KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXIX. ÉVF., 2022. JÚLIUS–AUGUSZTUS (825–840. o.)

KONDOR GÁBOR

Egyoldali párosítási piacok nehézségi eredményei magasabb dimenzióban

Az egyoldali párosítási piacok tekintetében az irodalom nagyrészt kétfős párok létrehozását vizsgálja. A gyakorlati problémáknál – mint például a vesecsereprogramok vagy a szobatársak beosztása – ugyanakkor előfordul, hogy háromfős vagy nagyobb csoportok létrehozása a feladat. A vesecserékre található olyan gyakorlati megoldás, amely súlyozott párosítási feladatra vezethető vissza. Ez alapján meghatározunk egy gráfparticionálási problémával ekvivalens megoldást, amelynek eredménye Pareto-hatékony. Megmutatjuk, hogy a felírt gráfparticionálási és – ezek speciális eseteként – az egyenletes klaszterezési feladatok megoldása magasabb dimenzióban, vagyis legalább háromfős csoportok kialakítására általánosan NP-nehéz. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy bár biztosan tudjuk, hogy e problémákra létezik optimális megoldás, azt a résztvevők nagyobb száma esetén – jelen ismereteink szerint – képtelenek vagyunk meghatározni.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: C78, D47.

Bevezetés

Amikor piacokról beszélünk, akkor gyakran árupiacokra gondolunk. Ezeken a szereplők egymástól függetlenek, nem kell külön kifejezni a vásárlási szándékot, és nem szükséges az eladó külön beleegyezése sem az adásvétel létrejöttéhez. Itt az „ár" valósítja meg azt a piactisztító mechanizmust, amely mellett a kereslet megegyezik a kínálattal. Ezzel szemben a párosítási piacokon az ár nem vagy csak részben határozza meg, hogy ki mit kap. Például az egyetemi felvételi eljárásban a képzési díj, valamint a munkaerőpiacon a munkabér mellett az egyéni teljesítmények és preferenciák is szerepet játszanak a kapcsolatok, vagy másképpen, a *párok* kialakulásánál. A párosítási piac fontos jellemzője továbbá, hogy egy piaci szereplő nem választhatja

* Köszönjük a Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület 2021-es konferenciáján kapott hozzászólásokat, különösen *Biró Péter* észrevételeit.

Kondor Gábor, Budapesti Corvinus Egyetem Gazdálkodástudományi Kar Pénzügy Tanszék (e-mail: gabor.kondor@uni-corvinus.hu).

A kézirat első változata 2022. február 3-án érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: https://doi.org/10.18414/KSZ.2022.7-8.825

ki egyoldalúan, hogy mit akar, őt is ki kell hogy válasszák. Nem lehet egyoldalúan felvenni egy munkavállalót vagy hallgatót, ahogyan ők sem jelenthetik ki egyoldalúan, hogy felvételt nyertek, tehát végső soron elengedhetetlen, hogy kölcsönösen jó párosítások jöjjenek létre (*Roth* [2012]).

Az egyetemi felvételi eljárás, valamint a munkaerőpiac a kétoldali párosítási piacokra ad példát. Ezeken kéttípusú szereplő van, akiknek a döntései befolyásolják, hogy milyen kapcsolatok alakulnak ki a különböző típusú egyének között. Az egyoldali párosítási piacokon egytípusú szereplő van döntési helyzetben, és a feladat az egyének allokálása meghatározott *dolgok* egy halmaza felett, amelyek lehetnek kollégiumi szobák, szervek, ingatlanok vagy akár sakkjátszmák is.

A párosítási piacokat formálisan elsőként *Gale–Shapley* [1962] tanulmányozta.[1] Úttörő munkájukban megfogalmazzák a *házasságproblémát (marriage problem),* amely a kétoldali párosítási piacok egy modellje. Ebben a két csoport tagjainak, vagyis a férfiaknak és a nőknek szigorú preferenciarendezésük van a másik csoport tagjai felett, és a cél ellenkező nemű szereplőkből álló párok létrehozása. A *Gale–Shapley* [1962] által javasolt megoldás erre a *stabil* párosítás kialakítása. Ennek lényege, hogy ne legyen két olyan, különböző párokban szereplő férfi és nő – vagyis egy *blokkoló pár* –, akik szívesebben lennének egymással, mint saját párjukkal, ezzel *instabillá* téve az aktuális párosítást. A szerzőpáros megmutatja, hogy stabil házasság mindig létezik, és megadják a *késleltetett elfogadási (deferred-acceptance)* eljárást, amely meg is találja azt.

Annak szemléltetésére, hogy stabil párosítás nem létezik tetszőleges preferenciarendezés mellett, *Gale–Shapley* [1962] a *szobatársproblémát* adja meg példaként. Ebben csupán egy csoport van, és a szereplőknek a csoport összes többi tagjára nézve van egy szigorú preferenciarendezésük. Ez a házasságprobléma általánosítása, hiszen nincsen korlátozva, hogy mely egyénekre vonatkozik a preferenciarendezés, és egyúttal a megfogalmazásból következően az egyoldali párosítási piacok elméleti modelljének is tekinthető.

Roth [1984] [1991] kétoldali párosítási piacokat vizsgáló empirikus tanulmányai rámutatnak arra, hogy a stabilitás megfelelő megoldási fogalom, mivel olyan központosított párosítási eljárások bevezetésével, amelyek stabil megoldást adnak, megszüntethetők bizonyos piaci elégtelenségek. *Roth–Vande Vate* [1990] ugyanakkor belátja, hogy a stabil állapot decentralizált piacokon is létrejöhet, ugyanis a blokkoló párok véletlenszerű egymás utáni összepárosítása 1 valószínűséggel stabil megoldáshoz vezet. *Chung* [2000] megmutatja, hogy a konvergencia egyoldali párosítási piacokon is létrejöhet. Gyenge preferenciarendezéseket vizsgálva belátható, hogy a „nincsen páratlan hosszú kör" feltétel teljesülése esetén a *Roth–Vande Vate* [1990] által megadott eljárás 1 valószínűséggel gyengén stabil szobatárs-párosításhoz konvergál. *Diamantoudi és szerzőtársai* [2004] pedig bizonyítja, hogy a konvergencia szigorú preferencia esetén a „nincsen páratlan hosszú kör" feltételtől függetlenül is megvalósul.

[1] Az elmélet később számos gyakorlati alkalmazás alapjául szolgált, mint például rezidens orvosok kórházakhoz rendelése, egyetemi felvételi eljárások, vesecsereprogramok. A stabil allokációk elméletéért és a piactervezés területén végzett munkájukért Lloyd Shapley és Alvin E. Roth kapta a 2012-es közgazdasági Nobel-díjat (https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2012/press-release/).

Másfelől a stabilszobatárs-probléma jellegzetességeiből adódóan számos más megoldási megközelítés is született. Ezek jelentős része a stabilitásfogalom lazításán *(relaxation)* alapul (áttekintésért lásd *Atay és szerzőtársai* [2021]). *Morrill* [2010] ugyanakkor abból indul ki, hogy a szobatársprobléma megoldása során a valóságban ha már kialakult egy beosztás, akkor hiába van a párosításban blokkoló pár, annak tagjai nem kényszeríthetik saját szobatársaikat arra, hogy kiköltözzenek, valamint ha nincsen üres szoba, az új pár nem tud egyoldalúan létrejönni. Ez csupán akkor valósulhat meg, ha van olyan koalíció, amelynek tagjai úgy tudnak új párokat kialakítani, hogy egyik szereplő sem jár rosszabbul, így a kapott koalíciós játékban a javasolt megoldás Pareto-hatékony. Végül megemlítjük *Segev és szerzőtársai* [2005] vesecserékre[2] gyakorlatban is alkalmazott megközelítését, amely a súlyozott párosítási problémára vezethető vissza (*Biró* [2006]), és a jelen tanulmány egyik alapjául is szolgál.

A kapcsolódó irodalom túlnyomórészt kételemű párok kialakítására koncentrált, ugyanakkor van számos olyan példa, amelynek szempontjából releváns a nagyobb elemszámú csoportok létrehozása. A vesecserék esetében van olyan program, amelyben megengedettek a hármas párok (*Biró* [2006]), a szobatársak tekintetében pedig a való életben gyakran három- vagy négyfős szobákkal találkozunk, így fontos kérdés ezen magasabb dimenziós feladatok megoldhatósága elméleti és gyakorlati szempontból.

Jelen tanulmányban a stabil és a súlyozott párosítási megközelítések magasabb dimenziós eredményeit tárgyaljuk. Elsőként bemutatjuk a már ismert megoldhatósági eredményeket a stabilitással kapcsolatban mind az alapproblémára – vagyis a kétfős párokra –, mind pedig a nagyobb csoportokra vonatkozóan. Ezt követően *Kondor* [2022] eredményeit felhasználva megmutatjuk, hogy a súlyozott párosítási megfogalmazás esetén a legalább három főből álló, egyenlő méretű csoportok kialakítása általánosan NP-nehéz,[3] ezért a gyakorlatban nem tudjuk hatékonyan megoldani ezen feladatokat.

Stabilszobatárs-probléma párokra

Gale–Shapley [1962] kétoldali párosítási piacokat tekintett az egyetemi jelentkezésekre vonatkozóan. A problémakör vizsgálatához a *házasságproblémát* vette alapul, amelyet a későbbi tárgyalást is figyelembe véve a következőképpen definiálunk.

Legyenek adottak a férfiak $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ és a nők $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ azonosan n-elemű halmazai. Legyen továbbá minden e egyénnek egy teljes, tranzitív, szigorú $P(e)$ preferenciarendezése a piac másik felén lévő szereplőin és azon az eshetőségen,

[2] A vesecsere-problémában a szereplők olyan beteg–donor párok, amelyek egyik tagjának vesetranszplantációra van szüksége, a másik tagja pedig hajlandó lenne megválni az egyik veséjétől. Ugyanakkor a két fél egymással nem kompatibilis, ezért olyan más beteg–donor párt keresnek, akikkel keresztben megvalósulhat a transzplantáció. A probléma megoldása során a feladat a transzplantációra váró beteg–donor párokból egy párosítás kialakítása.

[3] NP: nem determinisztikus polinomiális *(nondeterministic polynomial)* futásidejű: azon eldöntési problémák bonyolultságelméleti osztálya, amelyek „igen" választ adó eseteire van polinomiális futásidőben ellenőrizhető *bizonyíték,* úgynevezett tanú.

NP-nehéz: azon problémák bonyolultságelméleti osztálya, amelyeket legalább olyan nehéz megoldani, mint a legnehezebb NP-beli problémákat.

hogy egyedül marad.[4] Jelölje $x \succ_e y$, hogy az e egyén az x szereplőt (szigorúan) preferálja y-nal szemben. Legyen $P \equiv \{P(m_1), \ldots, P(m_n), P(w_1), \ldots, P(w_n)\}$ az összes egyén preferencialistájának halmaza, ennélfogva a házasságprobléma egy esete megadható az (M, W, P) hármas által.

A feladat egy *párosítás* létrehozása, amely egy olyan egy az egyhez $\mu: M \cup W \to M \cup W$ függvény, amelyre minden $m \in M$ és $w \in W$ esetén $\mu(m) = w$ akkor és csak akkor, ha $\mu(w) = m$ (tehát egy m férfiből és w nőből álló pár), továbbá ha $\mu(m) \notin W$, akkor $\mu(m) = m$ (tehát m egyedülálló férfi), és hasonlóan, ha $\mu(w) \notin M$, akkor $\mu(w) = w$ (tehát w egyedülálló nő).

Gale–Shapley [1962] megoldásra adott ötletének alapja, hogy olyan párosítást alakítsanak ki, amelyben nincsenek blokkoló párok. Azt mondjuk, hogy egy adott μ párosításban az $m \in M$ és $w \in W$ egyének egy *blokkoló párt* alkotnak, ha egymást preferálják a μ szerinti párjukhoz képest. Ekkor nyilvánvalóan m és w ketten együtt egy új párt alkotva számukra jobb megoldást tudnának létrehozni, így érdekükben állna változtatni, ennélfogva a párosítás nem lenne stabil.

1. DEFINÍCIÓ • Azt mondjuk, hogy egy μ párosítás *stabil (stable),* ha nincsenek benne blokkoló párok.

A házasságproblémának azt a verzióját, amelyben stabil megoldást keresünk, *stabilházasság-problémának* nevezzük. *Gale–Shapley* [1962] stabil házasságokra vonatkozó eredményét az 1. TÉTEL mondja ki.

1. TÉTEL (*Gale–Shapley* [1962]) • A stabilházasság-problémában mindig létezik stabil párosítás.

A szerzők egy stabil megoldás kialakítására a *késleltetett elfogadás (deferred-acceptance)* eljárását adják meg. A probléma egyik érdekessége, hogy a stabil megoldások halmaza többelemű is lehet, és a kapott stabil megoldás annak a félnek lesz kedvezőbb, amelyik felől az algoritmust futtatják.

Gale–Shapley [1962] továbbá megvizsgálta, hogy általános preferenciarendezések mellett is léteznek-e stabil megoldások, amihez definiálta a házasságprobléma általános változatát, a *szobatársproblémát.* Ebben a feladatban hallgatókról beszélhetünk, akiknek csupán egy egységes I halmaza van, és a fenti definíciók ennek megfelelően módosulnak. A szereplők preferenciarendezése az I halmaz felett van, a párosítás egy $\mu: I \to I$ hozzárendelés, amely esetén $x, y \in I$ egyénekre $\mu(x) = y$ akkor és csak akkor, ha $\mu(y) = x$; és $\mu(x) = x$ jelöli, ha az x egyén egyedülálló. A szobatársprobléma egy esetét az (I, P) pár adja meg, ha pedig stabil megoldás meghatározása a cél, akkor *stabilszobatárs-problémáról* beszélünk. Az 1. PÉLDA szemlélteti, hogy nincs a szobatársprobléma tetszőleges esetére stabil párosítás, *Knuth* [1977] pedig megadott egy példát, amely megmutatja, hogy a stabilszobatárs-probléma esetében is akár több megoldás is létezhet.

[4] *Gale–Shapley* [1962] tanulmányában az a lehetőség nem szerepelt, hogy egy egyén egyedülálló maradjon, de az eredményeik egyszerűen kiterjeszthetők erre az esetre is.

1. PÉLDA • Legyen $x, y, z, w \in I$ négy hallgató, és preferencia-sorrendjeik legyenek a következők:

$x: y \succ_x z \succ_x w,$

$y: z \succ_y x \succ_y w,$

$z: x \succ_z y \succ_z w,$

$w: x \succ_w y \succ_w z.$

Ekkor x, y és z mindegyike legjobban preferált a másik két hallgató közül valaki által. Így, ha tekintünk egy párosítást, akkor bárki is kerül w-vel egy szobába, a másik szobában lévő két hallgató közül az egyik biztosan jobban preferálja majd, mint a saját szobatársát, és mivel a w az x, az y és a z listáján is a legkevésbé preferált, ez a párosítás biztosan nem lesz stabil, sőt egyik sem.

A stabilszobatárs-probléma megoldhatóságának kérdése annak felel meg, hogy a feladat egy adott esetére megadjunk egy stabil párosítást, ha az létezik, vagy meg tudjuk állapítani, ha nincs ilyen megoldás. Az első lépést a kérdés megválaszolására *Irving* [1985] tette meg: megadott egy olyan legrosszabb esetben is polinomiális, $\mathcal{O}(n^2)$ futásidejű algoritmust, amely megmondja, hogy létezik-e stabil párosítás, és ha létezik, akkor meg is találja azt.

A megoldhatóság karakterizációját *Tan* [1991] adta meg, aki szükséges és elégséges feltételt mutatott egy stabil szobatárs-párosítás létezésére. A tanulmány a *stabil partíció* létezését vizsgálta, amely általánosítja a stabil párosítás keretet.

2. TÉTEL (*Tan* [1991]) • A stabilszobatárs-probléma bármely esetére akkor és csak akkor létezik teljes stabil párosítás, ha nincs páratlan partíció.

Mivel a stabilházasság-probléma a stabilszobatárs-probléma egy speciális esetének is tekinthető, ezért ez az eredmény egyúttal megválaszolja azt a kérdést is, hogy a stabilházasság-problémában miért létezik mindig megoldás.

Ha a preferenciarendezésekben megengedettek a döntetlenek, vagy másképpen fogalmazva az indifferenciák is, akkor *gyenge preferenciákról* beszélünk. Jelölje $y \sim_x z$, ha az x egyén *indifferens* az y és a z szereplők között, valamint jelölje $y \succcurlyeq_x z$, ha az x egyén *gyengén preferálja* az y szereplőt z-vel szemben, vagyis vagy erősen preferálja, vagy indifferens közöttük.

Gyenge preferenciák esetén többféle stabilitási definíció is megadható. Azt mondjuk, hogy egy párosítás *gyengén stabil (weakly stable),* ha nincs olyan blokkoló pár, amelynek tagjai szigorúan jobban preferálják egymást saját partnerüknél. Továbbá egy párosítás *szuperstabil (super-stable),* ha nincs olyan blokkoló pár, amelynek tagjai szigorúan jobban preferálnák a másikat saját párjuknál, vagy indifferensek közöttük.

Chung [2000] a gyenge preferenciák esetét tekinti, és megmutatja, hogy a „nincsen páratlan hosszú kör” tulajdonság elégséges feltétele a gyengén stabil szobatárs-párosítás létezésének.

2. DEFINÍCIÓ • Egy *kör (ring)* az $x_1, \ldots, x_k \in I$ egyének egy $(x_1, \ldots, x_k)$, $k \geq 3$ rendezett halmaza, amelyre

$$x_{i+1} \succ_{x_i} x_{i-1} \succcurlyeq_{x_i} x_i, \quad \text{ha} \quad i,\ 1 \leq i \leq k \text{ páratlan,}$$

$$x_{i+1} \succcurlyeq_{x_i} x_{i-1} \succcurlyeq_{x_i} x_i, \quad \text{ha} \quad i,\ 1 < i \leq k \text{ páros.}$$

3. DEFINÍCIÓ • Egy *páratlan kör (odd ring)* egy olyan $(x_1, \ldots, x_k)$ kör, amelyre k páratlan.

3. TÉTEL (*Chung* [2000]) • Ha a preferenciaprofil nem tartalmaz páratlan hosszú köröket, akkor létezik gyengén stabil szobatárs-párosítás.

Vegyük észre, hogy a 3. TÉTEL megfordítottja nem igaz, vagyis stabil szobatársak akkor is létezhetnek, ha a preferenciaprofilban található páratlan hosszú kör. Erre egy háromelemű példát rögtön kaphatunk, ha az $I = \{x, y, z\}$ egyének preferenciái pontosan egy (x, y, z) páratlan kört határoznak meg, ugyanis ekkor az a μ párosítás, amelyre $\mu(x) = y$, $\mu(z) = z$, stabil.

A „nincsen páratlan hosszú kör" feltétel önmagában nehezen interpretálható közgazdaságilag. Ezért *Chung* [2000] belátta számos, a preferencialisták valamilyen korlátozását eredményező tulajdonságról (például dichotóm vagy egycsúcsú preferenciaprofil), hogy azokból a „nincsen páratlan hosszú kör" feltétel is következik. Ezek köréből ugyanakkor a vizsgált párosítási gazdaság határozza meg, hogy melyik tulajdonság lehet releváns.

A gyenge preferenciákra *Ronn* [1990] belátta, hogy a stabilszobatárs-problémára *NP-teljes* feladat eldönteni, hogy egy adott esetre létezik-e gyengén stabil párosítás. Ez azt jelenti, hogy nem létezik nagyméretű problémák esetén is észszerű időkereten belüli – vagy másképpen hatékony – algoritmus a megoldás meghatározására. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy egy központosított eljárás még minden információ ismeretében sem képes eredményesen megtalálni egy gyengén stabil párosítást.

A szuperstabil párosításokra ugyanakkor létezik pozitív eredmény. *Irving–Manlove* [2002] a gyenge preferenciák esetére megadott egy olyan lineáris futásidejű algoritmust, amely megtalál egy szuperstabil párosítást, ha az létezik. Ezt az algoritmust pedig kiterjesztik nem teljes és/vagy részben rendezett preferencialisták esetére is.

Irving–Manlove [2002] továbbá azt is megmutatta, hogy a stabilszobatárs-probléma egy olyan esetére, amelyben döntetlenek és nem teljes preferencialisták is megengedettek, több, különböző méretű gyengén stabil megoldás is előfordulhat. A szerzőpáros belátta, hogy a legnagyobb méretű gyengén stabil párosítás megtalálása NP-nehéz feladat.

A stabilszobatárs-probléma eredeti felírásában az egyének preferencialistái teljesen függetlenek egymástól. *Arkin és szerzőtársai* [2009] felírta a *geometriai stabil szobatársak (geometric stable roommates)* megközelítést, amelyben a szereplők között a következő módon tételeznek fel összefüggéseket. Az egyéneket $\mathbb{R}^d$-beli pontok jelölik, ahol az egyes térbeli dimenziók például a valóságban értelmezett szobatársproblémában különböző tulajdonságoknak feleltethetők meg, például: preferált lefekvési idő, a szoba tisztaságának mértéke stb. A szerzők az egyének preferencialistáját pedig az egyének közötti távolságok alapján származtatják, így döntetlenek is szerepelhetnek a listákban. A feladat egy gyengén stabil párosítás megadása, amelyre a szerzők megmutatják, hogy az általános esettel ellentétében ennek van polinomiális futásidejű megoldása is.

Stabilszobatárs-probléma háromfős csoportokra

A stabilszobatárs-problémát eddig a kételemű párok létrehozása szempontjából vizsgáltuk. A gyakorlatban ugyanakkor számos olyan alkalmazás van, amelyben kétfősnél nagyobb csoportok kialakítása a feladat. A vesecserék esetében a transzplantációk az amerikai NEPKE- *(New England Program for Kidney Exchange)* programban három hosszú körben is megengedettek (*Biró* [2006]). A kollégistákat pedig sok esetben három- vagy akár négyfős szobákba kell beosztani. Ennélfogva adódik a kérdés, hogy akkor is tudunk-e stabil megoldásokat találni, ha kettőnél több fős párokról van szó.

A *Ng–Hirschberg* [1991] által vizsgált *háromfős stabil hozzárendelés (3-person stable assignment, 3PSA)* vagy másképpen *háromdimenziós stabil párosítás (3-dimensional stable matching, 3D-SR)* során háromfős szobák kialakítása a cél, amelyet a szerzők nem konzisztens, szigorú preferenciarendezések esetén vizsgálnak. Ekkor egy e egyén preferencia-sorrendjében előfordulhat, hogy egy másik egyén rangsorolása attól függ, hogy kivel van párban. Például egy e egyén szempontjából az x_1, x_2, y_1, y_2 szereplőkre $x_1 y_1 \succ_e x_1 y_2$ és $x_2 y_2 \succ_e x_2 y_1$, ahol xy az x és y egyénből alkotott párt jelöli. *Ng–Hirschberg* [1991] felírása szerint az egyének I halmazának számossága $n = 3k$, ahol k egész. Az egyének pedig a többi hallgatóból alkotott valamennyi párt rangsorolják, azaz egy $e \in I$ egyén $\succ_e$ preferenciarendezése egy lineáris sorrend a nem rendezett párok $\left\{\{e_1, e_2\} \middle| e_1 \neq e_2 \text{ és } e_1, e_2 \in I - \{e\}\right\}$ halmazán. A stabil párosítás szerepét a stabil hozzárendelés váltja fel.

4. DEFINÍCIÓ • Egy M *stabil hozzárendelés (stable assignment)* az I alaphalmaz egy olyan k darab háromelemű részhalmazból álló partíciója, amelyre $\forall \{e_1, e_2, e_3\} \notin M$ és $\{e_1, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}\}, \{e_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}\}, \{e_3, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}\} \in M$ hármasokra vagy $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}\} \succ_{e_1} \{e_2, e_3\}$, vagy $\{\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}\} \succ_{e_2} \{e_1, e_3\}$, vagy $\{\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}\} \succ_{e_3} \{e_1, e_2\}$.

Vagyis egy M hozzárendelés stabil, ha nincs három olyan, nem ugyanabban az M-beli hármasban szereplő egyén, akik ha egy új párt alakítanának ki, akkor mindegyikük jobban járna. Másképpen, hármuk közül legalább az egyikük a saját párjait preferálja a hármas két másik tagjával szemben. *Ng–Hirschberg* [1991] megmutatja, hogy annak eldöntése, hogy a 3D-SR probléma egy adott esetére létezik-e stabil hozzárendelés, NP-teljes feladat.

Huang [2007] belátja, hogy a 3D-SR probléma előző, páros rangsorolásos megfogalmazása akkor is NP-teljes, ha a preferenciarendezések konzisztensek, azaz rögzített $y, z \in I$ mellett $xy \succ_e xz$ vagy minden x egyénre teljesül, vagy egyikre sem. Példaként egy olyan felírást említ a szerző, amelyben az egyének értékeléseket adnak a többiekre, és a párok értéke a benne szereplő egyének értékeinek összege. A kombinációk sorrendjét az értékek összege határozza meg, és ha két különböző párra az értékek összege egyenlő, akkor az egyén indifferens közöttük.

Iwama és szerzőtársai [2007] a preferencialistákon alapuló 3D-SR problémát tekinti, és bebizonyítják, hogy az NP-teljes még akkor is, ha a hallgatók nem párokat rangsorolnak, hanem minden egyes jelentkezőt külön-külön. Ekkor természetesen a stabilitás 4. DEFINÍCIÓBAN megadott feltételei módosulnak. Például az $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}\} \succ_{e_1} \{e_2, e_3\}$ feltétel helyett

$$\varepsilon_{11} \succcurlyeq_{e_1} e_2 \quad \text{és} \quad \varepsilon_{12} \succcurlyeq_{e_1} e_3 \quad \text{vagy} \quad \varepsilon_{12} \succcurlyeq_{e_1} e_2 \quad \text{és} \quad \varepsilon_{11} \succcurlyeq_{e_1} e_3$$

szerepelne, ahol $x, y \in I$ egyénekre $x \succcurlyeq_e y$ akkor, ha e az x-et preferálja y ellenében, vagy x és y ugyanazt az egyént jelöli.

Deineko–Woeginger [2013] a 3D-SR probléma egy metrikus térbeli megközelítését (METRIC-3D-SR) vizsgálta, és belátták annak NP-teljességét. Ebben az egyének pontoknak felelnek meg egy metrikus térben, amelyben egy standard $\delta(.,.)$ távolságfüggvényt értelmezünk, vagyis nemnegatív, szimmetrikus, és teljesül rá a háromszög-egyenlőtlenség. Továbbá azt mondjuk, hogy az e_1 egyén az $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}\}$ párt preferálja az $\{e_2, e_3\}$ párral szemben, ha

$$\delta(p, \varepsilon_{11}) + \delta(p, \varepsilon_{12}) < \delta(p, e_2) + \delta(p, e_3).$$

Chen–Roy [2021] az előző speciális eseteként megmutatja, hogy az NP-teljesség akkor is fennáll, ha az egyéneket euklideszi térbeli pontokként reprezentáljuk (így definiálva az EUCLID-3D-SR problémát), és a δ függvényt a pontok közötti távolság adja.

Arkin és szerzőtársai [2009] a stabilszobatárs-probléma háromdimenziós változatát is tekinti, amelyre geometriai 3D-SR problémaként hivatkozik. A szerzők bevezetik az α-stabil párosítás fogalmat, amelynek értelmében a hallgatók csak akkor hajlandók cserélni, ha legalább α-szoros javulást érnek el. Belátják, hogy egy α-stabil párosítás megtalálása legalább olyan nehéz, mint egy olyan párosítás megadása, amely a hagyományos értelemben stabil. Továbbá a szerzők azt is bizonyítják, hogy a háromdimenziós geometriai stabilszobatárs-probléma (ahol a dimenziószám háromfős csoportok kialakítására utal) egy 2-stabil párosítás polinomiális futásidőben megadható.

A 3D-SR probléma további variánsaiként *Biró–McDermid* [2010] belátja a háromdimenziós probléma NP-teljességét ciklikus preferenciákra nem teljes listák esetén, míg *Lam–Plaxton* [2019] bizonyította az NP-teljességet teljes ciklikus listákra, és az eredményt kiterjesztették 3-nál magasabb dimenzióra is.

Súlyozott párosítások magasabb dimenzióban

Segev és szerzőtársai [2005] a vesecseréket végrehajtó központok „első találatot elfogadó” *(first-accept)* párosítási eljárása helyett egy optimalizált párosítási módszert javasol. Az előbbiben helyi vagy regionális adatbázisokat felhasználva egy nem kompatibilis beteg–donor párt az első beazonosított, velük kompatibilis párral kapcsolnak össze, az egyéneket eltávolítják a vesecserére várók listájából, és transzplantációt ajánlanak fel nekik. Ez a párosítás ugyanakkor nem feltétlenül a legjobb sem a párban szereplőknek, sem a párosításon kívülieknek.

Segev és szerzőtársai [2005] alapján az első találatot elfogadó eljárás országos szintre való kiterjesztésénél jobb eredményt lehetne elérni az általuk javasolt országos, optimalizált párosítási algoritmussal. Ez ugyanis az elvégzett szimulációs kísérlet alapján több transzplantációt, jobb HLA-egyezőséget[5] (a transzplantációk során különösen fontos tényező), az átültetett szervek jobb ötéves várható túlélését és az utazásra kényszerülő párok számának csökkenését eredményezné.

A javasolt eljárást alkalmazták Ohio államban, amely matematikailag egy súlyozott párosítási feladatra vezethető vissza (*Biró* [2006]). Utóbbiról pedig *Edmonds* [1965] algoritmusa óta ismert, hogy polinomiális futásidőben megoldható. Az optimalizálási feladatok előnye az egyoldali stabil párosításokkal szemben, hogy az egyének bármilyen tulajdonságai mellett létezik optimális megoldás. Vegyük észre, hogy ez a megoldás *Pareto-hatékony*, hiszen az optimumban nem lehet olyan koalíció, amelynek tagjai javítani tudnának a célfüggvényértéken, ha egymással cserélnének.

A súlyozott párosítási problémákat magasabb dimenzióban, vagyis kettőnél nagyobb – de azonos – csoportméret mellett több felírás szerint is tekinthetjük. Ezek a konkrét modelltől függően gráfparticionálási vagy speciális esetként egyenletes klaszterezési problémákkal egyeznek meg. Ezeket definiálhatjuk minimalizálási és maximalizálási feladatokként, az így kapott optimalizálási problémák pedig sokrétűen alkalmazhatók. *Weitz–Jelassi* [1992], valamint *Mingers–O'Brien* [1995] a lehető legváltozatosabb tanulói csoportok létrehozását, míg *Höppner–Klawonn* [2008] homogén csoportok kialakítását tekintette. A következőkben az optimalizálási problémák formális leírása során *Kondor* [2022] tanulmányára támaszkodunk.

Súlyozott párosítási problémák

A vesecserékre alkalmazott súlyozott párosítási probléma hármas cserék esetében analóg egy *m-dimenziós súlyozott párosítási* (*m-dimensional weighted matching*, mDWM)[6] feladattal $m = 3$ érték mellett.[7] Az m-dimenziós súlyozott párosítás során az egyéneket egy gráf pontjai reprezentálják, a pontok között pedig távolságokat értelmezünk, amelyek élsúlyoknak felelnek meg. Ekkor a feladat olyan m-fős csoportok kialakítása, amelyekre a csoportokon belüli távolságok összege az összes

[5] A humán leukocitaantigén (HLA) rendszer az emberben a 6. kromoszómán lévő gének együttese, amely az immunrendszer szabályozásáért felelős sejtfelszíni fehérjéket kódolja.

[6] *Feo–Khellaf* [1990] a maximalizálási problémához tartozó eldöntési problémára m-dimenziós párosításként (mDM) hivatkozott. Jelen tanulmányban az általános problémára az „m-dimenziós súlyozott párosítás" (mDWM) elnevezést használjuk, és az egyes mDWM-problémák esetén külön jelöljük, hogy az optimalizálás célja maximalizálás (MAX) vagy minimalizálás (MIN).

[7] $m = 4$ érték mellett az analógia nem áll fenn, mivel a vesecseréknél köröket tekintünk, míg az mDWM-problémánál teljes részgráfokat.

csoportra összegezve minimális (MIN-mDWM) vagy alternatív esetben maximális (MAX-mDWM). Utóbbit formálisan az 1. OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMA írja le, a minimalizálási probléma felírása ebből triviálisan következik.

1. OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMA • Maximális súlyú m-dimenziós súlyozott párosítás (MAX-mDWM)

Input: Egy $G=(V, E)$ gráf, ahol $|V|=km$, és k, m egészek, továbbá a gráf minden $e=(u, v)\in E$ éléhez tartozik egy $w_e = \mathrm{w}_{(\mathrm{u},\, v)}$ élsúly.

Output: A G ráf csúcsainak egy $V_1, V_2, \ldots, V_\mathrm{k}$ diszjunkt, m csúcsot tartalmazó halmazokból álló partíciója, amely maximalizálja a

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{u, v \in V_j \\ u \neq v}} w_{(u, v)}$$

célfüggvényt, vagyis amelyre maximális azon élek súlyának összege, amelyeknek mindkét végpontja ugyanabban a V_j halmazban található.

A gráfparticionálási probléma egy speciális verziója az egyenletes klaszterezési feladat, amelyet szobatársak csoportosításaként mutatunk be. *Arkin és szerzőtársai* [2009] felírásához hasonlóan tekintsük a szobatársproblémában a hallgatókat $\mathbb{R}^d$-beli pontokként, a hallgatók kompatibilitását pedig adják meg a pontok közötti euklideszi távolságok. Ekkor, ha – *Arkin és szerzőtársai* [2009] modelljétől eltérően – egy célfüggvényt definiálunk a csoportokon belüli négyzetes távolságok összege minimalizálásának megfelelően, akkor a párosítási feladat ekvivalens (lásd *Pyatkin és szerzőtársai* [2017]) egy *egyenletes k-közép klaszterezési (balanced k-means clustering)* – vagy másképpen nevezve egyenletes minimális négyzetösszegű klaszterezési *(minimum sum-of-squared clustering, MSSC)* – problémával, amelyet formálisan a 2. OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMA ad meg.

2. OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMA • Egyenletes k-közép klaszterezés vagy egyenletes MSSC

Input: $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ pontok halmaza és egy k egész szám, amelyre $m = n/k$ egész.

Output: A pontok azon $C_1, \ldots, C_k$ partíciója a klaszterek η_j klaszterközéppontjaival együtt, amelyre η_j a C_j klaszter középpontja $1 \leq j \leq k$ esetén, $|C_j| = m$, $1 \leq j \leq k$, és amely minimalizálja a

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{x_i \in C_j} \left\| x_i - \eta_j \right\|^2$$

célfüggvényt.

Az egyenletes MSSC-problémában homogén klaszterek kialakítása a célunk, amihez a célfüggvény minimalizálását használjuk. Ugyanakkor, ha alternatív esetben heterogén csoportokat szeretnénk létrehozni, akkor az optimalizálási feladat során a célfüggvény maximalizálása lenne a megfelelő választás. Emellett a négyzetes euklideszi távolságok helyett adott esetben tekinthetjük az ℓ_1 normát is, amely a pontok koordinátánkénti abszolút értékben vett különbségeinek összege. A 3. OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMÁVAL definiáljuk azt a megoldási megközelítést, amellyel általánosítjuk az egyenletes MSSC-problémát. A felírásban a pontok között definiált távolságot a p paraméter határozza meg, a cél pedig lehet minimalizálás vagy maximalizálás is. Az így kapott optimalizálási problémákra egységesen *egyenletes klaszterezési* feladatokként hivatkozunk.

3. OPTIMALIZÁLÁSI PROBLÉMA • pMIN-mDWM (pMAX-mDWM)
Input: $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ pontok halmaza, valamint m és p egész számok, ahol n/m egész.
Output: A pontok azon $C_1, \ldots, C_{n/m}$ egyenlő méretű csoportokból álló partíciója, amely minimalizálja (maximalizálja) a

$$\sum_{s=1}^{n/m} \sum_{x_i \in C_s} \sum_{x_j \in C_s} \left\| x_i - x_j \right\|_p^p$$

célfüggvényt.

Súlyozott párosítási problémák nehézségi eredményei

A megfogalmazott párosítási problémák nehézségi eredményeit az alábbiakban mutatjuk be. A könnyebb áttekinthetőség érdekében az eredményeket számozzuk, és a kerek zárójelbeli számokat hivatkozásokként használjuk fel a később bemutatott, összegző *1.* és *2. táblázatokban*.

Az m-dimenziós súlyozott párosítási probléma bármely verziója $m = 2$ esetében, vagyis párok kialakítására, *Edmonds* [1965] algoritmusa révén polinomiális időben megoldható **(1).** Ez magában foglalja mind az általános, mind a speciális megfogalmazásokat, valamint mind a maximalizálási, mind a minimalizálási feladatokat.

A MAX-mDWM-probléma NP-nehézségét magasabb dimenzióban, vagyis $m \geq 3$ mellett *Feo–Khellaf* [1990] bizonyítja azáltal, hogy belátja az optimalizálási problémához tartozó eldöntési probléma NP-teljességét **(2)**.

Az egyenletes MSSC-problémára két egyenlő méretű csoport kialakítására, vagyis $k = 2$-re született pozitív eredmény az euklideszi tér d dimenziójának rögzített értéke mellett. *Bertoni és szerzőtársai* [2012] megmutatta, hogy ha a pontok $\mathbb{R}$-beliek, vagyis $d = 1$, akkor a feladat polinomiális időben megoldható **(3)**. *Lin és szerzőtár*sai [2016] kiterjesztették ezt az eredményt $\mathbb{R}^2$-re, és polinomiális futásidejű algoritmust adtak a síkbeli egyenletes MSSC-probléma megoldására **(4)**.

Kel'manov–Pyatkin [2016] bizonyította, hogy ha az előzőktől eltérően a feladatban a d dimenzió értéke tetszőleges lehet, akkor az optimum megadása $k = 2$ esetén már NP-nehéz **(5)**. *Pyatkin és szerzőtársai* [2017] pedig belátta, hogy az egyenletes MSSC-probléma hármas csoportok kialakítására, vagyis $m = 3$ mellett szintén NP-nehéz **(6)**.

Kondor [2022] kiterjeszti a fenti általános dimenziós nehézségi eredményeket, és megmutatja, hogy az egyenletes klaszterezési probléma különböző távolságfelírások mellett is NP-nehéz bármely rögzített $m \geq 3$ esetén. A 4. TÉTEL a pMAX-mDWM-problémára fogalmaz meg nehézségi eredményt **(7)**, amely egyúttal alternatív bizonyításnak is tekinthető a MAX-mDWM-probléma NP-nehézségére.

4. TÉTEL (*Kondor* [2022]) • A pMAX-mDWM optimalizálási probléma NP-nehéz bármely rögzített $m \geq 3$ és $p \geq 2$ egészekre.

Az előző párjaként az 5. TÉTEL a pMIN-mDWM NP-nehézségét mondja ki **(8)**.

5. TÉTEL (*Kondor* [2022]) • A pMIN-mDWM optimalizálási probléma NP-nehéz bármely rögzített $m \geq 3$ és $p \geq 1$ egészekre.

Mivel az egyenletes MSSC-probléma ekvivalens a 2MIN-mDWM-problémával, ezért az 5. TÉTELBŐL egyből következik az egyenletes MSSC-probléma NP-nehézsége is általános m-re.[8]

1. KÖVETKEZMÉNY (*Kondor* [2022]) • Az egyenletes MSSC-probléma bármely rögzített $m \geq 3$ egész esetén NP-nehéz.

Az 5. TÉTELBŐL szintén következik, hogy az m-dimenziós súlyozott párosítási probléma minimalizálási verziója is NP-nehéz, hiszen az tartalmazza a 2MIN-mDWM-problémát.

2. KÖVETKEZMÉNY (*Kondor* [2022]) • A minimális súlyú m-dimenziós súlyozott párosítás optimalizálási probléma (MIN-mDWM) NP-nehéz bármely rögzített $m \geq 3$ esetén.

A fenti eredmények értelmében általános d dimenzió mellett az egyoldali párosítási piacok semelyik érintett modelljében sem tudjuk legalább háromfős, rögzített, egyenlő elemszámú csoportokra hatékonyan megoldani a párosítási problémát.

1. táblázat
Nehézségi eredmények a maximális súlyú m-dimenziós súlyozott párosítási problémára és annak speciális eseteire

	Maximális súlyú m-dimenziós súlyozott párosítás (MAX-mDWM)		
	általános eset	pMAX-mDWM	
		$p = 1$	$p \geq 2$
$m = 2$		polinomiális	
$m \geq 3$	NP-nehéz **(2)**	?	NP-nehéz **(7)**

Megjegyzés: az m a csoportok méretét, a p pedig az ℓ_p norma paraméterét jelöli.
Kerek zárójelben a főszövegbeli problémák hivatkozási számai szerepelnek.
A táblázatban a kérdőjellel jelölt feladatok nehézségére vonatkozóan nem találtunk eredményeket az irodalomban, jelen ismereteink szerint ezek nyitott problémák.

[8] Mivel az 1. és 2. KÖVETKEZMÉNYEK egyszerűen adódnak az 5. TÉTELBŐL, ezért ezekre nem vezetünk be újabb zárójeles hivatkozási számot.

2. táblázat
Nehézségi eredmények a minimális súlyú m-dimenziós súlyozott párosítási problémára és annak speciális eseteire

		Minimális súlyú m-dimenziós súlyozott párosítás (Min-mDWM)			
		általános eset	pMin-mDWM		
			$p=1$	$p=2$	$p\geq 3$
$m=2$		polinomiális **(1)**			
$m=3$		NP-nehéz **(8)**	NP-nehéz **(8)**	NP-nehéz **(6)**	NP-nehéz **(8)**
$3<m<n/2$		NP-nehéz **(8)**			
$m=n/2$	$d=1$	?	?	polinomiális **(3)**	?
	$d=2$	?	?	polinomiális **(4)**	?
	d általános	NP-nehéz **(8)**	NP-nehéz **(8)**	NP-nehéz **(5)**	NP-nehéz **(8)**

Megjegyzés: az m a csoportok méretét, a d az euklideszi tér dimenzióját, a p pedig az ℓ_p norma paraméterét jelöli.
Kerek zárójelben a főszövegbeli problémák hivatkozási számai szerepelnek.
A táblázatban a kérdőjellel jelölt feladatok nehézségére vonatkozóan nem találtunk eredményeket az irodalomban, jelen ismereteink szerint ezek nyitott problémák.

Összegzés

A tanulmányban az egyoldali párosítási piacok magasabb dimenziós felírásainak megoldási nehézségét tárgyaltuk. Bemutattuk az irodalomban található azon megközelítések nehézségi eredményeit, amelyek a stabilitásfogalomhoz kapcsolódóan háromfős csoportok kialakításával foglalkoznak. Ezután a vesecsereprogramokat és a szobatársproblémát alapul véve megadtuk az egyoldali párosítási feladatok egy gráfparticionálási problémával ekvivalens megoldási koncepcióját. Ez Pareto-hatékony megoldást ad eredményül, amely *Morrill* [2010] nyomán olyan esetekben lehet hasznos, ahol egy adott párosítás megváltoztatásához olyan koalícióra van szükség, amelyben senki sem jár rosszabbul, és legalább egyvalaki jobban jár az új állapottal.

Ismertettük *Kondor* [2022] eredményeit, amelyek értelmében a gráfparticionálási – és az azok speciális eseteként felírt egyenletes klaszterezési – problémák minimalizálási és maximalizálási verziói különböző távolságdefiníciók esetében is a csoportok minden rögzített $m\geq 3$ elemszáma mellett NP-nehezek. Ez alapján annak ellenére, hogy tudjuk: az egyoldali párosítási piacok ezen modelljeire minden esetben létezik optimum, azt a gyakorlatban a relatíve nagyobb méretű problémákra – jelen ismereteink szerint – nem tudjuk meghatározni. Például a szobatársprobléma már 36 fő és 4 fős szobák esetén is megoldhatatlannak számít.

További kutatás tárgya lehet a gráfparticionálási modell, például abból a szempontból, hogy a résztvevők képesek-e számukra kedvező módon befolyásolni a párosítás kimenetét, ha nem a valós tulajdonságaikat „nyilvánítják ki". Másrészről az is fontos kérdés, hogy milyen lehetőségeink vannak az alapfeladat megoldására, ami az approximációs algoritmusok és heurisztikus eljárások feltérképezésével és összevetésével válaszolhatunk meg. Végül a nyitott problémaként megjelölt és egyéb speciális esetek nehézségét is érdemes lenne vizsgálni.

Hivatkozások

Arkin, E. M.–Bae, S. W.–Efrat, A.–Okamoto, K.–Mitchell, J. S. B.–Polishchuk, V. [2009]: Geometric stable roommates. Information Processing Letters, Vol. 109. No. 4. 219–224. o. https://doi.org/10.1016/j.ipl.2008.10.003.

Atay, A.–Mauleon, A.–Vannetelbosch, V. [2021]: A bargaining set for roommate problems. Journal of Mathematical Economics, Vol. 94. 102465. https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2020.102465.

Bertoni, A.–Goldwurm, M.–Lin, J.–Saccà, F. [2012]: Size constrained distance clustering: separation properties and some complexity results. Fundamenta Informaticae, Vol. 115. No. 1. 125–139. o. https://doi.org/10.3233/FI-2012-644.

Biró Péter [2006]: Stabil párosítási modellek és ezeken alapuló központi párosító programok. Szigma, 37. évf. 3–4 sz. 153–175. o. https://journals.lib.pte.hu/index.php/szigma/article/view/1096.

Biró Péter–McDermid, E. [2010]: Three-sided stable matchings with cyclic preferences. Algorithmica, Vol. 58. 5–18. o. https://doi.org/10.1007/s00453-009-9315-2.

Chen, J.–Roy, S. [2021]: Euclidean 3D stable roommates is NP-hard. Technical report. Cornell University, arXiv 2108.03868. https://arxiv.org/abs/2108.03868.

Chung, K.-S. [2000]: On the existence of stable roommate matchings. Games and Economic Behavior, Vol. 33. No. 2. 206–230. o. https://doi.org/10.1006/game.1999.0779.

Deineko, V. G.–Woeginger, G. J. [2013]: Two hardness results for core stability in hedonic coalition formation games. Discrete Applied Mathematics, Vol. 161. No. 13–14. 1837–1842. o. https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.03.003.

Diamantoudi, E.–Miyagawa, E.–Xue, L. [2004]: Random paths to stability in the roommate problem. Games and Economic Behavior, Vol. 48. No. 1. 18–28. o. https://doi.org/10.1016/j.geb.2003.05.003.

Edmonds, J. [1965]: Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices. Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 69B. No. 1–2. 125–130. o. https://doi.org/10.6028/jres.069b.013.

Feo, T. A.–Khellaf, M. [1990]: A class of bounded approximation algorithms for graph partitioning. Networks, Vol. 20. No. 2. 181–195. o. https://doi.org/10.1002/net.3230200205.

Gale, D.–Shapley, L. S. [1962]: College admissions and the stability of marriage. The American Mathematical Monthly, Vol. 69. No. 1. 9–15. o. https://doi.org/10.2307/2312726.

Höppner, F.–Klawonn, F. [2008]: Clustering with size constraints. Megjelent: *Jain, L. C.–Sato-Ilic, M.–Virvou, M.–Tsihrintzis, G. A.–Balas, V. E.–Abeynayake, C.* (szerk.): Computational Intelligence Paradigms. Studies in Computational Intelligence, Vol. 137. 167–180. o. https://doi.org/10.1007/978-3-540-79474-5_8.

Huang, C.-C. [2007]: Two's company, three's a crowd: Stable family and threesome roommates problems. Megjelent: *Arge, L.–Hoffmann, M.–Welzl, E.* (szerk.): Algorithms – ESA 2007, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4698. Springer, Berlin–Heidelberg, 558–569. o. https://doi.org/10.1007/978-3-540-75520-3_50.

IRVING, R. W. [1985]: An efficient algorithm for the "stable roommates" problem. Journal of Algorithms, Vol. 6. No. 4. 577–595. o. https://doi.org/10.1016/0196-6774(85)90033-1.

IRVING, R. W.–MANLOVE, D. F. [2002]: The stable roommates problem with ties. Journal of Algorithms, Vol. 43. No. 1. 85–105. o. https://doi.org/10.1006/jagm.2002.1219.

IWAMA, K.–MIYAZAKI, S.–OKAMOTO, K. [2007]: Stable roommates problem with triple rooms. 10th Korea–Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation. https://www.researchgate.net/publication/228816339_Stable_roommates_problem_with_triple_rooms.

KEL'MANOV, A. V.–PYATKIN, A. V. E. [2016]: On the complexity of some quadratic Euclidean 2-clustering problems. Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 56. 491–497. o. https://doi.org/10.1134/S096554251603009X.

KNUTH, D. E. [1977]: Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithms. CRM Proceedings and Lecture Notes, Vol. 10. American Mathematical Society. Fordította: *Goldstein, M.* Eredeti: *Knuth, D. E.* [1976]: Mariages Stables. Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, https://doi.org/10.1090/crmp/010.

KONDOR GÁBOR [2022]: NP-hardness of m-dimensional matching problems. Műhelytanulmány. Theoretical Computer Science, megjelenés alatt.

LAM, C.-K.–PLAXTON, C. G. [2019]: On the existence of three-dimensional stable matchings with cyclic preferences. Megjelent: *Fotakis, D.–Markakis, E.* (szerk.): Algorithmic Game Theory. SAGT Lecture Notes in Computer Science, Vol. 11801. Springer, Cham, 329–342. o. https://doi.org/10.1007/978-3-030-30473-7_22.

LIN, J.–BERTONI, A.–GOLDWURM, M. [2016]: Exact algorithms for size constrained 2-clustering in the plane. Theoretical Computer Science, Vol. 629. 80–95. o. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2015.10.005.

MINGERS, J.–O'BRIEN, F. A. [1995]: Creating student groups with similar characteristics: A heuristic approach. Omega, Vol. 23. No. 3. 313–321. o. https://doi.org/10.1016/0305-0483(95)00014-F.

MORRILL, T. [2010]: The roommates problem revisited. Journal of Economic Theory, Vol. 145. No. 5. 1739–1756. o. https://doi.org/10.1016/j.jet.2010.02.003.

NG, C.–HIRSCHBERG, D. S. [1991]: Three-dimensional stable matching problems. SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 4. No. 2. 245–252. o. https://doi.org/10.1137/0404023.

PYATKIN, A.–ALOISE, D.–MLADENOVIC, N. [2017]: NP-hardness of balanced minimum sum-of-squares clustering. Pattern Recognition Letters, Vol. 97. 44–45. o. https://doi.org/10.1016/j.patrec.2017.05.033.

RONN, E. [1990]: NP-complete stable matching problems. Journal of Algorithms, Vol. 11. No. 2. 285–304. o. https://doi.org/10.1016/0196-6774(90)90007-2.

ROTH, A. E. [1984]: The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. Journal of Political Economy, Vol. 92. No. 6. 991–1016. o. https://doi.org/10.1086/261272.

ROTH, A. E. [1991]: A natural experiment in the organization of entry-level labor markets: Regional markets for new physicians and Surgeons in the United Kingdom. The American Economic Review, Vol. 81. No. 3. 415–440. o. https://www.jstor.org/stable/2006511.

ROTH, A. E. [2012]: The theory and practice of market design. Prize Lecture. NobelPrize.org. https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2012/roth/lecture/.

ROTH, A. E.–VANDE VATE, J. H. [1990]: Random paths to stability in two-sided matching. Econometrica, Vol. 58. No. 6. 1475–1480. o. https://doi.org/10.2307/2938326.

Segev, D. L.–Gentry, S. E.–Warren, D. S.–Reeb, B.–Montgomery, R. A. [2005]: Kidney paired donation and optimizing the use of live donor organs. Journal of the American Medical Association, Vol. 293. No. 15. 1883–1890. o. https://doi.org/10.1001/jama.293.15.1883.

Tan, J. J. M. [1991]: A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching. Journal of Algorithms, Vol. 12. No. 1. 154–178. o. https://doi.org/10.1016/0196-6774(91)90028-W.

Weitz, R. R.–Jelassi, M. T. [1992]: Assigning students to groups: A multicriteria decision support system approach. Decision Sciences, Vol. 23. No. 3. 746–757. o. https://doi.org/10.1111/j.1540-5915.1992.tb00415.x.