Statisztikai Szemle

Közzététel: 2022. február 17.

A tanulmány címe:

A gammaeloszlás néhány tulajdonsága

Szerző:

MEDVEGYEV PÉTER,
a Budapesti Corvinus Egyetem egyetemi tanára
E-mail: medvegyev@uni-corvinus.hu

DOI: https://doi.org/10.20311/stat2022.2.hu0162

Medvegyev Péter

A gammaeloszlás néhány tulajdonsága

Some properties of gamma distribution

MEDVEGYEV PÉTER,
a Budapesti Corvinus Egyetem egyetemi tanára
E-mail: medvegyev@uni-corvinus.hu

A dolgozat célja, hogy bemutasson a gammaeloszlás központi szerepére vonatkozó néhány fontos klasszikus, de kevésbé ismert eredményt. A gammaeloszlást az elemi valószínűségszámításban vagy nem tárgyalják, vagy csak érintik. Ennek ellenére az eloszlások összetett világában szerepe vetekszik a Poisson- és a normális eloszlás fontosságával. A dolgozat, amely közvetlen bizonyításokat nem részletez, csak a legfontosabb fogalmakat vezeti be és azok szerepét hangsúlyozza, a hozamok eloszlását a gammakonvolúciók oldaláról tárgyaló elmélet (*Bondesson* [1992], *Steutel–van Harn* [2004]) rövid ismertetőjének tekinthető.

A pénzügyi matematika központi kérdése, hogy milyen eloszlást követnek az eszközárak, illetve ennek megfelelően milyen eloszlást követnek a hozamok, amelyeket az árak logaritmusával szokás definiálni. E kérdésben, bármennyire is fontosnak tekinthető, az elmélet és az empirikus irodalom sem ad túl sok útmutatást, így a szakirodalomban előforduló számos egzotikus vagy kevésbé egzotikus eloszlás között nehéz a választás. Az egyetlen ismert és széles körben elfogadott eredmény az, hogy a hozamok eloszlása nem normális, mivel nem egyetlen, hanem valamilyen összetett eloszlásról van szó. A másik észrevétel, amelyet elméleti okokkal esetleg alá lehet támasztani, hogy a hozamok eloszlásának korlátlanul oszthatónak kell lennie. Bár számos érv hozható fel ez ellen is, mégis meggondolandónak tűnik az az indok, miszerint a hét napjai a kereskedés során nem igazán különböznek egymástól, és így a hét hozamát a napok hozamának összege képezi. Ha ehhez hozzáadjuk még azt az ugyancsak általánosan elfogadott feltételezést, hogy az egyes diszjunkt időszakok hozamváltozásai függetlenek, épp a korlátlanul oszthatóság hipotézisét kapjuk. A probléma ezzel csak az, hogy a korlátlanul oszthatóság eldöntése nem mindig egyszerű. Az erre a célra szolgáló legegyszerűbb módszer a karakterisztikus függvényekre épül; eszerint egy eloszlás pontosan akkor korlátlanul osztható, ha a karakterisztikus függvényéből vont összes gyök szintén karakterisztikus függvény. Ez éppen a definíció. A gyök általában komplex értelemben tekintendő, ami igencsak megnehezíti a probléma tárgyalását. Jelen dolgozat szempontjából azonban feltehetjük, hogy a karakterisztikus függvény valós, ugyanis a hozamok eloszlása szimmetrikus, és egy eloszlás pontosan akkor szimmetrikus, ha a karakterisztikus függvénye valós. Ezzel sem jutunk azonban sokkal előbbre, mert a legtöbb eloszlás karakterisztikus függvénye közvetlenül zárt képlettel nem számolható, és ami ennél is fontosabb, nincs egy érdemi, egyszerűen használható kritérium annak eldöntésére, hogy a függvények mikor karakterisztikusak. (A Bochner-tétel, miszerint egy folytonos függvény pontosan akkor karakterisztikus függvény, ha pozitív definit, és a nulla pontban értéke 1, nem tekinthető operatív kritériumnak; *Bondesson* [1992], *Steutel–van Harn* [2004].)

A pénzügyi alkalmazások szempontjából érdemes a következő állításból kiindulni: ha $L(s)=\mathbf{E}\left(exp(-s\xi)\right)$ egy Laplace-transzformált, akkor a $\phi(t)=L\left(t^2/2\right)$ alakú kifejezés egy eloszlás karakterisztikus függvénye. Mivel ennek indoklása egyszerű, és főleg előremutató, célszerű felvázolni.

Legyen tehát F az L-hez tartozó eloszlásfüggvény. Ekkor, felhasználva a standard normális eloszlás karakterisztikus függvényének közismert képletét:

$$\phi(t)=L\left(t^2/2\right)=\int_0^\infty exp\left(-u\frac{t^2}{2}\right)dF(u)=\int_0^\infty exp\left(-\left(\sqrt{u}\right)^2\frac{t^2}{2}\right)dF(u)=$$

$$=\int_0^\infty \phi_{N\left(0,\sqrt{u}\right)}(t)\,dF(u)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty exp(itx)\,exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right)dx\,dF(u)=$$

$$=\int_{-\infty}^\infty exp(itx)\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right)dF(u)\,dx \doteq \int_{-\infty}^\infty exp(itx)\,g(x)\,dx,$$

ahol egyszerűen látható, hogy a belső $g(x)\doteq\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right)dF(u)$ integrál egy sűrűségfüggvény. (Nem negatív, és az integrálja 1.) Vagyis a ϕ valóban egy karakterisztikus függvény.

Vegyük észre, és éppen ez a lényeg, hogy g egy kevert normális eloszlás, ahol a keverés a variancia szerint történik. Vagyis az eljárás éppen a pénzügyi irodalomban ismert és elfogadott gondolatot formalizálja: a közvetlenül megfigyelt hozamok azért nem normálisak, mert a variancia szintén valószínűségi változó. Továbbá, ha az L egy korlátlanul osztható eloszlás Laplace-transzformáltja, akkor az $L\left(t^2/2\right)$ egy korlátlanul osztható eloszlás karakterisztikus függvénye, ugyanis ilyenkor a $\phi_n(t)=\sqrt[n]{L}\left(t^2/2\right)$ szintén karakterisztikus függvény. (*Bondesson* [1992])

A számolást fordított irányban elvégezve beláthatjuk a következőt: egy eloszlás ϕ karakterisztikus függvénye pontosan akkor $\phi(t) = L\left(t^2/2\right)$ alakú, ha az kevert normális eloszlás egy alkalmas F eloszlás szerint. Ilyenkor a keverendő normális eloszlások várható értéke 0, és a keverés az $u = \sigma^2$ variancia szerint történik.

Miért hasznos ez az észrevétel? Azért, mert szemben a Bochner-tétellel, egy függvényről egyszerűen el tudjuk dönteni, hogy az vajon egy nem negatív változó Laplace-transzformáltja-e, vagy sem. Ehhez elég használni az ún. Bernstein-tételt, miszerint egy, az $s \geq 0$ halmazon értelmezett L folytonos függvény pontosan akkor lesz egy nem negatív változó Laplace-transzformáltja, ha az értéke az $s = 0$ pontban 1, az $s > 0$ halmazon végtelen sokszor deriválható, és a deriváltjai alternálnak, vagyis $(-1)^n L^{(n)}(s) \geq 0.$ (*Bondesson* [1992])

Mandelbrot 1960-as években kidolgozott első elmélete alapján a hozamok szimmetrikus stabil eloszlás szerint alakulnak, vagyis olyan eloszlások, amelyek karakterisztikus függvényei $\phi(t) = exp\left(-\beta|t|^\alpha\right)$ alakúak, ahol $\alpha, \beta > 0$ és $\alpha \leq 2.$ Ezek az eloszlások éppen a kevert normális eloszlások családjába tartoznak, amelyek mögött a keverési paraméter Laplace-transzformáltja $L(s) = exp\left(-\gamma s^\delta\right)$ alakú, ahol $\gamma, \delta > 0$ és $\delta \leq 1.$ (Az, hogy valóban Laplace-transzformáltról van-e szó, deriválással könnyen ellenőrizhető, illetve triviális módon az *n*-edik gyök csak a γ értékét módosítja.) (*Bondesson* [1992])

Az olvasó ezen a ponton megjegyezheti, hogy ennek vajon mi köze van a címben szereplő gammaeloszlásokhoz. A következőkben erre térünk rá. A kevert normális eloszlás elmélete arra az észrevételre épül, hogy a piacon a volatilitás nem konstans, és a változó volatilitás a megfigyelt árfolyamok nem normális jellegét okozza. Ebben a megközelítésben a hozamok árfolyamának meghatározásához először a volatilitás alakulását kell modellezni. Az erre alkalmas legegyszerűbb eloszlás éppen az $f(x) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} exp(-\lambda x),\ \ x > 0$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező gammaeloszlás, amely a benne szereplő két paraméter miatt viszonylag rugalmasan illeszthető a megfigyelt adatokra. A hozamok eloszlásának meghatározásához szükségünk van az $L(s) = \int_0^\infty exp(-sx) f(x) dx = \left(\dfrac{\lambda}{s+\lambda}\right)^a$ Laplace-transzformáltra. Ebbe beletéve a $t^2/2$ kifejezést, a hozamok karakterisztikus függvénye $\phi(t) = \left(\dfrac{\lambda}{t^2/2+\lambda}\right)^a$. Az egyszerűség kedvéért a kettes osztót elhagyva, amely csak a λ paraméter értékét módosítja, a $\phi(t)=\left(\frac{\lambda}{t^2+\lambda}\right)^a$ kényelmesebb alakkal érdemes foglalkozni. Ennek előnye, hogy mivel a gammaeloszlás karakterisztikus függvénye $\left(\lambda/(\lambda-it)\right)^a$, a hozamok eloszlása két $\sqrt{\lambda}$ paraméterű gammaeloszlás eltérése, vagyis ún. szimmetrikus gammaeloszlás. Hasonló eredményt kapnánk akkor is, ha különböző paraméterű gammaeloszlások összegét, az ún. gammakonvolúciót választanánk keverő eloszlásnak, de abban az esetben is, ha a gammakonvolúciók gyenge konvergenciában vett határértékét, az ún. általánosított gammakonvolúciókat. (*Thorin* [1977a], [1977b], [1978])

Ezen eloszlások mind megengedettek, ugyanis összegük és határértékük korlátlanul osztható. Ez utóbbi osztály már annyira széles, hogy tartalmazza például a lognormális vagy az inverz gammaeloszlást (ez utóbbi egy gammaeloszlás reciprokaként áll elő). (*Thorin* [1977a], [1977b], [1978])

Számos statisztikai vizsgálat állítja, hogy az összetett empirikus hozameloszlás valamilyen t_n Student-eloszlás. Valamivel általánosabban, ha $r>0$, akkor t_{2r} eloszláson az $f(x)=\frac{1}{B(1/2,r)}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{r+1/2}}$ sűrűségfüggvénnyel adott eloszlást szokás érteni. Legyen $r>0$, az F keverő eloszlás sűrűségfüggvénye pedig $f(x)\doteq\frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{1}{x}\right)^{r+1} exp\left(-\frac{1}{x}\right)$, $x>0$ inverz gammaeloszlás. Tekintsük az $u=\sigma^2$ paraméter szerinti keverést:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma(r)}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{1}{u}\right)^{r+1} exp\left(-\frac{1}{u}\right) exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right)du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)\Gamma(r)}\int_0^\infty t^{\,1/2} t^{\,r+1}\, exp(-t)\, exp\left(-t\frac{x^2}{2}\right)\frac{dt}{t^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)\Gamma(r)}\int_0^\infty t^{\,r-1/2}\, exp\left(-t\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\right)dt=$$

$$=\frac{\Gamma(r+1/2)}{\sqrt{2}\Gamma(1/2)\Gamma(r)}\left(\frac{1}{1+x^2/2}\right)^{r+1/2}=\frac{1}{\sqrt{2}B(1/2,r)}\left(\frac{1}{1+\left(x/\sqrt{2}\right)^2}\right)^{r+1/2},$$

amely a $\sqrt{2}t_{2r}$ alakú változó sűrűségfüggvénye.

A bemutatott megközelítés alapján az árfolyamok, illetve a hozamok alakulásának számos további modellje képzelhető el. A módszer fő előnye, hogy egységes szemléletben tárgyalja a lehetséges árfolyammodelleket, és kiemeli a normális eloszlás központi szerepét. Ezzel az elméleti irodalom, amely a hozamok normalitásából indul ki, és az empirikus irodalom kapcsolatát hangsúlyozza. További előnye, hogy az árfolyamok és a hozzájuk tartozó volatilitások egymásra hatását állítja előtérbe, és ezáltal a piac működésének egy sajátos modelljét adja meg. A megközelítés szerint a piacot alapjában a volatilitás vezérli, így annak modelljéből kell kiindulni, vagyis a hozamok ingadozása mögött mindig a volatilitás megváltozása áll. A módszer hátránya viszont természetesen egyrészt az, hogy a hozamok eloszlását csak numerikus módszerrel, a kapott karakterisztikus függvény numerikus invertálásával tudjuk meghatározni, másrészt pedig az, hogy a keverő eloszlás esetében fel kell tételeznünk, a Laplace-transzformált egyszerű képlettel adható meg. Ez utóbbi tekinthető a módszer legnagyobb hátrányának, ugyanis a legtöbb eloszlás Laplace-transzformáltja nem adható meg egyszerű zárt képlettel. Ilyen értelemben a modell hatékonyan csak a címben szereplő gammaeloszlás vagy különböző paraméterű gammaeloszlások összege esetén használható hatékonyan.

Irodalom

BONDESSON, L. [1992]: *Generalized Gamma Convolutions and Related Classes of Distributions and Densities*. Lecture Notes in Statistics. No. 76. Springer-Verlag. New York.

STEUTEL, F. W. – VAN HARN, K. [2004]: *Infinite Divisibility of Probability Distributions on the Real Line*. Pure and Applied Mathematics – A Program of Monographs, Textbooks, and Lecture Notes. No. 259. Marcel Dekker, Inc. New York, Basel.

THORIN, O. [1977a]: On the infinite divisibility of the lognormal distribution. *Scandinavian Actuarial Journal*. Issue 3. pp. 121–148. https://doi.org/10.1080/03461238.1977.10405635

THORIN, O. [1977b]: On the infinite divisibility of the Pareto distribution. *Scandinavian Actuarial Journal*. Issue 1. pp. 31–40. https://doi.org/10.1080/03461238.1977.10405623

THORIN, O. [1978]: An extension of the notion of a generalized G-convolution. *Scandinavian Actuarial Journal*. Issue 3. pp. 141–149. https://doi.org/10.1080/03461238.1978.10432021