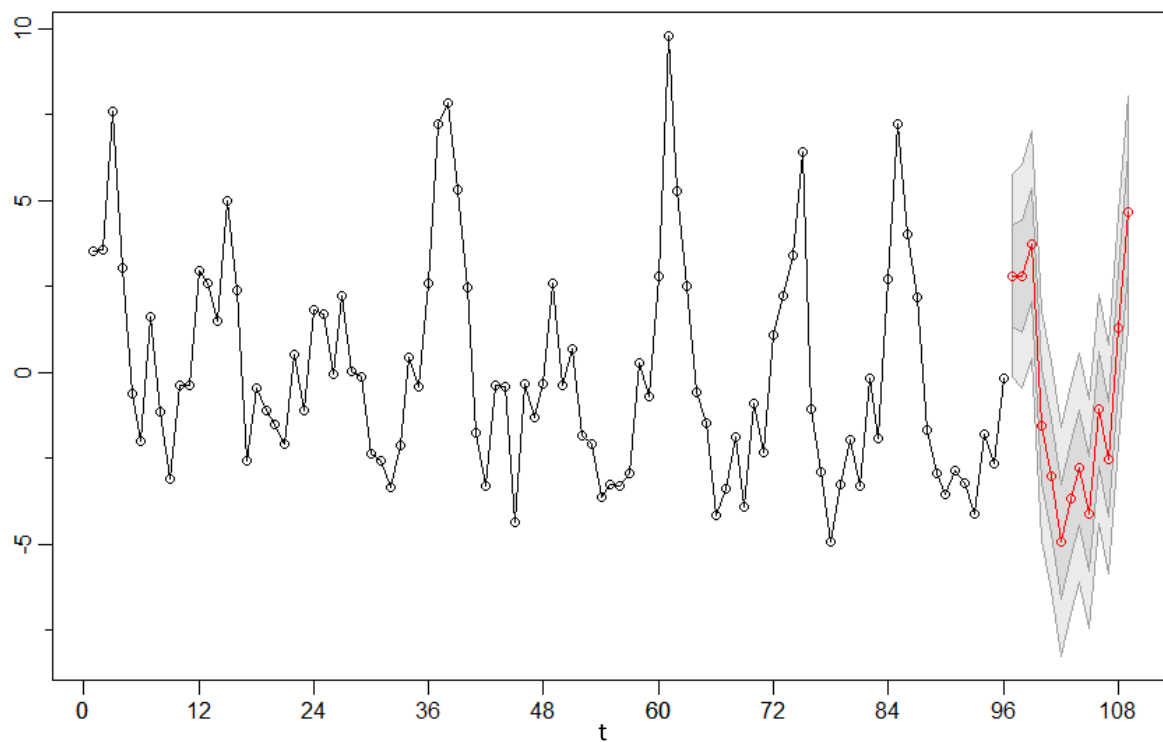
1. táblázat: A mortalitási index illesztett SARIMA modelljeinek felírása késleltetési operátor használatával a Lee–Carter modell esetében

	$\kappa_t^{(1)}$	$\kappa_t^{(2)}$
Férfiak	$(1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_{12} L^{12})(1 - L)(1 - L^{12})\kappa_t =$ $= (1 + \beta_1 L)(1 + \beta_{12} L^{12})\varepsilon_t$	$(1 - \alpha_1 L)(1 - L)(1 - L^{12})\kappa_t =$ $= (1 + \beta_1 L)(1 + \beta_{12} L^{12})\varepsilon_t$
Nők	$(1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_{12} L^{12})(1 - L)(1 - L^{12})\kappa_t =$ $= (1 + \beta_1 L)(1 + \beta_{12} L^{12})\varepsilon_t$	$(1 - L^{12})\kappa_t = (1 + \beta_1 L)(1 + \beta_{12} L^{12})\varepsilon_t$

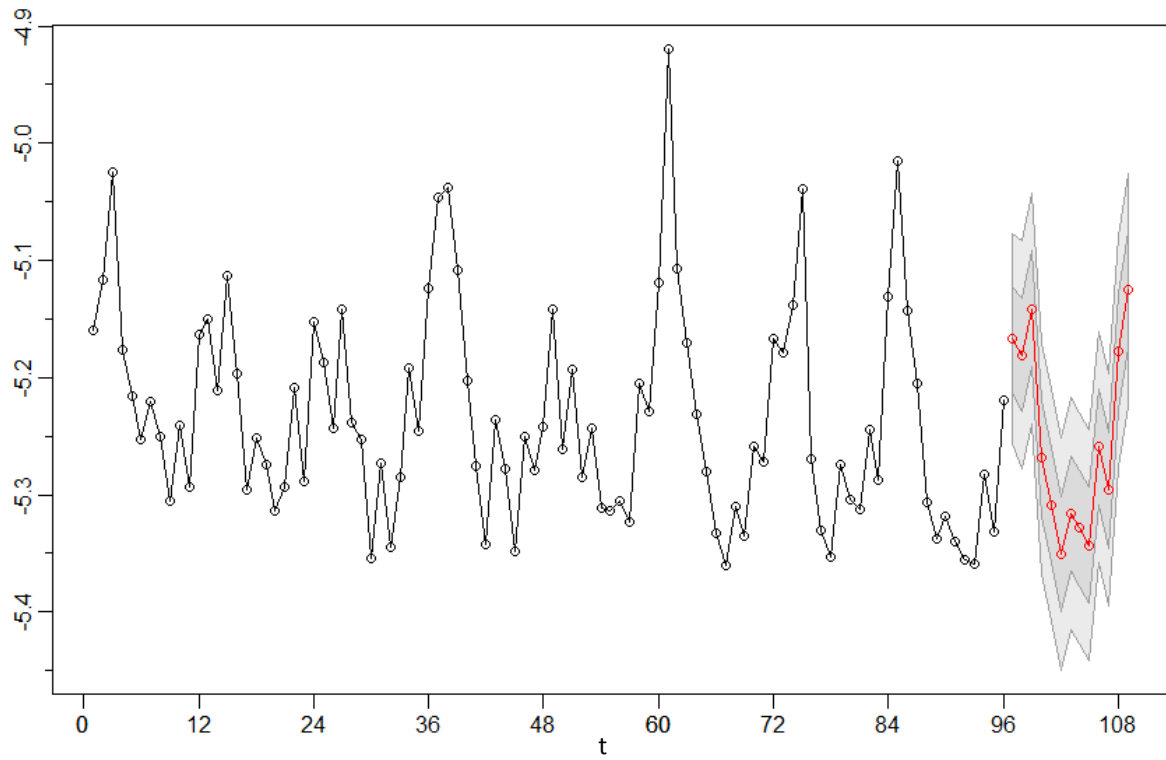
2. táblázat: A mortalitási indexek illesztett SARIMA modelljeinek felírása késleltetési operátor használatával a CBD modell esetében



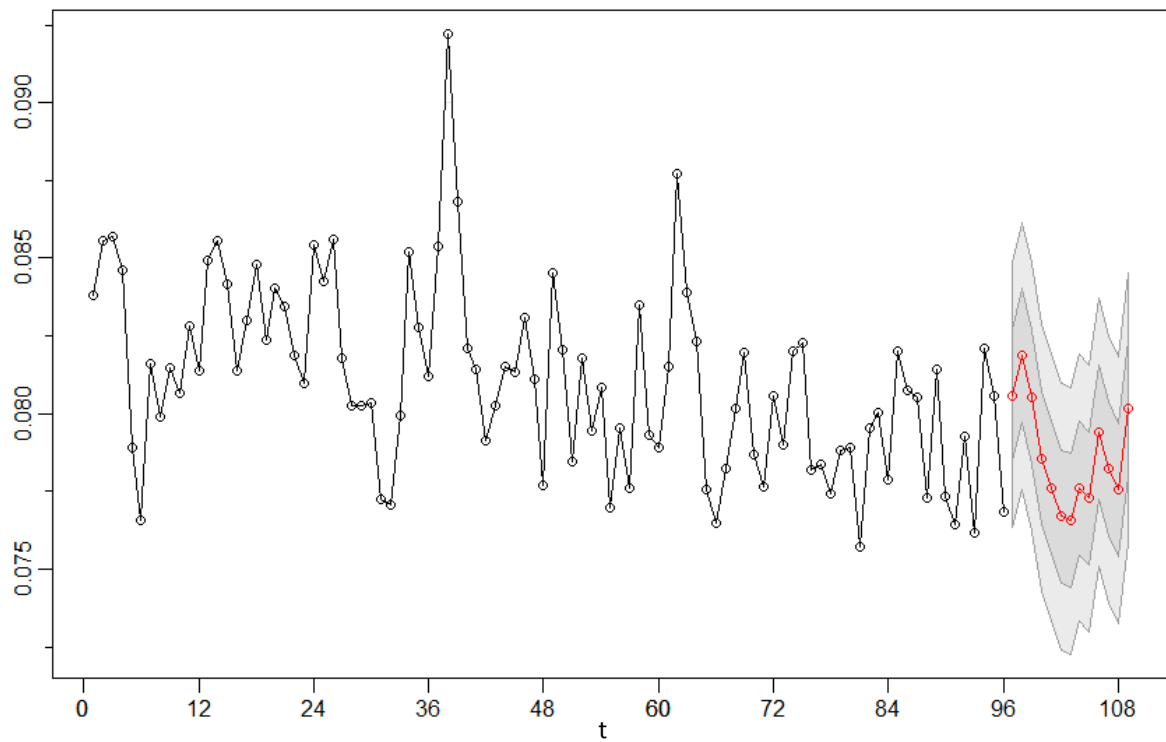
1. ábra: A Lee–Carter modell szerinti κ_t index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb férfiak esetében



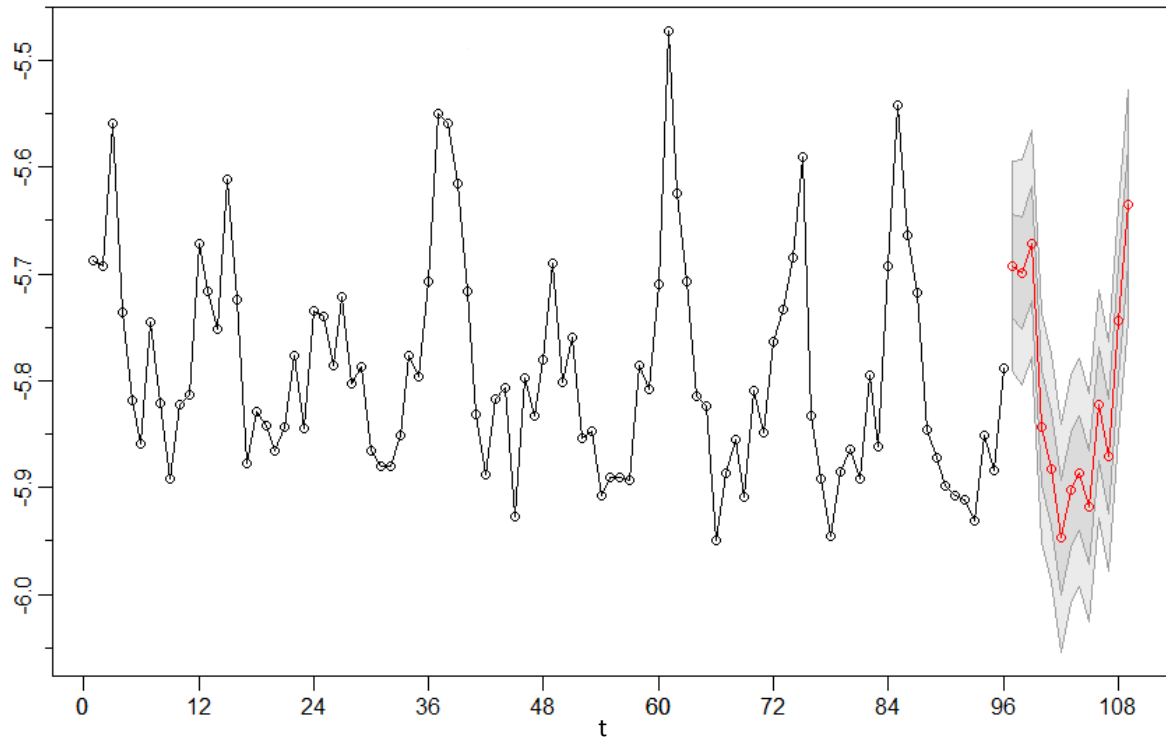
2. ábra: A Lee–Carter modell szerinti κ_t index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb nők esetében



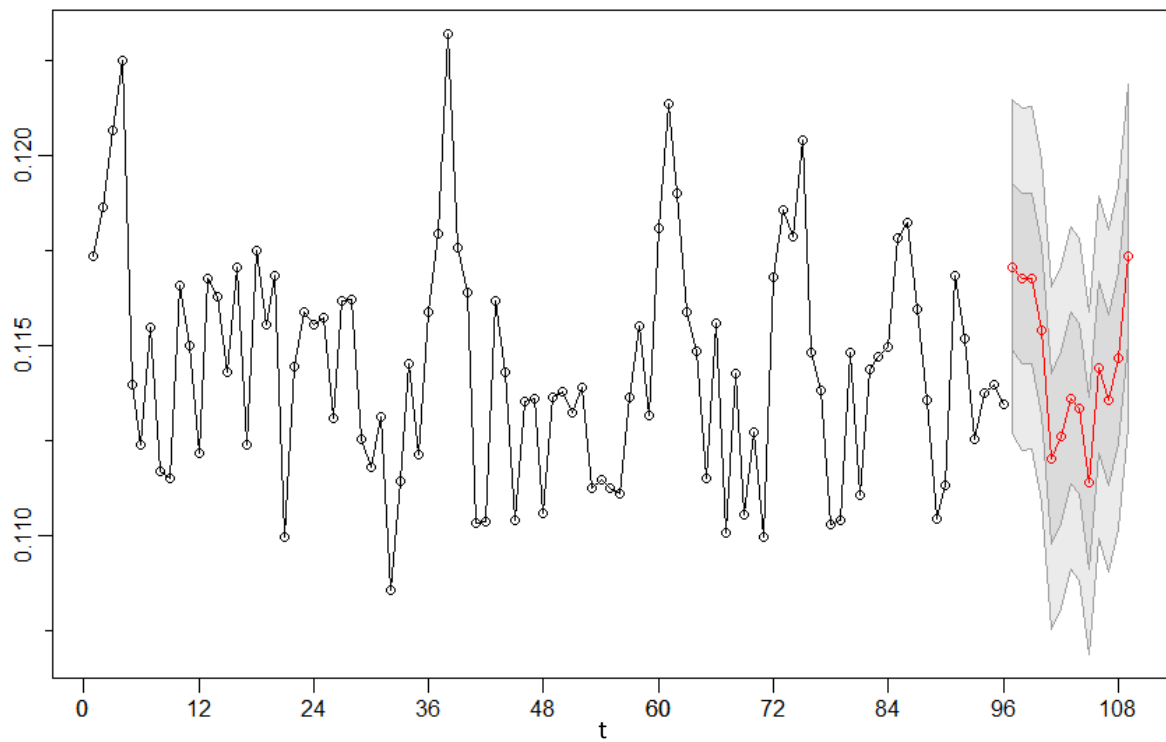
3. ábra: A CBD modell szerinti $\kappa_t^{(1)}$ index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb férfiak esetében



4. ábra: A CBD modell szerinti $\kappa_t^{(2)}$ index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb férfiak esetében



5. ábra: A CBD modell szerinti $\kappa_t^{(1)}$ index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb nők esetében



6. ábra: A CBD modell szerinti $\kappa_t^{(2)}$ index illesztett és előrejelzett értékei a 60 éves vagy idősebb nők esetében

Amikor előrejeleztük a mortalitási indexeket, a kiugró értékek kezelésére, hatásuk kiszűrésére az additív módszert választottuk. Kétértékű változók segítségével indexáltuk a kiugró értékek helyét az idősorokban. Ezek a bináris változók szintén idősorként értelmezhetőek. Doboz diagramok (angolul 'box plot') segítségével azonosítottuk az 'outlier'-ek értékét és helyét a $\kappa_t^{(i)}$ paraméterek nem differenciált idősoraiban. A Lee–Carter és a CBD modell κ_t , illetve $\kappa_t^{(1)}$ indexét tekintve 2017 januárjában figyelhető meg kiugró érték a nők és férfiak idősorában egyaránt. A $\kappa_t^{(2)}$ indexnél 2015. februárban volt egy 'outlier' a férfiak esetében. Továbbá a nők adatsorában 2012. április és 2015. február hónapban azonosítottunk kiugrásokat a $\kappa_t^{(2)}$ index esetén.

5. A halandósági modellek közötti választás

A modellek közötti választást nagymértékben segíti, ha az előrejelzett értékeket összevetjük a tényleges adatokkal. Erre akkor nyílik lehetőségünk, ha a bázis időszak hosszát rövidítjük és olyan évekre, illetve hónapokra készítünk előrejelzést, amelyek tényleges mortalitási rátáit már ismerjük. A 2019. évet választottuk ki a tesztelés alapjául. A 3. táblázat azt mutatja be, hogy 2019 hónapjaiban a Lee–Carter és a CBD modell „találatainak” száma mennyi, vagyis a 60–90 évesek halálozási arányszámaihoz az előrejelzett értékek közül hány darab esik statisztikailag közel. Ennek megfelelően egy modell „találatainak” maximális száma 31 lehet egy hónapban. A 2019. évi előrejelzésekhez választott SARIMA modelleket tekintve csak a CBD modell $\kappa_t^{(2)}$ indexe esetében volt szükséges más alkalmazni, mint amit korábban bemutatunk: férfiaknál a SARIMA(1,1,1)(1,1,1)[12], míg nőknél a SARIMA(0,1,1)(1,1,1)[12] bizonyult a legmegfelelőbbnek. A tényleges és előrejelzett értékek hasonlóságát a QDEV-statisztika⁶ (angolul 'weighted quadratic deviation') segítségével ellenőriztük.

$$QDEV = \sum_{i=K}^N \frac{E_i(m_{i1} - m_{i0})^2}{m_{i0}}$$

ahol N és K az életkortartomány alsó és felső határát jelöli, E_i az i évesek száma, vagyis a kitettség, m_{i0} a tényleges mortalitási rátákat, m_{i1} pedig a becsült mortalitási rátákat jelöli. A QDEV-statisztika határeloszlása χ^2 -négyzet $N - K + 1$ szabadságfokkal. Életkoronként külön-külön elvégezve az összehasonlítást (ekkor a szabadságfok 1-gyel egyenlő), 95%-os konfidencia intervallum esetén a kritikus érték: 3,84. Férfiaknál és nőknél is a binomiális Lee–Carter modell alkalmasabbnak tűnik a CBD modellnél, hiszen a „találatok” száma összességében magasabb. Így a továbbiakban a Lee–Carter-féle

⁶ Ehhez kapcsolódóan lásd például Arató et al. (2009) és Ágoston et al. (2019) tanulmányokat.

mortalitási modell előrejelzésére támaszkodunk a 2020. évi és 2021. januári halálozás hipotetikus számának becslésekor.

	modell	jan.	febr.	márc.	ápr.	máj.	jún.	júl.	aug.	szept.	okt.	nov.	dec.
Férfiak	Lee–Carter	22	30	27	28	27	30	31	29	27	27	31	28
	CBD	22	28	23	24	23	28	26	26	26	25	25	25
Nők	Lee–Carter	23	31	26	28	29	28	31	29	31	29	28	28
	CBD	24	26	22	19	22	24	25	22	24	21	22	21

3. táblázat: A Lee–Carter és a CBD modell „találatainak” száma a 2019. év hónapjaiban

6. A férfiak és nők halálozásának számítása

A kezdeti mortalitási ráták megfelelőnek bizonyultak ahhoz, hogy a halálozások hipotetikus számát megállapítsuk az előrejelzési időszakra. A 2019. december végi népesség adat jelenti a 2020. január 1-jei népességszámot. Ha ezt a 60 évesekre vagy annál idősebbekre vonatkozó népességszámot megszorozzuk az első prediktált mortalitási ráta értékével, akkor megkapjuk a 2020. januári halálozások számát a 60 évesek vagy idősebbek körében. Amennyiben a kapott halálozási számot kivonjuk a 2020. január 1-jei megfelelő korú népességből, akkor meghatározhatjuk a február eleji népességszámot az idősebb korosztály esetében. Ez a számítás nem veszi figyelembe a migráció nettó egyenlegét, mert annak mértékét elhanyagolhatónak ítéltük az idősebbek körében.

A halálozások és a népesség számát egyaránt koréves bontásban állapítottuk meg (kivéve a 90 éveseket vagy annál idősebbeket, mert ők egy összevont csoportot jelentenek). A további hónapok idős korú népességszámának meghatározása ugyanilyen metódus szerint történt. Ez lényegében megfelel az ún. kohorsz–komponens módszernek, azzal az egyszerűsítéssel, hogy a születések számára nincs szükségünk, mivel csak az idősebb népesség száma érdekel bennünket, továbbá zéró migrációt feltételezünk. A következő fejezetben az előrejelzett halálozások számát a tényleges adatokkal vetjük össze. Utóbbiak az elektronikus anyakönyvi rendszerből származnak és még nem tekinthetők véglegesnek. Ez az összehasonlítás teszi lehetővé, hogy következtetéseket vonjunk le a többlethalálozás mértékéről.

7. Összefoglalás a többlethalálozás mértékéről

Az első koronavírusal megfertőződött betegeket 2020 márciusában regisztrálták Magyarországon. A járvány első hulláma hazánkban enyhe lefolyású volt, kevés regisztrált esetszámmal és alacsony mértékű halálozással. A KSH négy orvosi egyetemmel együtt lefolytatott, H-UNCOVER elnevezésű reprezentatív adatfelvételének eredményei szerint a tízezer lakosra jutó fertőzöttek száma 68-ra volt tehető. Ezt a felmérést 2020. május 1–16. közötti időszakban végezték el. Ez az alacsony mértékű fertőzöttségi szint talán annak volt köszönhető, hogy nagyon korán hozták meg a szigorú kormányzati intézkedéseket, az ország és annak lakossága lényegében izolálta magát. Mindez az influenzavírus terjedését is fékezte, amely általában január–március hónapokban szokott tetőzni az előző évek adatai alapján. A koronavírus második hulláma 2020 szeptemberében kezdődött Magyarországon. Az azt megelőző nyári hónapokban az új, regisztrált betegek száma nagyon alacsony volt. A második hullám már intenzívebbnek bizonyult az elsőnél, a regisztrált fertőzöttek és azon belül az elhunytak száma is magasabb volt. Az első fontosabb korlátozó intézkedéseket november elején hozta meg a kormány. Kijelenthetjük tehát, hogy a járvány terjedésére adott válasz nem volt olyan gyors, mint az első hullám idején. Ezt a késlekedést elsősorban gazdasági megfontolások indokolhatták. A második hullám során az influenzajárványt fékezte az a kormányzati felszólítás, amely az influenza elleni védőoltás beadatására bátorította a lakosságot, továbbá a maszkviselés kötelező volt majdnem mindenhol.

A 7–8. ábrákon a vonatkozási korcsoportot a 60 évesek vagy annál idősebbek jelentik. A zöld oszlopok mutatják a Lee–Carter modell által becsült halálozások számát, amelyben nincs benne a koronavírus hatása. A sárga oszlopdiagram az EAK-ban rögzített (vagyis a tényleges) halálozások havi alakulását szemlélteti a 2021. március 14-ei állapotnak megfelelően. Ezek még nem végleges adatok, mivel a következő hetekben akár felül is íródhatnak, különösen a legutolsó időszak adatai. Ennek oka, hogy nem minden haláleset kerül be azonnal a rendszerbe, a rögzítésnek lehet átfutási ideje. A legkevésbé megbízhatóak a 2021. évi januári adatok. A piros vonaldiagram a tényleges halálozások számát a regisztrált, koronavírusal megfertőződött elhunytak nélkül mutatja be. A lila és kék vonalak a 2019-es, illetve a 2012–2019. évi átlagos, havi halálozási számokat tükrözik.

Az adatok összehasonlítása szempontjából egyfelől érdekes kérdés, hogy hogyan alakul az előrejelzett halálozási szám a tényleges adatokhoz, másfelől a 2012–2019. évi átlagos értékekhez viszonyítva. Az első összehasonlítás a többlethalálozásról nyújthat információt, de a tényleges halálozási adatokat az előző évek átlagához is viszonyíthatjuk. Ha szemügyre vesszük a férfiak adatait, láthatjuk, hogy a becsült értékek 2020. február–márciusban 4,2 százalékkal magasabbak voltak, mint a ténylegesek. A Lee–Carter modell általi becslés talán erőteljesebb szezonális hatást mért, mint ami

végül megvalósult. Ugyanez igaz januárra, áprilisa és májusra, de a különbség az előrejelzett és a tényleges halálozás között kevésbé volt jelentős. Júniusban az aktuális adat 2,6 százalékkal volt több a becsülnél, de ez az eltérés nem olyan jelentős, júliusra el is tűnt. Úgy néz ki, hogy a legpontosabb előrejelzés július hónapra készült, amikor a koronavírussal megfertőződött, regisztrált betegek száma a legalacsonyabb volt. Augusztustól novemberig a becsült és tényleges adatok közötti különbség fokozatosan nőtt, novemberről decemberre valamelyest csökkent, de így is jelentős maradt. Összességében 33,0 százalékkal volt magasabb a férfiak tényleges halálozási száma az előrejelzettnél augusztus és december között. Ez az arány 77,4 százalékos, ha csak a novemberi hónapot nézzük és 18,7 százalékos 2021. januárban. A többlethalálozás főként a második és a 2021 márciusában kezdődő harmadik hullámnak köszönhető, utóbbi mértékét azonban egyelőre még nem tudjuk vizsgálni. A 2012–2019. évi átlagos halálozási szám 2020. február–májusban közelebb volt a ténylegeshez, mint a becsült. A szezonális differenciálás lehet a magyarázata annak, hogy 2020 első öt hónapjában az előrejelzés miatt több a tényleges halálozásnál. Az influenza hatása jelentős volt 2019 elején és ez a differencia-képzéssel sem tűnik el. Augusztustól decemberig a tényleges adatok növekvő mortalitási többletet mutatnak a 2012–2019. évi átlaghoz képest (ennek mértéke összességében 30,2%), azonban novemberről decemberre némi csökkenés tapasztalható. A projekció nagyon közel volt az előző évek átlagához júniusban, de onnantól kezdve a kettő közötti képzeletbeli olló egyre szélesebbre nyílt.

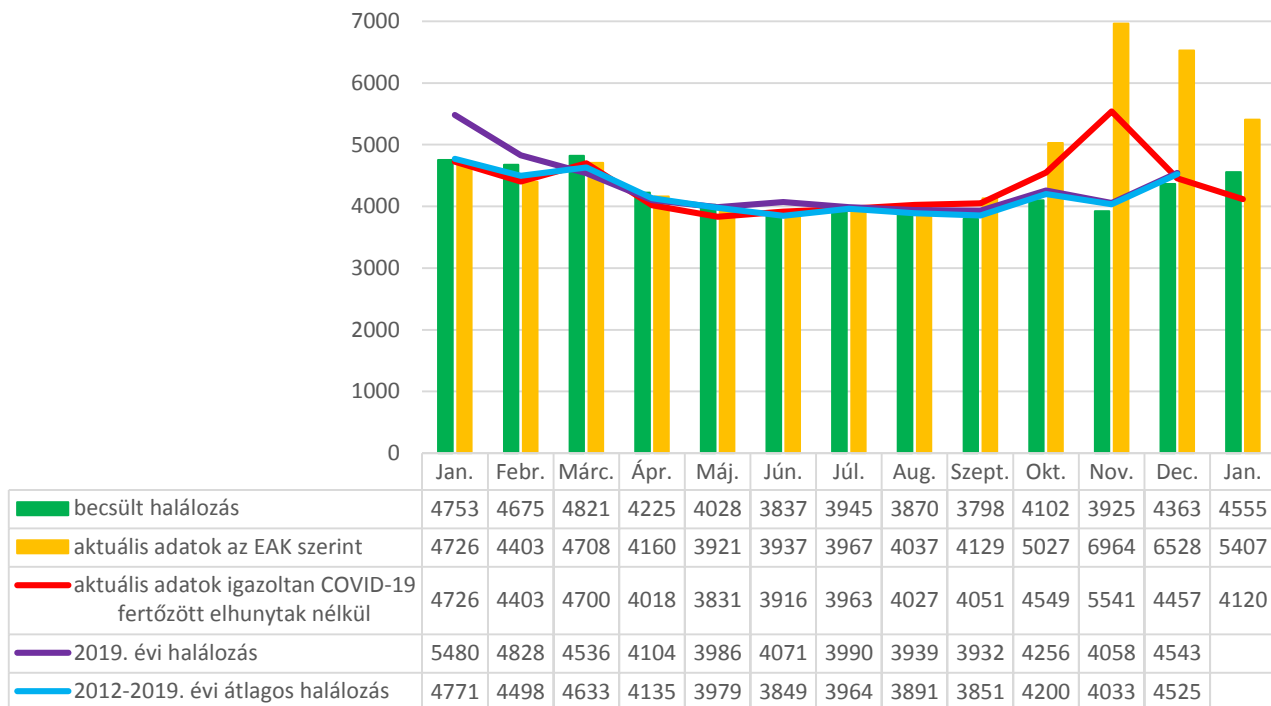
A nőkre vonatkozó Lee–Carter modell szerinti, becsült halálozás 5,2 százalékkal volt több 2020. január–márciusban, mint a tényleges. A 2012–2019. évi átlagos halálozási szám ugyanilyen mértékben (5,2%-kal) magasabb volt 2020. januárban annál, mint ami az EAK-ban szerepel. Az előző évek átlagos halálozási adata pontosabb megközelítést jelent a február–március hónapok tekintetében, mint a modell általi becslés. Április–július hónapokra a 2012–2019. évi átlagos érték szintén jobb előrejelzőnek bizonyul, mint a sztochasztikus becslés. Szeptembertől decemberig ismét halálozási többletről beszélhetünk a nők esetében is. Az említett időszakban a Lee–Carter modell szerint a többlethalandóság jelentősebb mértékű (41,3%), mint abban az esetben, ha a tényleges adatokat a 2012–2019. évi átlagos, havi halálozáshoz viszonyítjuk (34,4%). Érdemes külön kiemelni a november hónapot, amikor a tényleges halálozás 70,9 százalékkal volt magasabb a becsülnél. Ez az arány 56,2 százalékra csökkent decemberben és 12,1 százalék volt 2021. januárban.

Összességében – a férfiakat és a nőket együtt vizsgálva – megállapíthatjuk, hogy a sztochasztikus előrejelző modell szerint 2020 első három hónapjában 4,2 százalékkal magasabbnak kellett volna lennie a halálozásnak, mint amennyi a tényleges volt. A két adatsor közötti különbség szeptembertől válik ismét jelentőssé, valamint eltérő előjelűvé. Erre az időszakra a többlethalálozás egyértelműen kimutatható (40,7%-os mértékű szeptember és december között). 2020 első hónapjaira a Lee–Carter modell az előző évek átlagánál erőteljesebb szezonális emelkedést várt a halálozást

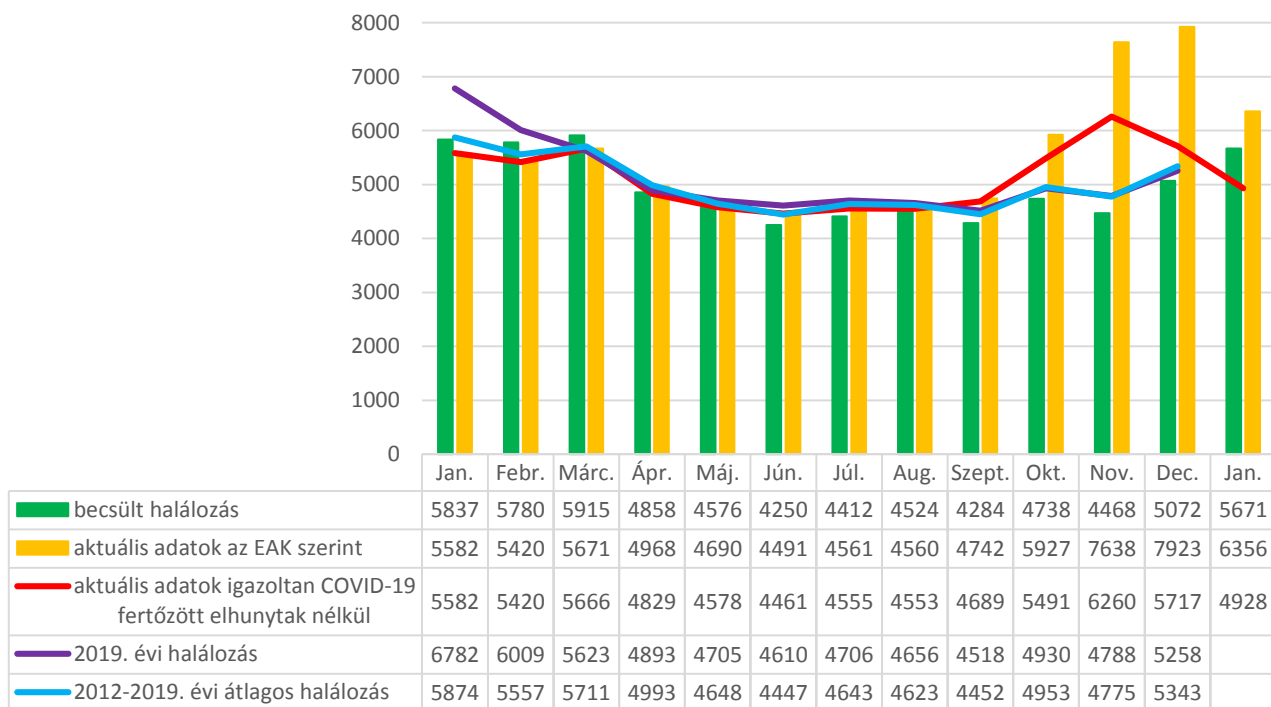
tekintve. 2020 utolsó négy hónapjára a modell általi becslés 5,4 százalékponttal nagyobb halálozási többletet valószínűsít, mint amennyi a 2012–2019. évi átlagos, havi adatok alapján kirajzolódik. Utóbbi mértéke 35,3 százalékra tehető.

A koronavírus-járvány társadalmi hatásai között megemlíthető az életév veszteség, amely gazdasági szempontból különösen a nyugdíjak kifizetése (illetve annak elmaradása) szempontjából lehet fontos kérdés. Ehhez szükség van a hátralévő várható élettartam kiszámítására. A 2019. évi halandósági tábla előállításakor az Eurostat módszertanát követtük azzal a különbséggel, hogy nem a 85 évesek vagy annál idősebbek csoportját, hanem a legalább 90 évesek kohorszát tekintettük az utolsó életkor szerinti kategóriának. Az elveszített életév(ek)re, illetve hónap(ok)ra egy becslés adható, amennyiben az adott életkorban 2019 elején várható hátralévő élettartamból kivonjuk azoknak a hónapoknak a számát, amelyek az igazoltan koronavírussal fertőzött személyek haláláig elteltek és ezt felszorozzuk a halálesetek számával. A 2019. január eleji várható hátralévő élettartam egy átlagos érték, amelyben vegyül az egészségesebb és a krónikus betegségben küzdők várható életkora. Így ha ehhez viszonyítunk, akkor ebben az értelemben egy felső becslésről van szó, hiszen a krónikus alapbetegségek előfordulása valószínűleg felülreprezentált az igazoltan koronavírussal fertőzött elhunytak körében. Másrészt pedig alsó becslésről beszélhetünk, mert a halálesetek számát ennél a számításnál a regisztrált, fertőzött elhunytak jelentik, tehát nem a becsült többlethalálozást vesszük alapul. Elvégezve ezeket a számításokat, kijelenthetjük, hogy 2020. március és 2021. január között a férfiak esetében összesen 42 295 elveszített életévről, míg a nők esetén 41 379 évről van szó.

A következő évek halálozási valószínűségének becslése során a COVID-19 hatása fontos kérdéssé válik majd, illetve jelenleg is az érdeklődés homlokterében áll. Ennek egyik oka, hogy a halálozásra gyakorolt negatív hatása egyértelműen kimutatható, így a 2020-as és lehet, hogy a 2021. évet is eltérően kell kezelni az előrejelzések során. Másrészt a többlethalandóság ténye maga után vonja azt a kérdést is, hogy a járvány lecsengésével hogyan alakul majd a halálozás intenzitása. *Cairns et al. (2020)* tanulmánya szerint a halálozási többletet ideiglenesen a halálozás alacsonyabb szintje követheti az elhunytak meglévő társbetegsége miatt. *Barigou et al. (2021)* előrejelzésük során mindezek alapján már figyelembe vesznek egy olyan forgatókönyvet, amely szerint a megnövekedett halálozást annak rövid távú csökkenése követi majd.

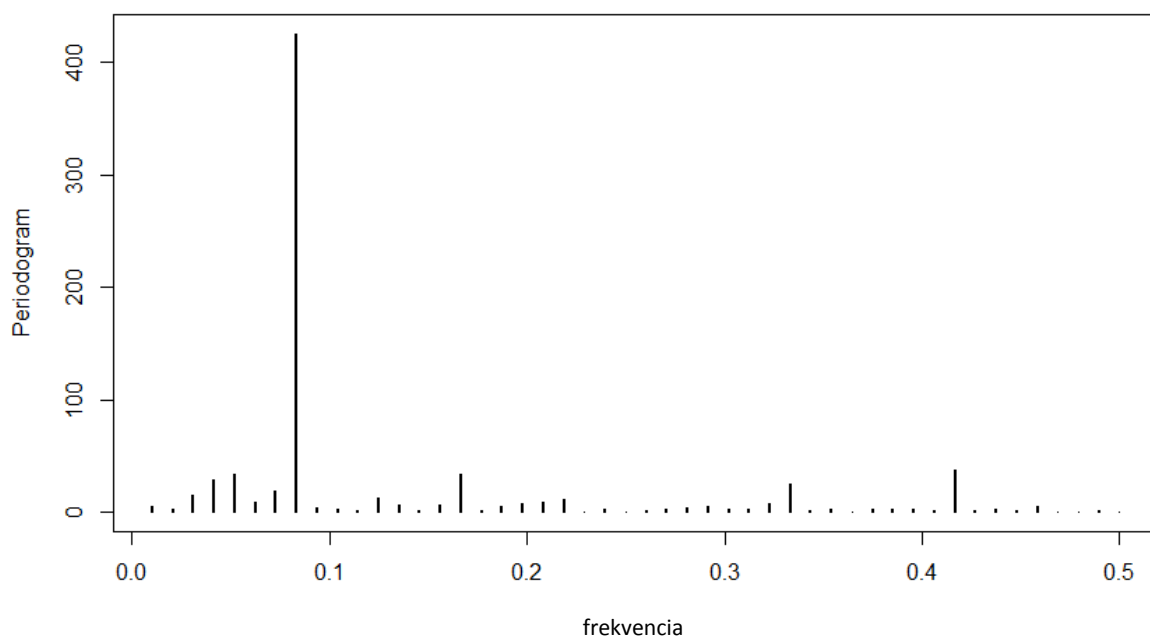


7. ábra: A halálozások számának alakulása a 60 éves vagy idősebb férfiak körében

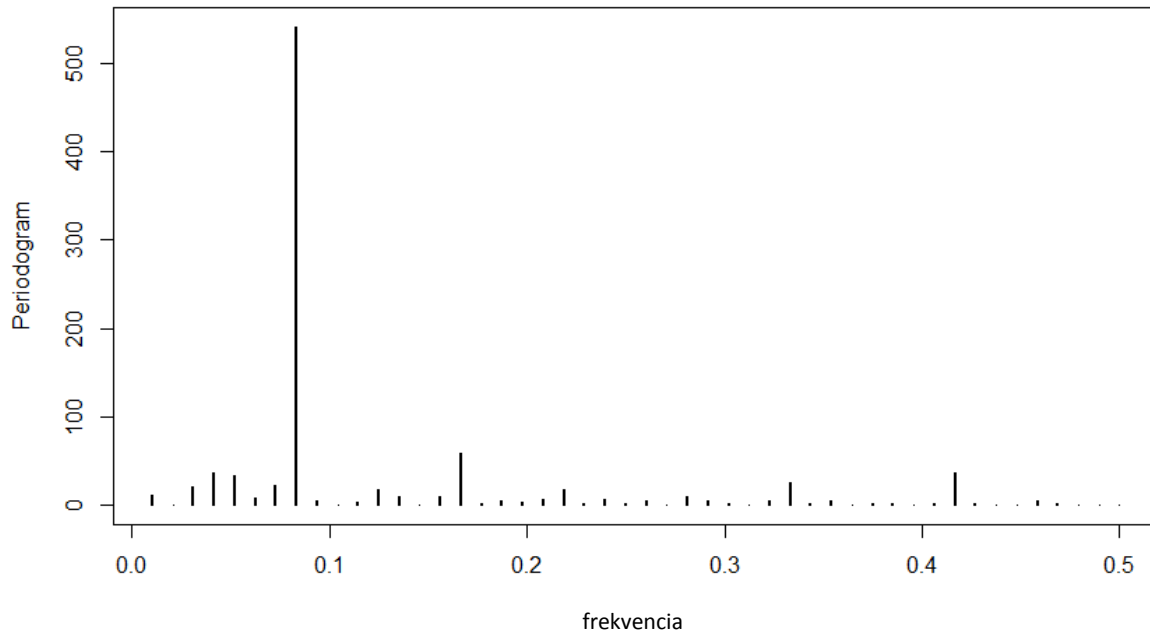


8. ábra: A halálozások számának alakulása a 60 éves vagy idősebb nők körében

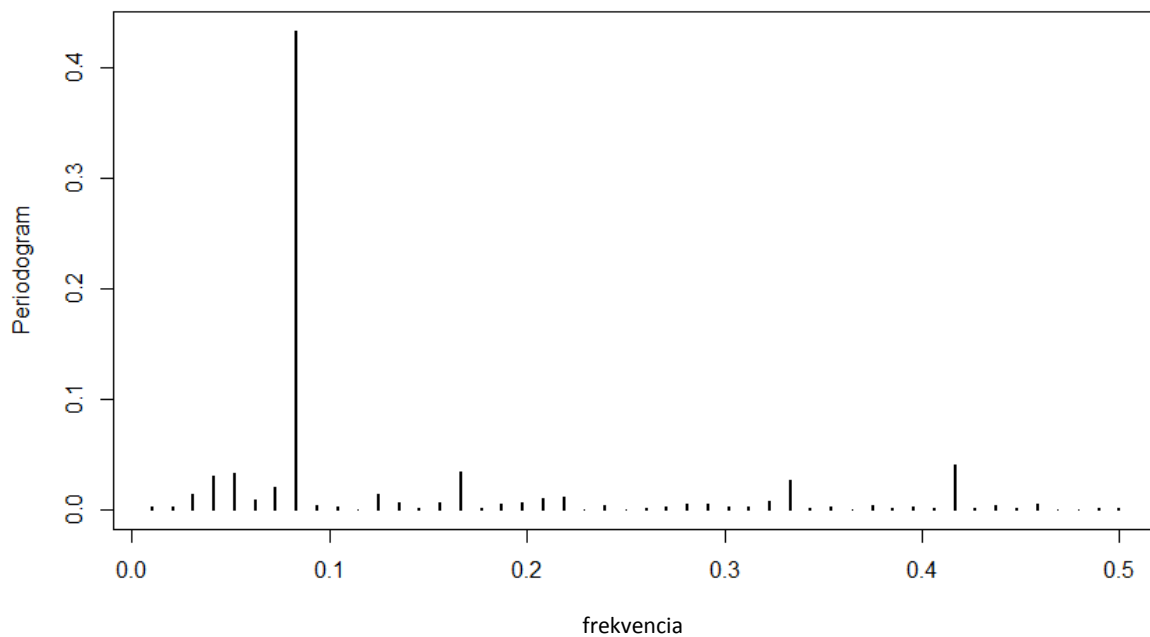
Melléklet



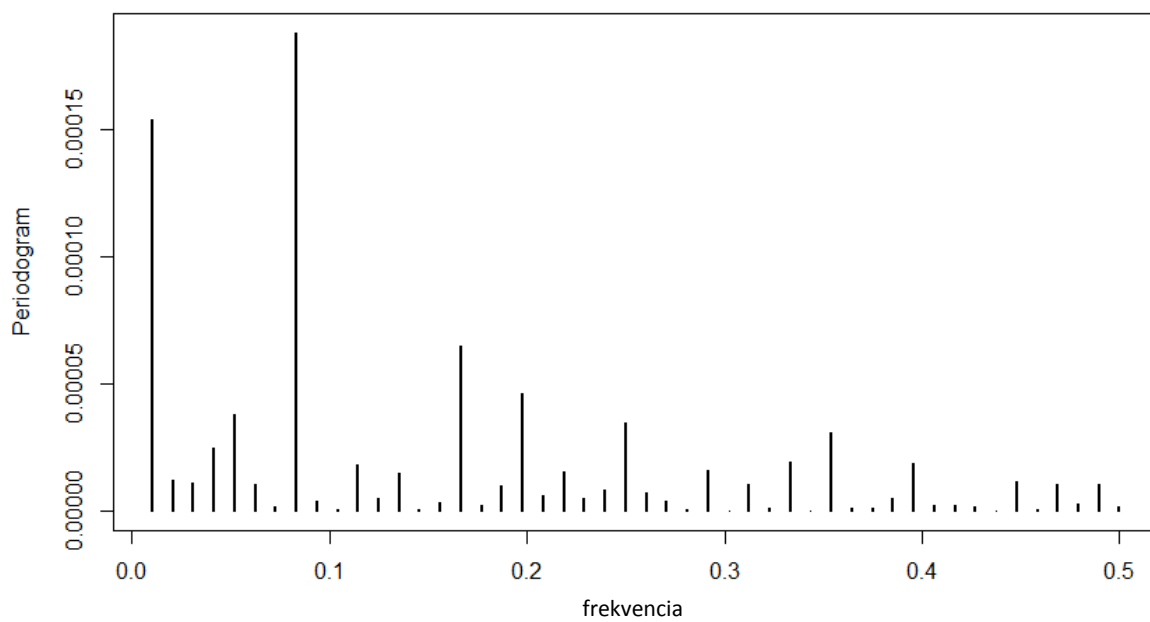
9. ábra: Periodogram a Lee–Carter modell illesztett κ_t indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb férfiak)



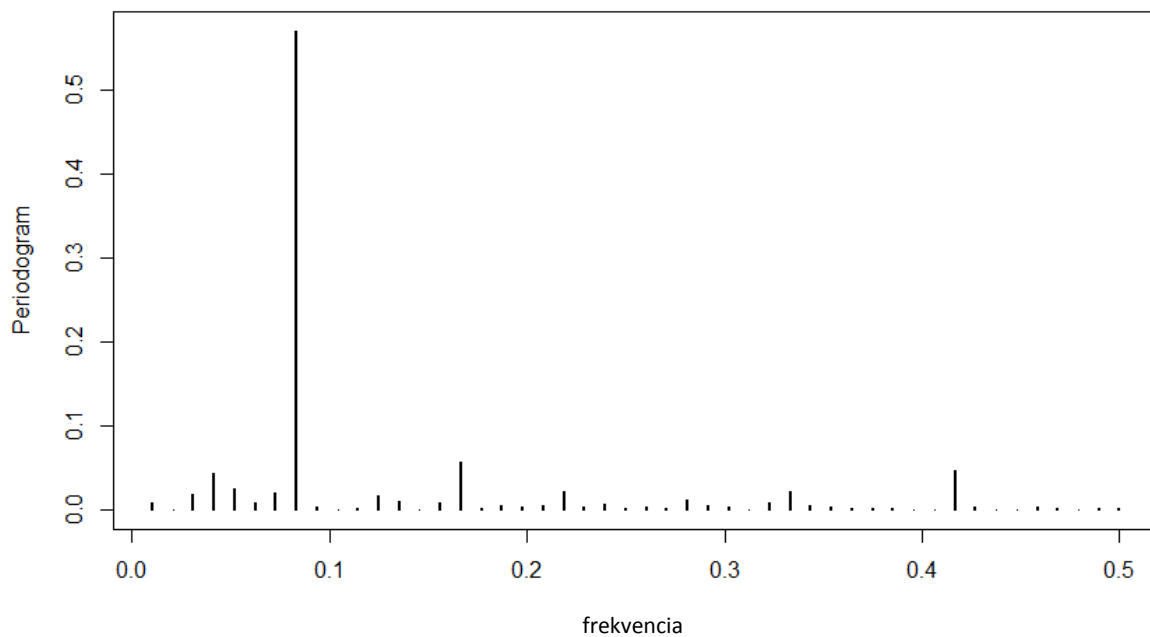
10. ábra: Periodogram a Lee–Carter modell illesztett κ_t indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb nők)



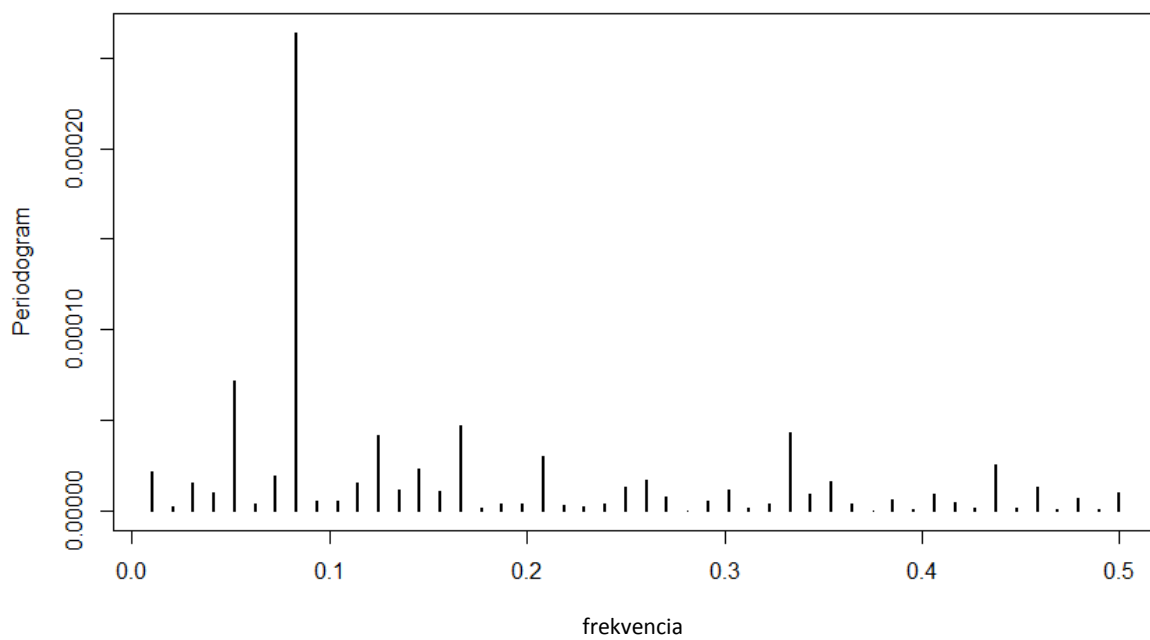
11. ábra: Periodogram a CBD modell illesztett $\kappa_t^{(1)}$ indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb férfiak)



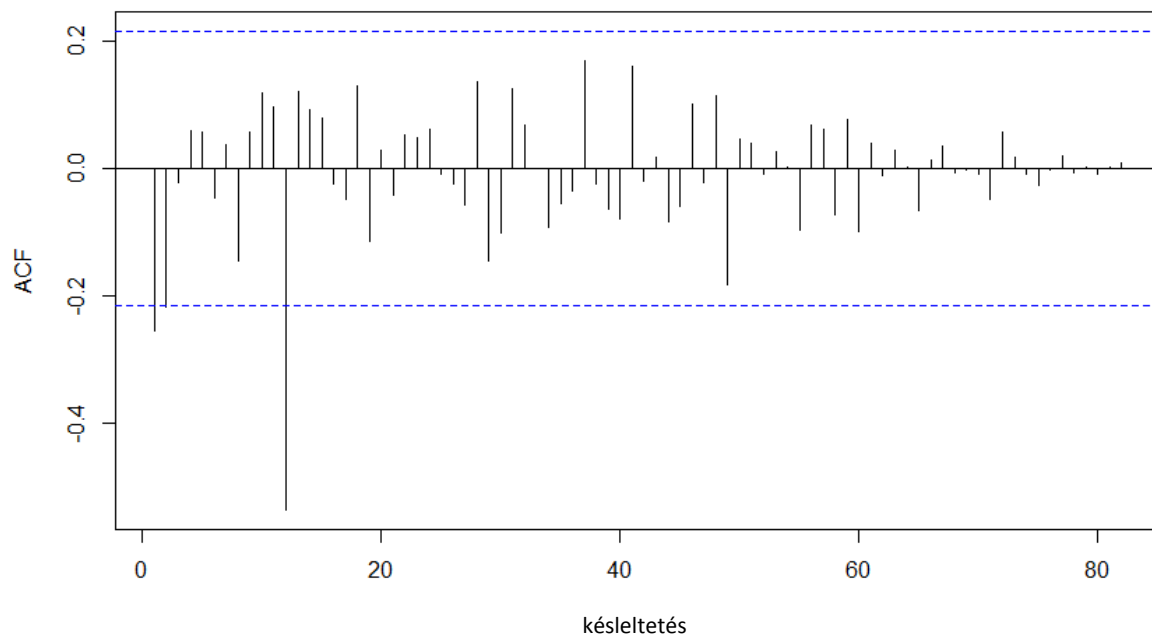
12. ábra: Periodogram a CBD modell illesztett $\kappa_t^{(2)}$ indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb férfiak)



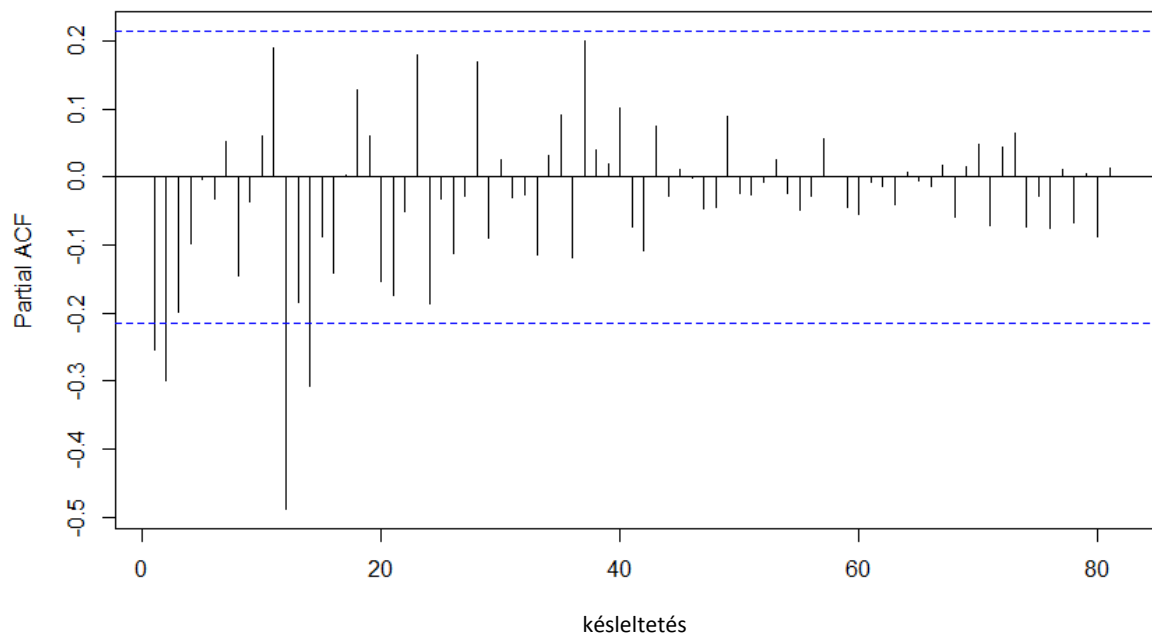
13. ábra: Periodogram a CBD modell illesztett $\kappa_t^{(1)}$ indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb nők)



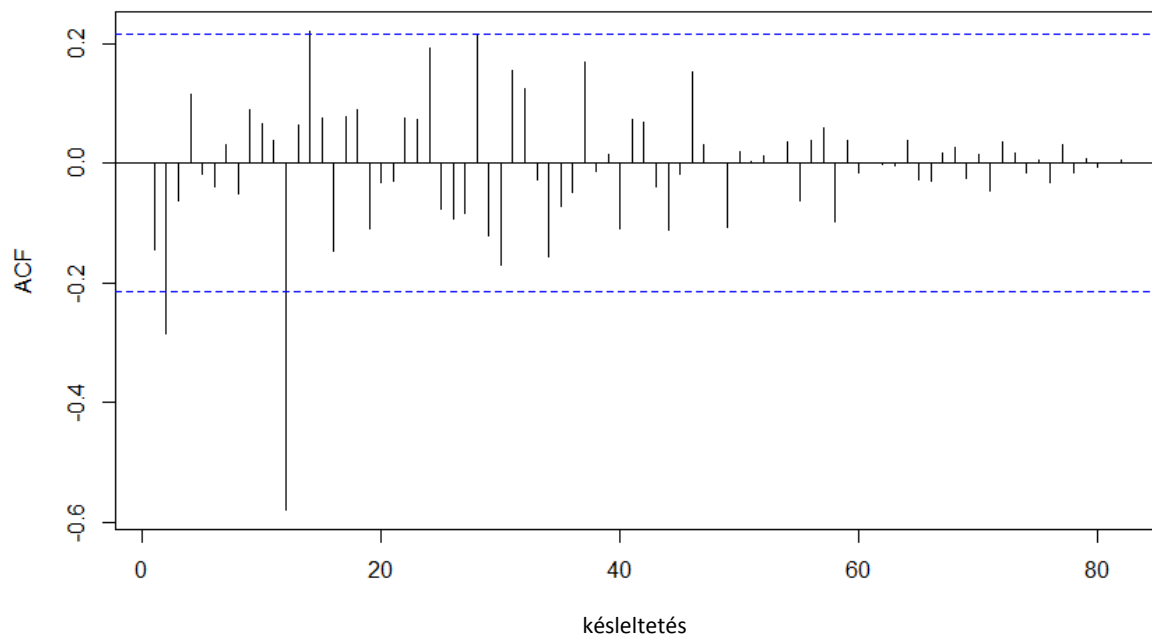
14. ábra: Periodogram a CBD modell illesztett $\kappa_t^{(2)}$ indexe esetében (60 éves vagy annál idősebb nők)



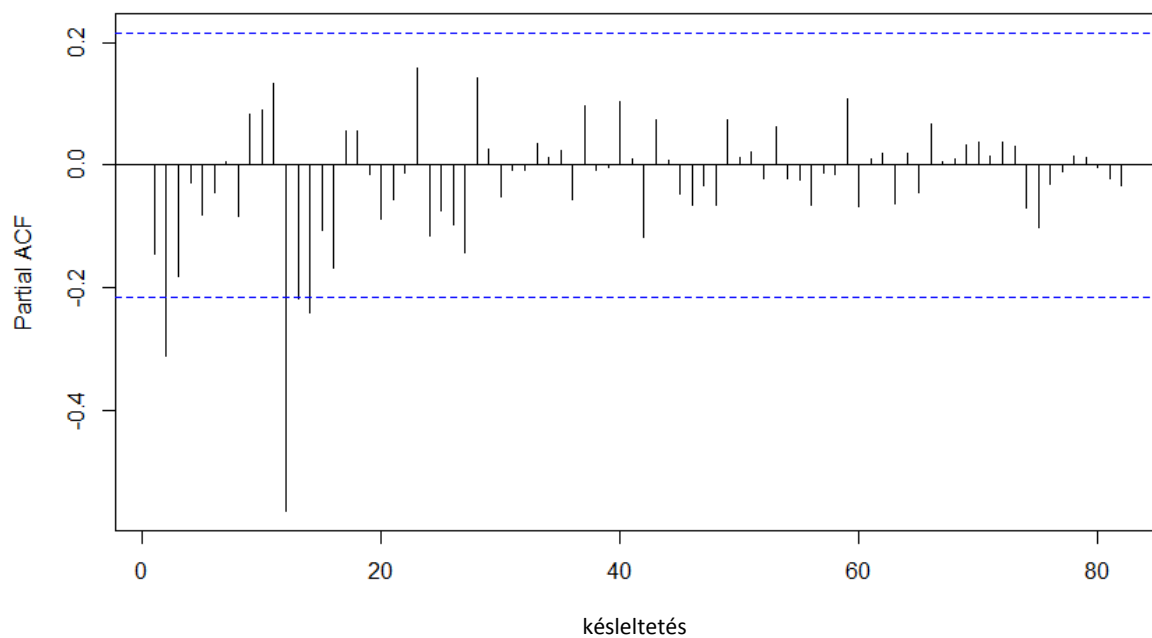
15. ábra: A Lee–Carter modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált κ_t indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)



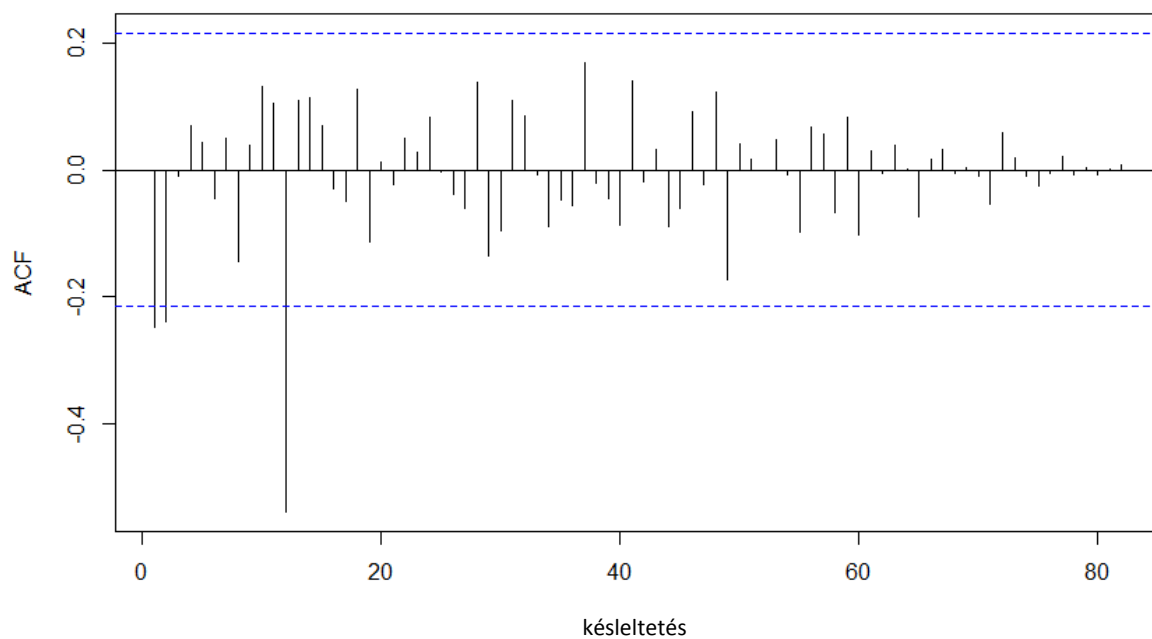
16. ábra: A Lee–Carter modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált κ_t indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)



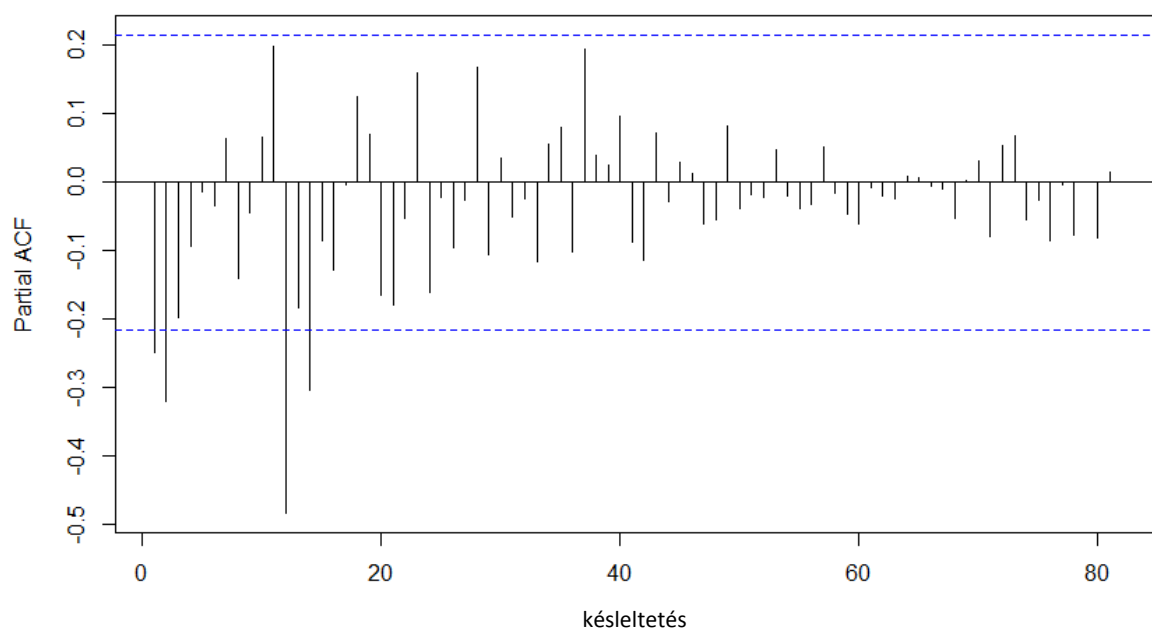
17. ábra: A Lee–Carter modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált κ_t indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők)



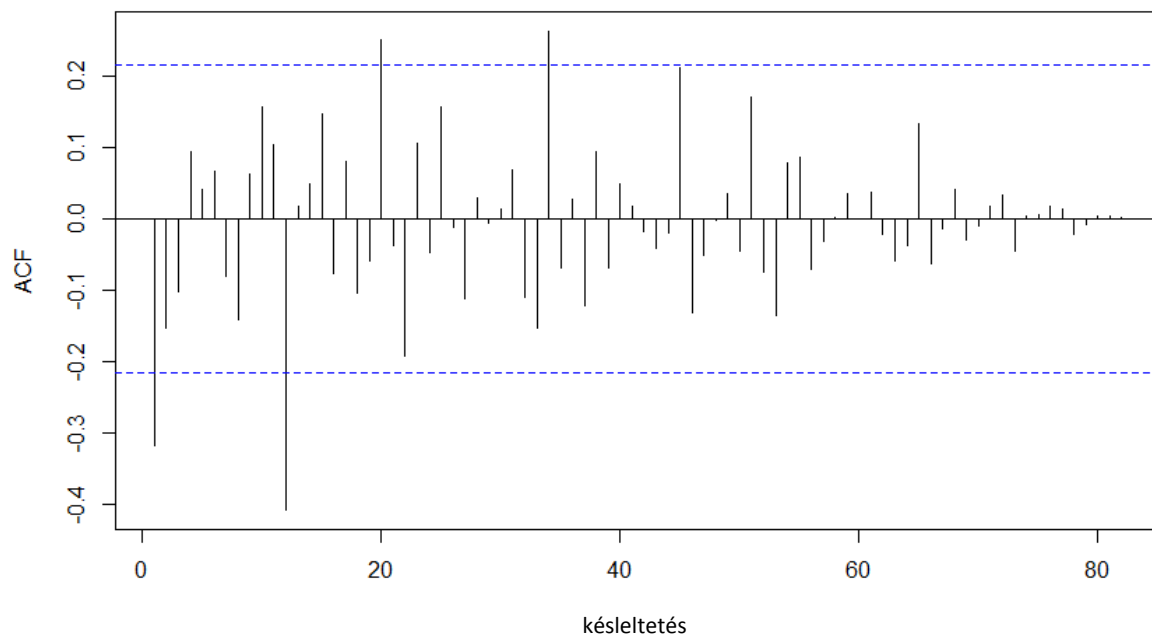
18. ábra: A Lee–Carter modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált κ_t indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők)



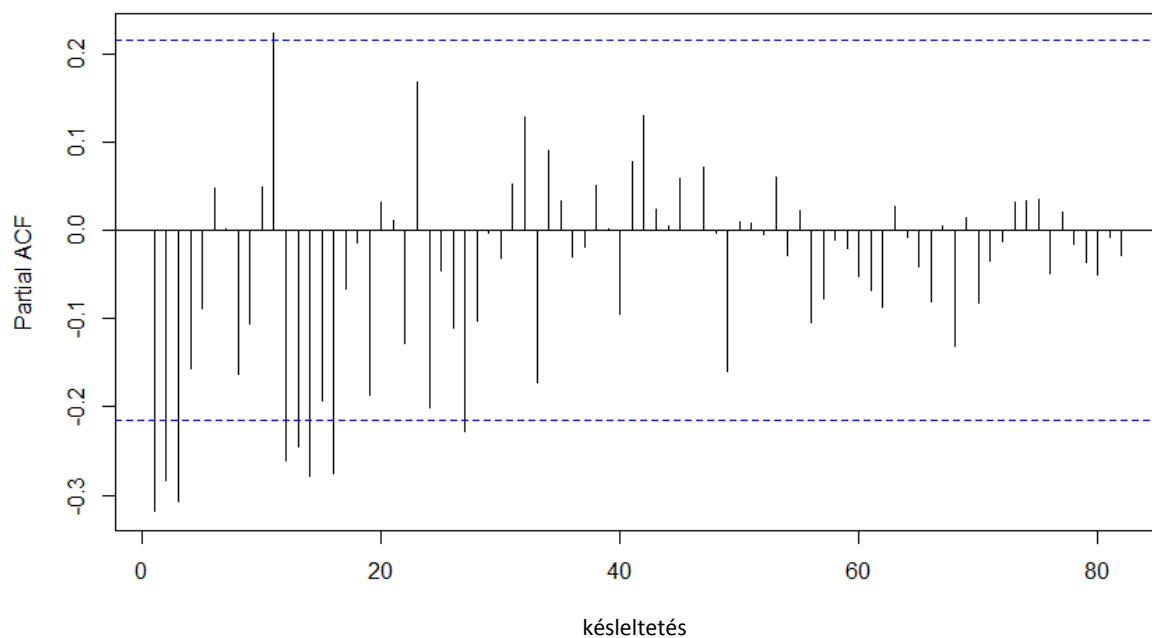
19. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(1)}$ indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)



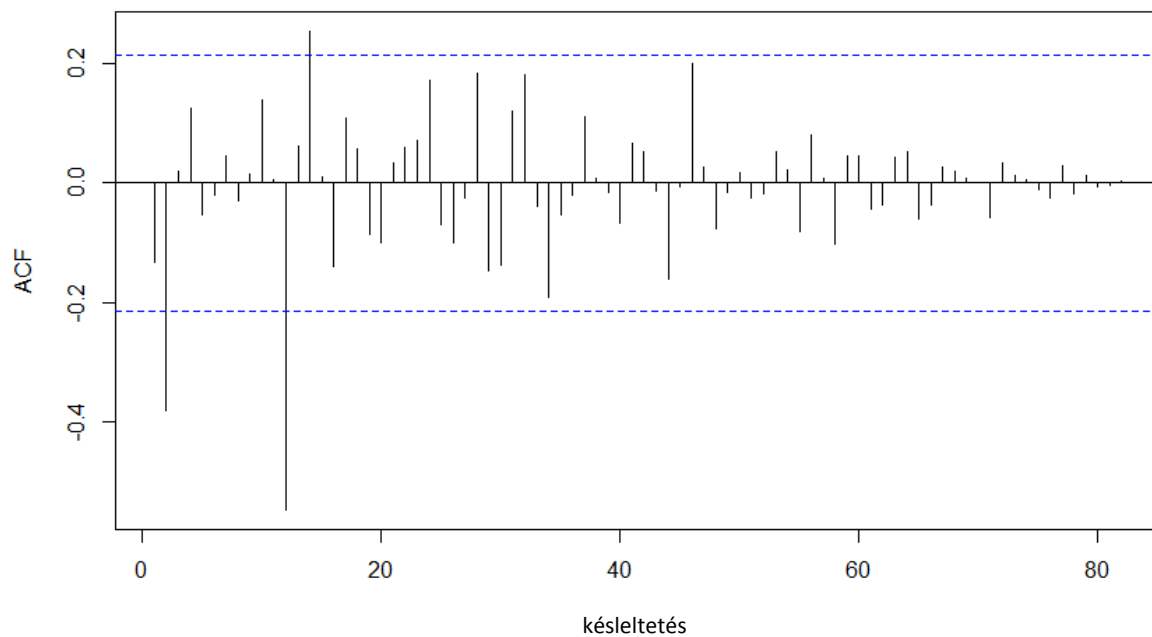
20. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(1)}$ indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)



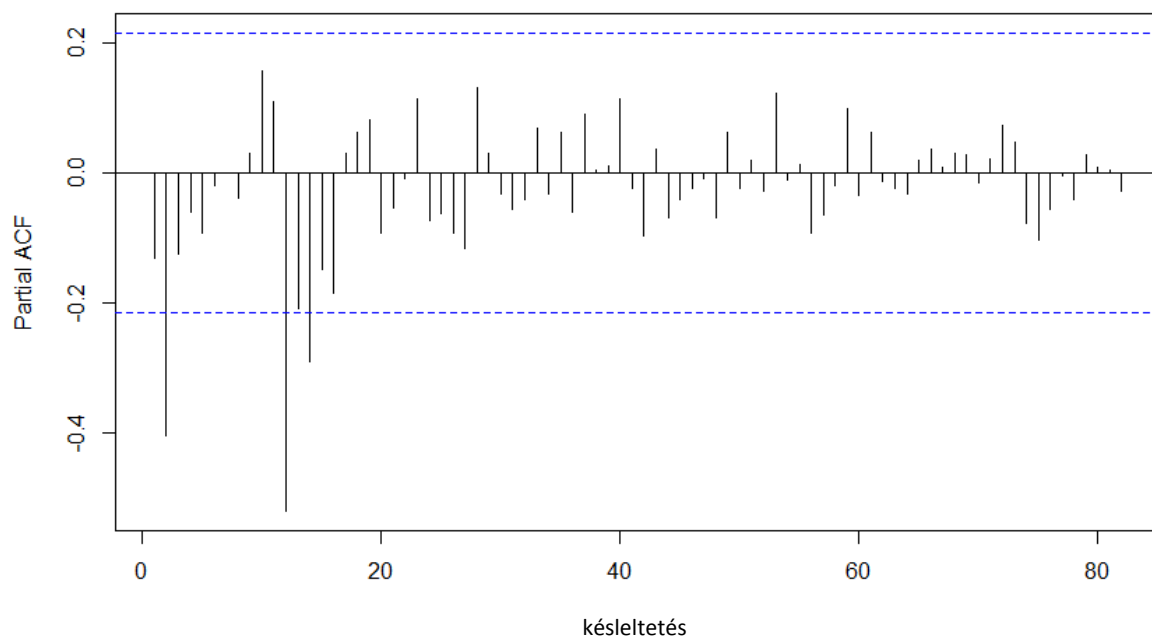
21. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(2)}$ indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)



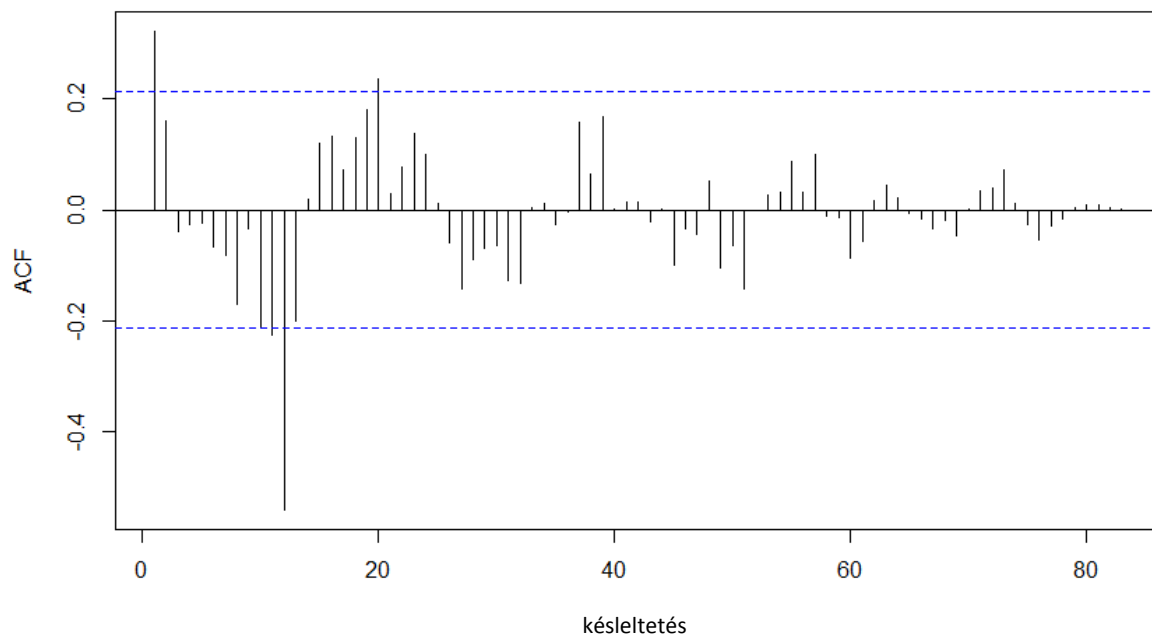
22. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(2)}$ indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb férfiak)



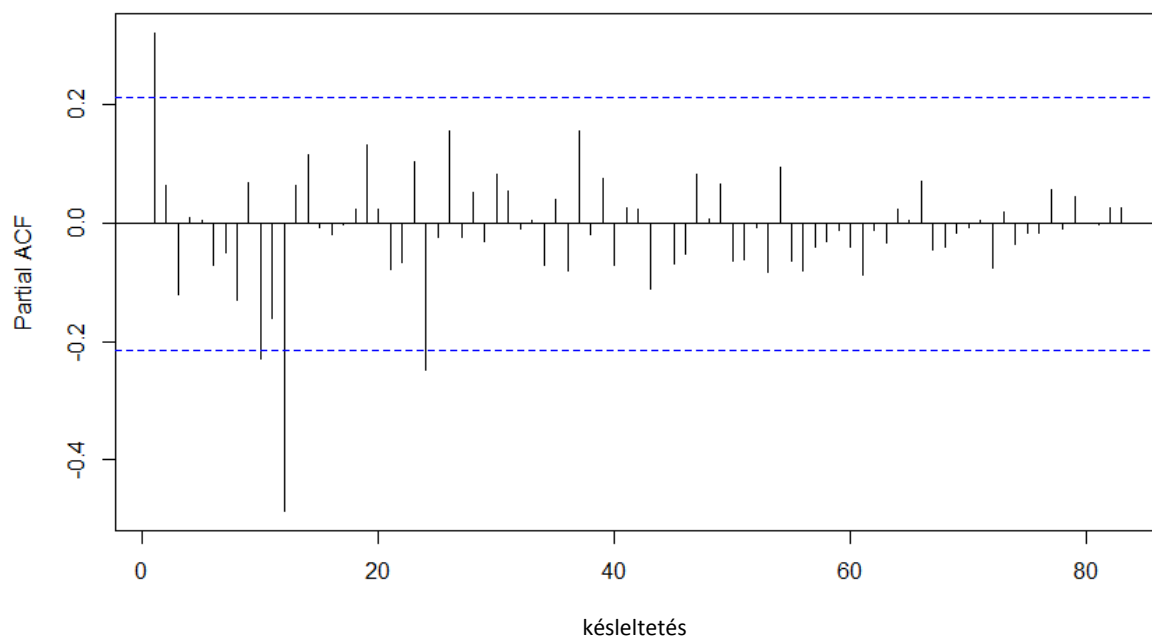
23. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(1)}$ indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők)



24. ábra: A CBD modell szezonálisan és nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(1)}$ indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők)



25. ábra: A CBD modell nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(2)}$ indexének autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők)



26. ábra: A CBD modell nem-szezonálisan differenciált $\kappa_t^{(2)}$ indexének parciális autokorrelációs függvénye (60 éves vagy annál idősebb nők)

Irodalom

Ágoston Kolos Csaba – Burka Dávid – Kovács Erzsébet – Vaskövi Ágnes – Vékás Péter, 2019, Klaszterelemzési eljárások halandósági adatokra. *Statisztikai Szemle* **97(7)**, pp 629–655.

<https://doi.org/10.20311/stat2019.7.hu0629>

Arató Miklós – Bozsó Dávid – Elek Péter – Zempléni András, 2009, Forecasting and simulating mortality tables. *Mathematical and Computer Modelling* **49(3–4)**, pp 805–813.

<https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.01.012>

Barigou, Karim – Loisel, Stéphane – Salhi, Yahia, 2021, Parsimonious predictive mortality modeling by regularization and cross-validation with and without Covid-type effect. *Risks* **9(1)**, pp 1–18.

<https://doi.org/10.3390/risks9010005>

Cairns, Andrew J. G. – Blake, David – Dowd, Kevin, 2006, A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance* **73(4)**, pp 687–718.

<https://doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x>

Cairns, Andrew J. G. – Blake, David – Kessler, Amy – Kessler, Marsha, 2020, The impact of COVID-19 on future higher-age mortality. *Pensions Institute Working Paper* PI-2007

<http://www.pensions-institute.org/wp-content/uploads/wp2007.pdf>

Enders, Walter, 2014, Applied econometric time series. *Wiley series*, 4th edition, New York.

Holford, Theodore R., 2006, Approaches to fitting age–period–cohort models with unequal intervals. *Statistics in Medicine* **25(6)**, pp 977–993.

<https://doi.org/10.1002/sim.2253>

Hunt, Andrew – Blake, David, 2014, A general procedure for constructing mortality models. *North American Actuarial Journal* **18(1)**, pp 116–138.

<https://doi.org/10.1080/10920277.2013.852963>

Hunt, Andrew – Blake, David, 2015, On the structure and classification of mortality models. *Pensions Institute Working Paper* PI-1506

<http://www.pensions-institute.org/wp-content/uploads/2019/workingpapers/wp1506.pdf>

Lee, Ronald D. – Carter, Lawrence R., 1992, Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* **87(419)**, pp 659–671.

<https://doi.org/10.2307/2290201>

Villegas, Andrés M. – Kaishev, Vladimir K. – Millossovich, Pietro, 2018, StMoMo: An R package for stochastic mortality modeling. *Journal of Statistical Software* **84(3)**, pp 1–38.

<https://doi.org/10.18637/jss.v084.i03>