BIZTOSÍTÁSI DÍJ MEGHATÁROZÁSA ÖSSZETETT KOCKÁZATI MODELLBEN ÁLTALÁNOSÍTOTT EXPONENCIÁLIS HASZNOSSÁGFÜGGVÉNY ESETÉBEN[1]

BALOG IMRE
Budapesti Corvinus Egyetem

A cikkben az egy időszakra vonatkozó minimális biztosítási díjat határozzuk meg annak érdekében, hogy eldönthető legyen: a biztosítási társaság érdekelt-e biztosítási szerződések értékesítésében. Először bevezetjük a biztosító időszak végi vagyoni szintjének építőelemeit, majd általánosított exponenciális hasznosságfüggvény segítségével hasonlítjuk össze a biztosító aktív és passzív piaci magatartása melletti várható vagyonát. Választásunk azért esett erre a pénzügyi metrikára, mert így egyszerű módon tudjuk kezelni a profitelvárás és a kockázatelutasítás hatását egymás mellett. Ezek alapján a biztosítási piacon való aktív részvételt garantáló minimális biztosítási díjra vonatkozó formulát állapítunk meg. A kapott eredményt csak nem elemi függvény segítségével tudjuk leírni, amely mutatja az eredeti döntési probléma ,,rejtett" nehézségét. Végezetül egy példán keresztül a minimális biztosítási díj paraméterekre vonatkozó érzékenységét vizsgáljuk.

1 Bevezetés

A biztosítási piacok működésének korai közgazdasági elemzése során gyakori eljárássá vált, hogy jól ismert hasznosságelméleti és valószínűségszámításbeli eszközöket alkalmazva egyszerűen megmagyarázható és szemléletes módon ábrázolható viselkedési szabályokat határozzanak meg az ügyfelek és a biztosítók számára. Mivel ebben az időben elsősorban a szakirodalom fő motivációs célja az eltérő információs helyzetből eredő hatások elemzése volt egy adott kockázatmegosztási rendszerre, emiatt inkább elméleti modellek lettek meghatározva, amelyeket eléggé nehézkesen lehetett volna alkalmazni a valóságban. Elegendő csupán arra gondolnunk, hogy a területet meghatározó Rothschild and Stiglitz (1976) és Stiglitz (1977) cikkek esetében a teljes információs (*mindkét fél ismeri a kárbekövetkezési valószínűséget*) vagy aszimmetrikus esetnél (*az ügyfél információs többlettel rendelkezik a biztosítóval szemben*) is szabatos feltevésekkel találkozhatunk.

Elvonatkoztatva csak a biztosító helyzetére, a tökéletes versenyt taglaló Stiglitz (1977) cikkében nem pusztán a közgazdaságtanban szokásosan eltűnő ,,versenyzői profittal" fog szembesülni a biztosító, hanem olyan ügyfélszegmentálási problémát is meg kell oldani a szeparáló egyensúlyi díjhalmaz meg-

[1]Beérkezett 2022. július 6. E-mail: `imre.balog3@uni-corvinus.hu`.

határozásához, amelyhez jellemzően nem áll elegendő információ a biztosító rendelkezésére.

A fenti kiindulópontot némelyest gyakorlatiasabbá téve számos megoldás született, amelyek közül mi a biztosító szemszögéből érdekes gondolatokat, lehetséges irányokat foglaljuk röviden össze a teljesség igénye nélkül. Szeretnénk hangsúlyozni, hogy a bemutatásra kerülő egyperiódusos modell számos egyszerűsítéssel rendelkezik a bővítési lehetőségeket tekintve, amelynek feloldására adunk pár ötletet.

Első lépésként a biztosító számára előálló kárkifizetéseket ruházzuk fel struktúrával attól függően, hogy egy adott biztosítási szerződésen a biztosító mit is szeretne díjkalkulációhoz felhasználni. *Egyedi kockázati modell* esetében a biztosító abban érdekelt, hogy adott biztosítási szerződésen volt-e kár vagy sem, illetve mekkora a kárkifizetések összege. *Összetett kockázati modell* esetében a biztosító már az egyedi kárösszegek nagyságában is érdekelt a kárdarabszámon felül.

Szokásosan a biztosítási termék jellege segítséget nyújt az alkalmazott modell kiválasztásában. Kockázati életbiztosítás esetében a biztosítási esemény (a biztosított elhalálozása) csak egyszer következhet be, a kárkifizetés pedig általában a szerződésben rögzített biztosítási összeg – bár lehet egyéb pénzügyi indikátorhoz is kötni a térítés mértékét (például az ügyfél megtakarítási számlája alapján) –, így az egyedi kockázati modellt célszerű választani. Összetett kockázati modellre szolgálhat például egy ingatlanhoz kötött üvegbiztosítás, ahol többször bekövetkezhet ugyanazon biztosítási esemény különböző kárösszegek mellett.

Az egyedi kockázati modellt szokták *„van kár - nincs kár”* névvel is illetni, amely rámutat arra, hogy a biztosító lényegében csak a biztosítási szerződésen megjelenő aggregált kárösszeget tekinti valószínűségi változónak. Az egyedi kockázati modell biztosításmatematikai kezelésének lehetséges módját megtalálhatjuk Verrall (1989) cikkében, kiegészítve a két kockázati modellszemlélet közötti hasonlóságok és átjárási lehetőségek ismertetésével.

Második bővítési lehetőség, hogy a biztosító számára megengedjük a befektetési tevékenységet is, azaz szükségszerűen nem kell minden vagyonát csakis a biztosítási tevékenységének szentelnie. Mi azzal az esettel foglalkozunk, ahol az időszak elején a kezdeti vagyona a biztosítónak elkülönül a két tevekénység között, és csak a periódus legvégén válik újra eggyé.

A mindennapi gyakorlathoz képest nyilvánvalóan léteznek sokkal pontosabb eljárások is, hiszen az eszköz-forrás menedzsment pontosan azért felel, hogy az elérendő pénzügyi célokat és eredményeket (például a kamatbevétel maximalizálása) a biztosító az előre meghatározott kockázatvállalási szint mellett teljesítse. Azonban ne felejtsük el, hogy a fő célunk a biztosítási díj meghatározása, amelyet a biztosítónak a periódus elején kell megállapítania. Lényegében tehát a mi választásunkra tekinthetünk úgy is, mintha „kellően sok” lehetséges szimulációs esetet az elkövetkezendő egyetlen periódusra vonatkoztatva elkészítenénk, majd a kapott eredményt kiértékelve határoznánk meg egy befektetési hányadot az időszak elején rendelkezésre álló kezdeti vagyoni szinthez képest.

Természetesen mind a szimulációkhoz tartozó beállítás- és paraméterválasztásokat, mind a befektetési hányad meghatározási formuláját a biztosító a saját kockázatkezelési szabályai szerint határozhatja meg, a cikkben mi egy általunk vélt értéket fogunk használni.

A második bővítési ponthoz kapcsolódóan nemcsak a biztosító vagyonát növelő tényezőt vezethetünk be, hanem ellentétes pénzügyi hatású költségeket is. A legegyszerűbb választásunk lehet a biztosítási szerződéshez közvetlenül kapcsolódó változó költség, amely magába foglalja például a szerződéskötéshez tartozó papírfelhasználást, a biztosítási szerződés gondozásából eredő hívás- vagy a kárrendezési költségeket. Szerencsés esetben a biztosító már rendelkezik a különböző költségnemekre vonatkozó statisztikával a megelőző időszakokból, azonban előfordulhat teljes információhiány is. Sajnálatos módon, mivel továbbra is előre kell a díjat meghirdetnie a biztosítónak, valamilyen feltételrendszer mentén becslést kell készítenie a biztosítási szerződések közvetlen költségére, majd ugyanazon szegmensekhez tartozó szerződések esetében arányosan szétosztania azt. A cikkben egyetlen szegmenssel fogunk dolgozni, mivel a valóságban létrejövő biztosítási állományokat is könnyeden széjjel lehet bontani – némi egyszerűsítést alkalmazva – egymástól nem függő szegmensekké.

Végezetül az eddigi bővítési lehetőségekkel ellentétben nem a biztosító vagyoni pályájának jellemzését szeretnénk tovább pontosítani, hanem annak kiértékelését. A cikkben mindvégig azzal a feltevéssel élünk, hogy a biztosító egyetlen döntési változója a biztosítási díj, amelynek megfelelő szintje mellett legalább ugyanannyira jónak tudja tekinti a biztosítási tevékenység melletti döntését, mint az anélkülit.

Mikroökonómiai indíttatásból tekinthetünk a biztosítóra mint vállalatra, és ekkor a biztosítási díjának meghatározása nem lenne más, mint egy várható profitmaximalizálási feladat megoldása. Azonban érezzük, hogy ez nem a ,,klasszikus eset" abban az értelemben, hogy az ügyfelek kárigényeitől függően – bár aránylag alacsony bekövetkezési valószínűséggel – szélsőséges esetek is előfordulhatnak (jelentős veszteséget szenved el a biztosító, netalántán csődbe is megy).

A szakirodalomban ennek kiküszöbölése – vagy legalábbis enyhítése – két lépésben szokott történni, azaz hasznossági függvény bevezetése mellett valamilyen kockázatelutasítási paramétert is tulajdonítanak a biztosítónak. A várható értékről a várható hasznosságra való átállás lényegében nem jelent szemléletbeli változtatást (Gerber and Pafum, 1998), hiszen előbbi az utóbbi egy speciális esete (identikus függvényt választva). Sokkal fontosabb a kockázati attitűd és mérték Pratt (1964) cikk általi bevezetése, ahol néhány számítást is találhatunk konkrét hasznossági függvények esetében.

A biztosítási szerződések megtervezése során a biztosító meghatározhat ezenfelül még megtartási részt (önrészt) az ügyfelek számára, amelyet kockázatelutasító biztosító esetében Raviv (1979) cikke tárgyalt az elsők között. Azonban ez a bemutatni kívánt összkárkifizetés kezelése során inkább technikai jellegű kiegészítést jelentene – *az összetett Poisson-eloszlás esetében a kárnagyságokra vonatkozó eloszlást kellene némiképp változtatni*–, így a cikkben ,,csak" a kockázati elutasítási paramétert fogjuk felhasználni annak érdekében, hogy a valóságban ténylegesen végbemenő kockázatkezelési folyamatokat valahogyan közelíteni tudjuk.

Elméleti szempontból számunkra ez csak egy paraméterértéket jelent, viszont ennek becslése nagyon nehézkes lehet. Például a biztosítási szerződés megkötésekor valamilyen kockázatelbírálási folyamattal szembesül az ügyfél, amelyek különféle szabályzatokat deklarálnak (a biztosító saját maga által létrehozott szabályokon kívül esetlegesen a viszontbiztosító is közbeszólhat a kockázat befogadásának megítélésében).

Az általunk bevezetett ,,általánosított exponenciális hasznossági függvényt" úgy próbáltuk megválasztani két lehetséges kiértékelési mód kombinációjaként, hogy egyszerre tudja kezelni a szokásos mikroökonómiai várható érték alapú megközelítést és kockázatelutasítás jellegét. Az alkalmazott hasznosságfüggvény általi kettőségben bízva úgy gondoljuk, hogy a biztosító pontosabb döntést tud hozni, illetve alkalmazás szempontjából is egy újabb lehetőséget biztosít az összehasonlítás elvégzéséhez.

Rátérve jelen cikkre, úgy érezzük, hogy néhány fontosabb kérdést érdemes megválaszolnunk. Jelen állapotában a cikkben található modell inkább elméleti, mintsem alkalmazásbeli, azonban úgy véljük, hogy viszonylag egyszerűen továbbfejleszthető egy adott biztosító számára. Nem gondoljuk, hogy az általánosan alkalmazott pénzügyi metrikákhoz (várható profit, belső megtérülési ráta vagy díjarányos piaci értéke a biztosítási állománynak) viszonyítva hatalmas többletterhet jelentene a bevezetése, hiszen ezen mutatókhoz használt szimulációk és ezek adatigényei ideális esetben már rendelkezésre állnak az eddig alkalmazott mutatók számolásánál. Emiatt a cikk fontossága abban rejlik, hogy egy új és talán kicsit összetettebb mutatót szolgáltat a biztosítási díj meghatározásához.

Másik kérdésként merülhet fel, hogy mi az újdonsága a cikknek, és miért nem egyszerű a feladat megoldása. Az egyedi kockázati modell esetében Ágoston (2015) cikkében találhatjuk a biztosítási díjra vonatkozó eredményeket monopólium esetében különböző kockázati attitűd mellett. A cikkben ehhez hasonlóan próbáljuk meghatározni a biztosítási díjat összetett kockázati modell esetében, a biztosító piac formáját figyelmen kívül hagyva, azonban csak kockázatelutasító biztosító esetében.

Az összetett kockázati modellre való áttérés és az általánosított exponenciális hasznosságfüggvény használata miatt a megoldás megállapítása eltérő a szokásos közgazdasági módszerektől. A biztosítási díjra vonatkozó díjformulát a Lambert-féle többértékű függvény segítségével sikerül ,,csak" felírnunk – amelynek fő alkalmazási területe nem éppen a mikroökonómiai problémák megoldása.

A cikk szerkezetét tekintve a 2. fejezetben vezetjük be a vizsgált egyidőszakos modellt, illetve mondjuk ki a feltevéseinket a modell működésével kapcsolatban. A 3. fejezetben ismertetjük a biztosítási díjra vonatkozó eredményünket előbb összetett Poisson-eloszlásra, majd ennek egy speciális esetére, amikor exponenciális eloszlású kárnagyságok feltételezünk. A 4. fejezetben eme speciális esetben nézzük meg az egyes paraméterek biztosítási díjra gyakorolt hatását ceteris paribus. Az 5. fejezetben összefoglaljuk a kapott eredményeket. A cikk végén található mellékletben gyűjtöttük össze a felhasznált matematikai eredményeket (a biztosításmatematikai részekhez Michaletzky (1995) és Ross (2014), a megoldáshoz felhasznált Lambert-féle többértékű függvényhez pedig Veberic (2010) források alapján).

2 A modell

Tekintsünk egy zárt, egyidőszakos biztosítási piacot, azaz ahol csak az aktuális időszakra vonatkozó pénzügyi kötelezettségek jelennek meg (tehát például nincs az előző időszakból fennálló meg nem szolgált biztosítási díjrészlet vagy éppen függő kárkifizetés). A célunk meghatározni egy olyan bruttó biztosítási díjat, amely mellett egy biztosító aktívan fog cselekedni a biztosítási piacon.

A biztosítási termék megvásárlásakor a biztosító és a biztosítotti szerepkörbe előlépett ügyfél biztosítási szerződést köt meg egymással, amelyben rögzítik a felek kötelezettségeit és a teljesítési feltételeket. Amennyiben az ügyfél hajlandó befizetni a biztosító részére a bruttó biztosítási díjat, akkor cserébe az időszak alatt a biztosítási szerződésben rögzített biztosítási esemény bekövetkeztéből eredő károkat enyhíti a biztosító az ügyfél számára.

Az általunk elemezni kívánt piaci környezetben a homogén ügyfélcsoport és az egyetlen periódus természetessé teszi számunkra azt, hogy a biztosító ugyanazt a biztosítási terméket kínálja minden ügyfél számára. Ez azt jelenti, hogy minden ügyfélnek ugyanakkora bruttó biztosítási díjat kell befizetni ahhoz, hogy a biztosítási szerződést megvásárolja. Hasonlóan a megkötött biztosítási szerződések mindegyike ugyanolyan feltételekkel rendelkezik, azaz azonos a biztosítási esemény, a biztosítási szolgáltatás és annak pénzügyi értéke. Másik előnye az egyetlen időszaknak, hogy a biztosítónak semmilyen követelése vagy kötelezettsége nincsen az előző időszakokból, valamint minden követelése vagy kötelezettsége az időszak végén rendeződik – összhangban a mostani időszakban értékesített biztosítási termékkel.

A biztosítási piac működését csak a biztosító részéről fogjuk elemezni, pontosabban a biztosító feladata legyen a várható időszak végi vagyonának $\mathbb{E}[W]$ szinten tartása mellett a minimális egységes π_b bruttó biztosítási díj meghatározása.

A biztosítónak kétfajta, lehetséges várható időszak végi vagyona lehet attól függően, hogy aktívan vagy passzívan vesz részt a biztosítási piacon. Az aktív piaci magatartás esetében biztosítási szerződéseket árul π_b bruttó biztosítási díjon, míg passzív esetben egyáltalán nem értékesít biztosítási szerződéseket. Mivel célunk azon π_b bruttó biztosítási díj meghatározása, amely mellett aktívan fog cselekedni, így az alábbi feltételes szélsőérték-feladatként tekintünk a biztosító lehetséges problémájára:

$$\begin{aligned} &\pi_b \to \min \\ \text{f.h.}\quad &\mathbb{E}\Big[\big(1+\gamma(e^i-1)\big)w_0 + M(\pi_b - c) - \sum_{k=1}^{N} X_k\Big] \geq w_0 e^i, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol

- $w_0 \in I\!\!R_+$ a biztosító kezdeti (időszak eleji) vagyona,
- γ a biztosító kezdeti vagyonának az az aránya, amit nem használ fel biztosítási tevékenysége során,
- i a kockázatmentes eszköz – amibe a kezdeti vagyonának biztosítási tevékenysége során fel nem használt részét fekteti a biztosító – kamatlába,
- M (ami egy olyan valószínűségi változó, amelynek az értékkészlete $I\!\!N$) a vizsgált időszakban megkötött biztosítások száma,
- N (ami egy olyan valószínűségi változó, amelynek az értékkészlete $I\!\!N$) a vizsgált időszakban az ügyfelek álal bejelentett káresetek száma,
- X_k a k káresemény pénzbeli értékét jelölő valószínűségi változó, minden k-ra $X_k \geq 0$,
- c a szerződésekhez közvetlenül kapcsolódó változó költségek.

Első fontos megjegyzésünk, hogy az (1) feladat csak a biztosító viselkedését írja le, az abban megállapított bruttó biztosítási díj az ügyfél számára egy viszonyítási alap. A cikkben az ügyfelek döntéshozatalával nem szeretnénk foglalkozni, azonban minden ügyfélnek hasonlóan értékelnie kell az időszak végi lehetséges vagyonát a biztosítási szerződés által nyújtott plusz lehetőség szerint. Nyilvánvalóan biztosítási szerződés akkor fog létrejönni, hogy ha az ügyfél hajlandó kifizetni a biztosító bruttó biztosítási díját. Ebből eredően lehetséges, hogy az eltérő értékelési módszerek miatt mindkét fél a saját értékelése folyamán jobban jár a biztosítási szerződés megkötésével, mint ha nem használná ezen lehetőséget.

Az (1) feladatban tehát a biztosító a biztosítási díjat szeretné minimalizálni annak érdekében, hogy az időszak végi várható vagyoni helyzete legalább akkora legyen, mintha minden vagyonát a kockázatmentes eszközbe fektette volna – természetesen a költségeit figyelembe véve. Azt a biztosítási díjat, amely a feltételt egyenlőség formájában teljesíti, közömbös biztosítási díjnak nevezzük a továbbiakban. Amennyiben a biztosító kiszámolta a közömbös biztosítási díjat, úgy minden $\varepsilon > 0$ díjnöveléssel már a biztosítási tevékenység mellett a várható vagyoni szintje nagyobb lesz, mint a biztosítási tevékenység mellőzése esetén.

Az (1) feladat egyik kényes kérdése, hogy milyen összegeket tud a biztosító befektetési célra felhasználni. Az egyszerűség és a könnyebb érthetőség kedvéért az optimalizálási feladat felírása során feltettük, hogy a biztosító csak a kezdeti vagyonának γ részét fekteti be a kockázatmentes eszközbe, a megmaradó részt kizárólag a biztosítási tevékenység likviditásának garantálására használja fel.

A valóságban a megmaradó vagyonrészből és a biztosítási díjból képzett biztosítási tartalék után is kaphatna valamilyen hozamot a biztosító, viszont annak az ügyfél és a biztosító közötti felosztásával nem szeretnénk a cikkben foglalkozni, hiszen ezen osztozkodás az adott biztosítási piacra vonatkozó felügyeleti szabályozástól függ.

A kárkifizetéseket a biztosító folyamatosan kifizeti a megképzett biztosítási tartalékból, azonban azok összegeit nem diszkontáljuk, tekintettel az egyidőszakos modellre. A szerződéshez kapcsolódó c költségeket pedig az időszak elején kifizeti a biztosító, hasonlóan a biztosítási díjak kezeléséhez.

A biztosító szokásosan két különböző szemléletű modellt használhat az összkárkifizetésének vizsgálatához, függően a biztosítási termék tulajdonságaitól. Az *egyedi kockázatok modellje* esetében a biztosítót csak az érdekli, hogy adott szerződésen ténylegesen bekövetkezik-e kár vagy sem. Ezt az egyszerűsítést az teszi számára lehetővé, hogy a káreseményhez kapcsolódó egyszeri biztosítási szolgáltatást a biztosítási szerződésben előre rögzítették a felek, így annak a pénzbeli értéke is adott. Ekkor nyilván a fenti jelöléseink szerint teljesül, hogy $N \leq M$. Amennyiben a biztosítási feltételekben megengedett, hogy egy szerződéshez több kárkifizetés tartozhasson, akkor *összetett kockázatok modelljé*ről beszélünk. Itt már korántsem egyértelmű az N és M valószínűségi változó kapcsolata, mivel bármennyi káresetet bejelenthetnek az ügyfelek. Természetesen, ha $M = 0$ fennáll, akkor $N = 0$ teljesül, mivel biztosítási szerződés nélkül nem lehet kárt bejelenteni.

A következőkben kimondjuk, kiemeljük és formalizáljuk azokat a feltevéseket, amelyekkel vizsgálataink során élünk.

1. feltevés. Az időszak eleji w_0 vagyon a biztosító számára adott. A biztosító csakis kockázatmentes eszközbe tud befektetni, aminek kamatlába i (egy periódusra).

Az 1. feltevést természetesen lehetne enyhíteni különböző befektetési termékek bevezetésével, valamint a befektetett összeg növelésével (például a biztosítási díjak után is kaphatna kamatot a biztosító). Azonban a biztosító feladatát próbáljuk a lehető legszigorúbb fizetőképesség megőrzése mellett megoldani, minden egyéb kockázatot pedig próbálunk kiszűrni. Például a díjbevételt a biztosító csak becsülni tudja az (1) feladatban a biztosítási díj meghirdetésekor, így a díjbevételre vonatkozó kamatrész becslési kockázatot rejt magában, amellyel nem szeretnénk foglalkozni a cikkben.

2. feltevés. Létezik $\hat{m}$, a biztosító az M valószínűségi változó értékére vonatkozó becslése. Ekkor a biztosító eredeti és becsült bruttó díjbevétele felírható az alábbi formában

$$\Pi_b := M\pi_b \quad \text{és} \quad \hat{\Pi}_b := \hat{m}\pi_b.$$

Hasonlóan, az eredeti és becsült nettó díjbevétel pedig

$$\Pi_n := M(\pi_b - c) \quad \text{és} \quad \hat{\Pi}_n := \hat{m}(\pi_b - c) = \hat{m}\pi_n.$$

A 2. feltevésből következik, hogy $\pi_n + c = \pi_b$ összefüggés teljesül a nettó és bruttó biztosítási díjak között. Úgy gondolhatnánk, hogy a biztosítási díjba beépített, a szerződésekhez közvetlenül kapcsolódó c változó költség már nem teszi vonzóvá az ügyfél számára a biztosító által kínált bruttó biztosítási díjat. Azonban fontos észrevennünk, hogy az ügyfél számára a kockázatának értékelése során arra a kérdésre kell választ adnia, hogy mennyibe kerül a kedvezőtlen esemény bekövetkeztének teljes helyreállítása. A helyreállításból eredően felmerülhetnek költségek, amelyeket az ügyfél is beépíti az általa maximálisan fizetendő biztosítási díjba. Az ügyfél számára tehát a biztosító által ajánlott bruttó biztosítási díj megítélése két részre bomlik fel (nettó biztosítási díjrész és költségrész), amelyek külön értékei számára nem annyira fontosak, döntését csakis az összegük befolyásolja.

A 2. feltevés érdekes kérdése, hogy a biztosító hogyan tudja meghatározni $\hat{m}$ értékét. Legegyszerűbb esetben az előző időszakokból rendelkezésre álló információk elegendőek, és viszonylag stabil becslést tesznek számára lehetővé a darabszám becslésére. Kevésbé kedvező esetben különböző szimulációs eseteket kell létrehoznia a darabszámok szerint, majd azokból valamilyen súlyozás által kell megállapítania az $\hat{m}$ értékét.

3. feltevés. A biztosító kockázatmentes eszközbe fektetett γ vagyonhányadát rögzítettnek tekintjük az (1) feladatban.

A 3. feltevés mögött az a gondolatmenet áll, hogy a w_0 kezdeti vagyon valamekkora részét a biztosítónak félre kell tenni a tartalékba. A valósággal összhangban a tartalék szolgál arra a célra, hogy az állományi szintű kedvezőtlen események mellett is eleget tudjon tenni a biztosító a biztosítási piacot ellenőrző felügyelet fizetési képességére vonatkozó előírásainak.

A rögzítés melletti egyik érv lehet, hogy a biztosító csakis olyan bruttó biztosítási díjat állapít meg, amely a biztonságos működését elősegíti. Azonban előfordulhat, hogy önmagában a bruttó biztosítási díjbevétel a kedvezőtlen események mellett nem feltétlenül elegendő a kárkifizetésekre, emiatt van az elkülönített vagyonrész pluszban erre a célra.

Második érvként szolgálhat, az előzőt megerősítve, hogy a szerződésekhez közvetlenül kapcsolódó c változó költség egy részét fordíthatja viszontbiztosítási díjra – amikor egy másik biztosítóval együttesen felel a biztosítási szolgáltatás teljesítéséért az átadott viszontbiztosítási díjért cserébe –, amely szintén növelni tudja a fizetőképességét. Minthogy az elemzésben csakis a biztosítóval szeretnénk foglalkozni, emiatt a viszontbiztosítóra vonatkozó kibővítést itt nem végezzük el – az ügyfél magatartáshoz hasonlóan –, úgy tekintjük, hogy c változó költségben benne foglaltatik.

Mielőtt folytatnánk a feltevéseinket, vezessük be az alábbi függvényt a w_0 kezdeti vagyon jövő értékére vonatkozóan, ahol s változó a befektetési arányt és i változó a kockázatmentes eszköz kamatlábát jelöli:

$$FV(w_0, i, s) := \big(1 + s(e^i - 1)\big)\, w_0.$$

Visszatérve az (1) feladathoz, az 1. és a 2. feltevések mellett tudjuk, hogy a biztosító *passzív magatartása* esetében az időszak végi vagyoni szintje

$$W_{PB} := w_0 e^i = FV(w_0, i, 1),$$

míg *aktív magatartása* során az időszak végi vagyona

$$W_{AB} := \big(1+\gamma(e^i-1)\big)\,w_0 + \hat{m}\pi_b - \sum_{k=1}^{N} X_k = FV(w_0,i,\gamma) + \hat{m}\pi_b - \sum_{k=1}^{N} X_k$$

lesz a végén.

4. definíció. Az $u^{gexp}_{r,\alpha,\beta}$ hasznossági függvényt *általánosított exponenciális hasznossági függvény*nek nevezzük tetszőleges $r \in I\!R$ kockázati, valamint $\alpha, \beta \geq 0$ paraméterek mellett, ha

$$u^{gexp}_{r,\alpha,\beta}(w) = \alpha w + \beta u^{exp}_r(w),$$

ahol $u^{exp}_r(w)$ az *exponenciális hasznossági függvény*:

$$u^{exp}_r(w) = \begin{cases} \frac{1-e^{-rw}}{r} & \text{ha } r \neq 0, \\ w & \text{ha } r = 0. \end{cases}$$

5. feltevés. A biztosító hasznosságát $r > 0$ kockázati paraméterű általánosított exponenciális hasznossági függvény írja le.

A 4. definícióban szereplő általánosított exponenciális hasznossági függvény alkalmazása esetén a biztosító megpróbálja összekötni a ,,kellemest" a ,,hasznossal". Amennyiben a β paramétert nullának választjuk, akkor a biztosító időszak végi várható hasznossága megegyezik a várható vagyonával az α szorzótagtól eltekintve. Amennyiben $r \neq 0$ teljesül, akkor $\alpha = 0$ választás esetén visszakapjuk a szokásos exponenciális hasznossági függvényt, amely a kockázathoz való viszonyát jelöli a biztosítónak az r paraméter függvényében. Amennyiben mindhárom paraméter (α, β, r) különbözik 0-tól, úgy a biztosító egyszerre próbálja meg figyelembe venni a várható vagyonát és a felvállalt kockázatot az α és β súlyok mellett.

3 Eredmény

Most már elérkeztünk ahhoz a ponthoz, hogy a bruttó biztosítási díjra vonatkozó kritériumot fel tudjuk írni összetett kockázati modell esetében. A biztosítási díjra vonatkozó feltételt a Lambert-féle többértékű függvény segítségével tudjuk felírni, amelynek a számunkra fontos tulajdonságait összegyűjtöttük a mellékletben. Emellett vezessük be az alábbi jelöléseket, amelyek a mellékletben található ,,*A közömbös biztosítási díj meghatározása általános esetben*" rész alapján állnak elő:

$$\begin{aligned} g &:= \frac{\beta}{r}\big(e^{-r(FV(w_0,i,\gamma)-\hat{m}c)}\mathbb{E}[e^{rS}]\big), \\ A &:= \alpha\Big(FV(w_0,i,\gamma) - \hat{m}c - FV(w_0,i,1) - \mathbb{E}[S]\Big) + \frac{\beta}{r}e^{-rFV(w_0,i,1)}. \end{aligned}$$

6. tétel. *Tegyük fel, hogy az 1., 2., 3. és 5. feltevések teljesülnek. Legyen tetszőleges $r > 0$ esetén $\mathbb{E}[e^{rS}] < \infty$. A biztosító számára az általánosított exponenciális hasznossági függvény paraméterei esetében legyen $\alpha, \beta > 0$. Ekkor a közömbös bruttó biztosítási díj kielégíti az alábbi kritériumot:*

$$\pi_b^* = \frac{\alpha W_{0_+}(\frac{gr}{\alpha} e^{\frac{Ar}{\alpha}}) - Ar}{\alpha \hat{m} r}, \tag{2}$$

ahol W_{0_+} a Lambert-féle többértékű függvény principális részének nemnegatív szelete. A közömbös nettó biztosítási díj megkapható a szokásos $\pi_n^* = \pi_b^* - c$ formában. Minden $\varepsilon > 0$ esetén a biztosító aktívan fog cselekedni a biztosítási piacon, ha a $\pi_b^* + \varepsilon$ a biztosítási szerződés díja.

Bizonyítás. A tétel következik a mellékletben szereplő 14. állításból. Technikai megjegyzésként vegyük észre, hogy a Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva $\mathbb{E}[S] < \infty$ következik abból, hogy ha a $\mathbb{E}[e^{rS}] < \infty$. Ugyanis az exponenciális függvény konvexitásából és $r > 0$ feltételből adódóan kapjuk, hogy $\infty > \mathbb{E}[e^{rS}] \geq e^{\mathbb{E}[rS]} = e^{r\mathbb{E}[S]}$. Logaritmálás után adódik, hogy $\mathbb{E}[S] < \infty$. □

A 6. tételben kapott eredményt úgy érjük el, hogy a lehetséges két biztosítási magatartás szerinti időszak végi várható hasznosságot egyenlővé tesszük egymással, majd a kapott exponenciális egyenletet megoldjuk a π_n nettó biztosítási díj szerint. Ezáltal megkapjuk a közömbösségi bruttó biztosítási díjat, így minden annál nagyobb bruttó biztosítási díj mellett már a biztosító aktívan fog cselekedni a piacon.

7. feltevés. Az $S := \sum_{k=1}^{N} X_k$ összkárkifizetést jelölő valószínűségi változó összetett Poisson-eloszlású, azaz $S \sim CPois(\lambda, Q)$, azaz, N λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, X_k-k azonos eloszlású, független valószínűségi változók, és Q az X_1 eloszlásfüggvénye, X_k-k függetlenek N-től. Magyarán szólva, a kifizetett károk darabszámát az $N \sim Pois(\lambda)$ valószínűségi változó jelöli, amely független a kárnagyságoktól. A Q az egymástól független kárnagyságok eloszlásfüggvénye.

A 7. feltevésben végezetül rögzítettük a kárdarabszám és az összes kárkifizetés viselkedését, ami biztosítási matematikában általánosan elfogadott összetett kockázati modellek kezelése során.

8. következmény. Tegyük fel, hogy a 6. tételben szereplő feltételek, valamint a 7. feltevés teljesülnek. Legyen az X_1 kárnagyság μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó ($X_1 \sim Exp(\mu)$) úgy, hogy $\mu > r$ – azaz nagyobb, mint a kockázatelutasítási paramétere a biztosítónak. Ekkor a közömbös bruttó biztosítás az alábbi alakban írható fel

$$\pi_{b,exp}^* = \frac{\alpha W_{0_+}(\frac{g_{exp} r}{\alpha} e^{\frac{A_{exp} r}{\alpha}}) - A_{exp} r}{\alpha \hat{m} r}, \tag{3}$$

amely nyilvánvalóan speciális esete a (2) díjformulában szereplő közömbös bruttó biztosítási díjnak. A megkülönböztetés céljából a (3) díjformulában bevezettük az exponenciális eloszlású kárnagyságokra vonatkozó utalásként „*exp*” alsó indexet, illetve a benne szereplő jelölések az alábbi módon változnak:

$$g_{exp} := \frac{\beta}{r}\left(e^{-r(FV(w_0,i,\gamma)-\hat{m}c)}e^{\lambda(\frac{\mu}{\mu-r}-1)}\right),$$
$$A_{exp} := \alpha\left(FV(w_0,i,\gamma)-\hat{m}c-FV(w_0,i,1)-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{\beta}{r}e^{-rFV(w_0,i,1)}.$$

A fentiekben tehát az $\mathbb{E}[S]=\frac{\lambda}{\mu}$, illetve $\mathbb{E}[e^{rS}]=e^{\lambda(\frac{\mu}{\mu-r}-1)}$ behelyettesítést végeztük el a speciális összetett Poisson-eloszlás ($S \sim CPois(\lambda, Exp(\mu))$) esetében.

4 Érzékenységvizsgálat

A 8. következmény egy kényelmes lehetőséget biztosít számunkra a közömbös bruttó biztosítási díj érzékenységvizsgálatának elvégzéséhez, amely során egy-egy paraméter lehetséges értékei szerinti változtatás hatását szeretnénk elemezni – midőn a többi változót helyben marad. Szeretnénk hangsúlyozni azonban, hogy a 8. következményben meghatározott díjformula használatával nem minden esetben jutunk el valós biztosítási díjhoz.

Például láthatjuk, hogy amennyiben az r kockázatelutasítási paraméter értéke megegyezik a μ kárnagyságokra vonatkozó paraméterrel, úgy a 8. következményben szereplő g_{exp} kifejezést nem tudjuk értelmezni. Másik ilyen probléma lehet, hogy ha a megoldásunkat nem tudjuk felírni a valós számokra vonatkozó Lambert-féle többértékű függvényünk segítségével (lásd 12. példát a mellékletben). Ennek következtében az 1. táblázatban szereplő speciális paramétereket mellett szeretnénk lefolytatni a vizsgálatunkat.

Paraméter	Jelölés	Kezdeti érték	Minimális érték	Maximális érték	Lépésköz
Becsült darabszám	$\hat{m}$	100	-	-	-
Kezdeti vagyonszint	w_0	1000	100	10 000	1
Költség	c	5	0.25	10	0.01
Hasznosság súlyozási	α	0.2	0.01	1.5	0.001
paraméterek	β	0.8	0.01	1.5	0.001
Befektetési hányad	γ	0.5	0.01	0.95	0.005
Kamatláb	i	0.05	0.01	0.25	0.001
Kárszám paramétere	λ	0.5	0.15	0.75	0.001
Kárnagyság paramétere	μ	0.1	0.0975	0.25	0.00005
Kockázatelutasítás paramétere	r	0.09	0.05	0.09	0.00001

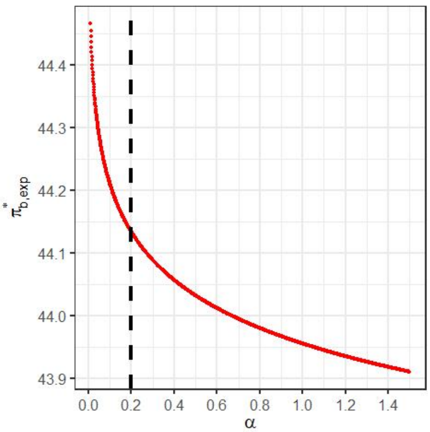
1. táblázat. Az érzékenységvizsgálathoz használt paraméterek

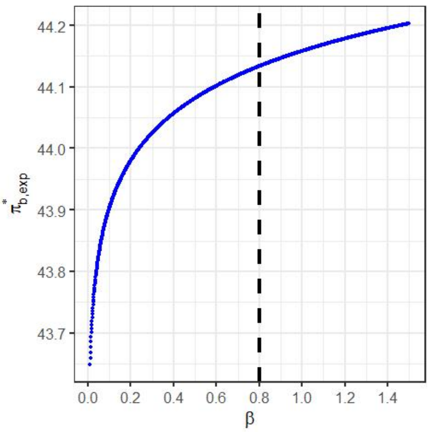
Az 1. táblázatban szereplő paraméterek közül a becsült darabszám ($\hat{m}$) végig változatlan fog maradni. A többi paraméter esetében az érzékenységvizsgálat során az adott paraméter fog csak megváltozni az adott *minimális érték* és *maximális érték* között a *lépésköznek* megfelelően, míg a többi paraméter változatlan marad a *kezdeti érték* szintjén. A lépésköz megválasztása egyfelől függ az érzékenységvizsgálat terjedelmétől (maximális és minimális érték különbsége), valamint az ábrákon való jobb szemléltetéstől (minél közelebb legyen egy folytonos görbéhez az adott grafikon). A minimális és maximális értékek szabadon lettek megválasztva, betartva néhány később részletezett kapcsolati viszonyt (vagyon nagyságának szerepe, paraméterértékek közelsége egymáshoz).

Az 1. ábrán ábrázoltuk az általánosított exponenciális hasznossági függvény α és β paramétereinek hatását a közömbös bruttó biztosítási díjra az 1. táblázatban lévő paraméterek mellett. Mindkét paraméter esetében a közömbös bruttó biztosítási díj változása arányaiban sokkal kisebb mértékű, mint a paraméter nagyságrendi változása. Láthatjuk, hogy az α paraméter növelése enyhe díjcsökkenést, míg a β paraméter növelése enyhe díjnövekedést jelent.

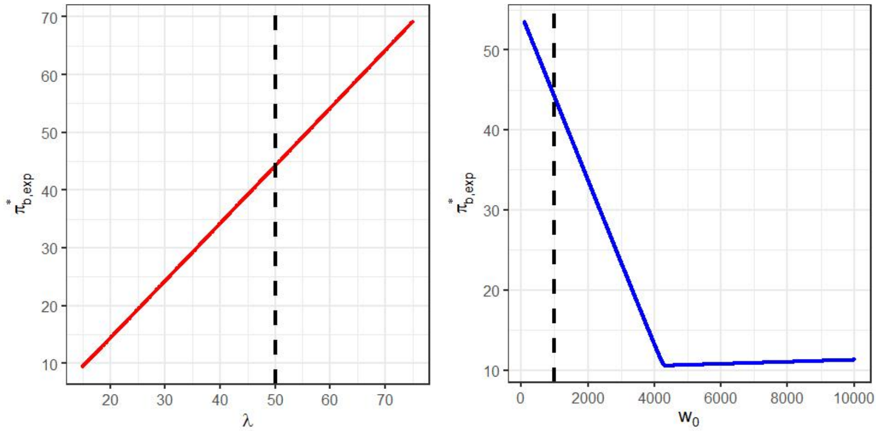
A 2. ábrán az állományi szintű kárszám növekedésével (rögzített szerződésszám mellett) természetesen a közömbös bruttó biztosítási díj is növekedni fog az egyensúly fenntartása érdekében.

A kezdeti vagyon változására a bruttó közömbös díj érzékeny, azonban kettős hatás látszódik. Amennyiben a kezdeti vagyon relatíve alacsony szintről folyamatosan emelkedik, úgy a bruttó díj közelít a $\frac{\lambda}{\mu} + c = \frac{0.5}{0.1} + 5 = 10$ értékhez, amely a várható érték elve alapján létrejövő bruttó biztosítási díj. Ez abból adódik, hogy „lényegében” az általánosított exponenciális függvényben ($u^{gexp}_{r,\alpha,\beta}(w) = \alpha w + \frac{\beta}{r}(1 - e^{-rw}) = \alpha w + \frac{\beta}{r} - \frac{\beta}{re^{rw}})$) egyre kevesebb súlyt kap az $\frac{\beta}{re^{rw}}$ tag, emiatt a közömbös bruttó díjra kapott megoldásunk némi eltéréssel közelíteni fog a várható érték elve alapján számolt 10 bruttó díjhoz. Azonban a többi paraméter értékétől függően egy vagyoni szint után egy újabb hatás kezd el érvényesülni. Ez akkor következik be, amikor a biztosítási díjnak fedeznie kell azon befektetési tevékenység után járó kamatot is, amely végül a biztosítási tevékenység űzése miatt mégsem került befektetésre.





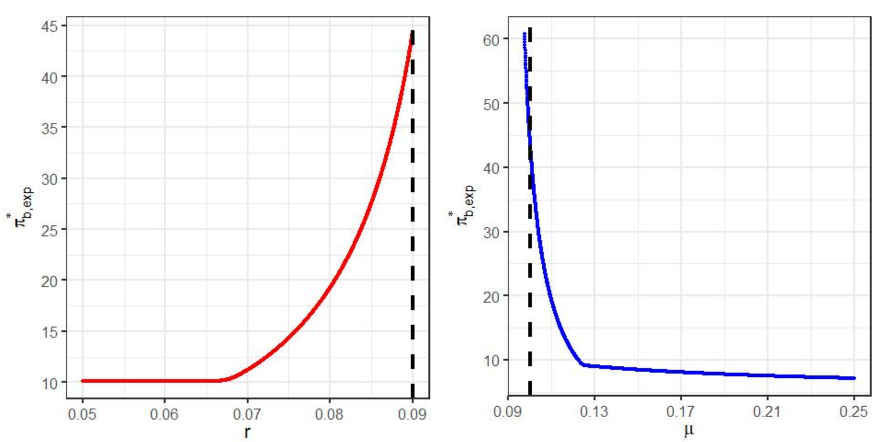
1. ábra. A közömbös bruttó biztosítási díj alakulása az α és β paraméter függvényében az 1. táblázatban szereplő értékek mellett – a paraméter *kezdeti értékét* függőleges szaggatott vonallal jelölve



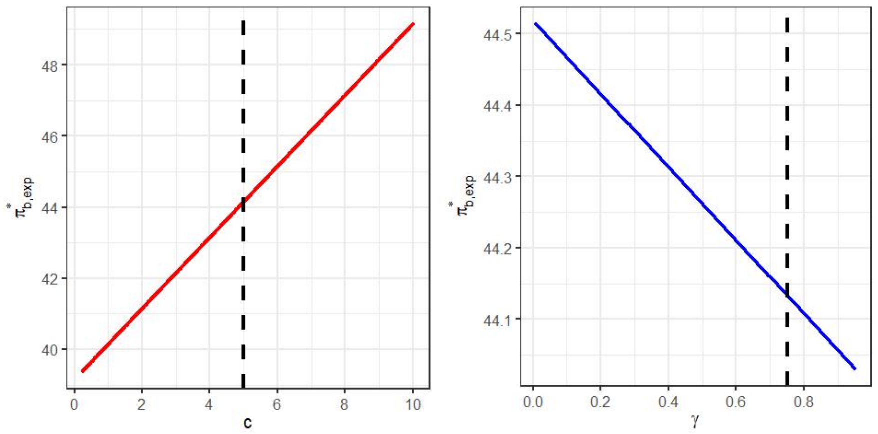
2. ábra. A közömbös bruttó biztosítási díj alakulása az állományi kárszám (λ) és a kezdeti vagyon (w_0) paraméter függvényében az 1. táblázatban szereplő értékek mellett – a paraméter *kezdeti értékét* függőleges szaggatott vonallal jelölve

A 3. ábrán láthatjuk a kockázatelutasítási (r) és a kárnagyságra (μ) vonatkozó paraméter hatását a minimális biztosítási díjra ceteris paribus. A μ esetében a paraméter növekedésével a várható kárnagyság összege folyamatosan csökken, emiatt nem meglepő a biztosítási díjat csökkentő hatás.

A kockázatelutasítási paraméter hatása ezzel ellentétes, azaz a paraméter növekedésével a biztosítási díj növekszik, kompenzálva a biztosítót a kockázat befogadásáért. Azt is láthatjuk, hogy a kárnagyságokra vonatkozó μ és a kockázatelutasítás r paraméter hatása nagyban függ a másik paraméter aktuális értékétől, ami az összetett Poisson-eloszlás momentumgeneráló függvénye miatt van: $\mathbb{E}[e^{rS}] = e^{\lambda(\frac{\mu}{\mu - r} - 1)}$.



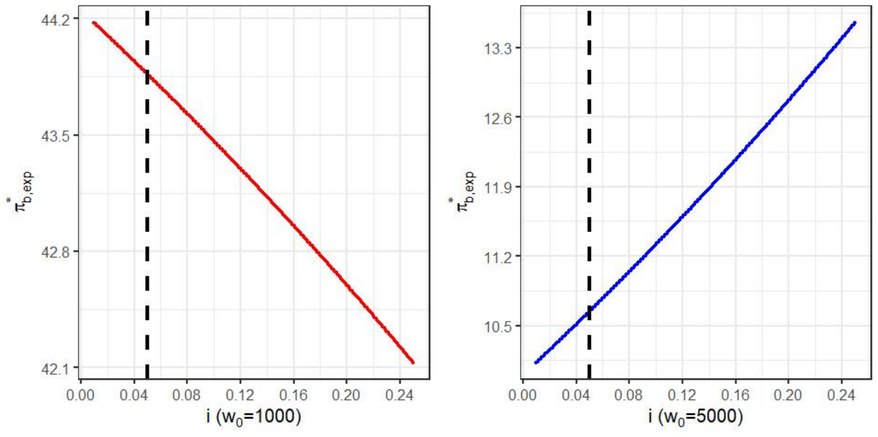
3. ábra. A közömbös bruttó biztosítási díj alakulása az kockázatelutasítási (r) és kárnagyságra vonatkozó (μ) paraméter függvényében az 1. táblázatban szereplő értékek mellett – a paraméter *kezdeti értékét* függőleges szaggatott vonallal jelölve



4. ábra. A közömbös bruttó biztosítási díj alakulása a költségre (c) és befektetési hányadra vonatkozó (γ) paraméter függvényében az 1. táblázatban szereplő értékek mellett – a paraméter *kezdeti értékét* függőleges szaggatott vonallal jelölve

A 4. ábrán az elvárásainknak megfelelően a közömbös bruttó díj növekszik, amennyiben a szerződéshez közvetlenül kapcsolódó változó költsége is nő a biztosítónak.

Amennyiben a befektetési hányad (γ) nő, úgy a biztosítási díj csökken. Ez azzal magyarázható, hogy a biztosítási helyett a befektetési tevékenység kezd dominálni, ami miatt a közömbös bruttó biztosítási díj kezd közelíteni a várható érték elv alapján számolt biztosítási díjhoz – mint azt már korábban láttuk a vagyoni szint hatása során.



5. ábra. A közömbös bruttó biztosítási díj alakulása a kamatlábra (i) vonatkozó paraméter függvényében az 1. táblázatban szereplő értékek mellett – a paraméter *kezdeti értékét* függőleges szaggatott vonallal jelölve. A bal oldali képen a kezdeti vagyon 1000, a jobb oldali képen pedig 5000 egység.

Az 5. ábrán a kamatláb hatását láthatjuk két különböző időszak eleji vagyonszint mellett. A kamatláb hatása hasonlóságot mutat az időszak eleji vagyonszintnél megfigyelt hatással. Amennyiben az adott paraméterek mellett az időszak eleji vagyonszint ,,relatíve kicsi", úgy a kamatláb növekedése csökkenő eredményt mutat, tartva a várható érték elve alapján kapható 10 egység bruttó díjhoz. Amennyiben az időszak eleji kezdeti vagyon ,,némelyest magasabb", úgy a kamatláb növekedése emeli a közömbös bruttó biztosítási díjat. Fontos hangsúlyoznunk, hogy a fentiek szerint az 1. táblázatban lévő paraméterek jelen értékei mellett az aktuális kezdeti vagyonszint nagyban befolyásolja a kamatláb hatásának nagyságát és irányát.

5 Összegzés

A cikkben bemutattunk egy újabb döntési mutatót annak érdekében, hogy a biztosító meg tudja állapítani azt az egyidőszakos minimális biztosítási díjat, amely mellett aktívan fog cselekedni a biztosítási piacon. Ehhez a biztosítási vagyoni helyzetét írtuk le úgy, hogy a károk kezelését összetett kockázati modell keretein belül oldottuk meg. Biztosításmatematika és közgazdaságtan határmezsgyéjén haladva sikerült meghatároznunk egy biztosítási díjformulát az általunk vizsgált elméleti környezetben, amelyhez Lambert-féle többértékű függvényt használtunk. Bár jelenlegi formájában a felvázolt modell inkább elméleti, próbáltunk némi útmutatást is adni alkalmazási célokra. Ezt kiegészítve érzekenységvizsgálatot végeztünk el, ismertetve az alkalmazás lehetséges kiindulópontját.

Technikai szempontból nem említettük meg, de az általunk használt összetett Poisson-eloszlású valószínűségi változó használata az összkárkifizetés modellezésére nemcsak összetett kockázati modell esetében működik, de egyedi kockázati modellre is alkalmazható közelítő megoldásként (Yang et al., 2005). Emellett másik előnye az összetett Poisson-eloszlás használatának, hogy a gyakorlatban nehezen védhető, károk függetlenségére vonatkozó feltételezést is lehet enyhíteni (Čekanavičius and Vellaisamy, 2015). Ezeket szem előtt tartva reméljük, hogy a bemutatott eljárással bővíteni tudtuk a biztosítási matematikus által használt díjkalkulációs lehetőségeket a gyakorlatban.

Köszönetnyilvánítás

A szerző ezúton szeretné megköszönni az ismeretlen lektornak a cikkhez kapcsolódó észrevételeit, továbbá Ágoston Kolos Csabának és Pintér Miklósnak a hasznos tanácsokat és megjegyzéseket.

Irodalom

1. Ágoston, K. C. (2015): Pricing of a Risk Averse Monopoly in the Presence of Stochastic Demand, *Theoretical Economics Letters,* 5(2), 217-224. DOI: https://doi.org/10.4236/tel.2015.52026

2. Čekanavičius V. and Vellaisamy P. (2015): Discrete approximations for sums of m-dependent random variables, arXiv: Statistics Theory. https://doi.org/10.48550/arXiv.1301.7196
3. Feller W. (1978): *An introduction to probability theory and its applications*, John Wiley & Sons.
4. Gerber H. U. and Pafum G. (1998): Utility Functions: From Risk Theory to Finance, *North American Actuarial Journal*, 2(3), 74–91. DOI: https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595728
5. Michaletzky Gy. (1995): *Kockázati folyamatok*, ELTE Eötvös Kiadó.
6. Pratt J. W. (1964): Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 32(1/2), 122-136. DOI: https://doi.org/10.2307/1913738
7. Raviv A. (1979): The Design of an Optimal Insurance Policy, *The American Economic Review*, 69(1), 84–96. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-015-7957-5_13
8. Rényi A. (1966): *Valószínűségszámítás*, Műszaki Könyvkiadó.
9. Ross S. M. (2014): *Introduction to Probability Models*, Academic Press.
10. Rothschild M. and Stiglitz J. (1976): Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information, *The Quarterly Journal of Economics*, 90(4), 629–649. DOI: https://doi.org/10.2307/1885326
11. Stiglitz J. E. (1977): Monopoly, Non-linear Pricing and Imperfect Information: The Insurance Market, *The Review of Economic Studies*, 44(3), 407–430. DOI: https://doi.org/10.2307/2296899
12. Veberic, D. (2010): *Having Fun with Lambert $W(x)$ Function*, arXiv preprint. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1003.1628
13. Verrall R. J. (1989): The individual risk model: a compound distribution, *Journal of the Institute of Actuaries*, 116(1), 101–107. DOI: https://doi.org/10.1017/S0020268100036465
14. Yang J., Zhou S. and Zhang Z. (2005): The compound Poisson random variable's approximation to the individual risk model, *Insurance: Mathematics and Economics*, 36(1), 57–77. DOI: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2004.10.003

Melléklet

Lambert-féle többértékű függvény

Mielőtt a közömbös bruttó biztosítási díjnak a létezését és az egyértelműségét bizonyítanánk be, szükségesnek érezzük az abban alkalmazott Lambert-féle többértékű függvényről is néhány szót ejtenünk. Általában egy adott $f(x) = c + x + e^x$ függvény zérushelyeinek megtalálása problémát okozhat nekünk a triviális esetektől eltekintve, ahol $c \in I\!R$ egy adott konstans. Ennek a függvénynek a zérushelyei azért fontosak számunkra, mivel a biztosító aktív és passzív biztosítási magatartás melletti várható vagyoni szintjei közötti különbséget fel lehet írni ebben a formában.

9. definíció. Tekintsük az $x = ye^y$ egyenletet, ahol $x, y \in I\!R$. A Lambert-féle többértékű függvény az előző egyenlet megoldását adja (inverz függvényként), azaz $W(x) = y$, vagy ezzel ekvivalens módon $x = W(x)e^{W(x)}$ alakban is felírhatjuk.

10. megjegyzés. A Lambert-féle többértékű függvénynek létezik általánosabb definíciója is, pontosabban a 9. definíciót ki lehet terjeszteni a komplex számok körére. Legyen v és z tetszőleges két komplex szám. Ekkor a $ve^v = z$ egyenlet akkor és csak akkor áll fenn, hogy ha tetszőleges $k \in \mathbf{Z}$ számra teljesül $v = W_k(z)$ is.

Esetünkben tudjuk, hogy a biztosítási díjnak egy nemnegatív valós számnak kell lennie, ezért számunkra elegendő a 9. definícióban szereplő egyszerűbb verziót használni a 10. megjegyzésben szereplő általánosabb fogalomtól.

Most nézzünk meg két példát a Lambert-féle többértékű függvény használatára. A 11. példában megmutatjuk, hogy egy adott problémát hogyan kell megoldani a valós számokra vonatkozó Lambert-féle többértékű függvénnyel. A 12. példa során láthatjuk, hogy már szükséges a 10. megjegyzésben szereplő általánosabb definíciót használnunk – azaz a valós számok körében már nem tudjuk megoldani a kezdeti problémánkat.

11. példa. Keressük meg az $f(x) = 5^x - 17x$ függvény zérushelyeit, amely tehát azt jelenti, hogy $5^x = 17x$ egyenlet megoldásait szeretnénk meghatározni. Ahhoz, hogy használni tudjuk a Lambert-féle többértékű függvényt, át kell rendeznünk az egyenletünket:

$$5^x = 17x \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{17x}{5^x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 17xe^{-x\ln 5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{17} = xe^{-x\ln 5}.$$

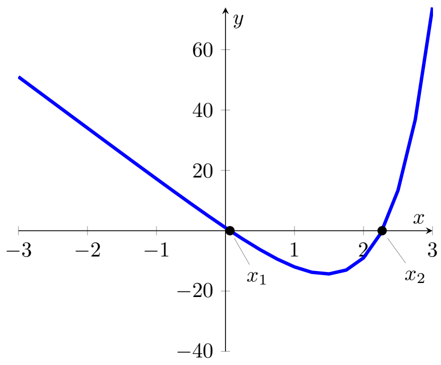
A célunkhoz közeledve bővítsük mindkét oldalt $(-\ln 5)$ mennyiséggel, azaz

$$\frac{1}{17} = xe^{-x\ln 5} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\ln 5}{17} = -x\ln 5\, e^{-x\ln 5} \quad \overset{*}{\Leftrightarrow} \quad W\left(-\frac{\ln 5}{17}\right) = -x\ln 5,$$

ahol a legutolsó $\overset{*}{\Leftrightarrow}$ lépésben felhasználtuk a Lambert-féle többértékű függvény definícióját. Ez alapján a megoldásunk

$$x = -\frac{W(-\frac{\ln 5}{17})}{\ln 5}.$$

Tekintve a 6. ábrára láthatjuk, hogy az eredeti $f(x) = 5^x - 17x$ függvényünknek 2 darab zérushelye is van: $x_1 \sim 0.06535$ és $x_2 \sim 2.26963$.



6. ábra. Az $f(x) = 5^x - 17x$ függvény grafikonja az $[-3, 3]$ intervallumon

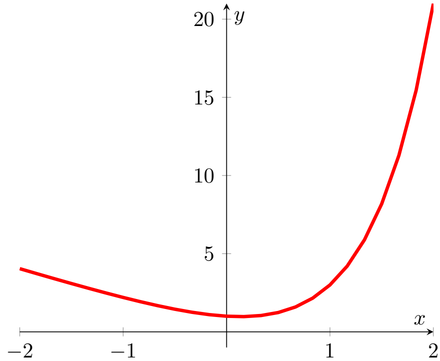
12. példa. Keressük meg a $g(x) = 5^x - 2x$ függvény zérushelyeit, amely tehát azt jelenti, hogy $5^x = 2x$ egyenlet megoldásait szeretnénk meghatározni. A megoldás menete ugyanaz, mint a 11. példa során. Azonban a megoldásunkat most már az alábbi alakban tudjuk felírni tetszőleges $k \in \mathbf{Z}$ szám esetén:

$$x = -\frac{W_k(-\frac{\ln 5}{2})}{\ln 5}.$$

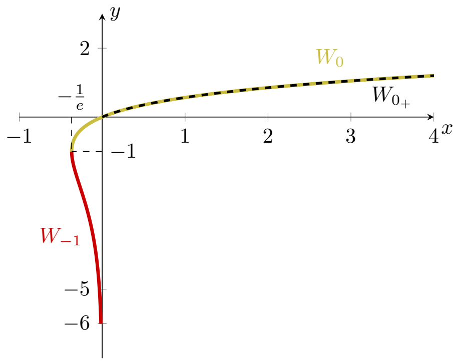
A 2. táblázat segítségével kiszámolhatunk néhány megoldást k függvényében. Lerajzolva a függvényünket, láthatjuk a 7. ábrán, hogy nem metszi az x-tengelyünket, így tényleg a Lambert-féle többértékű függvény általánosabb verzióját kellett használnunk a $g(x)$ függvény zérushelyeinek megállapításához – kilépve a valós számok köréből.

k	1	2	3	4	5
Re(y)	-2.2839	-2.8724	-3.2386	-3.5058	-3.7163
Im(y)	$+7.5606i$	$+13.9339i$	$+20.2619i$	$+26.5724i$	$+32.8742i$

2. táblázat. Az $y = W_k(-\frac{\ln 5}{2})$ kifejezés értéke $k = 1, 2, \ldots, 5$ esetében, külön soron tagolva a valós és képzetes részt



7. ábra. A $g(x) = 5^x - 2x$ függvény grafikonja a $[-2, 2]$ intervallumon



8. ábra. A Lambert-féle többértékű függvény ábrázolása, ahol W_0 jelöli a principális részt és W_{-1} az alsó részt. A kritikus választási pont W_{-1} és W_0 függvényágak között a $(-\frac{1}{e}, -1)$ helyen található. A W_{0_+} függvény jelöli a W_0 függvény megszorítását a $[0, \infty)$ tartományra. Látható, hogy $W_0(0) = W_{0_+}(0) = 0$ teljesül.

A 9. definícióban szándékosan használtuk a ,,többértékű függvény" megnevezést, mert valójában nem injektív az $x \mapsto xe^x$ hozzárendelés – ahogyan ezt láthatjuk a 8. ábrán, illetve a 11. példában is egy ilyen esetet néztünk meg. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a valós számokra vonatkozó Lambert-féle többértékű függvény principális részének a $[0, \infty)$ értelmezési tartományon megszorított ,,szeletét" nevezzük *Lambert-féle többértékű függvény főrészének*. Erre használjuk a W_{0_+} jelölést.

13. megjegyzés. Annak következtében, hogy a Lambert-féle többértékű függvény principális részének a nemnegatív ,,szeletét" (azaz W_{0_+} függvényt) használjuk a megoldásunk felírása során, a kapott megoldásunk egyértelmű lesz.

A közömbös biztosítási díj meghatározása általános esetben

Felhasználva az 5. feltevésünkben szereplő általánosított exponenciális hasznossági függvényt, a biztosító passzív cselekedete esetén az időszak végi várható hasznossága az alábbi lesz:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(W_{PB})] &= \mathbb{E}\Big[\alpha FV(w_0, i, 1) + \frac{\beta}{r}(1 - e^{-rFV(w_0,i,1)})\Big] = \\ &= \alpha FV(w_0, i, 1) + \frac{\beta}{r} - \frac{\beta}{r} e^{-rFV(w_0,i,1)},\end{aligned} \tag{4}$$

míg aktív magatartás esetén használva $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ jelölésünket:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(W_{AB})] = \mathbb{E}\Big[\alpha\big(FV(w_0, i, \gamma) + \hat{m}(\pi_b - c) - S\big) + \frac{\beta}{r}(1 - \\ - e^{-r(FV(w_0,i,\gamma)+\hat{m}(\pi_b-c)-S)})\Big] = \alpha FV(w_0, i, \gamma) + \alpha\hat{m}(\pi_b - c) - \\ - \alpha\mathbb{E}[S] + \frac{\beta}{r} - \frac{\beta}{r} e^{-r(FV(w_0,i,\gamma)+\hat{m}(\pi_b-c))}\mathbb{E}[e^{rS}].\end{aligned} \tag{5}$$

A (4) és (5) egyenletek alapján keressük meg először azt a π_b bruttó biztosítási díjat, amely mellett a biztosító közömbös a két magatartása mellett. Ehhez először tegyük egyenlővé a két lehetőség szerinti időszak végi várható hasznosságot:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(W_{PB})] &= \alpha FV(w_0,i,1) + \frac{\beta}{r} - \frac{\beta}{r}e^{-rFV(w_0,i,1)} = \\ &= \alpha FV(w_0,i,\gamma) + \alpha\hat{m}(\pi_b - c) - \alpha\mathbb{E}[S] + \frac{\beta}{r} - \\ &- \frac{\beta}{r}e^{-r(FV(w_0,i,\gamma)+\hat{m}(\pi_b-c))}\mathbb{E}[e^{rS}] = \mathbb{E}[u(W_{AB})]\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Mivel a (6) egyenletben a bruttó biztosítási díj a döntési változónk egyedül, ezért rendezzük eszerint a (6) egyenletet:

$$\begin{aligned}0 &= \alpha\hat{m}\pi_b - \frac{\beta}{r}e^{-r\hat{m}\pi_b}\big(e^{-r(FV(w_0,i,\gamma)-\hat{m}c)}\mathbb{E}[e^{rS}]\big) + \\ &+ \frac{\beta}{r}e^{-rFV(w_0,i,1)} + \alpha\big(FV(w_0,i,\gamma) - \hat{m}c - FV(w_0,i,1) - \mathbb{E}[S]\big) = \\ &= \alpha x - ge^{-rx} + A\,,\end{aligned} \tag{7}$$

ahol alkalmaztuk az $x := \hat{m}\pi_b$ és a 6. tétel előtt bevezetett jelöléseket.

14. állítás. *Tekintsük az $f(x) = A + \alpha x - ge^{-rx}$ függvényt, midőn az $\alpha > 0$ és $r > 0$ fennáll. Ekkor $f(x)$ függvénynek pontosan egy zérushelye van*

$$x^* = \frac{\alpha W_{0_+}(\frac{gr}{\alpha}e^{\frac{Ar}{\alpha}}) - Ar}{\alpha r},$$

ahol W_{0_+} a Lambert-féle W többértékű függvény principális részének a nemnegatív „szelete”.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy alkalmazni tudjuk a 9. definícióban szereplő Lambert-féle W „függvényt”, át kell alakítanunk az $A + \alpha x - ge^{-rx}$ kifejezést ue^u-t tartalmazó formára, ahol u lesz a segédváltozónk:

$$0 = A + \alpha x - ge^{-rx} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\alpha}{r}(\frac{Ar}{\alpha} + rx)e^{rx} = -g.$$

Vezessük be az $u = \frac{Ar}{\alpha} + rx$ segédváltozót, amelyből megkapjuk, hogy $x = \frac{\alpha u - Ar}{\alpha r}$. Először a kiemelést visszaalakítva, majd x helyére u-t behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}-g &= -\frac{\alpha}{r}(\frac{Ar}{\alpha} + rx)e^{rx} = (-A - \alpha x)e^{rx} = (-A - \alpha\frac{\alpha u - Ar}{\alpha r})e^{r\frac{\alpha u - Ar}{\alpha r}} = \\ &= (-A - \frac{\alpha u - Ar}{r})e^{\frac{\alpha u - Ar}{\alpha}} = (\frac{-Ar - \alpha u + Ar}{r})e^{(u - \frac{Ar}{\alpha})} = -\frac{\alpha}{r}ue^u e^{-\frac{Ar}{\alpha}},\end{aligned}$$

azaz

$$-g = -\frac{\alpha}{r}e^{-\frac{Ar}{\alpha}}ue^u \quad \Leftrightarrow \quad ue^u = \frac{gre^{\frac{Ar}{\alpha}}}{\alpha}.$$

Ennek alapján tudjuk, hogy a Lambert többértékű függvény főrésze miatt $u^* = W_{0_+}(\frac{gre^{\frac{Ar}{\alpha}}}{\alpha})$ definíció szerint megoldás, amelyet visszahelyettesítve eljutunk

$$x^* = \frac{\alpha u^* - Ar}{\alpha r} = \frac{\alpha W_{0_+}(\frac{gr}{\alpha}e^{\frac{Ar}{\alpha}}) - Ar}{\alpha r}$$

megoldáshoz. □

Összetett Poisson-eloszlás

A cikkben használtunk néhány speciális tulajdonságát az összetett Poisson-eloszlásnak, amit röviden szeretnénk összegyűjteni (Rényi, 1966; Feller, 1978; Ross, 2014).

15. állítás. Legyenek $X_1, \dots, X_N$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, valamint N tőlük független nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Készítsük el belőlük az $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ véletlen tagszámú összeget. Tegyük fel, hogy X_1 és N valószínűségi változók mindegyikének az első két momentuma véges. Ekkor $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$.

Bizonyítás. Az S várható értékét ki lehet számolni a teljes várható érték tétel segítségével, azaz a feltételes várható értéket véve a tagszámot meghatározó valószínűségi változó értéke szerint adódik, hogy

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[S|N=k]\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\sum_{j=1}^{k} X_j | N=k}_{\text{egymástól függetlenek}}\Big]\mathbb{P}(N=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{k} X_j\Big]\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[kX_1]\mathbb{P}(N=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{E}[X_1]\mathbb{P}(N=k) \stackrel{*}{=} \mathbb{E}[X_1]\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(N=k) = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N],$$

ahol $\stackrel{*}{=}$ lépésben ki lett használva a várható érték függetlensége az összegzéshez használt k indextől. □

Az S összkárkifizetés valószínűségi változónkat szeretnénk további tulajdonságok szerint jellemezni. Nézzük először a momentumgeneráló függvényét ($M_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}]$) $0 \leq t$ esetben az S véletlen tagszámú kárösszegnek. Azt rögtön látjuk, hogy ez a várható érték nem minden esetben lesz véges, hiszen a kárnagyságok nemnegatívak, ezáltal az összegük is nemnegatív lesz, t-ről pedig szintén feltettük, hogy nemnegatív. Ezt elkerülve tegyük fel, hogy S minden momentuma véges, amely jelen vizsgálatunk keretein belül (*csupán egyetlen időszakot tekintünk*) indokolható feltevés a biztosítási piacon.

16. állítás. *Legyenek $X_1, \dots, X_N$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, valamint N tőlük független nemnegatív egész értékű valószínűségi* *változó. Készítsük el belőlük az $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ véletlen tagszámú összeget. Tegyük fel, hogy S összes momentuma véges. Ekkor*

$$M_S(t) = g_N(\mathbb{E}[e^{tX_1}]) = g_N(M_{X_1}(t)),$$

ahol $g_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(N = k)$ a generátorfüggvénye az N valószínűségi változónak.

Bizonyítás. Megint csak a teljes várható érték tételére támaszkodva az összeadandók darabszáma szerint

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= \mathbb{E}[e^{tS}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{tS}|N = k]\mathbb{P}(N = k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\overbrace{e^{t\sum_{j=1}^{k} X_j}|N = k}^{\text{függetlenek}}\Big]\mathbb{P}(N = k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[e^{t\sum_{j=1}^{k} X_j}\Big]\mathbb{P}(N = k) \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}[e^{tX_j}]\Big)\mathbb{P}(N = k) \overset{**}{=} \\
&\overset{**}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[(e^{tX_1})^k]\mathbb{P}(N = k) \overset{***}{=} g_N(\mathbb{E}[e^{tX_1}]) = g_N(M_{X_1}(t)).
\end{aligned}$$

A $\overset{*}{=}$ lépésben kihasználtuk, hogy az exponenciális függvény kitevőjében összeg van, amit lehet szorzat alakjában is felírni. A szorzatban szereplő valószínűségi változók egymástól függetlenek, ezért a szorzat várható értéke nem más, mint a várható értékek szorzata.

A $\overset{**}{=}$ egyenlőség azért áll fenn, mert azonos eloszlású valószínűségi változók szerepelnek a szorzatban, ezért mindegyik tényező ugyanaz. Így tehát fel lehet írni hatványozás formájában a szorzatot.

Végezetül pedig a $\overset{***}{=}$ esetében egyszerűen adódik az átalakítás – felhasználva a generátorfüggvény definícióját rögzített t mellett. □

17. következmény. A 16. állítás bizonyításához hasonlóan belátható, hogy az S karakterisztikus függvénye

$$\varphi_S(t) = \mathbb{E}[e^{itS}] = g_N(\mathbb{E}[e^{itX_1}]) = g_N(\varphi_{X_1}(t)),$$

Laplace-transzformáltja pedig

$$\mathcal{L}_S(t) = \mathbb{E}[e^{-tS}] = g_N(\mathbb{E}[e^{-tX_1}]) = g_N(\mathcal{L}_{X_1}(t)).$$

18. definíció. Legyenek $X_1, \ldots, X_N$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, valamint N tőlük független, λ-intenzitású valószínűségi változó. Készítsük el belőlük az $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ véletlen tagszámú összeget. Jelöljük X_1 valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F(x)$ módon. Ekkor S eloszlását $(\lambda, F(x))$ paraméterrel rendelkező *összetett Poisson-eloszlás*nak nevezzük.

19. lemma. *Legyen N valószínűségi változó λ-intenzitású Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Ekkor momentumgeneráló függvénye $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, a generátorfüggvény pedig $g_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a Maclaurin-sorfejtés alapján $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Felhasználva az azonosságot, a momentumgeneráló függvény esetében kapjuk, hogy

$$M_N(t) = \mathbb{E}[e^{tN}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Hasonlóan, a generátorfüggvényre pedig

$$g_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{-\lambda+\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

□

A későbbiekben szükségünk lesz az exponenciális eloszlás momentumgeneráló függvényére a kárnagyságok viselkedésének elemzésére, ezért most kiszámoljuk.

20. lemma. *Legyen X valószínűségi változó μ paraméterrel rendelkező exponenciális eloszlású. Ekkor a momentumgeneráló függvénye a $t < \mu$ esetben*

$$M_X(t) = \frac{\mu}{\mu - t}.$$

Bizonyítás. Használva a momentumgeneráló függvény definícióját kapjuk az eredményt:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \mu e^{-\mu x}\, dx =$$
$$= \mu \int_0^{\infty} e^{(t-\mu)y}\, dy = \frac{\mu}{t-\mu} \big[e^{(t-\mu)y}\big]_0^{\infty} = \frac{\mu}{\mu - t}\,.$$

□

21. megjegyzés. Az exponenciális függvény momentumgeneráló függvényét egyszerűbb alakra is lehet hozni bizonyos esetekben, felhasználva a végtelen mértani sor összegképletét. Legyen $t < \mu$ és $\mid \frac{t}{\mu} \mid < 1$, ekkor

$$M_X(t) = \frac{\mu}{\mu - t} = \frac{1}{1 - \frac{t}{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} t^n.$$

A momentumgeneráló függvény definíciója szerint szintén sorfejtést alkalmazva

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!} t^n\,.$$

Ekkor $t = 0$ pontban

$$\frac{d^n M_X(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n] = \frac{n!}{\mu^n},$$

amely csak a várható érték kiszámítása miatt kellett: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\mu}$.

A szakirodalomban a biztosító kockázatelutasítási paraméter 1-nél kisebb szám jellemzően, ezért most kiszámoljuk az $Y = e^{aX}$ valószínűségi változó várható értékét, ahol X exponenciális eloszlású μ paraméterrel. Mivel a 20. lemma esetében sehol sem használtuk fel, hogy r egész szám, ezért $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[e^{aX}] = \frac{\mu}{\mu - a}$ igaz marad $\mu > a > 0$ esetben is.

Most nézzük meg, az összetett Poisson-eloszlású valószínűségi változók összegéről mit tudunk mondani. A későbbiekben csak arra szeretnénk használni a 22. lemmát, hogy kezelni tudjuk a különböző ügyfelek különböző kárbejelentéseit (minden ügyfélnek tehát egyedi összetett Poisson-eloszlású kárösszege van).

22. lemma. *Legyenek $S_1, S_2, \ldots, S_l$ független valószínűségi változók, ahol S_i valószínűségi változó $(\lambda_i, F_i(x))$ paraméterrel rendelkező összetett Poisson-eloszlású. Legyen $\lambda = \sum_{i=1}^l \lambda_i$ és $F(x) = \sum_{i=1}^l \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)$. Ekkor $S = \sum_{i=1}^l S_i$ valószínűségi változó $(\lambda, F(x))$ paraméterrel rendelkező összetett Poisson-eloszlású valószínűségi változó lesz.*

Bizonyítás. Alkalmazva a 16. állításban kapott momentumgeneráló függvényre vonatkozó eredményünket, és felhasználva a 19. lemmát kapjuk, hogy tetszőleges i-edik összetett Poisson-eloszlású valószínűségi változó esetében a momentumgeneráló függvény:

$$M_{S_i}(t) = \mathbb{E}[e^{tS_i}] = g_N(M_{X_{1,i}}(t)) = e^{\lambda_i(M_{X_{1,i}}(t)-1)}. \tag{8}$$

A 16. állítás bizonyítását megismételve

$$M_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum\limits_{i=1}^{l} S_i}\right] = \prod_{i=1}^{l} \mathbb{E}\left[e^{tS_i}\right] = \prod_{i=1}^{l} M_{S_i}(t) =$$

$$= \prod_{i=1}^{l} e^{\lambda_i(M_{X_{1,i}}(t)-1)} = e^{\sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i(M_{X_{1,i}}(t)-1)} = e^{\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{l} \frac{\lambda_i}{\lambda} M_{X_{1,i}}(t)-1\right)}.$$

Láthatjuk tehát, hogy S momentumgeneráló függvénye hasonló alakú, mint S_i összetett Poisson-eloszlású valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye. S tehát összetett Poisson-eloszlású valószínűségi változó ($\lambda = \sum_{i=1}^l \lambda_i$, $F(x) = \sum_{i=1}^l \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)$) paraméterek mellett. □

DETERMINING THE INSURANCE PREMIUM FOR THE GENERALIZED EXPONENTIAL UTILITY FUNCTION IN THE COLLECTIVE RISK MODEL

In this article, we investigate the determination of insurance premium in the collective risk model taking into account economic aspects. To conduct such research, we borrow well-known tools from utility theory and probability theory. The initial analyses in the literature (Rothschild and Stiglitz, 1976; Stiglitz, 1977) focused mainly on examining different effects (information asymmetry, market behavior). Instead, we focus on the calculation of insurance premiums, for which we can also find many examples in the literature. We wish to emphasize that our one-period model has many simplifications in terms of opportunities for expansion, which we will give some ideas to solve. The first option involves choosing between the individual risk model and the collective risk model in which the nature of the insurance product helps. In the case of the individual risk model, the existence of a claim to the policy is of interest to the insurer (e.g., due to the fixed amount insured). On the contrary, when it comes to the collective risk model, the number of claims is also interesting. In Verrall (1989) article we shall find a possible mathematical treatment of the individual risk model, moreover, it also supplements both approaches to the different risk models by describing similarities and pathways. Because of the greater possibility of application, we use the collective risk model, but we assume that the various claims events are independent of each other. The second expansion option is also to allow insurance companies to carry out investment activities, that is, insurance companies should not necessarily transfer all their assets to insurance businesses. Of course, compared to daily practice, we simplify taking into account investment activity in our analysis. Numerical analyzes in this article also reflect this fact. We want to draw the attention to the fact that insurance companies need to apply different regulations in their investment policy in order to be able to impose this simplification. Additionally, our primary goal remains to determine insurance premiums in a broadly acceptable setting. Our third extension in this article is cost introduction. One of the simplest choices could be the direct cost variable associated with the insurance contract we are working on. We do not use fixed costs as we primarily focus on calculating premiums for a single period.

Finally, contrary to the possibilities of expansion so far, it is not the insurance company's financial trajectory that we want to further refine its characterization but rather its valuation. Throughout the article, we assume that the insurance company's only decision variable is the insurance premium. Therefore, our job is to find out the insurance premium level at which an insurer enters the insurance market. When solving a problem, we focus on the expected utility level rather than the expected value level. Much more important is the introduction of the risk attitude and measure by Pratt (1964), where we also find some calculations for specific utility functions. The generalized exponential utility function is presented as a combination of two possible evaluation methods. Therefore, it can manage both standard approaches based on expected value and risk aversion nature.

The model described in this article is currently more theoretical than applied, but we believe that it can be developed relatively easily by a particular insurer. We introduce a new metric to add to standard measures (such as the ratio of return) that may be a bit more complex, but in addition to standard measures (such as rate of return), insurance premiums can be determined. The determination of optimal premiums differs from other economic methods because of the use of collective risk models and generalized exponential utility functions. We managed to write a premium formula using the Lambert W function whose main field of application is not exactly the solution of microeconomic problems.